

Université de Neuchâtel

Institut de Physique

# Etude du Chaos Quantique dans le Modèle Spin-Boson

Thèse

présentée à la Faculté des Sciences  
pour obtenir le titre de Docteur ès sciences  
par

Yvan Cuche

Neuchâtel, Août 1992

# IMPRIMATUR POUR LA THÈSE

Etude du chaos quantique dans le modèle .....  
spin-boson.....  
.....  
.....  
.....

de Monsieur Yvan Cuche.....

---

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

FACULTÉ DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel  
sur le rapport des membres du jury,

MM. les professeurs J.P. Amiet, H. Beck et.....  
F. Rothen (Lausanne).....  
.....

autorise l'impression de la présente thèse.

Neuchâtel, le 24 novembre 1992.....

Le doyen:



A. Robert

# Table des matières

Avant-propos	7
<b>1 Introduction – Motivations :</b>	
<b>Chaos quantique et Système spin-boson</b>	<b>9</b>
1.1 Cbaos classique et quantique	9
1.1.1 Chaos classique	9
1.1.2 Les critères du chaos classique en mécanique quantique	12
1.1.3 Etude spectrale et critère quantique de chaos	13
1.2 Le modèle spin-boson	17
1.2.1 Déduction du hamiltonien spin-boson	17
1.2.2 Hamiltonien spin-boson généralisé	19
1.2.3 Hamiltonien classique du système spin-boson généralisé	22
1.2.4 Spin-boson et chaos; but du travail	24
<b>Figures du Chapitre 1</b>	<b>26</b>
<b>2 Spin-boson classique et chaos</b>	<b>29</b>
2.1 Survol des résultats connus	30
2.2 Points fixes	31
2.2.1 Détermination	31
2.2.2 Conditions d'existence	32
2.2.3 Stabilité	33
2.2.4 Energie et position	36
2.3 Sections de Poincaré	38
2.3.1 Structure des sections	38
2.3.2 Etude numérique	41
<b>Figures du Chapitre 2</b>	<b>45</b>
<b>3 Limites classiques et semi-classiques</b>	<b>53</b>
3.1 Etats cobérents et Q-symboles	55
3.1.1 Etats cobérents	55
3.1.2 Q-symboles	58
3.1.3 Illustrations élémentaires	60
3.1.4 Application au modèle spin-boson	62
3.1.5 Modèles concurrents	62
3.2 Représentation de la phase.	
Limite des grands nombres d'excitations	65
3.2.1 Représentation de Bialinycki-Birula	65
3.2.2 Application au modèle spin-boson	66
3.3 Sur la pertinence d'une limite pour les petits spins	69

4	Spin-boson quantique et chaos	71
4.1	Diagonalisation de $H_s$	73
4.1.1	Parité	73
4.1.2	Transformation de Shore et Sander généralisée	73
4.1.3	Solutions du modèle de Jaynes et Cummings	75
4.2	Approximation de la phase.	
	Etude spectrale comparative	79
4.2.1	Survol des résultats connus sur le spectre	79
4.2.2	Diagonalisation dans l'approximation de la phase	80
4.2.3	Résultats numériques	81
4.3	Fonction de Husimi et ses zéros	84
4.3.1	Construction théorique de la fonction de Husimi	84
4.3.2	Approche numérique	92
4.3.3	Résultats et interprétation	98
	<b>Figures du Chapitre 4</b>	<b>104</b>
	<b>Conclusions</b>	<b>127</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>129</b>
	<b>Remerciements</b>	<b>133</b>

## Avant-propos

La théorie physique qui s'attaque au problème désigné par le terme controversé de chaos quantique présente des aspects très divers, mais qui tentent tous cependant de répondre à la même question: "Le chaos qui existe en mécanique classique se manifeste-t-il en mécanique quantique, et si oui, de quelle manière?" La théorie classique est souvent considérée comme un cas limite de la théorie quantique. Si un phénomène existe dans une théorie, dont l'autre ne parvient pas à rendre compte, alors ce sont toutes les hypothèses de correspondance qui sont infirmées. Et la révolution qui en découle n'est pas moindre que celle qui a ébranlé la notion de déterminisme lorsque les théories classiques du chaos ont été élaborées (ou actualisées, puisque une grande partie de leurs idées fondamentales étaient connues des mathématiciens du début du siècle).

La théorie du chaos quantique est à un stade de son évolution où la plupart des contributions complètent une classification des systèmes ou améliorent les critères qui permettent cette classification, plutôt que d'expliquer réellement des phénomènes ou des correspondances à partir de concepts précis. Deux options de travail se dégagent: la première est l'étude du principe même de la limite entre les formalismes quantiques et classiques, et du passage d'une description à l'autre de l'information relative à l'ordre; la seconde, que nous avons adoptée, est la recherche pour les objets typiquement quantiques de représentations telles qu'il soit possible de distinguer un comportement régulier d'un comportement chaotique, ou même de mettre en évidence une transition entre ces deux comportements en fonction d'un paramètre d'ordre.

Le développement de ces deux domaines est lié très étroitement à ceux de l'informatique et des performances des ordinateurs, de même que l'avait été celui du chaos classique. Notre travail n'échappe pas à la règle, et ses points forts sont des expériences numériques.

Une expérience nécessite un certain nombre de décisions préalables. En particulier, le choix d'un système, celui d'une représentation du système, et celui d'un critère de classification à l'intérieur de la représentation. Ces différentes notions vont constituer la matière du chapitre introductif, qui s'achèvera par une description précise du contenu de notre travail.

# 1 Introduction – Motivations :

## Chaos quantique et Système spin-boson

Ce chapitre introduit les notions de base nécessaires à la compréhension du problème du chaos tant classique que quantique, et présente le modèle que nous étudierons. Il se divise donc naturellement en deux sections, la première aboutissant aux questions ouvertes relatives au chaos quantique, la seconde aux réponses que pourrait offrir le système spin-boson, et aux motivations de ce travail.

### 1.1 Chaos classique et quantique

Le but de cette section est de poser le problème du chaos en mécanique quantique. Notre étude porte sur la classe des modèles hamiltoniens autonomes à peu de degrés de liberté.

Dans le cadre de la mécanique classique, la notion de chaos admet une définition rigoureuse. En outre, il existe un certain nombre de critères mathématiques qui permettent de classer les systèmes selon une hiérarchie relative à l'ordre. Dans un premier paragraphe, nous définirons les notions essentielles d'intégrabilité et de dépendance sensitive aux conditions initiales, ou en d'autres termes, de régularité et de chaos. Puis nous présenterons quelques propriétés importantes des transformations de l'espace de phase lors de la perturbation d'un système régulier (théorèmes de KAM et de Birkhoff) ainsi qu'un moyen géométrique de les mettre en évidence (section de Poincaré).

Dans un deuxième paragraphe, nous montrerons les difficultés de transposer les définitions classiques du chaos dans le cadre de la mécanique quantique. Pour terminer, nous examinerons les moyens spécifiques dont celle-ci dispose pour différencier un système régulier d'un système chaotique.

#### 1.1.1 Chaos classique

Nous considérerons un système à  $N$  degrés de liberté décrit par un hamiltonien  $\mathcal{H}(q_n, p_n)$ ,  $n = 1, \dots, N$ , fonction de  $N$  couples de variables conjuguées canoniques  $(q_n, p_n)$ ,  $n = 1, \dots, N$ , dont l'évolution est dictée par les équations de Hamilton:

$\dot{q}_n = \partial \mathcal{H} / \partial p_n$ ,  $\dot{p}_n = -\partial \mathcal{H} / \partial q_n$ . L'ensemble de ces  $2N$  équations du mouvement forme un système dynamique noté  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{W}(\mathbf{x})$ , et ses solutions forment un flot hamiltonien conservatif noté  $f_t : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$ ,  $\mathbf{x}(0) \mapsto \mathbf{x}(t) = f_t \mathbf{x}(0)$ .

### Intégrabilité

Un tel système est dit intégrable s'il existe  $N$  constantes du mouvement  $\{I_1, \dots, I_N\}$ , fonctionnellement indépendantes et en involution [1]. C'est-à-dire que:

- $\{\mathcal{H}, I_n\} = 0 \quad n = 1, \dots, N$ ,  
où  $\{.,.\}$  est le crochet de Poisson usuel.
- Les directions  $dI_n$  de l'espace de phase générées par les constantes sont linéairement indépendantes.
- $\{I_m, I_n\} = 0, \quad \forall n, m = 1, \dots, N$ .

Il existe alors une transformation canonique  $(q_n, p_n) \mapsto (I_n, \theta_n) \quad n = 1, \dots, N$ , telle que le hamiltonien ne dépend que des variables d'actions  $I_n$ :

$$\mathcal{H}(q_n, p_n) \longrightarrow \mathcal{H}'(I_n) \quad n = 1, \dots, N.$$

Par conséquent les variables angulaires évoluent linéairement en fonction du temps ( $\theta_n(t) = \omega_n t + \theta_{0n}$  où  $\omega_n = \partial \mathcal{H}' / \partial I_n$ ), et le mouvement est restreint à un  $N$ -tore.

Lorsque  $N = 1$ ,  $\mathcal{H}$  est lui-même constante du mouvement; tout système est alors intégrable.  $N = 2$  est la plus petite dimension qui admette des systèmes non intégrables. Dans ce dernier cas, le hamiltonien d'un système intégrable peut s'écrire  $\mathcal{H}_0(I_1, I_2)$ . Soient les deux fréquences  $\omega_1$  et  $\omega_2$  associées au parcours du tore selon les deux cercles dont il est le produit. On parle d'un tore rationnel si le rapport  $\omega_1/\omega_2$  est un nombre rationnel et sinon d'un tore irrationnel.

### Dépendance sensitive aux conditions initiales

Soient  $\mathbf{x}_0$ , une condition initiale du flot  $f_t$  et  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}_0$ , un point choisi dans son voisinage. On appelle exposant de Lyapunov caractéristique [2] la grandeur:

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \Delta \mathbf{x}_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \ln \left\{ \frac{|f_\tau \mathbf{y}_0 - f_\tau \mathbf{x}_0|}{|\Delta \mathbf{x}_0|} \right\}. \quad (1.1)$$

Elle mesure le taux de divergence exponentielle de deux trajectoires initialement infinitésimalement proches. D'autres définitions existent où un exposant est associé

à chaque direction de l'espace de phase; d'autres encore pour lesquelles est requise une limite  $\Delta x_0 \rightarrow 0$ . S'il existe un point du voisinage (ou une direction de l'espace de phase) tel que  $\lambda(x_0, \Delta x_0) > 0$ , on dit que le système présente une dépendance sensitive aux conditions initiales. Cette propriété est une définition possible du chaos classique.

Si le système est intégrable, ses exposants de Lyapunov sont  $\leq 0$ . Un exposant positif traduit l'impossibilité de prédire le comportement du système sur une longue durée, ceci bien que les lois d'évolution soient parfaitement déterministes.

Dans le cas d'un flot conservatif, si un exposant est positif, c'est-à-dire s'il existe une direction dilatante, alors le théorème de Liouville de la conservation des volumes dans l'espace de phase implique qu'une autre direction doit être contractante et présenter un exposant négatif.

L'étude des exposants de Lyapunov nous donne un critère très catégorique qui permet de distinguer pour une trajectoire un régime régulier d'un régime chaotique. Une hiérarchie plus nuancée peut être construite en introduisant une mesure invariante sur l'espace de phase et en étudiant la déformation par le flot d'un élément de volume [3].

### Section de Poincaré

Dorénavant, nous traiterons exclusivement de systèmes bidimensionnels, dont l'espace de phase est donc quadridimensionnel.

La section de Poincaré d'une trajectoire d'un flot hamiltonien correspond à l'ensemble de ses points d'intersection dans un sens déterminé avec un hyperplan fixé. Etant donnée la conservation de l'énergie, le flot a lieu sur une sous-variété de dimension 3 de l'espace de phase. Les points de la section remplissent un sous-espace de l'hyperplan de dimension  $\leq 2$ . L'étude d'une section permet de distinguer les différents régimes que peut présenter une trajectoire.

- une trajectoire périodique est représentée par un point ou un petit nombre de points.
- un tore rationnel est représenté par un ensemble discret de points, disposés le long de courbes, dont le nombre et l'ordre d'apparition sont déterminés par la fraction associée.
- un tore irrationnel est représenté par un ensemble de points continu et unidimensionnel.
- une trajectoire chaotique est représentée par un ensemble de points qui remplissent une surface de manière ergodique. Si le système présente un régime mixte de

tores réguliers et de trajectoires chaotiques, alors cette surface est limitée par les sections des tores, qui sont imperméables étant donnée la nature hamiltonienne du flot. Sinon elle correspond à l'ensemble des points de l'hyperplan accessible à la trajectoire. Dans ce contexte, l'ergodicité est la propriété d'une trajectoire qui implique que sa probabilité de présence dans un sous-espace est proportionnelle au volume de celui-ci.

Une idée du comportement global d'un système est donnée par un ensemble de sections de Poincaré correspondant à des trajectoires dont les conditions initiales recouvrent de manière régulière la totalité du domaine d'intersection entre l'hyperplan et la variété d'énergie constante.

### Perturbation d'un système intégrable

Soit le hamiltonien intégrable  $\mathcal{H}_0(I_1, I_2)$ . Sous une perturbation  $\delta\mathcal{H}_1(I_1, \theta_1, I_2, \theta_2)$ , les tores réagissent de manière différente selon qu'ils sont rationnels ou irrationnels.

- Si  $\omega_1/\omega_2$  est irrationnel (ou "suffisamment proche d'un irrationnel", le critère de proximité dépendant de l'amplitude de la perturbation  $\delta$ ), alors le théorème de KAM (Kolmogorov, Arnold et Moser, [4]) s'applique et assure la stabilité de ces tores pour  $\delta \ll 1$ . Lorsque  $\delta$  croît, tous les tores finissent par être détruits.
- Si  $\omega_1/\omega_2$  est rationnel, alors le théorème de Poincaré-Birkhoff [5] s'applique et prévoit dans la section de Poincaré un nombre pair de points fixes, alternativement stables et instables. Autour des points instables les premières trajectoires chaotiques apparaissent, quelle que soit l'amplitude de la perturbation. Autour des points stables se constitue une nouvelle couche de tores comparable à la structure d'origine et qui va réagir de manière comparable à l'accroissement de la perturbation. C'est-à-dire que dans l'espace de phase, une structure auto-similaire apparaît. Et que le chaos existe à toute échelle de cette structure.

#### 1.1.2 Les critères du chaos classique en mécanique quantique

Trois notions introduites dans le cadre de la mécanique classique perdent leur pertinence en mécanique quantique.

- Intégrabilité. La définition classique (la clause d'indépendance fonctionnelle mise à part) peut être transposée telle quelle en mécanique quantique, à condition de remplacer les crochets de Poisson par des commutateurs.

Mais contrairement au cas classique, les systèmes quantiques intégrables ne posent

sèdent pas de propriétés physiques spécifiques [6].

- Evolution. Tout critère qui s'appuie sur la notion de trajectoire, comme celui des exposants de Lyapunov, n'est évidemment pas applicable en mécanique quantique. De plus ce type de critère nécessite le passage à la limite des grands temps, et cette limite ne commute pas avec la limite classique usuelle ( $\hbar \rightarrow 0$ ) [7].

L'évolution d'un système quantique dont le spectre  $\{E_k\}$  est discret est caractérisée par un ensemble de fréquences  $\omega_{kl} = (E_k - E_l)/\hbar$ . Un signal issu d'une observable quantique est presque périodique et par conséquent, il ne peut pas présenter de dépendance sensitive aux conditions initiales.

- Espace de phase. Une caractéristique importante de l'apparition du chaos dans l'espace de phase classique est sa manifestation à toutes les échelles de la structure auto-similaire. Certes, il est possible de représenter les états propres d'un hamiltonien quantique sur l'espace de phase, et selon le principe de correspondance, les fonctions obtenues devraient rendre compte des trajectoires classiques. Mais le principe d'incertitude de Heisenberg limite la résolution de ces fonctions, et par conséquent, la structure fine de l'espace de phase ne leur est pas perceptible.

Ces définitions ou caractéristiques du chaos classique ne permettent donc pas de cerner clairement une notion de chaos quantique.

Il faut donc définir une méthode générale de classification des systèmes, qui ne se réfère pas directement aux notions classiques, mais qui n'utilise que les grandeurs typiquement quantiques que sont le spectre et les fonctions propres.

### 1.1.3 Etude spectrale et critère quantique de chaos

L'étude des fluctuations du spectre d'un hamiltonien quantique permet de définir deux catégories de systèmes, les uns présentant un phénomène caractéristique de répulsion de leurs niveaux d'énergie, les autres une répartition aléatoire des espacements entre ces niveaux. Les spectres de la plupart des systèmes connus présentent l'un de ces deux comportements typiques, et la distinction correspond au régime intégrable ou chaotique de leur limite classique [8],[9].

Soit  $\{E_k\}$ , la séquence ordonnée des valeurs propres d'un hamiltonien  $H$ . Notons  $N(E)$  le nombre d'états propres d'énergie inférieure à  $E$ :

$$N(E) = \sum_k \theta(E - E_k), \quad (1.2)$$

où  $\theta(E)$  est la fonction saut de Heavyside:

$$\theta(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } E > 0 \\ 0 & \text{si } E \leq 0 \end{cases}$$

$N(E)$  est une fonction discontinue en escaliers, qu'on sépare en une partie lisse notée  $N_{av}(E)$  et une partie fluctuante notée  $N_f(E)$ :

$$N(E) = N_{av}(E) + N_f(E). \quad (1.3)$$

$N_{av}(E)$  diffère selon les systèmes. On peut par exemple lui associer une densité d'états classique si le système admet une limite [10].

### Redressage

L'opération de redressage consiste à construire une séquence  $\{u_k = N_{av}(E_k)\}$  et la fonction  $N'(u)$  à partir de cette séquence, de manière analogue à la construction de  $N(E)$  à partir de la séquence des  $\{E_k\}$ . On compare alors les propriétés des fluctuations par rapport à une moyenne  $N'_{av}(u) = u$  identique, quels que soient le système et l'allure de  $N_{av}(E)$ . Cette opération est indispensable si l'on veut accéder aux propriétés universelles des fluctuations.

### Distribution des espacements entre niveaux voisins

Soit  $\{x_k = u_{k+1} - u_k\}$ , la série des espacements entre niveaux voisins du spectre redressé. On désigne par  $P(x)$  la distribution de ces espacements:

$$P(x)dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{x_k \in [x, x + dx], k \leq N\}}{N}, \quad (1.4)$$

où  $\#\{x_k\}$  désigne le nombre de valeurs  $x_k$  satisfaisant la propriété qui le suit directement dans l'expression. Le fait de travailler sur un spectre redressé implique que l'espacement moyen vaut  $\int P(x)x dx = 1$ . Cette distribution renseigne sur les corrélations à courte portée du spectre.

### Rigidité spectrale

Le critère le plus répandu de mesure de corrélations spectrales à longue portée est la fonction  $\Delta_3(\alpha, L)$  de Dyson-Mehta [11]:

$$\Delta_3(\alpha, L) = \frac{1}{L} \min_{A, B} \int_{\alpha}^{\alpha+L} (N'(u) - Au - B)^2 du. \quad (1.5)$$

Fonction dont on prend souvent la moyenne sur des intervalles qui ne se recouvrent pas, pour en éliminer la dépendance en  $\alpha$  :  $\Delta_3(L) \equiv \langle \Delta_3(\alpha, L) \rangle_\alpha$ .

### Classes d'universalité

Les spectres présentent deux types de comportement statistique distincts, selon qu'un niveau accepte un voisin à sa proximité, ou qu'il le repousse. Un raisonnement simple qui utilise les probabilités conditionnelles permet de déduire la courbe  $P(x)$  dans chacun des cas [12]:

$$P(x)dx = \left(1 - \int_0^x P(x')dx'\right) Q(x)dx, \quad (1.6)$$

où  $Q(x)dx$  est la probabilité qu'un niveau ait un voisin à une distance comprise dans l'intervalle  $[x, x + dx]$ , sachant que l'intervalle de longueur  $x$  à partir de ce niveau est inoccupé, et où le contenu de la parenthèse est la probabilité que ce dernier intervalle soit inoccupé.

• Pas de répulsion de niveaux:  $Q(x) = Q = \text{cte}$ . Alors la résolution de l'équation intégrale (1.6) et les conditions de normalisation donnent une distribution  $P(x)$  poissonienne:

$$P(x) = e^{-x}. \quad (1.7)$$

Cette propriété permet de calculer le comportement asymptotique de la fonction  $\Delta_3(L)$ , qui est linéaire:

$$\Delta_3(L) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{L}{15}. \quad (1.8)$$

Dans la plupart des cas connus, un système quantique dont la limite classique est intégrable possède de telles caractéristiques spectrales. Avec, comme exception notoire, l'oscillateur harmonique pour lequel  $P(x)$  est une fonction delta et  $\Delta_3(L)$  présente un palier constant.

• Répulsion des niveaux:  $Q(0) \neq 0$ ; le cas le plus simple est  $Q(x) = \gamma x$ . Alors (1.6) donne une distribution normalisée  $P(x)$  gaussienne:

$$P(x) = \frac{\pi}{2} x e^{-\frac{\pi}{4} x^2}, \quad (1.9)$$

résultat connu sous le nom de "conjecture de Wigner". On peut également en déduire le comportement asymptotique logarithmique de la fonction  $\Delta_3(L)$ :

$$\Delta_3(L) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi^2} \ln L + \text{cte}. \quad (1.10)$$

La plupart des systèmes quantiques invariants sous renversement du temps et dont la limite classique est chaotique présentent de telles caractéristiques spectrales.

Ces résultats s'obtiennent également à partir du spectre d'une matrice aléatoire orthogonale. La terminologie usuelle emploie "ensemble orthogonal gaussien" (GOE). D'autres ensembles de matrices aléatoires, unitaires ou symplectiques, mènent à d'autres types de statistiques, lesquelles présentent aussi le phénomène de répulsion des niveaux.

Si le système étudié possède des symétries particulières, il faut prendre soin de séparer les états correspondant aux différentes classes de symétrie et d'effectuer le travail statistique séparément sur chacune d'elle.

La figure 1.1 présente l'allure des distributions  $P(x)$  dans le cas d'une statistique de Poisson (tirets), caractéristique d'un système régulier, et d'une statistique de type GOE (ligne continue), caractéristique d'un système chaotique. La figure 1.2 présente l'allure des fonctions  $\Delta_3(L)$  dans les mêmes cas avec les mêmes conventions. Les résultats numériques se présenteront sous la forme d'un histogramme pour  $P(x)$  et d'un ensemble discret de points pour  $\Delta_3(L)$ .

Plusieurs questions restent ouvertes. L'analyse spectrale propose un critère que peu de systèmes mettent en défaut. On ignore par contre les causes physiques qui font d'elle un réel critère. De plus ses liens avec la notion d'intégrabilité quantique ne sont pas connus. On ignore également s'il existe un critère reposant sur les fonctions propres qui montre une telle généralité (et qui englobe si possible le cas régulier par excellence de l'oscillateur harmonique).

## 1.2 Le modèle spin-boson

Le modèle spin-boson connaît un large éventail d'applications, en particulier dans le domaine de la physique du solide [13], [14], [15]. Cependant, il est issu de l'optique quantique, où il représente un système d'interaction entre atomes et champ électromagnétique [16]. Il permet notamment de décrire le phénomène essentiel sur lequel repose le fonctionnement des lasers et des masers.

Nous présenterons brièvement comment déduire des propriétés de particules dans un champ quantifié un hamiltonien quantique qui rende compte complètement de l'interaction et qui se prête aux investigations que nous envisageons. Nous montrerons que dans le cas particulier d'une approximation qu'on désigne souvent par "approximation du champ tournant" (Rotating Wave Approximation), le système compte une constante du mouvement non triviale supplémentaire. Puis nous montrerons son invariance sous une transformation engendrée par un opérateur de parité adapté au problème. D'autres propriétés générales, concernant un système composé d'un spin  $s = 1/2$ , seront présentées dans la section introductive du chapitre 4.

Dans une seconde partie, nous construirons un hamiltonien classique ex nihilo. Nous montrerons qu'il possède des similarités formelles avec le hamiltonien quantique, qu'il possède également une constante du mouvement non triviale dans certaines limites et des propriétés de symétrie qui rappellent la parité quantique.

Pour conclure ce chapitre, nous discuterons de l'opportunité de choisir un tel modèle pour aborder le problème du chaos quantique, et présenterons en détail le contenu des chapitres suivants.

### 1.2.1 Déduction du hamiltonien spin-boson

Une étude rigoureuse du processus de quantification du champ électromagnétique, ainsi que l'élaboration complète du hamiltonien d'interaction entre une collection d'atomes et ce champ figurent dans l'appendice de l'ouvrage de Cohen-Tannoudji et al. [17]. Nous en présentons ici quelques éléments.

La composante transverse du potentiel vecteur quantifié est donnée par:

$$\vec{A}_\perp(\vec{r}) = \sum_j \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_j L^3}} (a_j e^{i\vec{k}_j\vec{r}} + a_j^\dagger e^{-i\vec{k}_j\vec{r}}) \vec{e}_j, \quad (1.11)$$

où  $a_j$  et  $a_j^\dagger$  sont respectivement l'annihilateur et le créateur d'un photon de polarisation  $\vec{e}_j$ , de fréquence  $\omega_j$  et de nombre d'onde  $\vec{k}_j$ , eux-mêmes quantifiés par les conditions au bord d'un volume  $L^3$ .

Regardons un à un les termes qui constituent le hamiltonien.

• Atomes. Pour simplifier, la partie matérielle du système est constituée d'atomes à deux niveaux ( $|a\rangle_l, |b\rangle_l$ ), d'indice  $l$ . L'énergie de chaque individu est du type  $H_l = E_a |a\rangle_l \langle a|_l + E_b |b\rangle_l \langle b|_l$ , et peut s'exprimer à l'aide d'une matrice de Pauli  $H_l = \hbar\omega_0 \sigma_{z,l}/2$ , où  $\hbar\omega_0 = E_a - E_b$  (l'indice ajouté à  $\sigma_z$  signifie que cet opérateur agit sur l'espace de Hilbert associé au spin de l'atome  $l$ ). D'où:

$$H_{at} = \sum_l \hbar \frac{\omega_0}{2} \sigma_{z,l} . \quad (1.12)$$

• Champ. L'énergie propre au champ est contenue essentiellement dans sa partie transverse:

$$H_{rad} = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{r} \left( \vec{E}_\perp^2(\vec{r}) + \vec{B}_\perp^2(\vec{r}) \right) = \sum_j \hbar\omega_j \left( a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2} \right) . \quad (1.13)$$

L'énergie contenue dans le champ longitudinal est d'origine coulombienne, et liée à l'interaction entre les atomes. On peut la négliger lorsque leur densité est faible.

• Interaction. Pour de faibles intensités du champ et pour des photons de basse énergie, le terme d'interaction dominant provient du terme qui couple le potentiel  $\vec{A}_\perp(\vec{r})$  à l'impulsion  $\vec{p}_l$  d'une particule dans l'expression de son énergie cinétique  $H_{cin,l} = \left( \vec{p}_l - q \vec{A}_\perp(\vec{r}) \right)^2 / 2m$ . Ce terme, via l'"approximation dipolaire" qui consiste à négliger la dépendance spatiale du champ à l'échelle de l'atome [18], se transforme pour chaque atome en:

$$H_{int,l} = g \vec{d}_l \cdot \vec{E}_\perp = \sum_j \left( a_j^\dagger + a_j \right) \lambda_j \left( \sigma_{+,l} + \sigma_{-,l} \right) , \quad (1.14)$$

où  $\vec{d}_l$  est le moment dipolaire de l'atome  $l$ . L'opérateur associé est purement diagonal [19], et se simplifie en un multiple de  $\sigma_{z,l}$ .

En résumé, après redéfinition de l'échelle d'énergie:

$$\tilde{H}_{SB} = \sum_j \hbar\omega_j a_j^\dagger a_j + \sum_l \hbar\omega_0 \sigma_{z,l} + \sum_l \sum_j \lambda_j \left( a_j^\dagger + a_j \right) \left( \sigma_{+,l} + \sigma_{-,l} \right) . \quad (1.15)$$

### "Approximation du champ tournant"

Considérons dans l'image de Heisenberg l'évolution des opérateurs qui composent  $\tilde{H}_{SB}$ , sans tenir compte de l'interaction (pour alléger la notation nous n'écrivons pas les indices):

$$\begin{aligned}
a(t) &= a(0)e^{-i\omega t} & , & & a^+(t) &= a^+(0)e^{i\omega t} \\
\sigma_{\pm}(t) &= \sigma_{\pm}(0)e^{\pm i\omega_0 t} & , & & \sigma_z(t) &= \sigma_z(0) = \text{cste} .
\end{aligned}$$

Le terme de couplage comporte alors les éléments suivants:

$$\begin{aligned}
a(t)\sigma_+(t) &= a(0)\sigma_+(0)e^{i(\omega_0-\omega)t} \\
a^+(t)\sigma_-(t) &= a^+(0)\sigma_-(0)e^{-i(\omega_0-\omega)t} \\
a(t)\sigma_-(t) &= a(0)\sigma_-(0)e^{-i(\omega_0+\omega)t} \\
a^+(t)\sigma_+(t) &= a^+(0)\sigma_+(0)e^{i(\omega_0+\omega)t} .
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Dans le cas proche de la résonance ( $\omega = \omega_0$ ) et en considérant leur valeur moyenne sur quelques périodes des modes libres, les deux derniers éléments sont négligeables par rapport aux deux premiers [20].

Cette approximation est appelée "approximation du champ tournant" et le hamiltonien correspondant est:

$$\hat{H}_{RW\Lambda} = \sum_j \hbar\omega_j a_j^\dagger a_j + \sum_l \hbar\omega_0 \sigma_{z,l} + \sum_l \sum_j \lambda_j (a_j^\dagger \sigma_{-,l} + a_j \sigma_{+,l}) . \tag{1.17}$$

### 1.2.2 Hamiltonien spin-boson généralisé

Nous introduisons quelques modifications à la forme obtenue  $\hat{H}_{SB}$  (1.15).

- Plutôt que de devoir recourir à des méthodes statistiques en considérant un nombre quelconque d'atomes à deux niveaux, nous nous tenons à un seul atome, mais de spin quelconque  $s$ , qui compte donc  $2s+1$  niveaux. L'énergie séparant deux niveaux est de  $\hbar\omega_0$  et nous utilisons des opérateurs de spin  $S_{x,y,z,\pm}$  sans unité.

- Pour des raisons analogues, nous choisissons de traiter un champ unimode qui s'interprète alors comme un simple oscillateur harmonique de fréquence  $\omega$ . Dans cette image, l'interaction a lieu entre la position de l'oscillateur et la composante  $x$  du spin.  $\lambda$  représente son intensité. Ces deux premières modifications éloignent le modèle du système réel qu'il est censé décrire.

- Nous avons jugé intéressant d'introduire un paramètre qui permette d'étudier une transition continue entre le hamiltonien qui décrit l'interaction complète et celui de l'"approximation du champ tournant". Nous l'appellerons  $\epsilon$  et il multipliera les termes non résonants de (1.16). Si le système est interprété comme un oscillateur harmonique et un spin en interaction, cette opération introduit un nouveau terme

de couplage entre l'impulsion de l'oscillateur et la composante  $y$  du spin. C'est dans ce sens que le hamiltonien est généralisé.

• La constante  $\hbar$  est introduite de sorte que les opérateurs de position et d'impulsion de l'oscillateur harmonique apparaissent naturellement. Sa mise en évidence permet de contrôler l'aspect quantique du problème.

Nous noterons  $H_\epsilon$  le hamiltonien spin-boson généralisé:

$$H_\epsilon = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\omega_0 S_z + \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \frac{\lambda}{2} \left\{ S_+ a + S_- a^\dagger + \epsilon (S_+ a^\dagger + S_- a) \right\} \quad (1.18)$$

On obtient une forme équivalente en introduisant explicitement les opérateurs de position et d'impulsion de l'oscillateur harmonique (respectivement  $\hat{q} = \sqrt{\hbar/2}(a^\dagger + a)$  et  $\hat{p} = i\sqrt{\hbar/2}(a^\dagger - a)$ ), et les opérateurs décrivant les composantes  $x$  et  $y$  du spin ( $S_x = (S_+ + S_-)/2$ ,  $S_y = -i(S_+ - S_-)/2$ ):

$$H_\epsilon = \frac{\omega}{2} (\hat{q}^2 + \hat{p}^2) + \hbar\omega_0 S_z + \hbar (\lambda^+ S_x \hat{q} - \lambda^- S_y \hat{p}), \quad (1.19)$$

où  $\lambda^\pm = \lambda(1 \pm \epsilon)/2$ . Un déplacement de  $\hbar\omega/2$  dans les échelles d'énergie est la seule différence entre les formes (1.18) et (1.19) de  $H_\epsilon$ .

L'espace de Hilbert sur lequel agit  $H_\epsilon$  est le produit tensoriel  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2s+1} \otimes \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  des espaces de Hilbert associés respectivement à un spin  $s$  et à un oscillateur harmonique unidimensionnel. Une base d'états est constituée des états produits  $|m, n\rangle \equiv |s, m\rangle \otimes |n\rangle$ , où  $|s, m\rangle$  est un état propre de  $S_z$  et de  $\tilde{S}^2$  ( $S_z |s, m\rangle = m |s, m\rangle$ ,  $\tilde{S}^2 |s, m\rangle = s(s+1) |s, m\rangle$ ) et  $|n\rangle$  un état propre de  $a^\dagger a$  ( $a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle$ ). Le nombre quantique du spin ne figure pas dans la désignation de l'état  $|m, n\rangle$ ; nous prendrons soin de le spécifier à chaque fois que cela sera nécessaire.

Les différents opérateurs satisfont les relations de commutation usuelles:

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= 1 \implies [\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar, \\ [S_x, S_y] &= iS_z, \text{ et permutations cycliques,} \\ [S_x, S_\pm] &= \pm S_\pm, \quad [S_+, S_-] = 2S_z. \end{aligned} \quad (1.20)$$

La dynamique est donnée par les équations de Heisenberg. Selon l'écriture de  $H_\epsilon$ , elles sont:

$$\frac{d}{dt} a = -\frac{i}{\hbar} [a, H_\epsilon] = -i \left\{ \omega a + \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \frac{\lambda}{2} (S_- + \epsilon S_+) \right\}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}S_+ &= -\frac{i}{\hbar}[S_+, H_t] = i \left\{ \omega_0 S_+ - \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \lambda S_z (a^+ + \epsilon a) \right\} \\ \frac{d}{dt}S_z &= -\frac{i}{\hbar}[S_z, H_t] = i \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \frac{\lambda}{2} \left\{ S_- (a^+ + \epsilon a) - S_+ (a + \epsilon a^+) \right\}, \quad (1.21)\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{q} &= -\frac{i}{\hbar}[\hat{q}, H_t] = \omega\hat{p} - \hbar\lambda^- S_y \\ \frac{d}{dt}\hat{p} &= -\frac{i}{\hbar}[\hat{p}, H_t] = -\omega\hat{q} - \hbar\lambda^+ S_z \\ \frac{d}{dt}S_x &= -\frac{i}{\hbar}[S_x, H_t] = -\omega_0 S_y - \lambda^- S_z \hat{p} \\ \frac{d}{dt}S_y &= -\frac{i}{\hbar}[S_y, H_t] = \omega_0 S_x - \lambda^+ S_z \hat{q} \\ \frac{d}{dt}S_z &= -\frac{i}{\hbar}[S_z, H_t] = \lambda^+ S_y \hat{q} + \lambda^- S_x \hat{p}.\end{aligned} \quad (1.22)$$

Nous noterons pour les états propres, solutions de l'équation de Schrödinger  $H_t |\psi^E\rangle = E |\psi^E\rangle$ :

$$|\psi^E\rangle = \sum_{m=-s}^s \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}^E |m, n\rangle = \sum_{m=-s}^s |s, m\rangle \otimes |\psi_m^E\rangle, \quad (1.23)$$

où  $|\psi_m^E\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}^E |n\rangle$  désigne l'amplitude de la composante  $m$  d'un spineur qui en compte  $2s + 1$ .

Pour  $\epsilon = 1$ , le hamiltonien  $H_t$  a la même structure que  $\tilde{H}_{SB}$  (1.15). Nous écrivons:

$$H_{\epsilon=1} \equiv H_{SB} \quad (\lambda^- = 0, \lambda^+ = \lambda).$$

Et pour  $\epsilon = 0$ ,  $H_t$  a une structure comparable à celle de  $\tilde{H}_{RW A}$  (1.17). Nous écrivons:

$$H_{\epsilon=0} \equiv H_{JC} \quad (\lambda^- = \lambda^+ = \frac{\lambda}{2}).$$

Dorénavant, nous appellerons le modèle décrit par  $H_t$ : "spin-boson généralisé"; celui décrit par  $H_{SB}$ : "spin-boson"; et celui décrit par  $H_{JC}$ : "modèle de Jaynes-Cummings", des noms des premiers auteurs qui ont traité du système dans cette approximation ([16] et voir également section 2.1). Ainsi notre terminologie est conforme à celle de la littérature.

$H_{JC}$  possède une nouvelle constante du mouvement non triviale:

$$\widehat{K} = a^+ a + S_z, \quad (1.24)$$

En effet:  $[H_{JC}, \widehat{K}] = 0$ .  $\widehat{K}$  correspond à la somme du nombre de photons et de quanta de spin. Sa conservation est naturelle puisque dans le terme d'interaction de  $H_{JC}$  ne subsistent que les termes  $S_{-a}$  et  $S_{-a}^{\dagger}$ , qui décrivent l'échange d'un photon et d'un quantum de spin.

### Parité

Pour un système comportant un spin  $s$ , on définit l'opérateur de parité comme suit:

$$P = (-1)^{(a^{\dagger}a + s - S_z)} . \quad (1.25)$$

Le commutateur de  $P$  avec chaque terme de  $H_c$  pris indépendamment s'annule. Par conséquent:

$$[P, H_c] = 0 . \quad (1.26)$$

Comme corollaire important,  $H_c$  et  $P$  possèdent une base d'états propres commune.  $P$  ne compte évidemment que les deux valeurs propres  $\pm 1$  qui sont fortement dégénérées. En fait, toute combinaison linéaire des états de base pour lesquels les nombres  $n + s - m$  ont la même parité est vecteur propre de  $P$ . Les états propres de  $H_c$  ont donc la même structure, et à l'intérieur d'un bloc où la composante du spin  $m = m_0$  est fixée, un coefficient  $\psi_{m=m_0, n}^E$  sur deux est nul.

### 1.2.3 Hamiltonien classique du système spin-boson généralisé

Soit:

$$\mathcal{H}_c = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2) + \omega_0 I_z + \sqrt{S^2 - I_z^2} (\lambda^+ q \cos \varphi_z - \lambda^- p \sin \varphi_z) , \quad (1.27)$$

fonction des couples de variables canoniques  $(q, p) \in \mathbb{R}^2$  et  $(I_z, \varphi_z)$ , paramétrant une sphère  $S^2$  de rayon  $S$ , avec l'action  $I_z \in [-S, S]$ , et l'angle  $\varphi_z \in [0, 2\pi[$ . L'espace de phase global  $\mathbb{R}^2 \otimes S^2$  hérite de la structure symplectique de chacune de ses parties.

