

Une preuve intuitionniste de l'argument de Diodore-Prior

Joseph Vidal-Rosset

Résumé

Cet article répond aux trois reproches que Vuillemin a formulés contre la preuve du Dominateur proposée par Prior. L'interprétation intuitionniste de cette preuve permet d'écarter les deux premiers reproches et de limiter la portée du troisième. On donne en conclusion une preuve de l'argument de Diodore, fondée sur une interprétation intuitionniste du premier axiome de la démonstration de Prior. Cette preuve fait à la fois l'économie des axiomes additionnels de Prior et des indices temporels utilisés dans les démonstrations de Vuillemin¹.

1. Le langage de la preuve de Prior

Prior a donné dans (1955) et (1967) une démonstration formelle du célèbre argument de Diodore rapporté par Epictète. Comme nous allons le voir, la preuve proposée par Prior, exprimée dans le langage d'une logique temporelle minimale, est fondée uniquement sur les règles du calcul propositionnel de la logique minimale. Aucune autre démonstration formelle de l'argument

¹ Par souci de concision, les affirmations contenues dans cet article concernant la validité de formules du système modal \mathbf{K} et de la logique temporelle minimale \mathbf{K}_t ne sont pas accompagnées de leurs preuves. Les affirmations au sujet de la validité dans \mathbf{K} ou dans \mathbf{K}_t ont cependant été systématiquement vérifiées à l'aide du démonstrateur de théorème *The Logic Workbench* (LWB), disponible à l'adresse : <http://www.lwb.unibe.ch/>.

de Diodore n'a été capable, jusqu'à présent, de rivaliser avec l'élégance et la simplicité de cette preuve.

1.1. Formalisme de la preuve de Prior — Prior fait usage du langage du calcul propositionnel auquel il ajoute deux opérateurs temporels et deux opérateurs modaux.

1. *Opérateurs temporels* :

Pp = « p est le cas au moins une fois dans le passé »,

Fp = « p est le cas au moins une fois dans le futur ».

On notera par ailleurs que p et $\neg p$ signifient respectivement :

p = « p est maintenant le cas »,

$\neg p$ = « p n'est pas maintenant le cas ».

En d'autres termes, si une variable propositionnelle n'est pas précédée d'un opérateur temporel, on l'interprète comme représentant une assertion au sujet du présent.

2. *Opérateurs modaux* :

$\diamond p$ = « p est possible »,

$\square q$ = « q est nécessaire ».

1.2. L'argument de Diodore proprement dit — Les trois prémisses du Dominateur sont alors formalisées par Prior de la façon suivante :

- Toute proposition vraie au sujet du passé est nécessaire.
En d'autres termes, ce qui a été le cas ne peut pas ne pas avoir été le cas :

$$Pp \rightarrow \neg \diamond \neg Pp \quad (I)$$

- L'impossible ne suit pas [logiquement] du possible. En d'autres termes, s'il est nécessaire que p implique q , alors si q est impossible, p l'est aussi.

$$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg \Diamond q \rightarrow \neg \Diamond p) \quad (\text{II})$$

- Quelque chose qui n'est, ni ne sera, reste cependant possible.

$$\neg p \wedge \neg Fp \wedge \Diamond p \quad (\text{III})$$

Diodore affirme que l'assertion conjointe de (I) et de (II) implique la négation de (III) :

- Si un énoncé p n'est vrai ni maintenant ni plus tard, alors p est impossible.

$$(\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow \neg \Diamond p \quad (\neg \text{III})$$

1.3. L'argument de Diodore-Prior

1.3.1. Déduction naturelle — Pour démontrer formellement l'argument de Diodore, Prior ajoute deux axiomes. Le premier est un axiome de la logique temporelle \mathbf{K}_t et, à l'instar de Garson (2006), je l'appelle (HF) :

- « Nécessairement, si une chose est le cas, alors il a toujours été vrai qu'elle allait être au moins une fois le cas. »
En formule :

$$\Box(p \rightarrow HFp) \quad (\text{HF})$$

- A partir de la traduction *classique* de H par $\neg P \neg$, il est possible de traduire (HF) par « nécessairement, si p est le cas, alors il n'a jamais été vrai dans le passé que p n'allait pas être au moins une fois le cas ». C'est cette expression que Prior choisit comme premier axiome additionnel :

$$\Box(p \rightarrow \neg P \neg Fp) \quad (\text{IV})$$

Prior ajoute enfin un second axiome additionnel, à savoir :

