Publié dans Travaux du Centre de Recherches Sémiologiques 63, 149-160, 1995,
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

DES VARIABLES AUX OBJETS ARBITRAIRES

Frédéric Nef

Dans ce qui suit je m'intéresserai à un aspect limité des relations entre logique et raisonnement la formalisation du raisonnement sur des objets généraux[1], quelconques ou universels et plus exactement à ce qui concerne d'une part les problèmes que pose la formalisation de l'expression de ces raisonnements en langue naturelle et d'autre part à ce qui dans l'ontologie de la variable concerne les problèmes quantificationnels

Le problème des objets généraux se pose à propos du raisonnement mathématique, de l'ontologie de la variable, notamment à propos de l'interprétation sémantique de la déduction naturelle.

Il est difficile de répondre à la question suivante d'un élève: «Quelle est la différence entre "soit un triangle ABC quelconque, la somme de ses angles est égale à deux droits" et "tous les triangles ont la somme de leurs angles égales à deux droits"?» C'est une difficulté analogue à celle, connue des linguistes, de la différence sémantique entre *any* et *all* ou en français entre *n'importe lequel* et *tous*:

Tous les chiens aboient
N'importe quel chien aboie

Une réponse consiste à affirmer que l'expression «un triangle ABC quelconque» dénote un "objet général", un triangle qui n'est ni rectangle, ni isocèle etc. c'est-à-dire qui contient seulement la propriété que l'on entend souligner ici, celle d'avoir la

1 Ici "objets généraux" est empolyé de façon neutre, sans nous engager dans le débat que nous décrirons plus bas sur leur admissibilité dans la sélmantique et la métaphysique.

somme de ses angles égale à deux droits, alors que dans «tous les triangles, etc.» «tous les triangles» dénoterait l'ensemble des triangles qui possèdent distributivement la propriété en question. K. Fine fait remarquer que dans le raisonnement

«(i) Prenons un triangle quelconque ABC, la somme de ses angles est égale à deux droits.
(ii) Tous les triangles ont la somme de leurs angles égale à deux droits».

Il manque une prémisse intermédiaire:

«(iii) Ce que nous affirmerons de ABC nous pouvons l'affirmer de tout triangle».

Le problème que nous allons discuter est presque entièrement contenu dans cet exemple élémentaire et dans un autre encore plus élémentaire: «Que désigne la variable "x" dans le calcul?» Ces deux problèmes sont liés, car la réponse en termes d'objet général à la question sur le triangle quelconque et très proche de la réponse en termes d'individus variables à la question sur la dénotation de la variable. Elles ont au moins en commun de diverger de l'interprétation classique en termes de classes universelles, qu'il s'agisse de classes d'objets définies intensionnellement par une propriété ou de domaines non restreints de quantification, mis à part le fait que d'une manière moins négative les concepts d'objet indéterminé et d'objet général possèdent de nombreuses affinités.

1. Frege et la critique des objets indéterminés

Frege dans sa critique du mathématicien Czuber examine ce qu'il juge être les incohérences du concept d'objet indéterminé[2]
Cette critique est développée avant 1903 (1983: 174-175) et reprise en 1904 dans *Qu'est-ce qu'une fonction?* Czuber affirme

2 Cette critique a été anticipée par celle que Bolzano adresse dans les *Paradoxes de l'Infini* à la conception de l'infini comme une grandeur variable (op. cit. § 12).

que sous une variable réelle dans le calcul on entend un nombre indéterminé. C'est ce concept précisément que Frege juge incohérent. En effet il souligne qu'il est problématique d'appliquer les règles de l'arithmétique aux nombres indéterminés: «Peut-on additionner un nombre indéterminé à un nombre déterminé et comment fait-on?» (1983: 175). Frege se demande en 1904 si «tout objet ne doit pas être déterminé» (question à laquelle on le sait Meinong a répondu par la négative avec sa théorie des objets défectifs) et propose d'évacuer ce concept, d'une part par l'analyse des énoncés avec variable, d'autre part par une analyse de "indéterminé" dans "nombre indéterminé". Dans le texte *Logische Mängel in der Mathematik* Frege souligne qu'il s'agit dans cette affaire de la «différence entre nombre variable et constante» et dans le texte *Was ist eine Funktion*? il propose d'analyser un énoncé tel que «si le n est un nombre entier, cos $n\pi = 1$» comme un énoncé conditionnel où "n" n'est pas le nombre d'un nombre mais «est écrit avec une intention de généralité» (1971: 163). Dans l'énoncé ci-dessus la confusion proviendrait de se demander quelle est la dénotation de "n" à propos seulement de l'expression «le n est un nombre entier», en prenant "n" comme le nom propre d'un nombre, au lieu de considérer cette assertion (de «n» comme un nombre entier) en tant que ce qu'elle est, conditionnelle. Frege de plus déplace le modificateur «indéterminé» (dans «nombre indéterminé») vers la représentation. C'est la représentation du nombre qui serait indéterminée. Ou plus exactement "n" «indiquerait de façon indéterminée des nombres» (1971: 163).