L'évolution du système est donnée par les équations de Hamilton:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \partial_p H_c = \omega p - \lambda^- \sqrt{S^2 - I_z^2} \sin \varphi_z \\ \dot{p} &= -\partial_q H_c = -\omega q - \lambda^+ \sqrt{S^2 - I_z^2} \cos \varphi_z \\ \dot{\varphi}_z &= \partial_{I_z} H_c = \omega_0 - \frac{I_z}{\sqrt{S^2 - I_z^2}} (\lambda^+ q \cos \varphi_z - \lambda^- p \sin \varphi_z) \\ \dot{I}_z &= -\partial_{\varphi_z} H_c = -\sqrt{S^2 - I_z^2} (\lambda^+ q \sin \varphi_z + \lambda^- p \cos \varphi_z) . \end{aligned} \quad (1.28)$$

La fonction qui décrit  $\varphi$ , a deux singularités en  $I_z = \pm S$ , qui découlent naturellement de la topologie de l'espace de phase  $S^2$ , et qui disparaissent si la sphère est décrite par les variables cartésiennes:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \sqrt{S^2 - I_z^2} \cos \varphi_z \\ \mathcal{Y} &= \sqrt{S^2 - I_z^2} \sin \varphi_z \\ \mathcal{Z} &= I_z \end{aligned} \tag{1.29}$$

La structure des crochets de Poisson des variables  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$  est très similaire à celle des commutateurs des observables de spin  $S_x, S_y, S_z$ , à savoir:

$$\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\} = \partial_{\varphi_z} \mathcal{X} \partial_{I_z} \mathcal{Y} - \partial_{I_z} \mathcal{X} \partial_{\varphi_z} \mathcal{Y} = \mathcal{Z}, \text{ et perm. circ.} \tag{1.30}$$

$\mathcal{H}_\epsilon$  s'écrit alors:

$$\mathcal{H}_\epsilon(q, p, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2) + \omega_0 \mathcal{Z} + \lambda^+ q \mathcal{X} - \lambda^- p \mathcal{Y}, \tag{1.31}$$

et sa dynamique:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \partial_p \mathcal{H}_\epsilon = \omega p - \lambda^- \mathcal{Y} \\ \dot{p} &= -\partial_q \mathcal{H}_\epsilon = -\omega q - \lambda^+ \mathcal{X} \\ \dot{\mathcal{X}} &= \{\mathcal{X}, \mathcal{H}_\epsilon\} = -\omega_0 \mathcal{Y} - \lambda^- p \mathcal{Z} \\ \dot{\mathcal{Y}} &= \{\mathcal{Y}, \mathcal{H}_\epsilon\} = \omega_0 \mathcal{X} - \lambda^+ q \mathcal{Z} \\ \dot{\mathcal{Z}} &= \{\mathcal{Z}, \mathcal{H}_\epsilon\} = \lambda^+ q \mathcal{Y} + \lambda^- p \mathcal{X} \end{aligned} \tag{1.32}$$

Les trois dernières équations peuvent se résumer à  $d\vec{S}/dt = \vec{S} \wedge \vec{\nabla}_S \mathcal{H}_\epsilon$ , où  $\vec{S} = (\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ , ce qui met clairement en évidence la conservation de  $\vec{S}^2 = \mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2$ . C'est ce système qui sera l'objet du chapitre 2.

Il existe des analogies structurelles entre  $\mathcal{H}_\epsilon$  et  $H_\epsilon$ , de même qu'entre les équations dynamiques que l'un et l'autre engendrent. Le paragraphe suivant montrera que ces hamiltoniens possèdent en outre des propriétés d'invariance en commun. Nous admettrons dorénavant que  $\vec{S}$  représente un spin classique, et que  $\mathcal{H}_\epsilon$  est le hamiltonien qui décrit classiquement l'interaction d'un oscillateur harmonique et d'un spin.

### Invariances

• Le changement de variables suivant:

$$(q, p, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \longrightarrow (q', p', \mathcal{X}', \mathcal{Y}', \mathcal{Z}') = (-q, -p, -\mathcal{X}, -\mathcal{Y}, \mathcal{Z}), \tag{1.33}$$

préserve le hamiltonien et les équations du mouvement. Il correspond à une rotation d'angle  $\pi$  effectuée à la fois dans le plan de phase de l'oscillateur harmonique

autour de l'origine et dans l'espace de phase du spin autour de l'axe  $O_z$ . Cette transformation appliquée à  $(q, p, I_z, \varphi_z)$  est canonique. Elle est en fait le pendant classique de la parité  $P$  (1.25) qui laisse invariant le hamiltonien quantique  $H_r$  (1.18).

Cette invariance explique notamment les symétries centrales observées dans les sections de Poincaré dans le plan  $(q, p)$ , quand le choix de l'horloge porte sur le croisement d'un parallèle (hyperplan  $\mathcal{Z} = \text{cste}$ ).

• Dans le cas  $\epsilon = 0$ ,  $\mathcal{H}_r$  s'écrit:

$$\mathcal{H}_{RWA}(q, p, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2) + \omega_0 \mathcal{Z} + \frac{\lambda}{2} (q\mathcal{X} - p\mathcal{Y}) . \quad (1.34)$$

Une rotation d'angle  $\alpha$  quelconque autour de l'origine dans le plan de phase de l'oscillateur harmonique et autour de l'axe  $O_z$  dans l'espace de phase du spin:

$$\begin{aligned} q' &= q \cos \alpha + p \sin \alpha \\ p' &= -q \sin \alpha + p \cos \alpha \\ \mathcal{X}' &= \mathcal{X} \cos \alpha - \mathcal{Y} \sin \alpha \\ \mathcal{Y}' &= \mathcal{X} \sin \alpha + \mathcal{Y} \cos \alpha , \end{aligned} \quad (1.35)$$

laisse  $\mathcal{H}_{RWA}$  et ses équations du mouvement invariants. Cette transformation est également canonique, et exprimée par les variables d'angle et d'action, elle n'altère que les grandeurs angulaires.

Cette symétrie peut être décrite par un groupe continu à un paramètre. Le théorème de Noether [21] dit en substance qu'à chaque groupe de transformation à un paramètre qui laisse invariant un système physique est associée une constante du mouvement. En l'occurrence, on peut vérifier que:

$$\mathcal{K} = q^2 + p^2 + 2\mathcal{Z} \quad (1.36)$$

est une constante du mouvement, pendant classique de la constante  $\widehat{K}$ . Par conséquent, selon la définition proposée au §1.1.1, le système est intégrable dans cette limite.

#### 1.2.4 Spin-boson et chaos; but du travail

Le spin-boson est un des modèles les plus simples décrivant l'interaction de deux objets de nature physique essentiellement différente. Cette association complique souvent les développements mathématiques et les traitements numériques des problèmes posés. Mais en contrepartie, ces complications nécessitent des méthodes spécifiques qui n'ont encore jamais été utilisées dans ce contexte. Nous pouvons donc travailler dans un double but. D'une part, perfectionner les techniques utilisées dans

le domaine du chaos en leur confrontant celles propres au système spin-boson. Cela permettra notamment de vérifier la validité de certains des critères de chaos quantique qui traitent des fonctions propres et qui n'ont été appliqués qu'à un nombre restreint de systèmes et d'autre part, d'améliorer la connaissance d'un système physique dont les propriétés envisagées d'un point de vue traditionnel sont bien connues. En particulier, les études qui intègrent  $\epsilon$  sont rares et presque inexistantes dans le champ du chaos.

Au chapitre 2, nous présenterons des propriétés du hamiltonien classique  $\mathcal{H}_t$ . La différence essentielle entre spin et boson est ici d'ordre topologique et se traduit par l'aspect borné ou non de leur espace de phase respectif. Les principaux résultats obtenus sont une étude analytique détaillée des points fixes du système dynamique des équations de Hamilton de  $\mathcal{H}_t$  et de leur stabilité, ainsi que l'étude numérique de l'influence des paramètres  $\lambda$  et  $\epsilon$  sur l'apparition du chaos dans les sections de Poincaré.

L'objectif du chapitre 3 est d'établir une relation mathématique rigoureuse entre  $H_t$  et  $\mathcal{H}_t$ , puis de discuter dans quelles conditions l'élaboration de cette relation est bien fondée physiquement, et dans quel cas  $\mathcal{H}_t$  est à considérer comme une limite classique de  $H_t$ . Par ailleurs, le problème se prête bien à un traitement semi-classique. Nous définirons un hamiltonien  $H_{2,\epsilon}$ , correspondant à une approximation pour un grand nombre d'excitations du boson. Enfin nous discuterons de la validité d'une limite semi-classique dans le cas où le système comporte un spin  $s = 1/2$ .

Le chapitre 4 est consacré à l'étude du chaos dans le système spin-boson quantique. La différence entre spin et boson se reflète ici dans la dimension de leurs espaces de Hilbert respectifs. Plus que la dimension elle-même, c'est son aspect fini dans un cas et infini dans l'autre qui importe dans ce contexte. La structure de  $H_t$  indique clairement que son spectre est discret et qu'il ne présente pas de point d'accumulation. Alors, selon l'argument énoncé au §1.1.2, la dynamique ne présente pas d'intérêt pour l'étude du chaos. Nous montrerons que dans l'approximation qui nous a menés à  $H_{2,\epsilon}$ , la statistique spectrale rapproche le système entier d'un simple oscillateur harmonique. Nous développerons une technique de représentation des états propres de  $H_t$  dans l'espace de phase, calquée sur celle de Husimi, et nous montrerons qu'il existe alors des traces de ce que nous appellerons chaos quantique.

Dans sa partie numérique, notre étude a trait à un système comportant un spin  $s = 1/2$ , c'est-à-dire sous sa forme quantique extrême. Ce cas revêt un intérêt particulier car jusqu'ici la question de savoir s'il exhibait ou non des traces de comportement chaotique est restée sans réponse. Au contraire, les systèmes avec des spins plus grands ou en plus grand nombre présentent dans leur spectre la marque certaine d'une transition. Il s'agira de déterminer si ce spin  $s = 1/2$  se distingue de manière essentielle des grands spins.

## CHAPITRE 1

### LEGENDES DES FIGURES

- Figure 1.1: Distribution  $P(x)$  des espacements entre niveaux voisins d'un spectre redressé. Superposition d'une courbe de Poisson (tirets) et d'une courbe de Wigner ou GOE (trait plein).
- Figure 1.2: Fonction  $\Delta_3(L)$  de Dyson-Mehta qui mesure la rigidité d'un spectre redressé dans le cas où  $P(x)$  est une courbe de Poisson (tirets) et dans le cas où  $P(x)$  est une courbe de Wigner ou GOE (trait plein).

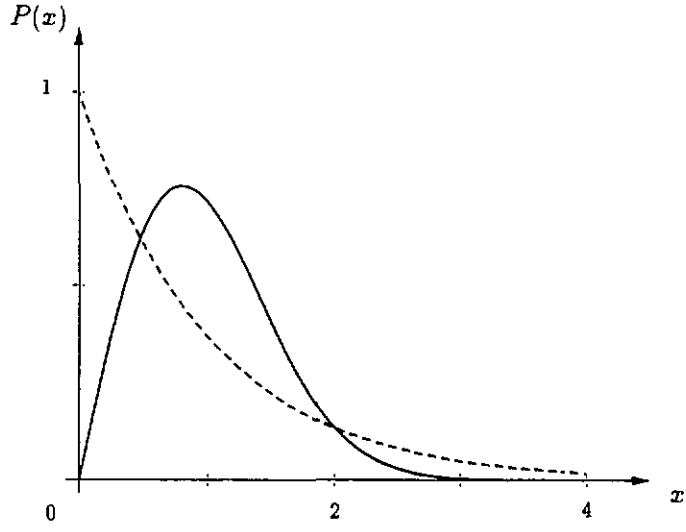


FIGURE 1.1

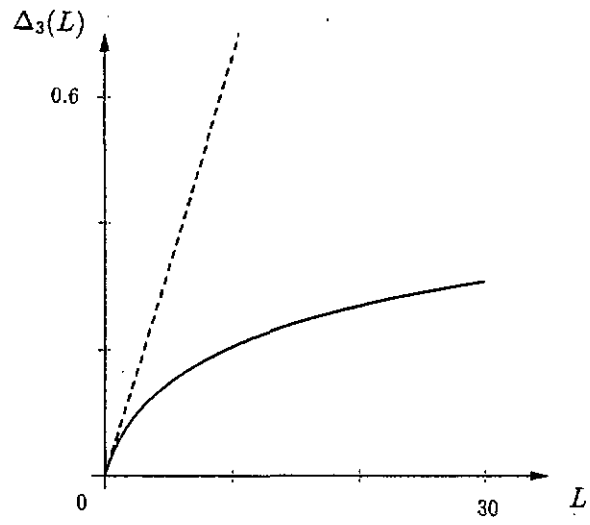


FIGURE 1.2

## 2 Spin-boson classique et chaos

Dans ce chapitre, nous proposons d'étudier quelques propriétés du système spin-boson généralisé dans sa limite classique. Les critères qui permettent de décider de la nature régulière ou chaotique d'un système classique sont d'ordre dynamique. Notre intérêt se portera donc sur l'ensemble des équations du mouvement générées par le hamiltonien spin-boson  $\mathcal{H}_\epsilon$  (1.31). Les résultats que nous présentons éclaircissent le rôle joué par le paramètre d'anisotropie  $\epsilon$ .

Le système dynamique d'équations du mouvement qui décrivent le modèle a déjà été l'objet d'un certain nombre de publications. La première section en donne une revue brève et non exhaustive.

La section suivante est consacrée à une étude détaillée des points fixes du système et de leur stabilité. Les effets de l'annulation du paramètre  $\epsilon$  sur les symétries du problème apparaissent alors de manière plus claire.

Dans la dernière section, nous présentons une étude numérique des transitions dans les sections de Poincaré en fonction de  $\lambda$  et  $\epsilon$ . Ce résultat est précédé d'une discussion de la structure de ces sections dans le plan de phase de l'oscillateur harmonique  $(q, p)$ . Nous envisageons de comparer les sections de Poincaré classiques et celles que nous construirons à partir d'états quantiques (section 4.3). Par conséquent l'organisation de ce dernier paragraphe et les questions qui y sont énoncées sont dictées par le problème tel qu'il se pose dans le cas quantique.

## 2.1 Survol des résultats connus

- C'est dans la publication de Jaynes et Cummings [16] que figure pour la première fois une étude du système spin-boson dans sa version classique. Leur résultat le plus significatif est le fait que le modèle avec  $\epsilon = 0$  permet de décrire le processus d'émission spontanée d'un atome excité, qui est un phénomène purement quantique.
- Beloborov, Zaslavsky et Tartakovsky [22] expriment pour la première fois le problème sous sa forme hamiltonienne. Ils introduisent également dans les équations dynamiques le paramètre  $\epsilon$  et mettent en évidence une nouvelle constante du mouvement qui apparaît lorsque celui-ci s'annule. Les auteurs présentent une étude analytique en terme de perturbations pour faible couplage  $\lambda$ , et vérifient numériquement leurs assertions: à savoir que les trajectoires perturbées constituent une "couche stochastique" qui enrobe la trajectoire correspondant au cas intégrable et que la région de stochasticité augmente avec  $\lambda$ . La démonstration de la divergence exponentielle de deux trajectoires initialement voisines figure aussi au nombre de leurs expériences numériques, mais non le calcul explicite des exposants de Liapunov.
- Trois articles presque contemporains présentent une étude numérique. Feinberg et Ranninger [23] étudient l'apparition du chaos dans les sections de Poincaré en fonction du couplage et selon le critère de recouvrement des résonances introduit par Chirikov [24]. Milonni, Ackerhalt et Galbraith [25], pour un système sensiblement différent (voir §3.1.5), démontrent l'existence de chaos pour couplage fort en considérant le spectre de puissance du signal correspondant à l'évolution temporelle d'une des variables, ainsi qu'en calculant des exposants de Liapunov. Fox et Eidson [26] synthétisent en quelque sorte les deux articles précédents. Ils appliquent les mêmes critères que Milonni et al. au système spin-boson. Les conclusions pour ce dernier modèle sont qualitativement identiques à celles de Milonni.
- Simultanément à nos recherches, Müller et al. [27] ont étudié les points fixes du modèle spin-boson (dans sa version où ne figure pas  $\epsilon$ ). Ils se sont également intéressés à la migration des résonances dans les sections de Poincaré en fonction de l'énergie et pour de faibles couplages.

## 2.2 Points fixes

Pour mémoire, si le spin est exprimé en terme de variables cartésiennes, le hamiltonien s'écrit:

$$\mathcal{H}_\epsilon(q, p, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2) + \omega_0 \mathcal{Z} + \lambda^+ q \mathcal{X} - \lambda^- p \mathcal{Y}, \quad (2.1)$$

avec  $\lambda^\pm = \lambda(1 \pm \epsilon)/2$ . Les équations du mouvement sont:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \omega p - \lambda^- \mathcal{Y} \\ \dot{p} &= -\omega q - \lambda^+ \mathcal{X} \\ \dot{\mathcal{X}} &= -\omega_0 \mathcal{Y} - \lambda^- p \mathcal{Z} \\ \dot{\mathcal{Y}} &= \omega_0 \mathcal{X} - \lambda^+ q \mathcal{Z} \\ \dot{\mathcal{Z}} &= \lambda^+ q \mathcal{Y} + \lambda^- p \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Les grandeurs conservées sont l'énergie  $E$  associée au hamiltonien, et le rayon de la sphère que décrivent les variables de spin:  $S = \sqrt{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2}$ . Notons que  $E$  est une constante du mouvement au sens donné dans la définition de l'intégrabilité (§1.1.1.); tandis que  $S$  est une contrainte. L'espace de phase est quadridimensionnel.  $\Pi$  est formé du produit cartésien  $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{S}^2$  du plan de phase  $\mathbb{R}^2 \ni (q, p)$  de l'oscillateur harmonique et de la sphère  $\mathbb{S}^2 \ni (\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$  du spin.

### 2.2.1 Détermination

Soit le système dynamique:  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{W}(\mathbf{x})$ . Un point  $\mathbf{x}_0$  est dit point fixe si la dérivée temporelle en ce point est nulle en tout temps, donc si  $\mathbf{W}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ .

Appliquons cette condition aux équations du mouvement du système (2.2), où toutes les constantes sont choisies réelles et positives. Les deux premières équations mettent en relation de proportionnalité les variables de l'oscillateur harmonique et les variables  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  du spin:

$$\begin{aligned} \omega p - \lambda^- \mathcal{Y} &= 0 \\ -\omega q - \lambda^+ \mathcal{X} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Par substitution apparaissent des contraintes sur les variables de spin:

$$\begin{aligned} \omega_0 \mathcal{Y} + \lambda^- p \mathcal{Z} = 0 &\implies \mathcal{Y} \left( \omega_0 + \frac{\lambda^-}{\omega} \mathcal{Z} \right) = 0 \\ \omega_0 \mathcal{X} - \lambda^+ q \mathcal{Z} = 0 &\implies \mathcal{X} \left( \omega_0 + \frac{\lambda^+}{\omega} \mathcal{Z} \right) = 0 \\ \lambda^+ q \mathcal{Y} + \lambda^- p \mathcal{X} = 0 &\implies \frac{\mathcal{X} \mathcal{Y}}{\omega} (\lambda^{+2} - \lambda^{-2}) = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Les points d'équilibre sont les solutions de ce système et se distinguent en trois catégories que nous noterons  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Nous fixons le rayon de la sphère  $S = 1$ , et calculons également dans chaque cas l'énergie associée au point fixe:

- $A_{1,2}$  :  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = q = p = 0$ ,  $\mathcal{Z} = \mp 1 \implies E = \mp \omega_0$ .
- $B_{1,2}$  :  $\mathcal{Y} = p = 0$ ,  $\mathcal{Z} = -\frac{\omega\omega_0}{\lambda^{+2}}$ ,  $\mathcal{X} = \pm\sqrt{1 - \frac{\omega^2\omega_0^2}{\lambda^{+4}}}$ ,  
 $q = \mp\sqrt{\frac{\lambda^{+2}}{\omega^2} - \frac{\omega_0^2}{\lambda^{+2}}} \implies E = -\frac{\omega_0}{2} \left( \frac{\lambda^{+2}}{\omega\omega_0} + \frac{\omega\omega_0}{\lambda^{+2}} \right)$ .
- $C_{1,2}$  :  $\mathcal{X} = q = 0$ ,  $\mathcal{Z} = -\frac{\omega\omega_0}{\lambda^{-2}}$ ,  $\mathcal{Y} = \pm\sqrt{1 - \frac{\omega^2\omega_0^2}{\lambda^{-4}}}$ ,  
 $p = \pm\sqrt{\frac{\lambda^{-2}}{\omega^2} - \frac{\omega_0^2}{\lambda^{-2}}} \implies E = -\frac{\omega_0}{2} \left( \frac{\lambda^{-2}}{\omega\omega_0} + \frac{\omega\omega_0}{\lambda^{-2}} \right)$ .

### 2.2.2 Conditions d'existence

Tout ensemble de paramètres ne permet pas la coexistence de tous les points fixes.

- Les points  $A_1$  et  $A_2$  existent quel que soit l'ensemble des paramètres.
- Les points  $B_1$  et  $B_2$  existent à condition que la valeur trouvée pour  $\mathcal{Z}$  soit inférieure au rayon de la sphère, c'est-à-dire:

$$\frac{\omega\omega_0}{\lambda^{+2}} \leq 1 \implies \epsilon \geq 2\frac{\sqrt{\omega\omega_0}}{\lambda} - 1. \quad (2.5)$$

- Les mêmes exigences appliquées aux points  $C_1$  et  $C_2$  donnent:

$$\frac{\omega\omega_0}{\lambda^{-2}} \leq 1 \implies \epsilon \leq 1 - 2\frac{\sqrt{\omega\omega_0}}{\lambda}. \quad (2.6)$$

#### Cas particuliers

- Spin-boson :  $\epsilon = 1 \implies \lambda^- = 0$ , par conséquent les points d'équilibre  $C_1$  et  $C_2$  n'existent pas.
- Cas intégrable:  $\epsilon = 0 \implies \lambda^+ = \lambda^- = \lambda/2$ . La dernière équation du système (2.4)

est satisfaite automatiquement et par conséquent la valeur  $\mathcal{Z} = -4\omega\omega_0/\lambda^2$  entraîne un ensemble continu de solutions pour les variables  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \sqrt{1 - 16 \frac{\omega^2 \omega_0^2}{\lambda^4}} \cos \beta & \implies & \quad q = -\sqrt{\frac{\lambda^2}{4\omega^2} - \frac{4\omega_0^2}{\lambda^2}} \cos \beta \\ \mathcal{Y} &= \sqrt{1 - 16 \frac{\omega^2 \omega_0^2}{\lambda^4}} \sin \beta & \implies & \quad p = -\sqrt{\frac{\lambda^2}{4\omega^2} - \frac{4\omega_0^2}{\lambda^2}} \sin \beta . \end{aligned}$$

ceci pour tout angle  $\beta$ . L'énergie associée à ces points vaut:

$$E = -\frac{\omega_0}{2} \left( \frac{\lambda^2}{4\omega\omega_0} + \frac{4\omega\omega_0}{\lambda^2} \right) . \quad (2.7)$$

La figure 2.1 montre la division du plan des paramètres  $\lambda$  et  $\epsilon$  ( $\lambda \in ]0, \infty[$ ,  $\epsilon \in [0, 1]$ ) en quatre différentes régions selon le nombre de points d'équilibre qui y sont autorisés. Le découpage suit les branches d'hyperboles décrites par les conditions  $\lambda^+ = \sqrt{\omega\omega_0}$  et  $\lambda^- = \sqrt{\omega\omega_0}$ . Une première région ne compte que les points  $A_1$  et  $A_2$ ; dans une seconde (qui contient le cas du spin-boson  $\epsilon = 1$ , pour grands couplages) s'ajoutent les points  $B_1$  et  $B_2$ , et dans une troisième les points  $C_1$  et  $C_2$ . Tandis que la région correspondant à une infinité de points fixes est constituée de la demi-droite  $\epsilon = 0$ ,  $\lambda \geq 2\sqrt{\omega\omega_0}$ .

### 2.2.3 Stabilité

La stabilité d'un point d'équilibre  $\mathbf{x}_0$  est déterminée par l'étude de l'évolution temporelle de son voisinage. Soit  $\Delta \mathbf{x}$  le vecteur qui repère un point quelconque  $\mathbf{x}$  du voisinage à partir du point fixe. Alors

$$\dot{\Delta \mathbf{x}} = \Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{W}(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) = \left. \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \Delta \mathbf{x} + O(\Delta \mathbf{x}^2) . \quad (2.8)$$

Soit  $\mathbf{B}$  la matrice constante  $\left. \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$ . Alors, au premier ordre en  $\Delta \mathbf{x}$ :

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{x} , \text{ d'où } \Delta \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{B}t} \Delta \mathbf{x} . \quad (2.9)$$

La stabilité sera assurée si la partie réelle de toutes les valeurs propres de  $\mathbf{B}$  est  $\leq 0$ . Dans notre cas:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 & -\lambda^- & 0 \\ -\omega & 0 & -\lambda^+ & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^- \mathcal{Z} & 0 & -\omega_0 & -\lambda^- p \\ -\lambda^- \mathcal{Z} & 0 & \omega_0 & 0 & -\lambda^+ q \\ \lambda^+ q & \lambda^- \mathcal{X} & \lambda^- p & \lambda^+ \mathcal{Y} & 0 \end{pmatrix} . \quad (2.10)$$

Soit  $D(\tau) = \det(\mathbf{B} - \tau \mathbf{1})$  le polynôme de degré 5 en  $\tau$  dont les racines sont les valeurs propres de  $\mathbf{B}$ .

Pour chacun des point fixes,  $D(\tau)$  a la forme:

$$D(\tau) = -\tau (\tau^4 + b\tau^2 + c) , \quad (2.11)$$

où les constantes  $b$  et  $c$  dépendent évidemment du point fixe étudié.

La première valeur propre, triviale et commune à tous les points est  $\tau_1 = 0$ . Elle est le reflet de la contrainte qui impose aux variables  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  et  $\mathcal{Z}$  de se mouvoir sur une sphère.

Il reste alors une équation bicarrée en  $\tau$  dont les racines sont soit du type:  $\tau_2, \tau_3 = \bar{\tau}_2, \tau_4 = -\tau_2, \tau_5 = -\bar{\tau}_2$ , si  $\tau_2$  a une partie réelle et une partie imaginaire non nulles; soit du type:  $\tau_2, \tau_3 \neq \bar{\tau}_2, \tau_4 = -\tau_2, \tau_5 = -\tau_3$ , si  $\tau_2$  et  $\tau_3$  sont réelles ou imaginaires. Comme la stabilité nécessite  $\Re(\tau_i) \leq 0, \forall i$ ,  $\tau_2$  et  $\tau_3$  doivent être imaginaires (ou nulles). C'est-à-dire que:

$$u_{2,3} \equiv \tau_{2,3}^2 \in \mathbb{R}^- \cup \{0\} .$$

A l'aide de ces nouvelles variables, l'équation aux valeurs propres est:

$$u_{2,3}^2 + bu_{2,3} + c = 0 , \quad (2.12)$$

et ses solutions sont:

$$u_{2,3} = \frac{1}{2} \left( -b \pm \sqrt{b^2 - 4c} \right) . \quad (2.13)$$

Les paramètres devront satisfaire les trois conditions suivantes:

$$b^2 - 4c \geq 0 , \quad b \geq 0 , \quad c \geq 0 , \quad (2.14)$$

la première assurant la réalité de  $u_{2,3}$ , les deux dernières sa négativité.

• Point fixe  $A_1$  : Le déterminant vaut:

$$D(\tau) = -\tau \left\{ \tau^4 + \tau^2 (\omega^2 + \omega_0^2 + 2\lambda^+ \lambda^-) + \omega^2 \omega_0^2 + \lambda^{+2} \lambda^{-2} - \omega \omega_0 (\lambda^{+2} + \lambda^{-2}) \right\} . \quad (2.15)$$

Les trois conditions de stabilité sont satisfaites pourvu que:

$$(\lambda^{+2} - \omega \omega_0) (\lambda^{-2} - \omega \omega_0) \geq 0 . \quad (2.16)$$

C'est-à-dire pourvu que, soit:

$$\lambda^+ \text{ et } \lambda^- \leq \sqrt{\omega \omega_0} ,$$

soit:

$$\lambda^+ \text{ et } \lambda^- \geq \sqrt{\omega \omega_0} .$$

Ces conditions correspondent respectivement à la première ( $A_1$  et  $A_2$  comme seuls points fixes) et la troisième zone ( $A_1, A_2, B_{1,2}$  et  $C_{1,2}$  comme points fixes) de la figure 2.1. C'est donc dans la seconde (où coexistent les points  $A_1, A_2$ , et  $B_{1,2}$ ) que le point d'équilibre  $A_1$  est instable.

• Point fixe  $A_2$  : Le déterminant vaut:

$$D(r) = -r \left\{ r^4 + r^2 (\omega^2 + \omega_0^2 - 2\lambda^+ \lambda^-) + \omega^2 \omega_0^2 + \lambda^{+2} \lambda^{-2} + \omega \omega_0 (\lambda^{+2} + \lambda^{-2}) \right\}. \quad (2.17)$$

Les conditions de stabilité imposent que:

$$\lambda \leq |\omega - \omega_0| \left( 1 - \left( \frac{\omega - \omega_0}{\omega + \omega_0} \right)^2 \epsilon^2 \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.18)$$

Les paramètres  $\lambda$  et  $\epsilon$  doivent appartenir au domaine hachuré représenté graphiquement en figure 2.2. Cette condition, contrairement à celle qui détermine la stabilité de  $A_1$ , est indépendante des conditions d'existence des autres points fixes. Dans le cas résonant ( $\omega = \omega_0$ ), ce point fixe est instable pour tout ensemble de paramètres  $\lambda$  et  $\epsilon$  non nuls.

• Points fixes  $B_{1,2}$  : Le déterminant vaut:

$$D(r) = -r \left\{ r^4 + r^2 \left( \omega^2 + 2\omega\omega_0 \frac{\lambda^-}{\lambda^+} + \frac{\lambda^{+4}}{\omega^2} \right) + \left( \lambda^{+2} - \left( \frac{\omega\omega_0}{\lambda^+} \right)^2 \right) (\lambda^{+2} - \lambda^{-2}) \right\}, \quad (2.19)$$

et remplit les conditions de stabilité, quel que soit l'ensemble des paramètres (compatible bien sûr avec la condition d'existence du point fixe).

• Points fixes  $C_{1,2}$  : Le déterminant vaut:

$$D(r) = -r \left\{ r^4 + r^2 \left( \omega^2 + 2\omega\omega_0 \frac{\lambda^+}{\lambda^-} + \frac{\lambda^{-4}}{\omega^2} \right) - \left( \lambda^{-2} - \left( \frac{\omega\omega_0}{\lambda^-} \right)^2 \right) (\lambda^{+2} - \lambda^{-2}) \right\}, \quad (2.20)$$

expression qui viole la troisième condition de stabilité, pour toute valeur de  $\epsilon$  strictement positive. Ces points sont instables en toute circonstance.

Dans le cas intégrable, l'ensemble continu de points fixes est stable. Les conditions de stabilité relatives aux points d'équilibre  $B$  et  $C$  sont alors confondues;

et satisfaites trivialement car le terme constant de (2.19) (ou de (2.20)) s'annule ( $\lambda^+ = \lambda^-$ ).

## 2.2.4 Energie et position

L'énergie minimale du système correspond nécessairement à celle d'un des points fixes stables. Lorsque n'existent que deux points fixes, il est clair que  $A_1$  sera le point d'énergie minimale ( $E_{A_1} = -\omega_0$ ).

L'énergie des points fixes  $B_{1,2}$  et  $C_{1,2}$  s'écrit de manière identique en fonction de la valeur que prend la variable  $\mathcal{Z}$  en ces points (respectivement  $\mathcal{Z}_B$  et  $\mathcal{Z}_C$ ):

$$E_{B,C} = \frac{\omega_0}{2} \left( \mathcal{Z}_{B,C} + \frac{1}{\mathcal{Z}_{B,C}} \right). \quad (2.21)$$

$\mathcal{Z}_{B,C}$  est toujours négative et nécessairement  $\geq -1$ . Une brève étude de la fonction  $E_{B,C}(\mathcal{Z}_{B,C})$  montre qu'elle prend la valeur  $-\omega_0$  lorsque  $\mathcal{Z}_{B,C} = -1$ , qu'à cet endroit sa dérivée est nulle, et qu'elle est monotone décroissante sur l'intervalle  $[-1, 0[$  avec asymptote verticale en  $\mathcal{Z}_{B,C} = 0$ . Comme  $\lambda^+ \geq \lambda^-$ , pour toutes valeurs de  $\lambda$  et  $\epsilon$ , donc comme  $\mathcal{Z}_B \geq \mathcal{Z}_C$ , l'énergie associée aux points  $B_{1,2}$  est toujours inférieure tant à celle du point  $A_1$  qu'à celle des points  $C_{1,2}$ . Elle est donc énergie minimale.

Cette analyse est illustrée par la figure 2.3 où nous représentons graphiquement l'énergie de chacun des points d'équilibre et leur stabilité en fonction de  $\lambda$ , ceci pour des valeurs fixées de  $\epsilon$  ( $0 < \epsilon < 1$ ) de  $\omega$  et de  $\omega_0$ . Dans ce dessin comme dans les suivants, les traits gras correspondent aux régimes stables et les traits bachés aux régimes instables. En  $\lambda_{A_2} = \{\omega - \omega_0\} / \sqrt{1 - (\omega - \omega_0)^2 \epsilon^2 / (\omega + \omega_0)^2}$ , le point  $A_2$  perd sa stabilité. En  $\lambda_B = 2\sqrt{\omega\omega_0}/(1 + \epsilon)$  et en  $\lambda_C = 2\sqrt{\omega\omega_0}/(1 - \epsilon)$  apparaissent respectivement les points  $B$  et  $C$ .

Enfin, les figures 2.4 présentent la position dans le plan  $O_{xy}$  des points d'équilibre  $A_1, B_{1,2}$  et  $C_{1,2}$  en fonction de  $\lambda$ . De telles courbes peuvent s'analyser en utilisant la notion de bifurcation. Par définition, une bifurcation est une modification qualitative du comportement d'un système qui apparaît lorsque l'un des paramètres qui le décrivent atteint une valeur critique. Pour  $0 < \epsilon < 1$  (a), la branche stable  $A_1$  se déstabilise en  $\lambda_B$ , et donne naissance aux deux branches stables  $B$  ( $B_1$  pour les  $\mathcal{X}$  positifs,  $B_2$  pour les  $\mathcal{X}$  négatifs; cette distinction n'est pas spécifiée sur le graphe). Puis elle se stabilise à nouveau en  $\lambda_C$ , alors qu'apparaissent les deux branches instables  $C$  ( $C_1$  pour les  $\mathcal{Y}$  positifs,  $C_2$  pour les  $\mathcal{Y}$  négatifs). Dans le cas où  $\epsilon = 0$  (b), les deux points critiques sont confondus en un seul  $\lambda_{BC} = 2\sqrt{\omega\omega_0}$  où la branche stable se transforme en une branche instable et une famille continue de solutions stables. En  $\lambda_B$ , on parle en général d'une bifurcation surcritique stable, en  $\lambda_C$ , d'une bifur-

cation surcritique instable et en  $\lambda_{BC}$ , d'une bifurcation de Hopf [28].

Ces diagrammes montrent clairement de quelle manière la symétrie du système dans le cas intégrable se brise lorsque  $\epsilon$  prend des valeurs non nulles. C'est l'origine du terme de "paramètre d'anisotropie" que l'on rencontre parfois pour le désigner.

## 2.3 Sections de Poincaré

Dans l'optique d'une comparaison avec ce qu'on définira plus loin comme section de Poincaré des distributions de Husimi, la façon la plus judicieuse de construire une section de Poincaré classique est d'utiliser comme horloge la composante  $\mathcal{Z}$  du spin et de considérer les points dans le plan de phase de l'oscillateur harmonique. Comme l'illustre la figure 2.5, l'évolution du système peut être représentée par deux trajectoires conjointes. L'une,  $\mathbf{x}_a(t)$ , parcourt la sphère  $S^2$ , et l'autre,  $\mathbf{x}_b(t)$ , le plan  $\mathbb{R}^2$ . A chaque intersection  $x_{a,i}$ ,  $i = 1, \dots, n, \dots$  de  $\mathbf{x}_a(t)$  avec le parallèle  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0$  dans un sens déterminé par le signe de  $\dot{\mathcal{Z}}$ ,  $\mathbf{x}_b(t)$  laisse une trace ponctuelle  $x_{b,i}$  dans le plan. L'ensemble de ces points constituera la section de Poincaré.

Le choix des paramètres impose des restrictions aux choix de l'énergie et du parallèle-horloge; et une fois fixés, ceux-ci vont déterminer la localisation possible des points de la section dans le plan de phase  $(q, p)$ . Nous discuterons ces différentes contraintes dans un premier paragraphe.

Après quoi suivra une étude numérique de l'influence des paramètres  $\lambda$  et  $\epsilon$  dans une transition de la régularité au chaos. Nous présenterons une description des programmes et du choix d'un critère qui permet d'obtenir des informations raisonnables sur le degré d'ordre du système. Et pour conclure, nous discuterons la structure de quelques sections de Poincaré illustrant le processus de transition par rapport aux prédictions obtenues plus haut.

Durant toute cette partie, le rayon de la sphère décrite par les variables de spin restera fixé à  $S = 1$ .

### 2.3.1 Structure des sections

Le problème quantique se pose souvent sous la forme suivante: dans un premier temps, l'ensemble des paramètres du hamiltonien qu'on diagonalise est fixé. Puis on choisit une fonction propre d'énergie déterminée et une composante du spin pour construire ce qu'on appelle une section réduite (4.53). La démarche classique équivalente consisterait à choisir préalablement l'ensemble des paramètres, puis l'énergie  $E_0$  et le parallèle-horloge donné  $\mathcal{Z}_0$  qui vont caractériser les sections de Poincaré.

Une première question se pose: quelles sont les énergies et les parallèles-horloge compatibles avec le choix préalable des paramètres? En d'autres termes, il s'agit de savoir s'il existe un ensemble de variables  $\{q, p, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}_0\}$  et des grandeurs conservées  $\{E_0, S = 1\}$ , solutions de l'équation:

$$\frac{\omega}{2} (q^2 + p^2) + \omega_0 \mathcal{Z}_0 + \lambda^+ q \mathcal{X} - \lambda^- p \mathcal{Y} = E_0 . \quad (2.22)$$

Pour simplifier l'écriture, introduisons les grandeurs:

$$\mathcal{R}_0 = \sqrt{1 - \mathcal{Z}_0^2}, \quad E'_0 = \frac{2}{\omega}(E_0 - \omega_0 \mathcal{Z}_0), \quad \Lambda^\pm = \mathcal{R}_0 \frac{\lambda^\pm}{\omega}.$$

Les variables  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  dépendent alors du seul angle  $\varphi_z$ :

$$\mathcal{X} = \mathcal{R}_0 \cos \varphi_z, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{R}_0 \sin \varphi_z, \quad (2.23)$$

et l'équation (2.22) peut s'écrire:

$$(q - q_0(\varphi_z))^2 + (p - p_0(\varphi_z))^2 - R^2(\varphi_z) = 0, \quad (2.24)$$

avec les nouvelles grandeurs:

$$\begin{aligned} q_0(\varphi_z) &= -\Lambda^+ \cos \varphi_z \\ p_0(\varphi_z) &= \Lambda^- \sin \varphi_z \\ R^2(\varphi_z) &= E'_0 + \Lambda^{+2} \cos^2 \varphi_z + \Lambda^{-2} \sin^2 \varphi_z. \end{aligned}$$

Ce résultat signifie que dans le plan  $(q, p)$ , l'ensemble des points de la section de Poincaré est une famille de cercles paramétrés par l'angle  $\varphi_z$ , de rayon  $R(\varphi_z)$  et de centres  $(q_0(\varphi_z), p_0(\varphi_z))$ . En fait,  $\varphi_z$  détermine la position sur la sphère de l'intersection de la trajectoire avec le parallèle-horloge.