- « Si p n'est pas le cas et ne le sera jamais, alors il y a au moins un moment dans le passé où il est vrai que p ne sera jamais le cas. » En formule :

$$(\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow P\neg Fp \quad (\text{V})$$

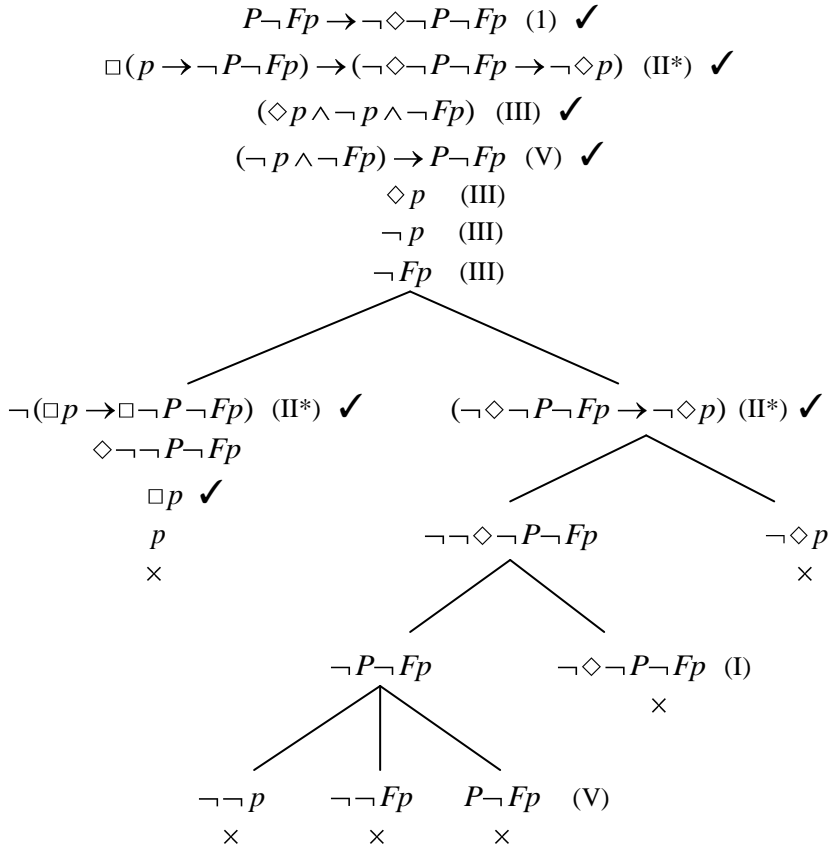
On peut alors démontrer en déduction naturelle que la conjonction de (I), (II), (IV) et (V) implique la négation de (III) :

| | | |
|----|---|--|
| 1 | $Pp \rightarrow \neg \diamond \neg Pp$ | (I) |
| 2 | $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg \diamond q \rightarrow \neg \diamond p)$ | (II) |
| 3 | $\Box(p \rightarrow \neg P\neg Fp)$ | (IV) |
| 4 | $(\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow P\neg Fp$ | (V) |
| 5 | $\neg p \wedge \neg Fp$ | Hyp |
| 6 | $\neg p \wedge \neg Fp$ | R - 5 |
| 7 | $(\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow P\neg Fp$ | R - 4 |
| 8 | $P\neg Fp$ | \rightarrow E, 6, 7 |
| 9 | $Pp \rightarrow \neg \diamond \neg Pp$ | R - 1 |
| 10 | $P\neg Fp \rightarrow \neg \diamond \neg P\neg Fp$ | Sub $p / \neg Fp$ |
| 11 | $\neg \diamond \neg P\neg Fp$ | \rightarrow E, 8, 10 |
| 12 | $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg \diamond q \rightarrow \neg \diamond p)$ | R-2 |
| 13 | $\Box(p \rightarrow \neg P\neg Fp) \rightarrow (\neg \diamond \neg P\neg Fp \rightarrow \neg \diamond p)$ | Sub $q / \neg P\neg Fp$ |
| 14 | $\Box(p \rightarrow \neg P\neg Fp)$ | R - 3 |
| 15 | $\neg \diamond \neg P\neg Fp \rightarrow \neg \diamond p$ | \rightarrow E, 13, 14 |
| 16 | $\neg \diamond p$ | \rightarrow E, 11, 15 |
| 17 | $(\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow \neg \diamond p$ | \rightarrow I, 5-16, i.e. \neg (III) |
| | □ | |

Figure 1. La preuve de Prior en déduction naturelle

On peut remarquer que la preuve de Prior ne fait usage que des règles de la logique propositionnelle minimale, cette dernière étant contenue dans la logique intuitionniste, la validé intuitionniste de la preuve de Prior ne fait donc aucun doute.

