

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL  
FACULTÉ DES LETTRES

**LA PREUVE  
ET SES  
CONCEPTS FONDATEURS**

**LA PROBLÉMATIQUE DES CRITÈRES**

**THÈSE**

présentée à la Faculté des lettres de  
l'Université de Neuchâtel  
pour obtenir le grade de docteur ès lettres

par

**JAMES GASSER**

Editions Delval, Cousset (Fribourg)  
1989

La Faculté des lettres de l'Université de Neuchâtel, sur les rapports de MM. Jean-Blaise Grize, professeur honoraire de ladite Université, John Corcoran, professeur à l'Université de Buffalo (New York), Denis Miéville, professeur à l'Université de Neuchâtel, et Henri Lauener, professeur à l'Université de Berne, autorise l'impression de la thèse présentée par M. James Gasser, en laissant à l'auteur la responsabilité des opinions énoncées.

Neuchâtel, le 28 avril 1989.

Le doyen: *Frédéric Chiffelle*

# LA PREUVE ET SES CONCEPTS FONDATEURS

## La problématique des critères

*A Susan et Marc*

## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Jean-Blaise Grize et à Denis Miéville, qui ont éveillé mon intérêt pour la logique il y a une dizaine d'années, et qui n'ont jamais cessé de m'encourager depuis. Chacun tour à tour, en tant que directeur du Centre de Recherches Sémiologiques, m'a laissé un maximum de liberté dans la poursuite de mes propres recherches. J'ai toujours trouvé au Centre d'excellents contacts scientifiques et un entourage à la fois stimulant et amical, alors même que mes directions de recherche ne coïncidaient pas toujours avec celles de mes collègues; bref, j'ai pu y être différent sans être solitaire, ce qui constitue la meilleure preuve de la richesse et du dynamisme d'une institution.

Mes chaleureux remerciements s'adressent également à John Corcoran, qui m'a encouragé et conseillé tout au long de ce travail, et qui m'a beaucoup apporté tant par sa générosité scientifique que par la qualité de l'accueil qu'il m'a toujours réservé. J'ai eu à maintes reprises l'occasion d'apprécier ses très grandes qualités de pédagogue.

J'exprime enfin toute ma gratitude à Denis Apothéloz, Marie-Jeanne Borel, Lynn Corcoran et Christiane Tripet pour leurs suggestions et leurs contributions à la réalisation définitive de cet ouvrage.

## SOMMAIRE

	PAGE
<b>Introduction</b> .....	xi
 <b>Chapitre I. La logique en tant qu'étude des preuves</b>	
1. Introduction.....	1
2. Logique et sciences.....	6
3. La logique est-elle empirique?.....	10
3.1. Les preuves par ordinateur.....	11
3.2. Les preuves longues.....	14
3.3. L'Idée de preuve.....	16
4. Le besoin de preuves.....	18
5. Le rôle de l'auditoire.....	21
 <b>Chapitre II. La notion de critère</b>	
1. Le problème.....	23
2. Eléments d'histoire.....	25
3. Définitions et critères.....	27
4. La preuve en tant que critère et en tant qu'objet.....	30
4.1. La preuve en tant que critère: régression interne.....	31
4.2. La preuve en tant qu'objet: régression externe.....	34
5. Evaluation des critères.....	35
 <b>Chapitre III. La preuve et ses concepts fondateurs</b>	
1. Preuves, déductions et argumentations.....	39
2. Arguments, raisonnements et conséquence logique.....	45
2.1. Détermination de la validité.....	47
2.2. Détermination de la non-validité.....	52
3. Détermination de la vérité.....	58
4. Preuve par l'absurde.....	62
5. Raisonnements à partir de prémisses fausses.....	69

**Chapitre IV. L'aspect pragmatique de la preuve**

1. La preuve en tant que relateur.....	80
2. Raisonnements rigoureux et raisonnements fondés.....	82
3. Raisonnements mathématiques et raisonnements quotidiens.....	86
4. La preuve soumise à l'épreuve.....	89

**Chapitre V. Les critères des preuves**

1. Deux sortes de connaissances.....	92
2. Les prémisses dites «de contrebande».....	97
2.1. Une «preuve» de Leibniz et le commentaire de Frege.....	100
2.2. Principes logiques et non logiques.....	107
2.3. Résumé.....	108
3. L'approbation des experts.....	110
4. Conviction finale.....	114

<b>Conclusion.....</b>	<b>117</b>
------------------------	------------

<b>Glossaire et bibliographie des ouvrages cités.....</b>	<b>119</b>
---	------------

<b>Index des auteurs.....</b>	<b>137</b>
-------------------------------	------------

<b>Index des matières.....</b>	<b>140</b>
--------------------------------	------------

## INTRODUCTION

La question que je me suis posée dans ce travail est de savoir comment traiter les preuves, non pas en tant que créations de logiciens, mais telles qu'elles sont données dans la pratique mathématique courante. La logique est considérée ici comme l'étude des preuves, et j'affirme que la tâche principale du logicien consiste à rendre compte des méthodes déductives utilisées dans les différentes sciences.

«L'homme de la rue» ainsi que bon nombre d'«académiques» semblent penser que le raisonnement mathématique, et la preuve en particulier, ne pose plus aucun problème, que tout a été dit, bref que son étude ne présente plus d'intérêt. Or il suffit de l'examiner sérieusement pour se persuader du contraire. Même dans la logique des propositions—sans doute la partie la plus simple et la plus familière des systèmes modernes—quelques surprises attendent celui qui l'étudie à fond. De plus, les nombreuses lacunes de tout système logique ont déjà été soulignées, apparemment sans rencontrer d'écho, par des auteurs aussi avertis qu'Ayer, Beth, Church, Quine et Tarski. Ceux-ci parlent en effet du problème des critères, du problème des inférences immédiates, de celui du raisonnement fondé, etc. Mais personne, à ma connaissance, n'a encore consacré un ouvrage uniquement à ces thèmes. C'est ce que je vise dans le présent travail, en profitant des jalons posés par ces grands auteurs. Le plan de l'ouvrage est le suivant.

Tout d'abord, j'explicité le problème principal, soit celui des moyens de décider si un discours donné exprime ou non une preuve. Le premier chapitre est une tentative de formuler ce problème de façon claire.

Dans le deuxième chapitre, je traite de la notion même de critère et je la distingue de celle de définition. Je montre que les questions de critères ont présenté un intérêt pour la logique dès ses origines. La preuve est un critère (de la vérité) qui devrait lui aussi être évalué au moyen d'un critère. Pour la preuve *en tant que critère*, la chose est assez simple: il suffit de montrer

(par un autre critère) que sa conclusion est vraie. Mais la preuve *en tant qu'objet* doit produire en nous la «conviction finale», pour reprendre l'expression de Church, non seulement de la vérité de la conclusion mais aussi de la correction du raisonnement qui y conduit.

Le troisième chapitre est consacré aux concepts-clés d'argument, de raisonnement, de déduction, de preuve, etc., ainsi qu'à leurs rapports. Par *preuve*, j'entends une déduction qui met en évidence la vérité de sa conclusion pour quelqu'un qui sait que les prémisses sont vraies. Il découle de ce point de vue que la preuve dépend des connaissances du raisonneur particulier. La *déduction* est la partie «purement logique» de cette activité: il n'est pas nécessaire de savoir si les prémisses sont vraies pour montrer que la conclusion *s'ensuit*. Une déduction (ou une preuve) est constituée d'une suite ordonnée de propositions qui commence par les prémisses et se termine par la conclusion. Le couple constitué des prémisses et de la conclusion est appelé l'*argument*. Il existe des critères classiques qui remontent à Aristote et qui permettent de décider si un argument donné est valide (si sa conclusion *s'ensuit* de ses prémisses) ou non. La recherche des critères de la preuve devrait partir de cette propriété que l'on sait vérifier pour essayer de rendre les autres propriétés vérifiables. Il s'agit en particulier de vérifier que toutes les prémisses sont vraies et que le raisonnement, qui lie l'ensemble des prémisses à la conclusion, est fondé. Dans ce chapitre, une attention particulière est consacrée à la preuve par l'absurde, qui ne semble pas conforme au paradigme selon lequel une preuve montre que sa conclusion *s'ensuit* de ses prémisses. Je rappelle toutefois à ce propos ce que plusieurs auteurs importants ont déjà noté, à savoir qu'il existe un sens dans lequel *toute* preuve est une preuve par l'absurde.

Si la preuve a une fonction épistémique, il *s'ensuit* que les preuves doivent non seulement être correctes en elles-mêmes (selon *quelque* norme) mais qu'elles doivent aussi convaincre un sujet connaissant. Il semblerait que les exigences d'un tel sujet puissent varier selon la situation ou l'époque. Dans le quatrième chapitre, je présente ce point de vue et je montre qu'il ouvre la voie à une recherche historique.

Le cinquième et dernier chapitre est consacré aux critères des concepts logiques associés à la notion de preuve. Il s'agit

dans tous les cas de critères *partiels*. Certains critères d'une nature générale sont également examinés, comme par exemple l'«exigence» qu'il doit être possible de donner une preuve dans une logique de premier ordre ainsi que l'idée que l'identité des preuves authentiques dépend du jugement des «experts».

En ce qui concerne les références bibliographiques, les conventions suivantes ont été adoptées. Pour les ouvrages d'auteurs anciens, les renvois sont faits par abréviation du titre. Par exemple, «Euclide [*Elem.*]» désigne les *Eléments* d'Euclide. Pour les autres auteurs, j'ai cherché à en faciliter la situation dans le temps en indiquant la date de parution de la *première* édition de chaque ouvrage cité, ceci même lorsqu'une édition ultérieure a été consultée—ce qui, le cas échéant, est toujours indiqué dans la bibliographie. Par exemple, une référence à «Keynes [1884, p. 328]» signifie que la première édition de l'ouvrage en question a paru en 1884; dans la bibliographie on apprend que je cite une réimpression, parue en 1928, de la quatrième édition de 1906. *La pagination correspond toujours à l'édition consultée.* Ainsi, la citation de Keynes ne se trouvera pas nécessairement à la page 328 de l'édition de 1884. J'ai cité les ouvrages de langue étrangère en français si je disposais d'une traduction française, sinon dans la langue originale (sauf pour le grec ancien, que j'ai parfois dû traduire moi-même). Enfin, en ce qui concerne les travaux de C.S. Peirce, je renvoie le lecteur non seulement aux revues dans lesquelles les articles en question ont paru, mais aussi aux *Collected Papers* édités à Harvard (ce que j'indique par «C.P.»).

## CHAPITRE 1

### LA LOGIQUE EN TANT QU'ÉTUDE DES PREUVES

#### 1. Introduction

*Il faut avant tout dire le sujet et le but de cette étude:  
le sujet est la preuve, et le but est la science de la preuve.*

C'est en ces termes que commence le premier livre des *Premiers analytiques* d'Aristote. Ainsi, dès ses origines, la logique se présente comme l'étude des preuves et elle cherche à élaborer la science de la preuve.<sup>1</sup>

Il existe certes aujourd'hui d'autres points de vue concernant l'objet de la logique. Pour Tarski, par exemple (cf. [1986]), la logique est la science la plus générale: son univers de discours est l'univers lui-même et son vocabulaire se compose exclusivement de notions logiques. Le point de vue que je reprends d'Aristote est partagé aussi par Quine (cf. [1950, p. 7]).

Si Aristote est clair à propos de l'objet de la logique, il l'est moins à propos de ce qu'il cherche à en savoir. Il ne se demande pas par exemple s'il existe des preuves de natures différentes, ou s'il y a un ordre naturel parmi les preuves; il ne soulève explicitement aucune question de ce genre. Il semble naturel cependant, dès lors qu'on donne une définition de la

---

1 Je donne ici ma propre traduction. Pour un écho moderne de la conception d'Aristote, cf. la toute première phrase de l'ouvrage sur Le problème logique de l'induction de J. Nicod [1924]: «La logique est l'étude des preuves». Cf. aussi Mill [1843, p. 103], «The proper subject of Logic is proof», Piaget [1924, p. 5], «Qu'est-ce [...] que la logique, sinon l'art de la preuve?» et Grize [1967, p. 13S], «[...] la logique traite du raisonnement et, plus particulièrement, [...] de la preuve». Selon Mendelson [1964, p. 1], le but principal de la logique mathématique est «a precise and adequate understanding of the notion of mathematical proof».

preuve, de s'interroger sur sa fonction, sa genèse, sa structure, ainsi que sur les moyens de reconnaître une preuve. D'ailleurs, des questions de cette nature se posent chaque fois que l'on cherche à comprendre un nouveau concept.

Il faut comprendre la fonction ou le rôle de la preuve pour être motivé à s'en servir. Pour élaborer une preuve il faut savoir quels en sont les matériaux et quels sont les procédés à utiliser. L'analyse d'une preuve exige une connaissance de la façon dont elle est structurée. Le problème des critères, enfin, est celui de la distinction entre preuve et non-preuve: comment par exemple reconnaître qu'une preuve est authentique? Toutes ces questions méritent certes d'être soulevées, mais celles dont je vais traiter ici concernent principalement le problème des critères.

Dans sa définition de la preuve, Aristote fait la distinction entre un objet (la preuve) et la science de cet objet. Les différentes sciences ont différents objets. Aristote nous dit que la logique a pour objet la preuve. Il s'ensuit que la logique, au sens aristotélicien, est en réalité ce qu'on appelle, de nos jours, la *métalogique*. Elle étudie les preuves qu'on trouve exprimées dans les sciences.

En effet, si Aristote a été le premier à étudier les preuves de façon systématique, il existait des preuves avant les premiers travaux sur la preuve.<sup>1</sup> L'objet preuve précède nécessairement l'étude de la preuve et l'activité de donner des preuves était déjà bien établie lorsque Aristote s'est mis à leur étude. Mais quelle est l'origine de cette préoccupation? Il ne semble pas qu'une pratique puisse en elle-même conduire à une réflexion sur cette pratique; c'est en général lorsque l'on rencontre des difficultés qu'on commence à se pencher sur la démarche elle-

---

1 «Proofs [...] had to exist before the structure of a proof could be logically analyzed; and this analysis, carried out by Aristotle, and again and more deeply by the modern logicians, must have rested then, as it does now, on a large body of mathematical writings» (Bourbaki [1949, p. 1]). Cf. aussi Mates [196S, p. 20S], «[...] men were giving valid arguments long before there was any such thing as the science of logic, just as stones were no doubt efficiently pried up long before anyone formulated the principle of the lever» et Leibniz (1696, cité par Scholz [1931, p. 81]), «Tout ce qui a été découvert par l'entendement, l'a été grâce aux bonnes règles de la logique, quoiqu'au début, de telles règles n'aient pas été expressément notées ou cataloguées».

même.<sup>1</sup> Or, il n'est pas nécessaire de chercher très loin pour trouver des preuves qui font problème.

■ Le *Journal of Symbolic Logic* publie fréquemment des corrections de preuves parues dans cette même revue.<sup>2</sup> La nécessité de procéder à des corrections ne diminue en rien la réputation des auteurs et des rapporteurs de la revue, mais elle montre que même les experts ne distinguent pas toujours une preuve véritable d'une fausse preuve. Reste à savoir si leurs *corrections* méritent plus de confiance.

■ On sait que l'histoire des preuves du postulat des parallèles d'Euclide à partir des autres prémisses euclidiennes comprend des tentatives de mathématiciens de tout premier plan et ceci à travers plus de vingt siècles. Chacun d'entre eux croyait avoir prouvé ce postulat. Comme ils se sont tous trompés, on peut se demander quels mathématiciens aujourd'hui, tout aussi éminents, se trompent et à propos de quelles preuves.

■ Ce qu'on accepte comme preuve à une époque donnée n'est pas toujours considéré comme tel à une époque ultérieure.<sup>3</sup> Par exemple, la preuve du sixième théorème des *Eléments* d'Euclide ne semble pas avoir fait l'objet de critiques dans l'Antiquité,

---

1 «Ce n'est qu'à l'occasion d'un désaccord, d'une opposition, d'une contradiction, que l'hésitation, le doute et la délibération nous inciteront à nous préoccuper de preuves discursives» (Perelman & Olbrechts-Tyteca [1952, p. 127]).

2 Par exemple, Motohashi [1979] corrige Africk [1974], Rose [1979] se corrige lui-même [1978] et Goodman [1986] lui aussi corrige un de ses propres travaux [1985].

Remarquons aussi que Goldfarb [1984] réfute un «théorème» que Gödel avait publié dans une autre revue [1933]. (A propos de ce «faux théorème» de Gödel, cf. Goldfarb [1981], Gurevich & Shelah [1983] et Goldfarb, Gurevich & Shelah [1984].) Goldfarb [1984, p. 1251] remercie G. Boolos et R. Solovay d'avoir relevé une faute («an oversight») dans la première version de sa «preuve» qui devait réfuter Gödel.

3 «[...] Mathematical proof is a function of the time. History shows this conclusively—Euclid would probably have complained of the lack of rigor displayed by his predecessors; Weierstrass felt it necessary to reorganize the foundations of analysis; and so on» (Wilder [1944, pp. 315-316]). E.H. Moore est succinct: «Sufficient unto the day is the rigor thereof» (cité par Wilder [1944, p. 319]).

mais de nos jours il est généralement admis que, telle qu'elle est donnée, cette preuve n'est pas valable.<sup>1</sup>

■ D'autre part à une époque donnée, un même discours peut être l'expression d'une preuve pour certains mais pas pour d'autres.<sup>2</sup> Il peut même arriver que différentes personnes prétendent prouver des conclusions contradictoires. Par exemple, au troisième Congrès international des Mathématiciens, à Heidelberg en 1904, J. König a voulu résoudre l'un des problèmes célèbres de Hilbert en donnant ce qu'il considérait comme une preuve de l'impossibilité d'un bon ordre du continu. Peu après cette communication, E. Zermelo a annoncé une preuve qui parvient à une conclusion toute contraire.<sup>3</sup>

Il semble trivial d'observer que la notion de preuve, ou plus précisément la pratique qui consiste à prouver des théorèmes, joue un rôle primordial dans les sciences exactes. De toute évidence, c'est une pratique qui fonctionne bien; les applications de ces sciences—de la construction de ponts aux voyages interplanétaires—en fournissent, pour ainsi dire, la preuve, de sorte que pour bien des personnes l'étude de la preuve est close et achevée. Néanmoins, nous venons de rappeler que cette notion pose encore toutes sortes de problèmes, et les succès de la science ne sauraient les faire disparaître. En effet, si on sait utiliser des preuves (à supposer qu'on dispose de preuves), il semble qu'on ne sache pas toujours si on dispose bien de preuves, c'est-à-dire de preuves véritables qui ne contiennent pas d'erreur.

En principe, une preuve (véritable) conduit celui qui la comprend à reconnaître la vérité de sa conclusion. Selon ce point de vue, auquel je reviendrai plus loin, une preuve fournit un

1 «Here Euclid first employs an axiom of which he is wholly unconscious, though it is very essential to his system [...]» (Russell [1903, p. 407]). Cf. Heath [1908, vol. I, p. 256].

2 «A proof only becomes a proof after the social act of 'accepting it as a proof'» (Manin [1977, p. 48]).

3 Compte rendu anonyme du troisième Congrès international des Mathématiciens (Revue générale des sciences pures et appliquées, vol 15, pp. 961-962 [1904]; cf. la même Revue, vol. 16, pp. 241-242 [1905]). Ce compte rendu (dont l'auteur, d'après Moore [1982, p. 104], était J. Hadamard) a conduit Richard [1905] à préparer un article qui présentait pour la première fois son fameux paradoxe (cf. van Heijenoort [1967, pp. 142-144]).

moyen de savoir qu'une proposition est vraie et elle constitue *un* critère (parmi d'autres) de la vérité. On sait que toute proposition prouvée comme vraie *est* vraie, et que deux propositions vraies ne sont pas inconsistantes l'une avec l'autre. Ainsi, en présence de «preuves» de deux propositions contradictoires, comme celles de König et de Zermelo, il doit y avoir erreur quelque part; ces deux résultats ne peuvent être ni vrais ni faux en même temps. On sait que l'un des deux résultats est vrai,<sup>1</sup> mais sans savoir lequel. Quel que soit le résultat vrai, cet exemple montre qu'il peut exister une proposition vraie qui n'est pas connue comme telle. Il y a alors une lacune entre l'état des choses et notre connaissance des choses, entre les propositions vraies et les propositions prouvées, bref entre l'ontique et l'épistémique. La finalité d'une preuve est justement de combler cette lacune en conduisant celui qui la suit à la connaissance de la vérité de sa conclusion. Que se passe-t-il lorsqu'on ne sait pas si tel discours exprime bien une preuve? Après le congrès de 1904, par exemple, il y avait deux «preuves» prétendues dont une au plus pouvait être une preuve véritable. On voit que, dans une telle situation, il ne suffit pas de disposer d'une preuve puisqu'il faut encore pouvoir la reconnaître comme telle.

La question qui doit se poser maintenant n'est pas de savoir quels sont les critères de la preuve ni même où chercher de tels critères, mais, plus simplement, où d'abord chercher des preuves. En effet, avant de chercher un critère de la preuve (ou d'en évaluer un critère éventuel) il faut d'abord avoir «en main» une «preuve possible», c'est-à-dire un discours qui a au moins l'apparence d'une preuve, afin de s'interroger sur les moyens de savoir si cette apparence se justifie. Où donc chercher des «preuves possibles» dont certaines, on peut le présumer, sont des preuves véritables?

---

1 Même si, nécessairement, un des résultats est vrai, les «preuves» peuvent toutes deux contenir des erreurs, c'est-à-dire ne pas être des preuves.

## 2. Logique et sciences

D'une façon tout à fait générale, une preuve est donnée dans le cadre d'une science. Elle part de prémisses qui expriment des connaissances, par exemple les relations entre points, lignes et plans (si la science est la géométrie) ou celles qui concernent les nombres naturels (si c'est l'arithmétique). Ces sciences ne s'occupent pas du raisonnement en soi, mais des objets qui leur sont propres. Elles se présentent sous forme de discours et leurs preuves sont toujours exprimées de façon discursive.

Puisqu'il existait des preuves avant Aristote, il s'ensuit qu'il existait aussi une certaine logique, au sens large d'une certaine pratique du raisonnement et, en particulier, de la preuve. Cette logique, objet de la réflexion d'Aristote, n'était pas une logique au sens de sa définition. Elle n'étudiait pas des preuves, mais elle *faisait* des preuves. La logique au sens aristotélicien, je l'ai déjà fait remarquer, ne veut pas se donner comme instrument de preuve: elle étudie les preuves comme des objets donnés.

Les preuves ne sont donc pas le produit de la logique mais son point de départ. (L'humanité n'est pas le produit de l'anthropologie, et le mouvement n'est pas celui de la mécanique!) Or, les preuves n'explicitent pas elles-mêmes leur propre fonctionnement. Euclide donne des preuves dans ses *Eléments*, mais il ne fournit pas de critère qui permettrait de reconnaître qu'un discours est une preuve. En effet, il ne dit pas, ne serait-ce que d'une façon approximative, ce qu'est une preuve et rien ne laisse entendre qu'il a eu l'idée que la preuve est par nature gouvernée par des règles. Nulle part il ne donne une description de ce qu'on appellerait aujourd'hui une règle de déduction (ou une règle d'inférence). Il y a une logique dans ce qu'il construit, mais il ne fait pas de la logique. Il établit par des raisonnements *logiques*, appliqués à des prémisses déjà connues, les théorèmes de sa *géométrie*. Ce sont ces logiques, sous-jacentes aux contenus spécifiques des sciences dans lesquelles on les trouve, que la logique au sens aristotélicien cherche à dégager et à systématiser.<sup>1</sup>

---

1 Euclide, Peano et Zermelo ont fondé respectivement, la géométrie axiomatique, l'arithmétique axiomatique et la théorie axiomatique des ensembles: selon

Si on n'attendait pas d'une preuve qu'elle remplisse une fonction épistémique, si on ne voulait pas pouvoir l'utiliser comme Euclide utilisait ses preuves pour faire de la géométrie, on n'aurait pas besoin de critères pour reconnaître une preuve authentique. En effet, les systèmes *artificiels* qu'on construit (qu'il s'agisse de systèmes formels, du système des syllogismes, ou encore d'un système de logique d'un autre type) fonctionnent bien et l'identification de leurs preuves ne fait l'objet d'aucun doute; plus précisément, elle est établie par convention.<sup>1</sup> Mais, bien que cela soit théoriquement possible, ces systèmes ne sont presque jamais utilisés, tout simplement parce que tel n'est pas leur but.<sup>2</sup> Il est rare qu'on utilise une dérivation formelle pour

---

Corcoran [1974, p. 98], «each of these men put down axioms and regarded as theorems of the system the sentences obtainable from the axioms by logical deductions but without bothering to say what a logical deduction is». Pour Corcoran, l'intention d'Aristote, en tant que fondateur de la logique, était d'une nature toute autre, car la syllogistique ne constitue pas une «théorie axiomatique des universelles». Bien au contraire, «logic must begin with observations explicitly related to questions concerning the nature of an underlying logic. In short, logic must be concerned with deductive reasoning» [*ibid.*].

1 Cf. la citation suivante:

[... a proof of a conclusion *c* from a set *P* of premises] is a finite sequence of lines ending with *c*, each subsequent line of which either is an assumption in *P* or is a logical axiom or is obtained from previous lines by a rule.

The [underlined] expression (or rather an even simpler version of it) has become a slogan and, sometimes, a battlecry. One eminent logician related to me that when he first heard this slogan presented he was struck by its simplicity and truth and was moved to say to himself, «By God, that is what proofs are!» [Corcoran 1971, pp. 7-8].

2 Cf. le dialogue suivant entre un étudiant (Student) et le mathématicien idéal (I.M.):

Student: [...] What I'm asking you for isn't examples of proof, it's a definition of proof. Otherwise, how can I tell what examples are correct?

I.M.: Well, this whole thing was cleared up by the logician Tarski, I guess, and some others, maybe Russell or Peano. Anyhow, what you do is, you write down the axioms of your theory in a formal language with a given list of symbols or alphabet. Then you write down the hypothesis of your theorem in the same symbolism. Then you show that you can transform the hypothesis step by step, using the rules of logic, till you get the conclusion. That's a proof.

Student: Really? That's amazing! I've taken elementary and advanced calculus, basic algebra, and topology, and I've never seen that done.

prouver une proposition, car de telles dérivations ne ressemblent guère aux preuves qu'on utilise effectivement dans les sciences.

Si, comme je l'affirme, l'objet de la logique est l'étude des raisonnements, et en particulier des preuves, qui s'expriment dans le discours, les symboles non interprétés et les «formes logiques» qui sont les matériaux d'un système formel (et qui sont d'ailleurs le résultat d'une réflexion sur la preuve dans sa manifestation discursive) auront le statut d'artefacts et d'outils pour faciliter l'étude de preuves discursives. Dans la mesure où on reconnaît un discours comme une preuve par une procédure purement syntaxique et mécanique, cette reconnaissance n'est pas celle d'une preuve au sens plein de ce terme. En effet, lorsque nous appelons un discours une preuve, par exemple une preuve du théorème de Pythagore, nous affirmons beaucoup plus que la simple assertion qu'une propriété purement syntaxique appartient à une certaine suite d'enchaînements de symboles non interprétés. D'une part, une composante *sémantique* fait partie de notre assertion; si ce n'était pas le cas, on n'affirmerait pas que le discours prouve quelque chose à propos de carrés sur les côtés de triangles rectangles. D'autre part, il y a une composante *épistémique*; dire qu'un discours est une preuve revient à affirmer qu'il joue un rôle épistémique dans notre vie intellectuelle.

C'est un fait indiscutable que l'élaboration des systèmes formels a permis une amélioration tout à fait remarquable de notre compréhension du raisonnement. L'idée selon laquelle un critère de la preuve doit comprendre un élément purement syntaxique et mécanique est importante et complètement justifiée, comme l'indiquent Church, Kleene, Myhill, Tarski et bien d'autres. Cependant, un «critère» de la preuve qui ne comprend que la composante syntaxique, à l'exclusion de toute autre, serait tout aussi inutile qu'un diplôme qui n'atteste que la présence physique d'une personne dans une salle de cours.

---

I.M.: Oh, of course no one ever really does it. It would take forever! You just show that you could do it, that's sufficient.

Student: But even that doesn't sound like what was done in my courses and textbooks. So mathematicians don't really do proofs, after all. [Davis & Hersh 1981, pp. 39-40.]

Selon mon point de vue, les sciences qui prouvent des «choses» ne s'occupent pas de la notion de preuve, pas plus que la logique, qui s'occupe de cette notion, ne prouve des «choses». Que les preuves ne soient pas l'invention des logiciens mais se trouvent dans les sciences, où elles sont réalisées et utilisées, signifie que l'étude de ces preuves se fait *a posteriori*, au sens d'exiger des données empiriques et de viser des lois qui sont vérifiables par l'expérience.<sup>1</sup>

---

1 La question de savoir si l'étude des preuves est a posteriori en ce sens est indépendante de celle de savoir si l'aptitude à raisonner s'acquiert elle aussi au moyen de l'expérience ou si elle est a priori (au sens, par exemple, d'être innée). Cf. les remarques de Boole [1854, p. 4], qui ne doute pas que la logique est a priori: «It may be a question whether that formula of reasoning, which is called the dictum of Aristotle, de omni et nullo, expresses a primary law of human reasoning or not; but it is no question that it expresses a general truth in Logic. Now that truth is made manifest in all its generality by reflection upon a single instance of its application. And this is both an evidence that the particular principle or formula in question is founded upon some general law or laws of the mind, and an illustration of the doctrine that the perception of such general truths is not derived from an induction from many instances, but is involved in the clear apprehension of a single instance. In connexion with this truth is seen the not less important one that our knowledge of the laws upon which the science of the intellectual powers rests, whatever may be its extent or its deficiency, is not probable knowledge. For we not only see in the particular example the general truth, but we see it also as a certain truth,—a truth, our confidence in which will not continue to increase with increasing experience of its practical verifications.»

### 3. La logique est-elle empirique?

*Wenn aber Einer sagte „Also ist auch die Logik eine Erfahrungswissenschaft“, so hätte er unrecht. Aber dies ist richtig, daß der gleiche Satz einmal als von der Erfahrung zu prüfen, einmal als Regel der Prüfung behandelt werden kann. [Wittgenstein, Über Gewißheit 98.]*

Chacun de nous sait raisonner (même celui qui ne sait pas qu'il sait raisonner), et peut lier des propositions pour parvenir aux conclusions dont il a besoin, ne serait-ce que pour décider des actions les plus banales de la vie quotidienne. Il suffit de prendre pour objet son propre discours ou celui d'un autre et de bien observer ce qu'on fait lorsqu'on raisonne correctement pour mettre en évidence des règles de raisonnement (ou d'inférence). Celles-ci peuvent être plus ou moins adéquates, comme on s'en aperçoit en se référant encore au discours.

Wittgenstein a raison de dire que le point de départ de toute théorie de la preuve est en même temps son critère absolu, mais il me semble qu'il va trop loin en niant de façon aussi catégorique les aspects empiriques de la logique. Elle est empirique en ce sens qu'elle étudie des phénomènes, c'est-à-dire des faits observables, qui sont en principe les discours qui expriment des preuves. Voilà donc une première réponse à la question de ce paragraphe. Mais il y a plus. Les données (sans lesquelles la logique n'existerait pas) ne définissent pas la preuve. Nous devons en effet prendre en considération aussi qu'il existe (1) des non-preuves qui se donnent comme des preuves et (2) des preuves véritables qui n'ont pas l'air d'être des preuves. Une approche empirique ne sera donc utile que si on a des données *fiabiles* (des preuves véritables) et en quantité suffisante. Mais le logicien n'est pas un observateur passif; comme les chercheurs dans les autres sciences, il tente de distinguer les données qui correspondent réellement aux phénomènes qu'il veut étudier de celles qui ne sont que des artefacts. De même que le physicien, par exemple, peut être amené par ses expériences et calculs à rejeter ce qu'il avait accepté auparavant comme donnée fiable,

le logicien peut se voir obligé de modifier ses opinions concernant quels discours expriment des preuves.<sup>1</sup>

### 3.1. Les preuves par ordinateur

De nos jours, on prétend même donner des preuves par ordinateur. Ceci peut sembler bizarre dans la mesure où les preuves sont en principe destinées aux hommes: une preuve véritable doit prouver un théorème *pour quelqu'un*. Or, celui qui sait que les prémisses d'une preuve effectuée par ordinateur sont vraies ne pourra probablement pas savoir que la conclusion de la machine découle effectivement des prémisses. De l'entrée à la sortie, tout se passe de façon mystérieuse. Et la possibilité de faire expliciter chaque pas dans la démarche qui a conduit à la conclusion reste assez théorique, dans la mesure où on fait précisément appel à un ordinateur lorsque cette démarche comprend un nombre extrêmement grand de calculs.<sup>2</sup>

En 1977, trois chercheurs ont annoncé la preuve d'une des conjectures les plus célèbres des mathématiques: que quatre couleurs suffisent pour colorier une carte politique plane de façon que deux régions adjacentes quelconques ne soient pas de la même couleur. Cette conjecture date d'au moins 1852 et de nombreux chercheurs avaient déjà tenté de la prouver avant la réussite de K. Appel, W. Haken et J. Koch [1977] ... et de trois ordinateurs. Une partie importante de leur travail consiste en un

---

1 Selon Tarski [1969, p. 66], «The appearance of an antinomy is for me a symptom of disease. Starting with premises that seem intuitively obvious, using forms of reasoning that seem intuitively certain, an antinomy leads us to nonsense, a contradiction. Whenever this happens, we have to submit our ways of thinking to a thorough revision, to reject some premises in which we believed or to improve some forms of argument which we used. We do this with the hope not only that the old antinomy will be disposed of but also that no new one will appear. To this end we test our reformed system of thinking by all available means, and, first of all, we try to reconstruct the old antinomy in the new setting; this testing is a very important activity in the realm of speculative thought, akin to carrying out crucial experiments in empirical science».

2 Il faut néanmoins reconnaître que toute étape particulière considérée comme douteuse peut être contrôlée, ou tout au moins refaite, ou effectuée par une autre méthode. On n'est pas totalement à la merci de la machine.

lemme qui tient compte de plus d'un million de cas distincts [Appel & Haken 1977, p. 487].<sup>1</sup> Aucun moyen pratique donc de vérifier «la preuve du théorème des quatre couleurs», puisqu'elle est beaucoup trop longue—ce qui soulève des questions épistémologiques importantes et met en cause notre conception même de la preuve.

Comme le note Tymoczko [1979, p. 73], deux suppositions sont implicites dans le recours à l'ordinateur: d'une part, qu'une certaine machine programmée d'une certaine manière est en principe capable d'obtenir un certain type de résultat; d'autre part, qu'une telle machine programmée de la manière indiquée a effectivement obtenu le résultat voulu. Même si on pouvait savoir dans un cas particulier que ces conditions ont été réunies *et* que les utilisateurs n'ont pas fait d'erreur, il resterait la question qui se pose à propos de *toute* argumentation—même une argumentation faite «à la main»—à savoir, si elle *montre* au raisonneur que la conclusion s'ensuit de prémisses qu'il connaît comme vraies au sens épistémique nécessaire à la preuve.

On sait en effet qu'une preuve doit partir de prémisses connues comme vraies par le raisonneur, et qu'elle doit lui montrer que la conclusion s'ensuit de ces prémisses. Or un listage qui se compose uniquement de résultats de longs calculs ne *montre* pas une telle relation entre la conclusion et les prémisses, ou tout au moins il ne la montre pas au même titre qu'une preuve normale. Pour qu'une méthode *montre* qu'une conclusion s'ensuit de prémisses données, au sens de conduire le raisonneur à la connaissance de cette relation, il est nécessaire que le sujet connaissant «fasse l'expérience» de la méthode toute entière, jusque dans les moindres détails. Etant donné cette exigence ainsi que celle du fonctionnement correct de la machine, il ne semble pas qu'une «preuve» par ordinateur puisse être une preuve au sens strict (mais habituel); accepter une argumentation assistée par ordinateur comme une preuve semble exiger une nouvelle définition du mot *preuve*. Néanmoins, il faut reconnaître que Haken et ses collègues ont réellement accompli quelque chose. Ils n'ont pas donné une preuve au sens habituel de ce terme, mais ils ont

---

1 Remarquons qu'il s'agit d'une stratégie typique des preuves par ordinateur que de décomposer un problème en des milliers de cas pour ensuite les tester un par un.

fait progresser la science mathématique et cela d'une façon révolutionnaire qui ne semble pas encore bien comprise.

Il peut bien arriver que l'argumentation par ordinateur conduise le raisonneur au «savoir que», même si elle ne lui permet pas de «savoir pourquoi». Haken, Appel et Koch peuvent évidemment justifier leur conviction en la vérité de la conclusion même si l'on n'est pas en droit de parler d'une véritable connaissance de cette vérité. La réalité d'un concept intermédiaire entre preuve et non-preuve, la «quasi-preuve», semble s'imposer.

