Université de Neuchâtel - Faculté des Sciences

ZUR RELATIVISTISCHEN S-MATRIXTHEORIE FÜR TEILCHEN MIT BELIEBIGEM SPIN

THESE

présentée à la Faculté des Sciences
de l'Université de Neuchâtel
pour obtenir le titre de docteur ès sciences

par

Roland Henzi

UNIVERSITE DE NEUCHATEL

Faculté des Sciences

La Faculté des Sciences de l'Université de Neuchâtel sur le rapport de Messieurs les professeurs Wanders, Université de Lausanne, Enz, Rossel et Sörensen autorise l'impression de la présente thèse sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont contenues.

Neuchâtel, 22 avril 1965

Le Doyen:

Prof. Dr. C. Terrier

VORWORT

In dieeer Arbeit werden 2→2-TeilchenÜbergangsprozesee für Teilchen mit beliebigem Spin im Rahmen der relativistischen S-Matrixtheorie untersucht. Hierbei dient zunächst die relativietische Invarianz zur Definition der möglichen kinmatischen Situationen. Dann muse versucht werden die S-Metrixelemente für diese Prozesse in einer Form anzugeben, sodesa Grössen rein dynamischen Ursprungs, z. B. die Helizitätsemplituden im Schwerpunkteystem, euf natürliche Art hervortreten. In diesem Rahmen können dann die Koneequenzen von Unitarität und Anelytizität der S-Metrix für diese dynamisch bestimmten Grössen formuliert werden. Diese Fregen wurden ausführlich im ersten Teil der vollständigen Version dieser Dissertation untersucht. Im vorliegenden Text werden die entsprechenden Resultate kurz zusammengefasst und hienech das Hochenergieverhalten von Heliritätsamplituden studiert. Das Ergebnis ist die Verallgemeinerung von Resulteten über den spinlosen Fell. Im dargelegten Formelismus können euch sämtlicha Fragen im Zusemmenheng mit der Fortsetzung des Drehimpulses zu komplexen Werten in enger Analogie zum spinlosen Fell diskutiert werden, doch wird in dieser Arbeit nicht näher dereuf eingegangen.

An dieser Stelle möchte ich meines verehrtee akademischen Lehrers, Herrn Pof. Pauli, gedenken, deesen Persönlichkeit die Einführung in die theoretische Physik für mich zu bestimmendem Erlebnis werden liess. Herrn Prof. Enz danke ich für die wertvolle Zueammenarbeit während der letzten Jahre und insbesondere, dass ich em Physikelischen Institut der Universität Neuchâtel Gelegenheit zur Arbeit auf dem Gebiet der Elementerteilchen-Physik erhielt. Herrn Prof. Wandera danke ich für die Zusemmenerbeit, welche eich seit dem letzten Jehr sehr eng gesteltet und für zahlreiche Anregungen, die ich Diskussionen erhalten habe. Herrn Prof. Roesel danke ich für die Aufnahme els Miterbeiter em Phyeikalischen Institut und für die Unterstützung in Fregen mancher Art.

Meinen Kollegen em Phyeikalischen Inetitut danka ich für freundschaftliche Zueammenarbeit.

Mein Dank gilt insbeeondere euch meiner Frau für ihre Hilfe bei der Bereitstellung des vorliegenden Textes.

Dem Schweizerischen Nationalfonde zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung danke ich für finanzielle Unterstützung.

Neuchâtel, Dezember 1964

R. H.

I. - EINFOHRUNG

Im ersten Teil dar vollständigan Version dar vorliegenden Arbeit (im folgenden mit I bezaichnat) wurda gezeigt, dass eina waitgehande formale Anslogie zwischen dar Beschreibung der 2→2-Teilchen-Reäktionen von Teilchen mit beliebigem Spin und jener von spinlosen Tsilchen beateht. Im allgemeinen Fall können die S-Matrixelemente r. B. durch die Helizitäteamplitudan [1] $h_{\bar{\mu}'\bar{\mu}''\mu'\mu''}(s,\theta;\bar{\varsigma},\bar{\varsigma})$ im Schwerpunktsystem sowie, durch Invarianzeigenschaften, explizit bastimmten Funktionen beschrieben warden. Hierbei eind s = (Energia im Schwarpunkt-System)^2, θ = Streuwinkel im Schwerpunkt-Systém, $\mu',\mu''(\bar{\mu}',\bar{\mu}'')$ = Helizitätsindices der einlaufenden (auslaufenden) Teilchen, $\varsigma(\bar{\varsigma})$ = Teilchentypen im Anfangs (End) -Zuatand, d.h. Masse, Spin etc. (die Teilchan seien als nicht identisch vorauagesetzt).