L'équation (2.24) montre que la seule restriction possible sur l'ensemble de grandeurs fixées provient du fait que  $R^2(\varphi_z)$  est susceptible de prendre des valeurs négatives. La condition de réalité de  $R(\varphi_z)$  impose une borne inférieure à l'énergie. Nous allons d'abord chercher l'énergie minimale pour laquelle il existe un angle  $\varphi_z$ , tel que  $R^2(\varphi_z) \geq 0$ . Comme  $\Lambda^+ \geq \Lambda^-$ , on a toujours  $\Lambda^{+2} \cos^2 \varphi_z + \Lambda^{-2} \sin^2 \varphi_z \leq \Lambda^{+2}$ . Alors:

$$E'_0 \geq -\Lambda^{+2} \implies E_0 \geq \omega_0 \mathcal{Z}_0 - (1 - \mathcal{Z}_0^2) \frac{\lambda^{+2}}{2\omega}. \quad (2.25)$$

Cette énergie dépend donc du parallèle choisi pour la section. La figure 2.6 montre dans le plan  $(E_0, \mathcal{Z}_0)$  la région pour laquelle une section de Poincaré est réalisable. Le cas où le point fixe  $A_1$  est état fondamental est représenté en (a). Et en (b), le cas où les points fixes  $B$  tiennent ce rôle. Dans les deux cas, la ligne frontière est une parabole donnée par (2.25), et seule la position du minimum diffère relativement au domaine considéré ( $E_0 \in ]-\infty, \infty[$ ,  $\mathcal{Z}_0 \in [-1, 1]$ ). Le minimum absolu en énergie correspond bien sûr à l'énergie fondamentale ( $-\omega_0$  en (a), et  $E_B$  (2.21) en (b)). Dans les deux cas encore, l'énergie à partir de laquelle une section de Poincaré est réalisable quelle que soit la valeur de  $\mathcal{Z}_0$  est  $\omega_0$ .

Pour  $E_0$  et  $\mathcal{Z}_0$  fixés, la condition de réalité du rayon impose cette fois des contraintes sur les angles  $\varphi_z$  accessibles:

$$\sin^2 \varphi_z \leq \frac{E'_0 + \Lambda^{+2}}{\Lambda^{+2} - \Lambda^{-2}}. \quad (2.26)$$

Une autre question relative au problème quantique est pertinente. Quelle est l'extension maximale des sections de Poincaré classiques? Concrètement, il faut qu'avec les paramètres choisis, la base d'états quantiques permette dans une représentation sur l'espace de phase de rendre compte de toute l'extension des trajectoires classiques. Nous devons donc estimer  $\max(q^2 + p^2)$ , pour un ensemble de paramètres, une énergie et un parallèle-horloge fixés, sur l'ensemble des  $(q, p)$  compatibles avec une section de Poincaré. L'équation (2.24) indique clairement que cette grandeur prend son maximum pour le cercle centré sur l'axe  $Oq$ , puisqu'alors les rayons du cercle lui-même et du cercle décrit par les centres sont maximum ( $\Lambda^+ \geq \Lambda^-$ ). On aura donc:

$$q_{\max} = \Lambda^+ + \sqrt{E_0 + \Lambda^{+2}}.$$

Il est utile d'obtenir une valeur unique de cette expression, valable pour toute section réduite, donc pour toute valeur de  $Z_0$ . Plutôt que de maximiser  $q_{\max}$  en fonction de  $Z_0$ , on peut se contenter pratiquement d'y introduire les inégalités  $|Z_0| \leq 1$  et  $\mathcal{R}_0 \leq 1$ . On trouve alors:

$$q_{\max} \leq \frac{1}{\omega} \left( \lambda^+ + \sqrt{2\omega(E_0 + \omega_0) + \lambda^{+2}} \right). \quad (2.27)$$

Cette estimation sera utilisée pour contrôler l'ensemble des paramètres quantiques au chapitre 4.

Nous pouvons généraliser le raisonnement et chercher l'équation de l'enveloppe de la famille de cercles (2.24). Il s'agit de calculer l'intersection d'un cercle avec l'un de ses voisins infinitésimalement proche. Dans le cas général d'une famille paramétrée par  $t$ :

$$(x - x_c(t))^2 + (y - y_c(t))^2 - r^2(t) = 0,$$

on trouve l'équation paramétrique de l'enveloppe:

$$\begin{aligned} x_e(t) &= x_c(t) - r(t) \left( r'(t) \cos \xi(t) + \sqrt{1 - r'^2(t)} \sin \xi(t) \right) \\ y_e(t) &= y_c(t) + r(t) \left( -r'(t) \sin \xi(t) + \sqrt{1 - r'^2(t)} \cos \xi(t) \right), \end{aligned} \quad (2.28)$$

avec les définitions:

$$\tan \xi(t) = \frac{\dot{y}_c(t)}{\dot{x}_c(t)}, \quad r'(t) = \frac{\dot{r}(t)}{\sqrt{\dot{x}_c^2(t) + \dot{y}_c^2(t)}}.$$

$r'(t)$  est la dérivée du rayon par rapport à l'élément de longueur sur la courbe  $(x_c(t), y_c(t))$  que décrivent les centres, et  $\xi(t)$  l'angle entre l'axe des  $x$  et la tangente à cette même courbe. La racine qui apparaît en (2.28) n'est réelle que si  $|r'(t)| \leq 1$ , ce qui signifie simplement que si la croissance du rayon est plus forte

que la vitesse de déplacement du centre, deux cercles voisins ne vont pas se couper. Lorsque  $|r'(t)| = 1$ , l'enveloppe présente un point où les cercles de la famille sont tangents. Dans le cas où la solution de  $|r'(t)| - 1 = 0$  est isolée, le cercle satisfaisant cette dernière équation complètera l'enveloppe. Dans le cas où  $|r'(t)| \equiv 1$  pour un intervalle continu du paramètre  $t$ , c'est le plus grand des cercles dont le paramètre appartient à l'intervalle qui complètera l'enveloppe.

Pour le système spin-boson, l'enveloppe a l'allure suivante:

$$\begin{aligned} q_z(\varphi_z) &= -\Lambda^+ \cos \varphi_z \\ &\quad - R(\varphi_z) \left( R'(\varphi_z) \cos \xi(\varphi_z) + \sqrt{1 - R'^2(\varphi_z)} \sin \xi(\varphi_z) \right) \\ p_z(\varphi_z) &= \Lambda^- \sin \varphi_z \\ &\quad + R(\varphi_z) \left( -R'(\varphi_z) \sin \xi(\varphi_z) + \sqrt{1 - R'^2(\varphi_z)} \cos \xi(\varphi_z) \right), \quad (2.29) \end{aligned}$$

avec cette fois:

$$\tan \xi(\varphi_z) = \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} (\tan \varphi_z)^{-1}, \quad R'(\varphi_z) = -\frac{1}{R(\varphi_z)} \frac{(\Lambda^{+2} - \Lambda^{-2}) \sin \varphi_z \cos \varphi_z}{\sqrt{\Lambda^{+2} \sin^2 \varphi_z + \Lambda^{-2} \cos^2 \varphi_z}}.$$

La condition à respecter pour que  $R'^2(\varphi_z)$  soit toujours inférieur ou égal à 1 est la suivante:

$$E_0' \left( \Lambda^{+2} \sin^2 \varphi_z + \Lambda^{-2} \cos^2 \varphi_z \right) + \Lambda^{+2} \Lambda^{-2} \geq 0. \quad (2.30)$$

Des cas limites ne peuvent donc survenir que si  $E_0' \leq 0$ .

### 2.3.2 Etude numérique

#### Transition régularité - chaos

Notre idée de base est d'étudier l'influence des paramètres  $\lambda$  et  $\epsilon$  sur la transition du système de l'ordre au chaos, les autres paramètres et l'énergie étant maintenus constants. Mais qu'entend-on exactement par ce terme de "transition d'ordre au chaos"? Comme le précise volontiers Gutzwiller ([29], par exemple), la plupart des systèmes physiques ne sont classables ni parmi les systèmes intégrables ni parmi ceux qui n'exhibent que des solutions chaotiques, mais présentent un mélange des caractéristiques des uns et des autres. C'est-à-dire que pour un ensemble de paramètres et un ensemble de grandeurs conservées fixes, une condition initiale particulière va générer une trajectoire qui possède toutes les propriétés d'un système intégrable (plus grand exposant de Lyapunov  $\leq 0$ , section de Poincaré confinée à la section unidimensionnelle d'un tore), alors qu'une condition initiale voisine donnera une trajectoire

chaotique (existence d'un exposant de Lyapunov  $> 0$ , section de Poincaré répandue sur un domaine bidimensionnel).

Nous tenterons de délimiter dans le plan  $(\lambda, \epsilon)$  et pour  $\omega, \omega_0, E_0$  et  $Z_0$  fixés, les zones pour lesquelles toutes les trajectoires sont régulières, celles pour lesquelles toutes sont chaotiques, et enfin celles où cohabitent des trajectoires des deux types. La méthode utilisée consiste à calculer les sections de Poincaré des trajectoires associées à un ensemble représentatif de conditions initiales. Plus le nombre de sections considéré est important, plus le critère sera fiable. Le tout est d'estimer un nombre tel que l'information contenue dans l'ensemble des sections soit significative, et tel que l'expérimentation soit envisageable sans surcharger la machine.

Pour  $\omega, \omega_0, \lambda, \epsilon, E_0$  et  $Z_0$  fixés, nous choisissons un ensemble de points  $(q, p)$  répartis selon un quadrillage régulier dans le demi-plan  $q \geq 0$ , comme le suggère la symétrie (1.33). Les relations (2.24) et (2.26) permettent de déterminer si un point est susceptible ou non d'appartenir à une section de Poincaré, donc d'être considéré comme condition initiale d'une trajectoire. Il faut que le nombre de conditions initiales soit proche d'un nombre jugé optimal. La maille du quadrillage peut être variée en conséquence.

L'intégration utilise un algorithme de Runge-Kutta au quatrième ordre (sous-programme en double précision DRKSTP de la bibliothèque du CERN). La composante  $Z$  est testée à chaque pas et si elle traverse le parallèle fixé par  $Z_0$  dans un sens déterminé, alors le point de la section sera calculé par interpolation linéaire. La stabilité des trajectoires est vérifiée régulièrement par contrôle de la constance des grandeurs conservées.

Par estimations successives, il est possible de tracer deux courbes limites dans le plan  $(\lambda, \epsilon)$ . L'une correspond à l'apparition de la "première" section chaotique, l'autre à la disparition du "dernier" tore régulier. La figure 2.7 représente les points qui se trouvent sur les frontières entre les différentes zones ("Δ" pour la frontière régularité - région mixte, "∇" pour la frontière région mixte - chaos total), et en pointillé des courbes d'interpolation. Les paramètres fixes sont  $\omega = \omega_0 = 1.0$ ,  $E_0 = 0.0$ ,  $Z_0 = 0.0$ . Le point  $(E_0 = 0.0, Z_0 = 0.0)$  des figures 2.6 appartient toujours à la région où une section est possible. Les points notés "\*" constituent un échantillon d'ensembles de paramètres dont les sections seront représentées en figure 2.8.

Le rôle de  $\lambda$  ou d' $\epsilon$  comme paramètre d'ordre du système (ou comme paramètre pouvant supporter à lui seul une transition de l'ordre au chaos) est confirmé. Pour  $\lambda$  constant,  $\epsilon$  peut prendre des valeurs qui situent le système dans les trois zones distinctes (voir les points (a), (e) et (f)). Et de même si l'on intervertit les rôles de  $\lambda$  et d' $\epsilon$  (voir les points (b), (c) et (f)). Les courbes d'interpolation ressemblent à des branches d'hyperboles. C'est donc plutôt le produit de ces constantes (plus précisément un produit du type  $(\lambda - \lambda_0)(\epsilon - \epsilon_0)$ ) qui est le véritable paramètre d'ordre.

La superposition à ce graphe des courbes qui décrivent l'apparition des points

fixes ne serait pas très révélatrice. Sans doute leur énergie est-elle trop éloignée de celle des sections choisies pour qu'une quelconque influence puisse se faire sentir.

Le graphe est limité par la droite  $\lambda = 3$ , car pour de grandes valeurs de ce paramètre, l'intégration des équations ne garantit plus une très grande précision.

Une discussion s'impose sur les performances du critère choisi. Selon le théorème de KAM, la "première trajectoire chaotique" apparaît dès que le système n'est plus intégrable, c'est-à-dire pour tout ensemble de paramètres tous strictement positifs. Mais si alors un certain nombre de ces trajectoires sont chaotiques, d'une part elles sont très minoritaires et d'autre part elles peuvent être si étroitement confinées entre les tores qui subsistent qu'un simple examen des sections de Poincaré ne suffit pas à les déceler. Notre critère permet de découvrir la première trajectoire chaotique clairement distincte d'une trajectoire régulière et sélectionnée dans le quadrillage. Ce critère est essentiellement qualitatif, car en dernier lieu, c'est à nous qu'il revient d'apprécier si une section est chaotique ou ne l'est pas.

Les propriétés ergodiques des trajectoires chaotiques nous offrent un outil plus performant pour détecter les "derniers tores réguliers". En effet, s'il subsiste dans l'ensemble des sections des îlots où ne pénètrent pas les trajectoires chaotiques, alors ce sera le signe certain que toutes ne le sont pas, et qu'à l'intérieur de l'îlot, des tores existent encore. La démarcation devrait être plus précise.

Nous avons tracé assez approximativement une courbe d'interpolation des points qui selon notre critère sont situés sur les limites entre les différentes zones. Mais rien ne prouve que les frontières réelles dessinent une courbe continue, ou qu'il n'existe pas d'enclaves.

### Nature des sections

Les figures 2.8 sont un choix de sections prises dans les différentes zones de la figure 2.7. Elles permettent de concrétiser le critère qui nous a permis de définir une transition. Leur localisation varie considérablement selon les paramètres qui les caractérisent. L'explication réside à la fois dans l'équation (2.24) désignant la famille de cercles qui représente l'ensemble des points possibles pour la section et dans les équations (2.29) qui décrivent l'enveloppe de cette famille. Pour les sections choisies:

$$E_0 = 0, \quad Z_0 = 0 \quad \implies \quad E'_0 = 0, \quad \mathcal{R}_0 = 1.$$

• Système spin-boson :

$$\epsilon = 1 \quad \implies \quad \Lambda^+ = \frac{\lambda}{\omega} \equiv \Lambda, \quad \Lambda^- = 0.$$

Alors (2.24) donne:

$$(q + \Lambda \cos \varphi_x)^2 + p^2 - \Lambda^2 \cos^2 \varphi_x = 0, \quad (2.31)$$

qui est un ensemble de cercles centrés sur l'axe  $O_q$  et dont le rayon vaut l'abscisse de la position du centre. Donc tous sont tangents à l'axe  $O_p$ , et chacun est tangent à tous les autres. Dans ce cas l'enveloppe sera le plus grand de ces cercles, de rayon  $\Lambda$ . La formule (2.29) ne permet pas ici d'obtenir ce résultat, car  $R'(\varphi_z) \equiv 1$ , pour tout angle  $\varphi_z$ , indice du point tangent multiple. Les figures (b), (c) et (f) sont proches de cet exemple.

• Cas intégrable:

$$\epsilon = 0 \implies \Lambda^+ = \Lambda^- = \frac{\lambda}{2\omega} \equiv \frac{\Lambda}{2} .$$

Alors (2.24) donne:

$$\left(q + \frac{\Lambda}{2} \cos \varphi_z\right)^2 + \left(p - \frac{\Lambda}{2} \sin \varphi_z\right)^2 - \frac{\Lambda^2}{4} = 0 , \quad (2.32)$$

qui est un ensemble de cercles de rayon  $\Lambda/2$  dont les centres décrivent un cercle lui aussi de rayon  $\Lambda/2$  et centré à l'origine. L'ensemble des sections sera donc inscrit dans un cercle de rayon  $\Lambda$  centré à l'origine. Ce résultat s'obtient également par (2.29):

$$\tan \xi = \frac{1}{\tan \varphi_z} , \quad R'(\varphi_z) \equiv 0 , \quad \forall \varphi_z \implies q_r = -\Lambda \cos \varphi_z , \quad p_r = \Lambda \sin \varphi_z .$$

La figure (a) illustre ce cas.

Le système compte un grand nombre de paramètres. Par conséquent, une étude complète de ses propriétés par rapport aux variations de tous les paramètres et dans toutes les limites possibles n'est pas envisageable. Les résultats présentés ici permettent de justifier la démarche effectuée dans le cas quantique et nous nous en contenterons.

## CHAPITRE 2

### LEGENDES DES FIGURES

- **Figure 2.1:** Division de l'espace des paramètres  $\lambda$  et  $\epsilon$ , relativement au nombre de points d'équilibre. Les fréquences propres  $\omega$  et  $\omega_0$  sont fixées. Dans chaque région figure le type de points fixes admis ( $A, B$ , ou  $C$ ).
- **Figure 2.2:** Division de l'espace des paramètres  $\lambda$  et  $\epsilon$ , en fonction de la stabilité du point d'équilibre  $A_2$ . Les fréquences propres  $\omega$  et  $\omega_0$  sont fixées. La zone hachurée correspond au domaine de stabilité.
- **Figure 2.3:** Energie des points fixes en fonction du couplage  $\lambda$ . La constante d'anisotropie  $\epsilon$  et les fréquences propres (non résonantes) sont fixées. Les traits gras correspondent à des points fixes stables, les traits "hachés" aux points fixes instables.
- **Figures 2.4:** Position dans le plan  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  des points fixes en fonction de  $\lambda$ , les fréquences sont fixées. En a),  $\epsilon$  prend une valeur finie. En b),  $\epsilon = 0$  (cas intégrable). Mêmes conventions qu'en figure 2.3 concernoant la stabilité.
- **Figures 2.5:** Schéma de la construction d'une section de Poincaré. Lorsque la trajectoire  $\mathbf{x}_s(t) \otimes \mathbf{x}_h(t)$  coupe l'hyperplan  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0$  dans un sens déterminé (donc lorsque  $\mathbf{x}_h(t)$  traverse le parallèle représenté), le point d'intersection est projeté en  $\mathbf{x}_{h,n}$  dans le plan de phase de l'oscillateur harmonique. L'ensemble des  $\mathbf{x}_{h,n}$  constitue la section de Poincaré.
- **Figures 2.6:** Division du plan  $(E_0, \mathcal{Z}_0)$  relativement à la possibilité de calculer des sections de Poincaré (région hachurée). En a), les seuls points fixes qui existent sont  $A_1$  et  $A_2$ . En b) existent également les points  $B_1$  et  $B_2$ , d'énergie  $E_B$ .
- **Figure 2.7:** Division expérimentale du plan  $(\lambda, \epsilon)$  en zones régulière, mixte et chaotique. Les " $\Delta$ " correspondent à l'apparition de la première section de Poincaré chaotique, les " $\nabla$ " à la disparition de la dernière section régulière. Les courbes pointillées sont de grossières interpolations. Les "\*" correspondent au choix de sections présentées en figure 2.6. Les fréquences sont résonantes:  $\omega = \omega_0 = 1.0$ ,  $E = 0.0$  et  $\mathcal{Z}_0 = 0.0$ .
- **Figures 2.8:** Choix de sections de Poincaré qui ont en commun:  $\omega = \omega_0 = 1.0$ ,  $E = 0.0$  et  $\mathcal{Z}_0 = 0.0$ .
  - a)  $\lambda = 2.0, \epsilon = 0.0$ . b)  $\lambda = 0.5, \epsilon = 0.8$ .
  - c)  $\lambda = 1.0, \epsilon = 0.8$ . d)  $\lambda = 1.3, \epsilon = 0.5$ .
  - e)  $\lambda = 2.0, \epsilon = 0.3$ . f)  $\lambda = 2.0, \epsilon = 0.8$ .



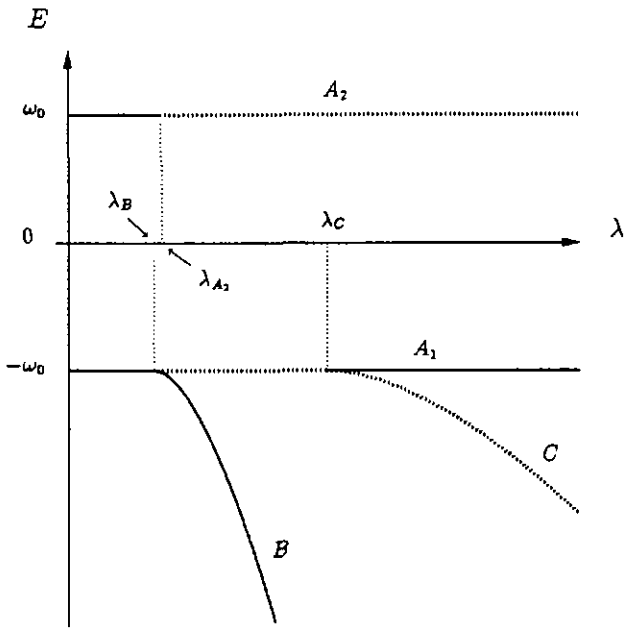


FIGURE 2.3

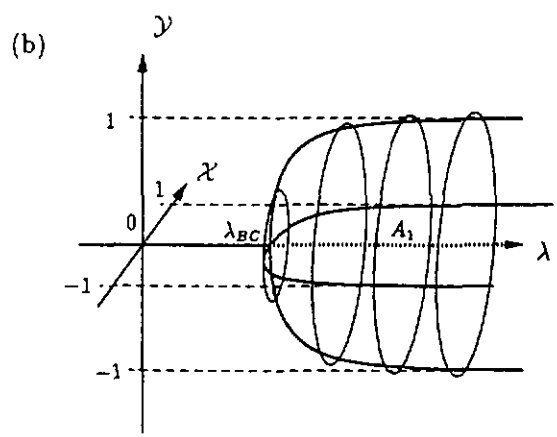
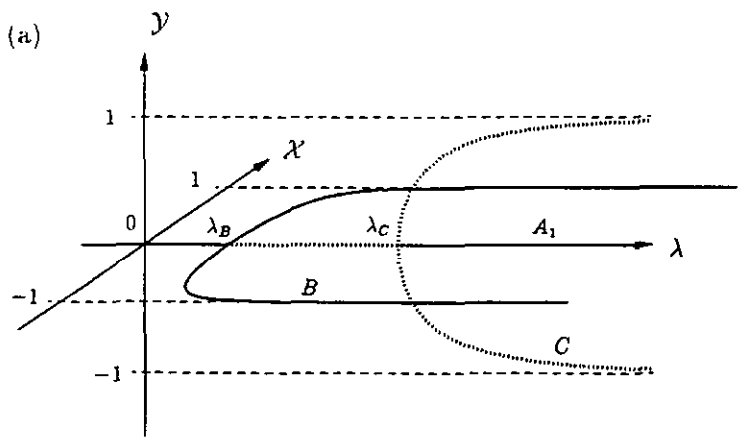


FIGURE 2.4

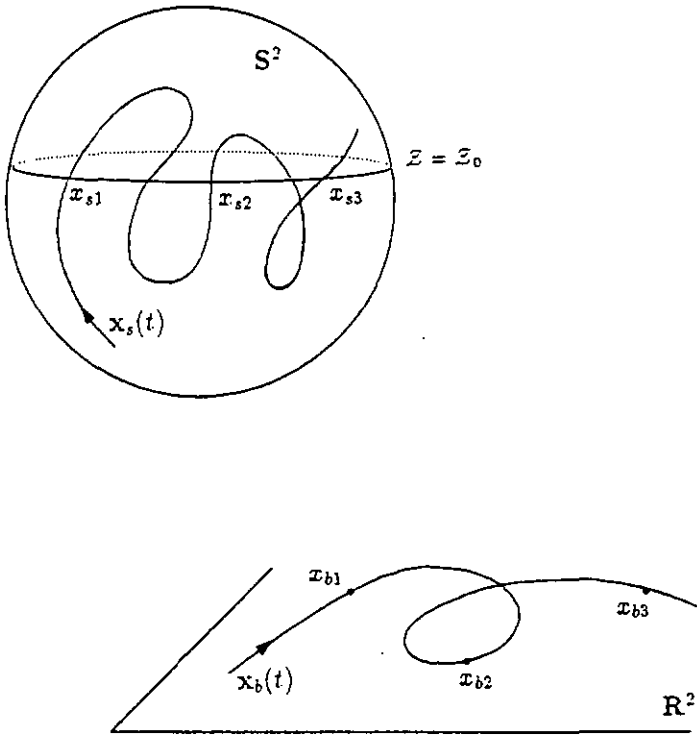


FIGURE 2.5

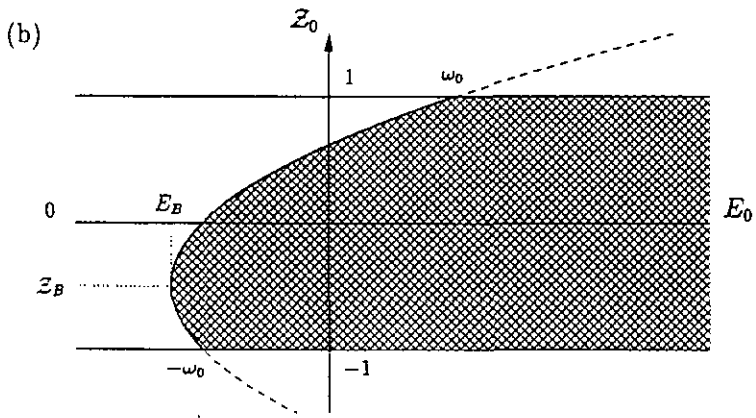
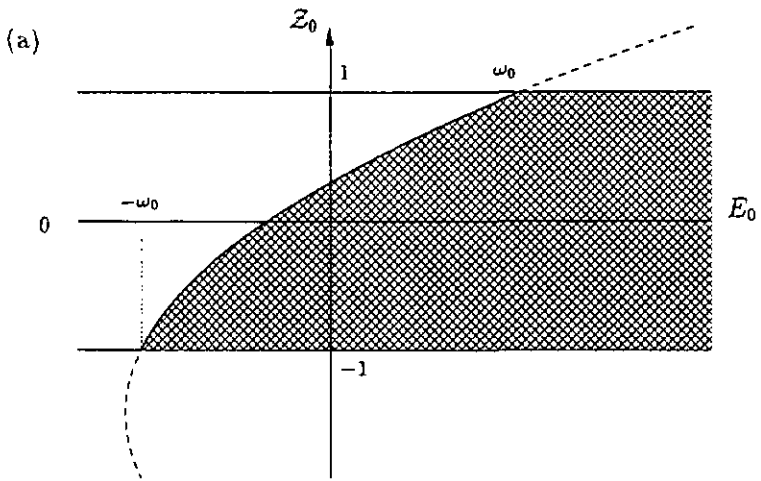


FIGURE 2.6

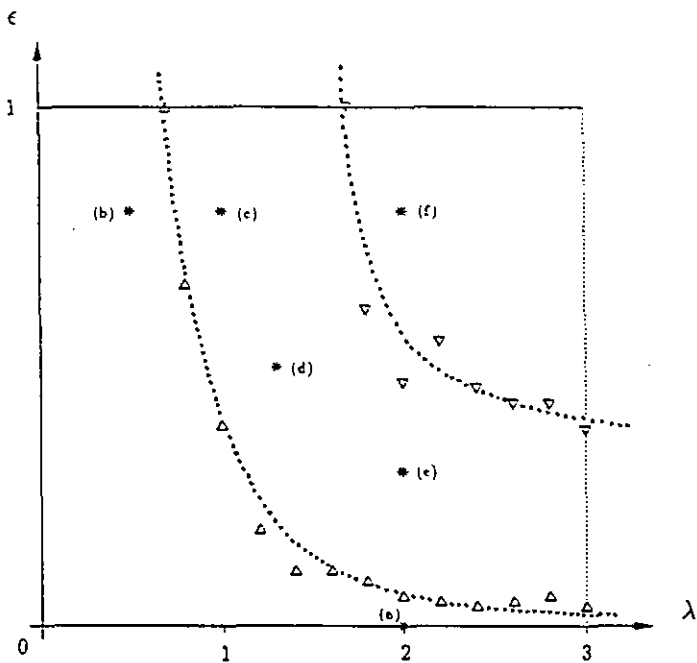


FIGURE 2.7

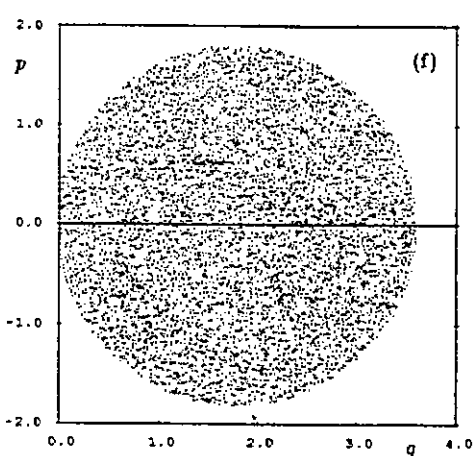
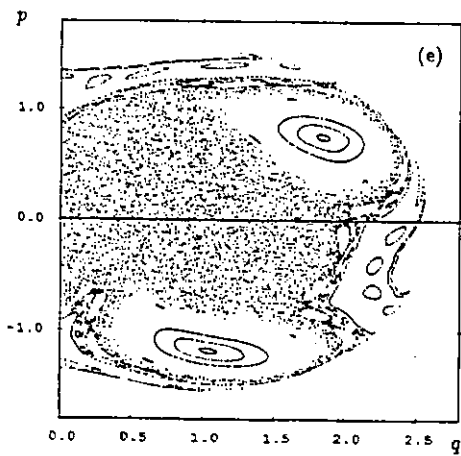
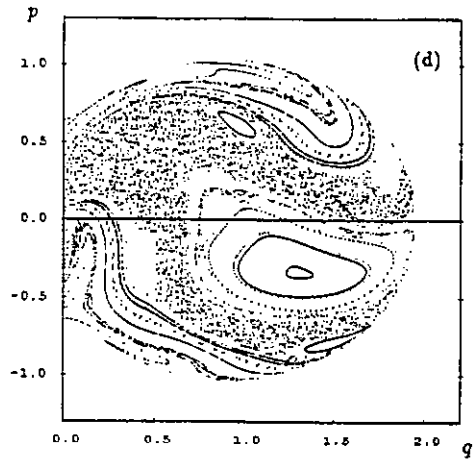
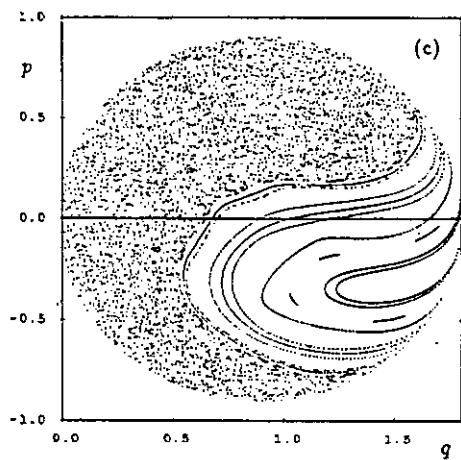
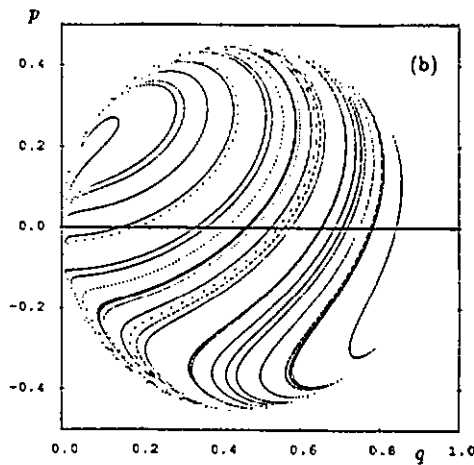
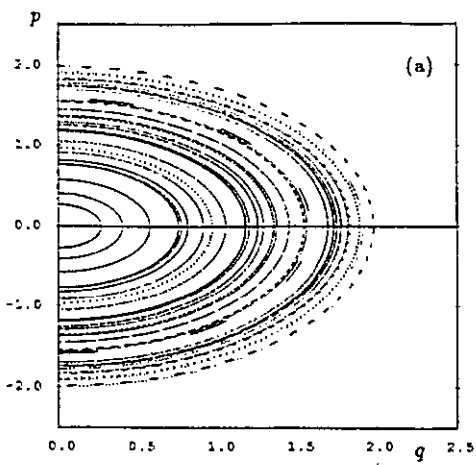


FIGURE 2.8

### 3 Limites classiques et semi-classiques

Ce chapitre est constitué de deux parties distinctes. Tout d'abord nous montrerons dans quel sens le hamiltonien :

$$\mathcal{H}_\epsilon(q, p, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2) + \omega_0 \mathcal{Z} + \lambda^+ q \mathcal{X} - \lambda^- p \mathcal{Y} \quad (3.1)$$

peut être considéré comme une limite classique du hamiltonien quantique :

$$H_\epsilon = \hbar \omega a^+ a + \hbar \omega_0 S_z + \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \frac{\lambda}{\hbar} \left\{ S_+ a + S_- a^+ + \epsilon (S_+ a^+ + S_- a) \right\}. \quad (3.2)$$

Dans une première section, nous montrerons comment associer une fonction de l'espace de phase classique, le Q-symbole, à un opérateur quantique en utilisant des états cohérents définis en conséquence. Nous montrerons qu'on peut construire ainsi une fonction classique qui décrit le spin, quel que soit son nombre quantique  $s$ ; mais nous vérifierons dans un cas simple que les propriétés de cette fonction correspondent à celles d'un spin dont le nombre quantique tend vers l'infini et dont l'espacement entre les niveaux, réglé par  $\hbar$ , tend vers 0 selon la loi  $\hbar s = S = \text{cste}$ . Dans cette limite, il existe également une fonction dérivée du hamiltonien décrivant un oscillateur harmonique quantique et qui reproduit parfaitement les propriétés de l'oscillateur harmonique classique. Nous montrerons que  $\mathcal{H}_\epsilon$  est le Q-symbole de  $H_\epsilon$ .

Le lien entre ces deux opérateurs peut être envisagé dans une perspective différente. Dans la première partie de la publication [30], nous avons montré que le système classique décrit par le hamiltonien  $\mathcal{H}_\epsilon$  peut également s'interpréter comme la limite pour un grand nombre  $N$  de spins  $1/2$  d'un système représentant l'interaction de ces spins avec un champ unimode. Ou plus exactement, la dynamique engendrée par le hamiltonien décrivant ce dernier système s'identifie dans cette limite aux équations de Hamilton issues de  $\mathcal{H}_\epsilon$ . Le point délicat de la démonstration est de justifier la factorisation des équations de Heisenberg, ce qui nécessite le recours à des techniques de physique statistique [31], [32].

Dans une seconde partie, nous mettrons l'accent sur ce que nous avons appelé limite semi-classique. En plus de son sens usuel [33], ce terme recouvre dans ce contexte le procédé qui consiste à considérer à la fois le spin purement quantique et le boson dans une limite proche de la limite classique.

Une section sera consacrée à une représentation possible des opérateurs de création et d'annihilation, la représentation "de la phase". Alors, la limite prend le sens d'un développement partiel des nouveaux opérateurs pour une grande excitation de l'oscillateur harmonique (ou, dans l'interprétation du modèle en terme de champs, d'un grand nombre de bosons). Nous montrerons que la dynamique obtenue par cette technique est identifiable aux équations de Heisenberg (1.22) issues de  $H_\epsilon$ .

Une dernière section propose de débattre du sens d'une limite hybride. En effet, il peut sembler contradictoire de considérer à la fois un objet quantique et un objet semi-classique alors que le concept s'articule autour de la seule valeur de la constante  $\hbar$ .

En fait, ces deux dernières sections constituent une introduction aux méthodes décrites dans le chapitre 4, où seront exposés les résultats concernant des traces quantiques de chaos. Elles sont néanmoins à leur place ici, puisque elles décrivent une manière de concevoir le concept de limite.

### 3.1 Etats cohérents et Q-symboles

Cette partie est exposée selon un schéma qui permettra de mettre en évidence les similarités et les différences dans les traitements respectifs du spin et du boson. C'est une formulation qui facilitera la construction des fonctions de Husimi qui sont au centre du chapitre 4. Après avoir énoncé les définitions des états cohérents et des Q-symboles, nous proposerons des applications à des systèmes simples, puis au modèle spin-boson généralisé. Enfin, nous discuterons des formes différentes sous lesquelles ce modèle apparaît dans la littérature.

#### 3.1.1 Etats cohérents

Les états cohérents sont des états quantiques qu'on construit souvent en leur imposant d'évoluer de manière semblable à un système classique élémentaire. Nous préférons une définition plus générale présentée en particulier par Perelomov [34], et qui s'applique aussi bien au spin qu'au boson.

Définition: Soient un groupe de Lie  $\mathcal{G} \ni g$ , un état fixe  $|\psi_0\rangle$  dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , et une représentation unitaire irréductible  $T(g)$  de  $\mathcal{G}$  agissant sur  $\mathcal{H}$ . A une relation d'équivalence près, un état cohérent  $|\psi_g\rangle$  appartenant à un système généralisé d'états cohérents  $\{T, |\psi_0\rangle\}$  est défini par :

$$|\psi_g\rangle = T(g)|\psi_0\rangle . \quad (3.3)$$

Deux états qui ne diffèrent que d'une phase sont physiquement équivalents. Deux éléments  $g_1$  et  $g_2$  de  $\mathcal{G}$  peuvent avoir des correspondants dans la représentation qui ne diffèrent également que d'une phase. Les états associés sont alors considérés comme équivalents. Un système généralisé d'états cohérents est complet sous quelques conditions générales de convergence qui sont satisfaites dans la plupart des cas, et en particulier dans ceux qui nous intéressent. Par conséquent, un état quelconque est entièrement défini par sa décomposition sur ce système.