1.3.2. Arbre de réfutation — Si l'on lit attentivement la preuve de Prior en déduction naturelle (figure 1), on peut remarquer que l'axiome (IV) est en fait utilisé pour transformer l'axiome (II) *via* une règle de substitution. Ainsi la contradiction réside plus précisément dans la conjonction des axiomes (I) et (II*), c'est-à-dire (II) modifié à l'aide de (IV), *via* (V) et (III). C'est ce qu'atteste l'arbre de réfutation suivant :



□

Figure 2. L'arbre de la preuve de Prior

Il est ici intéressant de noter que cet arbre de réfutation apporte une information supplémentaire. L'arbre montre que l'on a besoin des axiomes modaux qui définissent les systèmes **K** et **T**.

$$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box p) \quad (\mathbf{K})$$

$$\Box p \rightarrow p \quad (\mathbf{T})$$

Sans ces axiomes, il est en effet impossible de parvenir à la contradiction qui ferme la branche gauche de l'arbre de réfutation.

1.4. La logique temporelle \mathbf{K}_t — Que la preuve de Prior soit fondée sur le système modal **T** n'a rien de surprenant, pour peu que l'on réfléchisse à ce qu'écrivit Copeland (1983) :

There is a well-known connection between the minimal tense logic \mathbf{K}_t and the minimal modal logic **T**. If we define $\Box p$ as $p \wedge Gp$ (the so-called Diodorean definition of necessity) then the theorems of \mathbf{K}_t containing no logical symbols other than \Box and truth functional connectives are precisely the theorems of **T**.

\mathbf{K}_t est bien connu comme le système de logique temporelle minimale *qui n'implique aucune assumption sur les propriétés physiques du temps*². On a dans \mathbf{K}_t les équivalences suivantes :

$$\vdash_{\mathbf{K}_t} Gp \equiv \neg F\neg p \quad (1)$$

et

$$\vdash_{\mathbf{K}_t} Hp \equiv \neg P\neg p \quad (2)$$

où Gp et Hp signifient respectivement : « p sera toujours le cas » et « p a toujours été le cas ».

² Pour une description de \mathbf{K}_t , voir Burgess (2009 : chap. 2) et pour un système de preuve dans \mathbf{K}_t , voir l'élégant système exposé par Copeland (1983).

Il est alors possible de définir, comme Ewald (1986) l'a fait, un système *intuitionniste* de logique temporelle qui est un sous-système de \mathbf{K}_t . Appelé \mathbf{IK}_t , ce système est fondé sur la logique intuitionniste de la même façon que \mathbf{K}_t est fondé sur la logique classique. Dans \mathbf{IK}_t les équivalences (1) et (2) disparaissent pour faire place aux implications suivantes :

$$\vdash_{\mathbf{IK}_t} Gp \rightarrow \neg F\neg p \quad (3)$$

et

$$\vdash_{\mathbf{IK}_t} Hp \rightarrow \neg P\neg p \quad (4)$$

Par contre, les converses de ces formules *ne sont pas* des théorèmes de \mathbf{IK}_t . Il en va de même pour toutes les formules de \mathbf{IK}_t qui, pour être prouvées, nécessitent le recours à des formules non démontrables en logique intuitionniste.

2. Questions logiques et philosophiques

2.1. Le problème logique — Le fait que la preuve de Prior soit valide en raison des règles de la logique minimale ne prouve pas que la démonstration parvienne à une conclusion justifiée dans une logique temporelle et modale. Pour que la conclusion soit valide dans un système comme \mathbf{K}_t par exemple, il faudrait que toutes les formules temporelles utilisées dans la preuve de Prior soient également démontrables dans \mathbf{K}_t et que toutes les formules modales soient aussi démontrables dans \mathbf{T} . En d'autres termes, se demander si

$$X \vdash_{\mathbf{K}_t} (\neg\text{III}) \quad (5)$$

où X est l'ensemble des prémisses de Prior, est une question plus difficile que de montrer que, pour \vdash_m symbolisant la relation de dérivabilité en logique minimale, on a

$$X \vdash_m (\neg III) \quad (5)$$

ce qui a déjà été prouvé précédemment. Toute la question est donc, sur le plan strictement logique, de déterminer quelles sont les ressources minimales qui sont nécessaires à une logique temporelle et modale pour justifier intégralement la conclusion de Diodore-Prior.