Diese Frage wurde in I in allen Einzelheiten untsraucht. Im vorliegenden Text sollen hsuptsächlich einige allgemeine resultate über Halizitätsamplituden dargelegt werden, welcha ein vollständigaa Syatem von rein dynamisch bestimmtan Grössen bilden.

Die Drehimpula-Analyaa dieaer Amplituden ist der Partialwellenentwicklung fÜr apinlose Teilchen weitgehend analog. Die Unitarität des S-Operators drÜckt sich in gleicher Weiaa wie fÜr die Partialwellenamplituden im spinlosen Fall aus. Auch analytische Eigenschaften lasaen sich fÜr die Helizitätsamplituden relativ einfach formulieren, indem kinematische Singularitäten durch Abapalten von explizit bekannten Faktoren separiert werdan kännan, aodass der Einfluss dar dynamischen Singularitätan direkt untaraucht werdan kann.

Die heutigan Untarauchungen Über dan S-Operator bestahen zu einem grosaan Teil in Verauchen, analytischa Eigenachaften von Funktionen der Art dar $h_{\bar{\mu}'\bar{\mu}''\mu'\mu''}$ mit den aus der Unitarität folgenden Bedingungen zu kombinieran, um daraus Aufschlusa Über die expizite s-, θ-Abhängigkeit zu erhalten. Diaaa Untersuchungen beschränken aich zumeist auf Reaktionen mit spinlosen Teilchen oder Teilchen vom Spin 1/2. Dar oben angedeutete Sachver-

halt kann ele Ausgsngepunkt zur Verallgemeinerung solcher Ergebnisse dienen.

Als Beiepiel wählen wir des Verhalten der Amplituden $h_{\bar{\mu}'\bar{\mu}''\mu'\mu''}(s,\theta)$ bei hohen Energien, d.h. $s \to \infty$ und $-1 \leq z = \cos\theta \leq +1$ (der Einfechheit halber wird nur die elestische Streuung untersucht und die Symbole $\varsigma, \bar{\varsigma}$ werden nicht mehr angeführt). Im Rahmen ellgemeiner Eigenscheften der S-Matrix wurde dieses Problem zuerst von Froissart [2] für spinlose Teilchen diekutiert. Als Resultat wurde für die Streuemplitude $h(s,\theta) = h_{\infty\infty}(s,\theta)$ eine Schrenke für des Anwechsen bei hohen Energien gefunden:

$$|h(s,\theta)| < \begin{cases} c_1 \cdot s \cdot (\log s)^2 , & \text{falls } \theta = 0 \text{ oder } \pi \\ c_2 \cdot (\sin\theta)^{-\frac{1}{2}} \cdot s^{\frac{3}{4}} (\log s)^{\frac{3}{2}}, & \text{falls } 0 < \theta < \pi . \end{cases} \tag{1}$$

Zur Herleitung wurde unter anderem Holomorphie der Funktion $h(s,\theta)$ in der geechnittenen z-Ebene nech Mandelstem [3] benützt.