Cependant tout système généralisé ne possède pas les mêmes propriétés. Notre intérêt se porte naturellement sur ceux dont le comportement dynamique évoque celui des systèmes classiques. Il existe un critère de choix de l'état  $|\psi_0\rangle$ , fondé sur les propriétés de l'algèbre de Lie associée au groupe  $\mathcal{G}$ , et qui permet de construire les états cohérents les plus proches des états classiques (et tels qu'ils correspondent aux définitions employées usuellement).

a) Etat cohérent de l'oscillateur harmonique

Le groupe de Lie qui va générer les états cohérents est le groupe de Heisenberg-Weyl  $W_1$ , dont les générateurs, éléments de l'algèbre de Lie  $\mathcal{W}_1$ , sont représentés par des combinaisons linéaires des opérateurs  $\hat{q}$  et  $\hat{p}$  et de l'identité, agissant sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} \simeq \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ . Ou sous une autre forme, par  $a, a^+$  et 1. Un élément de  $\mathcal{W}_1$  peut s'écrire de manière générale:

$$x = i\zeta 1 + \frac{i}{\hbar}(p\hat{q} - q\hat{p}) = i\zeta 1 + z_b a^+ - \bar{z}_b a. \quad (3.4)$$

La relation entre les opérateurs  $\hat{q}, \hat{p}$  et  $a, a^+$  fournit la valeur de  $z_b$  qui est une variable complexe sans unité:  $z_b = (q + ip)/\sqrt{2\hbar}$ . Les éléments du groupe s'obtiennent à partir de ceux de l'algèbre par exponentiation, et peuvent être représentés par:

$$e^x = e^{i\zeta 1} e^{z_b a^+ - \bar{z}_b a}. \quad (3.5)$$

Le critère de sélection de l'état fixe propose le vide  $|0\rangle$ . L'état cohérent s'écrit alors:

$$|\psi_p(\zeta, z_b, \bar{z}_b)\rangle = e^{i\zeta 1} e^{z_b a^+ - \bar{z}_b a} |0\rangle. \quad (3.6)$$

La première exponentielle n'introduit qu'un facteur de phase. Tandis que la partie en  $\bar{z}_b a$  modifie l'état d'un autre facteur qui correspond à la normalisation. La démonstration utilise la formule connue de l'exponentielle de la somme de deux opérateurs qui l'un et l'autre commutent avec leur commutateur commun, le développement de l'exponentielle et le fait que  $a^k |0\rangle = 0, \forall k \geq 1$ . On peut se contenter généralement d'une définition simplifiée, mais qui ne fournit pas un état normé:

$$|\psi_p(z_b)\rangle = e^{z_b a^+} |0\rangle \equiv |z_b\rangle. \quad (3.7)$$

En développant sur la base de l'oscillateur harmonique, il suit :

$$|z_b\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_b^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.8)$$

L'état normalisé sera qualifié d'un indice  $N$ . Comme  $\langle z_b | z_b \rangle = \exp(|z_b|^2)$ , il suit:

$$|z_b\rangle_N = e^{-|z_b|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_b^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.9)$$

Entre autres propriétés, l'état cohérent de l'oscillateur harmonique est vecteur propre de l'opérateur d'annihilation:

$$a |z_b\rangle_N = z_b |z_b\rangle_N. \quad (3.10)$$

De plus, le changement de coordonnées suivant sera utile dans la discussion des sections des fonctions de Husimi (voir §4.2.1). A  $z_b$  sont associées les variables polaires  $(I_b, \varphi_b)$  avec la relation  $z_b = \sqrt{I_b} \exp i\varphi_b$ . On désigne alors cet état par  $|I_b, \varphi_b\rangle$ .

### h) Etat cohérent du spin

Les états cohérents de spin sont générés par le groupe  $SU(2)$ , dont les éléments peuvent être représentés par les matrices unitaires de déterminant +1 et que l'on peut paramétrer par la matrice suivante :

$$g = \begin{pmatrix} \cos \theta e^{i\phi} & \sin \theta e^{i\phi} \\ -\sin \theta e^{-i\phi} & \cos \theta e^{-i\phi} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Selon le critère de sélection, l'état fixe de base est l'état propre de  $S_z$  de valeur propre maximale d'un spin quelconque  $s : |s, +s\rangle (\equiv |s\rangle)$ . Un opérateur correspondant à la représentation est  $\exp(z_+ S_- - \bar{z}_+ S_+)$  (le paramètre  $\eta$  n'introduit dans la représentation qu'un facteur de phase). Comme dans le cas de l'oscillateur harmonique, cet opérateur va générer un état normé. La démonstration en est cependant plus délicate (certes,  $S_+ |s\rangle = 0$ , mais  $[S_+, S_-] = 2S_z$  ne commute ni avec  $S_+$  ni avec  $S_-$ ; la formule de l'exponentielle de la somme d'opérateurs n'est alors plus triviale), et pour les détails on se référera à Arecchi et al. [35]. On peut ici aussi se simplifier la tâche en commençant par définir un état non normé :

$$|\psi_g(z_+)\rangle = e^{z_+ S_-} |s\rangle \equiv |z_+\rangle. \quad (3.12)$$

Un état différent, mais aux propriétés similaires, peut se construire par l'action de  $\exp(\bar{z}_+ S_+)$  sur l'état fondamental  $|s, -s\rangle (\equiv |-s\rangle)$ .

Le développement de  $|z_+\rangle$  sur la base du spin donne :

$$|z_+\rangle = \sum_{m=0}^{2s} \sqrt{\binom{2s}{m}} z_+^m |s-m\rangle, \quad (3.13)$$

et après normalisation :

$$|z_+\rangle_N = (1 + |z_+|^2)^{-s} |z_+\rangle. \quad (3.14)$$

La variable  $z_+$  s'interprète géométriquement comme la projection stéréographique sud dans le plan complexe d'un point d'une sphère décrit par les angles  $\theta$  et  $\phi$  :

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (n_x, n_y, n_z) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ \rightarrow z_+(\vec{n}) &= \frac{n_x + i n_y}{1 + n_z} = \tan \frac{\theta}{2} e^{i\phi}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Exprimé directement en fonction des angles, l'état cohérent normé peut s'écrire :

$$|\vec{n}\rangle = \sum_{m=0}^{2s} \sqrt{\binom{2s}{m}} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{2s-m} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^m e^{im\phi} |s-m\rangle. \quad (3.16)$$

Comme pour l'oscillateur harmonique et pour les mêmes raisons, il est utile d'introduire un couple de variables d'angle et d'action  $(I_s, \varphi_s)$ :

$$I_s = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) = \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad \varphi_s = \phi. \quad (3.17)$$

D'où l'état normalisé :

$$|z_s\rangle_N = |I_s, \varphi_s\rangle_N = \sum_{m=0}^{2s} \sqrt{\binom{2s}{m}} \sqrt{I_s^m (1 - I_s)^{2s-m}} e^{im\varphi_s} |s - m\rangle. \quad (3.18)$$

### 3.1.2 Q-symboles

Un des différents moyens d'attribuer à un opérateur quantique une fonction classique de l'espace de phase (voir au chapitre 4 les propositions de Wigner et Husimi) consiste à prendre la valeur moyenne de l'observable sur l'état cohérent normé de l'espace associé. Il en résulte donc une fonction des variables qui caractérisent l'état cohérent, que l'on appelle Q-symbole et que l'on note:

$$a_q(z_k) = {}_N\langle z_k | \hat{A} | z_k \rangle_N, \quad k = b, s. \quad (3.19)$$

Les Q-symboles tirent leur nom d'un opérateur  $Q(z_k)$ , le projecteur sur l'état cohérent  $|z_k\rangle$ ; la fonction  $a_q(z_k)$  correspond alors à la trace du produit  $Q(z_k)\hat{A}$ . On désignera par  $a_{o_q} b$  le Q-symbole associé au produit d'opérateurs  $\hat{A}\hat{B}$ . En général le Q-symbole d'un produit d'opérateurs n'est pas le produit des Q-symboles  $a_{o_q} b \neq a_q b_q$ .

#### a) Q-symboles associés au boson

La propriété (3.10) de l'état cohérent fournit de manière immédiate les Q-symboles des opérateurs de création et d'annihilation :

$$\begin{aligned} a_q &= {}_N\langle z_b | a | z_b \rangle_N = {}_N\langle z_b | z_b | z_b \rangle_N = z_b \\ a_q^+ &= {}_N\langle z_b | a^+ | z_b \rangle_N = {}_N\langle z_b | \bar{z}_b | z_b \rangle_N = \bar{z}_b. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Il suit directement les Q-symboles des opérateurs de position et d'impulsion  $\hat{q}$  et  $\hat{p}$  :

$$\begin{aligned} q_q &= {}_N\langle z_b | \hat{q} | z_b \rangle_N = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} {}_N\langle z_b | a^+ + a | z_b \rangle_N = \sqrt{2\hbar} \Re(z_b) = q \\ p_q &= {}_N\langle z_b | \hat{p} | z_b \rangle_N = i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} {}_N\langle z_b | a^+ - a | z_b \rangle_N = \sqrt{2\hbar} \Im(z_b) = p. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Le hamiltonien quantique de l'oscillateur harmonique est:

$$H_{OH} = \frac{\omega}{2}(\hat{q}^2 + \hat{p}^2) = \hbar\omega(a^+a + \frac{1}{2}), \quad (3.22)$$

et son Q-symbole:

$$h_{OH_q} = {}_N\langle z_b | H_{OH} | z_b \rangle_N = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2 + \hbar). \quad (3.23)$$

Le hamiltonien classique de l'oscillateur harmonique  $\mathcal{H}_{OH} = \omega/2 \cdot (q^2 + p^2)$  correspond donc à la limite  $\hbar \rightarrow 0$  de  $h_{OH_q}$ .

### b) Q-symboles associés au spin

Les Q-symboles, de même que les états cohérents, s'écrivent comme fonction d'un vecteur sur la sphère  $S^2$ . Celui construit sur l'opérateur  $\vec{S}$  s'obtient soit par calcul direct, soit via un développement sur les fonctions sphériques [36]:

$$\vec{s}_q = \langle \vec{n} | \vec{S} | \vec{n} \rangle = s\vec{n}. \quad (3.24)$$

A un opérateur de spin dont la dimension de moment cinétique est rétablie correspond donc un vecteur sur une sphère de rayon  $S = \hbar s$ .

Le hamiltonien d'un spin dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ , parallèle à l'axe  $O_z$  et qui ne dépend pas du temps, a la forme suivante :

$$H_S = \hbar\omega_0 S_z. \quad (3.25)$$

D'où son Q-symbole:

$$h_{S_q} = \omega_0 \hbar s n_z = \omega_0 S n_z = \omega_0 \mathcal{Z}, \quad (3.26)$$

avec  $\vec{S} = (\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = S(n_x, n_y, n_z)$ .

La transformation

$$I_z = \mathcal{Z}, \quad \tan \varphi_z = \frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{X}} \quad (3.27)$$

restitue à  $h_{S_q}$  les variables canoniques introduites en (1.27):

$$h_{S_q} = \omega_0 I_z \equiv \mathcal{H}_S. \quad (3.28)$$

Cette fonction peut donc être considérée comme le hamiltonien décrivant un spin classique.

La constante  $\hbar$  figure implicitement dans le rayon de la sphère  $S$  qui a une unité d'action. De manière générale, le moyen utilisé pour définir rigoureusement une limite pour le spin est de postuler que la taille de l'objet classique est fixe, et par

conséquent qu'on fait tendre simultanément  $\hbar$  vers 0 et le nombre quantique de spin  $s$  vers l'infini en assurant l'égalité  $\hbar s = S = \text{cste}$ . De plus, cette méthode permet de lever un paradoxe. En effet, le rayon de la sphère apparaît naturellement comme la valeur moyenne de la composante  $z$  du spin sur un état extrême ( $= \hbar s$ ). Cette grandeur ne coïncide avec la racine de la valeur moyenne de l'opérateur  $\vec{S}^2$  ( $= \hbar \sqrt{s(s+1)}$ ) que dans la limite que nous avons définie.

L'expression du Q-symbole peut s'obtenir à l'aide d'un opérateur différentiel pour tout produit d'opérateur du type  $\vec{S}\vec{A}$  [36]:

$$(\vec{s} \circ_a a)(\vec{n}) = \left[ s\vec{n} + \frac{1}{2i} \vec{n} \wedge \vec{\nabla}_n - \frac{1}{2} \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{\nabla}_n) \right] a_a(\vec{n}), \quad (3.29)$$

où  $a_a(\vec{n})$  est le Q-symbole associé à  $\vec{A}$ .

### 3.1.3 Illustrations élémentaires

Ce paragraphe a pour but d'éclairer le rôle joué par  $\hbar$  dans le processus d'attribution d'une limite classique, ceci à travers l'étude de l'évolution des états cohérents, et de l'estimation d'écart quadratiques moyens dans deux cas très simples. Seront comparées l'évolution classique, dictée par les équations de Hamilton, et les évolutions quantiques dans les images de Schrödinger et de Heisenberg. Rappelons que ce sont les états qui supportent la dynamique dans la description de Schrödinger, alors que ce rôle est dévolu aux opérateurs dans celle de Heisenberg.

#### a) Oscillateur harmonique

- Dans le cas classique, la variable  $r = q + ip$ , qui permet de condenser la notation, évolue comme  $r(t) = r_0 e^{-i\omega t}$ , avec  $q_0 = \Re(r_0)$  et  $p_0 = \Im(r_0)$ . Le mouvement décrit donc dans l'espace de phase un cercle de rayon  $\sqrt{2E/\omega}$ .
- Dans l'image de Schrödinger, la dynamique se manifeste via l'application de l'opérateur d'évolution  $U_t = \exp(-\frac{i}{\hbar} H_0 \hbar t)$  sur l'état  $|z_b\rangle$ . Le résultat obtenu est un état cohérent associé à la variable dépendant du temps  $z_b(t) = z_b \exp(-i\omega t)$ . Le calcul sur cet état des valeurs moyennes des opérateurs  $\hat{q}$  et  $\hat{p}$  donne exactement le résultat classique.
- Ce même résultat s'obtient par la résolution des équations de Heisenberg pour l'annihilateur et le créateur ( $a(t) = \exp(-i\omega t) a$ ), puis en calculant leurs valeurs moyennes sur des états cohérents fixés.

- Ces dernières expressions sont utilisées pour déterminer les écarts quadratiques moyens sur  $\hat{q}$  et  $\hat{p}$ :

$$\Delta\hat{q} = \Delta\hat{p} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}. \quad (3.30)$$

Ces écarts ne dépendent pas du temps, les états ne subissent donc aucune dispersion et restent d'incertitude minimale puisque, selon le principe d'incertitude de Heisenberg:  $\Delta\hat{q}\Delta\hat{p} \geq \hbar/2$ . C'est pour cette raison qu'ils sont appelés états cohérents.

### b) Spin

- Dans le cas classique, le hamiltonien  $\mathcal{H}_S$  ne dépend que de l'action  $I_x$ ; celle-ci est donc invariante  $I_x(t) = I_0 = \text{cste}$ , de même que la composante cartésienne  $\mathcal{Z}$ . L'angle  $\varphi_x$  dépend donc linéairement du temps  $\varphi_x(t) = \varphi_0 + \omega_0 t$ , résultat qui s'interprète comme un mouvement de précession de fréquence  $\omega_0$  autour de l'axe de symétrie  $O_x$ . Ce phénomène est connu sous le nom de précession de Larmor.

- Dans l'image de Schrödinger, l'opérateur d'évolution  $U_t = \exp(-\frac{i}{\hbar}H_S t)$  appliqué à  $|z_s\rangle$  donne un nouvel état cohérent associé à la variable dépendant du temps  $z_s(t) = z_s \exp(i\omega_0 t)$ . Dans sa représentation en terme d'angle et d'action, la dépendance temporelle se reporte sur le seul angle  $\varphi_x$ , et de manière exactement identique au cas classique.

- On retrouve ce résultat en calculant les valeurs moyennes sur l'état cohérent fixe  $|\bar{n}\rangle$  des opérateurs dépendant du temps  $S_r(t)$ ,  $r = x, y, z$ ; leur évolution est donnée par la résolution des équations de Heisenberg:  $S_+(t) = \exp(i\omega_0 t) S_+$ ,  $S_z(t) = S_z = \text{cste}$ .

- L'expression (3.29) permet alors de calculer l'écart quadratique pour l'opérateur vectoriel  $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ :

$$\Delta S = \sqrt{s},$$

ou, si l'on rétablit l'unité de moment cinétique:

$$\Delta S' = \hbar\sqrt{s} = \frac{S}{\sqrt{s}}. \quad (3.31)$$

Ces états ont eux aussi une dispersion nulle. Et cet écart tend bien vers 0 dans la limite que nous avons définie.

On retiendra de ce paragraphe qu'il existe des cas élémentaires où des états cohérents le restent au cours de leur évolution. La cause en est simplement la linéarité des équations dynamiques. Cette condition est remplie lorsque le hamiltonien du boson

est de degré 2, et celui du spin de degré 1. Dans l'approche de Heisenberg, cette propriété se traduit par le fait que l'ordre des opérations "Q-symbole" et "évolution" est indifférent. En effet, le système dynamique obtenu à l'aide des équations de Hamilton issues du Q-symbole du hamiltonien quantique original est strictement identique aux Q-symboles tirés des équations de Heisenberg qui découlent de ce même hamiltonien.

### 3.1.4 Application au modèle spin-boson

L'espace de Hilbert des états du système spin-boson généralisé est un produit tensoriel  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2s+1} \otimes \mathcal{F}$  des espaces associés à chacune de ses parties. Un état cohérent global peut se construire simplement comme produit tensoriel des états cohérents agissant sur chacun des espaces élémentaires:

$$|z_a, z_b\rangle \equiv |z_a\rangle \otimes |z_b\rangle . \quad (3.32)$$

Le groupe sous-jacent est alors  $W_1 \otimes SU(2)$ . Le Q-symbole de  $H_\epsilon$  (1.18) vaut:

$${}_N \langle z_a, z_b | H_\epsilon | z_a, z_b \rangle_N = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2) + \omega_0 \mathcal{Z} + \lambda^+ q \mathcal{X} - \lambda^- p \mathcal{Y} = \mathcal{H}_\epsilon , \quad (3.33)$$

ceci quelle que soit la valeur de  $\hbar$ . Dans le cas de la limite classique  $\hbar \rightarrow 0, s \rightarrow \infty$ , en exigeant  $\hbar s = S = \text{cste}$ ,  $\mathcal{H}_\epsilon$  est également le Q-symbole de la forme (1.19) de  $H_\epsilon$ .

Comme indiqué au §1.2.4, le système dynamique généré par  $\mathcal{H}_\epsilon$  est structurellement identique à l'ensemble des équations de Heisenberg construites sur  $H_\epsilon$ . Mais on ne peut restreindre le problème quantique à ce système dynamique, car dans ce cas, au contraire des exemples simples présentés dans le paragraphe précédent, la cohérence d'un état sera détruite sous l'évolution, du fait de la présence de termes de couplage dans  $H_\epsilon$ .

### 3.1.5 Modèles concurrents

Selon la littérature, le modèle spin-boson apparaît sous différentes formes. Dans ce paragraphe (qui a fait l'objet d'un chapitre de la publication [30]), nous démontrons qu'il faut distinguer deux systèmes non équivalents qu'on assimile souvent à tort (Milonni et al., [25], par exemple). Pour cette discussion, nous traiterons le hamiltonien dans sa version spin-boson (c'est-à-dire  $\epsilon = 1 \Rightarrow \lambda^+ = \lambda, \lambda^- = 0$ ).

Les équations différentielles du premier ordre qui déterminent l'évolution de la partie bosonique du système sont souvent écrites sous la forme d'une seule équation

du second ordre; les deux premières équations de (1.32) deviennent:

$$\ddot{q} + \omega q = -\lambda \omega \mathcal{X} . \quad (3.34)$$

Or l'équation qui décrit le champ est souvent déduite directement des équations de Maxwell [25]:

$$\ddot{q} + \omega q = \frac{\lambda}{\omega} \ddot{\mathcal{X}} . \quad (3.35)$$

Cette dernière équation peut se décomposer en:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \omega p + \frac{\lambda}{\omega} \dot{\mathcal{X}} = \omega p - \frac{\lambda \omega_0}{\omega} \mathcal{Y} \\ \dot{p} &= -\omega q . \end{aligned} \quad (3.36)$$

L'ensemble composé du système (3.36) et de la partie décrivant la dynamique des variables cartésiennes de spin du système (1.32) regroupe en fait les équations canoniques du mouvement issues du hamiltonien suivant:

$$\mathcal{H}'_{SB} = \frac{\omega}{2} (q'^2 + p'^2) + \omega_0 \mathcal{Z}(I_z, \varphi_z) + \lambda q' \mathcal{X}(I_z, \varphi_z) + \frac{\lambda^2}{2\omega} \mathcal{X}^2(I_z, \varphi_z) , \quad (3.37)$$

auquel serait imposé le changement de variables :

$$q' = q - \frac{\lambda}{\omega} \mathcal{X} \quad , \quad p' = p . \quad (3.38)$$

Ce nouveau hamiltonien est lié à celui qui nous sert de base par la relation simple:

$$\mathcal{H}'_{SB}(q', p', \varphi_z, I_z) = \mathcal{H}_{SB}(q = q', p = p', \varphi_z, I_z) + \frac{\lambda^2}{2\omega} \mathcal{X}^2(I_z, \varphi_z) , \quad (3.39)$$

où  $\mathcal{H}_{SB} = \mathcal{H}_{s=1}$ . Il est donc faux de les identifier.

La question est de savoir s'il existe un hamiltonien quantique  $H'_{SB}$  décrivant un spin  $s = 1/2$ , et dont le Q-symbole est  $\mathcal{H}'_{SB}$ .

$\mathcal{H}_{SB}$  est le Q-symbole de  $H_{SB}$ . Il reste à déterminer un opérateur quantique tel que son Q-symbole soit  $\lambda^2/2\omega \cdot \mathcal{X}^2$ . Mais le calcul du Q-symbole de  $S_x^2$ , à l'aide de (3.29), mène à:

$$S_x^2 \pi_x^2 = \frac{2s}{2s-1} \left[ (s_x \circ_s s_x) - \frac{S^2}{2s} \right] , \quad (3.40)$$

expression qui n'est pas définie pour  $s = 1/2$ .  $\mathcal{X}^2$  est donc lié au Q-symbole de tout opérateur  $S_x^2$ , pour autant qu'il décrive un spin de nombre quantique  $s \geq 1$ .

Tout opérateur autre que  $S_x^2$  n'entre évidemment pas en ligne de compte. Nous pouvons donc conclure que les équations dynamiques présentées par Milonni et al. ne peuvent provenir d'un hamiltonien quantique ne comptant qu'un spin  $1/2$ .

Notre article présente une méthode sensiblement différente car il n'y était pas question de limite classique via les Q-symboles. Nous associons à la valeur moyenne d'une observable quantique la variable classique correspondante, et nous postulons que la valeur moyenne d'un produit d'observables factorisait.

La version la plus générale d'un hamiltonien comprenant un spin  $s = 1/2$  est la suivante (compte tenu que  $S_x^2 = S_y^2 = S_z^2 = 1/4 \cdot 1$ ):

$$H_p(\hat{q}, \hat{p}, S_x, S_y, S_z) = \hat{h}_0(\hat{q}, \hat{p}) + \hat{h}_1(\hat{q}, \hat{p})S_x + \hat{h}_2(\hat{q}, \hat{p})S_y + \hat{h}_3(\hat{q}, \hat{p})S_z . \quad (3.41)$$

Il n'existe pas d'ensemble d'opérateurs  $\hat{h}_i$ ,  $i = 0, \dots, 3$ , tel que la factorisation des équations de Heisenberg de  $H_p$  donne le système décrit plus haut. Les conclusions sont donc identiques.

## 3.2 Représentation de la phase.

### Limite des grands nombres d'excitations

Une publication récente due à Bialynicki-Birula [37] propose une représentation des états du champ et des opérateurs de création et d'annihilation en terme de phase, ainsi qu'une approximation pour les grands nombres d'excitations  $n_0$  (c'est-à-dire de photons). Nous avons montré [38] que cette représentation équivaut à considérer des opérateurs dérivés d'un opérateur de phase unitaire proposé par Pegg et Barnett [39]. L'objectif de cette section est d'appliquer l'approximation au modèle spin-boson. Nous montrerons que le système obtenu possède des propriétés dynamiques semblables à celles du modèle original. La démonstration a été publiée en [40]. Cette méthode nous permettra de travailler sur un échantillon borné du spectre, localisé autour d'une valeur élevée de l'énergie de l'oscillateur harmonique fixée arbitrairement. On parle alors souvent de limite semi-classique pour le champ, car si son énergie est fixée, la limite  $n_0 \rightarrow \infty$  s'accompagne de la limite  $\hbar \rightarrow 0$  [41], tandis que le spin reste quantique. C'est dans ce sens qu'il faut comprendre ici le terme de semi-classique.

#### 3.2.1 Représentation de Bialynicki-Birula

Cette représentation associe à un état propre de l'oscillateur harmonique une fonction d'une phase  $\phi$ :

$$|n_0 + m\rangle \longrightarrow e^{im\phi}, \quad (3.42)$$

où  $n_0$  est un décalage arbitraire des valeurs propres. Elle associe aux opérateurs conventionnels  $a$  et  $a^\dagger$  de nouveaux opérateurs  $a_B$  et  $a_B^\dagger$  qui agissent sur les fonctions de  $\phi$ :

$$\begin{aligned} a &\longrightarrow a_B = e^{-i\phi} (n_0 + p_\phi)^{\frac{1}{2}} \\ a^\dagger &\longrightarrow a_B^\dagger = (n_0 + p_\phi)^{\frac{1}{2}} e^{i\phi}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

où  $p_\phi \equiv -id/d\phi$  agit sur l'espace de Hilbert  $L^2(0, 2\pi)$ , et où  $p_\phi$  et  $\phi$  satisfont la relation de commutation canonique:  $[\phi, p_\phi] = i$ .

Ces deux opérateurs (ainsi que le nouvel opérateur "nombre d'excitations"  $N_B = a_B^\dagger a_B = n_0 + p_\phi$ ) vérifient les propriétés des opérateurs d'origine, à condition bien sûr que  $n_0 + p_\phi \geq 0$ .

L'idée de l'approximation est de considérer un grand nombre d'excitations, puis de développer les racines:

$$a_B = \sqrt{n_0} e^{-i\phi} + \frac{1}{2\sqrt{n_0}} e^{-i\phi} p_\phi + O\left(n_0^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$a_B^{\pm} = \sqrt{n_0} e^{i\phi} + \frac{1}{2\sqrt{n_0}} p_{\phi} e^{i\phi} + O\left(n_0^{-3/2}\right) \quad (3.44)$$

### 3.2.2 Application au modèle spin-boson

Nous travaillerons sur le hamiltonien  $H_{SB}$  (1.18). Mais la généralisation à  $H_1$  est immédiate. Nous allons considérer si, dans certaines approximations,  $H_{SB}$  exprimé en fonction des variables de phase peut conduire au même ensemble d'équations dynamiques que lorsqu'il est écrit dans ses variables naturelles.

Une première tentative consiste à substituer dans  $H_{SB}$  l'approximation à l'ordre  $O(n_0^{-1/2})$  des opérateurs d'annihilation et de création  $a_1 = \sqrt{n_0} \exp(-i\phi)$  et  $a_1^{\dagger} = \sqrt{n_0} \exp(i\phi)$ , pour obtenir un hamiltonien qu'on notera  $H_1$ . Mais celui-ci ne présente aucun intérêt puisqu'il ne dépend pas de  $p_{\phi}$ .

La substitution des développements (3.44) dans  $H_{SB}$  puis l'approximation à l'ordre  $O(n_0^{-1/2})$  mènent au hamiltonien:

$$H_1' = \hbar\omega(n_0 + p_{\phi}) + \hbar\omega_0 S_x + \sqrt{\frac{\hbar}{2}} 2\hbar\lambda\sqrt{n_0} S_x \cos \phi, \quad (3.45)$$

dont les équations de Heisenberg sont:

$$\begin{aligned} \dot{S}_x &= \frac{i}{\hbar} [H_1', S_x] = -\omega_0 S_y \\ \dot{S}_y &= \frac{i}{\hbar} [H_1', S_y] = \omega_0 S_x - \sqrt{\frac{\hbar}{2}} 2\lambda\sqrt{n_0} S_z \cos \phi \\ \dot{S}_z &= \frac{i}{\hbar} [H_1', S_z] = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} 2\lambda\sqrt{n_0} S_y \cos \phi \\ \dot{\phi} &= \frac{i}{\hbar} [H_1', \phi] = \omega \\ \dot{p}_{\phi} &= \frac{i}{\hbar} [H_1', p_{\phi}] = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} 2\lambda\sqrt{n_0} S_z \sin \phi. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Ce système n'est pas semblable à celui dérivé du modèle de base, dans lequel figurent notamment les équations suivantes, qui décrivent l'évolution des opérateurs  $a$  et  $a^{\dagger}$ :

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -i\omega a - i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \lambda S_x \\ \dot{a}^{\dagger} &= i\omega a^{\dagger} + i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \lambda S_x. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Or ici, les équations pour  $a_1$  et  $a_1^\dagger$  qui découlent de (3.46) sont:

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= \frac{i}{\hbar} [H'_1, a_1] = \sqrt{n_0} i \omega [p_\phi, e^{-i\phi}] = -i \omega a_1 \\ \dot{a}_1^\dagger &= \frac{i}{\hbar} [H'_1, a_1^\dagger] = \sqrt{n_0} i \omega [p_\phi, e^{i\phi}] = i \omega a_1^\dagger.\end{aligned}\quad (3.48)$$

Ces opérateurs ne subissent pas la "réaction de retour" des spins qui est caractéristique du couplage que présente le modèle dans sa version complète. Dans cette approximation, le système prend la forme d'un modèle non autonome construit par Autler et Townes [42], [43] dont le hamiltonien est:

$$H_{AT} = \hbar \omega_0 S_z + 2\hbar \lambda' S_x \cos \omega t, \quad (3.49)$$

et qui ne donne pas lieu à des comportements irréguliers.

A vrai dire, la forme  $H'_1$  est incohérente du fait que le terme qui décrit l'oscillateur harmonique nécessite un développement à l'ordre  $O(n_0^{-3/2})$  des opérateurs  $a_B$  et  $a_B^\dagger$ :

$$\begin{aligned}a_2 &\equiv \sqrt{n_0} e^{-i\phi} \left(1 + \frac{1}{2n_0} p_\phi\right) \\ a_2^\dagger &\equiv \sqrt{n_0} \left(1 + \frac{1}{2n_0} p_\phi\right) e^{i\phi},\end{aligned}\quad (3.50)$$

alors que le terme de couplage ne tient compte que des contributions des  $a_1$  et  $a_1^\dagger$ .

La cohérence est rétablie par la substitution des opérateurs  $a_2$  et  $a_2^\dagger$  dans le terme de couplage de  $H_{SB}$ , puis par l'approximation à l'ordre  $O(n_0^{-1})$ . Il reste alors le hamiltonien:

$$\begin{aligned}H_2 &= \hbar \omega (n_0 + p_\phi) + \hbar \omega_0 S_z \\ &+ \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \hbar \lambda S_x \left[ 2\sqrt{n_0} \cos \phi + \frac{1}{2\sqrt{n_0}} (e^{-i\phi} p_\phi + p_\phi e^{i\phi}) \right].\end{aligned}\quad (3.51)$$

Les équations du mouvement du boson deviennent:

$$\begin{aligned}\dot{a}_2 &= \frac{i}{\hbar} [H_2, a_2] = -i \omega a_2 - i \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \lambda S_x + O(n_0^{-1}) \\ \dot{a}_2^\dagger &= \frac{i}{\hbar} [H_2, a_2^\dagger] = i \omega a_2^\dagger + i \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \lambda S_x + O(n_0^{-1}).\end{aligned}\quad (3.52)$$

Dans la limite des grands  $n_0$ , ces expressions sont exactement équivalentes à (3.47). Les équations pour le spin sont évidemment:

$$\begin{aligned}\dot{S}_x &= -\omega_0 S_y \\ \dot{S}_y &= \omega_0 S_x - \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \lambda S_z (a_2^\dagger + a_2) \\ \dot{S}_z &= \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \lambda S_y (a_2^\dagger + a_2).\end{aligned}\quad (3.53)$$

En conclusion, il apparaît que les équations d'évolution de Heisenberg extraites du système dans la représentation de la phase et dans l'approximation d'ordre  $O(n_0^{-1})$  reproduisent exactement celles du système original. Il y a donc un sens à étudier les caractéristiques de  $H_2$  (3.51). Il y a également de l'intérêt à travailler sur ses propriétés spectrales (elles seront l'objet d'un paragraphe du chapitre 4) car cette méthode nous permet d'accéder à tout intervalle borné du spectre centré autour d'une valeur de  $n_0$  suffisamment élevée.

### 3.3 Sur la pertinence d'une limite pour les petits spins

L'étude des fonctions de Husimi associées au modèle spin-boson ne se révèle intéressante numériquement que si l'espacement moyen entre les niveaux d'énergie du boson est nettement plus faible que celui du spin. Une explication qualitative sera formulée au chapitre 4. Il est donc nécessaire de considérer l'oscillateur harmonique dans une limite semi-classique, en gardant le caractère purement quantique du spin.

Certes, le problème numérique que nous devons résoudre est typiquement quantique et ses solutions sont indépendantes de l'interprétation que l'on peut donner aux différents facteurs du hamiltonien. Mais le système classique de référence et ses propriétés en dépendent fortement.

D'une part, nous pourrions décider que les quanta d'action des deux parties du système différent, et attribuer à chacune d'elle une constante  $\hbar$  distincte (i.e.  $\hbar_b$  pour le boson, libre et qui tend vers 0 dans notre limite; et  $\hbar_s = S/s$  pour le spin, fixée par le nombre quantique  $s$  et le rayon  $S$  de la sphère classique associée). Dans ce cas, l'objet classique associé (le Q-symbole) reste le hamiltonien décrit plus haut  $\mathcal{H}_\epsilon$ . Une telle interprétation ne semble pas physiquement très pertinente (ou est même paradoxale), mais formellement, la démarche est claire.

D'autre part, il est possible d'introduire dans le hamiltonien quantique une nouvelle constante  $\eta$  sur laquelle porte la limite. Soit:

$$\tilde{H}_\epsilon = \hbar\eta^2\omega a^+ a + \hbar\omega_0 S_z + \hbar\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\eta\lambda [S_+ a + S_- a^+ + \epsilon (S_+ a^+ + S_- a)] , \quad (3.54)$$

où  $\eta$  apparaît comme un facteur multiplicatif de la constante  $\sqrt{\hbar}$ , mais seulement lorsqu'elle se rapporte à l'oscillateur harmonique. Le hamiltonien classique que le Q-symbole associé à  $\tilde{H}_\epsilon$  préserve le facteur  $\eta$  sur les termes correspondant aux modules qu'il multipliait dans le cas quantique. Il s'écrit maintenant:

$$\tilde{\mathcal{H}}_\epsilon = \eta^2 \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2) + \omega_0 \mathcal{Z}(I_z, \varphi_z) + \eta (\lambda^+ q \mathcal{X}(I_z, \varphi_z) - \lambda^- p \mathcal{Y}(I_z, \varphi_z)) . \quad (3.55)$$

Le changement de variables  $q' = \eta q$ ,  $p' = \eta p$  permettrait de retrouver  $\mathcal{H}_{SB}$ , mais il est évident que cette transformation, qui représente une dilatation d'un facteur  $\eta$  dans l'espace de phase du boson, n'est pas canonique. Les équations du mouvement exprimées en terme des nouvelles variables sont:

$$\begin{aligned} \dot{q}' &= \eta^2 (\omega p' - \lambda^- \mathcal{Y}) \\ \dot{p}' &= \eta^2 (-\omega q' - \lambda^+ \mathcal{X}) \\ \dot{\mathcal{X}} &= -\omega_0 \mathcal{Y} - \lambda^- p' \mathcal{Z} \\ \dot{\mathcal{Y}} &= \omega_0 \mathcal{X} - \lambda^+ q' \mathcal{Z} \\ \dot{\mathcal{Z}} &= \lambda^+ q' \mathcal{Y} + \lambda^- p' \mathcal{X} . \end{aligned} \quad (3.56)$$

Dans la limite  $\eta \rightarrow 0$ , la partie bosonique se fige, tandis que le mouvement du spin correspond à une précession autour d'un axe qui dépend maintenant des coordonnées  $q'$  et  $p'$ , à variation lente:

$$O_z \longrightarrow (\lambda^+ q', -\lambda^- p', \omega_0) .$$

Par conséquent, un tel système ne présente plus d'intérêt pour l'étude d'une éventuelle transition de la régularité au chaos.

Une redéfinition de l'état cohérent donne en apparence un moyen de contourner l'obstacle. Le candidat devra satisfaire une version modifiée de la propriété (3.10), à savoir:

$$a|\bar{z}\rangle_\eta = \frac{1}{\eta} \bar{z} |\bar{z}\rangle_\eta . \quad (3.57)$$

Cette condition est remplie par l'état défini comme suit:

$$|\bar{z}\rangle_\eta = \exp\left(\frac{\bar{z}a^+}{\eta}\right)|0\rangle . \quad (3.58)$$

Si l'on construit de nouvelles variables  $\tilde{q}$  et  $\tilde{p}$  à partir de  $\bar{z}$  et de son conjugué, de la même manière que  $q$  et  $p$  à partir de  $z_b$  et  $\bar{z}_b$ , le  $\tilde{Q}$ -symbole (défini à l'aide des  $|\bar{z}\rangle_\eta$ ) de  $\tilde{H}_{SB}$  devient alors:

$$\tilde{\mathcal{H}}'_\epsilon = \frac{\omega}{2} (\tilde{q}^2 + \tilde{p}^2) + \omega_0 \mathcal{Z}(I_x, \varphi_x) + \lambda^+ \tilde{q} \mathcal{X}(I_x, \varphi_x) - \lambda^- \tilde{p} \mathcal{Y}(I_x, \varphi_x) , \quad (3.59)$$

qui n'est autre que  $\mathcal{H}_\epsilon$  exprimé à l'aide de variables différentes. Dans cette interprétation, c'est l'état cohérent lui-même qui prend entièrement en charge la dilatation de l'espace de phase de l'oscillateur harmonique introduite par la constante  $\eta$ . Alors son évolution triviale sous  $H_\epsilon$  ne correspond pas à celle de  $\tilde{\mathcal{H}}'_\epsilon$ , mais à celle de  $\tilde{\mathcal{H}}_\epsilon$ , pour laquelle l'oscillateur harmonique tend à l'immobilité. Il y a donc contradiction, et dans un cas comme dans l'autre, la confrontation à la dynamique s'avère très problématique.

Il est clair que parler de limite semi-classique d'un système qui comprend un spin  $1/2$ , et comparer dans ce cas des propriétés quantiques à des propriétés classiques est absolument irrespectueux des réalités physiques. Mais on vient de voir que si l'on tient à rester au plus près de ces réalités, le problème tel qu'il est posé perd de son intérêt. La perspective proposée, soit d'utiliser  $\hbar_b$  et  $\hbar_x$ , est mathématiquement correcte et expérimentable numériquement. Cependant elle traite le modèle non plus comme l'image d'un système physique, mais plutôt comme une construction théorique qui nous permettra d'aborder de nouveaux concepts (démarche d'ailleurs très fréquente dans le domaine du chaos).

## 4 Spin-boson quantique et chaos

La mécanique quantique est construite de telle manière que tout système autonome est complètement déterminé par le spectre et l'ensemble des fonctions propres de son hamiltonien. Dans ces objets sont contenues toutes les informations relatives à un éventuel comportement chaotique du système. Ce chapitre se divise en trois sections: la première présente quelques propriétés analytiques de  $H_\epsilon$ , qui sont en rapport avec sa diagonalisation et qui facilitent le traitement numérique nécessaire dans les deux suivantes. Celles-ci n'ont en commun que le modèle de base, puisque l'une traitera du spectre et l'autre de certaines fonctions propres, ceci pour des limites semi-classiques à entendre dans un sens différent dans l'un et l'autre cas.