On peut remarquer que la critique frégéenne repose sur un certain nombre de confusions. Il est très facile de dire comment on additionne un nombre indéterminé et un nombre déterminé. C'est précisément ce que l'on fait quand on écrit par exemple «x+ 2». «x+2» est indéterminé quand "x" n'a pas de valeur, et «x+2» est déterminé quand "x" a une valeur par exemple "1": $1 + 2 = 3$! Viendrait-il à l'esprit de juger cette suite de symboles incohérente pour la raison qu'on écrit le signe d'addition entre une constante et une variable? L'argument sur la forme conditionnelle des énoncés avec variables («si n est un nombre entier», etc.) est assez obscur. Il semble en effet que le fait de dire que "n" indique des nombres et non un nombre indéterminé est indépendant de la forme conditionnelle de l'assertion. Frege pense ici à la forme conditionnelle des énoncés quantifiés universellement: «(x) si x est un nombre, alors x a la propriété P». Cependant dans l'énoncé analysé par Frege "n" est une variable sortale — "n" est un objet de la sorte «nombre». Tout ceci obscurcit le propos de Frege. La manière de s'exprimer de Czuber est certainement fautive — "n" ne dénote pas (Frege dirait «n'indique pas» puisque pour lui ceci impliquerait que "n" soit un nom propre) un nombre indéterminé au sens où effectivement cette expression consiste à transposer dans l'objet l'indétermination de l'accès à l'objet, mais la solution proposée par Frege n'est guère plus satisfaisante puisqu'elle revient à dire que "n" indique de façon déterminée des nombres, sans indiquer précisément lesquels, sans préciser le mécanisme d'indication.

2. Critique des objets généraux par Lesniewski

Lesniewski se situe dans la ligne de la critique husserlienne de l'idée générale de Locke (Husserl 1913). La critique de Husserl ne contient rien de plus qu'une variante connue de l'argument classique de Berkeley (1991). Ce dernier déclarait absurde l'idée d'un triangle général qui contiendrait nécessairement des propriétés contradictoires, alors que Husserl affirme absurde l'idée «d'un triangle qui ne serait ni rectangle, ni acutangle, etc.» (1913; trad. fr. 1959-63: 159). L'argument de Berkeley sous sa forme qu'on appellerait conjonctive est donc la suivante: si "a" est un objet général appartenant à une classe "c" d'objets, alors "a" possède toutes les propriétés des objets de "c" et étant donné que les objets de "c" possèdent des propriétés contradictoires "a" ne peut être un objet puisqu'un objet ne peut posséder des propriétés contradictoires. Cette dernière thèse est une application du principe de contradiction sous sa version que Lukasiewicz appelle "ontologique" (1910). L'argument de Husserl, qui est l'argument de Berkeley sous une forme disjonctive et qui aboutit à une violation non du principe de contradiction, mais du principe du tiers exclu, est le suivant: "a" pour ne pas posséder des propriétés contradictoires des objets de "c" doit pour ces propriétés ne pas les posséder. Si un objet de "c" a les propriétés "P" et "non P", "a" doit posséder ni "P" ni "non P". L'objet "a" contrevient alors au principe du tiers exclu, sous sa forme ontologique et comme tout objet doit y obéir, "a" n'est pas un objet. On peut noter que Meinong aurait accepté les premiers types d'objets, ceux violant le principe de contradiction, nécessairement non existants et non subsistants, objets contradictoires comme le «cercle carré», et également les seconds ceux violant le principe du tiers exclu, les nommant objets incomplets. L'argumentation de Lesniewski qui se situe dans la ligne de l'argument anti-objet général sous sa forme disjonctive s'en prend nécessairement au principe du tiers exclu. L'originalité de la position de Lesniewski est à la fois de rejeter les objets généraux, comme Berkeley ou Husserl, mais sans s'appuyer comme ce dernier sur le principe du tiers exclu qu'il rejette également — d'où l'intérêt de sa théorie.