2.2. La polémique philosophique — Il est important de rappeler le caractère anti-aristotélien du Dominateur. Cet argument entend en effet monter une faute logique inhérente à la conception des modalités entretenue par l'essentialisme d'Aristote. On sait que la distinction modale entre actualité et potentialité est fondamentale dans le système d'Aristote et que c'est en partant de cette distinction qu'Aristote répond au fatalisme logique des Mégariques dans le chapitre IX du *De Interpretatione*. Pour faire court, Aristote admet les modalités *de re*. Selon lui, une substance seconde, l'homme par exemple, a des qualités nécessaires, comme celle d'avoir un corps limité et corruptible, et des qualités contingentes, comme celle d'être chauve ou de ne pas l'être. En tant qu'homme, il réalisera nécessairement certains actes, comme celui de respirer, mais il laissera aussi d'autres possibles, comme par exemple le fait d'apprendre le chinois, à jamais irréalisés. On peut citer Vuillemin pour résumer le sens qui, en raison du contexte aristotélien, a été donné au Dominateur :

On peut [...] avec Aristote, distinguer deux sortes de futurs. Certains sont des vertus qui *ne pourraient pas ne pas être* réalisées. Les autres sont des possibles contingents. Parmi ces derniers, certains sont réalisés, mais il en reste d'autres qui ne le seront jamais. L'ordre des possibles, par conséquent, n'est en aucune façon épuisé par les futurs qui se réaliseront. Diodore veut montrer qu'aucun futur non réalisé n'est possible. Mais pour cela il n'a pas besoin de supposer que tous

les possibles ne sont pas et ne seront jamais ; le fait qu'Aristote admette la non-réalisation de quelques possibles est déjà assez. (Vuillemin 1996 : 32)

En réalité il est parfaitement possible de conclure avec Diodore que tout possible est ou bien présent ou bien futur, tout en refusant d'affirmer qu'aucun futur non réalisé n'est possible. La stratégie consiste alors à assumer un engagement ontologique minimal au sujet de la nature du temps, ainsi qu'une théorie des modalités bien plus faible que celle d'Aristote, afin de faire tomber la théorie de ce dernier dans la contradiction, puisque Aristote assume *a fortiori* les thèses de la logique minimale d'un Diodore. Cependant, en tant qu'arbitre, Vuillemin ne reconnaît pas à Prior le mérite d'avoir traduit fidèlement l'argument de Diodore et par conséquent refuse que l'on s'appuie sur la démonstration de Prior pour juger de la solidité de l'argument de Diodore contre Aristote :

Suivons, au contraire [de Prior], la vraisemblance historique. Considérons la faveur universelle que le Dominateur a rencontré dans l'anti-quité, comme une présomption en faveur de sa solidité. Écartons donc la supposition que des ambiguïtés grossières se seraient glissées dans les prémisses. Donnons, avec Prior, un sens purement logique au mot "suivre". Posons que le passé dont il est question dans la première pré-misse est celui des événements, non celui des temps grammaticaux. Il reste à montrer l'incompatibilité des trois prémisses sans avoir ni à postuler la discrétion du temps, ni à confondre l'irrévocabilité du passé avec la nécessité logique, ni même à invoquer une rétrogradation du vrai dont Epictète ne fait pas mention et que le Stagirite a expres-sément mise en question. (Vuillemin 1984 : 25-26)

Vuillemin soutient donc que la preuve de Prior, principalement en raison de ses prémisses additionnelles, nécessaires à la dérivation de la conclusion, est coupable de trois fautes majeures:

- (A) la confusion de la nécessité logique avec l'irrévocabilité du passé (faute de la première prémisse),
- (B) l'usage de la rétrogradation du vrai (faute de la première prémisse additionnelle),
- (C) le postulat du temps discret (faute de la seconde prémisse additionnelle).

Insistons encore sur le fait que pour Vuillemin les fautes (B) et (C) sont des fautes en raison du but anti-aristotélien du Dominateur, car Aristote rejette explicitement la rétrogradation du vrai qui est impliquée par la théorie des Mégariques, et il assume la continuité du temps.