Tous les résultats numériques présentés dans ce chapitre ont trait au système composé d'un spin  $s = 1/2$ , donc dans sa forme quantique extrême. Dans ce cas, et c'est l'objet de la première section,  $H_\epsilon$  devient diagonal par blocs sous une transformation unitaire que nous avons généralisée, et qui s'appuie sur le fait que l'opérateur de parité qui commute avec le hamiltonien prend une forme simple lorsqu'il est associé à un spin  $s = 1/2$ . Nous montrerons que lorsque  $\epsilon = 0$ , le système admet une solution exacte. On peut alors en déduire les caractéristiques du spectre.

Dans une deuxième section, nous présenterons une étude des statistiques spectrales dans l' $n^{\text{e}}$  approximation de la phase" (dont une description précise est fournie dans la section 3.2). Un paragraphe résume l'ensemble des données connues sur le spectre du système spin-boson et permet de justifier notre démarche. Les paragraphes suivants sont consacrés aux aspects numériques du problème; d'abord à la construction d'un hamiltonien qui puisse être diagonalisé dans les meilleures conditions, puis à la présentation et à la discussion des résultats des expériences numériques: l'étude comparative d'une transition en  $\epsilon$  dans la statistique spectrale du modèle original et du modèle approché.

Si l'étude du spectre permet de définir des classes d'universalité (qui ne sont pas absolument rigides puisqu'un certain nombre de systèmes y échappent, et en particulier celui qui nous intéresse), l'étude des fonctions d'onde n'est pas encore parvenu à un développement qui fasse l'unanimité. Les choix ne sont pas immédiats, ni d'une représentation pour la fonction d'onde, ni d'un critère qui permette de définir les notions de régularité et de chaos. La représentation choisie dans la troisième section de ce chapitre est la fonction de Husimi, et le critère d'ordre la distribution de ses zéros.

Il s'agira dans un premier temps de définir rigoureusement cette fonction et de préciser ses liens avec la distribution bien connue de Wigner et avec les Q-symboles

introduits au chapitre 3. Les objets ainsi construits dépendent de quatre variables canoniques. Toute tentative de représentation graphique passe par différents types de projections ou de sections que nous présenterons dans un deuxième temps. Enfin, la dernière étape théorique consistera en la discussion du choix du critère des zéros et de la complétude de l'information qu'ils contiennent.

Un paragraphe sera consacré à formuler le problème de telle sorte qu'une expérience numérique soit possible. Il s'agira de franchir toutes sortes d'obstacles que constitue le travail avec de grandes matrices, des polynômes de degré élevé, ou des nombres d'ordres de grandeur très différents. C'est dans cette partie qu'apparaîtront les difficultés numériques qui rendent très délicate l'étude d'une transition par rapport au nombre quantique de spin.

La dernière partie portera sur l'expérience numérique elle-même; à savoir, l'étude d'une transition en  $\epsilon$ , qui montrera alors que le système présente des traces de chaos, lorsque sa contrepartie classique est chaotique.

## 4.1 Diagonalisation de $H_e$

Cette section concerne l'équation de Schrödinger  $H_e |\psi^E\rangle = E |\psi^E\rangle$  et sa résolution. Elle est un préambule aux problèmes du chaos abordés dans les sections suivantes.

### 4.1.1 Parité

Dans le cas d'un spin  $s = 1/2$ , la partie de l'opérateur de parité  $P$  (1.25) relative au spin agit sur la base  $\{|s = 1/2, m = \pm 1/2\rangle \equiv |\pm\rangle\}$  comme un multiple de  $S_z$ :

$$(-1)^{\frac{1}{2}-S_z} |\pm\rangle = (-1)^{\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}} |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle = 2S_z |\pm\rangle .$$

Soit  $T = (-1)^{a^\dagger a}$ ; alors la parité s'écrit:

$$P = 2TS_z . \quad (4.1)$$

Soit la transformation unitaire engendrée par l'opérateur:

$$U = S_z (1 + T) + \frac{1}{2} (S_+ - S_-) (1 - T) . \quad (4.2)$$

Sous l'action de cet opérateur, la parité se transforme comme:

$$P' = UPU^\dagger = 2S_z . \quad (4.3)$$

C'est-à-dire que dans cette représentation, parité et composante du spin sont confondues. Donc, en vertu du fait que  $[P, H_e] = 0$  (1.26), les états propres de  $H_e$ , transformés par  $U$  sont également états propres de  $S_z$ . Cet opérateur est alors constitué de deux blocs indépendants, chacun n'agissant que sur une composante du spineur. Cette transformation est proche de celle utilisée par Shore et Sander [44], et nous allons voir de quelle manière elle modifie le hamiltonien  $H_e$ .

### 4.1.2 Transformation de Shore et Sander généralisée

La transformation appliquée séparément à chaque terme de  $H_e$ , indépendamment des constantes qui les multiplient, donne:

$$U a^\dagger a U^\dagger = a^\dagger a$$

$$\begin{aligned}
US_zU^+ &= S_zT \\
U(S_+a + S_-a^+)U^+ &= \frac{1}{2}(a^+ + a) + S_z(a^+ - a)T \\
U(S_-a + S_+a^+)U^+ &= \frac{1}{2}(a^+ + a) - S_z(a^+ - a)T.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

D'où le hamiltonien  $H_{SS,\epsilon} \equiv UH_\epsilon U^+$ :

$$H_{SS,\epsilon} = \hbar\omega a^+a + \hbar\omega_0 S_zT + \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \frac{\lambda}{2} \left[ \frac{1+\epsilon}{2} (a + a^+) + (1-\epsilon) S_z (a^+ - a) T \right]. \tag{4.5}$$

Cette transformation généralise celle de Shore et Sander en ce sens que  $H_\epsilon$  contient (du moins implicitement) les trois opérateurs de spin  $S_x, S_y$  et  $S_z$ , alors que la transformation originale s'appliquait à un hamiltonien où n'en figuraient que deux.

La présence de  $S_z$  comme seul opérateur de spin confirme qu'aucun mélange de composantes n'a lieu lors de l'application de  $H_{SS,\epsilon}$  à un état quelconque. La forme matricielle de cet opérateur est:

$$H_{SS,\epsilon} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

où  $A$  et  $B$  sont deux blocs qui agissent respectivement sur les composantes  $+$  et  $-$  du spineur, et qui ne dépendent que des opérateurs bosoniques. Alors les états propres de  $H_{SS,\epsilon}$  se séparent naturellement en deux sous-ensembles selon la seule composante de spin qui les constitue et qui est également leur parité:

$$\begin{aligned}
|\bar{\psi}_+^E\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_{+,n}^E |+, n\rangle \\
|\bar{\psi}_-^E\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_{-,n}^E |-, n\rangle.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

L'application à ces états de la transformation de Shore et Sander inverse donne les états propres de  $H_\epsilon$ :  $|\psi_\pm^E\rangle = U^{-1} |\bar{\psi}_\pm^E\rangle$ . Leurs coefficients sont:

$$\begin{aligned}
\text{parité } + : \quad c_{\frac{1}{2},n}^E &= \begin{cases} \bar{c}_{+,n}^E & \text{si } n = 2k \\ 0 & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases} \\
c_{-\frac{1}{2},n}^E &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ \bar{c}_{+,n}^E & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases} \\
\text{parité } - : \quad c_{\frac{1}{2},n}^E &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ -\bar{c}_{-,n}^E & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases} \\
c_{-\frac{1}{2},n}^E &= \begin{cases} -\bar{c}_{-,n}^E & \text{si } n = 2k \\ 0 & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}
\end{aligned} \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{4.8}$$

## Éléments de matrice

La transformation maintient diagonaux les termes qui l'étaient à l'origine dans  $H_i$ :

$$\langle m, n | H_{SS,\epsilon} | m, n \rangle = \hbar \omega n + (-1)^n \hbar \omega_0 m. \quad (4.9)$$

Comme les opérateurs  $a$  et  $a^+$  n'apparaissent pas à un ordre supérieur à 1 (sauf dans le terme  $a^+a$ , diagonal), les blocs correspondant à chaque composante du spin sont tridiagonaux. Chaque bloc est également symétrique:

$$\begin{aligned} \langle m, n+1 | H_{SS,\epsilon} | m, n \rangle &= \langle m, n | H_{SS,\epsilon} | m, n+1 \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \frac{\lambda}{\hbar} \frac{1}{2} \sqrt{n+1} \left[ \frac{1+\epsilon}{2} + (1-\epsilon)(-1)^n m \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Le contenu du crochet vaut:

$$\begin{aligned} 1 &\text{ si } \begin{cases} m = +1/2 \text{ et } n \text{ pair} \\ m = -1/2 \text{ et } n \text{ impair} \end{cases} \\ \epsilon &\text{ si } \begin{cases} m = +1/2 \text{ et } n \text{ impair} \\ m = -1/2 \text{ et } n \text{ pair} \end{cases} \end{aligned}$$

Si  $\epsilon = 0$ , un élément non diagonal sur deux disparaît, et par conséquent la matrice hamiltonienne est constituée d'un ensemble de blocs de matrices  $2 \times 2$ . Le problème aux valeurs propres est alors résoluble analytiquement. Le calcul en est présenté dans le paragraphe suivant.

### 4.1.3 Solutions du modèle de Jaynes et Cummings

Précisons, avant de résoudre le problème, qu'il n'y a pas de relation de causalité connue entre l'existence d'une constante du mouvement supplémentaire non triviale (1.24) et celle d'une solution analytique.

Composante "up" ( $m = +1/2$ )

La matrice  $A$  (4.6) représentant cette composante possède alors le long de la diagonale une succession de blocs matriciels  $M_n^+$  de dimension 2, et qui agissent sur la base:  $\{|+, n\rangle, |+, n+1\rangle\}$  pour  $n = 0, 2, 4, \dots$  respectivement:

$$A = \begin{pmatrix} M_0^+ & & & & \\ & M_2^+ & & & 0 \\ & & M_4^+ & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Chaque bloc a la structure suivante:

$$M_n^+ = \hbar \begin{pmatrix} \frac{\omega_n}{2} + \omega n & \sqrt{\frac{\hbar \lambda}{2}} \sqrt{n+1} \\ \sqrt{\frac{\hbar \lambda}{2}} \sqrt{n+1} & -\frac{\omega_n}{2} + \omega(n+1) \end{pmatrix} \quad n = 0, 2, 4, \dots \quad (4.12)$$

Leur polynôme caractéristique  $\det(M_n^+ - r_+ 1)$  s'écrit:

$$\hbar^2 \left\{ r_+^2 - \omega(2n+1)r_+ + \left( \omega^2 n - \frac{\hbar \lambda^2}{8} \right) (n+1) - \frac{\omega_0}{4} + \frac{\omega \omega_0}{2} \right\}, \quad (4.13)$$

Introduisons de nouvelles grandeurs:

$$\delta = \omega - \omega_0, \quad \lambda_n = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \lambda \sqrt{n+1},$$

qui simplifient l'écriture des racines de (4.13), énergies propres associées à une parité positive:

$$E_{n,n+1}^+ = \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \mp \frac{\hbar}{2} \sqrt{\delta^2 + \lambda_n^2} \quad n = 0, 2, 4, \dots \quad (4.14)$$

Ainsi,  $E_n^+ \leq E_{n+1}^+$  pour  $n$  pair, mais il se peut que  $E_{n+1}^+ > E_{n+2}^+$ .

Les états propres normalisés associés à  $E_n^+$  sont donnés par les deux seuls coefficients non nuls:

$$\tilde{c}_{+,n}^{E_n^+} = \frac{\lambda_n}{\sqrt{(\delta - \sqrt{\delta^2 + \lambda_n^2})^2 + \lambda_n^2}}, \quad \tilde{c}_{+,n+1}^{E_n^+} = \frac{\delta - \sqrt{\delta^2 + \lambda_n^2}}{\sqrt{(\delta - \sqrt{\delta^2 + \lambda_n^2})^2 + \lambda_n^2}}, \quad (4.15)$$

et ceux associés à  $E_{n+1}^+$ , par les coefficients:

$$\tilde{c}_{+,n}^{E_{n+1}^+} = \frac{\lambda_n}{\sqrt{(\delta + \sqrt{\delta^2 + \lambda_n^2})^2 + \lambda_n^2}}, \quad \tilde{c}_{+,n+1}^{E_{n+1}^+} = \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 + \lambda_n^2}}{\sqrt{(\delta + \sqrt{\delta^2 + \lambda_n^2})^2 + \lambda_n^2}}, \quad (4.16)$$

On vérifie aisément leur orthogonalité.

Le spectre de  $H_t$  est identique à celui de  $H_{SS,\epsilon}$ , et ses états propres, selon la formule de transformation (4.8), n'ont qu'un coefficient non nul dans chaque composante du spineur:

$$\begin{aligned} |\psi^{E_n^+}\rangle &= \tilde{c}_{+,n}^{E_n^+} |+, n\rangle + \tilde{c}_{+,n+1}^{E_n^+} |-, n+1\rangle \\ |\psi^{E_{n+1}^+}\rangle &= \tilde{c}_{+,n}^{E_{n+1}^+} |+, n\rangle + \tilde{c}_{+,n+1}^{E_{n+1}^+} |-, n+1\rangle. \end{aligned} \quad (4.17)$$



Dans le cas où  $\lambda = 0$ , ces énergies valent ( $n$  est choisi pair):

$$\begin{aligned}
 E_n^- &= \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar}{2} |\omega - \omega_0| = \begin{cases} \hbar\omega (n+1) - \frac{\hbar}{2}\omega_0 & \text{si } \omega_0 \leq \omega \\ \hbar\omega n + \frac{\hbar}{2}\omega_0 & \text{si } \omega_0 > \omega \end{cases} \\
 E_n^+ &= \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar}{2} |\omega - \omega_0| = \begin{cases} \hbar\omega n + \frac{\hbar}{2}\omega_0 & \text{si } \omega_0 \leq \omega \\ \hbar\omega (n+1) - \frac{\hbar}{2}\omega_0 & \text{si } \omega_0 > \omega \end{cases} \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

et présentent un croisement de niveaux à la résonance ( $\omega = \omega_0$ ).

Et dans le cas où  $\lambda \neq 0$ :

$$\begin{aligned}
 E_n^- &= \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \lambda_n^2} \\
 E_n^+ &= \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \lambda_n^2} \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

A la résonance, ces niveaux présentent certes un espacement minimal, mais non nul:

$$E_n^- - E_n^+ \Big|_{\omega=\omega_0} = \hbar\lambda_n,$$

qui dépend linéairement du couplage  $\lambda$ .

Le seul phénomène de répulsion des niveaux n'est donc pas une preuve de chaos, puisqu'il se manifeste également dans ce cas où une solution analytique complète existe. Il en est un indice, une condition nécessaire mais insuffisante et le recours à la statistique est indispensable.

## 4.2 Approximation de la phase. Etude spectrale comparative

Les résultats de cette section ont été publiés collectivement [40]. L'un des coauteurs, Marvulle, a effectué le travail numérique et sa thèse [45] propose quelques détails supplémentaires.

### 4.2.1 Survol des résultats connus sur le spectre

Les résultats analytiques rencontrés dans la littérature ne concernent que des cas particuliers de limite (au sens où l'une des fréquences caractéristiques du problème est de beaucoup inférieure aux autres, et non pas au sens d'une transition de la mécanique quantique à la mécanique classique). Mais pour un travail plus complet, l'utilisation de méthodes numériques est toujours nécessaire.

- Dans un premier article [46], Graham et Höhnerbach proposent pour un seul spin  $s = 1/2$ , une étude de la variation des premiers niveaux d'énergie d'une parité déterminée en fonction des différents paramètres. Leur analyse est essentiellement qualitative et ils n'ont pas entrepris de travail d'ordre statistique. Ils observent que l'augmentation de la constante de couplage, qui est classiquement le paramètre d'ordre par excellence, occasionne un phénomène général de répulsion des niveaux (un des indices du chaos quantique selon les théories spectrales exposées au chapitre 1) et la suppression progressive de "dégénérescences", qui sont le signe de grandeurs physiques conservées.

Rappelons toutefois que la répulsion des niveaux n'est qu'un indice et non une preuve de chaos. De plus, cette étude ne tient compte que de quelques-uns des premiers niveaux qu'on néglige toujours dans un traitement statistique. Toute conclusion relative au régime régulier ou chaotique du système serait prématurée à ce stade.

- Des travaux statistiques sur la "distribution des espacements entre niveaux voisins" appliqués au même modèle ont été effectués par Kuš [47] et Steeb et al. [48]. Quels que soient l'ensemble des paramètres ou les transitions étudiés par ces auteurs, la distribution  $P(x)$  ne ressemble jamais aux distributions standard de Poisson ou GOE introduites au §1.1.3. Tout au plus le système s'approche-t-il d'un simple oscillateur harmonique, dans le cas résonant ( $\omega = \omega_0$ ) et pour couplage fort.

Ces résultats ont été obtenus sur un ensemble de niveaux assez restreint, et se prêtent mal à une quelconque conclusion sur l'existence du chaos dans le modèle.

• La même étude statistique a été réalisée pour un système avec un plus grand nombre de spin ( $N = 9$ , Graham et Höhnerbach [49]) et pour le système équivalent d'un boson interagissant avec un atome à neuf niveaux ( $s = 9/2$ , Levenkopf et al. [50]). Dans les deux cas,  $P(x)$  est de type GOE pour couplage fort, et dans le second cas, le système présente une transition vers une courbe de Poisson comme  $\epsilon \rightarrow 0$ .

En conclusion, on sait donc qu'un système dont la partie décrivant le spin est composée d'au moins neuf niveaux présente dans son spectre une transition d'un régime régulier à un régime chaotique en fonction de  $\epsilon$ . On sait également que lorsque le système ne compte que deux niveaux, les statistiques sont atypiques. Cette propriété peut être la conséquence de la nature de l'échantillon spectral utilisé, à savoir sa taille relativement petite et sa localisation restreinte aux premiers niveaux.

Or, nous disposons d'une machine qui permet d'effectuer des statistiques sur un nombre de niveaux environ cinq fois supérieur. Et nous avons développé, avec l'approximation de la phase, une méthode qui permet d'explorer une région du spectre d'énergie élevée. Le but des paragraphes suivants est d'évaluer si, dans ces conditions, le spectre gardera son apparence singulière, ou s'il présentera des similarités avec celui d'un système construit avec un spin de nombre quantique plus élevé. De plus, l'écriture généralisée de  $H_\epsilon$  suggère l'étude d'une transition en  $\epsilon$ .

#### 4.2.2 Diagonalisation dans l'approximation de la phase

Pour étudier dans les meilleures conditions un intervalle du spectre réparti autour de l'énergie correspondant à une grande excitation de l'oscillateur harmonique, le hamiltonien de base doit subir à la fois la transformation de Shore et Sander (4.4) et l'"approximation de la phase" (section 3.2). La substitution dans  $H_{SS,\epsilon}$  (4.5) des créateurs et annihilateurs usuels par leur approximation  $a_2^{(+)}$  (3.50) mène au hamiltonien:

$$\begin{aligned}
 H_{SS,\epsilon,2} = & \hbar\omega(n_0 + p_\phi) + \hbar\omega_0 S_z T' \\
 & + \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \hbar\lambda^+ \left\{ \sqrt{n_0} \cos \phi + \frac{1}{4\sqrt{n_0}} (e^{-i\phi} p_\phi + p_\phi e^{i\phi}) \right\} \\
 & + \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \hbar\lambda^- S_z T' \left\{ -i\sqrt{n_0} \sin \phi + \frac{1}{2\sqrt{n_0}} (e^{-i\phi} p_\phi - p_\phi e^{i\phi}) \right\}, \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

où  $T'$ , équivalent à  $T$ , prend la forme adaptée à cette représentation :

$$T' = (-1)^{(n_0 + p_\phi)}. \quad (4.25)$$

$H_{SS,\epsilon,2}$  peut s'obtenir également en appliquant à  $H_2$  (3.51), auquel est restitué sa dépendance en  $\epsilon$ , une transformation de Shore et Sander, mais qui utilise  $T'$    la

place de  $T$ :

$$U'_{SS} = S_x(1 + T') + iS_y(1 - T') . \quad (4.26)$$

Rappelons que la transformation de l'opérateur parité donne un multiple de  $S_x$ . Et qu'il est nécessaire de ne considérer pour la statistique que des niveaux correspondant à des états de même parité. Donc dans ce cas, de traiter séparément les blocs correspondant à chacune des composantes.

$H_{SS}$  va agir sur ensemble d'états  $\{|\pm, n_0 + m\rangle, -m_0 \leq m \leq m_0\}$ , le signe de la composante s'identifiant à la parité. La définition du créateur en fonction de  $\phi$  et  $p_\phi$  exige la condition  $m_0 \leq n_0$ , mais la précision de l'approximation n'est assurée que si  $m_0 \ll n_0$ .

### 4.2.3 Résultats numériques

Nous avons décidé d'étudier les propriétés du spectre en fonction de  $\epsilon$  et de les comparer dans les cas du modèle de base (décrit par  $H_{SS,\epsilon}$ , dans la formulation de Shore et Sanders) et de l'"approximation de la phase" pour un grand nombre d'excitations (décrit par  $H_{SS,\epsilon,2}$  et avec  $n_0 = 10^6$ ).

Nous étudierons la "distribution des espacements entre niveaux voisins" ( $P(x)$  sur un spectre évidemment redressé) et la mesure de la rigidité donnée par la fonction de Dyson-Mehta  $\Delta_3(L)$ .

Les paramètres fixés correspondent au cas résonant ( $\omega = \omega_0 = 1$ ) et à un grand couplage ( $\lambda = \sqrt{2}$ ). La constante  $\hbar$  a été posée égale à l'unité.

La dimension des matrices traitées numériquement est de 1000. C'est-à-dire que dans le premier cas, la statistique portera sur les mille premiers niveaux, et dans le second, l'indice des niveaux variera de  $n_0 - m_0$  à  $n_0 + m_0$  avec  $m_0 = 500$ .

#### Modèle original

Les figures 4.1 et 4.2 représentent  $P(x)$  et  $\Delta_3(L)$  pour quatre (respectivement trois) valeurs différentes du paramètre  $\epsilon$ , ceci dans le cas du modèle original ( $H_{SS,\epsilon}$ ). Il est possible d'esquisser une explication des histogrammes observés. Dans le cas  $\epsilon = 0$ , (fig. 4.1.a),  $P(x)$  se présente comme un palier presque constant qui s'arrête abruptement. Dans l'expression approchée des énergies n'apparaissent explicitement que des facteurs  $\sqrt{n}$  et  $\sqrt{n+1}$  (4.14). La soustraction mutuelle de ces différents termes mène à une distribution quasi uniforme.

Dans le cas  $\epsilon = 1$  (fig. 4.1.c), la distribution, très proche de celle décrite par Kuf [47], est centrée autour de la valeur  $x = 1$ . L'interprétation proposée par cet auteur consiste à considérer la distribution comme une variation de celle obtenue dans la

limite des grands couplages  $\lambda$ . Alors, les énergies sont du type:

$$E_n = \hbar\omega n - \frac{\lambda^2}{2} \hbar^{\frac{3}{2}}, \quad (4.27)$$

et l'espacement constant de  $\hbar\omega$ . Pour mémoire, le spectre redressé de l'oscillateur harmonique fournit une distribution du type  $\delta(x-1)$ .

La statistique de Dyson-Mehta est plus délicate à comprendre. Dans chaque cas, la fonction  $\Delta_3(L)$  croît sur un certain intervalle de la même manière que si elle représentait une des statistiques standard de Poisson ou GOE, puis cesse brusquement de croître lorsqu'elle a atteint une limite qui varie selon la valeur de  $\epsilon$ . Ce dernier comportement est typique de l'oscillateur harmonique pour lequel le palier est situé à  $1/12$ . C'est approximativement la position du palier de la figure 4.2.c qui correspond au cas  $\epsilon = 1$ , c'est-à-dire au cas supposé être le plus irrégulier.

### Modèle approché

Les figures 4.3 et 4.4 représentent les mêmes tests statistiques que les figures 4.1 et 4.2 mais appliqués au modèle ayant subi l'"approximation de la phase" ( $H_{SS,\epsilon,2}$ ). La figure 4.3.a (correspondant au cas  $\epsilon = 0$ ) a presque l'allure d'une fonction  $\delta$ .

Cette propriété s'explique par la conservation de la grandeur  $\bar{K} = n_0 + p_\phi + S_z$ . Les vecteurs propres du hamiltonien sont alors identiques à ceux de  $\bar{K}$  qui ont la forme élémentaire (voir §4.1.3):

$$|\psi_K\rangle = c_1 |+, m\rangle + c_2 |-, m+1\rangle. \quad (4.28)$$

Si l'on néglige dans le hamiltonien les termes proportionnels à  $(n_0)^{-1/2}$ , cela revient à considérer une version  $H'_1$  (3.45) complétée par l'introduction de  $\epsilon$ :

$$H'_{\epsilon=0,1} = \hbar\omega(n_0 + p_\phi) + \hbar\omega_0 S_z + \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \frac{\lambda}{2} \sqrt{n_0} (S_+ e^{-i\phi} + S_- e^{i\phi}). \quad (4.29)$$

L'équation aux valeurs propres qui en découle s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \hbar \left( \omega(n_0 + m) + \frac{\omega_0}{2} \right) c_1 + \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \frac{\lambda}{2} \sqrt{n_0} c_2 &= E c_1 \\ \hbar \left( \omega(n_0 + m + 1) - \frac{\omega_0}{2} \right) c_2 + \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \frac{\lambda}{2} \sqrt{n_0} c_1 &= E c_2, \end{aligned} \quad (4.30)$$

et se résout à la résonance ( $\omega = \omega_0$ ) par:

$$E_{m,\pm} = \hbar\omega \left( n_0 + m + \frac{1}{2} \right) \pm \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \frac{\lambda}{2} \sqrt{n_0}. \quad (4.31)$$

Pour l'ensemble de paramètres que nous avons choisi, deux niveaux consécutifs sont distants de  $\hbar\omega$ , comme dans le cas typique de l'oscillateur harmonique.

La figure 4.3.c qui illustre le cas supposé irrégulier ( $\epsilon = 1$ ) est très similaire à la figure 4.1.c. La forme de cette dernière distribution était attribuée au fait que le couplage peut être considéré comme terme dominant. L'expression de  $H'_{\epsilon,1}$  (4.29) indique clairement que dans la limite choisie, les termes multipliés par  $(\tau_0)^{1/2}$  auront plus de poids que les autres et ce sont également des termes de couplage.

Pour la statistique  $\Delta_3$ , les trois courbes reportées en figure 4.4 présentent un palier de saturation proche de celui propre à l'oscillateur harmonique. Avec cependant un comportement sensiblement plus régulier pour le cas intégrable ( $\epsilon = 0$ ), puisque dans les deux autres cas la courbe se met à croître légèrement. De manière générale, il semble que l'"approximation de la phase" rapproche encore le modèle d'un simple oscillateur harmonique.

En conclusion, les résultats obtenus confirment le comportement spectral atypique du système spin-boson généralisé avec spin  $s = 1/2$ . Il n'est donc pas possible de décider si son régime est régulier ou non. Certes, le modèle tel qu'il est construit et dans certaines de ses approximations rend bien compte des expériences numériques. Mais l'objectif fixé, à savoir l'observation de traces de chaos dans ce système ou la preuve formelle qu'il ne peut en exister, reste éloigné.

### 4.3 Fonction de Husimi et ses zéros

#### 4.3.1 Construction théorique de la fonction de Husimi

Nous dériverons la fonction de Husimi des fonctions de Wigner dans le cas d'un problème unidimensionnel sans spin. Après quoi, nous généraliserons la formulation obtenue.

#### Transformation de Weyl - Fonction de Wigner

La transformation de Weyl, qui date de 1927 [51], a été la première tentative d'établir une relation entre un opérateur quantique et une fonction de l'espace de phase classique. Son corollaire, la fonction de Wigner [52], est à une normalisation près la transformation de Weyl d'un opérateur densité. Ces développements ont suivi de très près l'avènement de la mécanique quantique, car le problème de la correspondance entre les réalités décrites par les physiques classique et quantique s'est immédiatement posé. De Groot [53] présente une revue détaillée des propriétés respectives de ces objets, et nous suivrons ses définitions.

La fonction  $a_W(q, p)$  est associée à l'opérateur quantique  $\hat{A}$  par la transformation de Weyl:

$$a_W(q, p) = \int dv e^{ikpv} \left\langle q - \frac{\nu}{2} \middle| \hat{A} \middle| q + \frac{\nu}{2} \right\rangle. \quad (4.32)$$

La dépendance explicite de  $a_W(q, p)$  en  $\hbar$  signifie que cette fonction représente un objet quantique, bien qu'ayant les propriétés d'un objet classique. Le passage à la limite  $\hbar \rightarrow 0$  serait nécessaire pour obtenir des informations sur la nature du problème classique.

En général, la transformation d'un produit d'opérateurs ne donne pas le produit des transformations. Les lois de multiplication sont décrites par une algèbre de Moyal [54].

Cette propriété de la trace sera utilisée plus loin:

$$\text{Tr} \hat{A} \hat{B} = \text{Tr} \hat{B} \hat{A} = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dq dp a_W(q, p) b_W(q, p). \quad (4.33)$$

Soit l'opérateur densité quantique:

$$\hat{\rho} = \sum_{\alpha} w_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle \langle \psi_{\alpha}|,$$

qui représente un mélange des états  $|\psi_{\alpha}\rangle$  (avec la condition  $\sum w_{\alpha} = 1$ , qui garantit que  $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$ ). Dans le cas d'un état pur  $|\psi\rangle$ ,  $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|$  est le simple projecteur

sur cet état. La fonction de Wigner est définie par:

$$\rho^W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\nu e^{i\nu p} \left\langle q - \frac{\nu}{2} \left| \hat{\rho} \left| q + \frac{\nu}{2} \right. \right\rangle. \quad (4.34)$$

La formule des traces en assure la normalisation:

$$\int dq dp \rho^W(q, p) = \text{Tr} \hat{\rho} = 1. \quad (4.35)$$

Cette fonction est réelle (la conjugaison hermitique du membre de droite de (4.34) et le changement de variable  $\nu' = -\nu$  redonne la même expression), mais n'est pas définie positive. En conséquence, elle ne peut pas être considérée comme une distribution de probabilité. Par contre, les intégrales de  $\rho^W(q, p)$  sur  $q$  et  $p$  sont définies positives, sont normées et présentent donc les propriétés d'une distribution de probabilité.

$\rho^W(q, p)$  représente également un objet quantique. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que  $\rho^W(q, p)$  est bornée :

$$|\rho^W(q, p)| \leq \frac{1}{\pi\hbar}. \quad (4.36)$$

Comme cette fonction est aussi normée, son support doit être de dimension finie  $\geq \pi\hbar$ . Ce qui correspond aux relations d'incertitude de Heisenberg.

Dans la pratique, ces fonctions présentent souvent de fortes oscillations du fait de la présence de facteurs de phase sous l'intégrale dont la fréquence dépend explicitement de  $\hbar$ . C'est la raison pour laquelle il est délicat de distinguer (même qualitativement) une fonction de Wigner issue d'un système supposé régulier, d'une autre, issue d'un système supposé chaotique.

### Définition de la fonction de Husimi

Dans un article daté de 1940 [55], Husimi construit une fonction de distribution classique pour l'oscillateur harmonique par lissage gaussien des éléments de matrice d'un opérateur densité. Aucune allusion aux travaux de Weyl et de Wigner ne figure dans ce papier. Aujourd'hui on appelle "distribution de Husimi" la fonction obtenue par lissage gaussien de la fonction de Wigner:

$$W(q, p) = 2 \int dq' dp' \rho^W(q', p') e^{-\frac{1}{2}[(q-q')^2 + (p-p')^2]}. \quad (4.37)$$

Cette expression se simplifie passablement si l'on y introduit de manière explicite la transformée de Weyl du projecteur sur un état cohérent. Dans la base propre de l'opérateur position, un état cohérent se décompose comme suit:

$$\langle x | z_0 \rangle_N = \langle x | e^{z_0 \hat{a}^\dagger - \bar{z}_0 \hat{a}} | 0 \rangle = (\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}} e^{i k p z_0} e^{-\frac{1}{2\hbar}(x-z_0)^2}. \quad (4.38)$$

Alors:

$$\begin{aligned} [ |z_b\rangle_N \langle z_b| ]_W(q', p') &= \int d\nu e^{i\nu} \langle q' - \frac{\nu}{2} | z_b \rangle_N \langle z_b | q' + \frac{\nu}{2} \rangle \\ &= 2e^{-\frac{1}{2}[(q'-q')^2 + (p-p')^2]} \end{aligned} \quad (4.39)$$

La fonction de Husimi s'écrit donc plus simplement:

$$W(z_b) = \int dq' dp' \rho^W(q', p') [ |z_b\rangle_N \langle z_b| ]_W(q', p'), \quad (4.40)$$

et, d'après la formule des traces:

$$W(z_b) = \text{Tr} (\hat{\rho} |z_b\rangle_N \langle z_b|) = \sum_{\alpha} w_{\alpha} | \langle z_b | \psi_{\alpha} \rangle |^2. \quad (4.41)$$

Si la matrice densité représente un état pur, la sommation disparaît, et on attribuera comme indice à la fonction le signe qui désigne l'état:

$$W_{\psi}(z_b) = | \langle z_b | \psi \rangle |^2. \quad (4.42)$$

On reconnaît ici le Q-symbole du projecteur  $P_{|\psi\rangle}$  sur l'état  $|\psi\rangle$ .

Cette dernière formulation, obtenue à partir d'un problème posé dans le cadre propre à l'oscillateur harmonique, peut se généraliser au cas du spin. Il suffit de substituer  $|z_s\rangle_N$  à  $|z_b\rangle_N$  et la fonction dépend alors des variables de la sphère.

$W_{\psi}(z_{b,s})$  est positive, normée à condition que l'état  $|\psi\rangle$  lui-même le soit, et bornée supérieurement par 1. Elle mérite donc son appellation de distribution. Sa positivité est explicite dans (4.42), sa normalisation se démontre grâce à la relation de fermeture de la base des  $|z_b\rangle_N$ , et l'existence de la borne grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz de la même manière que (4.36).

### Illustrations élémentaires

Pour les systèmes d'un oscillateur harmonique et d'un spin libres, nous calculerons les distributions associées aux états propres et aux états cohérents eux-mêmes.

#### a) Oscillateur harmonique

• état propre:  $|\psi\rangle = |n\rangle$

On trouve:

$$\langle z_b | n \rangle = \frac{\tilde{z}_b^n}{\sqrt{n!}} \implies W_n(z_b) = \frac{|z_b|^{2n}}{n!} e^{-|z_b|^2}, \quad (4.43)$$

fonction à symétrie circulaire dans le plan complexe qui décrit une couronne dont le maximum est en  $|z_b|_{\text{max}}^2 = n \implies q_{\text{max}} = (2\hbar n)^{\frac{1}{2}} = (2E/\omega - \hbar)^{\frac{1}{2}}$ . Ce résultat est en

bon accord avec l'image classique pour laquelle  $q_{max} = (2E/\omega)^{1/2}$ .

• état cohérent:  $|\psi\rangle = |\zeta_b\rangle$

On trouve:

$$\langle z_b | \zeta_b \rangle = e^{z_b \zeta_b} \implies W_{\zeta_b}(z_b) = e^{-|z_b - \zeta_b|^2}, \quad (4.44)$$

qui est une gaussienne centrée en  $\zeta_b$ . Dans le plan de phase et exprimée en terme des variables canoniques, la gaussienne présente une largeur correspondant à une dispersion minimale au sens du principe de Heisenberg.

b) Spin

• état propre:  $|\psi\rangle = |s, m\rangle \equiv |m\rangle$

On trouve:

$$\langle z_s | m \rangle = \sqrt{\binom{2s}{s-m}} \bar{z}_s^{s-m} \implies W_m(z_s) = \binom{2s}{s-m} \frac{|z_s|^{2(s-m)}}{(1+|z_s|^2)^{2s}}, \quad (4.45)$$

fonction à symétrie circulaire qui décrit également une couronne (sauf pour  $s = \pm m$ ), mais à décroissance plus lente que la gaussienne. Le maximum est situé en  $|z_s|_{max} = \sqrt{s-m}/\sqrt{s+m}$ . Si l'on assimile les grandeurs propres au spin quantique à une sphère, alors  $m = s \cos \theta \implies |z_s|_{max} = \tan \theta_{max}/2$ . On retrouve l'image des parallèles dans la projection stéréographique. A noter le cas particulier de  $W_{m=-s}(z_s)$ , qui est une fonction monotone croissante en  $|z_s|$ , et qui tend asymptotiquement vers 1. Ce qui correspond au fait que la projection stéréographique du pôle sud est le point à l'infini.

• état cohérent:  $|\psi\rangle = |\zeta_s\rangle$

On trouve:

$$\langle z_s | \zeta_s \rangle = (1 + \bar{z}_s \zeta_s)^{2s} \implies W_{\zeta_s}(z_s) = \left( 1 - \frac{|z_s - \zeta_s|^2}{(1+|z_s|^2)(1+|\zeta_s|^2)} \right)^{2s}. \quad (4.46)$$

Les propriétés de la norme impliquent que  $0 \leq W_{\zeta_s}(z_s) \leq 1$ , et de plus que  $W_{\zeta_s}(z_s) = 1$  si et seulement si  $z_s = \zeta_s$ . Dans la limite des grands spins, cette fonction est donc piquée autour de  $\zeta_s$ .

Parmi les auteurs à qui l'on doit la renaissance des fonctions de Husimi, il faut mentionner Takahashi [56] qui présente une revue des différents types de distributions quantiques et classiques (avec des illustrations pour des systèmes relativement simples et sans spin). Il conclut notamment que la fonction de Wigner est inadéquate

pour distinguer un système régulier d'un système chaotique, contrairement à la fonction de Husimi. Celle-ci se localise au voisinage des trajectoires classiques lorsque le système est intégrable. Et de manière générale, elle se comporte de manière très similaire à un type particulier de distribution classique, qui correspond à un lissage gaussien de la distribution classique usuelle.

### Application au modèle spin-boson

L'extension du formalisme au système spin-boson, l'analyse des distributions de zéros et les résultats numériques sont résumés en [57].

Les états propres du hamiltonien spin-boson peuvent s'écrire:

$$|\psi^E\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2s} c_{s-m,n}^E |s-m, n\rangle. \quad (4.47)$$

Dorénavant un seul état sera considéré à la fois; l'indice qui correspond à l'énergie sera donc négligé. La définition des fonctions de Husimi se généralise également à des espaces-produit. Dans ce cas, l'état cohérent (3.32) permet de définir la fonction de Husimi:

$$\begin{aligned} W_{\psi}(\bar{z}_b, \bar{z}_s) &= |\langle \bar{z}_s, z_b | \psi \rangle|^2 \\ &= (1 + |\bar{z}_s|^2)^{-2s} e^{-|\bar{z}_s|^2} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2s} \frac{c_{s-m,n}}{\sqrt{n!}} \sqrt{\binom{2s}{m}} \bar{z}_b^n \bar{z}_s^m \right|^2. \end{aligned} \quad (4.48)$$

L'écriture des états cohérents en fonction de  $z_{b,s}$  (tels qu'introduits au chapitre 3), plutôt que de  $\bar{z}_{b,s}$ , paraît plus naturelle. C'est cependant sous leur forme conjuguée que ces variables apparaissent dans la fonction de Husimi. Pour éviter d'encombrer la notation, on décidera d'oublier la barre de conjugaison (ou plus régulièrement, d'admettre implicitement une nouvelle définition des états cohérents dans laquelle les générateurs (3.7) et (3.12) seraient écrits en fonction des variables  $\bar{z}_{b,s}$ ).