A propos d'un *autre* théorème prouvé à l'aide d'un ordinateur, H.P.F. Swinnerton-Dyer [1971, p. 373] fait les remarques suivantes:

*When a theorem has been proved with the help of a computer, it is impossible to give an exposition of the proof which meets the traditional test—that a sufficiently patient reader should be able to work through the proof and verify that it is correct. Even if one were to print all the programs and all the sets of data used (which in this case would occupy some forty very dull pages) there can be no assurance that a data tape has not been mispunched or misread. Moreover, every modern computer has obscure faults in its software and hardware—which so seldom cause errors that they go undetected for years—and every computer is liable to transient faults. Such errors are rare, but a few of them have probably occurred in the course of the calculations reported here.*

Personne n'est *en principe* capable de vérifier une «preuve» comme celle du «théorème des quatre couleurs». Les questions de critères ne se présentent donc pas. Le seul moyen de vérification serait de faire effectuer les mêmes calculs par un autre ordinateur pour voir s'il parvient au même résultat. Mais pour *savoir* qu'une preuve est bien une preuve il faut que quelqu'un l'ait vérifiée et reconnue comme telle. Or *personne* (ni même Appel, Haken et Koch) n'a vérifié «la preuve du théorème des quatre couleurs». Si donc il s'agit bien d'une preuve, c'est une preuve à laquelle on ne peut appliquer aucun critère si ce n'est

celui de la reproductibilité.<sup>1</sup> En ce sens la situation est donc comparable à celle qu'on trouve dans les sciences expérimentales (cf. Swinnerton-Dyer [1971, p. 373]).

### 3.2. Les preuves longues

*If the chain of reasoning is extremely long and complicated, the rigorous proof may leave the reader still subject to serious doubt and misgiving; in a genuine sense, it may be less convincing than an intuitive argument, which can be grasped as a whole, and which uses implicitly the assumption that mathematics as a whole is coherent and reasonable [Davis & Hersh 1981, p. 392].*

En logique, comme dans le parler de tous les jours, on distingue entre persuasion et preuve. Une preuve ne vise pas principalement à persuader l'auditoire, mais à l'amener à la connaissance de la vérité de la conclusion. Un auditoire peut très bien être persuadé, ou éprouver un sentiment de certitude, sans pour autant avoir acquis la connaissance qu'il cherchait. L'inverse est possible aussi: l'habitude de «suspendre son jugement», qui résulte de l'expérience scientifique, peut empêcher la certitude même lorsqu'il y a connaissance.

Il doit donc être clair qu'une preuve peut vraiment prouver sa conclusion pour quelqu'un même si elle ne le convainc pas. La longueur d'une preuve pose problème lorsqu'elle empêche même un lecteur compétent et consciencieux de suivre la procédure intégralement. Par exemple, on peut imaginer une preuve tellement longue qu'elle ne pourrait pas être effectuée (ni, par conséquent, contrôlée) du vivant d'un homme. Notons que le

---

1 C'est bien ce qu'ont fait les rapporteurs de l'article publié par Appel et ses collègues: «A person could carefully check the part of the discharging procedure that did not involve reducibility computations in a month or two, but it does not seem possible to check the reducibility computations themselves by hand. Indeed, the referees of the paper resulting from our work used our complete notes to check the discharging procedure, but they resorted to an independent computer program to check the correctness of the reducibility computations» [Appel & Haken 1978, p. 178].

problème que posent les preuves longues n'est pas directement lié à l'avènement des ordinateurs.

La possibilité d'examiner une preuve en détail, et en entier, est d'une importance capitale et doit être prise en considération comme critère possible de preuve.<sup>1</sup> En effet, si on n'exigeait pas d'une preuve qu'elle soit contrôlable, quelqu'un (ou un ordinateur) pourrait prétendre *prouver*, par une argumentation extrêmement longue, une conclusion comme par exemple l'inconsistance de l'arithmétique de Peano. Pour celui qui sait que l'arithmétique est consistante, une telle procédure ne peut pas être une preuve. Sa conclusion est fautive; par conséquent, elle doit contenir une erreur. Ainsi, dans une telle situation, la conclusion serait le critère selon lequel on juge la preuve, et non pas l'inverse (cf. Dummett [1959, p. 342]).

Quelle est la longueur de la preuve la plus longue que l'on peut encore considérer comme une preuve? A supposer, par exemple, que «les experts» puissent donner et contrôler une preuve de deux mille pages, ne parviendraient-ils pas à dominer une preuve qui compterait une page de plus? Ces questions conduisent à un paradoxe qui ressemble à celui du sorite, qu'on connaît depuis l'Antiquité. S'il ne fait pas de doute que la longueur et la complexité d'une preuve ont un effet sur sa capacité de conduire le raisonneur à la connaissance de la conclusion qu'il cherchait, la détermination d'une longueur acceptable semble en revanche largement arbitraire.

---

1 «Supposons que, pour une théorie formalisée (S), on ait pu construire une machine électronique (M) susceptible d'effectuer à une vitesse terrifiante toutes les opérations de (S). Nous désirons vérifier une formule (F) de la théorie; après un calcul comportant  $10^{30}$  opérations élémentaires, effectué en quelques secondes, la machine (M) nous donne une réponse positive. Quel mathématicien accepterait sans hésitation une telle «démonstration» comme valable, dans l'incapacité où il serait de vérifier une à une toutes les étapes de la démonstration?» [Thom 1970, p. 229].

### 3.3. L'Idée de preuve

En principe, les preuves sont données; on devrait donc pouvoir en trouver des exemples dans toutes les revues de mathématiques. Mais il semble qu'on peut toujours faire des objections à des preuves données et que ces objections sont très souvent justifiées. Il ne semble pas possible, en définitive, de trouver un exemple de preuve véritable. Dans ces conditions, il importe non seulement d'explicitier dans quel sens il existe des preuves véritables (s'il en est) mais aussi de tenir compte des phénomènes que nous avons l'habitude d'appeler des preuves.

Vu la difficulté de trouver un exemple de preuve qui résiste à toute critique, il serait tentant de conclure qu'il n'existe pas de preuve. Dans l'Antiquité, l'Ecole sceptique n'a pas hésité à adopter ce point de vue. Ses travaux sur les critères, en particulier sur la preuve et sur les critères de la preuve, témoignent de l'importance qu'on accordait à ces questions. Sextus Empiricus [2e siècle après J-C] notamment, insistait sur ce qu'il n'existe pas de preuve (cf. par exemple [*Hyp. Pyrrh.* II. 144]). Au vingtième siècle, on peut encore citer le mathématicien G.H. Hardy [1929, p. 18]<sup>1</sup>, selon lequel «[...] there is, strictly, no such thing as mathematical proof; [...] we can, in the last analysis, do nothing but *point*». Un tel point de vue aboutit à identifier la preuve, ou en tout cas son *expression*, à des figures ou à d'autres moyens visuels, à la manière de la preuve du théorème de Pythagore donnée par Bhascara «qui, à côté d'une image, se contente d'écrire 'regarde'» [Grize 1986, p. 660; cf. Loomis 1927, pp. 182-183].<sup>2</sup> Cette conception, prise à la lettre, rend triviale la notion de preuve.<sup>3</sup> La question est donc de savoir

1 Hardy rapporte ici moins son propre point de vue qu'une opinion assez largement répandue dont il importe de tenir compte.

2 «[...] Anything worth discovering in mathematics does not need proof; it needs only to be seen or understood» (Buchanon [1929, p. 37]).

3 Il est possible d'adopter une autre attitude à ce sujet. En effet, on peut penser que le rôle de l'auteur d'une preuve se limite à indiquer au lecteur ce qu'il peut faire afin de parvenir lui-même à la connaissance de la vérité de la conclusion. (Bhascara, c'est vrai, l'indique assez laconiquement.) Selon ce point de vue, l'expression d'une preuve, et en particulier une image, peut jouer un rôle dans une preuve, sans toutefois être identifiée à celle-ci. Par exemple, la figure de Bhascara peut contribuer à mettre en évidence la vérité du théorème de

dans quel sens il existe réellement des preuves qui présentent néanmoins un certain intérêt.

*Many working mathematicians are puzzled about what proofs are for if they do not prove. On the one hand they know [...] that proofs are fallible but on the other hand they know [...] that genuine proofs must be infallible. Applied mathematicians usually solve this dilemma by a shamefaced but firm belief that the proofs of the pure mathematicians are 'complete', and so really prove. Pure mathematicians, however, know better—they have such respect only for the 'complete proofs' of logicians. If asked what is then the use, the function, of their 'incomplete proofs', most of them are at a loss [Lakatos 1976, p. 29n].*

Les preuves existent, comme existent les triangles euclidiens. Mais comme aucun triangle mesurable n'a toutes les propriétés du triangle défini par Euclide, de même aucune expression d'une preuve n'exprime parfaitement une preuve. Les preuves existent en tant qu'idéal, ce qui ne signifie pas qu'elles ne nous sont pas utiles pour nos besoins pratiques et cognitifs; elles le sont au même titre que les triangles pour un menuisier ou les gaz parfaits et les mouvements sans friction pour un ingénieur. Une preuve, à proprement parler, n'est pas un objet linguistique. Elle a le même rapport à son expression qu'une proposition à l'énoncé qui l'exprime (cf. Kreisel [1971, p. 242]).<sup>1</sup>

---

Pythagore pour un raisonneur de formation mathématique qui l'associe avec l'énoncé de la proposition. Un tel raisonneur doit cependant toujours intervenir et faire quelque chose pour que la conclusion lui soit prouvée. Ainsi, d'une certaine façon ce n'est ni la «preuve» en soi qui prouve sa conclusion, ni son auteur, mais c'est le lecteur qui la prouve pour lui-même (cf. Gasser [1987a]).

1 Signalons que l'existence de propositions en ce sens a été contestée (cf. p.ex. Quine [1970, pp. 1-14]). Néanmoins, je propose de suivre Carnap, Church, Russell et d'autres en faisant la distinction entre la proposition (la signification objective) et un objet linguistique qui l'exprime. Selon Carnap [1942, p. 236], la majorité des logiciens modernes reconnaissent cette acception; pour Church [1956, p. 26], elle constitue «the happy result of a process which, historically, must have been due in part to sheer confusion between the sentence in itself and the meaning of the sentence».

Si la preuve est une notion idéale, il est évident que les données que la logique étudie empiriquement sont des *expressions* de preuves. Par conséquent, la logique en tant qu'étude des *preuves* ne peut pas être empirique: ce qui donne finalement raison à Wittgenstein.<sup>1</sup>

Dans ce travail, la notion de *preuve* sera prise en son sens idéal. Ainsi, aucune fausse «preuve», ni aucune «preuve» dont on ne sait pas si elle est ou non une preuve véritable, ne sera appelée ici une *preuve* sans qualification. Toute *preuve* sera donc une preuve authentique, qui correspond à l'idéal. Il existe certes des «preuves» fallacieuses et, probablement, des preuves qui ne sont pas connues comme telles, mais à strictement parler il s'agit là d'un abus de terminologie que je chercherai à éviter par l'emploi du terme *argumentation*. La preuve est un idéal, mais les argumentations que nous donnons peuvent tout de même approcher cet idéal, tout comme l'expérience peut nous assurer qu'un théorème est vrai même si sa «preuve» reste critiquable. Les preuves que nous donnons et que nous utilisons sont comme des interprétations d'une oeuvre musicale: même si elles ne sont jamais parfaites, on ne saurait nier leur beauté, leur richesse et leur pertinence.

#### 4. Le besoin de preuves

Deux sortes de considérations conduisent à la question du besoin de preuves. En effet, à propos d'une proposition donnée, la question se pose de savoir (1) s'il y a lieu de la vérifier (ou si l'on peut l'accepter comme une prémisse) et, le cas échéant, (2) si la preuve constitue le seul moyen de vérification possible (ou s'il existe aussi quelque moyen empirique). Je traiterai d'abord de la deuxième question.

---

1 Il importe de remarquer qu'au sens où la logique n'est pas empirique, aucune science ne l'est. En effet, la mécanique, dans la mesure où elle emploie des propositions concernant des objets idéaux (p.ex. le mouvement sans friction), n'est pas empirique, pas plus que la linguistique, qui traite de phrases idéales (parfaitement construites ou prononcées).

Certains types de propositions semblent se prêter moins bien que d'autres à des preuves. Par exemple, il semble que plus un objet est observable moins ses propriétés sont prouvables, et réciproquement. Ainsi, on n'essaie pas de prouver que la somme des angles d'un triangle que l'on peut voir et dessiner est égale à *exactement* deux angles droits, parce qu'il faudrait mesurer les angles, et que nos moyens ne sont qu'approximatifs. Dans le cas du triangle tel qu'il est défini par Euclide, en revanche, on peut—on *doit*—prouver cette propriété sur la base des seuls axiomes. Dans le domaine des nombres—objets non observables par excellence—la chose est encore plus claire. En effet, au moyen de la preuve et seulement par ce moyen, on peut savoir qu'il n'existe pas de «plus grand nombre premier», qu'aucun nombre carré n'est le double d'un nombre carré, etc. Il est fort possible que la théorie des nombres nous fournisse nos paradigmes de la preuve, et que la confiance que nous accordons aux preuves repose sur notre expérience arithmétique. Quoi qu'il en soit, la nature des propositions que l'on se propose de vérifier semble dans certains cas imposer le recours à la preuve.

Quant à la question de savoir si on doit prouver une proposition donnée, ou si on peut l'accepter sans preuve, il convient de remarquer tout d'abord que différentes motivations peuvent conduire à donner une preuve. Il semble possible de les caractériser de façon générale comme (1) la volonté de savoir qu'une proposition est vraie et (2) celle de fonder ce savoir. La première motivation conduit surtout à prouver des conclusions dont la vérité n'est pas évidente, la seconde à prouver des conclusions qui sont déjà plus ou moins évidemment vraies. La distinction n'est pas absolue; les deux motivations peuvent se manifester en même temps. Elles présentent deux aspects de la même activité dont l'un ou l'autre peut prévaloir selon les circonstances. «I believe the Prime Number Theorem because of de la Vallée-Poussin's proof of it», nous dit G.H. Hardy, «but I do not believe that  $2 + 2 = 4$  because of the proof in *Principia Mathematica*» [1929, p. 17].

Quelle que soit sa motivation, celui qui donne une preuve parviendra toujours à étayer son savoir de raisons. Il importe de reconnaître que la preuve conduit au savoir, qui se distingue de la croyance ou de l'opinion. En effet, il existe aussi des

croyances qui sont étayées dans la mesure où on peut les défendre en public; mais il ne s'agit pas forcément de connaissances. La preuve est à la connaissance comme la persuasion est à la croyance. La rhétorique traite de la persuasion; la logique étudie la preuve.

En gros, une preuve ajoute deux choses à une simple croyance en sa conclusion. D'une part, elle fournit des raisons *objectives* de croire, des raisons qui ne dépendent donc pas de la personne qui les énonce. D'autre part, elle constitue un *document* en ce sens qu'elle enregistre les raisons qui conduisent à sa conclusion et elle facilite ainsi la critique.<sup>1</sup> Il semble donc heureux qu'on ne puisse pas dissocier complètement une preuve de son expression linguistique qui, finalement, la rend contrôlable.

Si l'on cherche l'objectivité et la «contrôlabilité» c'est parce qu'on ressent le besoin de *confirmer* le statut de ses connaissances et, parfois, d'en *informer* d'autres personnes. On a besoin d'une preuve lorsqu'on est persuadé de la vérité d'une proposition et que l'on veut soumettre cette opinion à un examen rigoureux par soi-même et éventuellement par autrui. D'une certaine façon donc, seule une personne, et plus précisément un raisonneur, a besoin de preuves. Comme le dit Henkin, les mathématiques n'ont pas besoin de preuves—seuls les mathématiciens en ont besoin, et parmi ceux-ci seuls les plus sérieux et les plus consciencieux. Il semble donc que ce qu'on doit prouver dépend aussi des exigences de l'auditoire.

---

1 «Proof serves many purposes simultaneously. In being exposed to the scrutiny and judgment of a new audience, the proof is subject to a constant process of criticism and revalidation. Errors, ambiguities, and misunderstandings are cleared up by constant exposure» [Davis & Herah 1981, p. 151].

## 5. Le rôle de l'auditoire

Il est important de reconnaître que l'auditoire a bien un rôle à jouer dans la construction d'une preuve. Si  $x$  prouve une proposition, il la prouve toujours pour un sujet  $y$  (qui peut d'ailleurs être  $x$  lui-même) qui est conduit ainsi à la connaissance de sa vérité. Il n'est pas possible de prouver une proposition pour *personne*. La «preuve» perdue sur un papyrus enfoui dans le désert, ou oubliée sur disquette, ne prouve rien. Et ce qui ne prouve pas ne mérite pas le nom de preuve. Il est certes possible que l'*expression* d'une preuve—contrairement à une preuve proprement dite—existe indépendamment de tout raisonneur. L'expression d'une preuve peut être interprétée, par quelqu'un, comme une preuve. Un tel raisonneur aura forcément la conviction de savoir que la conclusion s'ensuit de prémisses vraies. Ce sentiment du raisonneur, ainsi que d'autres aspects liés à la preuve, ne correspondent à rien dans son expression. Poincaré fait remarquer que la vérification d'une preuve nécessite plus que le contrôle de chaque ligne. Socrate affirme dans le *Phédon* qu'il n'existe pas d'*art* qui permette de distinguer preuve et non-preuve. Pour prouver une proposition  $p$ , il faut donc que la preuve convainque un sujet de sa correction. Le sujet impose ses propres exigences avant d'accepter  $p$  comme prouvée. Ces exigences ne font pas partie de la preuve elle-même; en effet, elles ne figurent pas dans l'enchaînement des inférences, pas plus que la connaissance de la vérité des prémisses. Ainsi, certains éléments indispensables à la preuve ne figurent jamais dans la donnée d'une preuve, qui, finalement, constitue le seul objet que l'on peut vraiment contrôler. C'est là tout le problème des critères et, partant, de la preuve.

L'idée de la preuve d'une «vérité non évidente», qui consiste à enchaîner des inférences connues comme valides à partir de «prémisses évidemment vraies» ou de propositions déjà prouvées, n'est pas de nature évolutive. C'est bien plutôt *ce qu'on accepte* comme une preuve—comme une suite d'inférences qui correspond à cette idée—qui, elle, évolue. Les exigences évoluent avec l'auditoire et cela dans le sens d'un rapprochement de l'idéal.

Une preuve prouve sa conclusion pour un auditoire donné qui sait que les prémisses sont vraies et que les inférences sont valides. Pour cela, il n'est pas nécessaire que l'auditoire dispose d'un critère de la preuve et puisse énoncer des raisons suffisantes pour accepter une preuve en tant que telle. Les sceptiques laissent entendre qu'afin de savoir qu'une proposition donnée est vraie, il faut savoir *qu'on la sait vraie*. Ceci conduit à une régression à l'infini. Aucune théorie n'est nécessaire ni pour donner des preuves ni pour les accepter ou les rejeter. Il n'empêche que la logique, *en tant qu'étude de la preuve*, se doit d'explicitier des critères qui permettent de distinguer, objectivement, les preuves véritables de toutes les «fausses preuves». L'activité que nous appelons logique repose en effet sur l'hypothèse qu'il existe des preuves et que, parfois, mais non toujours, on réussit effectivement à prouver des propositions à soi-même ainsi qu'à d'autres personnes.

## CHAPITRE II

### LA NOTION DE CRITERE

#### 1. Le problème

J'aborde le problème dans toute sa généralité en citant in extenso un paragraphe du traité sur la critériologie du cardinal Mercier [1884, pp. 37-39]:

*Il est de fait, aucun sceptique ne le niera, que nous sommes en possession de propositions nombreuses auxquelles, à tort ou à raison, nous nous sentons irrésistablement attachés.*

*Je ne doute pas de ces propositions: Deux et deux font quatre; la ligne droite entre deux points est plus courte que toute autre ligne, courbe ou brisée; ce qui arrive à l'existence demande une cause; j'ai la conviction que je pense, que je veux, que j'existe; qu'il existe des êtres sensibles extérieurs à moi; je suis persuadé que, de vérités déjà connues je puis légitimement déduire, au moyen du raisonnement, d'autres vérités, édifier des sciences, les unes rationnelles, telles que l'arithmétique ou la géométrie, les autres d'induction, telles que la physique ou la psychologie; j'ai confiance, enfin, que de la connaissance du monde sensible je puis m'élever à la connaissance d'un monde suprasensible ou métaphysique: de toutes ces connaissances, je me sens certain, à n'en point douter.*

*Ai-je raison de m'estimer certain? Mes adhésions sont-elles justifiables et justifiées?*

*Sans doute, si la certitude ne signifiait qu'un état subjectif de l'intelligence, je pourrais m'en tenir au sentiment de ferme adhésion que j'éprouve et ne pas pousser plus loin mon enquête.*

*Mais, en réalité, la certitude est, dans ma pensée, quelque chose de plus qu'une disposition affective; je soupçonne tout au moins que la vérité est à la base de mes assentiments certains.*

*Cependant, bon nombre d'assentiments que j'ai eus jadis et dont je ne doutais pas, se sont révélés plus tard à moi comme n'étant pas liés à la connaissance de la vérité; aujourd'hui même, que d'adhésions auxquelles je me sens déterminément attaché et dont je ne me suis jamais demandé à fond si elles ont le vrai pour appui!*

*L'humanité n'a-t-elle pas cru, pendant de longs siècles, à la solidité des cieux, au mouvement du soleil et à l'immobilité de la terre? N'y a-t-il pas une foule de savants qui croient, comme à des dogmes, à des hypothèses très discutables qui leur sont chères, par exemple, à l'unité de la matière, à l'absence de causes finales dans la nature, au transformisme?*

*Faut-il douter, écrit le cardinal Newman, que, parmi tous ces dires qui sont la monnaie courante des conversations dans la vie ordinaire et que nul ne songe à contester, il n'y ait pas mal d'affirmations qui doivent être en réalité sujettes à caution? Et dans cet ensemble de croyances relatives à la famille, à l'éducation, à la société, au patriotisme, à la morale et à la religion qui forment le patrimoine des nations civilisées et auxquelles les hommes bien élevés font profession de rester fidèles, n'est-il pas vraisemblable qu'il y a un mélange de vérité et d'erreur?*

*Que conclure de là? Faut-il, au nom de ce doute vague, a priori, tout rejeter en bloc? Ou prendre le parti contraire et garder indifféremment toutes ces croyances sans contrôle?*

*Le premier parti ne serait pas sage, mais le second ne serait-il pas téméraire?*

*Un travail de discernement s'impose. L'homme raisonnable doit prendre à tâche de discerner, parmi ses assentiments certains, ceux qui sont fondés sur la vérité d'avec ceux qui n'ont d'autre appui qu'un sentiment irréfléchi ou peut-être un acte de volonté personnelle.*

*Avons-nous le moyen d'opérer ce discernement? Avons-nous un motif suffisant de garder tel ou tel assentiment et de rejeter tel ou tel autre; possédons-nous ce que Montaigne appelait «un instrument judiciaire» pour distinguer les premiers des seconds? En résumé, avons-nous un motif et une règle directrice de nos certitudes, un critère de vérité (vera cernere)?*

*Le problème critériologique peut donc s'énoncer provisoirement en ces termes: L'intelligence humaine possède-t-elle un critère de vérité, à l'effet de discerner entre un assentiment légitimement certain, parce que vrai, et un assentiment dont la fermeté a pour seul appui une disposition affective ou une tendance du sujet pensant?*

Selon Mercier, la certitude n'est rien d'autre qu'un sentiment, qui est certes très fort mais qui peut tout de même tromper. Il est possible en effet d'être certain de la vérité d'une proposition sans vraiment savoir si elle est vraie; il est même possible qu'une telle proposition soit fausse. Comme je l'ai déjà fait remarquer, il est également possible de savoir qu'une proposition est vraie sans en être certain; l'acquisition de la connaissance demande au raisonneur un effort intellectuel intense qui, souvent, le conduit à se rendre compte de sa faillibilité. Il doit donc être clair que la notion de certitude n'est pas nécessairement liée à celle de connaissance. Malheureusement, l'usage ne respecte pas toujours cette distinction. Par l'expression «je suis certain que», on entend parfois «je sais que», parfois «je suis persuadé que». Dans le premier cas, mais non dans le second, il y a une distinction entre un simple sentiment de certitude et la (vraie) certitude. Mercier adopte l'usage qui identifie la certitude à un sentiment, et je ferai de même.

## 2. Eléments d'histoire

Au Chapitre I j'ai rappelé que le problème des critères, ou de la connaissance, préoccupait beaucoup l'Ecole sceptique. Sextus Empiricus, en particulier, représentant tardif de cette

école [2e siècle après J-C], niait l'existence de preuves véritables. En fait, l'intérêt pour ces questions remonte au moins à Chrysippe [3e siècle avant J-C], l'un des membres les plus illustres de l'Ecole stoïcienne. A l'époque de Chrysippe déjà, on considérait le problème comme étant du ressort de la logique.<sup>1</sup> Chrysippe lui-même a été tenu longtemps pour le plus grand logicien de l'Antiquité (cf. Blanché [1970, pp. 91-92] et Gould [1971, p. 91]). Sextus Empiricus, dans son traité *Contre les logiciens*, qui est consacré à «l'étude du critère» (he peri ton kriterion zetesis) [*Adv. math.* vii. 27],<sup>2</sup> présente et commente le point de vue de Chrysippe concernant la question suivante: «existe-t-il un critère de ce qui est?» [*Adv. math.* vii. 29, 46-48]. Epictète [*Dissertat.* i. 17] explique pourquoi, pour Chrysippe, ce sujet fait partie de la logique:

*[...] on commence par la Logique, comme, lorsqu'il s'agit de mesurer le blé, on commence par examiner la mesure. Si nous ne déterminons pas d'abord ce qu'est une balance, comment serons-nous jamais capables de mesurer ou de peser quoi que ce soit? De même dans notre cas. Si nous ne possédons une connaissance exacte et précise du critère grâce auquel nous connaissons toutes les autres choses, serons-nous capables d'avoir aussi de l'une quelconque de ces choses une connaissance exacte et précise? Comment serait-ce possible?*

Que Chrysippe affirme qu'il existe bien un critère selon lequel on peut juger si des choses existent vraiment (cf. Gould

- 
- 1 A l'époque moderne, en revanche, certains logiciens ont refusé ce point de vue. Cf., par exemple, Lukasiewicz [1929, p. 8] selon lequel «these matters [the problem of what is truth, and whether there is any criterion of truth] do not belong to logic». D'autres logiciens modernes continuent à traiter du problème de la nature de la vérité; Tarski, rappelons-le, était l'auteur du célèbre article «Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen», et dans son article «Truth and Proof» il discute de la preuve en tant que critère de la vérité.
  - 2 Les deux livres «Contre les logiciens» forment la première division du traité «Contre les dogmatiques»; parfois, on les cite comme *Adversus dogmaticos* i et ii. La désignation *Adversus mathematicos* vii-xi renvoie à l'ensemble de «Contre les dogmatiques», qui vient à la suite du traité «Contre les professeurs» proprement dit. Ainsi, *Adversus mathematicos* vii et viii désignent les livres «Contre les logiciens».

[1971, p. 50]) ne surprendra personne, car l'École stoïcienne était une école dogmatique. Elle croyait, en effet, que la connaissance de la vérité existe et qu'on peut le savoir dans des cas particuliers. En revanche l'École sceptique, qui, historiquement, apporte un contrepoids au dogmatisme, affirmait que nous ne pouvons pas connaître la vérité ou, tout au moins, que nous ne pouvons pas savoir si nous la connaissons ou non. Ainsi, ce sont les sceptiques qui, pour Mercier, auraient tendance à «tout rejeter en bloc» et les dogmatiques qui garderaient toutes leurs croyances sans contrôle; les uns confonderaient l'absence de certitude et l'absence de connaissance, les autres la présence de certitude et celle de connaissance. Le grand débat entre dogmatiques et sceptiques nous intéresse ici dans la mesure où les mathématiques sont considérées comme un des bastions du dogmatisme.<sup>1</sup> Si, en effet, les mathématiques ne conduisent pas à de véritables connaissances, pourra-t-on espérer en trouver ailleurs?

### 3. Définitions et critères

Définir la notion de preuve ne semble pas poser trop de difficultés: on peut trouver une définition adéquate dans n'importe quel dictionnaire. Déterminer quels objets observables correspondent ou ne correspondent pas à une telle définition semble, en revanche, bien moins évident. En effet, pour reconnaître des preuves il ne suffit pas de disposer d'une définition de la preuve et de textes qui se donnent comme des preuves; il faut encore disposer d'au moins un critère qui permette de décider (du moins dans certains cas) si, oui ou non, une argu-

---

1 On lit souvent que le bastion a été ébranlé par la découverte d'antinomies au début de ce siècle, et que cette remise en cause a contribué à un regain d'intérêt pour les questions des fondements et de la philosophie des mathématiques. Cependant la vérité semble avoir été le contraire. Au lieu de défendre «le bastion», les mathématiciens se sont ralliés au point de vue critique. Il semble même que les recherches sur les fondements des mathématiques de Cantor, Frege, Peano, Hilbert et alia ont conduit à la découverte des antinomies.

mentation est vraiment une preuve. Une définition, par exemple celle d'une propriété, fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un objet possède la propriété. Un critère, en revanche, est un procédé que l'on peut employer afin de décider si un objet donnée possède effectivement la propriété.

Les notions de définition et de critère ne doivent pas être identifiées, et en général elles ont des extensions différentes. D'une part, une définition ne fournit pas nécessairement un critère de ce qu'elle définit. Le *Robert*, par exemple, définit la *preuve* comme «Ce qui sert à établir qu'une chose est vraie». Cette définition ne fournit pas le moyen d'identifier le «ce» dont il est question. D'autre part, un critère ne fournit pas nécessairement une définition de ce qu'il permet de distinguer. Dire, par exemple, qu'une proposition est soit vraie soit fausse permet d'identifier des propositions mais n'explique pas ce qu'est une proposition.

Si l'on accepte généralement que le rôle d'un critère n'est pas de définir les objets qu'il permet de distinguer, il semble moins bien compris qu'une définition, en tant que telle,<sup>1</sup> ne fournit aucun moyen de décider si la propriété qu'elle définit s'applique à un objet donné ou ne s'y applique pas. On a reproché à Tarski, par exemple, le fait qu'aucun critère universel de la vérité ne résulte de sa définition de ce concept (cf. Tarski [1944, pp. 363-364]). Une de ses réponses à ce reproche montre bien la distinction entre définition et critère:

*Some philosophers and methodologists of science are inclined to reject every definition that does not provide a criterion for deciding whether any given particular object falls under the notion defined or not. In the methodology of empirical sciences such a tendency is represented by the doctrine of operationalism; philosophers of mathematics who belong to the constructivist school seem to exhibit a similar tendency. In both cases, however, the people who hold this opinion appear to be in a small minority. A consistent attempt to carry out the program in practice (that is, to develop a science without using undesirable definitions) has hardly ever been made. It*

1 Les définitions «opérationnelles» contiennent certes leur propres critères, mais les deux finalités restent distinctes.

*seems clear that under this program much of contemporary mathematics would disappear, and theoretical parts of physics, chemistry, biology, and other empirical sciences would be severely mutilated. The definitions of such notions as atom or gene as well as most definitions in mathematics do not carry with them any criteria for deciding whether or not an object falls under the term that has been defined [Tarski 1969, p. 70].*

D'autres exemples de définitions qui ne fournissent pas leurs propres critères ne seront peut-être pas sans intérêt.

On peut facilement définir l'incommensurabilité d'une ligne par rapport à une autre ligne, mais il ne semble pas qu'il existe un critère universel de cette notion.

La définition du «plus grand nombre non parfait» paraît évidente, mais un critère universel de cette propriété exigerait un contrôle préalable d'une infinité de cas.

La relation «être père de» est tout à fait claire et elle peut être définie de façon rigoureusement scientifique. Cependant, la définition ne nous permet pas de décider qui est père de qui: bien que la signification de la relation en question ne pose de problème pour personne, les allégations de paternité portées devant les tribunaux restent difficiles à juger. Ce concept est parfaitement précis; il n'existe aucun cas de paternité flou. Et pourtant, nous ne disposons pas de critère pour ce concept. Combien doit-il être plus difficile d'en trouver un pour un concept vague?

Si la logique veut se donner comme l'étude des preuves, elle doit chercher à fournir non seulement une définition de la preuve mais aussi des critères. Selon Peirce [1902a (C.P. vol. 2, p. 119)], c'est même le «problème principal» de la logique de permettre une évaluation des raisonnements «de telle sorte que l'on place ceux qui sont mauvais dans une division et ceux qui sont bons dans une autre». La volonté de chercher ces critères semble plus fondamentale que les critères eux-mêmes. En effet, la notion de critère est associée à celle d'objectivité. Un critère est un moyen d'arriver à des jugements autonomes, qui ne dépendent pas de l'opinion ou de l'autorité de quelqu'un. Sans critère on risque de juger les preuves d'une façon subjective et la logique risque de reposer sur l'autorité. Ce qui va à l'encontre

de ce qu'on entend généralement par logique: on donne des preuves justement parce qu'on cherche l'objectivité. Donner des preuves sans chercher en même temps à écarter la subjectivité serait décidément un comportement inconséquent.

#### 4. La preuve en tant que critère et en tant qu'objet

Il convient de distinguer la vérification d'un théorème et celle d'une preuve. Une preuve peut vérifier un théorème, mais elle doit elle aussi être vérifiée en tant que preuve. Autrement dit, si une preuve constitue un critère (parmi d'autres) permettant de reconnaître la vérité d'une proposition, on a également besoin d'un critère qui permette de reconnaître l'authenticité de la preuve. Le double rôle d'une preuve peut se résumer par le tableau suivant:

critères:	PREUVE	?
objets:	PROPOSITION	PREUVE

La preuve figure à la première ligne en tant que critère (recherché) qui soumet des objets, en l'occurrence des propositions, à son contrôle. Elle figure à la seconde en tant qu'objet (donné) qui devrait lui aussi être soumis à contrôle par des critères. Mon travail consiste, d'une part, à montrer que le tableau reste à compléter et, d'autre part, à discuter des moyens de le faire.

Le double rôle de la preuve est à l'origine de deux régressions à l'infini. La première est la suivante.

#### 4.1. *La preuve en tant que critère: régression interne*

Pour savoir si une preuve fonctionne comme un critère valable—c'est-à-dire si sa conclusion est vraie—on a besoin d'un critère. Mais pour savoir si un tel critère est valable—s'il permet de distinguer une preuve réelle d'une «preuve» qui n'est qu'apparente—il semble qu'on doive *déjà* savoir quelles sont les bonnes preuves. Or si on le savait déjà, on n'aurait pas besoin de critère.<sup>1</sup>

Il s'agit d'une régression interne, ou plutôt d'un cercle vicieux, qui ne concerne que le rapport entre la preuve et son critère. Certains ont cherché à s'en sortir en jugeant de la preuve de façon indirecte, en examinant le résultat de l'application de divers critères à une même proposition. Bien avant qu'on ait prétendu donner une preuve du théorème des quatre couleurs, on acceptait *déjà*, par une longue expérience en cartographie, qu'il était vrai. Ainsi, des confirmations indépendantes des conclusions de nos preuves peuvent nous donner de bonnes raisons de croire que la preuve fonctionne bien en tant que critère. De Morgan [1831, pp. 7-8] s'exprime clairement sur ce point:

*Now, something must be reasoned upon, it matters not much what it is, provided that it can be reasoned upon with certainty. The properties of mind or matter, or the study of languages, mathematics, or natural history, may be chosen for this purpose. Now, of all these, it is desirable to choose the one which admits of the reasoning being verified, that is, in which we can find out by other means, such as measurement and ocular demonstration of all sorts, whether the results are true or not. When the guiding property of the loadstone was first ascertained, and it was necessary to learn how to use this new discovery, and to find out how far it might be relied on,*

1 «Pour juger des apparences que nous recevons des subjects, il nous faudroit un instrument judicatoire; pour verifier cet instrument, il nous y faut de la demonstration; pour verifier la demonstration, un instrument: nous voilà au rouet. Puis que les sens ne peuvent arrester notre dispute, estans pleins eux-mesmes d'incertitude, il faut que ce soit la raison; aucune raison s'establira sans une autre raison: nous voylà à reculons jusques à l'infiny» (Montaigne [1580, tome I, p. 677]). Cf. aussi Chisholm [1973, pp. 3-5].

*it would have been thought advisable to make many passages between parts that were well known before attempting a voyage of discovery. So it is with our reasoning faculties: it is desirable that their powers should be exerted upon objects of such a nature, that we can tell by other means whether the results which we obtain are true or false, and this before it is safe to trust entirely to reason.*

Si notre certitude à propos des résultats des preuves repose sur la reproductibilité par des moyens indépendants, comme l'affirme De Morgan, la situation est comparable à celle qui prévaut dans les sciences expérimentales ainsi que dans le cas des preuves par ordinateur (cf. Chapitre I, § 3.1). En effet, même en l'absence d'une vérification directe des procédures de preuve, plusieurs cas dans lesquels on peut trouver la conclusion recherchée par des moyens différents suffisent, selon De Morgan, pour se persuader qu'un type de raisonnement est valable. Ensuite, selon lui, on peut faire confiance en la seule raison. Il s'agit donc d'une confiance qui repose sur des bases empiriques.