Dans les sections qui suivent, je me limite à une défense de la preuve que Prior a donné du Dominateur, en prouvant, dans les sections 3 et 4, que les deux premières critiques peuvent parfaitement être écartées d'un point de vue intuitionniste. La section 5 explique brièvement pourquoi le dernier reproche n'a pas le caractère décisif que Vuillemin lui donne. Enfin, la section 6 donne une preuve intuitionniste fondée sur une lecture modale du premier axiome de la preuve de Prior, qui permet de dériver la conclusion de Diodore, sans faire usage du moindre axiome additionnel.

3. Réponse à la première accusation

3.1. Renforcement du reproche — Pour répondre au reproche (A), on commencera par le reprendre et l'exprimer sous une forme qui renforce le soupçon du caractère irrecevable de la preuve de Prior, dès lors que celle-ci prétend être une preuve en

logique modale. Il est en effet indiscutable que, même dans **S5**, l'axiome (I) *n'est pas* un théorème de logique modale. L'axiome (I) a la même forme logique que

$$p \rightarrow \neg \diamond \neg p \quad (7)$$

formule classiquement équivalente à

$$p \rightarrow \Box p \quad (8)$$

On a vu que la preuve de Prior *via* la méthode des arbres de Beth nécessite (T). En raison de la conjonction de (T) et de (8) on serait donc conduit à admettre

$$p \leftrightarrow \Box p \quad (9)$$

Cependant le fait d'admettre (9) serait effectivement une catastrophe pour la preuve de Prior car, comme le soulignent Hughes et Cresswell (1996 : 64-5), le simple fait d'ajouter (9) au système modal normal le plus faible qui soit, c'est-à-dire **K**, provoque un *effondrement modal*. En d'autres termes, **K** + (9) = **Triv**, à savoir, un système où les théorèmes n'expriment de manière *triviale* que les vérités d'un calcul propositionnel, où \Box et \diamond ne sont rien d'autre que de simples décorations inutiles.

3.2. Réponse au reproche renforcé — Interprétons l'axiome (I) comme exprimant la même idée que le principe de nécessité conditionnelle que Vuillemin utilise dans son système de logique avec indices temporels, c'est-à-dire « si p est vrai en t alors il n'est pas possible en t que p soit faux en t », en formule :

$$p_t \rightarrow \neg \diamond_t \neg p_t \quad (\text{Nec. Cond.})$$

et faisons de l'axiome (I) *une instance du schéma d'axiome*

$$p \rightarrow \neg \diamond \neg p \quad (\text{Schéma d'ax.})$$

valide quel que soit p . On peut alors écarter le reproche (A) (et plus encore, comme on le verra dans la section 6). Soulignons qu'il est crucial d'*interpréter* l'axiome (I) de façon à ce qu'il ne soit pas lu comme on lit classiquement (8). Remarquons que la preuve originale de Prior donne un indice de la légitimité d'une lecture intuitionniste, en ne traduisant jamais $\neg\Diamond\neg$ par \Box , comme l'autoriserait l'équivalence classique. Si la logique intuitionniste des prédicats permet de prouver

$$\vdash_i (\forall x)Fx \rightarrow \neg(\exists x)\neg Fx \quad (10)$$

mais n'autorise pas la preuve de l'implication converse, de la même façon on a, en logique intuitionniste modale :

$$\vdash_i \Box\varphi \rightarrow \neg\Diamond\neg\varphi \quad (11)$$

mais en revanche

$$\not\vdash_i \neg\Diamond\neg\varphi \rightarrow \Box\varphi \quad (12)$$

L'interprétation intuitionniste de l'axiome (I) permet donc d'écarter le reproche (A) exprimé sous sa forme la plus forte, car il n'est plus possible d'affirmer que l'axiome (I) est une instance du schéma (8). Il est d'une part clair que la formule (Schéma d'ax.), conserve sa valeur modale, puisqu'elle dit : « si p est *prouvable*, alors il *n'est pas possible* que l'on *puisse* prouver que p implique une absurdité ». D'autre part, la menace de devoir accepter (9) comme une formule valide dans le système de logique modale utilisé pour la preuve est aussi écartée, en raison des vertus de la logique intuitionniste, qui permet, comme on le voit, de rejeter la première accusation de Vuillemin contre la preuve de Prior.