L'argumentation de Lesniewski est la suivante[3]. Soit "a" un objet général et "o1", "o2", ... les objets individuels de la classe "c" à laquelle "a" appartient, pour tout objet "o" on peut trouver une propriété "P" qui n'est pas commune à tous les objets de "c". "a" ne peut pas posséder "P" (par exemple si "c" est la classe des triangles, "a" ne peut pas posséder la propriété "rectangle" car certains triangles ne sont pas rectangles). Un objet individuel "o" possédant la propriété "P" ne possède pas la propriété de ne pas posséder "P". Cette propriété (celle ne pas posséder "P") appelons-la "P*". "P*" n'est pas commune à tous les objets de "c". Si elle n'est pas commune à tous les objets de "c" alors "a" ne peut la posséder (puisqu'il doit posséder les propriétés communes à tous les objets de "c"). Si "a" ne possède pas "p*" alors il possède "p" et donc il n'est pas général. Ce raisonnement repose sur le principe du tiers exclu ("a" doit possé-

3 Je modifie la notation de Lesniewski, notant "a" l'objet général, tout comme l'objet arbitraire. Cf. infra.

der "p" ou "p*" qui sont contradictoires). Il repose donc sur l'idée que pour toute propriété "p", "a" doit la posséder ou pas.

On peut distinguer ici, à la suite de Meinong deux types de négation, la première du type «"a" ne possède pas "p"», la seconde du type «il n'est pas le cas que "a" possède "p"»; la première implique (par le principe du tiers exclu) «"a" possède "non P"», alors que la seconde ne l'implique nullement — cela n'a aucun sens d'affirmer que "a" possède ou pas "p". Seule la première négation est soumise au principe du tiers exclu. La critique de Lesniewski repose donc sur une conception trop étroite de l'objet et de la négation.

On peut reprendre à nouveaux frais le problème des objets généraux, à partir d'une sémantique de la déduction naturelle, notamment une interprétation de l'instanciation existentielle et de la généralisation universelle. C'est ce qu'a réalisé K. Fine (1985) en proposant une sémantique en termes d'objets arbitraires.

3. Déduction naturelle et objet arbitraire

La sémantique de la déduction naturelle quand elle est exposée à des étudiants bute classiquement sur le problème suivant: comment garantir l'innocuité de la dérivation dans la généralisation universelle (GU) et l'instanciation existentielle (IE)?

Nous noterons, à la suite de K. Fine (1985: 147):

GU $\phi a \,/\, (x)\, \phi x$
IE $Ex\, \phi x \,/\, \phi a$

où "a" désigne un objet arbitraire («*A-object*»). On peut remarquer que la relation entre "a" et l'objet arbitraire n'est pas analysée chez K. Fine. Frege distinguait "indication" et "désignation", réservant la seconde de ces relations aux véritables noms propres, déniant que la variable soit le nom propre d'un objet. Pour Frege la variable n'était que la trace d'une place vide saturable par un objet d'un ensemble donné. K. Fine distingue deux types de variables "i" pour les objets individuels

(«*I-object*») et "a" donc pour les objets arbitraires. L'ensemble des objets individuels est disjoint de l'ensemble des objets arbitraires (1985: 23).

Cette sémantique en termes d'objets arbitraires est censée être plus proche du raisonnement impliquant généralité ou généricité. Certains pièges de tels raisonnements sont apparemment faciles à éviter. Par exemple l'inférence (Gochet & Gribomont 1991: 205):

Px / (x) Pair x

n'est pas valide car «il n'est pas vrai que n'*importe quel* x soit pair» (*op. cit.*: 205). On est donc dans un cas où l'on ne peut pas passer de «un quelconque n est P» à «n'importe quel n est P», c'est-à-dire de *un quelconque* à *n'importe quel*. Cependant si Px reçoit le statut de supposition on ne peut éviter l'inférence:

$$Px \vdash (x)Px$$
$$\vdash Px \rightarrow (x)\,Px$$

en vertu de la dérivation suivante:

$$(x)(Px \rightarrow Px)$$
$$(x)\,(Px \rightarrow Px)$$
$$ExPx \rightarrow (x)Px$$

la dernière inférence étant manifestement fausse (*op. cit.*: 206) (ce n'est pas parce qu'il existe un x pair que tout x est pair). Stoll distingue deux interprétations de la variable: l'une conditionnelle où de fait la variable a le statut de constante, l'autre générique (cité in *op. cit.*: 206). L'erreur proviendrait dans la dérivation ci-dessus du passage d'une interprétation générique à une interprétation conditionnelle. Gochet et Gribomont déclarent donc justement: «La règle GU est correcte pour autant que la variable généralisée (...) soit prise dans l'interprétation générique»[4] (1991). C'est précisément en ce point qu'intervient l'interprétation de K. Fine: il admet un corrélât ontologique de la "variable généralisée", l'objet arbitraire, là où Hilbert introduisait, à côté du i-opérateur, un τ-opérateur, i.e. un opérateur de généricité, tel que "τx Fx" (signifiant: «pour un x quelconque du domaine de quantification x possède la propriété F») implique "(x)Fx". Nous laisserons de côté la solution de Hilbert pour le traitement de la généricité.