Cette façon de procéder évite certes une régression à l'infini, mais elle ne permet de juger que de la preuve en tant que critère et non pas en tant qu'objet: une vérification indépendante permet de juger du *résultat* d'une preuve (d'une proposition), mais pas de la preuve en soi. Il reste possible, par exemple, qu'une «preuve» qui se termine par une proposition vraie obtienne cette conclusion malgré un certain nombre d'erreurs (ce qui montre qu'un critère de vérité n'est pas un critère de la *connaissance* de la vérité), ou qu'une «preuve» et sa «vérification» arrivent à la même conclusion fautive. Ainsi, même à propos de la preuve en tant que critère, la reproductibilité ne fournit pas toute la conviction que l'on souhaiterait. En effet, elle ne peut être concluante que dans des cas négatifs: aucune «preuve» qui aboutit à un résultat que l'on sait faux par ailleurs n'est une bonne preuve. Le fait qu'une argumentation se termine par un résultat qui a déjà été établi indépendamment comme vrai ne résout pas la question de savoir si elle est une preuve.

En effet, il ne suffit pas de s'assurer qu'une argumentation obtient une conclusion vérifiable; il faut encore qu'elle la prouve. Mais si elle la prouve, elle prouvera en elle-même

qu'elle obtient sa conclusion, et tout critère externe sera superflu. Ainsi toute argumentation dont les prémisses sont connues comme vraies et dont la conclusion s'ensuit de ces prémisses n'est pas une preuve; la qualité du raisonnement qui lie les prémisses à la conclusion doit également être prise en considération.

Selon Church [1956, pp. 53-54], il n'est pas nécessaire de prouver qu'une preuve est bien une preuve: «it is essential to the idea of proof that, to any one who admits the presuppositions on which it is based, a proof carries final conviction». Dans le même esprit, Tarski [1936a, p. 122] affirme qu'une preuve doit nous «convaincre pleinement». Selon ces auteurs, ce n'est pas la combinaison d'une argumentation donnée et d'un critère interne du raisonneur qui lui montre que l'argumentation *prouve* effectivement sa conclusion; c'est l'argumentation toute seule qui le montre, lorsqu'il s'agit bien d'une preuve. Et s'il fallait une preuve supplémentaire pour montrer qu'une preuve donnée doit être considérée comme une preuve, la «preuve» originale ne deviendrait une preuve qu'en présence de cette preuve supplémentaire mais pas sans elle.<sup>1</sup> Il est évident qu'on pourrait encore exiger une preuve de la preuve supplémentaire et qu'on serait conduit ainsi, comme Achille face à l'obstination de la tortue dans le récit de Lewis Carroll, à une deuxième régression à l'infini.

---

1 «Explaining a derivation is like explaining a 'joke'. If the explanation is needed to get the participant to laugh then it was not a joke. If the 'joke' plus the explanation elicits laughter then it is the combination which is the joke, not the 'joke' *simpliciter*. Likewise, if the explanation is needed to get the participant to validate the argument then the chain of reasoning was not cogent to the participant. If the added explanation succeeds then the original chain of reasoning with the explanation added is cogent, not the original chain of reasoning *simpliciter*» [Corcoran 1989, p. 3S].

#### 4.2. *La preuve en tant qu'objet: régression externe*

Si elle est valable, l'expression d'une preuve doit me convaincre non seulement de la vérité de sa conclusion mais aussi de sa propre validité. Ceci est clair: si on mettait en doute une preuve, il s'ensuivrait immédiatement qu'elle ne prouverait pas sa conclusion. C'est donc *dans la preuve même* qu'il faut chercher des critères de la preuve en tant qu'objet.

Certains estiment que le problème ne se résout que par une déclaration solennelle<sup>1</sup>—ce qui, évidemment, revient à dire qu'il est impossible à résoudre. Pour ma part, je crois qu'on pourra encore trouver de meilleurs moyens de sortir de l'impasse. Un de ces moyens consisterait bien entendu en un critère qui permettrait de reconnaître toute preuve véritable et seulement une telle preuve. Un tel critère, tout en étant hautement souhaitable, ne semble toutefois pas strictement nécessaire. En effet, il sera peut-être possible dans des cas particuliers de déterminer qu'une preuve est authentique même si l'on ne dispose pas d'un critère «universel». On peut très bien imaginer, par exemple, qu'il existe un critère applicable aux seules preuves syllogistiques. On sait que la logique traditionnelle a formulé des «règles», telles que «de deux prémisses négatives rien ne suit», qui permettent de reconnaître des modes syllogistiques qui, en général, sont *non* valides. Il s'agit là de critères qui sont négatifs et de surcroît partiels, dans la mesure où ils ne concernent que le cas particulier des «non-preuves» ayant la forme d'un syllogisme. Il n'en reste pas moins que lorsqu'on cherche à évaluer une preuve, la détermination de son inauthenticité n'est pas moins intéressante que celle de son authenticité; elle permet d'écartier non seulement le cas examiné, mais aussi toutes les «preuves» dans lesquelles se manifeste un défaut semblable.

Enfin, il ne faut pas oublier que chaque époque a établi un certain consensus à propos des preuves. Du moins n'y a-t-il que peu de cas controversés, et c'est en cela que la polémique à

1 Cf. Ayer [1985, pp. 271-272]: «To secure this guarantee [that inference should in no case lead from a true premise to a false conclusion], the formal principle of inference would have to be proved, and then we should again be asked to show that what we take to be a proof really is so, a challenge which if taken far enough can be met only by asseveration».

propos de la «preuve du théorème des quatre couleurs» est remarquable. Le plus souvent, on accepte certains discours et on en refuse d'autres, sans qu'il y ait de divergences importantes parmi les «consommateurs de preuves». <sup>1</sup> Ceci laisse entendre que l'on applique bien des critères, ne serait-ce que tacitement, même s'il n'est pas évident qu'on puisse les identifier.

### 5. Evaluation des critères

Dans le passage cité plus haut, Church parle en particulier de preuves formalisées. Toute proposition a en effet une forme logique, et on n'a pas à chercher en dehors de l'argumentation pour trouver les formes des propositions qui la composent. La forme d'une argumentation est donc en elle-même susceptible de fournir des critères objectifs: «la méthodologie actuelle s'efforce de remplacer les valorisations subjectives dans l'examen des définitions et des preuves par des critères de nature objective, et de faire dépendre le jugement à porter sur la correction des définitions et des preuves de leur structure exclusivement, c'est-à-dire de leur forme extérieure» (Tarski [1936a, p. 123]).

Les preuves formalisées selon les principes des systèmes modernes de logique sont décidables. Dans ces systèmes, la preuve est généralement définie comme une suite ordonnée et finie d'expressions bien formées du système, telles que chacune d'elles, ou bien soit un axiome, ou bien résulte de l'application d'une règle du système à une ou plusieurs expressions bien formées qui la précèdent (cf. Miéville [1985, p. 27] et ici même p. 7 note 1). Comme, dans un tel système, il est possible de décider de toute expression si elle appartient ou non à l'ensemble des expressions bien formées et, si c'est le cas, à celui des axiomes, et comme il est possible de décider de toute inférence

---

1 Les rares dissidents comme, de nos jours, l'Ecole intuitionniste, ne rejettent pas tout en bloc, mais seulement une partie délimitée de l'édifice scientifique, qui repose sur des thèses bien précises.

si elle résulte ou non de l'application d'une règle, l'ensemble des preuves du système est lui aussi décidable.

Du point de vue de la recherche de critères, différents problèmes sont inhérents au programme de formalisation. Tout d'abord, si l'ensemble des preuves dans un système donné est décidable, on n'a pas besoin d'un critère de preuves dans ce système.<sup>1</sup> L'algorithme de décision suffit, et la question de l'identité des preuves du système ne se pose plus. On pourrait néanmoins penser que par l'élaboration même de systèmes de ce genre, on est sur le point de disposer d'un critère de la preuve. Rappelons cependant que nous cherchons un critère de la preuve *en général*: un critère de toute preuve qui prouve sa conclusion à quelqu'un. Or il est évident qu'il existe des preuves, par exemple celles qu'on trouve en ouvrant un livre de mathématiques, qui prouvent leurs conclusions à de nombreux lecteurs mais qui ne sont données dans aucun système de logique. C'est précisément à propos de celles-là que la question de critères se pose.<sup>2</sup>

Aucun critère dont le champ d'application se limite aux argumentations d'un système particulier ne peut avoir la généralité recherchée. En effet, si la chose était possible, l'auteur du système devrait connaître au préalable toutes les inférences valides possibles. Si sa liste n'était pas exhaustive, rien n'empêcherait l'existence d'une preuve, qui prouve donc sa conclusion à quelqu'un, mais qu'un algorithme de décision pour le système en question rejette parce qu'elle utilise une règle qui ne figure pas parmi celles qui sont acceptées au préalable pour le système.

L'idée moderne de chercher des critères objectifs dans les formes extérieures d'argumentations ne va pas sans poser quelques difficultés. De nombreux manuels d'introduction à la logique, en effet, se trompent encore en cherchant à l'appliquer. Selon Oliver [1967, p. 470], «The usual discussion either

1 La non-nécessité d'un critère de preuves dans un tel système, ainsi que la prédominance de systèmes de ce genre dans les recherches actuelles, sont peut-être parmi les raisons pour lesquelles on ne se préoccupe pas plus des critères de preuves en général.

2 Plutôt que de chercher des critères qui auraient permis de distinguer le bon et le mauvais dans les argumentations, on a cherché, en général, à construire des systèmes dans lesquels le mauvais—plus précisément, le mauvais reconnu—ne pourrait pas entrer.

describes the form of the [fallacious] argument or explicitly displays the form schematically, and the reader is instructed that all arguments having these forms are invalid». Parmi les mieux connues de ces «formes fallacieuses» on trouve celle dite de «l'affirmation du conséquent»: à partir d'une conditionnelle et de (l'affirmation de) son conséquent, on conclut à son antécédant. L'argument suivant constitue cependant un contre-exemple à l'assertion que tout argument de cette forme est non valide.

Si Cicéron est Tullius, alors Tullius est Cicéron.

Tullius est Cicéron.

? Cicéron est Tullius.

Cet argument est valide. En effet, «Cicéron est Tullius» découle de la seule prémisse «Tullius est Cicéron». Ainsi, une approche qui ne tiendrait compte que de la conformité de cet argument au sophisme de l'affirmation du conséquent nous conduirait à le rejeter.

Les systèmes standard de logique du premier ordre, en revanche, interprètent correctement l'idée d'un critère formel. Tous ces systèmes admettraient la déduction suivante:

1	$(a=b \supset b=a)$	PREMISSE
2	$b=a$	PREMISSE
?	$a=b$	
3	$a=b$	2, symétrie de l'identité

D'ailleurs, ces systèmes ne rejettent pas les déductions non construites selon une certaine règle (p.ex. le *modus ponens*) mais seulement celles qui ne sont pas construites selon le *système* de règles. En fait, il n'y a pas de *règle* dans ces systèmes qui permette de rejeter une déduction. En particulier, le sophisme de l'affirmation du conséquent n'est pas une telle règle. Les systèmes standard indiquent comment une déduction se construit et affirment en substance que toute argumentation qui n'est pas construite de la manière indiquée n'est pas une déduction.

Le résultat de l'application d'un critère peut ainsi être concluant ou non. Toute procédure d'évaluation présuppose un champ d'application (une classe d'objets auxquels il s'applique).

Le champ d'application d'un critère de la preuve est celui des argumentations. Un résultat négatif faux—un «faux négatif», pour reprendre la terminologie de la médecine—est l'erreur qui consiste à estimer qu'une argumentation ne prouve pas sa conclusion lorsqu'elle la prouve vraiment. Cette erreur est tout aussi grave que celle qui consiste à croire qu'une argumentation est une preuve alors qu'en réalité elle ne l'est pas—un «faux positif», pour ainsi dire. C'est aussi une erreur que de ne pas prendre une décision dans un sens ou dans l'autre alors que les faits connus sont suffisants pour l'autoriser.

Une procédure d'évaluation est *complète* si elle est concluante à propos de n'importe quel objet dans son champ d'application, et *fondée* si elle ne donne jamais ni un faux négatif ni un faux positif. Afin d'évaluer un critère, il semble nécessaire de pouvoir déterminer s'il est complet et fondé pour un champ d'application donné. Le syllogisme aristotélicien, en tant que critère de la validité, est fondé mais non complet, parce qu'il ne fournit ni de faux négatifs ni de faux positifs mais il est souvent non concluant. Les tables de vérité, en tant que critère de la validité, fournissent une méthode complète mais non fondée. En effet, cette méthode est toujours concluante, mais elle peut conduire à de faux négatifs.

## CHAPITRE III

### LA PREUVE ET SES CONCEPTS FONDATEURS

[...] je suis persuadé que, de vérités déjà connues  
je puis légitimement déduire, au moyen du raisonne-  
ment, d'autres vérités [...]

D.J. MERCIER

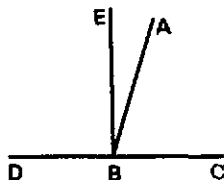
#### 1. Preuves, déductions et argumentations

Voici, à titre d'exemple, une preuve donnée par Euclide  
(*Eléments* I.13 [trad. PEYRARD]):

*Si une droite placée sur une droite fait des angles, elle fera  
ou deux angles droits, ou deux angles égaux à deux droits.*

*Qu'une droite AB placée sur une droite CD fasse les angles  
CBA, ABD; je dis que les angles CBA, ABD sont ou deux droits,  
ou égaux à deux droits.*

*Car si l'angle CBA est égal à  
l'angle ABD, ces deux angles sont  
droits [déf. 10]. Si non, du point B  
conduisons BE à angles droits à CD  
[I.11]; les deux angles CBE, EBD  
seront droits; et puisque l'angle  
CBE est égal aux deux angles CBA,  
ABE, si l'on ajoute l'angle commun  
EBD, les angles CBE, EBD seront  
égaux aux trois angles DBE, EBA,  
ABC [notion commune 2].*



*De plus, puisque l'angle DBA est égal aux deux angles DBE, EBA, si l'on ajoute l'angle commun ABC, les angles DBA, ABC seront égaux aux trois angles DBE, EBA, ABC [not. comm. 2]. Mais on a démontré que les angles CBE, EBD leur sont égaux; et les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles [not. comm. 1]; donc les angles CBE, EBD sont égaux aux angles DBA, ABC; mais les angles CBE, EBD sont deux angles droits; donc les angles DBA, ABC sont égaux à deux droits. Donc, si une droite placée sur une droite fait des angles, elle fera ou deux angles droits, ou deux angles égaux à deux droits.*<sup>1</sup>

Aristote a analysé la preuve en trois parties distinctes: (1) la conclusion, (2) les prémisses et (3) le raisonnement qui montre que la conclusion s'ensuit des prémisses [cf. *An. post.* A7, 75a40 ainsi que *An. pr.* A1, 24b24-26]. Dans l'exemple ci-dessus, Euclide énonce d'abord la conclusion. Ensuite, il considère un objet arbitraire du même genre que celui dont il est question dans la conclusion, une droite AB placée sur une droite CD qui fait des angles. Cet objet possède certaines propriétés qui ont déjà été posées ou prouvées: ce sont les prémisses. Euclide les introduit au fur et à mesure qu'il en a besoin. Sa preuve se fonde sur ces prémisses et montre que la conclusion en découle. En montrant par un raisonnement qu'une conclusion s'ensuit de prémisses que l'on sait vraies, on *montre* que la conclusion est vraie. En montrant que la conclusion est vraie on peut *savoir* qu'elle est vraie: on le prouve. Cependant même si cette procédure est correcte, on peut se tromper en cherchant à l'appliquer. On peut croire, par exemple, qu'une prémisses est vraie alors qu'en réalité elle ne l'est pas. On peut estimer que la conclusion s'ensuit de l'ensemble des prémisses alors que ce n'est pas le cas, ou qu'un raisonnement le montre alors qu'il est fallacieux.

Cette preuve d'Euclide est typique en ce sens que sa forme extérieure ne correspond *pas* aux trois parties de la preuve mises en évidence par Aristote. Euclide indique bien la conclu-

---

1 Les «notions communes» utilisées dans cette preuve sont les suivantes:

1. Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.
2. Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les tous seront égaux.

sion qu'il a l'intention de prouver, mais il est moins explicite à propos des prémisses. Celles-ci ne sont pas données ensemble au début mais çà et là dans tout le développement de la preuve. L'énoncé par Aristote de la structure de la preuve—de la répartition des différentes propositions dans les trois catégories: prémisses, raisonnement et conclusion—était donc bien une découverte, puisque la chose est loin d'être évidente.

Aucune «fausse preuve» n'est une preuve. La correction d'une preuve dépend de chacune de ses trois parties: toutes les prémisses doivent être vraies et connues comme vraies par le raisonneur qui donne la preuve, la conclusion doit s'ensuivre de ces prémisses vraies et le raisonnement doit le montrer, de manière fondée, pour le raisonneur.

Même si le raisonneur rejette ou ignore la vérité de l'une des prémisses dans l'exemple d'Euclide, cela ne l'empêchera pas nécessairement de reconnaître que la conclusion découle des prémisses et que *Eléments* 1.13 le montre.<sup>1</sup> En effet, quelle que soit la valeur de vérité des prémisses, on a tout de même une conclusion, un ensemble de prémisses et un raisonnement qui montre que la conclusion s'ensuit des prémisses. On a une *déduction* (ce qu'Aristote appelait un *sylogisme*), qui se distingue d'une preuve (un *sylogisme scientifique*), en ce qu'elle ne présuppose ni la vérité ni la connaissance de la vérité des prémisses. *Déduction* est donc une désignation plus générale que *preuve*. Une preuve est un genre de déduction; la classe des preuves est contenue dans celle des déductions.

Une des contributions les plus importantes d'Aristote est d'avoir observé que toute preuve est une déduction, mais que toute déduction n'est pas nécessairement une preuve; plus précisément, toute déduction dont les prémisses sont connues comme vraies est une preuve et réciproquement, toute preuve est une déduction dont les prémisses sont connues comme vraies [cf. *An. pr.* A4, 25b28-31].

Si la distinction entre preuve et déduction dépend de la connaissance des prémisses, elle dépend, en définitive, de ceux qui

<sup>1</sup> Zermelo [1908, p. 128] fait remarquer que certains de ceux qui critiquent sa preuve du théorème du bon ordre ne font pas d'objection à sa déduction proprement dite mais rejettent l'une des prémisses (à savoir l'axiome du choix).

savent ou ne savent pas que les prémisses sont vraies. Il peut arriver qu'un seul et même objet qui est une preuve pour un raisonneur soit une simple déduction (et non une preuve) pour un autre; si le premier raisonneur sait que les prémisses de la déduction sont vraies, ce qui est alors une preuve pour lui n'est qu'une déduction pour celui qui n'a pas ces mêmes connaissances. Il peut également arriver qu'un seul et même objet dont au moins une prémisses est fausse représente, pour un même raisonneur, une preuve—à tort—s'il croit savoir que toutes les prémisses sont vraies, et une déduction dès qu'il reconnaît que ce n'est pas le cas. Ainsi, la distinction preuve/déduction n'a de sens que par rapport aux sujets qui entreprennent une activité déductive, et plus particulièrement à l'état de leurs connaissances.

Le raisonneur qui déduit une certaine conclusion à partir d'un certain ensemble de prémisses, mais qui ne sait pas si ces prémisses sont vraies, fait exactement le même travail que celui qui *prouve* la conclusion à partir du même ensemble de prémisses. (Deux voyageurs qui prennent ensemble le même train à destination de Paris font le même voyage, même si l'un d'entre eux ignore de quelle gare ils sont partis!) Seul l'état des connaissances préalables du raisonneur permet de justifier une distinction entre preuve et déduction.

Ce qu'on *montre* en donnant une preuve, ce n'est pas la vérité des prémisses (qui sont en principe connues comme vraies au préalable) mais le fait que la conclusion découle de celles-ci. Aucune preuve ne montre la vérité de ses propres prémisses. Comme leur valeur de vérité est connue avant la donnée d'une preuve, l'*activité* de prouver ne diffère en rien de celle de déduire.

En règle générale, il n'appartient pas à la logique d'assurer la vérité d'une prémisses, mais à la science à propos de laquelle cette prémisses se prononce. Seule la déduction concerne la logique. Ainsi, lorsqu'on affirme que la logique est l'étude des preuves, on entend en fait l'étude des *déductions* puisqu'elles seules sont du ressort de la logique.

Il ne faut nullement conclure cependant que la logique ne s'intéresse pas à la valeur de vérité des propositions particulières. En cherchant à souligner la distinction entre la dichotomie vrai/faux, d'une part, et celle valide/non valide,

d'autre part, on a tendance à exagérer l'attitude de la logique, ou plutôt du logicien, en affirmant qu'il n'y a que le rapport entre prémisses et conclusion qui l'intéresse, et qu'il ne s'occupe pas de la question de savoir si telle proposition est vraie ou fausse. Mendelson, par exemple, affirme que «The truth or falsity of the particular premisses and conclusions is of no concern to logicians. They want to know only whether the premisses imply the conclusion» [1964, p. 1].<sup>1</sup> De telles affirmations sont fréquentes et servent des fins rhétoriques irréprochables.<sup>2</sup> Néanmoins, il importe de reconnaître qu'il s'agit bien d'une exagération qui de surcroît est fausse. En effet, une telle affirmation ne tient pas compte du cas où la proposition en question concerne la logique elle-même (comme par exemple lorsqu'il s'agit de la transitivité de la relation de conséquence logique, ou du principe du tiers exclu), mais le logicien est fortement intéressé par la valeur de vérité de telles propositions.

D'une certaine façon, Mendelson (comme les autres auteurs qui commettent la même exagération) se contredit lui-même, parce qu'il sera obligé de reconnaître que les deux notions qu'il cherche à contraster sont profondément liées. En effet, si un ensemble de prémisses *implique* une conclusion, la vérité des prémisses entraîne celle de la conclusion. Lemmon tient compte de cette exigence lorsqu'il affirme [1965, p. 2]: «Now the logician is primarily interested in conditions for [validity] rather

---

1 Cf. Corcoran [1972, p. 26], «Usually, the actual truth-values of members of [a set of sentences] are irrelevant to logic»; DeLong [1970, p. 95], «[...] we are not concerned with the truth or falsehood of the propositions themselves, but only with the way the truth or falsehood of a given proposition relates to the truth or falsehood of another proposition»; Tarski [1969, pp. 69-70], «Consider [...] a sentence in the language of elementary [...] geometry, say 'the three bisectors of every triangle meet in one point'. If we are interested in the question whether this sentence is true [...] only a geometrical inquiry may enable us to decide [...]. Analogous remarks apply to sentences from the domain of any other particular science: to decide whether or not any such sentence is true is a task of the science itself, and not of logic or the theory of truth».

La même motivation est peut-être à l'origine de la remarque de Lukasiewicz selon laquelle la logique n'a rien à voir avec la vérité (cf. ici même, p. 26 note 1).

2 Mendelson reconnaît tacitement l'exagération lorsqu'il affirme aussitôt après que le but principal de la logique mathématique est de faciliter la compréhension de la notion de preuve mathématique.

than the actual truth or falsity of premisses and conclusion; but he may be secondarily interested in truth and falsity because of this connection between them and [validity]».

L'aspect le plus important d'une déduction est épistémique. Il ne suffit pas en effet que sa conclusion s'ensuive de son ensemble de prémisses; encore faut-il le *montrer*. On peut imaginer un discours qui a la structure d'une déduction mais qui ne présente pas cette propriété de montrer (soit parce que la conclusion ne découle pas des prémisses, soit parce que le discours utilise des inférences qui ne sont pas connues comme valides). On dira qu'il s'agit d'une *argumentation*.

De même que toute déduction est une argumentation, de même toute argumentation n'est pas nécessairement une déduction. Plus précisément, la classe des argumentations et celle des déductions sont dans un rapport de genre à espèce. En effet, on peut définir une déduction comme une argumentation dont le raisonnement est fondé, c'est-à-dire montre que sa conclusion s'ensuit de ses prémisses. La classe des preuves, étant une des espèces qui forme la classe des déductions, est donc une sous-espèce de la classe des argumentations. Une autre sorte d'argumentation est la classe de ce qu'on appelle les paradoxes; un paradoxe est une argumentation dont le raisonnement donne l'apparence de montrer qu'une conclusion qu'on croyait fautive découle de prémisses qu'on croyait vraies. Un paradoxe peut «se résoudre» de diverses façons: contrairement aux apparences, il est possible que la conclusion ne découle *pas* des prémisses, autrement dit qu'il s'agisse d'une simple argumentation dont le raisonnement n'est pas fondé; mais il est également possible qu'il s'agisse en réalité d'une déduction, autrement dit que le raisonnement soit parfaitement fondé mais que la conclusion soit vraie ou qu'au moins l'une des prémisses soit fautive.

Au dix-septième siècle déjà, Scipion Dupleix avait résumé les rapports entre preuve, déduction et argumentation [1603, p. 43]:

*Les interpretes Grecs d'Aristote disent que le sujet de la Logique c'est la Demonstration. Scot le subtil tient que c'est plustot le syllogisme, que les Latins appellent Ratiocination, comme qui diroit Raisonnement. Les Arabes generalisent encore davantage ce sujet, disant que c'est l'argumentation.*

*Lesquelles trois opinions peuvent être rapportées commodément l'une à l'autre. Car l'argumentation contient sous soi le syllogisme et la démonstration; et le syllogisme contient aussi sous soi la démonstration. Ainsi l'un dépend de l'autre comme l'espece du genre.*

## 2. Arguments, raisonnements et conséquence logique

Un ensemble de propositions (appelées «prémisses») associé à une proposition (appelée «conclusion») constitue un *argument*. Contrairement à ce que son nom semble indiquer, un argument, en soi, ne montre strictement rien. Par exemple, l'argument composé des prémisses fondamentales des *Grundgesetze* de Frege et de la conclusion « $0 = 1$ », bien que valide,<sup>1</sup> ne montre pas que les prémisses impliquent la conclusion; pour cela, il faut encore raisonner. Un raisonnement qui montre un rapport entre prémisses et conclusion ne fait pas partie de l'argument, mais vient s'ajouter à lui.

On peut cependant utiliser un argument pour signaler ce qu'on a l'intention de montrer. Dans un tel cas, l'argument annonce une déduction que l'on voudrait effectuer en indiquant son point de départ et son point d'arrivée. Une déduction est en effet un argument auquel on ajoute un raisonnement qui montre, par étapes successives, que la conclusion s'ensuit des prémisses. Annoncer un projet de déduction au moyen d'un argument rappelle une pratique quelque peu vieillie du théâtre et des narrations consistant à présenter comme argument un exposé sommaire du sujet qui sera développé en détail. Il reste toutefois la différence qu'il n'est pas toujours possible de développer un argument logique au point d'arriver à une déduction.

Seule une argumentation qui montre, de manière fondée, que sa conclusion s'ensuit de ses prémisses mérite le nom de *déduction*. Par définition donc, l'aspect épistémique est essentiel à la notion de déduction. Rappelons qu'un argument, en revanche, ne montre rien; sa nature est ontique et non épistémique. On

1 Russell a montré que les axiomes du système conduisent à une contradiction!

sait que les prémisses fondamentales de l'arithmétique impliquent la conjecture de Goldbach, soit «tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers», ou qu'elles ne l'impliquent pas. Mais on ne sait pas lequel est le cas. Voilà donc deux arguments dont un est nécessairement valide mais non connu comme tel. Il est clair que celui qui *est* valide ne montre pas sa validité—sinon sa validité serait connue.

Un argument est *valide* si, et seulement si, le contenu de la conclusion est lui-même (déjà) contenu dans celui des prémisses. En d'autres termes, un argument est valide si la vérité de toutes ses prémisses entraîne nécessairement la vérité de sa conclusion. Il s'ensuit qu'un argument est *non valide* s'il y a dans le contenu de la conclusion quelque élément qui n'est pas dans celui des prémisses, en particulier si la conclusion est fautive et toutes les prémisses sont vraies. Aucune proposition fautive ne s'ensuit logiquement de propositions vraies. Dire qu'un argument est valide est tout simplement une autre façon de dire que l'ensemble de ses prémisses *implique* logiquement la conclusion ou, ce qui revient au même, que la conclusion est une *conséquence* logique des prémisses.

Examinons cette notion au moyen d'un exemple. Il s'agit d'une paraphrase d'un sophisme classique.

*Mon père est paysan. Mon voisin me demande si un homme qui s'approche de loin, et que je vois mal, est paysan. Quand je lui dis que je ne sais pas, il répond: «c'est votre père et vous ignorez que votre père est paysan».*

«Mon voisin» de l'exemple a partiellement raison, puisqu'il est vrai que la proposition «mon père est paysan» implique, en fait, «cet homme est paysan». Mais la première proposition n'implique pas *logiquement* la seconde. Pour cela, il faudrait expliciter une prémisses supplémentaire telle que «cet homme est mon père».<sup>1</sup> Le contenu de la conclusion n'est pas compris dans celui des prémisses; par conséquent, il n'y a pas ici une relation d'implication logique.

---

1 Ainsi, le sophisme repose sur l'introduction subreptice d'une supposition que l'on pourrait qualifier de «prémisse de contrebande».

Il importe de remarquer que même lorsqu'il existe une telle relation, la chose n'est pas forcément évidente. Le verbe *impliquer* signifie en effet «plier dans, envelopper», et lorsqu'il y a implication logique, il faut «déplier» les prémisses, pour ainsi dire, afin de «sortir la conclusion de l'enveloppe» et de montrer que le contenu de la conclusion est entièrement compris dans celui des prémisses.<sup>1</sup> Il faut en effet de nouveau distinguer le fait d'être compris dans et la connaissance de ce fait.

### 2.1. Détermination de la validité

Dans une classe de mathématiques il arrive souvent que l'on demande aux élèves de prouver un théorème de géométrie à partir de théorèmes déjà prouvés. Mais le fait que ces théorèmes impliquent la conclusion ne signifie pas que tous les élèves vont faire le travail correctement. «Etre valide» et «être connu comme valide» sont deux propriétés distinctes. Les théorèmes déjà prouvés ainsi que le théorème qu'ils impliquent constituent un argument valide, mais cet argument ne montre pas que la conclusion s'ensuit des prémisses. Un argument valide ne montre jamais sa propre validité; pour cela, il faut un *raisonnement* qui lie les prémisses à la conclusion et qui montre que les deux membres de l'argument sont dans une relation de conséquence logique. On peut caractériser la déduction comme un argument valide auquel on ajoute un raisonnement qui montre la validité de l'argument. On dit qu'un tel raisonnement est *fondé*; un raisonnement qui ne montre pas la validité d'un argument valide, ou qui prétend montrer la validité d'un argument non valide, est *fallacieux*.

On arrive à la connaissance de la validité d'un argument—on «déplie» le contenu des prémisses—au moyen d'une déduction. Si on peut déduire («déplier») la conclusion à partir des prémisses, cela signifie que le contenu de la conclusion est compris dans celui des prémisses. Si la relation n'existe pas entre les

---

1 Selon Thom [1970, p. 230], «[...] toute démonstration est une 'maïeutique': il s'agit de recréer chez le lecteur les processus psychologiques propres à la manifestation de la vérité implicite, dont il détenait toutes les données mais qui restait voilée dans l'informulé».

prémises et la conclusion, aucune déduction n'est possible. On ne peut pas mettre en évidence ce qui n'est pas le cas. Le critère classique de la relation de conséquence logique, soit de la validité d'un argument, qui remonte à Aristote, est de pouvoir exhiber un raisonnement fondé conduisant des prémisses à la conclusion. Le critère est donc celui de la déductibilité.

Si, par l'application de cette méthode, la détermination de la validité ne semble pas poser de difficulté, historiquement elle a donné lieu à des confusions. Par exemple, la validité des syllogismes catégoriques de la quatrième figure a été débattue pendant des siècles et certains la débattaient encore aujourd'hui.<sup>1</sup> Rappelons que, sans le dire explicitement, Aristote a reconnu la validité de toutes les inférences qui ont été traitées ultérieurement comme modes de la quatrième figure par certains logiciens. Il est difficile d'établir s'il rejetait la quatrième figure ou s'il l'a simplement négligée. Face à cette ambiguïté, la controverse a éclaté aussitôt après sa mort. Certains auteurs se comportent comme si un argument n'est valide que si Aristote a dit qu'il l'est. La syllogistique scolastique du moyen âge, en particulier, n'admettait que trois figures. On trouve des raisons diverses pour rejeter la quatrième figure. Selon Maritain [1933, p. 224, n. 22],

*Ce mot de figure est pris par analogie avec la «figure» triangulaire. Dans le triangle trois points unissent trois lignes, dans le Syllogisme trois termes unissent trois propositions. Et comme il y a trois espèces de triangles (équilatéral, isocèle, scalène), il y aura semblablement trois figures du Syllogisme.*

On dit parfois de cette figure qu'elle est «moins naturelle» que les autres et «contraire aux formes de la pensée réelle». J.N. Keynes [1884, p. 328, n. 2] cite un certain Père Clarke, qui semble considérer la quatrième figure comme un ennemi personnel:

---

1 Si la conclusion est de la forme S-P (sujet-prédicat), les deux prémisses de cette figure sont des formes P-M et M-S où P désigne le prédicat de la conclusion, M un «moyen terme» et S le sujet de la conclusion.

*Ought we to retain it? If we do, it should be as a sort of syllogistic Helot, to shew how low the syllogism can fall when it neglects the laws on which all true reasoning is founded, and to exhibit it in the most degraded form which it can assume without being positively vicious. Is it capable of reformation? Not of reformation, but of extinction... ..Where the same premisses in the first figure would prove a universal affirmative, this feeble caricature of it is content with a particular; where the first figure draws its conclusion naturally and in accordance with the forms into which human thought instinctively shapes itself, this perverted abortion forces the mind to an awkward and clumsy process which rightly deserves to be called 'inordinate and violent'.*

On sait que Leibniz, comme d'ailleurs Arnauld et Nicole, a admis la quatrième figure.<sup>1</sup> Les auteurs de la Logique de Port-Royal, il est vrai, l'ont admise presque en s'en excusant [1662, pp. 189-190]:

*[Le moyen terme est] attribut dans la majeure, & sujet en la mineure. Ce qui peut faire une 4. figure: étant certain que l'on peut conclure quelquefois nécessairement en cette manière, ce qui suffit pour faire un vrai syllogisme [...]. Néanmoins parcequ'on ne peut conclure de cette quatrième manière, qu'en une façon qui n'est nullement naturelle, & où l'esprit ne se porte jamais; Aristote & ceux qui l'ont suivi n'ont pas donné à cette manière de raisonner le nom de figure. Galien a soutenu le contraire, & il est clair que ce n'est qu'une dispute de mots, qui se doit décider en leur faisant dire de part & d'autre ce qu'ils entendent par le mot de figure.*

Les auteurs de Port-Royal marquent ainsi le passage d'un ancien point de vue à un nouveau: ils n'acceptent pas les critiques

---

1 Leibniz a anticipé le point de vue moderne en reconnaissant les vingt-quatre modes valides du syllogisme catégorique au lieu d'en écarter, par exemple, les modes «affaiblis» subalternes. Pour lui, un argument valide «superflu» n'en est pas moins un argument valide, ce qu'il l'est aussi dans ma définition.

dirigées contre la quatrième figure comme déterminantes, mais ils ne se sentent pas encore libérés de les ignorer.

De Morgan, quant à lui, admet la quatrième figure sans réserve [1850, p. 57]:

*I have always looked with surprise upon the arguments for and against the fourth figure. If the inferences therein made be good inferences—if the man who can establish the premises, does establish the conclusion [...], how can it be said that the fourth figure is not to be used? there it is, and it cannot be reasoned out of existence.*

Toute la controverse, en particulier l'hésitation de Port-Royal et même l'imprécision de De Morgan, indique que ces auteurs ne disposent pas de critères pour l'application des termes «valide» et «non valide». <sup>1</sup> En effet, les objections qu'ils opposent à la quatrième figure, par exemple qu'elle ne serait pas «naturelle», ne sont pas pertinentes. Si l'on accepte les deuxième et troisième figures, il faut accepter la quatrième aussi, parce qu'elle repose sur les mêmes bases.