4. Réponse à la seconde accusation

Les réticences de Vuillemin au sujet de l'axiome (HF) proviennent du fait que cet axiome affirme une rétrogradation du vrai qui était expressément rejetée par Aristote comme une position absurde :

Rien n'empêche, en effet, que, dix mille ans à l'avance, tel homme prédise un événement et que tel autre prédise le contraire : ce qui se réalisera nécessairement, c'est celle des deux prédictions, quelle qu'elle soit, qui était vraie à ce moment là. (*De Int.* 9, 18b34)

Il est indiscutable que si la preuve de Prior ajoute un axiome qui est rejeté par Aristote, alors cette preuve ne peut être considérée comme acceptable.

Mais l'intérêt de la lecture intuitionniste de la preuve de Prior est de montrer que l'affaiblissement de (HF) par l'axiome (IV) permet d'écarter l'accusation (B). Contrairement à (HF), l'axiome (IV) n'est pas contre-intuitif et, d'un point de vue intuitionniste, celui-ci n'implique pas celui-là. Traduit en langage intuitionniste, l'axiome (IV) dit :

« S'il est prouvable que p soit le cas, alors il n'y a rien qui, dans le passé, puisse prouver que p ne sera jamais le cas ».

Autrement dit, si l'on suppose que l'on peut obtenir maintenant une preuve de p , alors en raison même de cette supposition, toute supposition de l'existence d'une réfutation de p antérieure à cette preuve, c'est-à-dire d'une preuve que p conduit toujours à l'absurde, est absurde. En effet la conclusion rétrograde, mais cette rétrogradation a uniquement un contenu cognitif négatif et ne donne nullement le sentiment que les événements à venir sont déjà déterminés dans le passé. *Last but not least*, l'axiome (IV) est un théorème de \mathbf{K}_t , tout comme de \mathbf{IK}_t . Il n'est donc pas rejetable sans absurdité par Vuillemin, car la logique temporelle aristotélicienne contient nécessairement la logique temporelle minimale \mathbf{K}_t .

5. Réponse à la troisième accusation

On a vu que l'axiome (I) lu de manière intuitionniste est acceptable. On sait aussi que l'axiome (II) est un théorème de \mathbf{K} , qui est le système le plus faible de toutes les logiques modales normales et recevable aussi du point de vue intuitionniste. On vient de voir enfin que l'axiome additionnel (IV) est un théorème de la logique temporelle minimale également valide du point de vue intuitionniste et qu'il ne peut donc pas être rejeté par celui qui adopte une logique plus forte, à l'instar d'Aristote. Qu'en est-il de l'axiome additionnel (V) ? Il est hélas non valide dans \mathbf{K}_t et donc *a fortiori* il n'est pas un théorème de \mathbf{IK}_t . C'est pour cette raison que Prior lui-même a douté plus tard de la validité de sa preuve, arrivant à la conclusion que l'axiome (V) n'est valide que dans une structure discrète. En remarquant que l'axiome (V) est équivalent à la formule de Hamblin

$$(p \wedge Gp) \rightarrow PGp \quad (\text{Hamb})$$

Prior écrit :

This is precisely Proposition (V) in the reconstruction of the Master Argument of Diodorus. And it is interesting to be given a basis for a tense logic from which it is provable. Just this Proposition (V), however, had begun about 1960 to strike me as dubious. Theses which appeal, in order to gain intuitive plausibility, to what was the case at 'the moment just past', are liable to commit one to the view that time is discrete. What if there is *no* 'moment just past', but between any past moment, however close to the present, and the present itself, there is another moment still past ? On this supposition, Proposition (V) in fact fails, and on the corresponding supposition about the future, Hamblin's fails too. (1967: 48)

Il n'y a donc très probablement aucun moyen de donner une preuve de l'argument de Diodore dans une logique temporelle minimale si l'on ne suppose pas un modèle de temps discret. Mais remarquons, pour en finir avec ce point, que le fait que l'axiome (V) ne soit valide qu'à la condition que l'on accepte