Greenberg und Low [4] und Martin [5] (für eine zusammenfaesende Diskussion vergl. [6] konnten dieselben Schranken für $h(s,\theta)$ herleiten, wobei jedoch nur Holomophie des absorptiven Teiles $A(s,\theta)$ von $h(s,\theta)$ in z in einem Gebiet $E_{A(s)}$, $A(s) = 1 + t_0/2q^2(s)$, $t_0 > 0$ und unabhängig von s, q = Betreg des Teilchenimpulses im Schwerpunkt-System, verwendet wurde; E_b = Gesamtheit der Punkte der z-Ebene im Inneren der Ellypse mit den Brennpunkten ± 1 und der groseen Halbechse b. Physiksliech entsprechen einem solchen Analytizitätsbereich immer noch Kräfte endlicher Reichweite [6]. Weiter wurde gefunden, dase zur Verbeeserung der Schranken (1) Holomorphie in z in $E_{A(e)}$ nicht hinreichend iet [6]. Dieselbe Methode läest eich auch für den feldtheoretiech bewiesenen, ellyptischen Holomorphiebereich [7] in z enwenden und ergibt denn schwächere Schranken als (1) [4,6].

Demit ergeb sich nun die Frege, ob durch Betrachtung eines grössern Holomorphiebereiches in z die Schranken (1) verbeesert werden können. Unter Verwendung von Holomorphieberei-

chen für $h(s,\theta)$ vom Typus D(s) (= Durchschnitt der geschnittenen z-Ebene mit Schnitten $A(s) \leq z \leq +\infty$ und $-\infty \leq z \leq -A(s)$ und eines allyptischen Gebietes E_{b_0} mit von s unabhängiger Halbachse $b_0 > 1$ fanden Kinoshita, Loeffel und Martin [7,8] als Resultat

$$|h(s,\theta)| < C_3 \cdot (\sin\theta)^{-2} \cdot (\log s)^{3/2} \quad , \quad s \to \infty \, , \tag{2}$$

falls $0 < \theta < \pi$; für $\theta = 0$ oder π ist eine Verbesserung der Schranke (1) im Rahmen der dargelegten Voraussetzungen nicht möglich. Die s-, θ-Form dieser Schranke hängt dabei nicht von der Grösse der zur Definition von D(s) benötigten s-unabhängigen Ellypse ab. Die Herleitung dieser Schranke zeigt nicht, ob diese optimalen Charakters ist. Die gleichen Autoren untersuchten auch die Streuung zweier Teilchen des Spins 0 und des Spins 1/2, während in [9] die Streuung zweier Teilchen des Spins 1/2 diskutiert wurde; in beiden Fällen ergibt sich im wesentlichen das Resultat (2).

Im folgenden werden entsprechende Resultate für die Streuung zweier Teilchen beliebigen Spins unter Ausnützung der eingangs erwähnten formalen Analogien zur Streutheorie spinloser Teilchen hergeleitet.

II. - DAS HOCHENERGIEVERHALTEN DER FUNKTIONEN $h_{\bar\mu\bar\mu'\mu\mu'}(s,\theta)$ BEI HOLOMORPHIE IN Z IM GEBIET $E_{A(s)}$.

II.1. Die grundlegenden Annahmen.

In diesem Abschnitt seien die dem folgenden zugrundeliegenden Annahmen zusammengefasst:

a) Für die Helizitätsamplituden gilt (siehe Anhang I) eine "Partialwellenentwicklung"

$$h_{\bar\mu\bar\mu'\mu\mu'} = (-1)^{\bar\mu-\bar\mu'} \cdot 2^{-\bar\mu} \cdot (1-z)^{\frac{|\mu-\bar\mu|}{2}} \cdot (1+z)^{\frac{|\mu+\bar\mu|}{2}} \cdot h'_{\bar\mu\bar\mu''\mu\mu'}(s,\theta) \, , \tag{3}$$

$$h'_{\tilde{\mu}'\tilde{\mu}''\mu'\mu''}(s,\theta) = \frac{\sqrt{s}}{q}\sum_{\sigma'=0}^{\infty}(2\sigma'+2\tilde{\mu}+1)\cdot h'_{\tilde{\mu}'\tilde{\mu}''\mu'\mu''}(s,\sigma')\cdot P_{\sigma'}^{(|\mu-\tilde{\mu}|,|\mu+\tilde{\mu}|)}(z)\,, \tag{4}$$

$$h'_{\tilde{\mu}'\tilde{\mu}''\mu'\mu''}(s,\sigma') = \sqrt{c(\sigma',\tilde{\mu},\mu)}\cdot h_{\tilde{\mu}'\tilde{\mu}''\mu'\mu''}(s,\sigma'+\tilde{\mu})\,, \tag{5}$$

$$c(\sigma',\tilde{\mu},\mu) = \frac{\sigma'!\cdot(\sigma'+2\tilde{\mu})!}{(\sigma'+\tilde{\mu}-\mu)!\cdot(\sigma'+\tilde{\mu}-\mu)!}\,. \tag{6}$$