Dans un autre ouvrage, De Morgan fait la déclaration suivante [1847, p. 135]:

*Whatever has right to the name P, and also to the name Q, has right to the compound name PQ. This is an absolute identity, for by the name PQ we signify nothing but what has right to both names. According  $X)P+X)Q=X)PQ^2$  is not a syllogism, nor even an inference, but only the assertion of our right to use at our pleasure either one of two ways of saying the same thing instead of the other. But can we not effect the reduction syllogistically? Let Y be identical with PQ; we have then  $PQ)Y$  and  $Y)PQ$ , and also  $Y)P$  and  $Y)Q$ . Add to these  $X)P$  and  $X)Q$ , and we have all the propositions asserted. But we cannot deduce from them alone  $X)Y$ , the result wanted, by any syllogistic combination of the six. Nor must it be thought*

1 A-t-on besoin d'un critère pour déterminer si tel auteur disposait d'un critère pour tel concept?

2 L'expression  $X)P+X)Q=X)PQ$  se lit «tout X est P, tout X est Q, donc tout X est P et Q».

*surprising that we cannot, by a train of argument, arrive at demonstration of it being allowable to give to anything which has right to two names, a third name invented expressly to signify that which has such right. We might as well attempt to syllogize into the result, that a person who sells the meat he has killed is a butcher.*

Que l'inférence «tout X est P, tout X est Q, donc tout X est P et Q» ne soit pas permise dans une syllogistique particulière, je veux bien. Mais qu'elle ne soit pas une inférence? Il s'agirait bien d'une inférence même si elle n'était pas valide—et toute la discussion laisse entendre que De Morgan la considère bien comme valide, tout comme son exemple du boucher. Ainsi, il met en évidence non pas la non-validité d'une inférence mais les limitations de son appareil déductif. Comme il lui manque le moyen de justifier ses assertions, il est presque amené à permettre à un système de logique de dicter ce qui constitue un raisonnement fondé (alors que, de toute évidence, la réalité est l'inverse).

On trouve facilement des confusions semblables dans des travaux plus récents. Certains auteurs, par exemple, prétendent qu'aucun argument qui correspond au schéma de «l'affirmation du conséquent» n'est valide (cf. notamment Salmon [1963, pp. 30-31]; Stewart & Blocker [1987, p. 61 et p. 66]).<sup>1</sup>

Dans le même esprit, on pourrait examiner le rejet du «tiers exclu» par les Intuitionnistes ainsi que la mise en cause de la règle d'introduction de la disjonction par les logiciens de l'école Anderson-Belnap.

Tout en admettant le bien-fondé du critère classique de la validité, soit que toute conclusion déductible d'un ensemble de prémisses en est une conséquence logique, il faut reconnaître qu'il s'agit d'une méthode qui ne conduit pas toujours à un résultat. Il peut arriver en effet que l'on ne trouve pas de déduction de la conclusion à partir des prémisses données; dans une telle situation, on ne peut affirmer ni que l'argument est valide ni qu'il est *non* valide (ce qui montre que déductibilité n'est pas synonyme de validité). Il nous faut non seulement un critère de

<sup>1</sup> Ici même, à la fin du deuxième chapitre, je donne l'exemple d'un argument qui «affirme le conséquent» mais qui est néanmoins valide (cf. p. 37).

validité mais aussi un critère de non-validité. Avec un tel critère on pourra décider dans certains cas qu'un argument n'est pas valide et, par conséquent, qu'aucune déduction n'est possible; mais si ce critère «négatif» ne donne pas de résultat, on ne pourra rien décider.

## 2.2. Détermination de la non-validité

Le critère classique de la non-validité d'un argument remonte, comme celui de la validité, à Aristote. Il s'agit d'exhiber un *contre-argument*: un argument de la même forme que celui que l'on veut contrôler, mais dont toutes les prémisses sont connues comme vraies et la conclusion est connue comme fausse. Considérez, par exemple, les arguments suivants:

- (1) Quelque bien n'est pas un plaisir.  
? Quelque plaisir n'est pas un bien.
- (2) Quelque animal n'est pas un homme.  
? Quelque homme n'est pas un animal.

L'argument (2) est un contre-argument pour (1) parce que (2) est de la même forme que (1) et la prémisse de (2) est vraie alors que sa conclusion est fausse.

Il faut insister dès le début sur ce qu'il s'agit de comparer de vrais arguments, et non pas, par exemple, des schémas. Considérez les arguments suivants:

- (1)  $1=1$   
?  $1=1$
- (2) la conjonction des axiomes de la géométrie euclidienne  
? le théorème de Pythagore

Ces deux arguments sont valides et ils correspondent au même schéma:

p  
? q

Il y a pourtant une infinité d'arguments *non* valides qui correspondent à ce schéma. La relation «correspondre au même schéma que» n'est par conséquent pas d'une grande utilité si l'on cherche à déterminer si un argument donné est valide.<sup>1</sup>

On dira que le champ d'application de la relation «être de même forme que» est celui des arguments (non pas celui des expressions d'arguments ou des schémas). Je propose de définir cette relation de la façon suivante:<sup>2</sup>

*Deux arguments sont de la même forme si, et seulement si, il existe une correspondance biunivoque entre leurs concepts non logiques qui préserve les catégories sémantiques et qui transforme l'un en l'autre.*<sup>3</sup>

Il est possible de transformer un argument donné afin d'obtenir un nouvel argument de la même forme en substituant, à la place de chaque terme non logique, un nouveau terme de la même catégorie sémantique. Par exemple, dans une expression comme  $2 = 1 + 1$ , on peut substituer '0' à la place de '2' et '2' à la place de '1', et '-' à la place de '+', mais on ne peut pas substituer '+' à la place de '2'.

---

1 Il existe certes des schémas, comme par exemple celui de la répétition, qui s'appliquent exclusivement à des expressions d'arguments valides. C'est le cas, en particulier, de schémas comme le modus ponens; la validité de tous les arguments qui correspondent à un tel schéma est assurée par la distribution de connecteurs vérifonctionnels. Il est évident cependant qu'il existe aussi des schémas non vérifonctionnels, par exemple ceux qui ont des quantificateurs, auxquels correspondent des arguments valides. «Ne pas être valide selon les tables de vérité» ne signifie pas «être non valide».

2 Cf. Corcoran [1972, p. 38] et Corcoran & Scanlan [1982, p. 82]. Il n'y a pas de définition de la forme logique chez Aristote ou chez bon nombre d'auteurs modernes qui traitent de cette notion.

3 Tarski et Givant [1987, p. 43] définissent une notion de quasi-identité, d'abord entre «formalismes» (c'est-à-dire entre des logiques) et ensuite entre «systèmes» (c'est-à-dire entre des théories), qui revient à celle d'avoir la même forme. En effet, selon cette définition deux théories sont quasi-identiques si, et seulement si, il existe une correspondance biunivoque entre symboles non logiques des deux théories, qui préserve les catégories sémantiques et qui transforme l'une des théories exactement en l'autre.

Les schémas suivants

$$\begin{array}{ll}
 p & q \\
 p \supset q & q \supset p \\
 ? q & ? p
 \end{array}$$

sont formellement semblables et on pourrait affirmer qu'en un certain sens ils sont de la même forme. Dans ce travail, cependant, l'expression «de la même forme» est utilisée uniquement à propos d'arguments et non pas de schémas.

La définition ci-dessus permet d'énoncer le principe suivant:

*Deux arguments de la même forme sont valides ensemble ou non valides ensemble.*

Ce principe est le fondement de la méthode des contre-arguments que j'ai présentée en début de paragraphe. Selon ce principe, tout argument de la même forme qu'un argument non valide est lui aussi non valide. On peut donc déterminer qu'un argument est non valide par comparaison avec un autre argument de la même forme dont les prémisses sont connues comme vraies et la conclusion est connue comme fausse. Reprenons l'exemple mentionné plus haut:

Quelque bien n'est pas un plaisir.  
 ? Quelque plaisir n'est pas un bien.

La prémisse est vraie et la conclusion aussi; par conséquent, on ne peut pas déterminer par les seules valeurs de vérité si cet argument est valide ou non. Mais il est de la même forme que l'argument suivant:

Quelque animal n'est pas un homme.  
 ? Quelque homme n'est pas un animal.

La prémisse de ce deuxième argument est vraie et sa conclusion est fausse. Ainsi, par cet argument qui est évidemment non valide, et qui est de la même forme que le premier, on sait que le premier argument est non valide aussi.

L'idée de comparer des formes logiques est assez proche de celle de réinterpréter des phrases dans une sémantique. On peut utiliser l'une ou l'autre de ces méthodes pour prouver qu'un ensemble de prémisses n'implique pas une conclusion. On peut en effet réinterpréter les mots non logiques ou bien effectuer une substitution uniforme de ces mots.<sup>1</sup> Il suffit de trouver *un* argument de la même forme, voire *une* interprétation dans le cadre d'une sémantique, dans laquelle toutes les prémisses sont vraies et la conclusion est fausse, pour savoir que *tous* les arguments de cette forme sont non valides. L'emploi de l'une ou l'autre de ces méthodes présuppose la capacité de distinguer les mots que l'on peut remplacer, voire réinterpréter, sans modifier les propriétés logiques de l'expression de l'argument, c'est-à-dire les mots non logiques, et ceux que l'on considère comme des mots logiques. Malheureusement, on ne dispose toujours pas d'un critère qui permettrait de déterminer, de tout terme, s'il appartient à une classe ou à l'autre. En 1966 encore, Tarski lui-même tentait d'en trouver un [cf. Tarski 1986], ce qui témoigne de l'intérêt et de l'actualité de ce problème.<sup>2</sup>

Une première difficulté liée à l'application de la méthode des contre-arguments est donc celle de déterminer quels termes sont logiques et lesquels sont non logiques. Un deuxième problème tient au fait que l'on travaille toujours avec des *expressions* d'arguments: il est donc nécessaire de savoir si l'expression exprime bien l'argument. En particulier, il faut que la forme *grammaticale* de l'expression exprime la forme *logique* de l'argument suffisamment bien pour qu'il soit possible de donner un contre-argument de la même forme logique.<sup>3</sup>

1 Si le langage utilisé n'est pas parfait du point de vue de la logique, il faut parler de concepts au lieu de mots.

2 A la fin de son article «Über den Begriff der logischen Folgerung» [Tarski 1936b, p. 420], ce même auteur fait la conjecture qu'on ne trouvera peut-être jamais une justification objective de la démarcation entre expressions logiques et non logiques.

3 Cf. Mates [1965, p. 15]: «[...] the concept of logical form is obviously of central importance for our subject; equally obviously it is a concept requiring a great deal of clarification. We need practical criteria for deciding what the logical form of a given sentence is, and which are the forms that have only necessary truths as instances. Unfortunately, the irregularity of natural languages makes

Certains sont surpris d'apprendre qu'une proposition comme «Tarski est un criminel présumé» n'implique pas «Tarski est criminel». L'air de paradoxe est dû au fait qu'ils ne distinguent pas forme logique et forme grammaticale. A première vue, en effet, les deux arguments suivants peuvent donner l'impression d'être de la même forme.

Tarski est un criminel présumé.

? Tarski est criminel.

Tarski est un logicien polonais.

? Tarski est logicien.

Comme le deuxième argument est manifestement valide, et comme la forme *semble* être la même, on comprend pourquoi on croit que le premier argument est lui aussi valide.

Bien que les deux expressions de l'exemple soient de la même forme grammaticale, les arguments sont de formes logiques différentes. Voici deux autres arguments qui sont, comme le premier argument de notre exemple, de la même forme *grammaticale* que le deuxième argument mais non valides.

Jean est un grand nain.

? Jean est grand.

Jumbo est un petit éléphant.

? Jumbo est petit.

Ce qu'il faut relever ici, c'est que l'utilisation de la méthode de contre-arguments n'est possible que dans la mesure où la forme grammaticale est fidèle à la forme logique. Une des motivations principales des langages symboliques est d'assurer cette fidélité.

On peut aussi mettre en évidence la différence entre forme grammaticale et forme logique au moyen d'ambiguïtés syntaxiques. Soit, par exemple, la phrase 'Tout Grec n'est pas cuisinier'. Cette phrase peut exprimer la proposition vraie «Il

---

the achievement of such criteria difficult if not altogether impossible; only in the case of artificial languages is there any real prospect of success».

n'est pas le cas que tout Grec est cuisinier» ou la proposition fautive «Aucun Grec n'est cuisinier». Si cette phrase figure comme l'unique prémisse dans l'expression d'un argument dont la conclusion est 'Aucun Grec n'est cuisinier', deux arguments seront exprimés, l'un valide et l'autre non.

La définition de la relation «être de même forme que» donnée plus haut spécifie que les catégories sémantiques des concepts non logiques doivent être respectées. Le non-respect de cette condition peut lui aussi donner lieu à des expressions d'une même forme grammaticale qui expriment des arguments de formes logiques différentes. L'argument suivant est valide:

L'étoile du matin est Vénus.

L'étoile du soir est Vénus.

? L'étoile du matin est l'étoile du soir.

Mais l'argument suivant, à première vue de la même forme, ne l'est pas.

François is French.

Françoise is French.

? François is Françoise.

On remarquera cependant que si l'on utilise le mot 'French' comme un nom propre et non comme un adjectif, cet argument est lui aussi valide.

Si quelques-uns de ces exemples nous semblent curieux, c'est que nous avons une connaissance rudimentaire et intuitive du principe de forme. Si ce n'était pas le cas, pourquoi serait-il remarquable que «Tarski est un criminel présumé» n'implique pas «Tarski est criminel»?

### 3. Détermination de la vérité

Depuis l'Antiquité, on reconnaît que la preuve conduit à la connaissance de la vérité. En effet, Aristote affirmait «[...] parvenir à la connaissance par la preuve» [*An. post.* A2, 71b18].<sup>1</sup> Selon Arnauld et Nicole [1662, p. 291] «[...] la démonstration a pour fin la science [...]». Pour Russell, «[...] nous pouvons regarder la déduction comme un procédé à l'aide duquel on passe d'une certaine proposition connue, la donnée, à la connaissance d'une autre proposition, la conclusion» [1919, p. 176]. Peirce est encore plus explicite: «Le but du raisonnement est de découvrir par l'examen de ce qu'on sait déjà quelque autre chose qu'on ne sait pas encore» [1878, p. 555 (C.P. vol. 5, p. 226)]. Tarski, quant à lui, nous dit que «[...] les preuves nous convainquent pleinement de la validité de tous les théorèmes à prouver» [1936a, p. 122].<sup>2</sup> On s'attendrait à trouver une citation semblable dans tous les manuels de logique. Cependant, malgré l'intérêt évident de savoir en quoi une preuve peut être utile, de telles indications semblent assez rares, et certains auteurs semblent ignorer cette fonction de la preuve (cf. notamment Livingston [1986]).

D'après ce qui vient d'être dit, si on trouve une preuve de la proposition  $p$ , on sait que  $p$  est vraie. Mais si on ne trouve pas une telle preuve, on ne peut rien décider, sauf si la vérité est connue par ailleurs. Se pose alors la question suivante: à supposer que  $p$  soit vraie mais que l'on n'en trouve pas de preuve, comment savoir s'il en existe une? Tout d'abord, il faut relativiser la question à un système particulier. En ce qui concerne l'arithmétique usuelle, on sait depuis Gödel qu'il existe des propositions de cette théorie qui sont vraies mais non prouvables au moyen des axiomes et des règles de la théorie formalisée du premier ordre. On ne peut jamais écarter la possibi-

1 Cf. Descartes [1701, p. 13]: «[...] nous parvenons à la connaissance des choses [...] par la déduction».

2 Cf. le même auteur [1969, p. 77]: «Proof is still the only method used to ascertain the truth of sentences within any specific mathematical theory» ainsi que Lear [1980, p. 103]: «By its very nature, a proof enables one to gain knowledge of the conclusion based upon a knowledge of the premisses».

lité que la proposition  $p$  que nous cherchons à prouver figure parmi elles.

Cela montre que la notion de prouvabilité n'est pas équivalente à celle de vérité. Toute proposition prouvée est vraie, mais toute proposition vraie n'est pas nécessairement prouvée ou même prouvable. Il s'ensuit que si la *preuve* est un critère de la vérité, la *prouvabilité* n'en est qu'un critère partiel (cf. Tarski [1969, p. 70]). En effet, la preuve est une méthode qui conduit à la connaissance de la vérité à condition que l'on puisse l'effectuer, mais cette condition peut ne pas être réalisée pour toute proposition vraie. Ainsi, le résultat de Gödel montre non seulement que ce qui est connu comme vrai et ce qui est vrai ne s'identifient pas, mais aussi que si l'on ajoute le potentiellement connu (c'est-à-dire le prouvable) à ce qui est (déjà) connu, on n'obtient pas nécessairement tout ce qui est vrai.

La distinction entre la vérité et la connaissance de la vérité relève de l'opposition ontique/épistémique, c'est-à-dire de l'état des choses et de celui de notre connaissance des choses. Acceptons une conception de la vérité, présupposée par certains logiciens d'Aristote à Tarski, selon laquelle une proposition est vraie si et seulement si elle correspond aux faits (cf. Tarski [1933, pp. 155sq.]). La simple donnée de conditions de vérité ne se réfère ni à un sujet connaissant ni à des procédés épistémiques. Il est donc clair que la vérité et la connaissance de la vérité sont conceptuellement distinctes. Tout le monde admet que la conjecture de Goldbach est une proposition significative qui est soit vraie soit fausse, et admet non moins volontiers qu'elle n'est connue ni comme vraie ni comme fausse.

Selon l'exemple classique, «La neige est blanche» est connue comme vraie si et seulement si la neige est blanche et quelque sujet connaissant l'a reconnue comme telle sur la base de faits établis. Seule une *personne* peut *savoir* si cette proposition correspond bien aux faits: la notion de connaissance suppose nécessairement *quelqu'un*, un *sujet* connaissant, pour lequel cette connaissance est le cas. La biconditionnelle que je viens d'énoncer ne fournit pas à un tel sujet le moyen de savoir s'il y a adéquation avec les faits; pour cela, il doit encore disposer d'un critère, comme par exemple la preuve, qui peut montrer qu'une proposition correspond aux faits et qu'elle est, par conséquent, vraie. Comme la preuve a bien une fonction

épistémique, et comme la connaissance suppose toujours un sujet connaissant, on voit bien que la preuve est une notion *relationnelle*: une preuve prouve toujours sa conclusion *pour quelqu'un*. Par conséquent, une preuve ne peut prouver sa conclusion que si les deux conditions suivantes sont réunies.

- (1) Il faut que sa conclusion corresponde aux faits, autrement dit qu'elle soit *vraie* (dimension ontique).
- (2) Il faut qu'elle la prouve pour quelqu'un, autrement dit que la conclusion soit *connue comme vraie* (dimension épistémique).

Jusqu'ici, j'ai présenté deux façons de comprendre la notion de preuve: elle montre que sa conclusion s'ensuit de prémisses vraies, et elle montre que sa conclusion correspond aux faits. Il s'agit en fait d'une même façon de voir les choses, dans la mesure où la vérité des prémisses dépend d'une correspondance aux faits, correspondance qui doit être montrée au préalable par des preuves ou par l'expérience.

Comme les prémisses d'une preuve doivent être connues comme vraies par celui qui donne la preuve, et comme une preuve ne peut pas prouver ses propres prémisses, il doit exister au moins un critère de la vérité autre que la preuve. Si tel n'était pas le cas, toute prémisses serait connue comme vraie par une preuve préalable. Mais ses prémisses seraient connues comme vraies de la même manière, et ainsi de suite, *ad infinitum* (ainsi que Pascal [1728, p. 578] et Tarski [1937, vol. 2, p. 326] l'ont relevé). Pour éviter cette régression à l'infini, il faut un autre critère qui permette de connaître la vérité.

Toute preuve commence par une connaissance préalable. De même qu'il existait des preuves avant le premier système de logique, il existait aussi des connaissances avant la première preuve.<sup>1</sup> Nous avons tous des connaissances, même celui qui n'a jamais donné une preuve dans sa vie. Il ne doit donc pas être difficile d'admettre le principe du «déjà connu comme vrai».

---

1 Selon Aristote, «[...] toute connaissance n'est pas obtenue par une preuve [...]» [An. post. A3, 72b19-20] et «Tout enseignement et apprentissage qui passe par un raisonnement vient d'une connaissance préexistante» [An. post. A1, 71a1-2].

L'existence de la connaissance ne signifie pas que le sujet connaissant soit infaillible. Si je fais une erreur en additionnant une colonne de chiffres, cela ne signifie pas que je suis incapable de calculer une somme. Dans le *Phédon* [89d-90e], Socrate proteste contre ceux qui confondent l'imperfection de quelques raisonnements particuliers avec l'incompétence de la raison humaine en général.<sup>1</sup>

Le fait que nous faisons des erreurs dans nos argumentations nous apprend que toute argumentation que l'on croit connaître comme vraie n'est pas effectivement connue comme telle; savoir qu'une proposition est vraie n'est pas non plus la même chose que savoir qu'on la sait vraie. Notre faillibilité nous conduit à nous demander, à propos des argumentations qu'on accepte comme des preuves, si ce jugement sera confirmé avec le temps.

Puisque la preuve se distingue de la déduction par la connaissance de la vérité des prémisses, une même argumentation peut être une preuve pour un raisonneur, qui sait que les prémisses sont vraies, mais une déduction seulement pour un autre raisonneur, qui ne le sait pas. En principe, tous deux sont sensés savoir que la conclusion s'ensuit des prémisses (ce qui est le cas pour toute déduction fondée).

On peut ignorer la valeur de vérité d'une prémisse pour deux sortes de raisons bien différentes. (1) La prémisse est fautive mais le raisonneur croit, à tort, qu'elle est vraie; dans une telle situation, il n'y a jamais une preuve. (2) Elle est vraie, mais le raisonneur n'a pas les connaissances nécessaires pour le reconnaître. On peut imaginer par exemple qu'une proposition concernant la physique, connue comme vraie par un expert en la matière, ne l'est pas par un débutant. Par conséquent, une même argumentation qui utilise cette proposition comme prémisse, exprime une preuve pour l'expert mais non pour le débutant, ce qui montre que le statut de preuve est relatif aux connaissances du raisonneur.

---

1 Ceci ne se limite pas à la seule connaissance rationnelle. Cf. Ayer [1985, p. 272]: «The fact that our appreciations of what we observe are not infallible is not a ground for holding that they are never to be accepted».

#### 4. Preuve par l'absurde

La distinction entre preuves «directes» (ou «ostensives») et «par l'absurde» (ou «apagogiques», «par contradiction», «par l'impossible») remonte au moins à Aristote. Chez Euclide on trouve de nombreux théorèmes prouvés par l'absurde, dont certains étaient déjà très anciens à son époque. Ainsi, la preuve classique de l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré par rapport au côté, traditionnellement attribuée aux Pythagoriciens, a été présentée dans ses grandes lignes par Aristote [*An. pr.* A23, 41a24-32; cf. *An. pr.* A44, 50a37] et figurait dans plusieurs éditions des *Eléments* d'Euclide (proposition X.117, aujourd'hui considérée comme une interpolation). Cette preuve montre qu'en supposant la diagonale et le côté commensurables (hypothèse absurde), il s'ensuit qu'un même nombre est à la fois pair et impair, ce qui est absurde. Il faut donc conclure à leur incommensurabilité (cf. Heath [1908, vol. III, p. 2]).<sup>1</sup>

Au lieu de procéder directement des prémisses à la conclusion, une preuve par l'absurde fait un détour. Elle procède en effet de la proposition contradictoire de la conclusion ajoutée comme hypothèse supplémentaire à une contradiction, ce qui montre que cette hypothèse—«absurde»—est fautive. La conclusion est par conséquent vraie. (Le principe de base est le suivant: un ensemble de prémisses implique logiquement une conclusion si et seulement s'il est logiquement impossible que la conclusion et toutes les prémisses soient vraies ensemble.) Ce procédé ne semble pas entièrement conforme au point de vue selon lequel une preuve *montre*, sur la base de prémisses vraies, que sa conclusion est vraie (cf. Gasser [1985]). Son emploi a d'ailleurs été critiqué et on a cherché parfois à l'éviter.

---

1 Je résume la présentation de Heath: supposons que la diagonale et le côté soient dans le rapport de  $d$  à  $c$ , où  $d$  et  $c$  sont des nombres entiers, premiers entre eux. Par le théorème de Pythagore,  $d^2 = 2c^2$ . Les nombres  $d^2$  et  $d$  sont donc pairs;  $c$ , qui ne possède pas de facteur commun avec  $d$ , est par conséquent impair. Puisque  $d$  est pair,  $d = 2x$ . Il vient:  $4x^2 = 2c^2$ , et  $c$  est pair. Contradiction.

*Der direkte oder ostensive Beweis ist in aller Art der Erkenntniss derjenige, welcher mit der Überzeugung von der Wahrheit zugleich Einsicht in die Quellen derselben verbindet; der apagogische dagegen kann zwar Gewißheit, aber nicht Begreiflichkeit der Wahrheit in Ansehung des Zusammenhanges mit den Gründen ihrer Möglichkeit hervorbringen. Daher sind die letzteren mehr eine Nothhülfe, als ein Verfahren, welches allen Absichten der Vernunft ein Genüge thut. Doch haben diese einen Vorzug der Evidenz vor den direkten Beweisen darin, daß der Widerspruch allemal mehr Klarheit in der Vorstellung bei sich führt, als die beste Verknüpfung, und sich dadurch dem Anschaulichen einer Demonstration mehr nähert [Kant 1781, A789sq. = B817sq.].*

Je retiens deux remarques de Kant: (1) une preuve par l'absurde ne montre pas les raisons qui fondent la vérité prouvée, et (2) une telle preuve ne doit être utilisée que si on ne peut faire autrement. On trouve l'écho (ou plutôt une anticipation) de cette position dans la Logique de Port-Royal qui affirme, d'une part, que les preuves par l'absurde «[...] peuvent convaincre l'esprit, mais qu'elles ne l'éclairent point [...]» [Arnauld & Nicole 1662, p. 328], d'autre part, que «[...] c'est une faute de s'en servir pour prouver ce qui se peut prouver positivement» [p. 329]. D'autres auteurs adoptent un point de vue similaire.<sup>1</sup>

Si la méthode de la preuve par l'absurde encourt parfois des reproches et si la question de son acceptabilité se pose, c'est qu'elle met en évidence non pas la vérité de la conclusion mais la fausseté de sa négation. En conclure à la vérité de la proposition à démontrer suppose donc le principe du tiers exclu ou de la loi de la double négation. Cette démarche peut paraître abstraite en comparaison avec, par exemple, un simple enchaînement de propositions telles que «chacune contienne la

<sup>1</sup> A l'époque actuelle, il n'y a plus que les Intuitionnistes qui mettent en cause la méthode de la preuve par l'absurde. Ajoutons que la distinction entre convaincre et éclairer semble aujourd'hui totalement abandonnée, à moins qu'elle ne corresponde à celle entre persuader et prouver (ce qui ne semble pas être le cas, puisque les auteurs de Port-Royal ne nient pas que les preuves par l'absurde soient bien des preuves).

raison de celle qui la suit et soit elle-même démontrée par celle qui précède» [Piaget 1924, pp. 5-6].<sup>1</sup>

Une preuve directe correspond bien à cette idée d'enchaînement: la connaissance de la vérité des prémisses, qui est admise, se transmet de proche en proche à chaque proposition jusqu'à la conclusion. Ainsi, le raisonnement qui lie les prémisses à la conclusion montre la vérité de cette conclusion.

La question qui se pose à propos de la preuve par l'absurde, qui ne lie pas directement les prémisses à la conclusion, est de savoir si elle *montre* tout de même, par un autre moyen, la vérité de la conclusion.

Si, dans une preuve directe, on raisonne sur la base des seules prémisses sans faire appel à des informations supplémentaires, il n'en va pas de même pour une preuve par l'absurde, puisqu'on rajoute une hypothèse aux prémisses, à savoir la contradictoire de la proposition à prouver, dont il faut montrer l'absurdité. On entre ainsi dans une déduction qui constitue en quelque sorte un travail en marge, dont le raisonnement montre que l'hypothèse conduit à une contradiction ou à une proposition déjà connue comme fausse. Il est vrai que le passage de l'hypothèse au faux est de même nature que celui qui relie les prémisses à la conclusion. Cela n'empêche pas la situation d'être différente. En ayant montré que la contradictoire de la conclusion visée est fausse, on n'a pas encore établi que la conclusion, elle, était vraie.

De même que le chimiste sait qu'un échantillon contient un certain élément si l'adjonction d'une substance chimique conduit à un certain résultat, par exemple un changement de couleur, de même le raisonneur sait qu'un ensemble de prémisses «contient» une certaine conclusion (au sens qu'il l'implique logiquement) si l'adjonction de la contradictoire de cette conclusion conduit à un certain résultat, à savoir une contradiction. L'adjonction de

---

1 «[...] direct reasoning [is where] the required result is immediately obtained without any reference to what might have happened if the result to be proved had not been true. But there are many propositions in which the only possible result is one of two things which cannot be true at the same time, and it is more easy to show that one is not the truth, than that the other is. This is called indirect reasoning; not that it is less satisfactory than the first species, but because, as its name imports, the method does not appear so direct and natural» [De Morgan 1831, p. 226].

la contradictoire de la conclusion à l'ensemble des prémisses, comme celle de la substance chimique à l'échantillon, crée une nouvelle donnée, mais l'expérience n'est pas faussée parce que le raisonneur, comme le chimiste, contrôle le procédé.

L'hypothèse supplémentaire qui fait quitter la situation de la preuve directe nécessite une inférence pour la regagner. Il faut en effet disposer d'une règle qui autorise à déduire la vérité de la conclusion à partir de la fausseté de sa contradictoire en niant l'hypothèse rajoutée. Il convient de remarquer qu'il s'agit ici d'un genre particulier d'hypothèse et de négation. Cette hypothèse, en effet, ne fait pas partie des prémisses de la preuve mais s'y rajoute pour les seuls besoins d'un raisonnement. Quant à la négation de l'hypothèse qui conduit au faux, elle marque le refus de l'hypothèse (cf. Grize [1967, p. 207]). La méthode de la preuve par l'absurde est donc une méthode de réfutation—d'où sa nature indirecte.

Une preuve par l'absurde parvient à sa conclusion par une inférence à partir d'un raisonnement qui montre autre chose. La différence d'orientation entre la preuve directe et la preuve par l'absurde peut être rapprochée de celle entre discours direct et discours indirect. En effet, de même que le discours direct dit quelque chose et le discours indirect dit *que* quelque chose est le cas, de même dans une preuve par l'absurde le raisonnement ne montre pas la conclusion mais montre *que* la conclusion est bien le cas. Plus exactement, le raisonnement montre que la conclusion ne peut pas ne pas être le cas.

*The method of Indirect Deduction may be described as that which points out what a thing is, by showing that it cannot be anything else. We can define a certain space upon a map, either by colouring that space, or by colouring all except that space; the first mode is positive, the second negative [Jevons 1874, p. 81].*

La démarche d'un raisonneur, qui quitte la situation de la preuve pour ensuite la regagner, est de même nature que celle du narrateur qui mentionne les propos de son héros: il quitte la situation afin de la rapporter, et c'est en la rapportant qu'il la rejoint. Remarquons que l'on regagne la situation (histoire ou preuve) non pas là où on l'a quittée mais à un moment

ultérieur, ce qui laisse entendre que l'on a réussi, par cette opération, à montrer quelque chose de pertinent à la situation.

Dans toute preuve, la connaissance de la vérité de la conclusion repose sur celle des prémisses. Dans une preuve directe, avant même d'arriver à la conclusion visée, nous avons à chaque étape une preuve complète de la proposition qui est actuellement la dernière. Ainsi, chaque proposition de la suite peut servir de conclusion. Donc chacune est connue comme vraie. Dans une preuve par l'absurde, en revanche, la valeur de vérité des propositions, exception faite de celle des prémisses et de la conclusion, reste *en suspens*. Par conséquent, ces propositions ne peuvent pas servir de conclusion. Ceci tient au fait qu'elles forment le «travail en marge» dont j'ai parlé.

Dans ce genre de preuve, une seule proposition peut être véritablement considérée comme résultant des prémisses, à savoir celle dont l'affirmation fait regagner la situation de la preuve. Comme elle est la seule qui résulte des prémisses, elle est la seule susceptible de servir de conclusion. Ainsi, alors que les preuves directes peuvent conduire à plusieurs connaissances nouvelles, la preuve par l'absurde n'en produit qu'une et une seule (cf. Löwenheim [1946, p. 126]).<sup>1</sup> En conséquence on peut

---

1 «[...] reductio ad absurdum, which Euclid loved so much, is one of a mathematician's finest weapons. It is a far finer gambit than any chess gambit: a chess player may offer the sacrifice of a pawn or even a piece, but a mathematician offers the game» [Hardy 1940, p. 94]. Précisons que l'enjeu est total seulement lorsqu'il s'agit d'une preuve par l'absurde, mais dans certains systèmes on peut raisonner localement par l'absurde, ce qui permet de miser sur plusieurs tableaux. En effet, une preuve par l'absurde ne comprend qu'un seul raisonnement; ainsi, la preuve elle-même est l'enjeu. Mais une règle pour le raisonnement par l'absurde permet de poser non seulement la contradictoire de la conclusion, mais n'importe quelle proposition comme hypothèse absurde, et cela à tout moment dans une preuve. Si un tel raisonnement reste local, la conclusion ne sera pas la seule connaissance nouvelle de la preuve; ainsi il s'agira, à proprement parler, d'une preuve directe. Plus on limite l'emploi de raisonnements par l'absurde dans une preuve directe, plus on obtient de connaissances nouvelles. Une règle pour le raisonnement par l'absurde peut être utilisée plusieurs fois dans une même preuve; ainsi, on peut ajouter autant d'hypothèses supplémentaires qu'on désire. Dans une preuve par l'absurde, en revanche, qui ne contient rien d'autre qu'un seul et unique raisonnement par l'absurde, on n'utilise qu'une seule fois la contradictoire de la conclusion.

dire que la preuve par l'absurde montre sa conclusion même si, dans la perspective de la situation de la preuve, elle ne montre rien d'autre.

Historiquement, il y a peu d'accord sur la question de la nécessité des preuves par l'absurde.<sup>1</sup> La question est de savoir s'il existe des arguments valides qui ne peuvent être connus comme tels qu'au *seul* moyen de la déduction par l'absurde, autrement dit s'il est nécessaire d'utiliser ce moyen pour montrer la validité d'au moins un argument qui ne peut pas être montré valide par déduction directe. Cette question n'a un sens précis que lorsqu'on la pose par rapport à un système particulier de déductions (qu'il soit formalisé ou non). Je me propose de la traiter en rapport avec trois types de systèmes bien distincts: (1) ceux du genre de Hilbert, par exemple les systèmes de Mendelson [1964] et de Miéville [1985], qui ne contiennent aucune déduction par l'absurde; (2) ceux du genre de Jeffrey [1967] qui contiennent uniquement des déductions par l'absurde; et (3) ceux du genre d'Aristote [*An. pr.*] dans lesquels on trouve les deux sortes de déductions.

(1) Dans les systèmes de la première catégorie, il n'y a aucune déduction par l'absurde, il n'y en a donc aucune que l'on peut remplacer par une déduction directe. D'où la réponse (triviale) à la question de savoir si la déduction par l'absurde est le seul moyen de montrer la validité de certains arguments formulés dans le système: elle ne l'est pas, parce qu'elle n'est même pas dans le système. Par ailleurs, si on ajoutait de telles déductions aux systèmes de ce type, on pourrait encore s'en passer parce que ces systèmes sont déjà complets.

(2) Réponse toute aussi triviale en ce qui concerne les systèmes du deuxième type, ceux qui se composent exclusivement de déductions par l'absurde: de telles déductions sont absolument nécessaires à ce genre de système, parce que pour tout ar-

---

(Pour une comparaison de règles permettant le raisonnement par l'absurde et de preuves par l'absurde, voir Corcoran [1974, pp. 116-117].)

1. Personne ne semble poser la question contraire (la méthode de preuve directe est-elle nécessaire?), mais Jeffrey [1967] y répond implicitement puisque son système n'admet que des preuves par l'absurde. Ajoutons que pour De Morgan toute preuve directe est en réalité une preuve par l'absurde: «[...] the demonstration of every proposition consists in proving the contrary of it to be inconsistent with one of these [principles]» [1831, p. 4].

gument valide du système elles constituent le seul moyen d'en montrer la validité; si on y renonçait, il ne resterait plus rien.

(3) La question devient intéressante lorsqu'elle se pose à propos de systèmes qui contiennent des déductions des deux sortes.

A propos de son propre système, Aristote a déclaré que «Tout ce qui est conclu au moyen de la preuve directe peut être prouvé aussi par l'absurde, et ce qui est prouvé par l'absurde peut l'être directement avec les mêmes termes» [*An. pr.* B14, 62b38-40].<sup>1</sup> Cependant, il semble qu'il a eu tort en affirmant l'extension égale des preuves directe et par l'absurde dans sa syllogistique (le passage serait-il une interpolation?). En effet, il n'y a aucune prémisses de la forme «O» (particulière négative) parmi les quatre modes de la première figure et les trois conversions qui servent de règles d'inférence. Si ces modes et conversions sont à la base des déductions directes de la syllogistique aristotélicienne, il n'y est pas possible de donner une déduction directe d'un argument syllogistique à deux prémisses dont l'une est de la forme «O» (cf. Blanché [1970, p. 54]; Corcoran & Scanlan [1981, p. 89]).