un modèle du temps discret ne fait pas de la preuve de Prior une traduction incorrecte de l'argument de Diodore. Cela ne limite pas non plus sa portée polémique contre la position aristotélicienne. Supposons en effet qu'un Aristote refuse l'axiome (V) parce qu'il n'est *logiquement* valide que si l'on interprète le temps *via* la progression des entiers naturels. Il incomberait alors à cet Aristote de décrire les changements événementiels dans un temps continu (comme par exemple le départ du coureur au moment où il perçoit le signal), sans faire usage d'aucun axiome comparable à l'axiome (V). Une telle tâche, si elle est possible, supposerait déjà sans doute la théorie contemporaine des nombres réels, ce qui d'une part est un anachronisme plus grave encore que la faute historique de Prior et ce qui, d'autre part, n'invaliderait pas non plus l'axiome (V) qui est *satisfiable* dans \mathbf{K}_t , donc indépendamment du modèle du temps que l'on choisit. La solution raisonnable est alors de concevoir ce fameux axiome du discret comme un axiome *non logique* nécessaire à la preuve de Diodore-Prior dans la logique minimale temporelle. Voyons maintenant comment il est possible de prouver la conclusion de Diodore d'une manière purement modale et intuitionniste, sans les axiomes additionnels.

6. Une preuve intuitionniste de l'argument de Diodore

Définition 1 (Contingence) — Un énoncé p est *contingent* s'il n'est ni nécessairement vrai, ni nécessairement faux.

$$\nabla p \leftrightarrow (\neg \Box p \wedge \neg \Diamond \neg p) \quad (13)$$

mais on utilisera l'écriture suivante :

$$\nabla p \leftrightarrow (\Diamond \neg p \wedge \Diamond \neg \neg p) \quad (\text{Déf. } \nabla)$$

Exemple 1 — « Je pense donc je suis », est une vérité nécessaire, donc possible, mais non contingente.

Remarque — Comme le suggère l'exemple 1, on peut percevoir intuitivement que l'usage de ∇ et de $\neg \nabla$ n'a de pertinence que dans un système modal où l'axiome (T) est accepté³. On a vu en effet plus haut (section 1.3.2) que la preuve de l'argument de Diodore-Prior nécessite au moins du point de vue modal les axiomes (K) et (T).

Exemple 2 — « Aujourd'hui ou demain, François va tondre la pelouse » est une vérité contingente.

Remarque — A la lecture de l'exemple 2, on pressent que les événements passés, tout comme les événements immédiatement présents, excluent la possibilité de leur négation et donc la contingence ainsi définie ; cette impossibilité de nier leur existence implique par conséquent un effondrement modal, mais comme le remarque Vuillemin (1984 : 34), un effondrement modal limité.

³ C'est ce que souligne Cresswell (1988), en faisant référence à une remarque de Segerberg (1982) au sujet des développements de Montgomery et Routley (1966) sur les systèmes avec l'opérateur ∇ . Voir aussi sur ce point Humberstone (1995).

Définition 2 (Négation)

$$\neg p \leftrightarrow (p \rightarrow \perp) \quad (\text{Déf. } \neg)$$

Remarque — Cette définition de la négation, qui est la définition standard de la négation en logique intuitionniste, peut traduire adéquatement la seconde prémisse de l'aporie de Diodore telle que la rapporte Epictète :

« un possible *ne peut pas* être la conséquence logique d'un impossible ».

Autrement dit, il est équivalent de dire qu'un énoncé p implique une conclusion absurde et de dire que p est faux ou que la négation de p est vraie.

Théorème — Dans un système modal normal pourvu des axiomes (K) et (T), où l'axiome (I) est une instance du schéma d'axiome $p \rightarrow \neg \diamond \neg p$, et où l'on assume qu'il n'y a de preuve de p comme possible qu'à la condition que l'on puisse prouver que p est passé, ou présent, ou futur, alors, avec l'usage de l'opérateur ∇ et les seules règles intuitionnistes de la logique propositionnelle on peut dans ce contexte dériver une thèse intuitionniste équivalente à celle de Diodore :

$$(\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow \neg \diamond \neg \neg p \quad (14)$$

Démonstration :