Les objets arbitraires peuvent donc être utilisés pour des règles de déduction naturelle problématiques, comme EI ou UG. Examinons la sémantique de la généralisation universelle dans le système de déduction naturelle de Quine (cf. Fine: 91-92). La formule "Fa → (x)Fx" n'est pas valide pour un objet arbitraire non restreint (rappelez-vous l'exemple ci-dessus de n pair). «Qu'est-ce qu'il faut pour rendre cette formule vraie?», se demande K. Fine. Sa réponse est la suivante:

> La justification intuitive de la règle UG dans le système de Quine n'est pas que toute chose doit F-er si l'individu arbitraire F-e, mais que toute chose doit F-er même si le contre-exemple arbitraire à la généralisation (x)Fx F-e (91).

Il faut donc penser l'objet arbitraire comme "un contre-exemple potentiel à la formule (x) Fx".

Cette façon de voir les choses résout-elle la difficulté inhérente à l'interprétation de UG? Que signifie vraiment cette règle? Qu'on peut extraire au hasard dans le domaine de quantification de (x)Fx un individu "a" à l'aide d'une propriété F, et que si "a" est réellement pris au hasard, la propriété F est possédée de tout individu du domaine de quantification, ce qu'exprime la formule. Mais ne s'agit-il pas d'un tour de passe-passe? En effet la GÉNÉRALITÉ de la formule (x) Fx est introduite subrepticement dans la GÉNÉRICITÉ de "a". N. Rescher dans *Can there be random individuals?* avait soutenu, en 1958,

---

4 Ces auteurs distinguent donc aussi deux tyeps de variables. Ils n'expliquent pas la nature d'une "variable généralisée".

l'absurdité d'une interprétation de Copi à propos précisément de UG, interprétation de l'antécédent en termes d'individu aléatoire (*random individual* ou *randomly selected individual*). Il déclarait notamment: «rien ne peut être dit d'un individu aléatoire qui n'est pas dit au sujet de TOUS les individus du domaine de discours» (*ibid.*). Mais précisément ce qui est affirmé d'un objet arbitraire est ce qui peut être affirmé des individus réels dont il dépend. L'objet arbitraire "triangle" (le "triangle quelconque") dépend des individus réels (les "triangles particuliers"): sans ces derniers il n'y aurait pas d'objet arbitraire. Une variable d'individu ("x, y, ...") désigne n'importe quel individu d'une classe ou au moins un individu d'une classe d'après le quantificateur qui la lie, mais la variable d'objet arbitraire ("a") n'est pas liée par un quantificateur, elle dépend directement des individus de la classe. Si la variable d'individu tient lieu d'individu, la variable d'objet arbitraire ne tient pas lieu d'objet arbitraire, elle ne le désigne que le temps que cet objet soit occupé par la variable.

4. Un raisonnement sur un objet arbitraire n'est pas un raisonnement arbitraire

Reprenons la règle UG: Fa/ (x)Fx, en acceptant avec K. Fine qu'elle «correspond aux procédures du raisonnement ordinaire» (127). Ce que nous venons d'affirmer peut être illustré par un nouvel examen du raisonnement:

« (i) Soit ABC un triangle
(ii) (un triangle) quelconque,
(iii) la somme de ses angles est égale à 2D.
(iv) Ce que nous affirmons de ABC peut être affirmé de tout triangle.
(v) Tout triangle a la somme de ses angles égale à 2D».