On sait que l'histoire des tentatives de prouver le postulat des parallèles d'Euclide comprend des travaux de mathématiciens de tout premier plan et a duré plus de deux mille ans. Le problème était de montrer que l'ensemble que je vais appeler *A*, soit l'ensemble des prémisses fondamentales de la géométrie euclidienne (les axiomes et les postulats) à l'exception du postulat des parallèles, implique logiquement *P*, ce postulat. Plusieurs personnes avaient fait la conjecture que *P* est une conséquence logique de *A* et que, par conséquent, l'argument qui consiste en leur association est valide. Plusieurs «déductions» ont été données dont chacune contient quelque défaut; on les qualifiait même de «preuves» puisqu'on croyait savoir que toutes les prémisses étaient vraies. Jusqu'au dix-huitième siècle, toutes ces tentatives avaient pris la forme de «déductions» directes. C'est sans doute le fait qu'on a toujours fini par reconnaître ces tentatives comme des échecs qui a donné l'idée au jésuite italien Girolamo Saccheri (1667-1733) qu'aucune déduction directe de cet argument, qu'il croyait valide, n'était possible et qu'il fallait s'y prendre au moyen de la déduction par l'absurde. Il était

1 Cf. *An. pr.* A29, 45a26-28; A29, 46b1-6; B14, 63b12-21.

donc persuadé que de telles déductions sont nécessaires dans le système de la géométrie euclidienne, du moins pour montrer la validité de cet argument particulier. Si l'application qu'il faisait de cette méthode avait réussi, elle aurait montré que la supposition de la contradictoire de  $P$ , avec la supposition de  $A$ , conduisait à une contradiction (cf. Gasser [1988]). On sait maintenant que le même sort était réservé à Saccheri et à ses prédécesseurs et que l'argument en question n'est pas valide. Un autre italien, Eugenio Beltrami (1835-1900) a montré l'indépendance du postulat des parallèles  $P$  par rapport aux autres prémisses fondamentales de la géométrie euclidienne  $A$ . Aucune déduction n'est donc possible de  $P$  à partir de  $A$ , qu'elle soit directe ou non.

L'intérêt de la question de la nécessité de la méthode de déduction par l'absurde pour montrer la validité d'arguments dans un système de ce troisième type—qui représente vraisemblablement la majorité des systèmes de déductions—tient donc non seulement à sa non-trivialité mais aussi au fait qu'on peut parfois y apporter une réponse.

## 5. Raisonnements à partir de prémisses fausses

Toute *preuve* par l'absurde contient une *déduction* (un «travail en marge») qui commence par une prémisses supposée fausse (l'hypothèse absurde de la preuve). C'est en déduisant une contradiction à partir de cette prémisses, qui s'ajoute aux prémisses connues comme vraies, que l'on arrive à la connaissance de sa fausseté—ce qui permet de la rejeter en affirmant sa contradictoire. Ce genre de preuve montre ainsi qu'il est possible de raisonner correctement à partir de prémisses qui ne sont pas connues comme vraies.

Si parfois on hésite à raisonner dans de telles circonstances, c'est probablement parce qu'on n'a pas la distinction preuve/déduction à l'esprit. Rappelons donc qu'une *preuve* est une déduction dont toutes les prémisses sont connues comme vraies. Une *déduction* montre uniquement que sa conclusion s'ensuit des prémisses; en soi, elle n'indique strictement rien à

propos de la vérité de cette conclusion. Il est bien entendu impossible de prouver la vérité d'une conclusion à partir de prémisses qui ne sont pas connues comme vraies.

Depuis Aristote on sait que toute contraposée d'un argument valide est elle-même valide, c'est-à-dire que tout argument obtenu en remplaçant d'une part la conclusion d'un argument valide par la contradictoire de l'une des prémisses, et d'autre part cette même prémisses par la contradictoire de la conclusion, est valide. Voici un exemple:

Tout chien est un animal.	(V)	} VALIDE
Aucun animal n'est une pierre.	(V)	
? Aucune pierre n'est un chien.	(V)	
Quelque pierre est un chien.	(F)	} VALIDE
Aucun animal n'est une pierre.	(V)	
? Quelque chien n'est pas un animal.	(F)	

Ainsi, tout argument valide dont toutes les prémisses sont vraies permet de passer à un autre argument valide dont l'une des prémisses est fausse.

La pratique de raisonner à partir de prémisses fausses remonte aux sources de notre civilisation, car les Egyptiens la cultivaient consciemment par le développement systématique de la méthode arithmétique de «fausse position».<sup>1</sup> N'oublions pas non plus que souvent nous arrivons à savoir qu'une proposition est fausse en en déduisant des conclusions dont l'une au moins s'avère fausse.

---

1 Il s'agit d'une méthode pour résoudre les équations du premier degré. Exemple: une quantité plus son septième fait 19. Quelle est la quantité? Appelons la quantité recherchée  $x$  et supposons qu'elle soit 7 (c'est la supposition la plus simple d'ailleurs toujours fausse; si on avait à trouver une quantité plus son huitième on aurait choisi 8).  $7 + 7/7 = 8$  et non 19. Mais il existe un nombre  $y$  tel que  $7y + 7y/7 = 19$  et  $8y = 19$ ; ainsi,  $y = 19/8$ . Ainsi,  $x = 7(19/8) = 16 + 1/2 + 1/8$  (cf. Gillings [1972, pp. 154-156]). La méthode est particulièrement fiable parce qu'elle réussit même à partir d'une supposition fausse. En effet, on peut se tromper et ne pas tomber sur le vrai, mais on a toutes les chances d'avoir le faux. La solution équivalente en algèbre doit partir de prémisses vraies.

Certains pensent cependant que toute déduction doit reposer sur des propositions vraies. Ainsi, Frege dit [1906a, p. 319] que «Nur wahre Gedanken können Prämissen von Schlüssen sein», ou encore [1906a, p. 304] «Jede der Prämissen [eines Schlusses] ist ein bestimmter als wahr anerkannter Gedanke, und im Schlußurteil wird gleichfalls ein bestimmter Gedanke als wahr anerkannt».<sup>1</sup> Chez Peirce et quelques autres auteurs on trouve des propos semblables.<sup>2</sup>

Comment ces deux penseurs ont-ils réagi face aux preuves par l'absurde—preuves qui, justement, comprennent toujours une déduction à partir d'une proposition présumée fausse? J'ai déjà eu l'occasion de parler de l'attitude de Peirce; quant à Frege, il a affirmé [1914a, p. 265] que «Die Eigenartigkeit des indirekten Beweises wird noch vielfach überschätzt. In Wahrheit ist der Unterschied zwischen einem direkten und einem indirekten Beweise gar nicht erheblich». Frege considérait la preuve par l'absurde comme une façon elliptique de donner une preuve directe. En particulier, il ne voulait pas admettre qu'il pouvait y avoir une conclusion à partir d'une prémisse fausse: «aus etwas Falschem kann man nichts schließen» [1914a, p. 264]. Dans son article intitulé «Logik in der Mathematik», après avoir noté que «Solche scheinbaren Folgerungen aus etwas Falschem haben wir beim *indirekten Beweise*», il donne un

1 Cf. Frege [1914a, p. 204] ainsi que les commentaires de Resnik [1980, p. 174].

2 «[...] le raisonnement est bon s'il est tel qu'il puisse donner une conclusion vraie tirée de prémisses vraies; autrement, il ne vaut rien» [Peirce 1878, p. 555 (C.P. vol. 5, p. 226)]; «[...] it is only the deliberate adoption of a belief in consequence of the admitted truth of some other proposition which is, properly speaking, reasoning» [Peirce 1902a (C.P. vol. 2, p. 120)]. Selon Copi [1954, p. 2], «[...] if asserting the premisses to be true warrants asserting the conclusion to be true also, then the reasoning is correct. Otherwise, the reasoning is incorrect». Pour Russell [1903, p. 15], «[...] all our axioms are principles of deduction; and if they are true, the consequences which appear to follow from the employment of an opposite principle will not really follow, so that arguments from the supposition of the falsity of an axiom are here subject to special fallacies». Lukasiewicz affirme que «The inference is considered correct only if the sentences from which we start—the premisses—are considered correct» [1929, p. 10]. Remarquons enfin que Quine définit la logique comme l'étude systématique de la vérité logique [1970, p. 80].

exemple pour discréditer cette thèse [1914a, p. 265].<sup>1</sup> Seulement, la preuve qu'il donne ne passe pas par l'absurde.<sup>2</sup> En effet, elle ne part pas d'une hypothèse absurde et elle ne conduit pas à une contradiction, ni même à une proposition fautive quelconque.

On pourrait penser que ces citations de Frege représentent des erreurs qui se sont glissées dans l'un ou l'autre de ses nombreux travaux, ou qu'il s'agit d'un point de vue passager de sa part. Mais il n'en est pas ainsi. En effet, le philosophe H. Dingler l'a interrogé sur ce point dans un échange de lettres en 1917, et Frege a confirmé son opinion dans deux longues lettres de la même année [1917a; 1917b].<sup>3</sup> On trouve d'ailleurs des propos semblables dans divers travaux publiés pendant une quinzaine d'années.<sup>4</sup>

Les objections de Frege semblent se fonder sur les thèses suivantes: d'une pensée fautive on ne peut rien déduire, mais une telle pensée peut faire *partie* d'une pensée vraie qui, elle, peut servir de prémisses à une déduction [Frege 1914a, p. 264; 1914b, p. 127; 1917b, pp. 35-36; 1918, p. 145]. Dans une proposition

---

1 Je résume sa preuve:

A prouver: Dans un triangle ABC, si angle B > angle A, alors AC > BC.

- |    |  |                   |
|----|--|-------------------|
| 1  | Si BC > AC, alors angle A > angle B.                           | prémisse          |
| 2  | Si BC = AC, alors angle A = angle B.                           | prémisse          |
| 3  | Si non AC > BC et si non BC > AC, alors BC = AC.               | prémisse          |
| 4  | Si angle A = angle B, alors non angle B > angle A.             | prémisse          |
| 5  | Si angle A > angle B, alors non angle B > angle A.             | prémisse          |
| 6  | Si non AC > BC et si non BC > AC, alors angle A = angle B.     | 2, 3              |
| 7  | Si non AC > BC et si non BC > AC, alors non angle B > angle A. | 4, 6              |
| 8  | Si BC > AC, alors non angle B > angle A.                       | 1, 5              |
| 9  | Si non AC > BC, alors non angle B > angle A.                   | 7, 8              |
| 10 | Si angle B > angle A, alors AC > BC.                           | 9, contraposition |
- 2 Apparemment, il l'appelle 'indirecte' parce qu'elle conduit d'abord à la contraposée de la conclusion et ensuite à la conclusion elle-même.
- 3 Cf. aussi ses lettres à Jourdain [1910, p. 118; 1914b, p. 127].
- 4 Cf. Frege [1906a, pp. 304 et 319; 1906b, p. 195; 1914a, pp. 220 et 264-266; 1918, pp. 145-146].

conditionnelle, par exemple, il y a un seul acte de jugement, mais trois pensées, savoir la pensée entière, l'antécédent et le conséquent [1918, pp. 145-146]. Si deux propositions de formes *Si P alors Q* et *P* sont vraies, *Q* est vraie et sa vérité ne dépend pas des deux prémisses. Plus précisément, les deux prémisses ne sont pas vraiment hypothétiques puisqu'elles sont posées vraies. Autrement dit, la règle du *modus ponens* non seulement autorise une inférence mais permet de se libérer de ses prémisses [Frege 1906a, p. 319; 1910, p. 119n.; 1914a, p. 264]. Si une prémisses est fausse ou douteuse, il s'agit d'une véritable hypothèse. On peut faire des «déductions apparentes», comme le dit Frege, à partir de telles hypothèses, mais la conclusion dépendra toujours d'au moins une supposition: elle sera conditionnelle.

On peut chercher à expliquer l'attitude de Frege de diverses façons. D'une part, l'idée d'une hypothèse *supplémentaire*, avec un statut différent de celui des prémisses, n'avait pas encore été mise au point. Cette idée est implicite dans toute preuve par l'absurde, mais il a fallu attendre les travaux des années trente de Jaskowski et de Gentzen pour s'en apercevoir. D'autre part, malgré ses aspects innovateurs, le travail de Frege reste fidèle à la tradition selon laquelle la logique est l'art de passer du vrai au vrai [Thomas d'Aquin, cité par Maritain 1933, p. 1]: ses recherches portent sur la conservation du vrai plutôt que sur celle de la correction des passages (de la conséquence). Jusqu'à une époque relativement récente, les mathématiques appartenaient à la même tradition. Pour Frege, une théorie mathématique consiste encore en ses théorèmes, dont le contenu est fixe et qui n'admettent qu'une seule interprétation.<sup>1</sup> En particulier, un axiome est encore pour lui une vérité première et naturellement évidente.

*Solange ich die Wörter „Gerade“, „Parallele“ und „schneiden“ so verstehe, wie ich sie verstehe, muß ich das Parallelenaxiom anerkennen. Wenn jemand es nicht anerkennt, muß ich annehmen, daß er jene Wörter anders versteht. Ihr Sinn ist un-*

1 Ainsi, même après la découverte de géométries non euclidiennes, l'idée d'une théorie mathématique se composant d'un ensemble de conséquences (et non de théorèmes) et admettant plusieurs interprétations différentes restait à expliciter.

*trennbar mit dem Parallelenaxiom verbunden. Demnach kann ein Gedanke, der dem Parallelenaxiom widerspricht, nicht zur Prämisse eines Schlußes genommen werden [Frege 1914a, p. 266].<sup>1</sup>*

Lukasiewicz adopte un point de vue similaire.<sup>2</sup> Dans sa discussion de la réduction (par l'absurde) du mode syllogistique Baroco [1951, p. 71], il présente le raisonnement suivant comme un développement de la déduction donnée par Aristote [*An. pr.* A5, 27a37].<sup>3</sup>

- 
- 1 Cf. aussi le passage suivant: «Nun hat Hilbert in seinen Grundlagen der Geometria sich mit solchen Fragen beschäftigt, ob die Axiome einander nicht widersprüchen und ob sie unabhängig voneinander seien. Dabei hat sich bei ihm aber der Sinn des Wortes „Axiom“ verschoben. Denn wenn ein Axiom notwendig wahr sein muß, ist es unmöglich, daß Axiome einander widersprechen. Darüber braucht dann kein Wort verloren zu werden. Aber obwohl es offenbar ist, scheint es Herrn Hilbert doch gar nicht zum Bewußtsein gekommen zu sein, daß, wenn er von der Widerspruchsfreiheit und der Unabhängigkeit der Axiome handelt, er gar nicht von Axiomen im Sinne Euklids spricht. Man kann sagen, daß das Wort „Axiom“ bei ihm in verschiedenen Bedeutungen schillert, ohne daß er es merkt. Wenn man den Wortlaut eines seiner Axiome ins Auge faßt, scheint allerdings zuerst ein Axiom vorzuliegen von der Art der euklidischen; aber der Wortlaut täuscht, weil alle Wörter anders, als bei Euklid gebraucht werden» [Frege 1914a, p. 267].
  - 2 Selon Lear [1980, p. 102], «Frege's formalization of logic as an axiomatized system with a minimum number of rules of inference and a relatively large number of axioms, taken to be logical truths, has deeply coloured the vision of logic held by philosophers and logicians in this century. Twentieth-century interpreters of Aristotelian logic are not out of Frege's shadow—an extreme example is Lukasiewicz's formalization of the syllogistic as an axiomatic system [...]».
  - 3 Je modifie ici la présentation et j'utilise le verbe être au lieu de appartenir à. Le traducteur français a introduit dans l'énoncé du syllogisme une deuxième mention du connecteur «si», absente dans l'édition anglaise originale et contraire aux propos de Lukasiewicz, que je n'hésite pas à omettre.

*A montrer:* Si tout N est M et quelque X n'est pas M,  
alors quelque X n'est pas N. (1)

1	Tout N est M.	prémisse vraie
2	Quelque X n'est pas M.	prémisse vraie
3	Tout X est N.	«point de départ»
4	Tout N est M.	1
5	Tout X est M.	3, 4, Barbara
6	Quelque X n'est pas M.	2
7	Quelque X n'est pas N.	3, 5, 6

Puis, au lieu d'y adjoindre «c.q.f.d.», il affirme que «cet argument n'est convaincant que de façon superficielle; en réalité il ne démontre pas le syllogisme (1)».

Il faut rappeler ici que pour Lukasiewicz un syllogisme aristotélicien est une proposition conditionnelle. L'argument

Tout N est M.  
Quelque X n'est pas M.  
? Quelque X n'est pas N.

n'est pas pour lui un syllogisme mais «une règle d'inférence, qui nous autorise à faire l'assertion de la conclusion si les prémisses sont vraies; mais elle ne dit pas ce qui advient quand elles ne le sont pas, et ce n'est d'ailleurs pas son objet puisque de toute évidence une règle d'inférence fondée sur des prémisses fausses ne saurait être valide» [Lukasiewicz 1951, p. 72].<sup>1</sup>

Ainsi, pour Lukasiewicz, si *Tout N est M* et *Quelque X n'est pas M* sont des prémisses vraies, la déduction ci-dessus prouve la conclusion *Quelque X n'est pas N*. Sinon, elle ne prouve évidemment rien, parce qu'aucune preuve n'a des prémisses fausses—mais Lukasiewicz pense que dans ce cas il n'y a même pas de *déduction*. Et même si ces prémisses sont vraies, la conclusion que l'on peut (dès lors) selon Lukasiewicz en déduire ne sera pas la proposition conditionnelle (1).<sup>2</sup>

1 Précisons que Lukasiewicz parle ici en son nom et non pas au nom d'Aristote.

2 A la limite, on pourrait interpréter ces propos comme une sorte de refus du théorème de la déduction. Cf. un autre passage de Lukasiewicz [1951, pp. 41-42]: «Il est toujours aisé de déduire d'une thèse implicative la règle d'inférence

Comme Frege, il affirme non seulement que rien ne s'ensuit d'une proposition fausse, mais aussi qu'une inférence est possible à partir d'une prémisse (composée) vraie dont une ou plusieurs parties peuvent être fausses. C'est ce qui ressort en effet de son interprétation de la syllogistique aristotélicienne selon laquelle les syllogismes sont des propositions conditionnelles de formes bien définies, vraies quelles que soient les valeurs de vérité des propositions qui les composent, et la syllogistique elle-même est un système axiomatique dont les axiomes sont les syllogismes de la première figure.

Pour Lukasiewicz, la proposition «si tous les animaux sont des oiseaux et quelques chouettes ne sont pas des oiseaux, alors quelques chouettes ne sont pas des animaux» est un exemple de syllogisme du mode Baroco, mais l'argument suivant ne l'est pas:

- Tous les animaux sont des oiseaux.  
 Quelques chouettes ne sont pas des oiseaux.  
 ? Quelques chouettes ne sont pas des animaux.

La raison en est que la proposition (entière) sera vraie même si son antécédant est faux, alors que, pour Lukasiewicz, l'argument ne sera pas valide puisqu'il se fonde sur des prémisses fausses.

Mais il va plus loin: il affirme que la proposition conditionnelle peut être prouvée par l'absurde mais qu'on ne peut pas déduire la conclusion de l'argument à partir des prémisses au moyen d'une déduction par l'absurde:

*[...] il est inutile de «supposer» que la conclusion est fausse: que nous la supposions ou non, elle l'est. Mais le point essentiel est que la contradictoire de la conclusion—autrement dit la proposition «Toutes les chouettes sont des animaux»—associée à la prémisse «Tous les animaux sont des oiseaux», ne produit pas une conclusion fausse mais une vraie: «Toutes les chouettes sont des oiseaux»: La réduction à*

---

qui lui correspond. [...] Mais l'opération inverse, qui consisterait à déduire d'un mode traditionnel valide [un argument] le mode aristotélicien correspondant [une proposition conditionnelle], ne paraît pas possible au moyen des règles logiques connues.

*l'impossible ne peut donc avoir lieu dans ce cas [Lukasiewicz 1951, p. 72].*

Il continue:

*La démonstration d'Aristote [avec des variables; donnée ci-dessus], sans compter qu'elle n'est pas satisfaisante, n'est même pas une démonstration par réduction à l'impossible. Celle-ci, en effet, [...] pose ce qu'elle désire réfuter (réfutation qui se fait par réduction à un énoncé reconnu comme faux): donc, si l'on doit démontrer par l'impossible une proposition, il faut partir de la négation de cette proposition et en déduire un énoncé indiscutablement faux [pp. 72-73].*

Deux remarques s'imposent. D'abord, partir de la négation de la proposition à démontrer, c'est manifestement raisonner à partir d'une prémisse fausse. Ensuite, si dans l'exemple il n'en déduit pas «un énoncé indiscutablement faux», mais un vrai, Lukasiewicz ne relève pas que cet énoncé vrai («Toutes les chouettes sont des oiseaux») est en contradiction avec une des prémisses («Quelques chouettes ne sont pas des oiseaux») et que, par conséquent, la conclusion doit s'ensuivre des prémisses telles qu'elles sont données. Une preuve, qu'elle soit par l'absurde ou non, ne se prononce jamais sur la valeur de vérité des prémisses. Une preuve par l'absurde montre que sa conclusion s'ensuit de ses prémisses en montrant que la contradictoire de la conclusion, avec les prémisses, conduit à une contradiction: autrement dit, en montrant qu'il est logiquement impossible que les prémisses soient vraies et qu'en même temps la conclusion soit fausse. Pour cela il n'est pas nécessaire que les prémisses soient connues comme vraies ou même qu'elles soient vraies.

N'étant pas satisfait de la déduction aristotélicienne, Lukasiewicz donne «l'esquisse de ce que devrait être» une preuve par l'absurde du syllogisme (1). Pour commencer il pose les définitions suivantes:

$p$  =df Tout N est M  
 $q$  =df Tout X est N  
 $m$  =df Tout X est M

Dès lors,

$\text{non-}q$  =df Quelque X n'est pas N  
 $\text{non-}m$  =df Quelque X n'est pas M

*A montrer:* Si  $p$  et  $\text{non-}m$ , alors  $\text{non-}q$

soit: non:  $p$  et  $\text{non-}m$  et  $q$

1	$p$ et $q$ et $\text{non-}m$	la négation de la conclusion recherchée
2	si $p$ et $q$ , alors $m$	Barbara
3	$p$ et $q$	1
4	$m$	2, 3
5	$\text{non-}m$	1

Il affirme [1951, p. 73] qu'«il est facile de constater que cette démonstration de Baroco, qui procède réellement par réduction à l'impossible, diffère complètement de la démonstration proposée par Aristote». Mais rien n'est moins vrai. Par définition,  $m$  désigne une proposition de la forme «Tout X est M», et si l'on fait les mêmes substitutions que dans l'exemple précédent on obtient «Toutes les chouettes sont des oiseaux». Ainsi, l'hypothèse absurde de la preuve de Lukasiewicz conduit à la même proposition que dans la preuve d'Aristote, et cette proposition est *vraie*. Ici il remarque que cette proposition est en contradiction avec la prémisse  $\text{non-}m$ , c'est-à-dire «Quelque X n'est pas M», soit «Quelques chouettes ne sont pas des oiseaux»; mais c'était déjà le cas dans la preuve aristotélicienne.

Lukasiewicz a peut-être été conduit à adopter ce point de vue par Frege lui-même, dont il connaissait bien les travaux. Il pensait en effet que l'une des contributions les plus importantes de Frege était sa façon de concevoir les inférences d'un raisonnement:

*When striving to reach his ideal of the strictly scientific mathematical method, namely the axiomatic method, already*

*used by Euclid, Frege made his two principal discoveries: he created certain new logical systems, previously (even in Boole's works) imperfectly known and understood (above all the sentential calculus, expounded in Begriffsschrift), and was the first, as it seems, to notice the difference between the premises on which a reasoning is based, and the rules of inference, that is the rules which determine how we are to proceed in order to prove a given thesis on the strength of certain premises [Lukasiewicz 1929, p. 5].*

Mais si on peut excuser Frege de son ignorance de certains éléments de théorie logique qui n'ont été découverts qu'après sa mort, Lukasiewicz ne pourra pas plaider de la même façon.

A mon avis, la manière dont Lukasiewicz comprend la notion d'inférence est liée directement à son *interprétation* du syllogisme aristotélicien. Il veut que les prémisses d'un syllogisme puissent être fausses, mais il n'accepte pas que les prémisses d'une inférence puissent l'être. Par conséquent, il considère le syllogisme non pas comme une inférence mais comme une proposition, et cela malgré les raisons multiples qui s'opposent à une telle idée (cf. Gasser [1987b, pp. 41-42]). En d'autres termes, je crois que Lukasiewicz raisonne ici à partir d'une prémisses fausse.

## CHAPITRE IV

### L'ASPECT PRAGMATIQUE DE LA PREUVE

#### 1. La preuve en tant que relateur

Je rappelle qu'à un niveau que l'on pourrait qualifier de *syntactique*, ou peut-être de *structurel*, une preuve est un cas particulier d'argumentation, et non une simple proposition ou même un ensemble ou une suite de propositions. Il s'agit d'une structure qui comprend trois parties distinctes, à savoir un ensemble de propositions qui constituent les prémisses, une simple proposition qui est la conclusion, et une suite de propositions—un raisonnement—qui, dans certains cas, peut être organisée de façon fort complexe. Il existe des argumentations qui ne prouvent pas leurs conclusions pour un raisonneur donné;<sup>1</sup> une argumentation n'est donc pas nécessairement une preuve. Pour qu'elle en soit une, on introduit tout d'abord deux exigences, l'une *sémantique* et l'autre *épistémique*. D'une part, il faut que les prémisses soient vraies; une proposition fautive ne peut pas établir un fait. Mais non seulement faut-il que les prémisses soient vraies, il faut qu'elles soient connues comme vraies par le raisonneur; une proposition non connue comme vraie ne peut pas conduire à la connaissance.

*Car si celui qui n'a pas une connaissance de la prémisses a associé la conclusion et l'intermédiaire à ce qu'il ne sait pas, qu'est-ce qui pourrait transformer une telle supposition en connaissance?* [Platon, *Respubl.* 533c]

---

1 Je dis raisonneur plutôt qu'auditoire ou communauté puisqu'il n'y a pas de preuve pour un auditoire donné s'il ne fait pas l'effort de raisonner lui-même à partir de prémisses qu'il sait vraies. Tout auditoire pour lequel une conclusion est prouvée doit avoir donné lui-même une preuve (même s'il ne l'a pas inventée).

D'autre part, il faut que la conclusion s'ensuive logiquement des prémisses; les faits établis doivent non seulement être vrais mais il faut qu'ils soient *suffisants* pour autoriser la conclusion. Non seulement faut-il que la conclusion s'ensuive des prémisses, mais il faut que *le raisonneur* le sache. Le rôle d'un raisonnement est de conduire le raisonneur à cette connaissance.

Tout ceci peut paraître évident, mais certains semblent l'ignorer. Selon Cohen et Nagel [1934, p. 7], «a proposition is *proved* when, and only when, a premise *implies* that proposition and that premise is itself *true*». Ils affirment ainsi que toute proposition impliquée par une proposition vraie est prouvée; ce qu'ils voulaient dire, évidemment, c'est que toute proposition dont on montre qu'elle est impliquée par une proposition connue comme vraie est prouvée.

Si ces auteurs avaient raison, toute proposition vraie serait prouvée. En effet, puisque toute proposition s'implique elle-même, toute proposition *vraie* s'implique elle-même. Ainsi, toute proposition vraie est impliquée par une proposition vraie et, par conséquent, est prouvée selon Cohen et Nagel.

Il est bien sûr exclu qu'une preuve puisse «rendre sa conclusion vraie». Si une conclusion est vraie, elle l'est en vertu de son contenu et non pas de ce que quelqu'un pourrait en dire.

*A étant les prémisses, et B la conclusion, la question consiste à savoir si ces faits sont réellement dans un rapport tel, que si A est, B est. [...] La question n'est pas du tout de savoir si, les prémisses étant acceptées par l'esprit, nous avons une propension à accepter la conclusion. [...] Une conclusion vraie resterait vraie si nous n'avions aucune propension à l'accepter, et la fausse resterait fausse, bien que nous ne puissions résister à la tendance d'y croire [Peirce 1878, p. 556 (C.P. vol. 5, pp. 226-227)].<sup>1</sup>*

«Montrer que la conclusion est vraie», «avoir une propension à l'accepter», etc., sont des expressions qui se réfèrent implicitement à un raisonneur. De même pour «prouver une conclusion». Toutes ces expressions sont des relations. Une preuve,

<sup>1</sup> Pour un point de vue opposé, cf. Quine [1950, p. xv]: «If one statement is to be held as true, each statement implied by it must also be held as true [...]».

en particulier, prouve la vérité de sa conclusion pour quelqu'un. Ainsi, une preuve est un relateur, un intermédiaire entre une réalité objective et un sujet connaissant. Sa finalité dépend à la fois de sa correspondance à la réalité et de sa capacité d'amener quelqu'un à le reconnaître. Elle dépend des aspects syntaxique et sémantique mais aussi de l'impression qu'ils font sur un sujet qui a ses préjugés, ses faiblesses, ses particularités. Puisqu'il existe des preuves qui parviennent vraiment à prouver leurs conclusions, et cela malgré les difficultés, on peut se demander ce qu'il y a dans une preuve qui, au-delà de sa conformité à une structure que l'on accepte généralement, la rend convaincante en tant que preuve. On peut se demander ce qu'il y a qui conduit le raisonneur à croire non seulement que la conclusion est vraie mais qu'elle est prouvée par la preuve. Enfin, on peut se demander ce qu'il y a *dans* une preuve qui fait qu'on la reconnaît *comme* une preuve. Une chose est certaine: quelles que soient les réponses à ces questions, elles concernent moins l'argumentation en soi que le rôle qu'elle joue entre la réalité objective et l'état d'esprit du sujet connaissant. Elles indiquent toutes un aspect *pragmatique* de la preuve.<sup>1</sup>

## 2. Raisonnements rigoureux et raisonnements fondés

En tant que relateur entre objets et sujets, la preuve doit partir de prémisses qui correspondent à la réalité pour montrer au raisonneur que la conclusion y correspond aussi. Le raisonnement doit être *rigoureux*, pour garantir cette correspondance, et *fondé* pour la montrer au raisonneur. Plus précisément, on dira qu'un raisonnement est rigoureux s'il applique correctement des normes explicites telles que des règles, définitions, critères, etc. Une telle rigueur n'a rien à voir avec, par

1 Plus précisément, il s'agit d'un aspect épistémique: le langage est utilisé à une fin épistémique. On pourrait également qualifier cet aspect de «psychologique», au sens étymologique du terme, puisque les phénomènes en question sont mentaux. Psychologique ne signifie pas nécessairement «émotionnel» ou «non objectif».

exemple, l'utilité, la pertinence ou l'objectivité de ces normes. Elle se limite à les respecter, quelles qu'elles soient : «Exactitude, précision, logique inflexible», dit le *Robert*, d'où un souci de complétude ou de perfection. Un raisonnement rigoureux doit en principe marquer toutes les étapes, de même que tous les présupposés, qui conduisent à une conclusion. Il ne doit pas laisser de lacune.

Un raisonnement peut être rigoureux sans être fondé. Il est possible, par exemple, d'appliquer une règle telle que «de P inférer non-P» de façon strictement rigoureuse, puisque la nature de la règle n'a rien à voir avec la façon dont on l'applique. Si un tel raisonnement peut être rigoureux, il ne peut en aucun cas être considéré comme fondé. En effet, on ne peut pas *montrer* ce qui n'est pas le cas. Même une inférence valide n'est pas nécessairement fondée; il est possible en effet d'appliquer rigoureusement une règle telle que : «des prémisses, inférer immédiatement toute conséquence». Un tel raisonnement n'est pas fondé puisqu'il ne *montre* pas la relation de conséquence qui existe entre la conclusion et les prémisses.

Un raisonnement peut également être fondé sans être rigoureux. Si par exemple un raisonnement contient des lacunes, il peut tout de même fournir suffisamment de détails pour montrer que sa conclusion s'ensuit des prémisses. Il n'est pas toujours nécessaire, pour qu'un raisonnement soit fondé, d'explicitier tous les pas (voir p. 80, note 1). Dans une preuve par l'absurde, par exemple, dès qu'on obtient une contradiction à partir de l'hypothèse absurde, on sait que la conclusion est vraie: faut-il continuer la preuve jusqu'à rappeler le tiers exclu et conclure «c.q.f.d.»? Il reste toutefois la difficulté de décider à quel moment le niveau de détail devient convaincant et pour qui.

Pour Tarski [1936a, p. 124], «[...] un gain en exactitude et en correction méthodologique s'accompagne d'une diminution de clarté et d'intelligibilité».<sup>1</sup> Il semble qu'une tentative de perfec-

1 Cf. Leibniz (1696, cité par Scholz [1931, pp. 81-82]): «On accepte la petite monnaie en vrac, mais s'il s'agit de grosses pièces, en particulier de pièces d'or, on préfère les compter; et si on devait compter les diamants, on se donnerait volontiers la peine de les compter sur les doigts, parce que ce procédé de compte, quoique assurément le plus mauvais, est cependant en même temps le

tionner une argumentation—en la truffant de détails, par exemple—pourrait bien avoir un effet tout contraire à celui escompté. Cette situation va nous obliger à admettre qu'une preuve parfaite du point de vue de la méthodologie ne prouvera pas nécessairement sa conclusion au raisonneur et que, d'une façon assez paradoxale, une certaine imperfection des preuves que nous utilisons couramment fait partie de leur perfection.

La réflexion suivante permettra peut-être de résoudre le paradoxe: lorsqu'on donne, pour soi-même, une argumentation qui va d'un ensemble de prémisses  $P$  à une conclusion  $C$ , et que dans cette argumentation on arrive à une proposition intermédiaire  $p$  dont on sait déjà qu'elle implique  $C$ , on ne marque pas toutes les étapes de  $p$  à  $C$ . Mais lorsqu'une argumentation est destinée à d'autres personnes, il faut estimer ce que l'auditoire peut faire par lui-même. Il faut donc fournir au raisonneur toutes les informations nécessaires pour qu'il puisse lui-même faire la déduction avec autant de détails qu'il veut. Une argumentation n'explicite pas chaque détail dans l'espace logique, mais se limite à indiquer au lecteur comment il peut lui-même trouver un chemin. Celui qui donne une preuve a en principe identifié tous les endroits où on pourrait avoir des doutes—afin que la personne qui suit sa preuve puisse tout simplement lier toutes ces étapes les unes aux autres. Ainsi, si une *preuve* doit être parfaite, son *expression* doit être perfectible (donc non parfaite).<sup>1</sup>

Si les preuves étaient destinées à des machines, il suffirait que leurs raisonnements soient rigoureux pour qu'elles soient acceptées. Mais pour l'homme, il faut que le raisonnement montre la relation de conséquence entre la conclusion et les prémisses: il faut qu'il soit fondé. Seulement, si le raisonnement

---

plus sûr; par contre, plus le mode de calcul est supérieur, raffiné et rapide, et plus il est facile de se tromper: il en va tout à fait de même en logique».

- 1 Cf. Lacombe [1984, pp. 297-298]: «Une grande partie du texte [texte mathématique réel] est consacrée à fournir au lecteur des indications sur la façon de compléter, de rectifier éventuellement et de combiner entre eux ces fragments et ces ébauches [présents dans le texte] afin d'obtenir des affirmations complètes et des preuves valides».

Remarquons aussi que lorsqu'on présente une preuve, on invite le lecteur à se faire une opinion par lui-même. Ce qui revient à reconnaître tacitement le bon sens et l'autonomie du lecteur.

qui est fondé pour le débutant sera fondé pour l'expert, la réciproque ne sera pas toujours le cas. On peut très bien imaginer, par exemple, qu'un raisonnement que Gödel savait fondé ne pourrait jamais être connu comme tel par moi-même.

Le problème est de savoir s'il existe une logique reconnue de tout un chacun: la déduction est-elle universelle? Il *semble* qu'il existe un aspect universel de la logique. Selon Peirce [1878, p. 557 (C.P. vol. 5, p. 229)], le passage du doute à la croyance est soumis «à des règles qui gouvernent toutes les intelligences». Néanmoins, comme nous l'avons remarqué, cette universalité ne peut pas dépendre de la reconnaissance de raisonnements fondés. Pascal [1728, p. 594] nous dit «[...] quoi que ce soit qu'on veuille persuader, il faut avoir égard à la personne à qui on en veut, dont il faut connaître l'esprit et le coeur, quels principes il accorde, quelles choses il aime [...]». Puisqu'on cherche la vérité, il nous faut des preuves correctes; puisqu'on est humain, il nous en faut de convaincantes. Le formellement correct et l'intuitivement convaincant ne coïncident pas toujours. La méthode de la preuve est celle du bon équilibre entre la contrainte et la séduction, entre esprit de géométrie et esprit de finesse, pour utiliser les termes de Pascal.