$W_{\psi}(z_b, z_s)$  est une fonction à valeurs réelles de deux variables complexes, ou de quatre variables réelles si elle est exprimée avec les coordonnées d'angle et d'action (voir §3.1.1):

$$\begin{aligned} W_{\psi}(I_b, \varphi_b, I_s, \varphi_s) &= \\ e^{-I_b} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2s} c_{s-m,n} \sqrt{\frac{I_b^n}{n!}} \binom{2s}{m} I_s^m (1 - I_s)^{2s-m} e^{in\varphi_b} e^{im\varphi_s} \right|^2. \end{aligned} \quad (4.49)$$

## Projections et sections

L'information contenue dans  $W_\psi(I_b, \varphi_b, I_s, \varphi_s)$  semble très inaccessible. Notre perception étant limitée aux représentations tridimensionnelles, nous envisagerons différentes méthodes pour réduire  $W_\psi$  à une fonction de deux variables réelles. La première est une méthode projective:

$$\begin{aligned} P_\psi(I_b, I_s) &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi_b \int_0^{2\pi} d\varphi_s W_\psi(I_b, \varphi_b, I_s, \varphi_s) \\ &= e^{-I_s} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2s} |c_{s-m,n}|^2 \frac{I_b^n}{n!} \binom{2s}{m} I_s^m (1 - I_s)^{2s-m} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Mais en admettant qu'il existe un lien entre trajectoire classique et fonction de Husimi, ce procédé n'est pas entièrement satisfaisant. En effet, les projections bidimensionnelles d'une trajectoire classique dans un espace de phase de dimension 4 ne renseignent en rien sur le degré de régularité du système. Par contre, le recours aux sections de Poincaré est bien plus efficace. L'opération qu'on interprète quantiquement comme l'intersection d'une trajectoire avec un hyperplan donné consiste simplement à fixer une des variables de  $W_\psi$ ; en l'occurrence, nous choisirons  $I_s$ .

Dans cette optique, une section de Poincaré de la fonction de Husimi dans l'espace de phase de l'oscillateur harmonique peut se définir de deux manières différentes. La première est dans l'esprit la plus proche de la section classique:

$$S_{I_s}^\psi(I_b, \varphi_b) = W_\psi(I_b, \varphi_b, I_s = \text{cste}, \varphi_s(I_b, \varphi_b, I_s, E)) \quad (4.51)$$

où  $\varphi_s$  s'obtient par inversion de l'équation classique:

$$\mathcal{H}_s(I_b, \varphi_b, I_s, \varphi_s) = E$$

Son écriture explicite n'est pas commode. De plus, la référence directe au modèle classique est litigieuse lorsqu'on traite des systèmes à petits spins. On préférera la définition suivante:

$$\begin{aligned} R_{I_s}^\psi(I_b, \varphi_b) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_s W_\psi(I_b, \varphi_b, I_s = \text{cste}, \varphi_s) \\ &= \sum_{n=0}^{2s} \binom{2s}{n} I_s^n (1 - I_s)^{2s-n} \mathcal{R}_n(I_b, \varphi_b) \end{aligned} \quad (4.52)$$

avec:

$$\mathcal{R}_n(I_b, \varphi_b) = e^{-I_b} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{I_b^n}{n!}} e^{in\varphi_b} c_{s-m,n} \right|^2$$

ou dans la notation en fonction de la variable complexe  $z_b$ :

$$\mathcal{R}_n(z_b) = e^{-|z_b|^2} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_b^n}{\sqrt{n!}} c_{s-m,n} \right|^2 \equiv e^{-|z_b|^2} |\psi_{s-m}(z_b)|^2 \quad (4.53)$$

est ce que nous appellerons la section réduite associée à la composante  $(s - m)$  du spineur. Cette fonction correspond à la fonction de Husimi de la composante du spineur  $|\psi_{s-m}\rangle$  (1.23). L'ensemble des  $(2s + 1)$  sections réduites comprend toute l'information contenue dans la section de Husimi globale.

Dans la limite des grands nombres quantiques de spin, les poids binômiaux, facteurs des sections réduites (4.52), se comportent comme des fonctions delta autour de  $m_0 = s(2I_0 - 1)$ . Par conséquent,  $R_{I_0}(z_b)$  coïncide dans ce cas avec  $\mathcal{R}_{m_0}(z_b)$ . Cette propriété permet en théorie une comparaison rigoureuse avec les sections de Poincaré classiques.

Il est intéressant de mentionner un ensemble de travaux précurseurs de Saraceno et Leboeuf [58]. Leurs résultats les plus significatifs, obtenus sur un modèle autre que le spin-boson, sont les suivants:

- Dans une limite semi-classique, la fonction de Husimi est confinée aux abords de la surface d'énergie constante classique.
- En conséquence, les deux sections de Poincaré définies de manière similaire à  $S(z_b)$  et  $R(z_b)$  sont tout à fait comparables.
- De manière générale, la section est localisée sur un voisinage de la section de Poincaré classique de la "trajectoire dominante". Cette trajectoire est déterminée par le choix comme condition initiale du point correspondant au maximum de la fonction de Husimi.

### Zéros et information

Il est important de savoir si la fonction de Husimi associée à une fonction d'onde est capable de restituer toute l'information contenue dans celle-ci. Ou en d'autres termes, s'il existe entre les deux une relation bijective. La question est pertinente puisque selon sa définition, la fonction de Husimi est le carré du module de la projection de l'état référence sur un état cohérent, et que cette série d'opérations détruit apparemment l'information que pourrait contenir la phase.

La réponse est relativement simple lorsque l'espace de Hilbert est de dimension finie et que la fonction de Husimi ne dépend que d'une variable complexe  $z$ . C'est le cas notamment dans les systèmes non autonomes à un seul spin, et dans l'exemple présenté dans le premier article à proposer l'étude de zéros (Leboeuf et Voros [59]). La formulation suivante s'applique à tout système de ce type:

$$W_\psi(z) = \mathcal{N}^2(z) \left| \sum_{n=0}^N b_n^\psi z^n \right|^2 \equiv \mathcal{N}^2(z) |\psi(z)|^2, \quad (4.54)$$

où  $\mathcal{N}^2(z)$  est une fonction de normalisation strictement positive et qui ne dépend pas de l'état choisi  $|\psi\rangle$ . Mais les  $b_n^\psi$  en dépendent directement.  $\psi(z)$  est une représentation complète de  $|\psi\rangle$ , dans le sens que sa connaissance permet de reconstruire complètement l'état  $|\psi\rangle$ , puisque les états cohérents forment une base

complète. C'est aussi un polynôme de degré  $N$ . Or, tout polynôme peut se factoriser en des produits élémentaires où apparaissent ses zéros  $z_j$ :

$$\sum_{n=0}^N b_n^* z^n = b_N^* \prod_{j=1}^N (z - z_j) . \quad (4.55)$$

Et les zéros de  $\psi(z)$  sont également ceux de  $W_\psi(z)$ . Par transitivité, il existe donc une relation bijective entre l'état physique de référence  $|\psi\rangle$  et la répartition dans l'espace de phase des zéros de la fonction de Husimi associée  $W_\psi(z)$ . Ainsi dans cette répartition se trouve l'indice, s'il existe, d'une distinction quantique entre régularité et chaos.

Dans les exemples simples présentés plus haut, les fonctions de Husimi associées aux états propres du spin ou de l'oscillateur harmonique auront comme seul zéro (dont la dégénérescence dépend de l'indice de l'état) l'origine  $z_{b,s} = 0$ .

Le résultat obtenu par Voros et Leboeuf exprime la possibilité de distinguer la répartition des zéros provenant d'un système dont la limite classique est intégrable d'un autre dont la limite est chaotique. Dans le premier cas, les zéros seront disposés selon des courbes unidimensionnelles. Dans le second cas, ils seront distribués aléatoirement dans l'espace de phase. Il est clair que ce critère est essentiellement très qualitatif. Et il n'existe encore aucune explication physique convaincante de ce comportement.

Le problème se complique si la dimension de l'espace de Hilbert tend vers l'infini. L'expression (4.54) reste valable, mais avec  $N \rightarrow \infty$ ,  $\psi(z)$  n'est plus un polynôme mais une fonction analytique entière [60], [61]. Il existe également un théorème de factorisation, dû à Hadamard, mais il nécessite la connaissance de l'ordre  $\mu$  de la fonction entière  $\psi(z)$ . Définissons la fonction  $M_\psi(r)$  comme le maximum de  $|\psi(z)|$  lorsque  $|z| = r$ .  $\psi(z)$  est dite d'ordre fini s'il existe une constante positive  $k$  telle qu'asymptotiquement:

$$M_\psi(r) < e^{r^k} .$$

L'ordre de  $\psi(z)$  est défini par la plus grande borne inférieure des nombres  $k$ , et s'exprime par:

$$\mu = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_\psi(r)}{\ln r} . \quad (4.56)$$

C'est-à-dire que la fonction  $M(r)$  a un comportement qui s'apparente à celui de  $\exp(r^\mu)$  au plus fort de sa croissance.

Si l'ordre est fini, il est possible de l'exprimer en fonction des coefficients de la série [62]:

$$\mu = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{\ln \frac{1}{|b_n|}} . \quad (4.57)$$

La factorisation a alors la forme suivante:

$$\psi(z) = z^n e^{Q(z)} P(z) , \quad (4.58)$$

où  $Q(z)$  est un polynôme de degré  $l \leq \mu$  et  $P(z)$  ce qu'on appelle un produit canonique, qui s'annule en les zéros de  $\psi(z)$  et qui est écrit de telle manière que la convergence est assurée sur tout domaine borné. Si  $\mu$  n'est pas un nombre entier,  $P(z)$  compte une infinité de zéros. Par contre, s'il l'est, rien ne permet de décider du nombre de zéros de  $P(z)$ , ni même du caractère fini de ce nombre. Comme exemple, citons la fonction  $\exp(z)$  d'ordre 1 qui n'a pas le moindre zéro, tandis que  $\cosh(z) = (\exp(z) + \exp(-z))/2$ , de même ordre, en compte une infinité.

Le problème de la détermination complète de l'état  $|\psi\rangle$  par les zéros de sa fonction d'onde  $\psi(z)$  a donc une réponse qui diffère selon que l'ordre de celle-ci est strictement plus petit ou plus grand que 1. Dans le premier cas, la détermination est totale, mais nécessite un ensemble infini de zéros. Dans le second cas, les zéros ne rendront pas compte de l'exponentielle  $\exp Q(z)$  et par conséquent, la détermination ne sera que partielle. On peut admettre tout de même que cette exponentielle décrit essentiellement un comportement asymptotique et que l'ensemble des zéros constitue une part importante de l'information contenue dans l'état de référence.

Si l'espace de phase classique dans lequel est défini le problème est de dimension supérieure à 2, la fonction de Husimi est une fonction analytique à plusieurs variables complexes. Leur théorie est mal connue, et en particulier les sous-variétés de  $\mathbb{C}^k$  sur lesquelles se trouvent les zéros, leur localisation et l'information qu'ils contiennent.

La section de Poincaré, telle qu'écrite en (4.52), se présente sous la forme d'une somme pondérée de sections réduites, dont chacune est une fonction analytique entière qui détermine complètement ou partiellement selon son ordre la composante du spineur à laquelle elle est associée. Dans le cas idéal d'un ordre inférieur à 1 pour chaque section réduite, la distribution des zéros de l'ensemble de ces sections déterminera complètement l'état de base. C'est à la détection de ces zéros qu'est consacrée l'expérience numérique décrite dans les paragraphes suivants, puisque la section globale n'a des zéros qu'accidentellement.

#### 4.3.2 Approche numérique

L'expérience numérique se heurte parfois à des difficultés pratiques très semblables à celles rencontrées dans les laboratoires. Difficultés liées en particulier à la précision limitée des données numériques utiles. Ce paragraphe montrera de quelle manière ces imprécisions se manifestent dans les problèmes de diagonalisation et de recherche des zéros d'un polynôme, les moyens dont on dispose pour s'en accommoder et une série de vérifications.

## Diagonalisation

Pour un spin  $s = 1/2$ , la transformation de Shore et Sander, telle qu'elle est présentée dans la première section de ce chapitre, modifie le hamiltonien de base  $H_i$  en un hamiltonien tridiagonal  $H_{SS, \epsilon}$ . Cette opération facilite la diagonalisation numérique, effectuée grâce au sous-programme (D)EVCSB de la bibliothèque IMSL.

Les caractéristiques (4.17) et (4.20) des vecteurs propres trouvés analytiquement pour le modèle de Jaynes et Cummings ont une implication importante pour la diagonalisation du système perturbé. En effet, si ces vecteurs propres sont écrits sous la forme d'un spineur :

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} |\psi_+\rangle \\ |\psi_-\rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sum_n c_{+,n} |+, n\rangle \\ \sum_n c_{-,n} |-, n\rangle \end{pmatrix},$$

alors pour  $\epsilon = 0$ , chaque composante  $|\psi_{\pm}\rangle$  ne compte qu'un seul élément non nul dans la base de l'oscillateur harmonique, ce qui correspond à une localisation complète. Il faut s'attendre, lorsque le paramètre  $\epsilon$  prend une valeur finie mais petite, à ce que les états restent localisés au voisinage de ce qu'était leur position lorsque  $\epsilon$  valait 0. Théoriquement cela ne pose pas de problème spécifique, mais pratiquement cela signifie que la décroissance des coefficients sera rapide quand ils s'éloigneront du sommet du pic (de la zone de localisation maximale), et par conséquent qu'ils vont très vite atteindre des ordres de grandeur inaccessibles à la machine.

Sans entrer dans trop de détails techniques, notons que la précision d'un nombre tel que l'utilisent les ordinateurs subit une limitation de deux types :

- ordre de grandeur,
- nombre de chiffres significatifs.

Et trois types de précisions sont proposés (valeurs approximatives):

Précision	Chiffres significatifs	Ordre de grandeur
Simple	7	$10^{-38} - 10^{+38}$
Double	16	$10^{-38} - 10^{+38}$
Flottante	15	$10^{-306} - 10^{+306}$

Les sous-programmes de diagonalisation n'existent qu'en précision simple et double, donc la limite inférieure de l'ordre de grandeur des coefficients est fixée à  $10^{-38}$ . En conséquence, la machine va poser systématiquement identiques à 0 tous les coefficients qu'elle estime inférieurs à cette limite. Rappelons la nature de notre problème: déterminer les zéros d'un polynôme construit de telle sorte que le facteur du terme d'ordre  $n$  soit le  $n^{\text{ème}}$  coefficient de la composante choisie de l'état propre, mais divisé par  $\sqrt{n!}$ . C'est dire l'importance des coefficients d'indice bas, qu'il sera absolument impossible de négliger. Un moyen existe d'éviter cette embûche, mais il est très restrictif. Il s'agit de sélectionner les états d'énergies les plus basses tels que le premier de leurs coefficients soit supérieur à la limite et de négliger tous les derniers coefficients inférieurs à cette limite.

Un phénomène plus grave survient, que l'on attribuera à des erreurs d'arrondis, telles qu'elles peuvent se produire lorsqu'un ordinateur itère une opération arithmétique un grand nombre de fois (on peut vérifier par exemple que pour une machine:  $\sum_{i=1}^N 1/N = 0$  si  $N > 10^k$  où  $k$  est le nombre de chiffres significatifs). Il se traduit dans la diagonalisation par un palier dans la représentation logarithmique des valeurs absolues des coefficients en fonction de leur indice. La figure 4.5 montre deux états propres de  $\hat{H}_t$  de même énergie, pour un même ensemble de paramètres, mais calculés une fois en simple précision et une fois en double. Ce palier est situé aux alentours de la valeur  $10^{-k}$  et varie donc en fonction de la précision choisie. Il est toujours présent pour des indices inférieurs à celui correspondant au maximum, mais seulement quelquefois pour des indices supérieurs. Il est possible de choisir les états tels que leurs coefficients d'indice les plus bas ne soient pas affectés par le palier. Mais la sélection est très restrictive car la limite en deça de laquelle les coefficients ne sont plus fiables est bien plus élevée que le zéro de la machine.

La situation n'est pas irrémédiable. Les premiers coefficients sont donnés avec une excellente précision par une relation de récurrence qui découle de la résolution directe de l'équation de Schrödinger. L'équation aux valeurs propres issue de  $H_t$  se résoud par:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\lambda} \left(\hbar\omega n + \frac{\hbar\omega}{2} - E\right) c_{+,n} + \sqrt{n+1} c_{-,n+1} + \epsilon\sqrt{n} c_{-,n-1} &= 0 \\ \left(\frac{2}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\lambda} \left(\hbar\omega n - \frac{\hbar\omega}{2} - E\right) c_{-,n} + \sqrt{n} c_{+,n-1} + \epsilon\sqrt{n+1} c_{+,n+1} &= 0 \\ c_{+,1} &= \left(\frac{2}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\hbar\omega_0}{2} - E\right) c_{-,0} \\ c_{-,1} &= -\left(\frac{2}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\hbar\omega_0}{2} + E\right) c_{+,0} \end{aligned} \quad (4.59)$$

La transformation de Shore et Sander a l'avantage de ne pas mêler les composantes du spin, puisque dans ce cas la parité leur est associée. La relation prend alors la forme suivante pour les états pairs (nous n'écrivons pas ici l'indice de parité, identique pour chaque terme):

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} \tilde{c}_{n+1} + \epsilon\sqrt{n} \tilde{c}_{n-1} + \left(\frac{2}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\lambda} \left(\hbar\omega n + \frac{\hbar\omega_0}{2} - E\right) \tilde{c}_n &= 0 \quad n \text{ pair} \\ \epsilon\sqrt{n+1} \tilde{c}_{n+1} + \sqrt{n} \tilde{c}_{n-1} + \left(\frac{2}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\lambda} \left(\hbar\omega n - \frac{\hbar\omega_0}{2} - E\right) \tilde{c}_n &= 0 \quad n \text{ impair} \\ \tilde{c}_1 &= -\left(\frac{2}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\hbar\omega_0}{2} - E\right) \tilde{c}_0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

et une forme tout à fait comparable pour la parité opposée. Une propriété apparaît immédiatement: tous les coefficients  $\tilde{c}_n$  dépendent linéairement de  $\tilde{c}_0$ . Mais ils dépendent également explicitement de  $E$ .

L'idée est d'harmoniser la méthode numérique et la récurrence. Dans la pratique, nous commençons par une diagonalisation qui nous fournit un état propre avec les imprécisions numériques décrites plus haut et son énergie propre  $E$ . Cette énergie est introduite dans la relation (4.60) dont l'ancrage se fait à partir d'un coefficient  $\tilde{c}_0$  arbitraire. On décide alors de l'indice du premier coefficient numérique que l'on juge fiable et on y raccorde le coefficient de même indice provenant de la récurrence. Tous les coefficients d'indice inférieur suivent par linéarité. La récurrence peut se calculer en précision flottante et par là couvrir une gamme très étendue d'ordres de grandeur. La figure 4.6 illustre ce procédé, appliqué à l'état représenté en figure 4.5.b, transformé en état propre de  $H_s$ . La courbe résultant du raccord est d'apparence parfaitement lisse.

Si nous disposons d'une relation de récurrence si efficace, pourquoi ne pas l'utiliser pour déterminer complètement l'état propre? En fait, sa convergence n'est satisfaisante que dans la partie croissante de la courbe. Dans la partie décroissante, il faudrait au contraire une précision énorme de l'énergie pour espérer voir converger un nombre utile de coefficients. Pour stabiliser un coefficient de plus, il faut en général considérer un chiffre significatif de plus dans l'énergie. C'est pourquoi une méthode hybride nous semble la seule envisageable.

Le problème du palier n'est pas typique du spin  $s = 1/2$ . Mais c'est dans ce seul cas qu'il est possible de construire une relation de récurrence qui possède les propriétés de linéarité nécessaires à la réalisation du raccordement. C'est pour cette raison que l'étude de systèmes avec un spin plus élevé est excessivement compliquée.

### Recherche des zéros

Bien que la section réduite (4.53) soit une fonction entière, le problème posé numériquement se résume à la recherche des zéros d'un polynôme. En effet, la taille finie de la matrice à diagonaliser impose nécessairement une borne supérieure aux indices de sommation. De plus, le facteur de normalisation, une gaussienne, n'a aucune incidence sur les zéros.

Le premier problème rencontré est celui du simple calcul des valeurs que peut prendre un polynôme de degré élevé dans lequel les coefficients peuvent s'étaler sur des ordres de grandeur très étendus. La méthode qui assure la plus grande précision est celle dite "schéma de Horner":

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^N \frac{c_n}{\sqrt{n!}} z^n$$

$$= \left( \dots \left( \left( c_N \frac{z}{\sqrt{N}} + c_{N-1} \right) \frac{z}{\sqrt{N-1}} + c_{N-2} \right) \frac{z}{\sqrt{N-2}} + \dots + c_1 \right) z + c_0 .$$

Ce qui se traduit numériquement par une autre relation de récurrence:

$$s_0 = c_N, \quad s_i = \frac{z}{\sqrt{N-i+1}} s_{i-1} + c_{N-i} \implies \psi(z) = s_N. \quad (4.61)$$

Les sous-programmes de résolution d'équations polynomiales à disposition dans les bibliothèques sont souvent basés sur les méthodes de Newton. Mais la stabilité de leurs solutions n'est assurée que pour des polynômes d'ordre très bas. Or, l'intérêt du problème est situé dans une distribution de zéros et par conséquent il faut s'efforcer d'en maintenir le plus grand nombre possible. Les quelques tentatives effectuées avec ces sous-programmes n'ont pas été concluantes.

Une première méthode utilisable mais très rudimentaire consiste à représenter graphiquement le module de la fonction, et de préférence dans une échelle logarithmique, pour mettre en évidence les zéros. Les pics sont détectables plus aisément que les creux, l'échelle est donc inversée. Mais étant donnés la croissance très forte des valeurs prises par le polynôme et le pouvoir de résolution limité du programme graphique, ce qui devrait être un ensemble de pics apparaît comme un ensemble d'excroissances sur une surface presque lisse et qui ne sont parfois qu'à peine décelables. De plus, leur localisation dans le plan de phase ne peut être qu'estimée.

Nous préférons une méthode qui se fonde sur un théorème d'analyse complexe bien connu [63]:

Théorème: Si  $f(z)$  est une fonction holomorphe dans un domaine  $D$  et  $\partial D$  le bord de ce domaine, alors:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f'(z) dz}{f(z)} = M, \quad (4.62)$$

où  $M$  est le nombre de zéros de  $f(z)$  à l'intérieur de  $D$  comptés avec leur multiplicité.

Ce théorème a comme corollaire important le fait que cette intégrale correspond à un facteur  $2\pi$  près à la variation de la phase de  $f(z)$  le long du contour  $\partial D$ . Par conséquent, repérer les zéros de  $f(z)$  revient à repérer les accidents que subit sa phase.

La stratégie programmée consiste à choisir comme domaine d'investigation un disque de rayon compatible avec l'ordre de grandeur prévu pour les valeurs que prend le polynôme et de déterminer les zéros qu'il contient. Puis il faut réduire progressivement le rayon et calculer à chaque étape le nombre de zéros circonscrits jusqu'à ce qu'apparaisse un manque dans le décompte. C'est alors la preuve que dans la couronne qui différencie les deux derniers disques se trouve un nombre de zéros égal au défaut détecté. La couronne est ensuite divisée en cellules dont la taille

peut varier en fonction de la résolution désirée. Cette méthode est assez gourmande en temps de calcul et n'est pas infallible. En effet, le programme oublie une certaine proportion de zéros (qui heureusement reste faible); plus précisément, il parvient à déterminer le module de certains zéros, mais pas leur argument. Une raison possible à cette lacune est leur localisation accidentellement très proche des parois des cellules lors de la division arbitraire de l'espace de phase. C'est toutefois à ce procédé que nous donnerons la préférence, et comme premier indice de sa fiabilité, la figure 4.7 présente une comparaison entre cette méthode (b) et celle de la représentation graphique (a). A chaque zéro détecté sur l'une des figures, on peut associer sans équivoque son double sur l'autre figure.

Nous procéderons à d'autres vérifications dans le paragraphe suivant car elles sont liées à l'interprétation des résultats.

### Effets de la coupure

Une coupure de la série de la fonction entière peut intervenir dans différentes circonstances, illustrées dans la figure 4.8 sur trois états distincts:

- La première a lieu nécessairement; c'est la taille maximale de la matrice que l'on peut introduire sur la machine qui est alors facteur limitant (généralement  $N = 1200$ ). On le voit en 4.8.a, où la courbe décroît jusqu'à atteindre le bord droit du cadre.

- La seconde est fonction de la limite d'ordre de grandeur tolérée par la machine. Cette coupure dépend pour chaque état de la localisation du maximum de ses coefficients et de leur taux de décroissance pour des indices supérieurs. Il existe cependant des états qui ne sont pas touchés par cette restriction. L'interruption brutale de la partie décroissante de la courbe 4.8.b signifie que tous les coefficients d'indice supérieur sont considérés comme ayant la valeur 0.

- La dernière est plus aléatoire. Il peut arriver que des problèmes d'arrondi numérique perturbent également la partie décroissante de la courbe. C'est le cas représenté en 4.8.c, où les derniers coefficients ne sont pas fiables. Il faut les éliminer et de fait introduire une nouvelle coupure artificielle.

Il est essentiel de savoir de quelle manière une coupure va affecter la distribution des zéros qu'on veut attribuer à la fonction entière. Un théorème dû à Hurwitz et dérivé de celui de Rouché donne une réponse partielle [64]:

Théorème: Soit une suite de fonctions analytiques  $f_N(z)$  qui, sur un domaine  $D \subset \mathbb{C}$ , tend uniformément vers la fonction limite  $f(z)$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ . Alors, un point  $z_0$  de  $D$  ( $z_0 \notin \partial D$ ) est un zéro de  $f(z)$  si et seulement s'il est un point limite d'une suite  $\{z_{0N}\}$  de zéros de  $f_N(z)$ .

De plus la convergence uniforme assure que:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K} \frac{f'_N(z) dz}{f_N(z)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K} \frac{f'(z) dz}{f(z)}, \quad (4.63)$$

donc que le nombre de zéros de  $f_N(z)$  dans tout domaine  $K \subset D$  tend vers le nombre de zéros de  $f(z)$ . Par conséquent, l'ensemble des zéros artificiels (ceux que peut créer l'opération qui consiste à tronquer la matrice) va tendre vers l'infini.

Pour illustrer simplement ce théorème, considérons la fonction entière  $f(z) = \exp(-z^2)$ . Cette fonction qui n'a aucun zéro est limite de la suite de fonctions  $f_N(z)$  définies par la série de Taylor de  $f(z)$  interrompue à l'indice  $N$ ; c'est-à-dire un polynôme de degré  $2N$  qui comptera  $2N$  zéros, tous artificiels. On s'attend à ce que ces zéros s'éloignent de l'origine lorsque  $N$  grandit et terminent leur dérive à l'infini. C'est ce qui s'observe sur les figures 4.9 pour trois indices de coupures croissants.

L'expérience numérique aura pour objet des sections réduites de Husimi qui satisfont les conditions de ce théorème. Les polynômes étudiés ont en effet le comportement suivant:

$$\sum_{n=0}^N \frac{c_{+,n}}{\sqrt{n!}} z^n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{+,n}}{\sqrt{n!}} z^n,$$

puisque la normalisation des états implique:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_{+,n}|^2 = 1,$$

ce qui garantit la convergence uniforme.

Nous vérifierons plus loin que seule une partie des zéros sera influencée par la modification de l'indice de coupure. Les autres, stables, seront alors considérés comme zéros de la fonction entière.

### 4.3.3 Résultats et interprétation

L'ensemble des résultats présentés concerne un système avec spin  $s = 1/2$  (ce qui fixe la valeur du quantum de spin  $\hbar_s(\hbar) = 1/s = 2$ ), résonant (les fréquences propres de chacune des parties sont égales,  $\omega = \omega_0 = 1$ ), à couplage fixé, de l'ordre des fréquences propres. Ces grandeurs vérifient l'inégalité:

$$\hbar \omega N_{\max} > \frac{\omega}{2} q_{\max}^2 \equiv I_{b,\max}, \quad (4.64)$$

où  $N_{\max}$  est l'indice de coupure de la matrice, donc le membre de gauche correspond en terme d'action à l'extension maximale des états propres dans une représentation sur l'espace de phase, et où  $q_{\max}$  est l'extension maximale des sections de Poincaré classiques (2.27).

Nous nous intéresserons à la transition en  $\epsilon$ , qui modifie les symétries du problème, et à une transition en rapport avec l'aspect purement quantique ou semi-classique du boson (transition en  $\hbar_b$  ou en  $\eta$  selon les interprétations de la section 3.3). On ne sélectionnera que la composante "up" du spineur et la parité "+" (en ayant pris soin de vérifier que les résultats présentés sont indifférents à ce choix).

### Diagonalisation

La figure 4.10 montre une représentation logarithmique de la valeur absolue des coefficients pour les trois cas suivants, que l'on retrouvera tout au long de l'analyse: semi-classique proche a) ( $\epsilon \ll 1$ ,  $\hbar_b(\hbar\eta^2) \ll 1$ ) et éloigné b) ( $\epsilon = 1$ ,  $\hbar_b(\hbar\eta^2) \ll 1$ ) du cas classiquement intégrable, et plus typiquement quantique c) ( $\epsilon = 1$ ,  $0 < \hbar_b(\hbar\eta^2) < 1$ ). Il faut prendre garde au fait que les échelles ne sont pas identiques. Les coupures dans les cas a) en  $N_a = 223$  et c) en  $N_c = 147$  ( $\approx 10^{-38}$ ) correspondent à l'ordre de grandeur minimal accepté par la machine, alors que dans le cas b) en  $N_b = 571$ , nous avons dû éliminer quelques coefficients perturbés par une erreur d'arrondi ( $\approx 10^{-16}$ ). Rappelons que dans le cas  $\epsilon = 0.0$ , un seul coefficient par composante du spineur est non nul.

Une explication très intuitive de la forme de ces courbes peut être fondée sur les sections de Poincaré classiques dans le plan de phase de l'oscillateur harmonique construites à partir d'un ensemble de paramètres correspondant à ceux du cas quantique. La figure 4.11 représente un ensemble de sections de Poincaré régulières ( $\epsilon \approx 0$ ) en a) et chaotiques ( $\epsilon = 1$ ) en b). Cette explication est à considérer avec beaucoup de précautions, puisqu'avec un spin  $s = 1/2$ , le système est sous une forme quantique extrême. Soit l'hypothèse qu'une section réduite associée à un état d'énergie donnée est située sur l'espace occupé par l'ensemble des sections de Poincaré classiques de même énergie (en pratique, on vérifie que les deux sections réduites provenant de chacune des composantes sont très semblables). Les fonctions de Husimi associées aux états propres de l'oscillateur harmonique présentent une symétrie circulaire (4.43). Si l'ensemble des sections de Poincaré possède cette même symétrie (ou à peu près), et c'est le cas si  $\epsilon \ll 1$ , une fonction propre du système peut se construire autour d'un état de l'oscillateur harmonique dominant. On le vérifie sur la courbe 4.10.a, qui forme un véritable pic aux alentours de  $n = 165$ . Si par contre l'ensemble des sections de Poincaré ne possède pas cette symétrie (pour  $\epsilon = 1$ , par exemple), les fonctions d'onde du système sont délocalisées car il faut pour les décrire un nombre plus élevé d'états de l'oscillateur harmonique dominants. La partie de la courbe 4.10.b qui prend des valeurs proches de son maximum décrit en effet un palier qui s'étend environ de  $n = 100$  à  $n = 470$ . L'ampleur de cette délocalisation dépend directement du quantum propre à l'oscillateur harmonique (de la séparation typique entre deux de ses niveaux d'énergie, c'est-à-dire de  $\hbar_b$  ou de  $\eta$ ). Ceci explique que le palier où culmine la courbe 4.10.b est bien plus large que celui où culmine la courbe 4.10.c. Cela justifie l'intérêt à considérer une limite semi-

classique ( $h_b(\eta) = 0$ ), pour que les distributions comptent un grand nombre de zéros.

Les figures 4.12 montrent les sections réduites elles-mêmes dans un quadrant du plan  $(q, p)$  et pour les trois cas typiques. Ces illustrations confirment que l'explication fondée sur les sections classiques était très approximative, spécialement dans le cas des grands  $\epsilon$ . En effet, si pour  $\epsilon \approx 0$ , des similarités qualitatives existent entre la couronne décrite par la section réduite 4.12.a et celle décrite par l'ensemble des sections de Poincaré 4.11.a, leur localisation est nettement différente. Et pour  $\epsilon = 1.0$ , l'ensemble des sections de Poincaré 4.11.b est situé dans un domaine que les sections réduites 4.12.b entourent. Seul l'argument qui liait la symétrie des sections à la localisation des états propres reste valable.

C'est l'invariance de la parité qui implique que ces surfaces ont une symétrie quadrangulaire, et ne sont présentées que sur un quadrant. Les fonctions  $\psi_{\pm}(z)$  sont à un facteur gaussien près des polynômes complexes à coefficients réels dont un sur deux s'annule.

L'allure des sections de Poincaré globale n'est pas très différente de ces figures car les sections réduites associées à chacune des composantes sont à peu près identiques. Le seul examen de ces fonctions ne permet pas de tirer d'autres conclusions que la brisure de symétrie qu'entraîne l'accroissement d' $\epsilon$ .

### Ordre des fonctions entières

La première question à résoudre est celle concernant la décroissance des coefficients, ce qui permettra d'estimer l'ordre de la fonction entière représentant la section réduite, puis de décider si celle-ci détermine complètement ou non la fonction propre d'origine.

Les facteurs qui apparaissent dans le polynôme ont la forme  $c_{+n}/\sqrt{n!}$ . Par conséquent, si les  $c_{+n}$  ont un comportement asymptotique ( $n > N_0$ ) en  $O[(n!)^{-\beta}]$ , alors l'ordre de  $\psi_{+}(z)$  sera donné par

$$\mu = \frac{1}{\beta + 1/2},$$

résultat qui s'obtient à l'aide de la formule de Stirling.

La figure 4.13 montre une représentation logarithmique de  $|c_{+n}/c_{+N_0}|$  pour des  $n$  supérieures à  $N_0$ , ceci pour des valeurs des paramètres correspondant aux cas a) et b). A titre comparatif, les courbes de  $\ln[(N_0!/n!)^{1/2}]$ , à décroissance faible, correspondant à  $\beta = 1/2$ , et de  $\ln[(N_0!/n!)^{3/2}]$ , à décroissance forte, correspondant à  $\beta = 3/2$ , sont tracées sur le même graphique. Dans le cas  $\epsilon \approx 0$  (fig. 4.13.a),  $\beta$  est clairement supérieur à  $1/2$ ; par conséquent l'ordre est inférieur à 1 et les zéros déterminent complètement la composante du spineur. Dans le cas  $\epsilon = 1.0$

(fig 4.13.b), l'interprétation est plus ambiguë, car ce sont les pentes des différents graphes qu'il faut comparer, et le nombre de coefficients est insuffisant pour connaître réellement leur comportement asymptotique.

Cet exemple montre qu'on ne peut généraliser à l'ensemble des états le fait que certains se prêtent à une description complète à travers la distribution des zéros de leur fonction de Husimi.

### Distribution des zéros

Les figures 4.14 montrent les distributions des zéros dans chacun des cas a), b) et c). Celles-ci sont telles qu'il est indispensable de les considérer à différentes échelles pour en saisir la structure globale. Chaque cas est d'abord considéré séparément pour une description superficielle.

- a) Tous les zéros sont disposés le long de courbes, tant à grande échelle que dans un domaine qui avoisine l'origine. Le point central représente à lui seul nonante-huit zéros concentrés dans un voisinage de l'origine, vestige du modèle de Jaynes et Cummings, pour lequel la distribution se réduit à un seul zéro à l'origine dont la dégénérescence dépend de son indice (ou de son énergie). La ressemblance est très forte entre la distribution des zéros extérieurs et les zéros provenant d'une coupure artificielle de la série de  $\exp(-x^2)$  (fig 4.9). Ceux qu'on observe ici sont donc certainement liés à la coupure de la série décrivant la fonction entière. Le nombre de zéros représentés est très proche du nombre de coefficients du polynôme; la recherche a donc bien fonctionné.

- b) La distribution des zéros présente un aspect hybride: certains sont nettement disposés le long de courbes alors que d'autres sont nettement dispersés. Il y a un raccord continu entre les courbes que dessinent les zéros au centre de 1) et aux bords de 2). Ici également, le nombre de zéros représentés est très proche du nombre de coefficients du polynôme. En comparant les figures 4.12.b et 4.14.b.1, on comprend que la zone intermédiaire, vide de zéros, correspond à la localisation de la section réduite.

- c) On reconnaît ici des motifs existants en a) et b), mais le nombre de zéros n'est pas suffisant pour qu'une décision sur leur disposition curviligne soit raisonnable.

En comparant a) et b) (transition en c), il est possible d'établir des parallèles:

- Aux deux "lunes" de a.2 correspondent les deux espèces de disques de part et d'autre du centre de b.1.

- Aux courbes régulières de a.1 correspondent les franges à l'extérieur de b.1. Dans les deux cas, l'augmentation du nombre de zéros s'accompagne donc d'une dispersion d'une partie d'entre eux.

## Vérifications

Une interprétation plus détaillée nécessite quelques tests supplémentaires, effectués principalement dans le cas semi-classique avec  $\epsilon = 1.0$ .

- Un premier test permet de vérifier également la stabilité de l'algorithme de détection des zéros. Il s'agit de modifier aléatoirement un nombre fixé de premiers coefficients (tous situés sur la partie croissante de la courbe) d'une proportion fixée de leur propre valeur. La figure 4.15 montre de quelle manière la distribution des zéros est modifiée par ce procédé: en a) et b), les quatre-vingts premiers coefficients sont aléatoirement falsifiés à la neuvième décimale (nous ne représentons pas tous les zéros, la stabilité de la région extérieure a été vérifiée). Aucune différence n'est perceptible par rapport à 4.14.b. En c) et d), les quatre-vingts premiers coefficients sont aléatoirement falsifiés à la troisième décimale, ce qui induit un déplacement des zéros du centre, mais les zéros médians et extérieurs sont stables et l'allure générale de la distribution reste qualitativement inchangée.

- Dans un but comparable, un déplacement est effectué dans l'ordre de grandeur de la valeur limite fixée pour le point de raccord entre les coefficients numériques et ceux provenant de la récurrence. Cela provoque alors une modification systématique et non plus aléatoire des tous les premiers coefficients. Les effets observés sont de même nature que ceux du test précédent: un changement survient dans la répartition des zéros du centre (qui reste cependant qualitativement semblable), et tous les zéros médians et extérieurs sont parfaitement stables.

Ces expériences permettent d'associer aux coefficients de la partie croissante de la courbe 4.10.b tous les zéros situés à proximité de l'origine, et dont la répartition est visiblement curviligne.

Un second type de tests concerne la partie décroissante de la courbe 4.10.b.