Le moment (iv), comme le souligne K. Fine (80)[5], est absolument nécessaire. En suivant Fine, il peut aussi être formulé

5 K. Fine ne distingue pas comme nous les moments (i) et (ii). Il semble nécessaire de le faire pour des raisons qui vont apparaître.

ainsi: «ABC peut être n'importe lequel des triangles que nous choisissons». Le moment (i) est celui où nous considérons un triangle individuel, par exemple dans un diagramme qui forcément l'individualise. On peut comparer ce moment avec celui où nous traçons une variable au tableau — la trace de craie qui matérialise un "x" n'est jamais la même, mais nous faisons abstraction des différences de réalisation de la variable (par exemple la couleur de la craie) pour nous attacher à sa constance dans la dénotation. Le fait de dire "un triangle quelconque" véhicule l'instruction "ne prêtez pas attention à ce qui individualise ce triangle", instruction similaire à celle qui est implicitement contenue dans le fait d'écrire une variable. Dans le moment (ii) on pose la propriété que nous attribuons à cet objet désindividualisé dont on a seulement affirmé qu'il était un triangle. Donc on commence par poser un individu en chair et en os, puis on le vide de toute chair et on garde le squelette. Dans le moment (iii) on attribue une propriété du triangle particulier au triangle quelconque. (iv) découle de (ii), mais il faut (iv) pour affirmer (v). Qu'avons-nous fait? Nous avons construit un objet générique ou arbitraire dépendant d'un objet particulier, puis nous avons brisé cette dépendance et ce que nous avons affirmé de l'objet particulier dont l'objet arbitraire dépendait, nous avons pu alors l'affirmer de tous les objets de la classe qui nous intéressait. Nous avons opéré une inférence à partir d'un seul objet non pas un objet particulier mais générique — c'est une induction (une abduction?) du générique à l'universel. Ce qui précède est au mieux une esquisse de description rapide du raisonnement informel sur des objets arbitraires, description qui met en lumière les difficultés plus qu'elle ne les résout: comment fait-on la différence entre cette propriété qui appartient à l'objet arbitraire, ou plus généralement celles qui peuvent lui appartenir, et celles qui ne lui appartiennent pas, ou plus généralement ne peuvent pas lui appartenir? Cette différence entre propriétés prédicables de l'objet arbitraire et celles non prédicables ne recouvre-t-elle pas strictement celle entre propriétés universelles et non universelles? Si c'est le cas, n'avons-nous pas introduit au départ de la déduction ce que nous trouvons à l'arrivée? Cela n'implique-t-il pas que certaines règles de la déduction naturelle ne sont que des explicitations? En quoi consiste alors leur caractère normatif?

Les raisons avancées pour rejeter les objets arbitraires ne sont pas bonnes. La distinction de deux types de négation, le rapprochement avec les objets incomplets leur assurent un statut honorable. Cependant on peut douter de leur pouvoir explicatif en ce qui concerne la règle de généralisation universelle. Celle-ci conserve son caractère problématique. L'introduction des objets arbitraires semble au départ pouvoir remédier aux défauts de la théorie classique de la quantification appliquée au raisonnement mathématique, dont on a souvent montré les limitations, mais cet espoir doit être dans une certaine mesure tempéré. De plus le doute sérieux que l'on peut avoir pour UG a été aggravé. S'il y a une utilité de la sémantique générique (i.e. avec des objets arbitraires) c'est peut-être de révéler toute la difficulté du passage du générique au général, mais il s'agit là d'une utilité négative et marginale.

Institut de philosophie
Université de Rennes I
Av. du Général Leclerc, F 35042 Rennes Cedex

BIBLIOGRAPHIE

BERKELEY G. (1993). *Principes de la connaissance humaine.* Paris: Flammarion, trad. fr. de D. Berlioz.

FINE K.(1985). *Reasoning with Arbitrary Objects.* Oxford: Blackwell.

FREGE G. (1969). *Écrits logiques et philosophiques* Paris: Seuil, trad. fr. de C. Imbert.

FREGE G. (1983). *Nachgelassene Schriften.* Hambourg: Felix Meiner.

GOCHET P. & GRIBOMONT P. (1991). *Logique.* T. 1. Paris: Hermès, (2e éd.).

HUSSERL E. (1913). *Logische Untersuchungen*, II,1, Halle: Niemayer. *Recherches logiques*. Paris: P.U.F., trad. fr. de H. Elie, (1ère éd. 1959-63).

LEIBNIZ G.W. (1982) *Allegemeine Untersuchungen.* Hambourg: Felix Meiner (éd. bilingue avec trad. allemande de *Generales Inquisitiones*).

LUKASIEWICZ J. (1910). Über den Satz des Widerspruchs bei Aristoteles. *Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie*. Classe de philosophie, 15-38.

NEF F. (1995). Sémantique et ontologie. *Actes du Colloque Lesniewski. Grenoble 1992.* In: *Philosophie et Langage*, n° 17

RESCHER N. (1969). *Topics in Philosophical Logic.* Dordrecht: Reidel.

SURMA J., SRZEDNICKI J. & BARNETT D. (eds) (1992). *Stanislaw Lesniewski. Collected Works.* T. 1. Dordrecht: Kluwer Academic.