Il est bien clair qu'il faut prendre des précautions en cherchant à adapter une argumentation à l'auditoire visé. En effet, de telles argumentations peuvent dégénérer, par exemple, en démagogisme. Pour éviter ce risque ainsi que d'autres dangers inhérents à un procédé subjectif, on a cherché à mettre en évidence dans le cadre de la logique moderne des critères mécaniques qui permettent de déterminer si les expressions d'argumentations sont rigoureuses. Rappelons que selon Tarski [1936a, pp. 122-123]:

*[...] il est fort possible [...] qu'un argument qui semble tout à fait convaincant à une personne ne soit même pas compréhensible à une autre. Pour éliminer toutes les causes de doute sous ce rapport, la méthodologie actuelle s'efforce de remplacer les valorisations subjectives dans l'examen des définitions et des preuves par des critères de nature objective, et de faire dépendre le jugement à porter sur la correction des définitions et des preuves de leur structure exclusivement, c'est-à-dire de leur forme extérieure.*

Il importe de remarquer qu'un tel critère ne fait que déplacer le problème. En effet, au lieu de s'occuper de déductions particulières, on s'interroge à propos de l'application de règles dans divers systèmes de déduction particuliers; au lieu de chercher à dégager des lois par l'observation des phénomènes—des données linguistiques et psychologiques—les logiciens décident, par l'élaboration quasi-arbitraire de systèmes de déduction, quelles déductions sont correctes.<sup>1</sup> Remarquons enfin qu'en général les livres de logique n'indiquent ni en quoi un contrôle mécanique est important ni quels sont les problèmes épistémologiques qui lui sont associés.

### 3. Raisonnements mathématiques et raisonnements quotidiens

Négliger le sens des symboles pour ne prendre en considération que leurs formes extérieures est certes une façon d'éviter toute valorisation subjective, mais il s'agit de tuer la poule pour avoir l'oeuf. Si nos symboles n'ont pas de signification, nos manipulations de symboles n'en auront pas non plus, et on ne prouvera rien du tout. Manifestement, une telle situation ne peut pas présenter d'intérêt pour la logique au sens de l'étude des preuves.

En quoi consiste donc le caractère purement formel des sciences déductives? Tarski explique de façon claire—en faisant allusion à une boutade célèbre de Russell—à quelles conditions les symboles non interprétés présentent un intérêt.

*[...] on entend dire et même on lit occasionnellement qu'aucun contenu défini ne peut être attribué aux concepts mathématiques; qu'en mathématiques nous ne savons pas réellement de quoi nous parlons, et que nous ne nous occupons pas de savoir*

---

1 Si l'expression formelle dans une logique symbolique était reconnue comme une condition nécessaire pour la correction du raisonnement, cela provoquerait un arrêt brutal de la recherche en mathématiques. On pourrait s'attendre au lancement rapide de revues clandestines dans lesquelles les preuves seraient données de la façon traditionnelle.

*si nos assertions sont vraies. On doit considérer de tels jugements d'un oeil plutôt critique. Si, dans la construction d'une théorie, on se comporte comme quelqu'un qui n'aurait pas compris la signification des termes de cette discipline, ce n'est pas du tout la même chose que de dénier à ces termes toute signification. C'est un fait que nous développons quelquefois une théorie déductive sans attribuer un sens défini à ses termes primitifs, traitant alors ces derniers comme des variables; dans ce cas nous disons que nous traitons la théorie comme un SYSTEME FORMEL. Mais cette situation [...] ne se produit que lorsqu'il est possible de fournir plusieurs interprétations du système axiomatique de la théorie, c'est-à-dire s'il y a plusieurs moyens qui s'offrent pour attribuer des significations concrètes aux termes qui figurent dans la théorie, mais que nous n'avons pas l'intention d'accorder d'avance la préférence à aucune de ces significations particulières. Un système formel, d'autre part, pour lequel nous ne sommes pas en mesure de fournir une seule interprétation, serait, on peut le présumer, sans intérêt pour personne [Tarski 1936a, pp. 119-120].*

Le théorème de Dedekind-Cantor, qui établit une correspondance biunivoque entre les points d'une droite et les nombres réels, permet de faire le pont entre la géométrie et l'arithmétique. Comme Tarski l'explique, étant donné une droite quelconque, il est possible de définir des relations entre ses points et des opérations sur ses points telles qu'elles satisfassent à tous les axiomes de l'arithmétique, qui concernent les relations correspondantes entre les nombres et les opérations correspondantes sur les nombres. Ainsi, le système axiomatique de l'arithmétique peut trouver une interprétation dans la géométrie. Réciproquement, le système axiomatique de la géométrie peut être interprété à l'intérieur de l'arithmétique. On peut donc à juste titre parler du caractère formel de ces deux sciences.

Mais comment distinguer le raisonnement qui s'inscrit dans le cadre de l'idéal mathématique du raisonnement quotidien? Pour De Morgan [1831, p. 228], la différence n'est que formelle:

[...] however different geometrical argument may be in form<sup>1</sup> from that which we employ daily, it is not different in reality. We are accustomed to talk of mathematical reasoning as above all other, in point of accuracy and soundness. This, if by the term reasoning we mean the comparing together of different ideas and producing other ideas from the comparison, is not correct, for in this view mathematical reasonings and all other reasonings correspond exactly.<sup>2</sup>

De Morgan [1831, p. 4] applique un critère qui s'inspire du raisonnement par l'absurde: «[...] the nature of mathematical demonstration is totally different from all other, and the difference consists in this—that, instead of showing the contrary of the proposition asserted to be only improbable, it proves it at once to be absurd and impossible». Il explique que la contradictoire de tout théorème de géométrie, par exemple, est inconsistante avec les principes suivants: (1) le tout est plus grand que la partie, (2) deux droites ne renferment pas un espace, et (3) deux droites qui se coupent ne peuvent pas être parallèles à une même ligne. On sait aujourd'hui que la contradictoire de ce dernier principe ne conduit pas à l'absurdité, mais De Morgan, à l'époque, ne le savait pas encore.<sup>3</sup>

Même à supposer qu'il n'y ait pas de différence de nature entre les raisonnements quotidien et mathématique, il faut reconnaître qu'il y a une différence de contexte. En effet, le chercheur qui publie un travail mathématique a eu l'occasion de le contrôler plusieurs fois et de le soumettre à la critique de ses collègues *avant* de le présenter publiquement. Dans la vie quotidienne, en revanche, on n'a pas le temps de «revoir son travail».

1 Par le mot form, De Morgan entend ici l'apparence, l'aspect extérieur de la chose.

2 Cf. aussi De Morgan [1831, p. 230]: «[...] the commonest actions of our lives are directed by processes exactly identical with those which enable us to pass from one proposition of geometry to another». Tarski [1936a, pp. 123-124], à propos des preuves informelles traditionnellement utilisées en mathématiques, affirme que «[...] les preuves mathématiques à tout prendre ne différeraient pas beaucoup des considérations de la vie courante».

3 Dans le même ouvrage [1831, pp. 235-239] De Morgan donne une «preuve» de ce principe, qui d'ailleurs était celle de Bertrand.

#### 4. La preuve soumise à l'épreuve

Lorsqu'on cherche à donner une preuve, on *croit* que sa conclusion est vraie. On ne cherche pas à prouver ce qui paraît faux. Mais on ne cherche pas non plus à prouver ce qui semble indiscutablement vrai—ce qu'on a la conviction de *savoir* vrai. Le contexte de la présentation d'une preuve est donc celui d'un raisonneur qui cherche à vérifier que sa croyance n'est pas une simple opinion mais qu'elle est digne de la foi d'une personne sérieuse. En même temps, le raisonneur invite tacitement son auditoire à trouver des erreurs dans sa démarche.<sup>1</sup>

Il peut très bien arriver que la longueur d'une salle mesure vingt mètres mais que personne ne le sache. Au moyen d'un mètre posé vingt fois, à supposer qu'on ne laisse pas de trou et que rien ne soit mesuré à double, on peut savoir que la salle a cette longueur. «Voici la solution du problème», dira-t-on, «et voici comment je l'ai obtenue». Prouver, c'est comme mesurer, en ce sens qu'il s'agit d'une procédure qu'on peut contrôler et reproduire: «voici l'argument, et voici comment j'ai passé des prémisses à la conclusion».

Reprenons maintenant un passage de Church [1956, pp. 53-54] que j'ai eu l'occasion de citer au chapitre II: «it is essential to the idea of proof that, to any one who admits the presuppositions on which it is based, a proof carries final conviction». A ma connaissance, ce passage n'a pas encore fait l'objet de commentaire dans une publication; en particulier, le sens du mot *final* reste à préciser. Apparemment, Church veut dire ici que, pour être une preuve, il ne suffit pas qu'une argumentation entraîne la conviction, puisque la conviction doit être finale. On peut interpréter cet adjectif de la façon suivante: la conviction est finale lorsque celui qui l'a ne va pas changer d'avis après coup—il tiendra à sa conviction non pas par obstination ou ténacité, mais en raison de la complétude et de la suffisance des motifs donnés dans la preuve. Selon ce point de vue, accepter une preuve revient tacitement à affirmer quelque chose à propos d'un avenir indéfini. Si l'on mesure une salle au mètre, et

1 Un raisonneur présente une conjecture lorsqu'il est sûr que la proposition est vraie mais qu'elle ne peut pas être prouvée.

qu'on détermine qu'elle a vingt mètres de longueur, cette méthode devrait entraîner une conviction définitive; on sera convaincu qu'en prenant le mètre et en mesurant la même salle une deuxième fois le résultat sera le même. Une conviction est donc finale lorsque tout doute est définitivement écarté. Il est certes possible de se tromper: on peut accepter une argumentation comme une preuve et se rendre compte, après coup, que la conclusion est fausse. Cependant on ne dira pas qu'une proposition fausse *était* prouvée (mais ne l'est plus maintenant), mais que la «preuve» n'en était pas une. On ne dira pas que la salle qui *avait* vingt mètres a changé de dimension, mais qu'on s'est trompé en appliquant la méthode qui a conduit à cette conclusion.

Une preuve met en évidence les points cruciaux dans le passage d'un ensemble de prémisses à une conclusion, autrement dit les différentes étapes qui pourraient faire problème. Ceci est clair: si ce n'était pas le cas, aucune preuve ne serait jamais acceptée. On aurait tendance à penser que, *quelque part*, il devrait y avoir une erreur. Mais, si l'examen de *tous* les points qui pourraient être à l'origine de difficultés ou de doutes éliminait toute hésitation (il s'agit peut-être d'un cas idéal), le sujet raisonnable serait *obligé* d'accepter que la conclusion s'ensuit des prémisses.

*To reach a final and compulsory belief is [...] what the reasonable disputant aims at. But what he aims at is the truth. Therefore, by the truth he means nothing more than a finally compulsory belief. If, then, you can prove to him that a necessary proposition is such that there will be a final, unshakable compulsion preventing him from imagining it to be false, you have proved to him that it has those characters which he expresses by saying that the proposition is true. Now to say that a necessary proposition is true is to say that it is necessarily true. The proposition is therefore true by definition, if by inconceivable is meant eternally inconceivable. But a definition is not a criterion [Peirce 1902c (C.P. vol. 2, pp. 18-19)].*

Personne ne nous oblige à adopter un comportement objectif, mais *si* un raisonneur est vraiment objectif, un raisonnement

peut effectivement l'amener à accepter que telle ou telle conclusion s'ensuit de telles prémisses. Sa volonté d'objectivité le pousse à chercher, avec énergie et sincérité, des difficultés, voire même des défauts dans la démarche. S'il n'en aperçoit aucun, tout doute qui persiste à propos de la conclusion doit être attribué non pas à la démarche mais aux prémisses. Selon Tarski [1936a, p. 122], c'est en effet grâce à cette méthode «que tous les doutes concernant le contenu des concepts ou la vérité des assertions d'une théorie donnée se ramènent aux doutes concernant les quelques termes primitifs et axiomes».

On peut distinguer deux grandes traditions de la pensée qui sont d'ailleurs exhaustives: la tradition apologétique, qui consiste à protéger des croyances, et la tradition critique, qui consiste évidemment à les critiquer afin de les vérifier et/ou d'être amené à de nouvelles connaissances. L'argumentation fait partie de la *tradition critique*. Russell est succinct: «it is one of the chief merits of proofs that they instil a certain scepticism as to the result proved» [1903, p. 360]. Forder [1927, p. viii] va plus loin:

*Logical investigations, besides being of interest in themselves, often point the way to extensions of knowledge previously unthought of. It was from such investigations that the classical non-Euclidean Geometries arose, and they freed the mind from its age-long bondage to the obvious, and made possible the bolder conceptions of space reached in our day. For the virtue of a logical proof is not that it compels belief, but that it suggests doubts.*

Finalement, on n'élimine pas les doutes, on les déplace et on les organise. Donner une preuve, c'est aussi une façon de manifester sa méfiance à propos de la conclusion. Il y a donc un sens dans lequel *toute* preuve est une preuve par l'absurde.

## CHAPITRE V

### LES CRITERES DES PREUVES

#### 1. Deux sortes de connaissances

J'ai rappelé, au début de ce travail, que les preuves existaient bien avant Aristote, et qu'il convenait de distinguer la pratique de la preuve d'une réflexion portant sur cette pratique. Il n'est en effet nullement nécessaire de connaître les fondements d'une pratique pour la mettre en oeuvre, et les raisonneurs n'ont pas attendu Aristote pour déterminer que certains arguments étaient valides et que d'autres ne l'étaient pas; mais peut-être a-t-on besoin de quelqu'un comme lui pour *expliquer* comment on établit ces propriétés. Il peut arriver, en effet, que l'on utilise un concept de façon systématique et précise avant de ressentir le besoin d'une mise au point.

E. Beth se fait l'écho d'une opinion assez largement répandue, qui considère que la découverte la plus importante d'Aristote est d'avoir établi que toute preuve réunit deux sortes de connaissances: (1) les prémisses sont connues comme vraies par le raisonneur (connaissance matérielle), et (2) le raisonnement est fondé, autrement dit il lui montre que l'argument est valide (connaissance logique). Evidemment, lorsque les prémisses sont *connues* comme vraies, elles sont vraies; de même, un argument dont on *montre* la validité est valide. On ne peut ni savoir ni montrer ce qui n'est pas le cas. Mais nous avons déjà noté que le vrai (ou le valide) n'est pas nécessairement connu comme vrai (ou valide).

La question qui se pose alors à propos d'une prémisse n'est donc pas, à strictement parler, celle de sa vérité, mais celle de vérifier qu'elle est *connue* comme vraie. Donner une preuve exige des prémisses non seulement vraies, mais connues comme vraies; ainsi, le problème est de s'assurer que le raisonneur a la

*connaissance* de la vérité des prémisses.<sup>1</sup> Un critère de la vérité à lui seul ne résoudre pas ce problème. Comment sait-on, en effet, qu'il n'existe qu'une seule droite entre deux points? Pour qu'une prémisses soit connue comme vraie, il faut que le sujet dispose d'un critère de la vérité *qu'il connaît comme tel*.

Pratiquement, il y a deux façons de chercher à confirmer la connaissance de la vérité d'une prémisses. D'une part, on peut contrôler les moyens qui ont conduit à la conviction d'une telle connaissance et chercher à trouver des erreurs. D'autre part, bien qu'on croie connaître la prémisses comme vraie, on peut la considérer comme une hypothèse au sens fort et chercher à déterminer si elle est vraie ou fausse; en particulier, on peut chercher à trouver des conditions dans lesquelles la prémisses pourrait être fausse. Le succès de ces méthodes n'est pas garanti, mais elles donnent la possibilité de *tenter* de confirmer cette sorte de connaissance. Pour le reste, la question relève de la théorie de la connaissance, qui, de toute évidence, ne la résoudra pas dans un proche avenir.

Comme nous l'avons vu, l'existence d'inférences connues comme valides découle de l'existence de preuves. Mais la question est de savoir si ce qu'on a la conviction de connaître comme valide l'est vraiment. Il s'agit donc de *vérifier* la connaissance de la validité d'un argument. Parmi les arguments connus comme valides, certains sont *évidemment* valides (par exemple, il est évident que «Tarski est un logicien» s'ensuit de «Tarski est un logicien polonais»), tandis que d'autres ne peuvent être connus comme valides qu'à la suite d'un raisonnement. Soit par exemple l'argument suivant:

1. Tout nombre est soit pair soit impair.
2. Aucun nombre n'est à la fois pair et impair.
3. Tout nombre qui est le carré d'un nombre impair est lui-même impair.
- ? Tout nombre dont le carré est pair est lui-même pair.

1 Une «preuve» destinée à un auditoire particulier fait une pétition de principe si elle utilise des prémisses qui ne sont pas connues comme vraies par cet auditoire. On pourrait parler de prémisses non justifiées ou encore non autorisées, puisqu'il incombe à l'auditoire visé, à celui que l'on veut conduire à la connaissance de la conclusion, d'«autoriser» les prémisses.

On peut montrer la validité de cet argument par le raisonnement suivant:

- |    |  |      |
|----|--|------|
| 4. | Supposons qu'un nombre carré quelconque $n^2$ soit pair. |      |
| ?  | $n$ est pair.  |      |
| 5. | $n^2$ n'est pas impair.                                  | 2, 4 |
| 6. | $n$ n'est pas impair.                                    | 3, 5 |
| 7. | $n$ est pair.  | 1, 6 |

Ce raisonnement est fondé puisqu'il montre la validité d'un argument valide; seulement, il se compose lui-même d'inférences qui se présentent comme des arguments. Ceux-ci ont un statut particulier puisque, pour eux, on reconnaît l'inférence prémisses-conclusion sans chercher à *montrer* sa validité par des inférences intermédiaires (ce qui pourrait conduire à une régression à l'infini). Ceci laisse entendre qu'il existe des inférences «immédiates» (ou «minimales», «primitives») *connues* comme valides qui montrent la validité de celles qui ne sont *pas* connues comme valides. Dans l'exemple ci-dessus, des inférences évidemment valides conduisent à des conclusions intermédiaires (lignes 5 et 6) et finalement à la conclusion de l'argument dont elles montrent la validité. Le problème de la déduction se réduit à celui du raisonnement fondé, soit à celui des inférences que l'auditoire reconnaît comme valides. Sous quelles conditions est-il évident que la conclusion s'ensuit des prémisses, sans qu'un raisonnement supplémentaire ne soit nécessaire pour le montrer?

L'existence d'inférences immédiates découle de celle de déductions fondées. Il existe en effet des moyens d'enchaîner des arguments évidemment valides qui montrent que la fin de la chaîne est une conséquence de son début. Mais un simple enchaînement d'inférences immédiates est assez rare. Dans la plupart des cas, le raisonnement se déroule à différents niveaux. Au début de celui que je viens de donner, par exemple, j'ai posé une hypothèse supplémentaire (ligne 1); tout ce qui en découle doit être distingué des conséquences directes des prémisses proprement dites. Le même phénomène se manifeste d'une façon encore plus évidente dans la preuve classique du

théorème de l'infinité des nombres premiers (je reprends ici la version de Miéville [1987, p. 36]):<sup>1</sup>

*Hypothèse absurde: il existe un plus grand nombre premier, soit  $p_m$  ce nombre.*

*Nous allons montrer qu'il en existe un plus grand.*

1. *Construisons le nombre  $q$  formé en additionnant 1 au produit de tous les nombres premiers jusqu'à  $p_m$ :*  

$$q = (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_m) + 1.$$
2. *Le nombre  $q$  est plus grand que  $p_m$ .*
3. *Quel que soit le nombre premier  $p_i$  (ou quel que soit le produit de nombres premiers  $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_i$ ) pris comme diviseur, le quotient consistera en un produit de nombres premiers, et il restera toujours le reste 1. Le nombre  $q$  ne peut donc pas être factorisé en un produit de nombres premiers.*
4. *Mais le nombre  $q$  est ou non un nombre premier.*
- 4.1 *Si le nombre  $q$  est un nombre premier, il existe donc un nombre premier plus grand que  $p_m$  [cf. 2].*
- 4.2 *Si le nombre  $q$  n'est pas un nombre premier, il peut être factorisé en produit de nombres premiers. Ce qui n'est pas le cas [cf. 3].*
5. *Il existe donc un nombre premier plus grand que  $p_m$ .*

Cette preuve commence par une hypothèse supplémentaire. Plus loin, on déduit des conséquences à partir de deux hypothèses supplémentaires contradictoires, à savoir « $q$  est un nombre premier» et « $q$  n'est pas un nombre premier». Dans chaque raisonnement, à quelque niveau que ce soit, les inférences utilisent comme prémisses non seulement l'hypothèse qui commence le raisonnement ainsi que les conséquences déjà déduites de cette hypothèse, mais aussi des propositions déjà utilisées à d'autres niveaux de la déduction.

Les inférences immédiates, connues comme valides, dépendent des connaissances du sujet. Ainsi, déterminer si un

1 On trouve une preuve de ce théorème chez Euclide déjà [Eléments IX.20]. Pour une autre version moderne, suivie d'une analyse particulièrement fine, voir Gentzen [1936].

raisonnement est fondé (pour quelqu'un) revient à déterminer s'il se compose uniquement d'inférences reconnues comme valides *par celui qui raisonne*—ce qui, finalement, dépasse le cadre de la logique. Dans certains cas, cependant, on peut établir ce qui n'est *pas* fondé, et cela sans tenir compte d'un raisonneur particulier. Si, par exemple, on réussit à déterminer qu'un raisonnement contient une inférence non valide, on saura qu'il n'est pas fondé.<sup>1</sup> Il peut également arriver qu'un raisonnement qui ne contient que des inférences valides ne soit pas fondé. En effet, toute règle d'inférence qui conserve la validité n'est pas nécessairement une règle d'inférence *immédiate*. Autrement dit, on peut imaginer des inférences valides, mais non connues comme telles, qui sont formulées comme des règles. L'exemple le plus extrême serait celui de la règle d'inférence universelle: «des prémisses, inférer immédiatement toute conséquence». A supposer que la conclusion soit effectivement une conséquence logique des prémisses, cette règle conserve la validité; mais son application ne constitue en aucun cas un raisonnement fondé. Rappelons enfin que selon Peirce [1878, p. 556 (C.P. vol. 5, pp. 226-227)], «A étant les prémisses, et B la conclusion, la question consiste à savoir si ces faits sont réellement dans un rapport tel, que si A est, B est». Mais A et B pourraient être dans ce rapport même si le passage de A à B était si peu évident qu'on ne pourrait pas l'apercevoir sans avoir recours à un saut intuitif énorme. Par exemple, si A désigne les prémisses fondamentales de l'arithmétique, et B le «dernier théorème» de Fermat, on sait que A et B sont dans le rapport en question *ou* que A et non-B le sont. Mais personne ne sait si, effectivement, A implique B ou s'il implique non-B.

---

1 Cf. Scanlan [1988, p. 30]: «[...] an ideal mathematical demonstration involves a formal deduction which shows that the conclusion is implied by known truths. The deduction is formal in the sense that the cogency of the deduction as a proof of implication is preserved when non-logical words in the deduction are reinterpreted. A reinterpretation of a putative demonstration for which the premises are known to be true and the conclusion false suffices to show that it cannot actually be a demonstration. Otherwise there would be a cogent deduction showing that true premises imply a false conclusion. Since this is impossible, any demonstration of the given conclusion from the given premises is impossible also. This 'method' is really just the method of counterinterpretations couched in terms of the possibility or impossibility of demonstration.»

Ce dernier exemple indique aussi que nous voulons, des prémisses à la conclusion, un enchaînement de petits pas sans aucune lacune. On dira même qu'il n'y a pas de véritable raisonnement si le lien entre les prémisses et la conclusion n'est pas partout évident—ce qui, toutefois, ne signifie pas que tous les pas doivent être *exprimés*. La plupart du temps, une lacune apparente peut être facilement comblée: comme dans les enthymèmes classiques, une proposition manquante est «évidente» dès qu'on s'aperçoit qu'elle manque. Mais on peut aussi se tromper en estimant que rien ne manque alors qu'une lacune cache quelque faute de raisonnement—d'où le souci de les éviter.

## 2. Les prémisses dites «de contrebande»

Une proposition que l'on utilise en tant que prémisses dans la dérivation d'une conclusion, mais qui ne se trouve pas parmi les prémisses explicitement énoncées, constitue ce que j'appellerai, avec J. Corcoran, une prémisses de contrebande. Il s'agit d'une proposition introduite dans une déduction sans être déclarée. On parle aussi de prémisses «clandestines», «implicites», «supprimées», «tacites», etc.<sup>1</sup>

On ne peut donc pas dire d'un raisonnement qui emploie une prémisses de contrebande qu'il montre que sa conclusion s'ensuit des *seules* propositions posées comme prémisses. Un tel raisonnement n'est donc pas fondé. Ainsi, à supposer qu'on puisse établir qu'une prémisses de contrebande est effectivement utilisée dans un raisonnement, il s'agira d'un critère négatif montrant que le raisonnement n'est pas fondé et, partant, qu'il n'y a ni déduction ni preuve.

<sup>1</sup> L'expression «prémisses de contrebande» (ou plutôt «smuggled premise») m'a été proposée par Corcoran. Chez Lakatos on trouve deux fois l'expression «smuggling hidden lemmas into a proof» [1976, pp. 47 et 51] et chez Schrecker il est question de l'introduction «par contrebande» de «quelque 'pseudoprobème' de la métaphysique» [1937, p. 352]. A strictement parler, l'objet introduit par contrebande ne devrait pas être appelé prémisses—parce qu'elle n'en est pas une! «Proposition de contrebande» serait plus exact.

Une prémisse de contrebande peut être extrêmement subtile. Par exemple, on a reproché à Euclide d'avoir introduit en contrebande la proposition «si trois points sont colinéaires, l'un se situe entre les deux autres». Ce type de constat permet de déterminer le niveau de rigueur de travaux antérieurs ainsi que de construire de meilleurs systèmes d'axiomes pour nos recherches actuelles.<sup>1</sup> Dans le domaine des mathématiques, il est rare que l'on attire l'attention sur une prémisse de contrebande pour la reprocher à quelqu'un. Cependant, en dehors des mathématiques il arrive souvent qu'une telle «prémisse» (qui n'a probablement pas été l'objet d'un examen minutieux de la part de l'auteur de l'argumentation) ne soit pas connue comme vraie ou même qu'elle soit fausse. En pareils cas, l'introduction de la proposition en contrebande dissimule une pétition de principe.

Effectuer une déduction, c'est faire une expérience qui vise à déterminer le contenu de l'ensemble des prémisses. De même qu'une expérience de chimie sera faussée si l'échantillon est contaminé en cours de route, de même une argumentation le sera si l'ensemble de prémisses qui constitue en quelque sorte son «échantillon de départ» a été contaminé par des propositions étrangères. L'expérience de chimie qui utilise un échantillon contaminé peut très bien mettre en évidence la présence d'une certaine substance, mais en aucun cas elle ne peut montrer que la substance était présente *dans l'échantillon*. De même, l'argumentation «contaminée» peut faire connaître une certaine proposition mais elle ne peut pas montrer que la proposition était implicite *dans l'ensemble de prémisses* explicitement posé au départ. D'une certaine façon donc, l'emploi d'une prémisse de contrebande constitue un changement de programme; une telle prémisse n'empêchera pas le raisonneur d'effectuer une déduction, mais toute conclusion qu'il en déduit sera hors de propos.

1 Cf. Beth [1959, p. 82]: «It is by way of attempting to satisfy this completeness condition that axiom systems are actually constructed. The various proofs of the known theorems [...] are closely examined in order to detect any tacit assumptions to which they may appeal. All axioms which have been explicitly stated and all tacit presuppositions which have been detected are listed so as to provide a provisory set of axioms  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ . For instance, the axioms of order, as stated in Hilbert's *Grundlagen* [...], had been tacitly applied for centuries before they were detected by Pasch».

Il semble généralement admis que l'intérêt pour les prémisses de contrebande est récent. Lakatos, par exemple, dit que «The hunt for hidden lemmas [...] started only in mid-nineteenth-century mathematical criticism [...]» [1976, p. 81, n. 4]. Cependant de nombreux exemples attestent que l'intérêt pour la chose remonte bien plus loin. Aristote était conscient du fait que nous n'exprimons pas toujours l'une ou l'autre des prémisses que nous utilisons dans un raisonnement, ce qui a donné lieu à des discussions à propos des «enthymèmes». <sup>1</sup> On peut relever aussi que Clavius (1537-1612), Leibniz et Gauss ont tous découvert des prémisses de contrebande chez Euclide [cf. Kline 1972, p. 1006]. Quoi qu'il en soit, la prise de conscience de ce phénomène ainsi que d'autres défauts chez Euclide semble bien avoir pris de l'ampleur au dix-neuvième. Selon Kline [1972, p. 1007],

*Though criticisms of the logical structure of Euclid's Elements were launched almost from the time it was written, they were not widely known or the defects were regarded as minor. The Elements was generally taken to be the model of rigor. However, the work on non-Euclidean geometry made mathematicians aware of the full extent of the deficiencies in Euclid's structure, for in carrying out proofs they had to be especially critical of what they were accepting. The recognition of the many deficiencies finally obliged the mathematicians to undertake the reconstruction of the foundations of Euclidean geometry and of other geometries that contained the same weaknesses. This activity became extensive in the last third of the nineteenth century.*

La prise de conscience a été importante et générale. Les remarques du mathématicien français Darboux sont typiques: «Je suis effrayé de la foule de propositions que l'on admet implicitement. Je crois même qu'il y aurait beaucoup à faire pour

---

1 Cf. Peirce [1902d (C.P. vol. 2, § 582)]: «An enthymeme is usually defined as a syllogism with a suppressed premise or premiss. Now, the expression of a train of thought may be elliptical, some thought being unexpressed in the confident anticipation that the reader, or hearer, will supply it. But in thought, a premise or premiss cannot be suppressed without ceasing to be either premise or premiss.»

les dégager» (lettre inédite à Hoüel du 2 septembre 1883, citée par Rostand [1960, p. 261]). Bien que tardive, cette prise de conscience a conduit rapidement à la découverte de prémisses de contrebande chez de nombreux auteurs—mais de préférence chez Euclide—au point que Nicod affirme en substance que l'histoire moderne de la géométrie peut se caractériser comme une tentative d'explicitier les prémisses qu'Euclide avait introduites en contrebande [1923, p. 1]. La recherche de ces prémisses a naturellement suscité diverses réflexions quant aux moyens de les éviter. A ce propos, Frege a franchi une étape importante en présentant sa *Begriffsschrift* [1879]:

*Sie [die vorliegende Begriffsschrift] soll [...] zunächst dazu dienen, die Bündigkeit einer Schlußkette auf die sicherste Weise zu prüfen und jede Voraussetzung, die sich unbemerkt einschleichen will, anzuzeigen, damit letztere auf ihren Ursprung untersucht werden könne.*

De nos jours, ce phénomène est si fréquemment mentionné dans les travaux mathématiques, logiques et philosophiques que l'on serait tenté de penser qu'il s'agit d'un sujet de recherche important. A ma connaissance cependant aucun livre ou article n'y a été consacré; par ailleurs, aucun critère n'est connu qui permettrait d'établir dans des cas particuliers s'il y a prémisse de contrebande ou non. Dans ce qui suit, je chercherai à mettre en évidence les difficultés liées à la découverte d'un tel critère.

### 2.1. Une «preuve» de Leibniz et le commentaire de Frege

Dans les *Nouveaux essais* de Leibniz [IV, vii, § 10], on trouve une «démonstration» bien connue de la proposition « $2 + 2 = 4$ ». <sup>1</sup> Leibniz prétend prouver cette proposition à partir de «définitions» des nombres deux, trois et quatre. Il a été motivé dans cette démarche par son intérêt pour le «logicisme» (comme on l'a appelé à une époque ultérieure), c'est-à-dire le point de vue selon lequel toutes les lois des mathématiques sont des con-

<sup>1</sup> Cf. aussi Nouveaux essais IV.ii.§1.

séquences de définitions. Voici la «preuve» de Leibniz dans l'édition Erdmann de 1840 [p. 363]:

TH. Je dis, que je vous attendois là bien préparé. Ce n'est pas une vérité tout à fait immédiate que deux et deux sont quatre; supposé que quatre signifie trois et un. On peut donc la démontrer et voici comment.

- Definitions: 1) Deux, est un et un.  
 2) Trois, est Deux et un.  
 3) Quatre, est Trois et un.

Axiome, mettant des choses égales à la place, l'égalité demeure.

Démonstration: 2 et 2 est 2 et 1 et 1 (par la déf. 1)

2 et 1 et 1 est 3 et 1 (par la déf. 2)

3 et 1 est 4 (par la déf. 3) . . . . .

Donc (par l'Axiome)

$$\begin{array}{r}
 2. \quad + \quad 2 \\
 \hline
 2 \quad + \quad 1 \quad + \quad 1 \\
 \hline
 3 \quad + \quad 1 \\
 \hline
 4
 \end{array}$$

2 et 2 est 4. Ce qu'il falloit démontrer.

Ce passage doit sa célébrité au commentaire qu'en a fait Frege dans ses *Grundlagen der Arithmetik* [1884, p. 7]:

§6. *Andere Philosophen und Mathematiker haben denn auch die Beweisbarkeit der Zahlformeln behauptet. Leibniz\*) sagt:*

«Es ist keine unmittelbare Wahrheit, dass 2 und 2 4 sind; vorausgesetzt, dass 4 bezeichnet 3 und 1. Man kann sie beweisen und zwar so:

- Definitionen: 1) 2 ist 1 und 1,  
 2) 3 ist 2 und 1,  
 3) 4 ist 3 und 1.

*Axiom: Wenn man Gleiches an die Stelle setzt, bleibt die Gleichung bestehen.*

*Beweis:  $2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 3 + 1 = 4.$*

Def. 1.            Def. 2.    Def. 3.

*Also: nach dem Axiom:  $2 + 2 = 4.$ "*

*Dieser Beweis scheint zunächst ganz aus Definitionen und dem angeführten Axiome aufgebaut zu sein. Auch dieses könnte in eine Definition verwandelt werden, wie es Leibniz an einem andern Orte\*\*) selbst gethan hat. Es scheint, dass man von 1, 2, 3, 4 weiter nichts zu wissen braucht, als was in den Definitionen enthalten ist. Bei genauerer Betrachtung entdeckt man jedoch eine Lücke, die durch das Weglassen der Klammern verdeckt ist. Genauer müsste nämlich geschrieben werden:*

$$\begin{aligned} 2 + 2 &= 2 + (1 + 1) \\ (2 + 1) + 1 &= 3 + 1 = 4. \end{aligned}$$

*Hier fehlt der Satz*

$$2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1,$$

*der ein besonderer Fall von*

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

*ist. Setzt man dies Gesetz voraus, so sieht man leicht, dass jede Formel des Einsundeins so bewiesen werden kann.*

\*) Nouveaux Essais, IV. § 10. Erdm. S. 363.

\*\*) Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis. Erdm. S. 94.

Le commentaire de Frege peut se résumer de la façon suivante:

- 1) la «preuve» contient une lacune
- 2) il lui manque la proposition  $2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1$
- 3) cette proposition est un cas particulier de  $a + (b + c) = (a + b) + c$ , une loi de l'arithmétique
- 4) la supposition explicite de cette loi rend possible la preuve de toute formule analogue de l'addition.

Frege a peut-être raison de penser qu'il manque une prémisse chez Leibniz. En effet, la conclusion  $2 + 2 = 4$  ne

s'ensuit pas des prémisses données, comme le montre le contre-argument suivant:<sup>1</sup>

Argument de Leibniz:

$$\begin{aligned} 2 &= 1 + 1 \\ 3 &= 2 + 1 \\ 4 &= 3 + 1 \\ ? \quad 2 + 2 &= 4 \end{aligned}$$

Contre-argument:

$$\begin{aligned} 0 &= 2 - 2 \\ -2 &= 0 - 2 \\ -4 &= -2 - 2 \\ ? \quad 0 - 0 &= -4 \end{aligned}$$

La non-validité de l'argument de Leibniz signifie qu'aucune preuve de  $2 + 2 = 4$  n'est possible à partir des prémisses données. Par conséquent, on sait que la «preuve» de Leibniz est non fondée. Pour Frege, elle l'est à cause d'une *lacune* que l'on peut combler en postulant une prémisse supplémentaire. Seulement, il propose de corriger la «preuve» non pas en postulant la prémisse qui, selon lui, *manque*, soit  $2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1$ , mais en ajoutant la loi de l'associativité de l'addition,

$$\forall xyz (x + (y + z)) = ((x + y) + z).$$

On voit bien que la supposition de l'une ou de l'autre de ces expressions peut corriger la «preuve», et il est facile de penser à d'autres possibilités, par exemple

$$\forall xy (x + (y + 1)) = ((x + y) + 1),$$

---

1 On obtient le contre-argument par des substitutions uniformes selon le tableau que voici:

1	2
2	0
3	-2
4	-4
+	-

Evidemment, les trois prémisses du contre-argument sont vraies mais la conclusion est fausse.