| | | |
|----|--|--|
| 1 | $Pp \rightarrow \neg \diamond \neg Pp$ | Axiome I |
| 2 | $\neg p \wedge \neg Fp$ | H |
| 3 | $P\neg p \wedge \diamond \neg P\neg p \wedge \diamond \neg \neg P\neg p$ | H : $P\neg p \wedge \nabla P\neg p$ |
| 4 | $P\neg p$ | \wedge_1 E , 3 |
| 5 | $P\neg p \rightarrow \neg \diamond \neg P\neg p$ | 1 subst. ($Pp / P\neg p$) |
| 6 | $\neg \diamond \neg P\neg p$ | \rightarrow E , 4-5 |
| 7 | $\diamond \neg P\neg p$ | \wedge_2 E , 3 |
| 8 | \perp | \rightarrow E , 6-7 |
| 9 | $\neg P\neg p \vee \neg \nabla P\neg p$ | \rightarrow I , 3-8 (i.e. \neg H) |
| 10 | $\diamond \neg \neg p \wedge \diamond \neg \neg \neg p$ | H : $\nabla \neg p$ |
| 11 | $\neg p$ | \wedge_1 E , 2 |
| 12 | $\neg p \rightarrow \neg \diamond \neg \neg p$ | 1 subst. ($Pp / \neg p$) |
| 13 | $\neg \diamond \neg \neg p$ | \rightarrow E , 11-12 |
| 14 | $\diamond \neg \neg p$ | \wedge_1 E , 10 |
| 15 | \perp | \rightarrow E , 13-14 |
| 16 | $\neg \nabla \neg p$ | \rightarrow I , 10-15 (i.e. \neg H) |
| 17 | $\diamond \neg \neg Fp \wedge \diamond \neg \neg \neg Fp$ | H : $\nabla \neg Fp$ |
| 18 | $\neg Fp$ | \wedge_2 E , 2 |
| 19 | $\neg Fp \rightarrow \neg \diamond \neg \neg Fp$ | 1 subst. ($Pp / \neg Fp$) |
| 20 | $\neg \diamond \neg \neg Fp$ | \rightarrow E , 18-19 |
| 21 | $\diamond \neg \neg Fp$ | \wedge_1 E , 17 |
| 22 | \perp | \rightarrow E , 20-21 |
| 23 | $\neg \nabla \neg Fp$ | \rightarrow I , 17-22 (i.e. \neg H) |
| 24 | $(\neg \nabla P\neg p \vee \neg P\neg p) \wedge \neg \nabla \neg p \wedge \neg \nabla \neg Fp$ | \wedge I , 9-16-23 |
| 25 | $(\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow ((\neg \nabla P\neg p \vee \neg P\neg p) \wedge \neg \nabla \neg p \wedge \neg \nabla \neg Fp)$ | \rightarrow I , 2-24 |
| 26 | $(\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow \neg \nabla \neg p$ | $\vdash_i (p \rightarrow (q \wedge r \wedge s)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ |
| 27 | $(\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow (\neg \diamond \neg \neg p \vee \neg \diamond \neg \neg \neg p)$ | Dev. $\neg(\nabla \neg p)$ |
| 28 | $(\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow \neg \diamond \neg \neg p$ | Ax. □ |

Bibliographie

- ARISTOTE, *Organon I et II*, trad. fr. J. Tricot, Paris: Vrin, 1946.
- BURGESS J. P. 2009. *Philosophical logic*, Princeton Univ. Press.
- COPELAND B. J. 1983. Tense Trees : A Tree System for K_t , *Notre Dame Journal of Formal Logic* **24**(3). 318–322.
- CRESSWELL M. J. 1988. Necessity and Contingency, *Studia Logica* **47**(2), 145–149.
- EWALD W. B. 1986. Intuitionistic Tense and Modal Logic. *The Journal of Symbolic Logic* **51**(1). 166–179.
- GARSON J. W. 2006. *Modal Logic for Philosophers*. Cambridge University Press.
- HUGHES G. E. & CRESSWELL M. J. 1996. *A New Introduction to Modal Logic*. London: Routledge.
- HUMBERSTONE I. L. 1995. The Logic of Non-contingency, *Notre Dame Journal of Formal Logic* **36**(2), 214–229.
- MONTGOMERY H. A. & ROUTLEY F. R. 1966. Contingency and Non-Contingency Bases for Normal Modal Logics, *Logique et Analyse* **35-36**, 318–328.
- PRIOR A. N. 1955. Diodoran Modalities, *The Philosophical Quarterly* **5**(20). 205–213.
- PRIOR A. N. 1967. *Past, Present and Future*. Oxford University Press.
- SEGERBERG K. 1982. *Classical Propositional Operators*, Oxford: Clarendon.
- VUILLEMIN J. 1984. *Nécessité ou Contingence, l'aporie de Diodore et les systèmes philosophiques*. Paris: Minuit.
- VUILLEMIN J. 1996. *Necessity or Contingency - The Master Argument*, in *Lecture Notes 56*, Stanford: CSLI Publications.