- Nous évaluerons d'abord les effets d'une coupure arbitraire dans les derniers coefficients (par coupure, on n'entend pas ici une modification de la taille de la matrice à diagonaliser, mais simplement le fait de négliger un certain nombre de coefficients). Une conséquence naturelle de cette suppression est la diminution du degré du polynôme qui caractérise la section réduite, et donc une diminution de nombre des zéros de la distribution. Les figures 4.16 montrent les effets d'une telle coupure sur le comportement des coefficients et sur la distribution des zéros, pour  $\epsilon \approx 0.0$  (respectivement a) et b)) et pour  $\epsilon = 1.0$  (respectivement c) et d)). Nous avons vérifié que les zéros intérieurs sont parfaitement stables et nous renonçons à les représenter. Nous observons que, tant en b) qu'en d), seuls les zéros situés tout à l'extérieur disparaissent ou voient leur emplacement modifié. A noter dans le cas  $\epsilon \approx 0.0$ , le

comportement de la distribution tout à fait analogue à celui de la fonction  $\exp(-z^2)$  tronquée (fig 4.9), signe d'une décroissance gaussienne pour la section réduite.

• La figure 4.17 illustre une tentative de rajouter de nouveaux coefficients par une interpolation parabolique de la courbe logarithmique. La restitution des signes - le logarithme s'applique à la valeur absolue des coefficients - ne pose pas de problème car les séquences d'alternance sont régulières dans cette partie de la courbe. Comme seul effet, on observe la superposition d'une couronne de nouveaux zéros, apparemment sans liens avec les précédents et située totalement à l'extérieur.

Il semble donc clair qu'une relation existe entre les coefficients de la partie décroissante des courbes 4.10 et les zéros extérieurs des distributions 4.14. Il faut toutefois relativiser leur importance puisqu'ils côtoient de très près les "zéros-fantômes" générés par le fait qu'on travaille avec un polynôme plutôt qu'avec une fonction entière.

Restent les zéros médians qui ne subissent aucune variation sous tous les tests qui précèdent. Comme les seuls coefficients à ne pas avoir été touchés sont ceux du palier maximal (qui détermine la localisation), il est permis d'établir une relation entre les uns et les autres.

Nous déciderons de considérer comme zéros vrais ceux qui présentent une stabilité complète par rapport à une opération de coupure. Dans ce sens, les figures 4.18 proposent l'ensemble de tous les zéros vrais, pour  $\epsilon \approx 0.0$  en a) et pour  $\epsilon = 1.0$  en b). Sur ces distributions, une répartition aléatoire d'une partie des zéros lorsque  $\epsilon$  augmente nous permet d'affirmer que le spin-boson généralisé avec spin  $s = 1/2$  présente des traces de chaos quantique.

En résumé, l'accroissement du paramètre d'anisotropie  $\epsilon$  provoque une brisure de symétrie des états propres, qui seront par conséquent délocalisés dans la base naturelle du système. Ce phénomène se traduit dans une limite semi-classique, par une dispersion d'une partie des zéros des sections réduites de la fonction de Husimi. Cette dispersion reflète les traces d'un comportement chaotique que peut présenter le système. Le fait que cette dispersion ne soit pas complète et qu'il reste encore une forte proportion de zéros disposés le long de courbes provient sans doute de la petite taille du spin. En effet, comme le comportement spectral d'un système comprenant un grand spin montre clairement une transition d'un régime régulier à un régime chaotique, il est probable que dans ce cas la transition dans la distribution des zéros soit complète.

L'important est le fait que le cas d'un spin  $s = 1/2$  ne soit pas marginal et qu'il présente lui-aussi des traces de chaos.

## CHAPITRE 4

### LEGENDES DES FIGURES

- Figure 4.1:  $P(x)$ , "distribution des espacements entre niveaux voisins" pour le hamiltonien original, sans "approximation de la phase"; cas purement quantique, couplage fort.  $\omega = \omega_0 = 1$ ,  $\lambda = \sqrt{2}$ ,  $\hbar = 1$ . Transition en  $\epsilon$ : a)  $\epsilon = 0.0$ , b)  $\epsilon = 0.5$ , c)  $\epsilon = 0.9$ , d)  $\epsilon = 1.0$ .
- Figure 4.2:  $\Delta_3(L)$ , statistique de Dyson-Mehta (rigidité spectrale) appliquée au même modèle qu'en fig.4.1. a)  $\epsilon = 0.0$ , b)  $\epsilon = 0.5$ , c)  $\epsilon = 1.0$ .
- Figure 4.3: Comme en fig.4.1. mais pour le cas semi-classique de l'"approximation de la phase". a)  $\epsilon = 0.0$ , b)  $\epsilon = 0.5$ , c)  $\epsilon = 1.0$ .
- Figure 4.4: Comme en fig.4.2. mais pour le cas semi-classique de l'"approximation de la phase". a)  $\epsilon = 0.0$ , b)  $\epsilon = 0.5$ , c)  $\epsilon = 1.0$ .
- Figure 4.5: Comportement logarithmique des coefficients  $|c_{+n}|$  dans un cas proche de  $\epsilon = 0$  et avec un boson semi-classique. Même état calculé en simple a) puis en double précision b).
- Figure 4.6: Même état qu'en fig.4.5.b). mais avec les premiers coefficients ( $< 10^{-16}$ ) obtenus par la relation de récurrence 4.60.
- Figure 4.7: Comparaison des méthodes de recherche de zéros dans un fragment de l'espace de phase du boson: représentation graphique logarithmique a) et défauts de phase b). Le polynôme est issu d'une fonction de Husimi d'un système avec  $\epsilon = 1.0$  et avec un boson semi-classique.
- Figure 4.8: Effets sur les coefficients d'une coupure due: a) à la taille de la matrice, b) à l'ordre de grandeur limité à  $10^{-36}$ , c) à des problèmes d'arrondi qui perturbent les derniers coefficients inférieurs à  $10^{-26}$ .
- Figure 4.9: Zéros de  $f(z) = \sum_{n=0}^N (-1)^n z^{2N}/N!$ , pour a)  $N = 10$ , b)  $N = 20$ , c)  $N = 30$ .
- Figure 4.10: Comportement logarithmique des coefficients  $|c_{+n}|$  en fonction de  $n$ . Cas résonant  $\omega = \omega_0 = 1.0$ . Couplage fort  $\lambda = 1.5$ . Spin quantique  $s = 1/2$ ,  $\hbar_s(\hbar) = 2.0$ .
  - a)  $\epsilon = 0.01$ ,  $\hbar_b(\hbar\eta^2) = 0.01$ ,  $E = -2.049 \times 10^{-3}$ , coupure en  $N_a = 223$ .
  - b)  $\epsilon = 1.0$ ,  $\hbar_b(\hbar\eta^2) = 0.01$ ,  $E = 5.229 \times 10^{-3}$ , coupure en  $N_b = 571$ .
  - c)  $\epsilon = 1.0$ ,  $\hbar_b(\hbar\eta^2) = 0.1$ ,  $E = 1.957 \times 10^{-2}$ , coupure en  $N_c = 147$ .

- Figure 4.11: Sections de Poincaré classiques dans le plan de phase de l'oscillateur harmonique. Mêmes paramètres qu'en fig.4.10, énergie fixée à  $E = 0.0$ .  
a)  $\epsilon = 0.01$ ,  $\mathcal{Z}_{sec} = 0.25$ , cas presque intégrable,  
b)  $\epsilon = 1.0$ ,  $\mathcal{Z}_{sec} = 0.5$ , cas chaotique.
- Figure 4.12: Sections réduites de Husimi  $\mathcal{R}_+(z_b(q,p))$  dans le plan de phase  $(q,p)$ , pour les cas a), b) et c) (voir fig.4.10).
- Figure 4.13: Décroissance logarithmique des derniers coefficients  $\ln |c_{+n}/c_{+N_0}|$ , pour  $n \geq N_0$  ( $\square$ ). Les courbes de  $\ln \{(N_0!/n!)^\gamma\}$  pour  $\gamma = 1/2$  et  $\gamma = 3/2$  (+) sont représentées à titre de comparaison. Cas a) ( $N_0 = 173$ ) et b) ( $N_0 = 475$ ).
- Figure 4.14: Distribution des zéros de  $\psi_+(z_b(q,p))$  correspondant à a), b) et c). Deux échelles sont représentées dans chaque cas.
- Figure 4.15: Effets d'une modification aléatoire des quatre-vingts premiers coefficients ( $\epsilon = 1.0$ ) sur la distribution des zéros médians et intérieurs. En a) pour les zéros médians et en b) pour ceux de l'intérieur, la modification se fait à la neuvième décimale. En c) pour les zéros médians et en d) pour ceux de l'intérieur, à la troisième décimale.
- Figure 4.16: Effets d'une coupure arbitraire des derniers coefficients sur la distribution des zéros extérieurs. En a) pour les coefficients et en b) pour les zéros,  $\epsilon = 0.01$  et la coupure a lieu en  $N'_c = 195$ . En c) pour les coefficients et en d) pour les zéros,  $\epsilon = 1.0$  et la coupure a lieu en  $N'_c = 527$ .
- Figure 4.17: Effets d'un prolongement par extrapolation parabolique de la courbe des coefficients a) sur la distribution des zéros extérieurs b) dans le cas  $\epsilon = 1.0$ .
- Figure 4.18: Ensemble de tous les zéros vrais dans les cas  $\epsilon = 0.01$  en a) et  $\epsilon = 1.0$  en b).

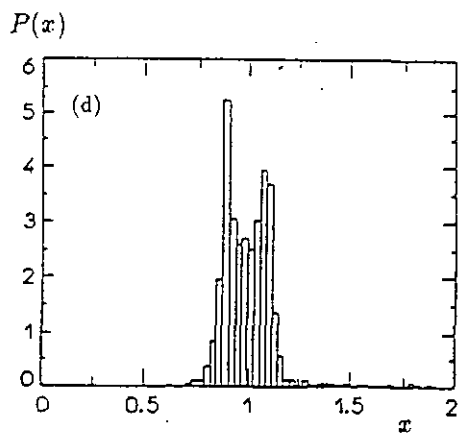
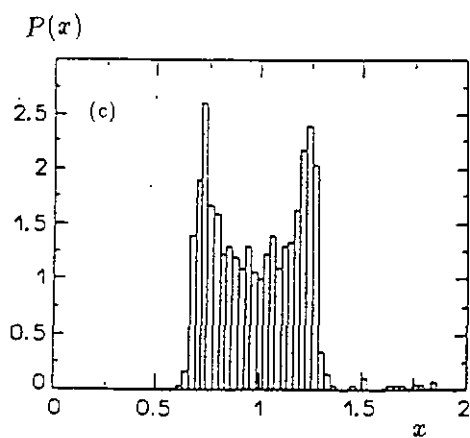
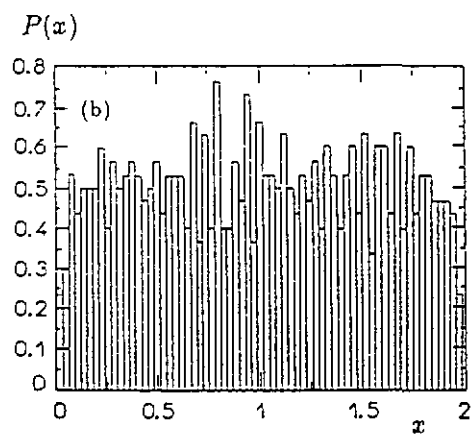
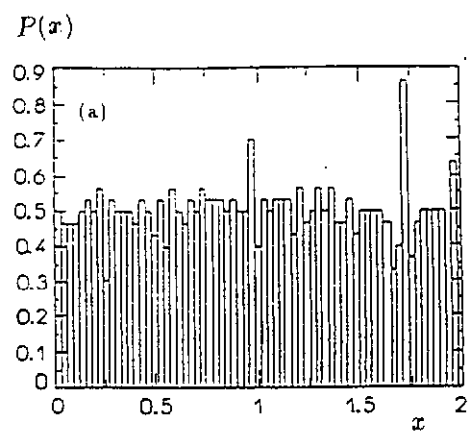


FIGURE 4.1

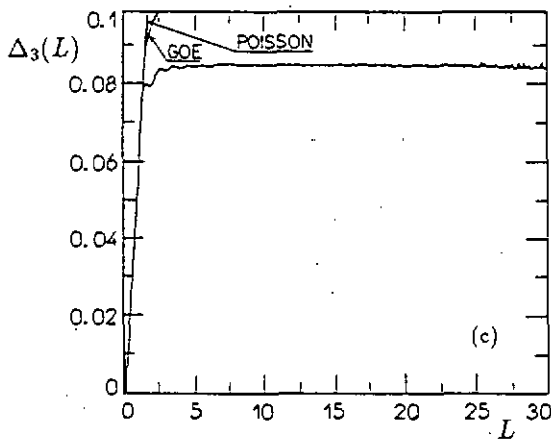
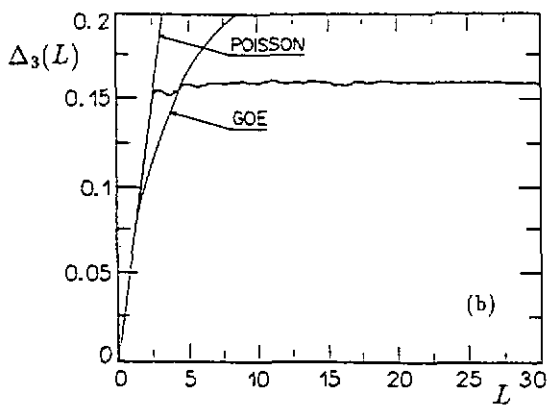
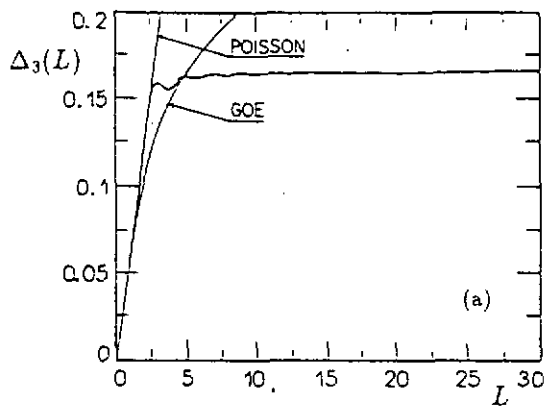


FIGURE 4.2

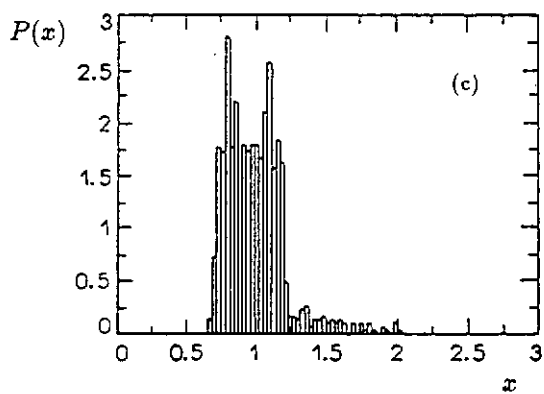
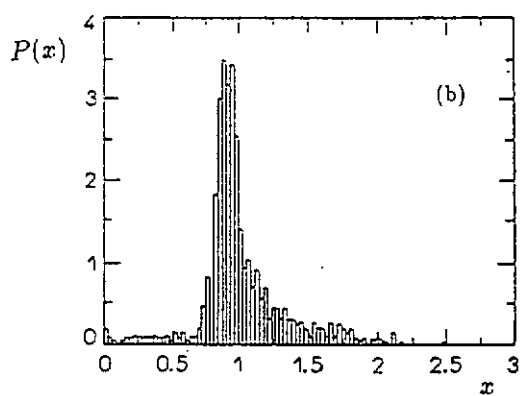
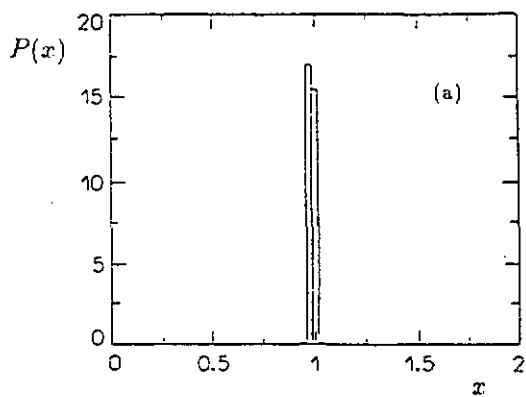


FIGURE 4.3

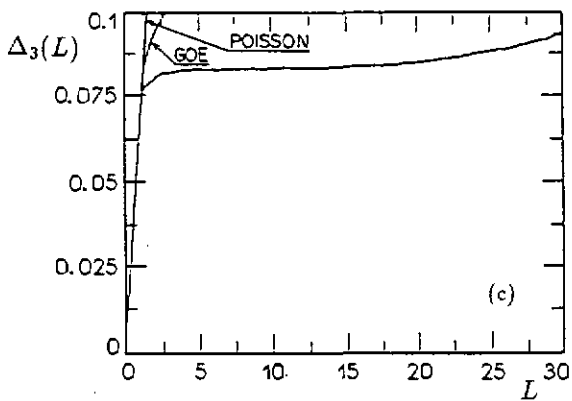
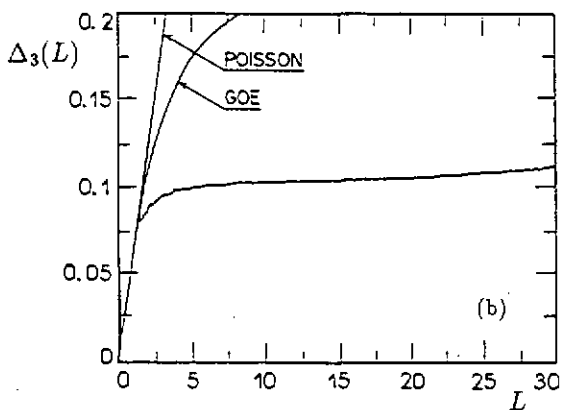
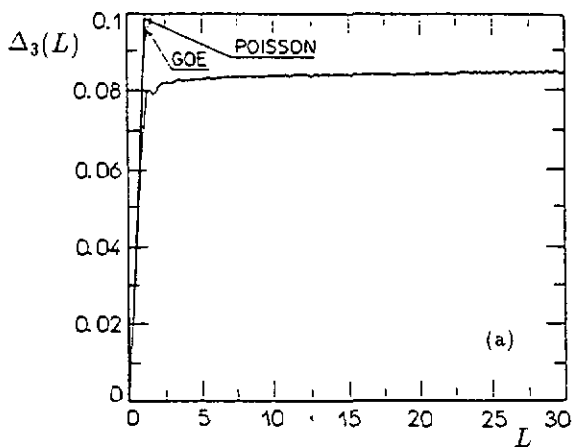


FIGURE 4.4

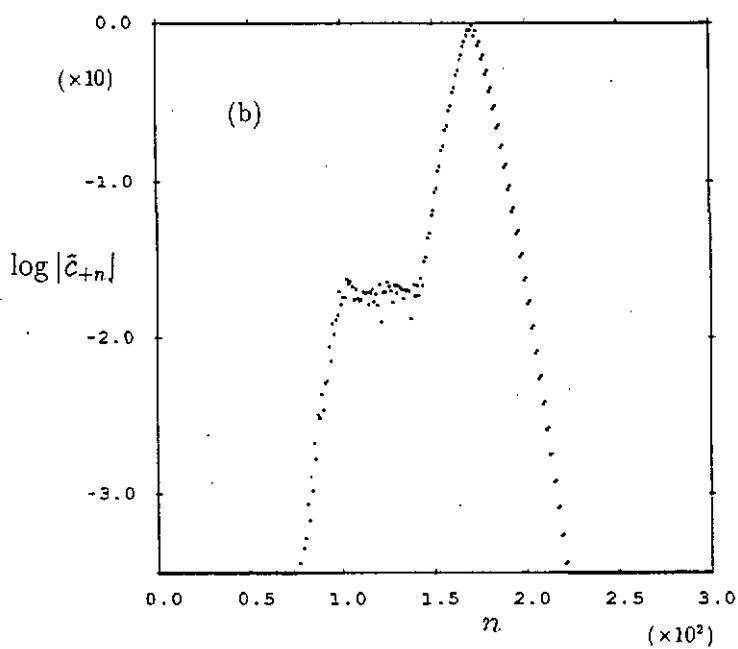
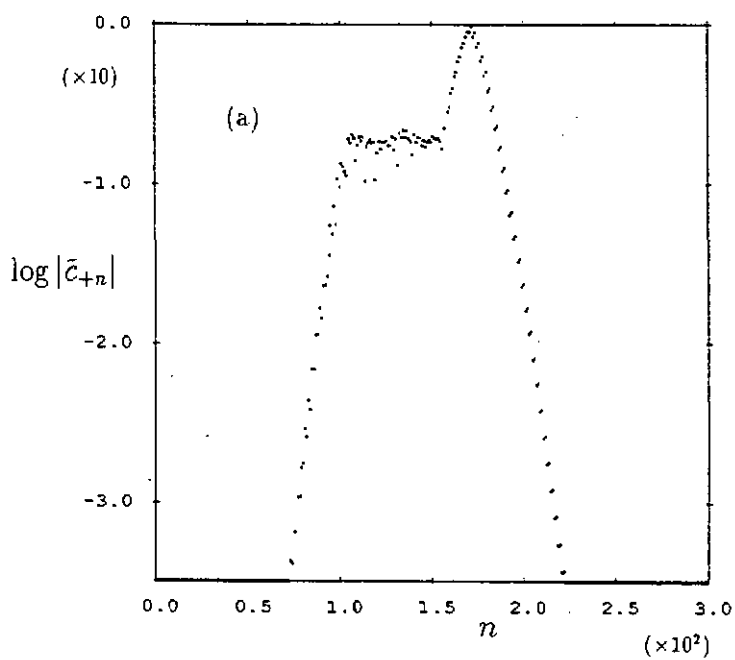


FIGURE 4.5

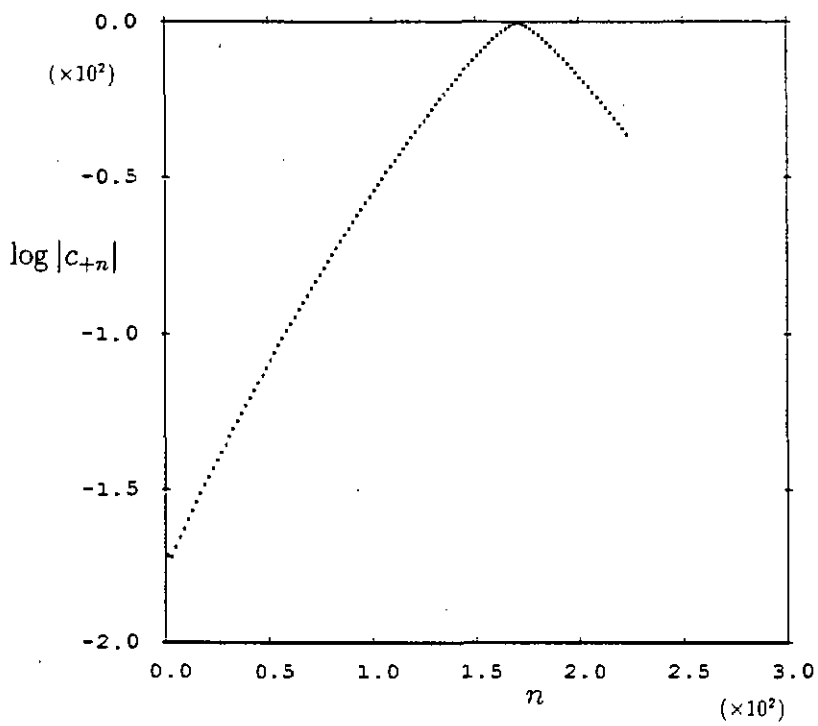


FIGURE 4.6

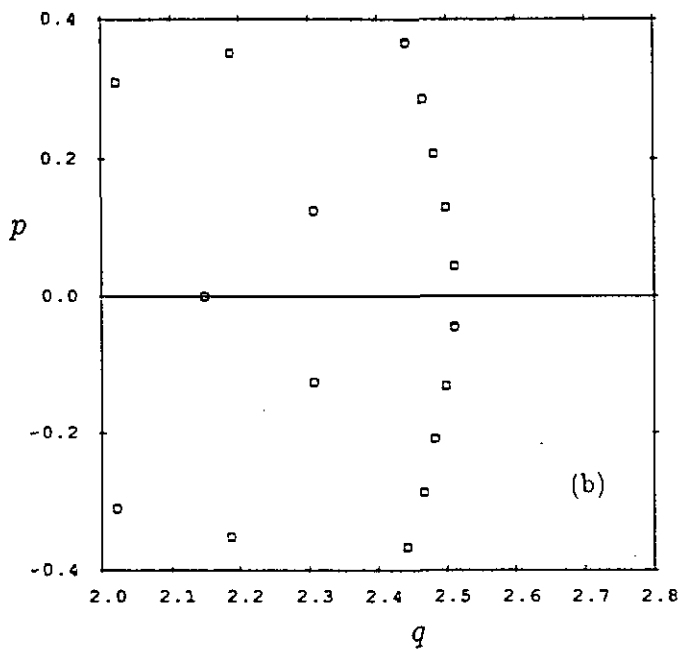
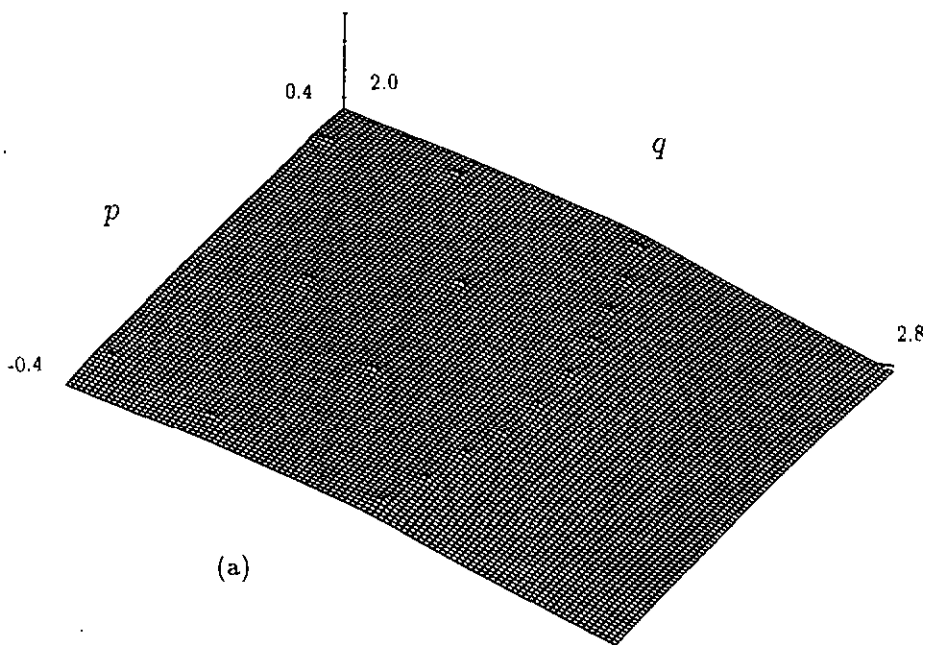


FIGURE 4.7

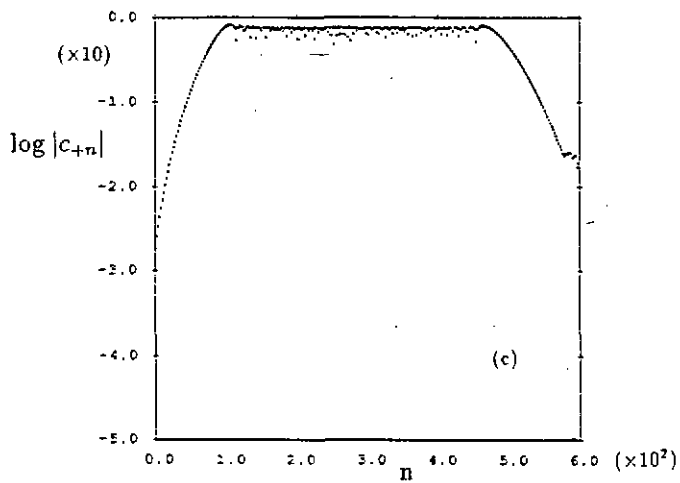
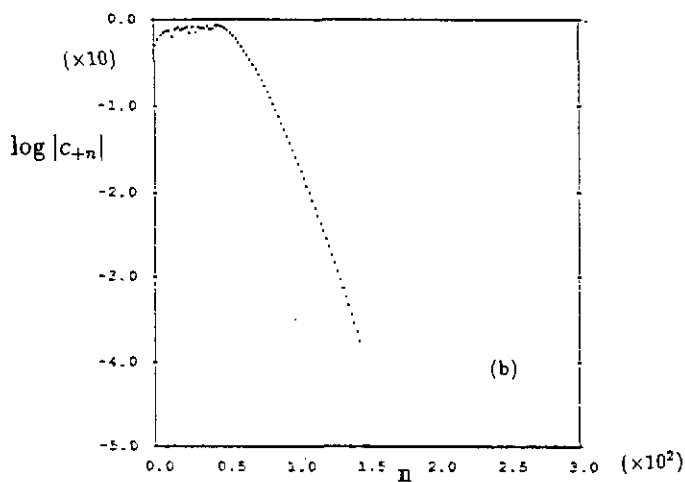
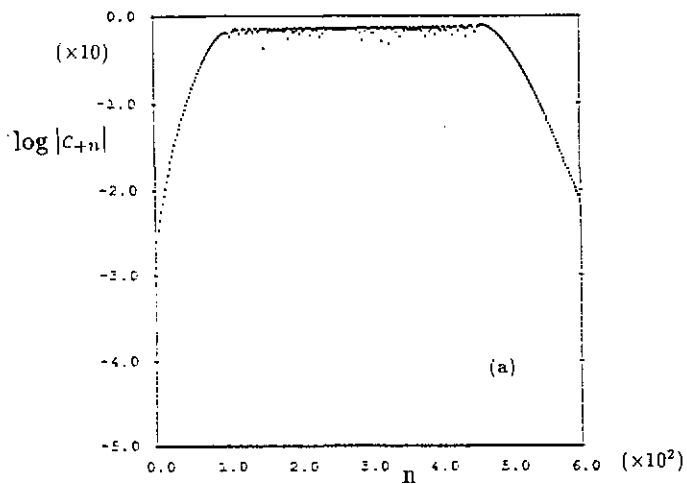


FIGURE 4.8

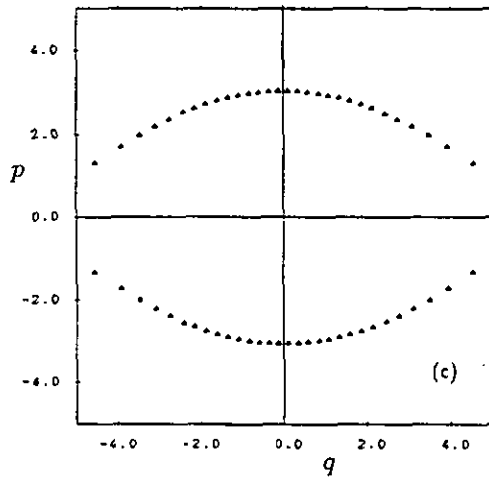
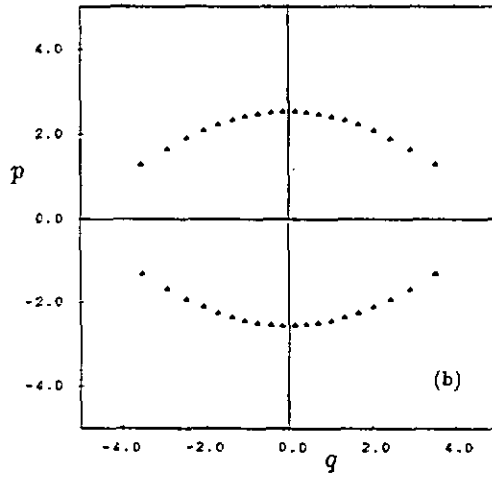
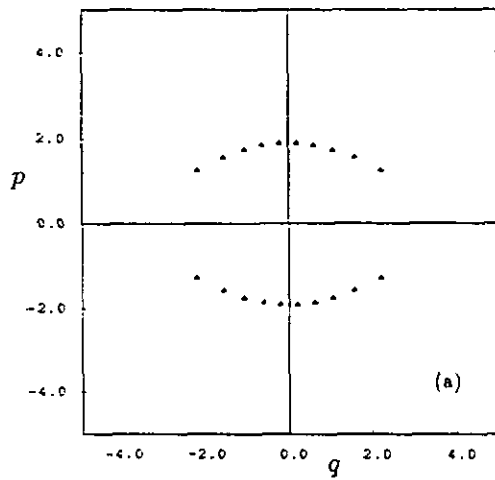


FIGURE 4.9

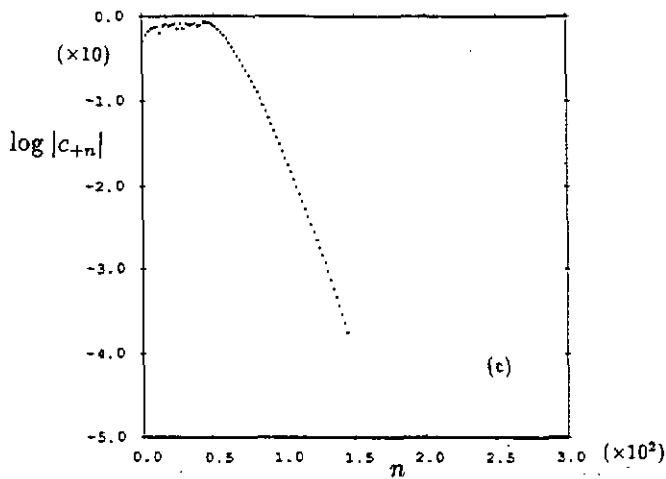
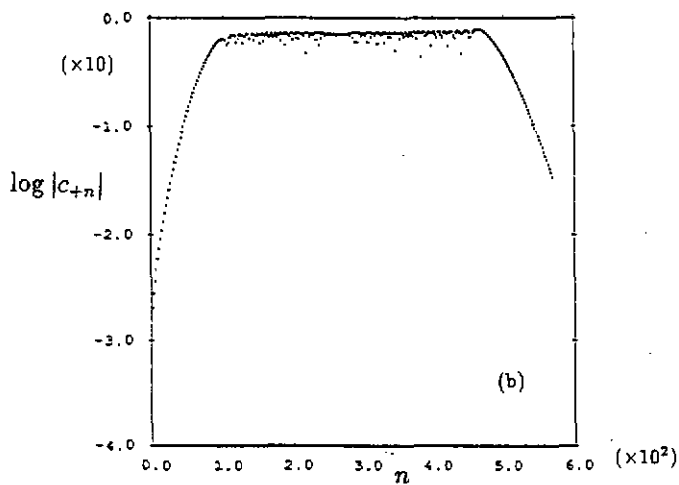
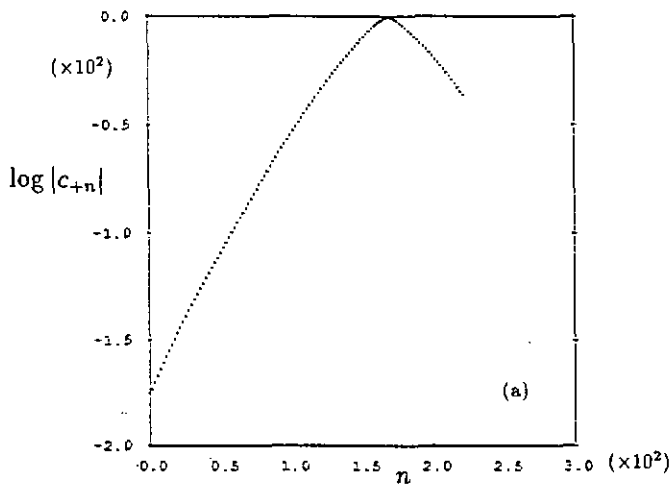


FIGURE 4.10

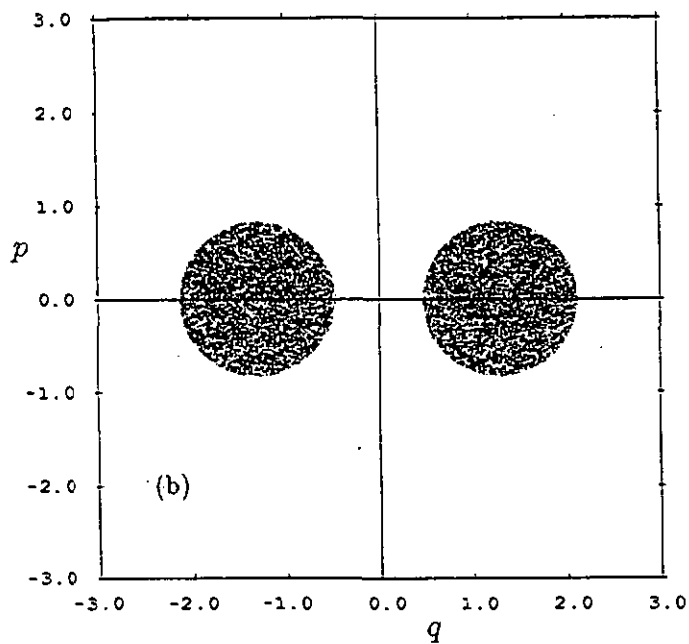
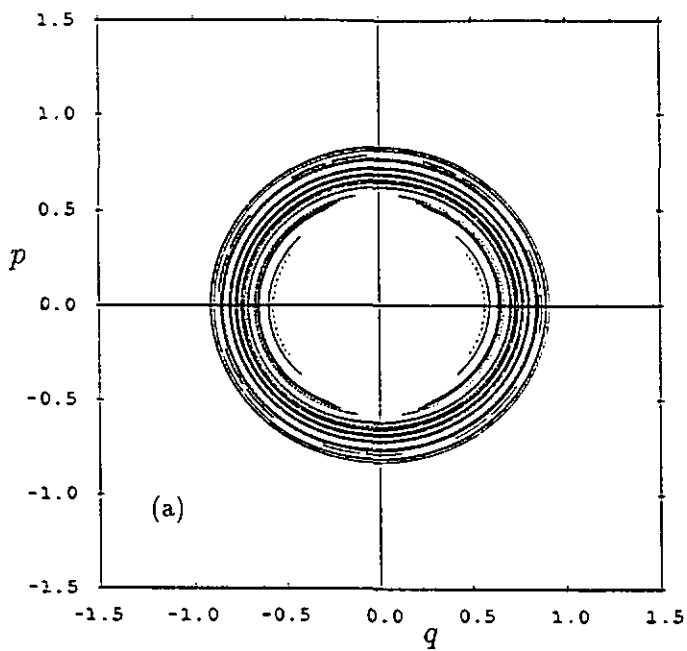