J'ai découvert ce contre-argument en cherchant une fonction qui ne «satisfait» pas la proposition que Frege propose d'ajouter pour corriger la «preuve». La soustraction se présente immédiatement comme une fonction non associative:  $((3 - 2) - 1) \neq (3 - (2 - 1))$ .

l'une des lois de Peano. Les suggestions de Frege permettent à elles seules d'établir une liste de possibilités relativement longue:

$$\begin{aligned} (2 + (1 + 1)) &= ((2 + 1) + 1) \\ \forall x (x + (1 + 1)) &= ((x + 1) + 1) \\ \forall y (2 + (y + 1)) &= ((2 + y) + 1) \\ \forall z (2 + (1 + z)) &= ((2 + 1) + z) \\ \forall xy (x + (y + 1)) &= ((x + y) + 1) \\ \forall xz (x + (1 + z)) &= ((x + 1) + z) \\ \forall yz (2 + (y + z)) &= ((2 + y) + z) \\ \forall xyz (x + (y + z)) &= ((x + y) + z) \end{aligned}$$

N'importe laquelle de ces expressions suffit à elle seule pour compléter l'ensemble des prémisses de façon à ce qu'il implique la conclusion—ce qui montre qu'une «preuve» à laquelle manque une prémisse ne détermine pas par elle-même quelle prémisse en particulier a été passée en contrebande.

On sait que la conclusion de Leibniz ne s'ensuit pas des prémisses qu'il a énoncées. On sait par ailleurs que la supposition explicite de  $2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1$  (par exemple) suffirait pour corriger la «preuve». Il est donc *possible* qu'ici une prémisse ait été introduite par contrebande. Mais il n'est toujours pas établi ni quelle proposition aurait été introduite en contrebande ni qu'il y en ait une. En effet, la faute pourrait être un simple *non sequitur* ou encore autre chose. Il peut s'agir par exemple d'un simple cas d'ambiguïté: d'abord une lecture de l'expression  $2 + 1 + 1$ , ensuite l'autre. L'acte de lire la même expression de deux façons différentes ne revient pas à employer une proposition qui met ces deux lectures en rapport.

A supposer qu'il y ait bien une prémisse de contrebande, rien ne permet de déterminer quelle prémisse en particulier a en fait été utilisée. En effet, même si Leibniz était encore en vie et si on pouvait lui poser la question, rien ne garantit qu'il se souviendrait encore de ce qu'il pensait au moment où il donnait sa «preuve». Le manque apparent d'un critère permettant de déterminer d'une proposition donnée qu'elle (et non pas une autre) est la prémisse de contrebande n'a pas empêché d'autres commentateurs, à la suite de Frege, de prendre position. Pour Beth [Beth & Piaget 1961, p. 45],  $2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1$  est la prémisse de contrebande chez Leibniz, tandis que pour les

Kneale [1962, p. 333, n. 1] c'est «la loi de l'associativité» qui manque. (Pour le reste, ces auteurs se font l'écho de Frege.)

En général, ce sujet est abordé d'une manière peu formelle, caractéristique d'une époque plus ancienne dans l'histoire de la logique; à ma connaissance aucune allégation d'une prémisses de contrebande ne précise pourquoi on devrait croire qu'il manque quelque chose (comme le fait, par exemple, la présentation d'un contre-argument). La présente discussion se fonde sur des normes de rigueur modernes. A partir d'un argument il est possible de déterminer de façon concluante que son ensemble de prémisses n'implique pas sa conclusion. Cela signifie non seulement que le raisonnement de l'argumentation n'est pas fondé tel qu'il est donné, mais aussi qu'aucun autre raisonnement fondé n'y est possible: il n'y a aucun moyen de corriger l'argumentation qui n'entraîne pas l'adjonction d'une nouvelle proposition à l'ensemble des prémisses. Au moyen de la déduction, on peut déterminer quelles prémisses il conviendrait d'ajouter; mais aucun moyen ne permettra de déterminer laquelle parmi celles-ci était utilisée par tel ou tel auteur.

Toutes les expressions que j'ai mentionnées jusqu'à présent comme prémisses de contrebande possibles concernent la propriété d'associativité. L'essentiel semble donc être l'introduction sans déclaration de l'associativité—et peu importe la proposition à laquelle Leibniz pensait effectivement.<sup>1</sup> Pourtant même si on laisse de côté la question de savoir *quelle proposition en particulier* serait de contrebande, on ne peut pas affirmer avec certitude que cette proposition a quelque chose à voir avec l'associativité. Considérons, en effet, le commentaire que donne Poincaré à propos du passage de Leibniz [1894, pp. 372-373]:

---

<sup>1</sup> Selon Rescher [1964, p. 11, n. 50], «Leibniz nowhere explicitly states this associative law. However he uses it in proofs, and he writes sums without parentheses» (c'est moi qui souligne ici le mot nowhere). Cf. aussi Dürr [1947, p. 100].

*Le débat est ancien; déjà Leibnitz cherchait à démontrer que 2 et 2 font 4; examinons un peu sa démonstration.*

*Je suppose que l'on ait défini le nombre 1 et l'opération  $x + 1$  qui consiste à ajouter l'unité à un nombre donné  $x$ .*

*Ces définitions, quelles qu'elles soient, n'interviendront pas dans la suite du raisonnement.*

*Je définis ensuite les nombres 2, 3 et 4 par les égalités:*

$$(1) \quad 1 + 1 = 2; \quad (2) \quad 2 + 1 = 3; \quad (3) \quad 3 + 1 = 4.$$

*Je définis de même l'opération  $x + 2$  par la relation:*

$$(4) \quad x + 2 = (x + 1) + 1.$$

*Cela posé nous avons:*

$$2 + 2 = (2 + 1) + 1 \quad (\text{Définition 4})$$

$$(2 + 1) + 1 = 3 + 1 \quad (\text{Définition 2})$$

$$3 + 1 = 4 \quad (\text{Définition 3})$$

*d'où:*

$$2 + 2 = 4.$$

C.q.f.d.

La date de cet article (1894) est importante parce qu'elle laisse entendre que Poincaré n'a pas été influencé par le commentaire de Frege (qui date de 1884). En effet, on sait que les travaux de Frege n'ont pas été bien connus avant le début du vingtième siècle, lorsque B. Russell les a portés à l'attention de ses lecteurs. Or selon Goldfarb [1988, p. 61], Poincaré ne s'est pas véritablement intéressé à la logique moderne avant 1905. Cela expliquerait pourquoi l'analyse de Poincaré est si différente de celles des autres commentateurs, qui se sont contentés de répéter les propos de Frege.

Poincaré ressent le besoin d'ajouter sa propre *définition 4* à la «preuve» de Leibniz. Ainsi, il corrige la «preuve» sans faire appel à la notion d'associativité. Sa définition 4, en effet, permet de comprendre l'expression  $2 + 1 + 1$  toujours de la même façon, c'est-à-dire comme  $(2 + 1) + 1$ . Voilà donc un savant de premier plan qui, influencé par Frege ou non, a eu une idée tout autre de ce qu'il fallait ajouter au texte de Leibniz.

## 2.2. *Principes logiques et non logiques*

On reproche volontiers à Leibniz d'avoir utilisé l'associativité de l'addition sans expliciter cette propriété. On pourrait pourtant se demander également pourquoi personne ne semble lui reprocher son emploi tacite de la symétrie ou de la transitivité de l'identité. La différence semble tenir au fait que dans une preuve arithmétique, l'omission d'une loi de l'arithmétique est considérée comme un défaut, tandis qu'on ne ressent pas le besoin de mentionner les lois de logique (ou les règles d'inférence); ce qu'on appelle en général «loi de logique» est en fait *ce qu'on utilise* pour montrer qu'une conclusion s'ensuit d'un ensemble de prémisses. Ainsi, les principes non logiques devraient être posés explicitement comme prémisses—les utiliser sans les énoncer reviendrait à les introduire en contrebande—mais les principes appartenant à la logique sous-jacente (axiomes logiques, règles d'inférence) seraient normalement laissés tacites. (Curieusement, Leibniz énonce ici explicitement le principe logique de la substitutivité de quantités égales (cf. son «axiome»), mais il ne dit rien du principe non logique de l'additivité de quantités égales, qu'il utilise aussi.)

On voit que toute tentative de détecter des prémisses de contrebande nécessite une distinction entre ce qui appartient à la logique et ce qui appartient au sujet que l'on veut examiner. Au début du siècle, certains estimaient que l'axiome du choix était une loi de logique; pour eux, l'emploi «tacite» de cet axiome se justifiait. Mais dès que Zermelo en eut fait un véritable axiome de sa théorie des ensembles, tout emploi a dû être explicité.<sup>1</sup> A propos de la période antérieure à 1925, Church rapporte que «[...] the implicit position of mathematicians of the day was that 'mathematical' theorems require proof, but logic is to be taken for granted» (cité par Corcoran [1973, p. 25]). Depuis les années vingt, bien entendu, la norme exige que la logique sous-jacente puisse également être explicitée.

<sup>1</sup> Ce qui a conduit, pour la première fois, à une évaluation critique de ce principe. Selon Poincaré [1906, p. 311], «On avait appliqué mille fois cet axiome sans l'énoncer, mais dès qu'il fut énoncé, il souleva des doutes».

## 2.3. Résumé

Afin de montrer qu'un auteur a introduit en contrebande une certaine proposition  $q$ , comme par exemple

$$(2 + (1 + 1)) = ((2 + 1) + 1) \quad (A)$$

dans une «dédution» d'une proposition  $c$ , il semble nécessaire, même si ce n'est pas suffisant, d'identifier les prémisses explicitement posées  $P$  et de montrer:

- (1) que  $P$  n'implique pas  $c$ ,
- (2) que  $P$  plus  $q$  implique  $c$ , et
- (3) que  $q$  s'ensuit de toute proposition qui implique  $c$  par rapport à  $P$  (autrement dit, pour toute proposition  $m$ , si  $P$  plus  $m$  implique  $c$  alors  $P$  plus  $m$  implique  $q$ ).

Aucun des commentateurs que j'ai cités n'a rempli ces conditions. J'ai moi-même rempli la première en donnant un contre-argument. La déduction suivante remplira la deuxième condition en montrant que les prémisses explicitement énoncées par Leibniz plus  $A$  impliquent la conclusion  $4 = (2 + 2)$ .

- |    |                                 |      |
|----|---------------------------------|------|
| 1. | $2 = (1 + 1)$                   |      |
| 2. | $3 = (2 + 1)$                   |      |
| 3. | $4 = (3 + 1)$                   |      |
| 4. | $(2 + (1 + 1)) = ((2 + 1) + 1)$ |      |
| ?  | $4 = (2 + 2)$                   |      |
| 5. | $4 = ((2 + 1) + 1)$             | 2, 3 |
| 6. | $4 = (2 + (1 + 1))$             | 4, 5 |
| 7. | $4 = (2 + 2)$                   | 1, 6 |

Reste la troisième condition. Il s'agit de montrer que

si  $P$  plus  $q$  implique  $c$   
 et si, quelle que soit la proposition  $m$ ,  $P$  plus  $q$  implique  $c$   
 alors  $P$  plus  $m$  implique  $q$ .

Je dirai que toute proposition  $q$  qui implique  $c$  par rapport à  $P$ , et qui s'ensuit de toute autre proposition qui implique  $c$  par rapport à  $P$ , possède la propriété  $\mathcal{G}$ .

Pour montrer qu'une proposition  $q$  possède cette propriété il suffit de montrer que  $q$  est logiquement équivalente à  $c$  par rapport à  $P$ ; autrement dit, il suffit de montrer que

- si  $P$  plus  $q$  implique  $c$  et  $P$  plus  $c$  implique  $q$   
 alors, quelle que soit  $r$ ,  
 si  $P$  plus  $r$  implique  $c$  alors  $P$  plus  $r$  implique  $q$ .

Soit une proposition quelconque  $r'$  et supposons que  $P$  plus  $r'$  implique  $c$ . Il s'ensuit que  $P$  plus  $r'$  implique  $P$  plus  $c$  et, par hypothèse,  $P$  plus  $c$  implique  $q$ . Donc  $P$  plus  $r'$  implique  $q$ . C.q.f.d.

En ce qui concerne la «preuve» de Leibniz, j'ai déjà montré que ses prémisses plus  $A$  impliquent sa conclusion. La déduction suivante montre que les prémisses de Leibniz plus sa conclusion impliquent  $A$ :

1.	$2 = (1 + 1)$	}	(prémisses de Leibniz)
2.	$3 = (2 + 1)$		
3.	$4 = (3 + 1)$		
4.	$4 = (2 + 2)$		(conclusion de Leibniz)
?	$(2 + (1 + 1)) = ((2 + 1) + 1)$		
5.	$4 = ((2 + 1) + 1)$		2, 3
6.	$4 = (2 + (1 + 1))$		1, 4
7.	$(2 + (1 + 1)) = ((2 + 1) + 1)$		5, 6 (ce qui est $A$ )

La proposition  $A$  est donc logiquement équivalente à la conclusion de Leibniz,  $4 = (2 + 2)$  par rapport à son ensemble de prémisses, soit  $(2 = (1 + 1), 3 = (2 + 1), 4 = (3 + 1))$ .  $A$  possède donc la propriété  $\mathcal{G}$ :

*$A$  implique la conclusion de Leibniz par rapport à ses prémisses et  $A$  s'ensuit de toute autre proposition qui implique cette conclusion par rapport aux mêmes prémisses.*

Autrement dit, quelle que soit la proposition que l'on ajoute à l'ensemble des prémisses de Leibniz, si l'ensemble de prémisses

élargi implique  $4 = (2 + 2)$ , il impliquera aussi  $((2 + 1) + 1) = (2 + (1 + 1))$ . Ainsi, dans un certain sens, cette dernière proposition est *inévitabile*.

On ne peut qu'admirer le jugement logique de Frege, lui qui a proposé que la proposition *A* manque à la «preuve» de Leibniz. En effet, je viens de montrer qu'il n'existe aucun ensemble de propositions qui comprend les prémisses de Leibniz et qui implique sa conclusion sans impliquer cette prémisse que Frege propose d'utiliser.

### 3. L'approbation des experts

*The standard by which practically all the world's mathematicians judge a proof is this: A proof is that which has convinced and now convinces the intelligent reader. Of course, one asks, who are the intelligent readers? The best answer I can give to that question is that within a given culture the intelligent readers of mathematical proofs are those people who are generally accepted to be mathematicians. Moreover, proof is relative: What is good mathematics in this culture in this age may not be considered good mathematics in this or another culture in a future age, just as today we consider much mathematics of past cultures and ages to be incomplete or incorrect. Next, attention should be focused on the point that a proof is an argument that has convinced and now convinces. The use of past and present tenses is deliberate. I maintain that an argument is not a proof until it has been articulated, heard or read, and, finally, found to be convincing, so convincing that there exist live men who are presently convinced of it. A mathematical proof is a temporal, communicable phenomenon in the minds of living men. Mathematical proofs are not arguments written on tablets of gold in Heaven (or on Earth); they are certain collections of thoughts that many people, intelligent readers, hold in common [Kazarinoff 1970, pp. 4-5].*

Dans ce passage, Kazarinoff aborde quelques-uns de nos thèmes. Il nous dit, par exemple, que ce qu'on accepte comme une preuve est fonction de son époque. De plus, il parle de *conviction* et accorde explicitement un rôle au raisonneur. Enfin, Kazarinoff insiste sur ce qu'une preuve, et plus particulièrement la reconnaissance d'une preuve en tant que telle, est un phénomène de *société*. Mais il va plus loin—et s'oppose à notre point de vue—en précisant que cette reconnaissance doit avoir lieu dans la communauté des «lecteurs intelligents». Autrement dit, une preuve doit avoir l'approbation des experts.

Pour Kazarinoff donc, l'approbation des experts constitue un critère de la preuve: «The standard by which [to] judge a proof». Pourtant l'idée de faire appel à l'autorité des experts ne peut pas être considérée comme un véritable progrès. On sait que dans le monde ancien tout ce que disait Homère faisait preuve. Aujourd'hui cependant nous n'avons pas l'habitude d'accepter des témoignages au même titre que des raisonnements. Cependant le critère consistant à s'en remettre au jugement des «experts» jouit encore d'une grande considération; c'est pourquoi il faut en tenir compte ici.

Supposons qu'un expert affirme qu'une proposition  $p$  est vraie, ou qu'il affirme qu'un discours  $d$  exprime une preuve. La question est de savoir s'il est raisonnable d'accepter la première de ces affirmations comme tenant lieu de preuve, et la seconde comme tenant lieu de critère de la preuve.

Un tel comportement entraînerait quelques difficultés. Par exemple, Kazarinoff laisse entendre que ce qui est preuve maintenant ne la sera peut-être pas dans cent ans. Dans ces conditions, quel statut doit-on accorder aux argumentations qui, selon lui, *étaient* des preuves mais ne sont plus considérées comme telles? Étaient-elles bien des preuves, bien que maintenant ce ne soit plus le cas? Ou a-t-on eu tort en les considérant comme des preuves? Il semble que Kazarinoff est sur le point de faire de la preuve une affaire de mode ou de goût.

Bien que ses remarques concernent le raisonnement non formel, et celles de Church («it is essential to the idea of proof that, to any one who admits the presuppositions on which it is based, a proof carries final conviction») se situent dans un contexte formalisé, tous deux tiennent compte d'un raisonneur et parlent de *conviction*. Pour Church, une preuve est propre à

convaincre quelqu'un qui admet les «présuppositions». Mais il ne précise pas ce qu'il entend par ce terme. S'agit-il des prémisses uniquement, ou faut-il comprendre les règles d'inférence aussi? Kazarinoff, quant à lui, n'explique pas ce qu'il y a dans une preuve qui convainc les mathématiciens. Rien n'indique que Kazarinoff fasse une distinction entre preuve et persuasion—il ne dit pas, par exemple, que les mathématiciens doivent être convaincus *pour de bonnes raisons*. Il affirme que pratiquement tous les mathématiciens du monde jugent d'une preuve selon qu'elle convainc ou ne convainc pas les «lecteurs intelligents». Mais, toujours selon lui, les «lecteurs intelligents» sont les mathématiciens. Donc les mathématiciens «jugent» d'une preuve en se laissant guider par leurs propres convictions. Enfin, Kazarinoff ne semble pas admettre la possibilité d'un désaccord *entre mathématiciens* à propos d'une argumentation, les uns la considérant comme une preuve, les autres pas.

Qui, finalement, sont les experts? De même que Church n'explique pas comment on accepte les présuppositions d'une preuve, Kazarinoff n'explique pas comment on accepte quelqu'un en tant que mathématicien. Il se limite à affirmer qu'il existe des personnes qui sont généralement considérées comme des mathématiciens. Un mathématicien ne se distingue donc pas nécessairement par ses connaissances—et Kazarinoff laisse entendre qu'il n'y a pas de véritable mathématicien qui ne soit pas généralement reconnu comme tel. Pourquoi serait-il important que quelqu'un soit *considéré* ou non comme mathématicien? Même à supposer que la question ait son importance, Kazarinoff n'indique pas comment on s'y prend pour décider *qui* est généralement considéré comme mathématicien. On peut facilement penser à des cas problématiques. Il se peut, par exemple, qu'Einstein soit *généralement* considéré comme mathématicien, mais que les mathématiciens ne le considèrent pas comme tel.

Il importe de remarquer ici que Kazarinoff n'affirme pas que le public demande effectivement aux experts de distinguer les argumentations qui sont des preuves de toutes les autres—et il ne propose pas non plus au public de le faire. Il veut tout simplement expliquer ce que font les experts eux-mêmes pour décider. Il donne donc une description du comportement des

mathématiciens («all the world's mathematicians») et non une recette pour le non-mathématicien.

Quoi qu'il en soit, la solution qui consiste à se fier aux opinions de l'expert nous intéresse directement ici. En effet, si la géométrie a très peu évolué pendant les quelque deux mille ans qui ont suivi la publication des *Eléments*, c'est qu'Euclide faisait figure d'autorité et que les raisonneurs qui l'ont suivi n'ont pas adopté une attitude suffisamment critique. On peut s'étonner de ce que personne, apparemment, n'ait cherché à ajouter des postulats à ceux d'Euclide dans l'intention de rendre sa géométrie plus forte. Serait-il possible, par exemple, d'effectuer la trisection d'un angle quelconque si on disposait de quelques postulats de plus? Il semble naturel de poser de telles questions et de chercher ainsi à faire progresser les connaissances—raison pour laquelle il semble d'autant plus curieux qu'on puisse prendre au sérieux la notion d'une «science définitive». Une telle notion va à l'encontre de l'idée même de la science, une idée que partageait probablement un grand nombre de ces mêmes personnes qui ont fait d'Euclide le Moïse de la géométrie, pour reprendre l'image de Kazarinoff.<sup>1</sup> On trouve chez Peirce des propos semblables [1902c (C.P. vol. 2, p. 19)]:

*Euclid, some twenty-two centuries ago, laid it down as a "common notion," or axiom, evident to all men, that "a whole is greater than its part." For two millennia and more, this axiom was held to fulfill the ideal of an axiom better than any other, and when men wanted an example of an indubitable axiom, they commonly chose this. It is plain, therefore, that they could not realize in thought the truth of the contrary, try as they might. This is curious; for since Euclid's time and earlier it had never ceased to be a familiar truth that a finite magnitude added to an infinite one did not in-*

1 Selon De Morgan [1831, p. 8], «[mathematical proof is] entirely independent of authority and opinion». Cf. aussi Peirce [1902a (C.P. vol. 2, p. 122)]: «all reasoning and inquiry expects that there is such a thing as the truth [...]. Now, it is of the very essence of this 'truth', the meaning of the expectation, that the 'truth' in no wise depends upon what any man to whom direct appeal can be made may opine [...]».

*crease the latter. So, if during near 2200 years, among the millions of men who were continually declaring it inconceivable that a part should be as great as a whole, it had ever occurred to a single one to think how it would be if the part were infinite, it would have been all up with the immaculate fame of the axiom from that moment.*

Sans parler des textes sacrés, il existe un autre livre dans la tradition occidentale qui, dans son domaine, a joui d'une autorité semblable à celle d'Euclide et cela pendant une période tout aussi longue. Il s'agit bien sûr des *Analytiques* d'Aristote. Personnellement, j'ai le sentiment que si Kant pouvait encore affirmer que la logique depuis Aristote était «geschlossen und vollendet», c'était bien malgré Aristote; de même, il me semble que la stagnation dans la géométrie ne saurait être la faute d'Euclide. Mais il est frappant que cet état de fait se manifeste dans deux disciplines de réputation exactes et objectives.

En ce qui concerne la logique, on peut se demander si la situation a réellement changé depuis l'abandon des systèmes syllogistiques traditionnels. Les déductions admises dans un système moderne de déduction du premier ordre sont certes plus variées que celles d'une syllogistique, mais l'attitude envers l'un et l'autre de ces systèmes semble être la même. Il semble en effet qu'il existe aujourd'hui un large consensus sur la fiabilité des déductions dans les systèmes du premier ordre, et qu'on considère qu'il est superflu de chercher d'autres explications du raisonnement. Si on persiste dans cette attitude, il n'est pas exclu que la déduction du premier ordre reste elle aussi paradigmatique pendant deux mille ans. Mais peut-on vraiment s'en réjouir?

#### 4. Conviction finale

Supposons qu'un logicien réussisse à expliciter un critère permettant de déterminer de toute argumentation s'il s'agit d'une preuve ou non. Un Sextus Empiricus lui demandera: quel critère vous permet d'affirmer que celui-ci en est bien un? Si

on sait, par exemple, que les bisectrices des angles d'un triangle se coupent en un point unique, peut-on savoir qu'on le sait? On peut bien sûr donner une preuve. Mais comment savoir si cette preuve en est vraiment une?

Si nous accordons une certaine importance à ces questions, c'est que le Sceptique soulève des points que nous aurions dû nous-mêmes soulever. Il est en effet peu satisfaisant de ne pas disposer d'un critère pour accepter des critères. Si nous cherchons un critère de la preuve, la recherche de critères devient notre affaire; dès lors, nous avons aussi besoin d'un critère pour accepter des critères.

Avant de conclure un peu rapidement, avec Sextus, qu'il n'existe aucun fondement pour la connaissance et que, par conséquent, il n'y a pas de connaissance, il convient toutefois d'examiner une argumentation qui se présente comme une preuve. Prenons celle de l'irrationalité de  $\sqrt{2}$ .

On part de l'hypothèse (absurde) que  $\sqrt{2}$  est rationnel, c'est-à-dire qu'il existe deux nombres entiers  $a$ ,  $b$  tels que  $a/b = \sqrt{2}$ . On peut préciser que  $a$  et  $b$  sont dans un rapport simple (en effet, s'ils avaient un facteur commun, on pourrait le supprimer). Il s'ensuit en particulier que 2 n'est pas un facteur commun, et donc qu'au moins l'un des nombres  $a$ ,  $b$  est impair.

Si  $a/b = \sqrt{2}$ ,  $(a/b)^2 = 2$  et  $a^2 = 2b^2$ .  $a^2$  est donc pair et par la déduction donnée en début du chapitre,  $a$  est pair.

Ainsi,  $a = 2c$ , où  $c$  est un nombre entier, et  $a^2 = (2c)^2 = 4c^2$ . Mais  $a^2 = 2b^2$ . On a donc  $4c^2 = 2b^2$  et  $2c^2 = b^2$ . Ainsi,  $b^2$  est pair, et  $b$  aussi.

Mais  $a$  est pair, et l'un au moins des nombres  $a$ ,  $b$  est impair.  $b$  est donc impair. Contradiction.  $\sqrt{2}$  est donc irrationnel.

Face à une telle preuve, le scepticisme disparaît—tout simplement parce que nous avons *une preuve*. La remarque de De Morgan à propos des inférences syllogistiques de la quatrième figure conserve ici toute sa pertinence: «*there it is, and it cannot be reasoned out of existence*». Dans ces conditions, on ne peut rester sceptique que si on ignore intentionnellement les

faits. L'attitude scientifique, en revanche, consiste à chercher activement des faits contraires aux thèses que l'on accepte—en cherchant des contre-arguments, par exemple. Selon Peirce [1902c (C.P. vol. 2, p. 14)], «A proof [...] is a mental process which is open to logical criticism».

Il doit être clair maintenant qu'un sentiment de certitude n'est pas un critère de la connaissance. Il semble même que plus nos opinions sont fondées, moins nous en avons de certitude. C'est en effet la recherche active de doutes qui conduit à une confiance fondée. Il ne faut pas oublier que dans toute l'histoire de la philosophie, personne n'a jamais cru que  $\sqrt{2}$  était rationnel.

## CONCLUSION

Le point de vue aristotélien, selon lequel la logique est l'étude des preuves, présuppose l'existence non seulement de preuves mais aussi de ceux qui les donnent. En guise de conclusion, il convient de souligner ces présuppositions ainsi que d'autres qui leurs sont associées.

Il semble évident, par exemple, que l'on ne se sert pas d'une preuve sans savoir pourquoi: celui qui cherche à prouver une proposition doit savoir que la fonction d'une preuve est de le conduire à la connaissance de sa conclusion. On peut donc supposer qu'un tel raisonneur désire réellement savoir si la proposition qu'il cherche à prouver est vraie et, partant, il faut qu'il la *comprenne*. Voilà une des raisons pour lesquelles toute étude de la preuve doit tenir compte d'un sujet connaissant. A strictement parler, rien ne peut être une preuve pour un ordinateur.

Le désir de savoir si une proposition donnée est vraie témoigne d'un certain doute à son égard. Si une preuve écarte ce doute, un autre doute lui succédera à propos de la preuve elle-même. Toute preuve commence par des prémisses dont on peut douter. Mercier nous rappelle que, pendant de longs siècles, l'humanité croyait savoir que le soleil tournait autour de la terre immobile. Finalement, l'esprit critique a été amené à douter de cette certitude. Un des buts principaux de la logique consiste à distinguer persuasion et preuve, croyance et connaissance. Pour cela, il faut formuler des critères.

Prouver est une relation: une proposition prouvée l'est toujours *pour quelqu'un*. Ceci ne signifie pas que la chose soit subjective. En effet, l'acceptation d'une preuve en tant que telle dépend des *connaissances* du raisonneur plutôt que de la personne elle-même. S'il est vrai qu'une argumentation qui prouvait sa conclusion pour Gödel ne la prouve pas en ce moment pour moi, il n'en reste pas moins vrai que si j'avais les mêmes connaissances que Gödel je devrais moi aussi la reconnaître comme une preuve. Si l'on découvre dans cent ans que Gödel

s'est trompé à propos de quelque prémisse ou qu'il a commis une faute de raisonnement, on ne devra pas conclure qu'il a prouvé une proposition fausse, mais qu'il s'est trompé et qu'il n'a rien prouvé du tout. J'espère avoir montré dans mon travail qu'on ne doit pas chercher l'objectivité et la vérité dans la logique, puisqu'elles ne s'y trouvent pas—mais que la logique est bel et bien le produit de la *recherche* de ces valeurs.

Parmi les problèmes soulevés dans ce travail, certains méritent d'être étudiés à part.

■ Je mentionnerai tout particulièrement celui des prémisses de contrebande, dont l'importance n'a toujours pas été entièrement reconnue.

■ La notion de forme logique, bien que subtile et couramment utilisée, n'est presque jamais explicitée dans la littérature scientifique.

■ L'hésitation, voire le refus de raisonner à partir de prémisses fausses semble résulter d'une méconnaissance de la distinction entre preuve et déduction; dans ces conditions, une mise en évidence de deux tendances opposées en logique, l'une (plus récente?) donnant la priorité à la notion de vérité logique, l'autre à celle de conséquence logique, serait hautement utile.

■ Enfin, on pourrait consacrer un ouvrage entier à la seule proposition « $2 + 2 = 4$ », profitant de la «preuve» de Leibniz, de celle qui se trouve dans les *Principia mathematica*, ainsi que des nombreux commentaires. Finalement, rien n'est «simple comme  $2 + 2 = 4$ ».

## GLOSSAIRE ET BIBLIOGRAPHIE DES OUVRAGES CITES

### Glossaire

*argument*: un ensemble de propositions (appelées «prémisses») associé à une proposition (appelée la «conclusion»). Un argument peut être *valide* ou *non valide* (voir ces termes).

*argument non valide*: un argument dont toutes les prémisses sont vraies et la conclusion fausse ou qui est de la même forme qu'un tel argument.

Autrement dit:

un argument qui peut être réinterprété de façon à ce que, dans la réinterprétation, toutes les prémisses soient vraies et la conclusion fausse.

*argument valide*: un argument dont le contenu de la conclusion est lui-même (déjà) contenu dans celui des prémisses.

Autrement dit:

si toutes les prémisses de l'argument étaient vraies, nécessairement la conclusion serait vraie aussi;

si la conclusion était fausse, nécessairement au moins l'une des prémisses serait fausse aussi;

il est logiquement impossible que toutes les prémisses soient vraies et la conclusion fausse.

*argumentation*: un triple, dont le premier élément est un ensemble de propositions (appelées «prémisses»), le deuxième une suite ordonnée finie de propositions (appelé le «raisonnement»), et le troisième une proposition (appelée la «conclusion»).

Les prémisses d'une argumentation peuvent être vraies ou fausses; le raisonnement peut être *fondé* ou *fallacieux*.

(voir ces termes); la conclusion peut être ou ne pas être une *conséquence logique* (voir ce terme) par rapport aux prémisses.

Toute *déduction* (voir ce terme) est une argumentation, mais toute argumentation n'est pas nécessairement une déduction.

*conséquence logique*: la conclusion d'un argument *valide* (voir ce terme) *s'ensuit logiquement* des prémisses; elle en est une *conséquence logique*.

*déduction*: une *argumentation* (voir ce terme) dont le raisonnement est *fondé* (voir ce terme).

Autrement dit:

un argument *valide* plus un raisonnement (fondé) qui *montre sa validité*.

(Evidemment, une telle propriété se montre à *quelqu'un*; ainsi, cette définition fait implicitement appel à un raisonneur auquel la déduction donne la possibilité de connaître la relation entre prémisses et conclusion.)

Les prémisses d'une déduction peuvent être vraies ou fausses.

Toute *preuve* (voir ce terme) est une déduction, mais toute déduction n'est pas nécessairement une preuve.

*démonstration*: (= *preuve*; voir ce terme).

(*Attention*: certains auteurs que je cite attribuent un autre sens à ce terme.)

*fallacieux*: voir *raisonnement fallacieux*

*fondé*: voir *raisonnement fondé*

*implication logique*: l'ensemble des prémisses d'un argument valide *implique logiquement* la conclusion de l'argument.

*inférence*: un passage d'une proposition ou d'un ensemble de propositions à une proposition. Quelques inférences qui se manifestent fréquemment sont explicitées sous forme de règles (règles «de déduction» ou «d'inférence»).

*preuve*: une *déduction* (voir ce terme) dont toutes les prémisses sont vraies et connues comme telles par le raisonneur qui donne la preuve.

*raisonnement*: une suite ordonnée finie de propositions; en particulier, une telle suite qui lie, dans une *argumentation* (voir ce terme), un ensemble de prémisses à une conclusion.

*raisonnement fallacieux*: un raisonnement qui lie un ensemble de prémisses à une conclusion mais qui ne *montre* pas que la conclusion s'ensuit logiquement des prémisses—soit parce que tel n'est pas le cas, soit parce qu'il y a quelque faute de raisonnement, soit pour ces deux raisons à la fois.

*raisonnement fondé*: un raisonnement qui lie un ensemble de prémisses à une conclusion *et* qui *montre* que cette dernière s'ensuit logiquement des prémisses. (Evidemment, un tel raisonnement n'est possible que si la conclusion est effectivement une conséquence logique des prémisses.)

*valide, non valide*: voir *argument valide, argument non valide*

## Bibliographie des ouvrages cités

- AFRICK H. [1974]: Scott's Interpolation Theorem Fails for  $L_{\omega_1, \omega}$ . *Journal of Symbolic Logic*, vol. 39, pp. 124-126.
- ANGELELLI I. (ed.) [1967]: *Gottlob Frege: Kleine Schriften* (Olms, Hildesheim).
- ANONYME [1904]: Le troisième Congrès international des mathématiciens. *Revue générale des sciences pures et appliquées*, vol. 15, pp. 961-962.
- ANONYME [1905]: La théorie des ensembles. *Revue générale des sciences pures et appliquées*, vol. 16, pp. 241-242.
- APPEL K. & HAKEN W. [1977]: Every Planar Map Is Four Colorable. Part I: Discharging. *Illinois Journal of Mathematics*, vol. 21, pp. 429-490.
- APPEL K. & HAKEN W. [1978]: The Four-color Problem, in L.A. STEEN (ed.), *Mathematics Today. Twelve Informal Essays*, pp. 153-180 (Springer, New York).
- APPEL K., HAKEN W. & KOCH J. [1977]: Every Planar Map Is Four Colorable. Part II: Reducibility. *Illinois Journal of Mathematics*, vol. 21, pp. 491-567.
- ARISTOTE [An. post.]: *Les seconds analytiques*, in Ross [1949].
- ARISTOTE [An. pr.]: *Les premiers analytiques*, in Ross [1949].
- ARNAULD A. & NICOLE P. [1662]: *La logique ou l'art de penser, contenant, outre les regles communes, plusieurs observations nouvelles, propres à former le jugement*, édition critique présentée par P. CLAIR et F. GIRBAL. Texte établi sur la 5e édition de 1683 (Presses universitaires de France, Paris 1965).

- AYER A.J. [1985]: *The Scope of Reason. Dialectica*, vol. 39, pp. 265-277.
- BETH E. [1959]: *The Foundations of Mathematics. A Study in the Philosophy of Science* (North-Holland, Amsterdam).
- BETH E. & PIAGET J. [1961]: *Epistémologie mathématique et psychologie. Essai sur les relations entre la logique formelle et la pensée réelle* (Presses Universitaires de France, Paris).
- BLANCHE R. [1970]: *La logique et son histoire d'Aristote à Russell* (Colin, Paris).
- BOOLE G. [1854]: *An Investigation of the Laws of Thought on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* (Dover, New York 1958).
- BOURBAKI N. [1949]: *Foundations of Mathematics for the Working Mathematician. Journal of Symbolic Logic*, vol. 14, pp. 1-8.
- BUCHANON S. [1929]: *Poetry and Mathematics*. Reprint edition (University of Chicago Press, Chicago 1962).
- CARNAP R. [1942]: *Introduction to Semantics*, third printing (Harvard University Press, Cambridge Mass. 1948).
- CHISHOLM R.M. [1973]: *The Problem of the Criterion* (Marquette University Press, Milwaukee).
- CHURCH A. [1956]: *Introduction to Mathematical Logic*, vol. I (Princeton University Press, Princeton).
- COHEN M.R. & NAGEL E. [1934]: *An Introduction to Logic and Scientific Method* (Harcourt, Brace, New York).
- COPI I.M. [1954]: *Symbolic Logic*, fifth edition (Macmillan, New York 1979).