FIGURE 4.11

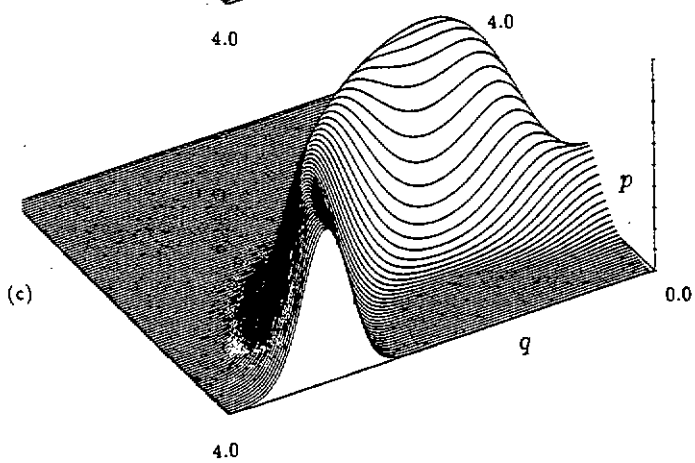
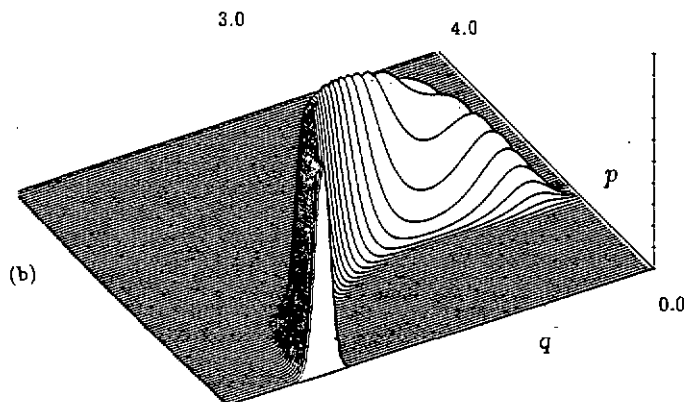
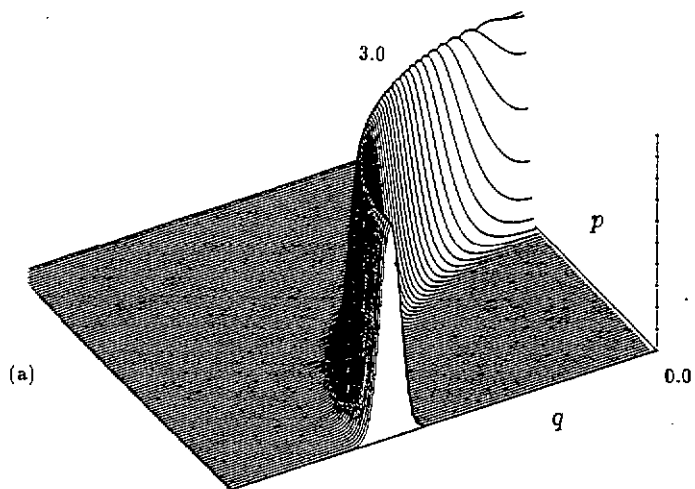


FIGURE 4.12

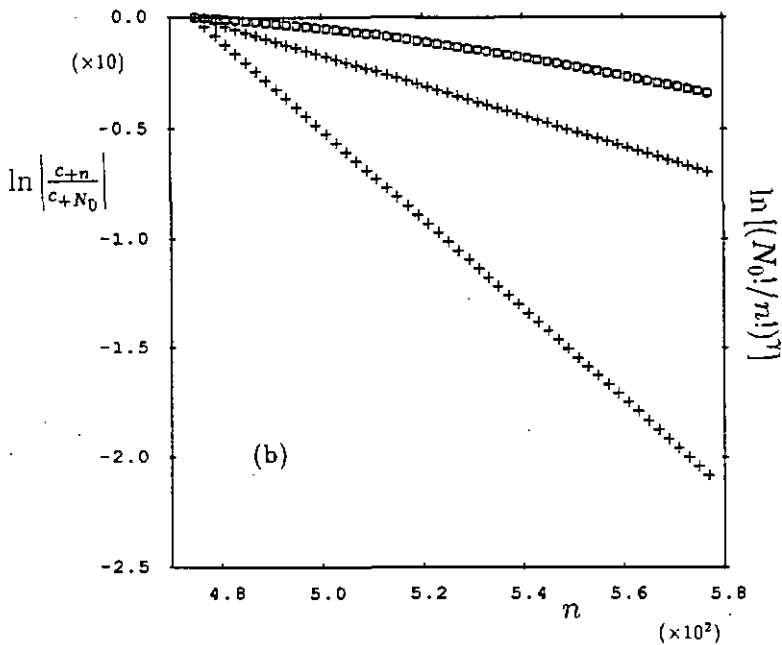
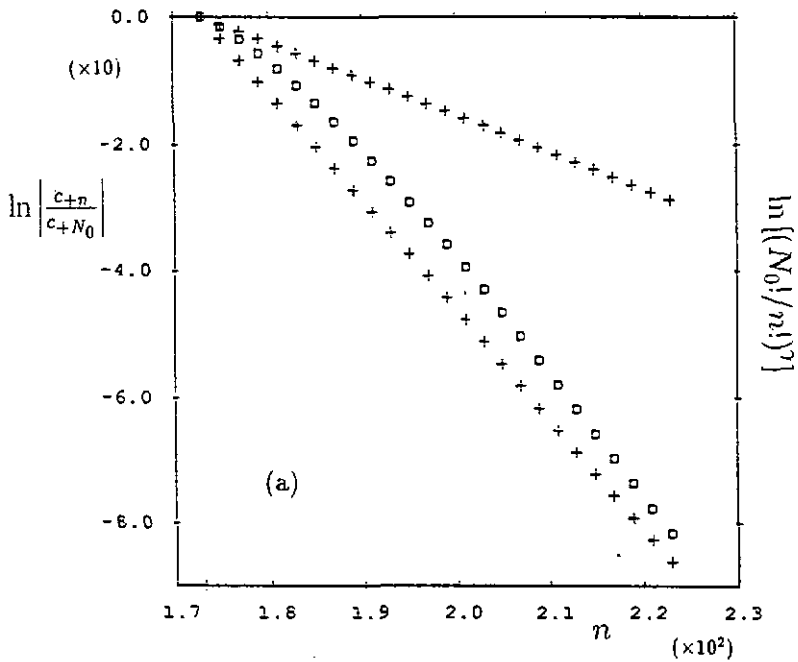


FIGURE 4.13

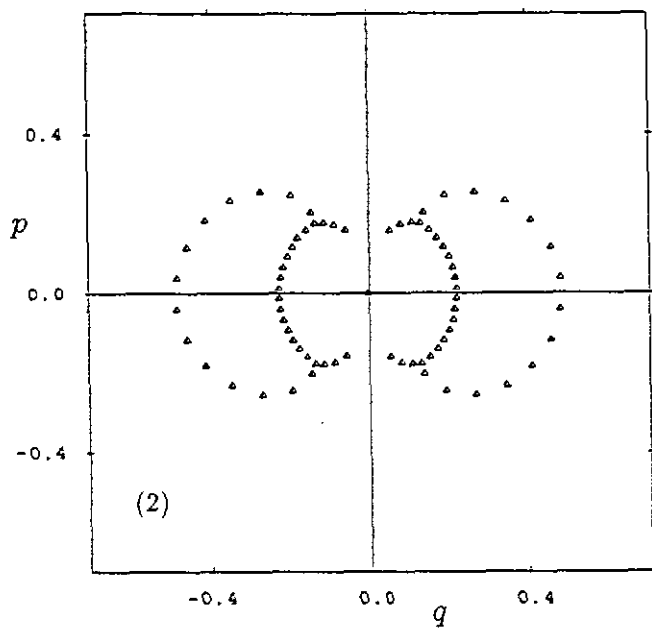
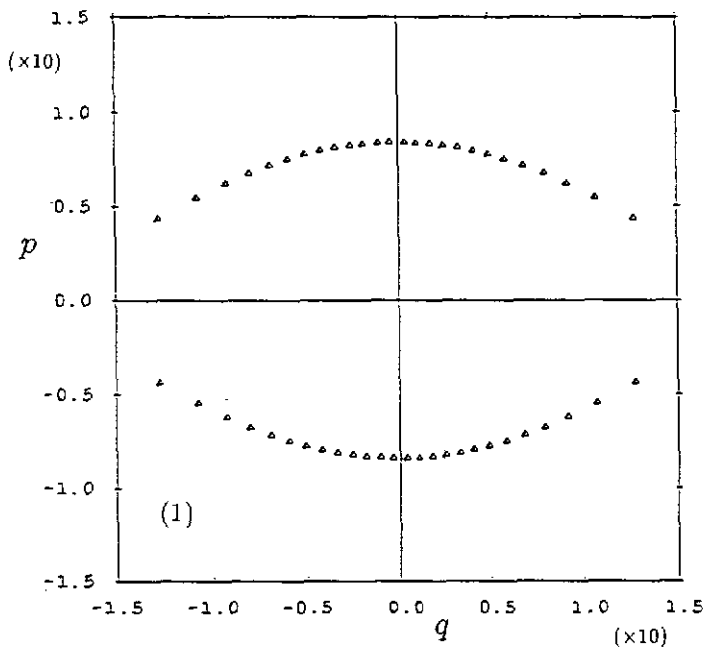


FIGURE 4.14.a)

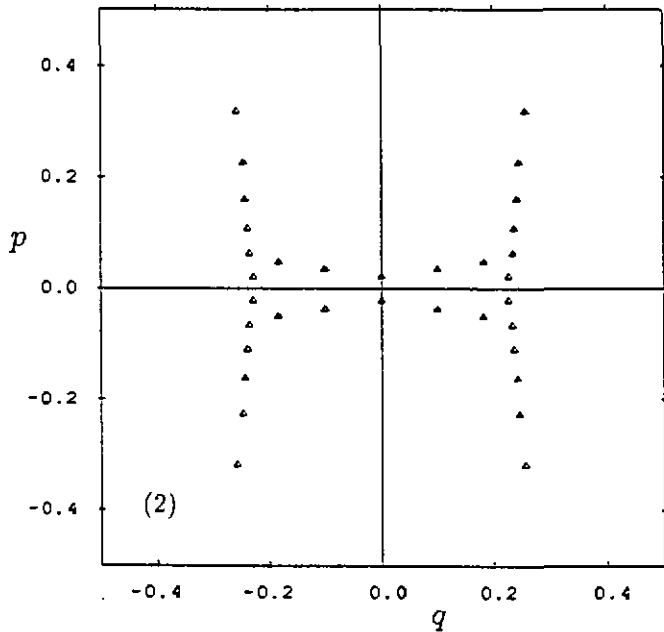
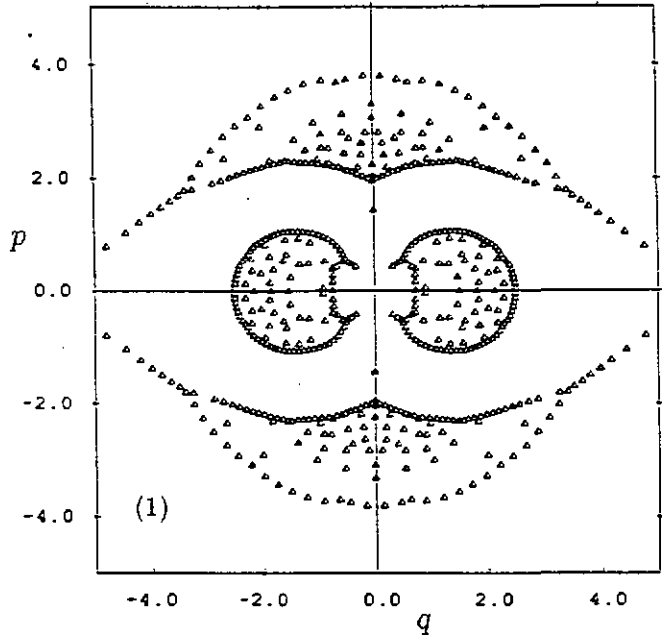


FIGURE 4.14.b).

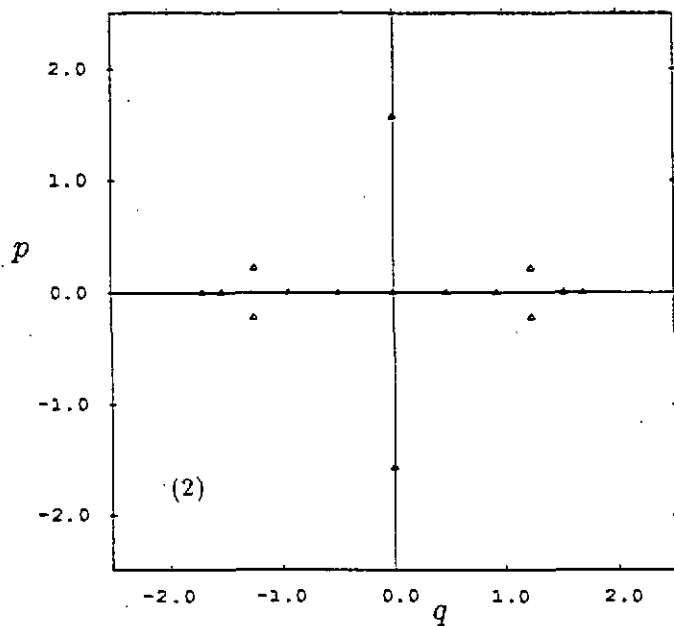
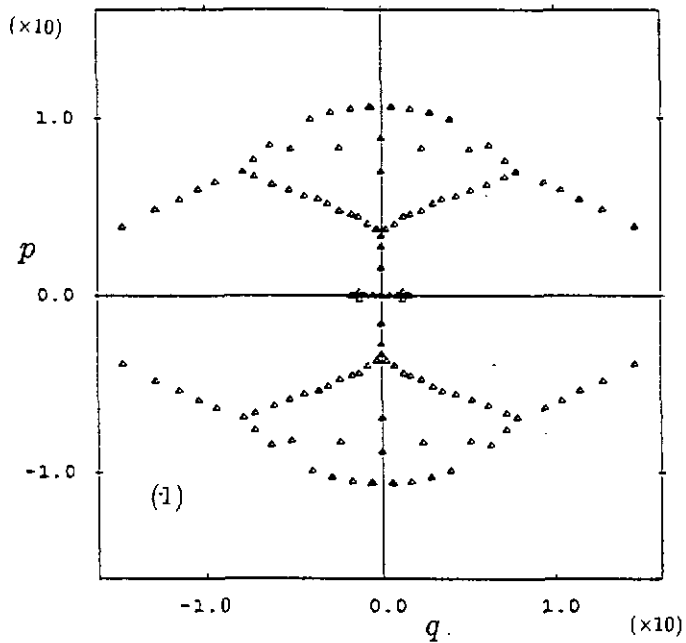


FIGURE 4.14.c)

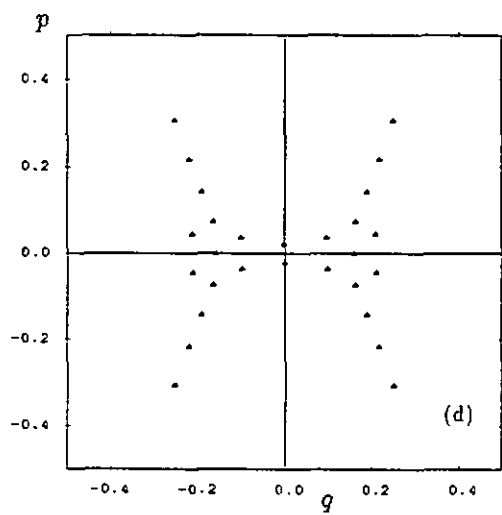
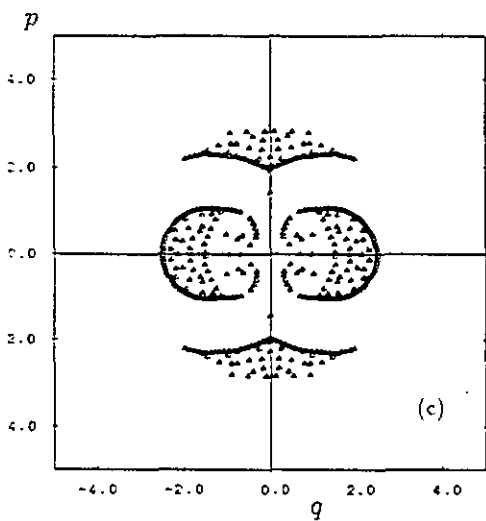
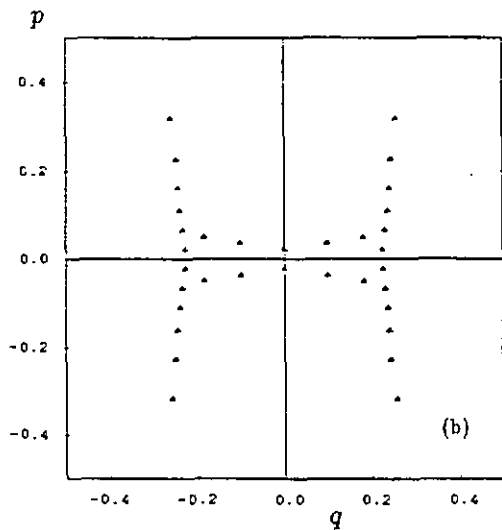
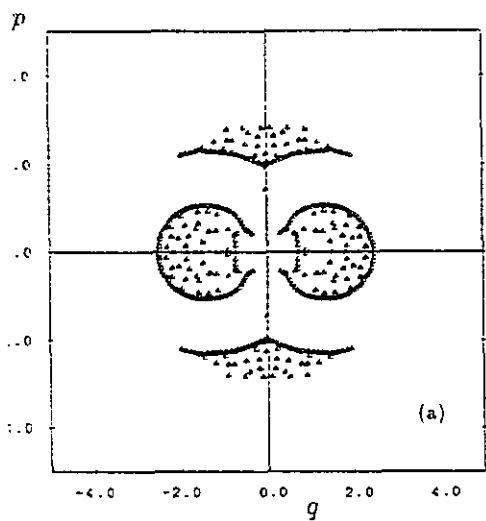


FIGURE 4.15

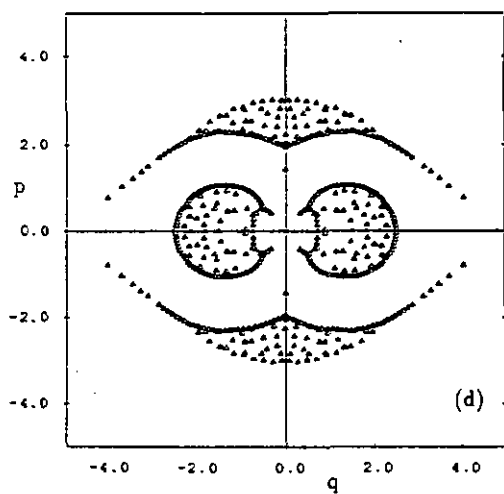
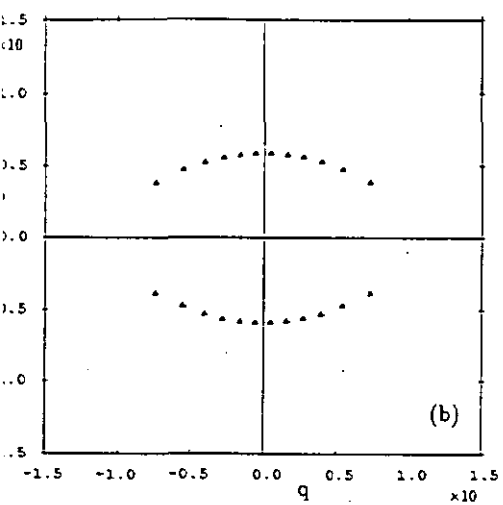
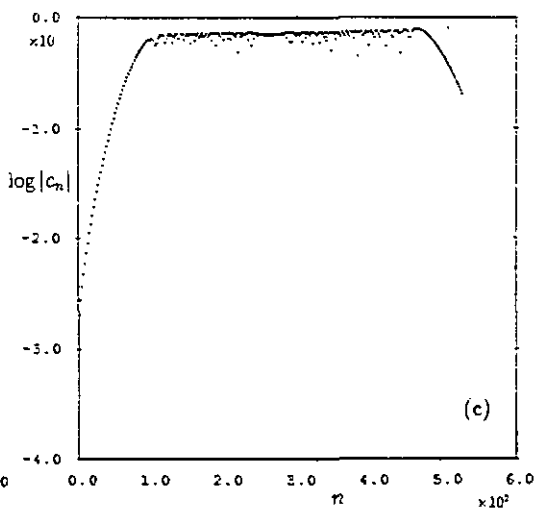
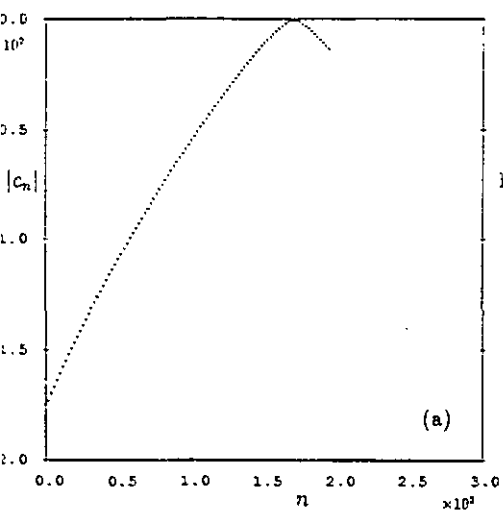


FIGURE 4.16

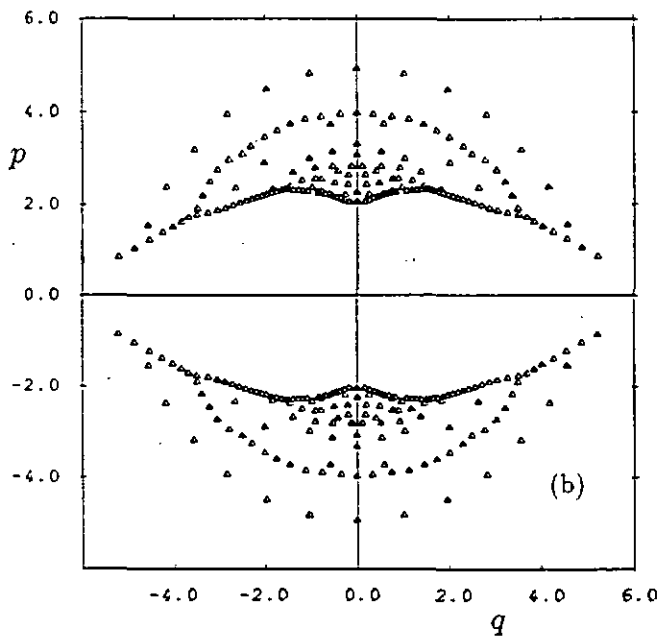
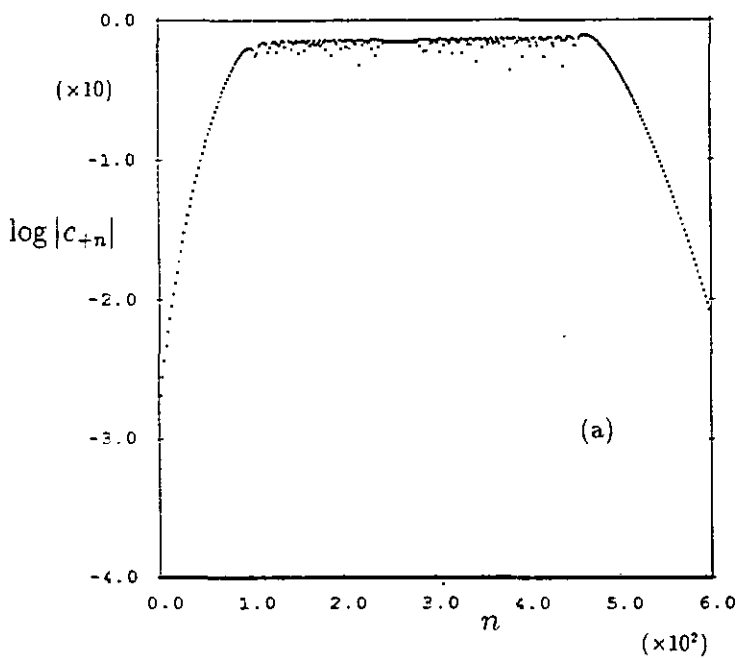


FIGURE 4.17

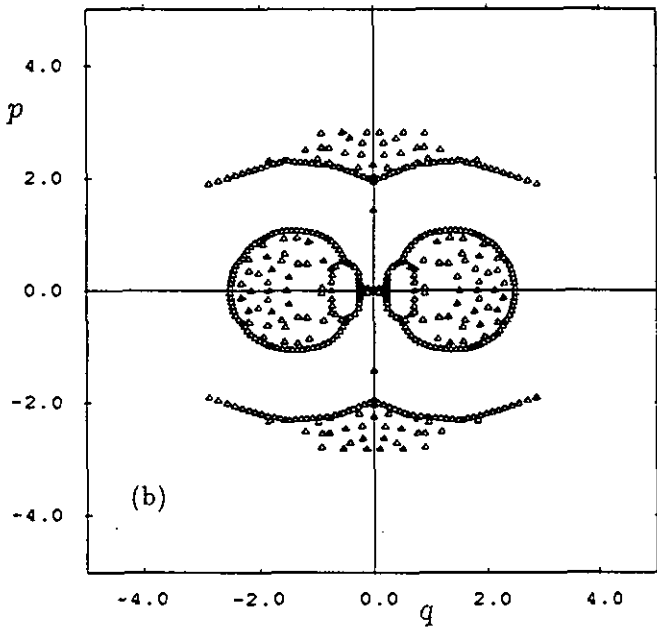
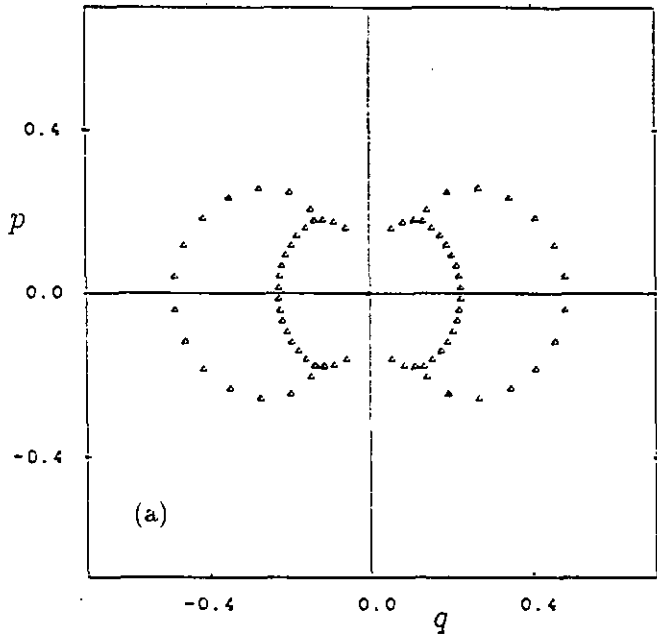


FIGURE 4.18

## Conclusions

Cet exposé se présente sous un aspect assez disparate, car si nous avons décidé de nous en tenir au seul système spin-boson, nous n'avons pas véritablement déterminé un but unique à nos recherches. Au cours de notre travail, un certain nombre de problèmes se sont posés, qui touchaient à des représentations différentes du même modèle, et qui nécessitaient des techniques de résolution diverses. Cette thèse constitue en fait un recueil de nos contributions, qui se sont développées dans des directions différentes, et dont aucune n'a réellement pris une importance relative prépondérante.

S'il fallait mettre en évidence un seul de nos résultats, sans doute mentionnerions-nous la transition observée dans la distribution des zéros de la fonction de Husimi. C'est la première fois qu'est démontrée l'existence de traces de chaos basée sur un critère purement quantique lorsque l'objet étudié est composé d'un seul spin  $s = 1/2$ .

Un certain nombre de problèmes restent ouverts et pour terminer, nous en mentionnerons quelques-uns.

Dans le cadre de la mécanique classique, l'étude des points fixes peut être considérée comme complète. Par contre, l'étude de la transition de l'ordre au chaos pourrait être entreprise plus systématiquement:

- Nous n'avons considéré que l'influence sur la transition du terme de couplage décrit par  $\lambda$  et  $\epsilon$ . Or, nous avons démontré l'importance du rapport des fréquences  $\omega/\omega_0$  sur la stabilité du point fixe  $A_2$ ; il serait intéressant de connaître l'influence de ce rapport sur la transition.
- De même, l'influence de l'énergie (ou plutôt du rapport  $E_0/S$ ) pourrait être examinée. Cette étude refléterait sans doute le transfert sur l'oscillateur harmonique de la part dominante de l'énergie lorsque celle-ci augmente.
- La méthode elle-même pourrait être améliorée par l'utilisation des exposants de Lyapunov. La représentation de la proportion de trajectoires à exposant positif augmenterait certainement la précision de notre critère.

Dans le cadre de la mécanique quantique, le spectre semble avoir livré la plupart de ses secrets. On pourrait envisager de déterminer exactement le nombre minimal de niveaux de spin nécessaire pour qu'une transition standard entre les distributions de Poisson et de Wigner ait lieu.

Il est également légitime de se demander quelle est l'allure des différentes statistiques spectrales dans le cas semi-classique traité en terme de fonctions de Husimi (c'est-à-dire, quelle est l'influence de  $\hbar$ ). Des résultats non publiés démontrent que

le comportement spectral est alors identique à celui que nous avons présenté.

Pour le travail sur les distributions de zéros des fonctions de Husimi, on peut envisager les extensions suivantes:

- L'étude de la transition en  $\epsilon$  mériterait peut-être plus de finesse. Cependant, il serait étonnant que des phénomènes nouveaux apparaissent pour des valeurs intermédiaires de ce paramètre.
- Un point fragile de ce travail est l'absence de l'étude de l'influence sur les distributions du nombre quantique de spin; donc le fait que le critère n'ait pas pu être vérifié sur un système dont on est certain qu'il présente une transition régularité-chaos. Il semble que le problème numérique du palier puisse être repoussé, mais jamais totalement résolu. Il s'agirait alors de trouver une représentation telle qu'il existe une relation de récurrence construite sur le modèle de (4.59), et dont tous les coefficients puissent se déduire directement d'un seul d'entre eux. Les tentatives effectuées de récurrences inverses ont montré de graves problèmes de divergence.

Enfin, des travaux de nature très différente sont en cours, basés sur le comportement de l'ensemble des fonctions propres, selon une technique développée par Müller et al. [65]. Il semble alors que dans le cas du spin  $s = 1/2$ , on n'observe pas réellement le signe même du chaos, mais un phénomène nécessaire à son apparition pour des spins à nombre quantique plus élevé. Ceci sans passage obligé par la limite semi-classique. Nos résultats seraient alors pleinement confirmés.

## Références

- [1] Parcival I. C., in *Chaos and Quantum Physics*, Les Houches, 1989, Session XXII, North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [2] Reichl L.E., *The Transition to Chaos*, Spinger, New-York, 1992.
- [3] Lichtenberg A.J., Liebermann M.A., *Regular and Stochastic Motion*, Springer, New-York, 1983.
- [4] Arnold V.I., *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer, New-York, 1983.
- [5] Schuster H.G., *Deterministic Chaos*, Physik-Verlag, Weinheim, 1984.
- [6] Weigert S., *On Classical Symmetry and Deterministic Randomness in Quantum Mechanics*, Dissertation, Basel, 1990.
- [7] Berry M., in *Chaos and Quantum Physics*, Les Houches, 1989, Session XXII, North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [8] Bohigas O., Giannoni M.-J., in *Mathematical and Computational Physics*, Proceedings of the 6th Granada Workshop, 1983, Springer Lecture Notes in Physics 209,1 (1984).
- [9] Bohigas O., in *Chaos and Quantum Physics*, Les Houches, 1989, Session XXII, North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [10] Bohigas O., in [9], p.94.
- [11] Mehta M.L., *Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels*, Academic Press, New-York, 1967, revu et augmenté 1990.
- [12] Kunz H., in *Le Chaos*, 33<sup>me</sup> cours de perfectionnement de l'AVCP, Grimentz, 1991, AVCP, Lausanne, 1991.
- [13] Yuval G., Anderson P.W., *Phys.Rev.H* 1,1522 (1970).
- [14] Beck R., Götze W., Prelovsek P., *Phys.Rev.A* 20,1140 (1979).
- [15] Solt G., Beck H., *Helv.Phys.Acta* 60,560 (1987).
- [16] Jaynes E.T., Cummings F.W., *Proc.IEEE* 51,126 (1963).
- [17] Cohen-Tannoudji C., Dupont-Roc J., Grynberg G., *Photons et Atomes - les Processus d'Interaction*, InterEdition, Paris, 1988.
- [18] Meystre P., Sargent III M., *Elements of Quantum Optics*, Spinger, Berlin, 1990.

- [19] Cohen-Tannoudji C., Diu B., Laloë F., *Mécanique Quantique - Tome I*, Hermann, Paris, 1973. revu et corrigé 1977.
- [20] Sargent III M., Scully M.O., Lamb Jr W.E., *Laser Physics*, Addison-Wesley, Reading, 1974.
- [21] Arnold V., *Les Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*, Mir, Moscou, 1976.
- [22] Belohrov P.I., Zaslavski G.M., Tartakovski G.K., *Sov.Phys.-JETP* 44,945 (1976).
- [23] Feinberg D., Ranninger J., *Physica* 14D,29 (1984).
- [24] Chirikov B.V., *Pbys.Reports* 52,265 (1979).
- [25] Milonni P.W., Ackerhalt J.R., Galbraith H.W., *Phys.Rev.Lett* 50,966 (1983).
- [26] Fox R.F., Eidson J., *Phys.Rev.A* 34,482 (1986).
- [27] Müller L., Stolze J., Leschke B., Nagel P., *Phys.Rev.A* 44,1022 (1991).
- [28] Hergé P., Pomeau Y., Vidal Ch., *L'Ordre dans le Chaos*, Hermann, Paris, 1984.
- [29] Gutzwiller M.C., in *Chaos and Quantum Physics*, Les Houches, 1989, Session XXII, North-Bolland, Amsterdam, 1991.
- [30] Cibils M.B., Cuche Y., Wreszinski W.F., Amiet J.-P., Beck H., *J.Phys.A* 23,545 (1990).
- [31] Hepp K., Lieb E.H., *Helv.Phys.Acta* 46,573 (1973).
- [32] Hepp K., Lieb E.H., *Springer Lectures Notes in Physics* 36,178 (1975).
- [33] Ozorio de Almeida A.M., *Hamiltonian Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [34] Perelomov A., *Generalized Coherent States and their Applications*, Springer, Berlin, 1986.
- [35] Arecchi F.T., Courtens E., Gilmore R., Thomas H., *Phys.Rev.A* 6,2211 (1972).
- [36] Amiet J.-P., Cibils M.B., *J.Phys.A* 24,1515 (1991).
- [37] Bialynicki-Birula I., Bialynicki-Birula Z., *Phys.Rev.A* 14,1101 (1976).
- [38] Cibils M.B., Cuche Y., Marville V., Wreszinski W.F., *Phys.Rev.A* 43,4044 (1991).
- [39] Pegg D.T., Barnett S.M., *Europhys.Lett.* 6,483 (1988).

- [40] Cibils M.B., Cucho Y., Marvulle V., Wreszinski W.F., Amiet J.-P., Beck H., J.Phys.A 24,1661 (1991).
- [41] Hialynicki-Hirula I., Acta Phys.Austr.Suppl. XVIII,111(1977).
- [42] Autler S.H., Townes C.H., Phys.Rev 100,703 (1955).
- [43] Graham R., Höhnerbach M., Z.Phys.B 57,233 (1984).
- [44] Shore H.B., Sander L.M, Phys.Rev.B 7,4573 (1973).
- [45] Marvulle V., *Sobre os Limites Clássico e Semiclássico do Modelo Spin-Boson*, Tese de Doutorado, São Paulo, 1991.
- [46] Graham R., Höhnerbach M., Phys.Lett 101A,61 (1984).
- [47] Kuš M., Phys.Rev.Lett. 54,1343 (1985).
- [48] Steeb W.-H., Villet C.M., Kunick A., Phys.Rev.A 32,1232 (1985).
- [49] Graham R., Höhnerbach M., Phys.Rev.Lett. 57,1378 (1986).
- [50] Lewenkopf C.H., Nemes M.C., Marvulle V., Pato M.P., Wreszinski W.F., Phys.Lett.A 155,113,(1991).
- [51] Weyl H., Z.Phys 46,1 (1927).
- [52] Wigner E.P., Phys.Rev. 40,749 (1932).
- [53] de Groot S.R., *La Transformation de Weyl et la Fonction de Wigner*, Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1974.
- [54] Moyal J.E., Proc.Camb.Phil.Soc 45,99 (1949).
- [55] Husimi K., Proc.Phys.Math.Soc.Jpn 22,264 (1940).
- [56] Takahashi K., Prog.Theor.Phys.Suppl. 98,109 (1989).
- [57] Cibils M.B., Cucho Y., Leboeuf P., Wreszinski W.F., Phys.Rev.A 46,4560 (1992).
- [58] Leboeuf P., Saraceno M., J.Phys.A 23,1745 (1990); *ibid.*, Phys.Rev.A 41,4614 (1990).
- [59] Leboeuf P., Voros A., J.Phys.A 23,1765 (1990); Leboeuf P., J.Phys.A 24,4575 (1991).
- [60] Hoas R.P., *Entire Functions*, Academic Press, New-York, 1954.

- [61] Levin B.Y., *Distributions of Zeros of Entire Functions*, American Mathematical Society, Providence, 1964.
- [62] Levin B.Y., in [61], p.9, Theorem 2.2.2.
- [63] Cartan B., *Théorie Elémentaires des Fonctions Analytiques d'une ou plusieurs Variables Complexes*, Hermann, Paris, 1961, p.97, Proposition 4.1.
- [64] Titchmarsh E.C., *The Theory of Functions*, Oxford University Press, Oxford, 1939, p.119, 3.45.
- [65] Srivastava N., Müller G., *Z.Phys.B* 81,137 (1990).

## Remerciements

En premier lieu, je remercie sincèrement mon directeur de thèse, le Prof. J.-P. Amiet, pour la confiance et le soutien qu'il m'a accordés, pour son entière disponibilité à chacune de mes sollicitations, et pour la pertinence de ses interventions, toujours fécondes. Je le remercie de m'avoir donné la chance de pouvoir travailler dans ce domaine passionnant et je dois associer à ces derniers remerciements les Profs. B. Beck et P. Huguenin (hélas décédé depuis), qui participèrent à nos premières recherches.

Je remercie également les membres du jury, les Profs. H. Beck et F. Rotben, pour l'attention qu'ils ont portée à mon travail et les quelques retouches judicieuses qu'ils m'ont suggéré d'y ajouter.

Je tiens à souligner le rôle essentiel et parfois ingrat qu'a joué M. Cibils qui fut mon "premier interlocuteur". J'ai profité abondamment de ses conseils et des réponses qu'il trouvait souvent aux quantités de questions, des plus anodines aux plus fondamentales, que je lui soumettais chaque jour. Notre collaboration a été riche à plus d'un titre, et je lui en suis très reconnaissant.

Durant ces quelques années, j'aurai bénéficié des conseils, des encouragements et de l'amitié d'un grand nombre de collaborateurs, tant de l'Institut que de l'extérieur, qui me pardonneront de ne pas les citer tous, et que je remercie chaleureusement. Parmi eux, j'aimerais mentionner les Profs. W. Wreszinski et G. Müller ainsi que P. Leboeuf, avec qui chaque discussion devenait une source d'idées stimulantes, et qui ont déterminé en partie l'orientation de nos recherches. Je ne veux pas oublier Ch. Nussbaum, notre responsable de l'informatique, qui m'a tiré plus d'une épine du pied.

Je remercie particulièrement mes amies Catherine Loetscher et Marie-Jeanne Cernuschi qui ont accepté de déchiffrer ce texte pour en corriger la syntaxe et l'orthographe.

Enfin, je tiens à exprimer ma gratitude à tous mes proches, parents et amis, qui sans doute sous-estiment le poids de leur contribution à la réussite de ce travail.