- CORCORAN J. [1971]: Discourse Grammars and the Structure of Mathematical Reasoning: III. Two Theories of Proof. *Journal of Structural Learning*, vol. 3, n° 3, pp. 1-24.
- CORCORAN J. [1972]: Conceptual Structure of Classical Logic. *Philosophy and Phenomenological Research*, vol. 33, pp. 25-47.
- CORCORAN J. [1973]: Gaps between Logical Theory and Mathematical Practice, in BUNGE (ed.), *The Methodological Unity of Science*, pp. 23-50 (Reidel, Dordrecht).
- CORCORAN J. [1974]: Aristotle's Natural Deduction System, in CORCORAN (ed.), *Ancient Logic and Its Modern Interpretations*, pp. 85-131 (Reidel, Dordrecht).
- CORCORAN J. [1989]: Argumentations and Logic. *Argumentation*, vol. 3, pp. 17-43.
- CORCORAN J. & SCANLAN M. [1981]: Compte rendu de J. LEAR, Aristotle and Logical Theory. *Canadian Philosophical Reviews*, vol. 1, pp. 85-91.
- CORCORAN J. & SCANLAN M. [1982]: The Contemporary Relevance of Ancient Logical Theory. *Philosophical Quarterly*, vol. 32, pp. 76-86.
- DAVIS P.J. & HERSH R. [1981]: *The Mathematical Experience* (Birkhäuser, Boston).
- DE LONG H. [1970]: *A Profile of Mathematical Logic* (Addison-Wesley, Reading Mass.).
- DE MORGAN A. [1831]: *On the Study and Difficulties of Mathematics*, fourth reprint edition (Open Court, La Salle 1943).
- DE MORGAN A. [1847]: *Formal Logic: or, The Calculus of Inference, Necessary and Probable*, edited by A.E. TAYLOR (Open Court, London 1926).

- DE MORGAN A. [1850]: On the Syllogism: II. On the Symbols of Logic, the Theory of the Syllogism, and in particular of the Copula, réimprimé in HEATH (ed.) [1966].
- DESCARTES R. [1701] (posthume): *Règles pour la direction de l'esprit* (Boivin, Paris 1933).
- DUMMETT M. [1959]: Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. *Philosophical Review*, vol. 68, pp. 324-348.
- DUPLEIX S. [1603]: *La logique ou Art de discourir et raisonner*. Texte établi sur la 2e édition de 1607 (Fayard, Paris 1984).
- DÜRR K. [1947]: Die mathematische Logik von Leibniz. *Studia Philosophica*, vol. 7, pp. 87-102.
- EPICTÈTE [Dissertat.]: *Entretiens*, livre I. Texte établi et traduit par J. SOUILHE (Les Belles Lettres, Paris 1943).
- EUCLIDE [Elem.]: *Eléments*, in HEATH [1908].
- EUCLIDE [trad. PEYRARD]: *Les œuvres d'Euclide* traduites littéralement par F. PEYRARD. Nouveau tirage (Blanchard, Paris 1966).
- FORDER H.G. [1927]: *The Foundations of Euclidean Geometry* (Cambridge University Press, Cambridge).
- FREGE G. [1879]: *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, in ANGELELLI (ed.), *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, 2. Auflage (Olms, Hildesheim 1964).
- FREGE G. [1884]: *Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, with English translation by J.L. AUSTIN on facing pages, second edition (Philosophical Library, New York 1953).

- FREGE G. [1906a]: Über die Grundlagen der Geometrie II, in ANGELELLI (ed.) [1967], pp. 281-323.
- FREGE G. [1906b]: Über Schoenflies: Die logischen Paradoxien der Mengenlehre, in HERMES *et al.* (eds) [1969].
- FREGE G. [1910]: Lettre à Philip E.B. Jourdain sans date, in GABRIEL *et al.* (eds) [1976], pp. 114-124.
- FREGE G. [1914a]: Logik in der Mathematik, in HERMES *et al.* (eds) [1969].
- FREGE G. [1914b]: Lettre à Philip E.B. Jourdain sans date, in GABRIEL *et al.* (eds) [1976], pp. 126-129.
- FREGE G. [1917a]: Lettre à Hugo Dingler du 31.1.1917, in GABRIEL *et al.* (eds) [1976], pp. 29-30.
- FREGE G. [1917b]: Lettre à Hugo Dingler du 6.2.1917, in GABRIEL *et al.* (eds) [1976], pp. 33-36.
- FREGE G. [1918]: Die Verneinung. *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, vol. 1, pp. 143-157.
- GABRIEL G., HERMES H., KAMBARTEL F., THIEL C. & VERAART A. (eds) [1976]: *Gottlob Frege: Wissenschaftlicher Briefwechsel* (Meiner, Hamburg).
- GASSER J. [1985]: Où il est question de la preuve par l'absurde. *Revista da Faculdade de Letras do Porto*, segunda série, n° 2, pp. 143-156.
- GASSER J. [1987a]: Argumentation in Proof, in VAN EEMEREN, GROOTENDORST, BLAIR & WILLARD (eds), *Argumentation: Perspectives and Approaches*, pp. 321-326 (Foris, Dordrecht).
- GASSER J. [1987b]: *La syllogistique. D'Aristote à nos jours*. Travaux de logique n° 3 (Centre de Recherches Sémilogiques, Neuchâtel).

- GASSER J. [1988]: *Compte rendu de G. SACCHERI, Euclides ab omni naevo vindicatus* (nouvelle édition). *History and Philosophy of Logic*, vol. 9, pp. 113-115.
- GENTZEN G. [1936]: Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. *Mathematische Annalen*, vol. 112, pp. 493-565.
- GILLINGS R.J. [1972]: *Mathematics in the Time of the Pharaohs* (Dover, New York 1982).
- GÖDEL K. [1933]: Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 40, pp. 433-443.
- GOLDFARB W.D. [1981]: On the Gödel Class with Identity. *Journal of Symbolic Logic*, vol. 46, pp. 354-364.
- GOLDFARB W.D. [1984]: The Unsolvability of the Gödel Class with Identity. *Journal of Symbolic Logic*, vol. 49, pp. 1237-1252.
- GOLDFARB W.D. [1988]: Poincaré against the Logicians, in ASPRAY & KITCHER (eds), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, pp. 61-81 (University of Minnesota Press, Minneapolis 1988).
- GOLDFARB W.D., GUREVICH Y. & SHELAH S. [1984]: A Decidable Subclass of the Minimal Gödel Class with Identity. *Journal of Symbolic Logic*, vol. 49, pp. 1253-1261.
- GOODMAN N.D. [1985]: Replacement and Collection in Intuitionistic Set Theory. *Journal of Symbolic Logic*, vol. 50, pp. 344-348.
- GOODMAN N.D. [1986]: Replacement and Collection: A Correction. *Journal of Symbolic Logic*, vol. 51, p. 333.
- GOULD J.B. [1971]: *The Philosophy of Chrysippus* (Brill, Leiden).

- GRIZE J.-B. [1967]: Logique: Historique. Logique des classes et des propositions. Logique des prédicats. Logiques modales, in *Logique et connaissance scientifique* (Encyclopédie de la Pléiade, vol. 22), pp. 135-399 (Gallimard, Paris).
- GRIZE J.-B. [1986]: Preuves et raisons. *Theoría* (Madrid) segunda época, vol. 1, pp. 655-666.
- GUREVICH Y. & SHELAH S. [1983]: Random Models and the Gödel Case of the Decision Problem. *Journal of Symbolic Logic*, vol. 48, pp. 1120-1124.
- HARDY G.H. [1929]: Mathematical Proof. *Mind*, vol. 38, pp. 1-25.
- HARDY G.H. [1940]: *A Mathematician's Apology* (Cambridge University Press, Cambridge 1973).
- HARTSHORNE C. & WEISS P. (eds) [1933]: *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, second printing (Belknap Press, Cambridge Mass. 1960).
- HEATH P. (ed.) [1966]: *On the Syllogism and Other Logical Writings by Augustus De Morgan* (Routledge & Kegan Paul, London).
- HEATH T.L. [1908]: *The Thirteen Books of Euclid's Elements* translated from the text of Heiberg with introduction and commentary, second edition [1926] revised with additions (Dover, New York 1956).
- HERMES H., KAMBARTEL F. & KAULBACH F. (eds) [1969]: *Gottlob Frege: Nachgelassene Schriften* (Meiner, Hamburg).
- JEFFREY R.C. [1967]: *Formal Logic: Its Scope and Limits*, second edition (McGraw-Hill, New York 1981).
- JEVONS W.S. [1874]: *The Principles of Science. A Treatise on Logic and Scientific Method*. Réimpression de la deuxième édition de 1877 (Dover, New York 1958).

- KANT I. [1781]: *Kritik der reinen Vernunft*, neu herausgegeben von T. VALENTINER (Meiner, Leipzig 1922).
- KAZARINOFF N.D. [1970]: *Ruler and the Round, or Angle Trisection and Circle Division* (Prindle, Weber & Schmidt, Boston).
- KEYNES J.N. [1884]: *Studies and Exercises in Formal Logic*, fourth edition [1906] re-written and enlarged (Macmillan, London 1928).
- KLINE M. [1972]: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Oxford University Press, New York).
- KNEALE W. & KNEALE M. [1962]: *The Development of Logic* (Clarendon Press, Oxford).
- KREISEL G. [1971]: Compte rendu de M.E. SZABO (ed.), The Collected Papers of Gerhard Gentzen. *Journal of Philosophy*, vol. 68, pp. 238-265.
- LACOMBE D. [1984]: Les composantes du «raisonnement» mathématique. *Les modes de raisonnement*, Second Colloque de l'ARC, 25-27 avril 1984, Communications, pp. 297-298.
- LAKATOS I. [1976]: *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, edited by J. WORRALL and E. ZAHAR (Cambridge University Press, Cambridge).
- LEAR J. [1980]: *Aristotle and Logical Theory* (Cambridge University Press, Cambridge).
- LEIBNIZ G.W. [1765] (posthume): *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, in *Opera philosophica quae exstant latina gallica germanica omnia*. Instruxit J.E. ERDMANN. Faksimiledruck der Ausgabe 1840 durch weitere Textstücke ergänzt und mit einem Vorwort versehen von R. VOLLBRECHT (Scientia Aalen 1959).

- LEMMON E.J. [1965]: *Beginning Logic*, fourth printing (Hackett, Indianapolis 1983).
- LIVINGSTON E. [1986]: *The Ethnomethodological Foundations of Mathematics* (Routledge & Kegan Paul, London).
- LOOMIS E.S. [1927]: *The Pythagorean Proposition. Its Proofs Analyzed and Classified, and Bibliography of Sources for Data of the Four Kinds of Proofs*. Impression privée.
- LÖWENHEIM L. [1946]: On Making Indirect Proofs Direct. Translated from the German manuscript by W.V. QUINE. *Scripta mathematica*, vol. 12, pp. 125-139.
- LUKASIEWICZ J. [1929]: *Elements of Mathematical Logic* (Pergamon/PWN, Oxford/Warszawa, 1963).
- LUKASIEWICZ J. [1951]: *La syllogistique d'Aristote dans la perspective de la logique formelle moderne*. Traduction de la deuxième édition anglaise [1957] par F. CAUJOLLE-ZASLAWSKY (Colin, Paris 1972).
- MANIN Y.I. [1977]: *A Course in Mathematical Logic* translated from the Russian by N. KOBLITZ (Springer, New York).
- MARITAIN J. [1933]: *Eléments de philosophie. II. L'ordre des concepts. 1. Petite logique*, dixième édition revue et corrigée (Téqui, Paris).
- MATES B. [1965]: *Elementary Logic*, second edition (Oxford University Press, New York 1972).
- MENDELSON E. [1964]: *Introduction to Mathematical Logic*, third edition (Wadsworth, Monterey 1987).
- MERCIER D.J. [1884]: *Cours de philosophie*, vol. IV. *Critériologie générale ou Traité général de la certitude*, huitième édition (Institut supérieur de philosophie/Alcan, Louvain/Paris 1923).

- MIEVILLE D. [1985]: *Introduction à la théorie des systèmes formels*, première partie. Travaux de logique n° 1 (Centre de Recherches Sémiologiques, Neuchâtel).
- MIEVILLE D. [1987]: *Introduction à la théorie des systèmes formels*, deuxième partie. Travaux de logique n° 2 (Centre de Recherches Sémiologiques, Neuchâtel).
- MILL J.S. [1843]: *A System of Logic Ratiocinative and Inductive. Being a Connected View of the Principles of Evidence and the Methods of Scientific Investigation* (Longman, London 1970).
- MONTAIGNE M. DE [1580]: *Essais* (Garnier Frères, Paris 1962).
- MOORE G.H. [1982]: *Zermelo's Axiom of Choice. Its Origins. Development and Influence* (Springer, New York).
- MOTOHASHI N. [1979]: A Remark on Africk's Paper on Scott's Interpolation Theorem for  $L_{\omega_1\omega}$ . *Journal of Symbolic Logic*, vol. 44, p. 32.
- NICOD J. [1923]: *La géométrie dans le monde sensible* (Presses Universitaires de France, Paris 1962).
- NICOD J. [1924]: *Le problème logique de l'induction* (Presses Universitaires de France, Paris 1961).
- OLIVER J.W. [1967]: Formal Fallacies and Other Invalid Arguments. *Mind*, vol. 76, pp. 463-478.
- PASCAL B. [1728] (posthume): *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*, in *Oeuvres complètes* (Bibliothèque de la Pléiade). Texte établi et annoté par J. CHEVALIER (Gallimard, Paris 1954).
- PEIRCE C.S. [1878]: Comment se fixe la croyance. *Revue philosophique de la France et de l'étranger*, vol. 6, pp. 553-569.

- PEIRCE C.S. [1902a]: Logic, in HARTSHORNE & WEISS (eds) [1933], vol. 2, pp. 119-125.
- PEIRCE C.S. [1902b]: *Reductio ad absurdum*, in HARTSHORNE & WEISS (eds) [1933], vol. 2, p. 366.
- PEIRCE C.S. [1902c]: Minute Logic, chapter 1, in HARTSHORNE & WEISS (eds) [1933], vol. 2, pp. 3-66.
- PEIRCE C.S. [1902d]: Negative, in HARTSHORNE & WEISS (eds) [1933], vol. 2, pp. 349-350.
- PERELMAN C. & OLBRECHTS-TYTECA L. [1952]: De la preuve en philosophie, in PERELMAN & OLBRECHTS-TYTECA (eds), *Rhétorique et philosophie. Pour une théorie de l'argumentation en philosophie*, pp. 121-131 (Presses Universitaires de France, Paris).
- PIAGET J. [1924]: *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant* (Delachaux & Niestlé, Neuchâtel).
- PLATON [*Phaedo*]: *Phédon*, in *Oeuvres complètes*, tome IV — première partie. Texte établi et traduit par L. ROBIN (Les Belles Lettres, Paris 1926).
- PLATON [*Respubl.*]: *République*, in *Oeuvres complètes*, tome VII — première partie. Texte établi et traduit par E. CHAMBRY (Les Belles Lettres, Paris 1933).
- POINCARÉ H. [1894]: Sur la nature du raisonnement mathématique. *Revue de métaphysique et de morale*, vol. 2, pp. 371-384.
- POINCARÉ H. [1906]: Les mathématiques et la logique. *Revue de métaphysique et de morale*, vol. 14, pp. 294-317.
- QUINE W.V.O. [1950]: *Methods of Logic*, revised edition (Holt, Rinehart and Winston, New York 1959).

- QUINE W.V.O. [1970]: *Philosophy of Logic*, second edition (Harvard University Press, Cambridge Mass. 1986).
- RESCHER N. [1954]: Leibniz's Interpretation of His Logical Calculi. *Journal of Symbolic Logic*, vol. 19, pp. 1-13.
- RESNIK M.D. [1980]: *Frege and the Philosophy of Mathematics* (Cornell University Press, Ithaca).
- RICHARD J. [1905]: Les principes des mathématiques et le problème des ensembles. *Revue générale des sciences pures et appliquées*, vol. 16, p. 541.
- ROSE B.I. [1978]: Rings Which Admit Elimination of Quantifiers. *Journal of Symbolic Logic*, vol. 43, pp. 92-112.
- ROSE B.I. [1979]: Corrigendum: «Rings Which Admit Elimination of Quantifiers». *Journal of Symbolic Logic*, vol. 44, pp. 109-110.
- ROSS W.D. [1949]: *Aristotle's Prior and Posterior Analytics. A Revised Text with Introduction and Commentary* (Clarendon Press, Oxford).
- ROSTAND F. [1960]: *Souci d'exactitude et scrupules des mathématiciens* (Vrin, Paris).
- RUSSELL B. [1903]: *The Principles of Mathematics*, second edition (George Allen & Unwin, London 1937).
- RUSSELL B. [1919]: *Introduction à la philosophie mathématique*, traduit de l'anglais par G. MOREAU (Payot, Paris 1970).
- SALMON W.C. [1963]: *Logic*, third edition (Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1984).
- SCANLAN M. [1988]: Beltrami's Model and the Independence of the Parallel Postulate. *History and Philosophy of Logic*, vol. 9, pp. 13-34.

- SCHOLZ H. [1931]: *Esquisse d'une histoire de la logique*. Traduction de la deuxième édition allemande [1959] par E. COUMET, F. DE LAUR et J. SEBESTIK (Aubier-Montaigne, Paris 1968).
- SCHRECKER P. [1937]: La méthode cartésienne et la logique. *Revue philosophique de la France et de l'étranger*, vol. 123, pp. 336-367.
- SEXTUS EMPIRICUS [*Adv. math.* vii]: *Contre les logiciens*, in R.G. BURY (ed.), *Sextus Empiricus in Four Volumes with an English translation* (Loeb Classical Library), vol. II (Harvard University Press/Heinemann, Cambridge Mass./London 1935).
- SEXTUS EMPIRICUS [*Hyp. Pyrrh.*]: *Hypotyposes du pyrrhonisme*, in R.G. BURY (ed.), *Sextus Empiricus in Four Volumes with an English translation* (Loeb Classical Library), vol. I (Harvard University Press/Heinemann, Cambridge Mass./London 1933).
- STEWART D. & BLOCKER H.G. [1987]: *Fundamentals of Philosophy*, second edition (Macmillan, New York).
- SWINNERTON-DYER H.P.F. [1971]: On the Product of Three Homogeneous Linear Forms. *Acta arithmetica*, vol. 18, pp. 371-385.
- TARSKI A. [1933]: The Concept of Truth in Formalized Languages, in *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938*, translated by J. WOODGER. Second edition edited and introduced by J. CORCORAN (Hackett, Indianapolis 1983).
- TARSKI A. [1936a]: *Introduction à la logique*. Texte établi sur la deuxième édition anglaise [1946] et traduit par J. TREMBLAY S.J. Troisième édition revue (Gauthier-Villars, Paris 1971).

- TARSKI A. [1936b]: On the Concept of Logical Consequence, in *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938*, translated by J. WOODGER. Second edition edited and introduced by J. CORCORAN (Hackett, Indianapolis 1983).
- TARSKI A. [1937]: Sur la méthode déductive, in S.R. GIVANT & R.N. MCKENZIE (eds), *Alfred Tarski: Collected Papers*, vol. 2, pp. 325-333 (Birkhäuser, Basel 1986).
- TARSKI A. [1944]: The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics. *Philosophy and Phenomenological Research*, vol. 4, pp. 341-375.
- TARSKI A. [1969]: Truth and Proof. *Scientific American*, vol. 220, n° 6, pp. 63-77; réimprimé dans *L'Age de la science*, vol. 2, n° 4, pp. 279-301 (1969).
- TARSKI A. [1986] (posthume): What Are Logical Notions?, edited by J. CORCORAN. *History and Philosophy of Logic*, vol. 7, pp. 143-154.
- TARSKI A. & GIVANT S. [1987]: *A Formalization of Set Theory without Variables* (American Mathematical Society, Providence).
- THOM R. [1970]: Les mathématiques «modernes»: une erreur pédagogique et philosophique? *L'Age de la science*, vol. 3, pp. 225-242.
- TYMOCZKO T. [1979]: The Four-color Problem and Its Philosophical Significance. *Journal of Philosophy*, vol. 76, pp. 57-83.
- VAN HEIJENOORT J. [1967] (ed.): *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931* (Harvard University Press, Cambridge Mass.).
- WILDER R.L. [1944]: The Nature of Mathematical Proof. *American Mathematical Monthly*, vol. 52, pp. 309-323.

WITTGENSTEIN L. [1974]: *Über Gewißheit*, herausgegeben von G.E.M. ANSCOMBE und G.H. VON WRIGHT (Basil Blackwell, Oxford).

ZERMELO E. [1908]: Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung. *Mathematische Annalen*, vol. 65, pp. 107-128.

## INDEX DES AUTEURS

- Africk H. 3, 122  
Anderson A.R. 51  
Angelelli I. 122, 125-126  
Anscombe G.E.M. 136  
Appel K. 11-13, 122  
Aristote xii, 1-2, 7, 40-41,  
44, 48-49, 52-53, 58-60,  
62, 68, 70, 74-79, 92, 99,  
114, 122  
Arnould A. 49, 58, 63, 122  
Aspray W. 127  
Austin J.L. 125  
Ayer A.J. xi, 34, 61, 123
- Belnap N.D. 51  
Beltrami E. 69  
Bertrand J. 88  
Beth E. xi, 92, 98, 104, 123  
Bhaskara 16  
Blanché R. 26, 68, 123  
Blocker H.G. 51, 134  
Boole G. 9, 79, 123  
Boolos G. 3  
Bourbaki N. 2, 123  
Buchanon S. 16, 123  
Bury R.G. 134
- Cantor G. 27, 87  
Carnap R. 17, 123  
Carroll L. 33  
Caujolle-Zaslowsky F. 130  
Chambry E. 132  
Chevalier J. 131  
Chisholm R.M. 31, 123  
Chryssippe 26
- Church A. xi-xii, 8, 17, 33,  
35, 89, 107, 111-112, 123  
Clarke R.P. 48  
Clavius C. 99  
Cohen M.R. 81, 123  
Copi I.M. 71, 123  
Corcoran J. 7, 33, 43, 53,  
67-68, 97, 107, 124, 134-  
135  
Coumet E. 134
- Darboux G. 99  
Davis P.J. 8, 14, 20, 124  
Dedekind R. 87  
de Laur F. 134  
de la Vallée-Poussin C. 19  
DeLong H. 43, 124  
De Morgan A. 31-32, 50-51,  
64, 67, 87-88, 113, 115,  
124-125  
Descartes R. 58, 125  
Dingler H. 72  
Dummett M. 15, 125  
Duns Scot 44  
Dupleix S. 44, 125  
Dürr K. 105, 125
- Einstein A. 112  
Epictète 26, 125  
Erdmann J.E. 101, 129  
Euclide 3, 6, 19, 39-41, 62,  
66, 68, 74, 79, 95, 98-  
100, 113-114, 125
- Fermat P. de 96  
Forder H.G. 91, 125

- Frege G. 27, 45, 71-74, 76,  
 78, 100-106, 110, 125-  
 126
- Galien 49  
 Gabriel G. 126  
 Gasser J. 17, 62, 69, 79,  
 126-127  
 Gauss K.F. 99  
 Gentzen G. 73, 95, 127  
 Gillings R.J. 70, 127  
 Givant S.R. 53, 135  
 Gödel K. 3, 58, 85, 117, 127  
 Goldbach C. 46, 59  
 Goldfarb W.D. 3, 106, 127  
 Goodman N.D. 3, 127  
 Gould J.B. 26, 127  
 Grize J.-B. 1, 16, 65, 127  
 Gurevich Y. 3, 127-128
- Hadamard J. 4  
 Haken W. 11-13, 122  
 Hardy G.H. 16, 19, 66, 128  
 Hartshorne C. 128, 132  
 Heath P. 125, 128  
 Heath T.L. 4, 62, 125, 128  
 Henkin L. 20  
 Hermes H. 126  
 Hersh R. 8, 14, 20, 124  
 Hilbert D. 4, 27, 67, 74, 98  
 Homère 111  
 Hôtel J. 100
- Jaskowski S. 73  
 Jeffrey R.C. 67, 128  
 Jevons W.S. 65, 128  
 Jourdain P.E.B. 72
- Kambartel F. 126, 128  
 Kant I. 63, 114, 129
- Kaulbach F. 128  
 Kazarinoff N.D. 110-113,  
 129  
 Keynes J.N. 48, 129  
 Kitcher P. 127  
 Kleene S.C. 8  
 Kline M. 99, 129  
 Kneale M. 105, 129  
 Kneale W. 105, 129  
 Koblitz N. 130  
 Koch J. 11, 13, 122  
 König J. 4-5  
 Kreisel G. 17, 129
- Lacombe D. 84, 129  
 Lakatos I. 17, 97, 99, 129  
 Lear J. 58, 74, 129  
 Leibniz G.W. 2, 49, 83, 99-  
 110, 118, 129  
 Lemmon E.J. 43, 130  
 Livingston E. 58, 130  
 Loomis E.S. 16, 130  
 Löwenheim L. 66, 130  
 Lukasiewicz J. 26, 43, 71,  
 74-79, 130
- Manin Y.J. 4, 130  
 Maritain J. 48, 73, 130  
 Mates B. 2, 55, 130  
 McKenzie R.N. 135  
 Mendelson E. 1, 43, 67, 130  
 Mercier D.J. 23, 25, 27, 117,  
 130  
 Miéville D. 35, 67, 95, 131  
 Mill J.S. 1, 131  
 Montaigne M. de 25, 31, 131  
 Moore E.H. 3  
 Moore G.H. 4, 131  
 Moreau G. 133  
 Motohashi N. 3, 131

- Myhill J. 8
- Nagel E. 81, 123
- Newman J.H. 24
- Nicod J. 1, 100, 131
- Nicole P. 49, 58, 63, 122
- Olbrechts-Tyteca L. 3, 132
- Oliver J.W. 36, 131
- Pascal B. 60, 85, 131
- Pasch M. 98
- Peano G. 6-7, 15, 27, 104
- Peirce C.S. xiii, 29, 58, 71, 81, 85, 90, 96, 99, 113, 116, 131-132
- Perelman C. 3, 132
- Peyrard F. 39, 125
- Piaget J. 1, 64, 104, 123, 132
- Platon 80, 132
- Poincaré H. 21, 105-107, 132
- Pythagore 8, 16-17, 62
- Quine W.V.O. xi, 1, 17, 71, 81, 130, 132-133
- Rescher N. 105, 133
- Resnik M.D. 71, 133
- Richard J. 4, 133
- Robin L. 132
- Rose B.I. 3, 133
- Ross W.D. 122, 133
- Röstrand J. 100, 133
- Russell B. 4, 7, 17, 45, 58, 71, 86, 91, 106, 133
- Saccheri G. 68-69
- Salmon W.C. 51, 133
- Scanlan M. 53, 68, 96, 124, 133
- Scholz H. 2, 83, 134
- Schrecker P. 97, 134
- Sebestik J. 134
- Sextus Empiricus 16, 25-26, 114, 134
- Shelah S. 3, 127-128
- Socrate 21, 61
- Solovay R. 3
- Souilhe J. 125
- Steen L.A. 122
- Stewart D. 51, 134
- Swinerton-Dyer H.P.F. 13-14, 134
- Tarski A. xi, 1, 7-8, 11, 26, 28-29, 33, 35, 43, 53, 55, 58-60, 83, 85-88, 91, 134-135
- Taylor A.E. 124
- Thiel C. 126
- Thom R. 15, 47, 135
- Thomas d'Aquin 73
- Tremblay J. 134
- Tymoczko T. 12, 135
- Valentiner T. 129
- van Heijenoort J. 4, 135
- Veraart A. 126
- Vollbrecht R. 129
- von Wright G.H. 136
- Weierstrass K. 3
- Weiss P. 128, 132
- Wilder R.L. 3, 135
- Wittgenstein L. 10, 18, 135
- Woodger J. 134-135
- Worrall J. 129
- Zahar E. 129
- Zermelo E. 4-6, 41, 107, 136

## INDEX DES MATIERES

- Achille et la tortue 33  
*Adversus dogmaticos* 26  
*Adversus mathematicos* 26  
affirmation du conséquent  
37, 51  
ambiguïté syntaxique 56  
antinomie 11, 27  
    *voir aussi* paradoxe  
apologétique, tradition 91  
argument xii, 45-57, 119  
    et contraposée 70  
    non valide 46, 51-57, 92,  
    103, 119  
    critère, *voir ce terme*  
    valide 46-52, 67-70,  
    92-94, 119  
    critère, *voir ce terme*  
    *versus* connaissance de  
    la validité 93  
    *versus* expression  
    d'argument 53, 55  
    *versus* schéma 52-54  
    *voir aussi* contre-  
    argument  
argumentation 18, 44-45, 80,  
91, 112, 119  
    *versus* déduction, *voir ce*  
    *terme*  
    *versus* preuve, *voir ce*  
    *terme*  
arithmétique 6, 15, 58, 87,  
107  
associativité de l'addition  
103, 105-107  
auditoire 14, 20-22, 80, 84-  
85, 89, 93-94  
autorité 29, 111, 113  
    *voir aussi* experts  
axiome 73  
axiome du choix 107  
*Begriffsschrift* 79, 100  
catégorie sémantique 57  
certitude 24-25  
    *versus* connaissance, *voir*  
    *ce terme*  
Congrès international des  
Mathématiciens,  
troisième 4-5  
conjecture 89  
    de Goldbach 46, 59  
    des quatre couleurs 11-13  
    *voir aussi* théorème des  
    quatre couleurs  
connaissance 27, 61, 92  
    logique 92  
    matérielle 92  
    de la validité, *versus*  
    validité, *voir*  
    argument valide  
    de la vérité, *versus* vérité,  
    *voir ce terme*  
    *versus* certitude, croyance  
    14, 20, 25, 116-117  
    *voir aussi* preuve, et  
    connaissances du  
    raisonneur  
    *voir aussi* sujet  
    connaissant  
conséquence logique 46, 118,  
120

- conséquence logique (*suite*)  
*voir aussi* argument valide
- constructivisme 28
- contraposée 70
- contre-argument 52-57, 103, 105, 108, 116
- Contre les dogmatiques* 26
- Contre les logiciens* 26
- conviction finale xii, 33, 89, 111, 114-116
- critère xi, 23, 25-26, 28, 117  
 de critère 50, 114-115  
 formel 35-37, 86  
 négatif 34, 97  
 de non-validité xii, 48-50, 52  
 partiel xiii, 34, 59  
 de prémisses de  
 contrebande 100, 104  
 de preuve xi, 2, 5, 8, 13, 15-16, 21-22, 27, 29, 31, 36, 92, 110-111, 114  
 de validité xii, 48-51  
 de vérité xi, 5, 25-26, 28, 32, 59-60, 93  
*versus* définition xi, 27-29, 90  
*voir aussi* reproductibilité
- critique, tradition 91
- croyance 85, 90, 113  
*versus* connaissance, *voir ce terme*
- déductibilité 48, 51
- déduction xii, 41-42, 44-45, 47, 69, 71, 75, 85-86, 94, 98, 120  
*versus* argumentation 44-45
- déduction (*suite*)  
*versus* preuve, *voir ce terme*
- définition 28  
 opérationnelle 28  
*versus* critère, *voir ce terme*
- démonstration, *voir* preuve
- dogmatisme 27
- doute 85, 91, 107, 116-117
- école Anderson-Belnap 51
- Eléments* 3, 6, 62, 99, 113
- ensembles, théorie des 6, 107
- enthymème 97, 99
- épistémique xii, 5, 8, 44-45, 59-60, 80, 82
- esprit de finesse 85
- esprit de géométrie 85
- évaluation, procédure 38  
 complète 38  
 fondée 38  
*voir aussi* critère
- experts xiii, 15, 85, 110-114  
*voir aussi* autorité
- fausse position, méthode de 70
- faux négatif 38
- faux positif 38
- forme logique 8, 35, 53-57, 118  
*versus* forme grammaticale 55-57
- géométrie 6, 87-88, 100, 113  
 euclidienne 68-69, 99  
 non euclidienne 73, 91, 99

- géométrie (*suite*)  
*voir aussi* esprit de  
 géométrie  
*Grundgesetze der Arithmetik*  
 45  
*Grundlagen der Arithmetik*  
 100  
*Grundlagen der Geometrie* 98
- implication logique 46, 120  
*voir aussi* argument valide
- inférence 121
- inférences immédiates xi,  
 94-95
- intuitionnisme (Ecole  
 intuitionniste) 35, 51, 63
- Journal of Symbolic Logic* 3
- lacune 83, 97, 102-103
- langage symbolique 56
- logicisme 100
- logique  
 en tant qu'étude des  
 preuves xi, 1-2, 6, 8-  
 9, 22, 29, 42, 44, 86,  
 117  
 des propositions xi  
 sous-jacente 6, 107  
 valeur empirique 10  
 et vérité 26, 42-43, 118  
*voir aussi* principes  
 logiques et non  
 logiques  
*voir aussi* terme logique
- mathématiques 27, 86, 98,  
 107  
 fondements des 27  
 philosophie des 27
- mathématiques (*suite*)  
*voir aussi* raisonnement  
 mathématique
- métalogique 2
- modus ponens 53, 73
- motivations, pour donner  
 une preuve 19
- normes 82-83  
*Nouveaux essais sur  
 l'entendement humain* 100
- objectivité 20, 29, 83, 90-91,  
 118
- ontique 5, 45, 59-60
- opérationnalisme 28
- ordinateur  
*voir* preuve par ordinateur
- paradoxe 4, 44  
*voir aussi* antinomie
- persuasion  
*versus* preuve, *voir ce  
 terme*
- pétition de principe 93, 98  
*Phédon* 21, 61  
*Port-Royal, Logique de* 49-  
 50, 63
- postulat des parallèles 3, 68-  
 69
- pragmatique  
*voir* preuve, aspect  
 pragmatique  
*Premiers analytiques* 1
- prémisse de contrebande 46,  
 97-110, 118
- preuve  
 analysée par Aristote 40-  
 41  
 apagogique 62

preuve (*suite*)

- aspect pragmatique 80-91
- conduit à la connaissance
  - 58-59, 80-81, 117
- et connaissances du
  - raisonneur xii, 42, 60-61, 80, 92-93, 117
- critère, *voir ce terme*
- définition
  - d'Aristote 1-2, 6
  - problème de 27, 29
- directe 62
  - versus* preuve par l'absurde, *voir ce terme*
- en tant que critère xi, 30-33, 59
- en tant qu'idéal 17-18
- en tant que notion
  - relationnelle 60, 80-82, 117
- en tant qu'objet xii, 30, 34
- longue 14-15
- ostensive 62
- par l'absurde xii, 62-69, 71, 76-78, 83, 91
  - analogie avec discours indirect 65
  - nécessité 67-69
  - versus* preuve directe 62, 64-68
  - versus* raisonnement par l'absurde 66-67
- par contradiction 62
- par l'impossible 62
- par ordinateur 11-14, 32
- réunit deux sortes de connaissances 92
- structure 41, 80

preuve (*suite*)

- versus* argumentation 44-45, 80, 112
- versus* déduction xii, 41-42, 45, 61, 69, 118
- versus* expression de
  - preuve 17-18, 21, 84
- versus* persuasion 14, 20, 63, 112, 117
- voir aussi* quasi-preuve
- principes logiques et non logiques 107
- Principia mathematica* 19, 118
- proposition 17
- prouvabilité 59
  - versus* vérité 59
- Pythagoriciens 62
- quasi-preuve 13
- quatrième figure 48-50, 115
- raisonnement xi-xii, 40, 44-45, 47, 93-94, 121
  - à partir de prémisses fausses 69-79, 118
  - fallacieux 47, 96-97, 121
  - fondé xi-xii, 44, 47, 51, 82-85, 94, 96, 105, 121
  - mathématique xi, 86
  - par l'absurde 66-67, 88
  - quotidien 86-87
  - rigoureux 82-84
- règle d'inférence 6, 10, 75, 79, 96, 107, 112
  - voir aussi* modus ponens
- réinterprétation, dans une sémantique 55
- reproductibilité, en tant que critère 14, 32

- rhétorique 20
- scepticisme (Ecole sceptique)  
16, 22, 25, 27
- schéma 52-54
- sciences expérimentales 14,  
32
- sémantique 8, 80  
*voir aussi* catégorie  
sémantique
- sorite 15
- stoïcisme (Ecole stoïcienne)  
26-27
- sujet connaissant xii, 60-61,  
82, 95, 117  
*voir aussi* preuve, et  
connaissances du  
raisonneur
- syllogisme 34, 38, 41, 44-45,  
48-49, 75-77, 79, 99
- sylogistique 7, 48, 51, 68,  
76, 114
- syntaxe 8, 80, 83-84
- système formel 7-8, 87
- terme logique  
*versus* terme non logique  
55
- théorème  
de Dedekind-Cantor 87  
de la déduction 75  
de Fermat («dernier  
théorème») 96  
de l'infinité des nombres  
premiers 95  
des nombres premiers 19  
de Pythagore 8, 16, 62  
des quatre couleurs 11-12,  
31, 35
- tiers exclu 43, 51, 63, 83
- validité, *voir* argument
- vérité 58-60, 113, 118  
*versus* connaissance de la  
vérité 5, 59, 92  
*versus* prouvabilité, *voir*  
*ce terme*  
*voir aussi* critère de vérité  
*voir aussi* logique et vérité