Hier ist $h_{\tilde{\mu}'\tilde{\mu}''\mu'\mu''}(s,\sigma'+\tilde{\mu})$ die Übergangsamplitude bei festem Drehimpuls $J=\sigma'+\tilde{\mu}$, $P_{\sigma'}^{(|\mu-\tilde{\mu}|,|\mu+\tilde{\mu}|)}$ das Jacobi'sche Polynom [10] n-ter Ordnung vom Typ $|\mu-\tilde{\mu}|,|\mu+\tilde{\mu}|$ und $\tilde{\mu}=\tilde{\mu}'-\tilde{\mu}''$, $\mu=\mu'-\mu''$, $\tilde{\mu}$ = grössere der beiden Zahlen μ und $\tilde{\mu}$, $\tilde{\mu}=\frac{1}{2}(|\mu+\tilde{\mu}|+|\mu-\tilde{\mu}|)$ = grössere der beiden Zahlen $|\mu|$ und $|\tilde{\mu}|$, $\mu=|\mu|+|\tilde{\mu}|-\tilde{\mu}$ = kleinere der beiden Zahlen $|\mu|$ und $|\tilde{\mu}|$.

$\tilde{\mu}$ und μ sind als Komponenten des totalen Drehimpulses entweder beide ganzzahlig oder beide halbzahlig; dies bedeutet $\mu\pm\tilde{\mu}$ = ganzzahlig.

b) Falls $s\geq(m'+m'')^2$, ist der absorptive Teil $A'_{\tilde{\mu}'\tilde{\mu}''\mu'\mu''}(s,\theta)$ von $h'_{\tilde{\mu}'\tilde{\mu}''\mu'\mu''}(s,\theta)$ holomorph in z im Gebiet $E_{A(s)}$. Als Folge hievon konvergiert die Entwicklung vom Typ (4) von $A'_{\tilde{\mu}'\tilde{\mu}''\mu'\mu''}(s,\theta)$ in Jacobi'schen Polynomen vom Typ $|\mu-\tilde{\mu}|,|\mu+\tilde{\mu}|$ im Innern von $E_{A(s)}$.

Diese Analytizitätsannahme geht zwar über die feldtheoretisch bewiesene Lehmann'sche Ellypse hinaus, ist aber viel schwächer als Annahme von Mandelstam-Analytizität. Wegen der Positivitätseigenschaften von $A'_{\tilde{\mu}'\tilde{\mu}''\mu'\mu''}(s,\theta)$, siehe die Ungleichungen (8), sowie der Konvergenzeigenschaften von Reihen des Typus' (4) folgt unsere Annahme sogar schon aus der Existenz eines beliebig kleinen Holomorphiegebietes, welches das Intervall $1\leq z<A(s)$ enthält. Physikalisch bedeutet dies den Minimalbereich, welcher noch Kräfte endlicher Reichweite garantiert.

c) Die Unitaritätsbedingung für den S-Operator ergibt die Ungleichungen

$$0 \leq |h_{\tilde\mu'\tilde\mu''\mu'\mu''}(s,\sigma'+\tilde\mu)|^2 \leq \mathrm{Im}\, h_{\mu'\mu''\mu'\mu''}(s,\sigma'+\tilde\mu) \leq 1 , \qquad (7)$$

für beliebige $\tilde\mu', \tilde\mu''$.

d) Temperiertheit der Funktionen $h'_{\tilde\mu'\tilde\mu''\mu'\mu''}(s,\theta)$:

$$|h_{\tilde\mu'\tilde\mu''\mu'\mu''}(s,\theta)| < C\cdot s^N , \qquad (8)$$

wobei $1 < z < A(s)$, $S \geq S_1 > (m'+m'')^2$, m' und m'' = Massen der stossenden Teilchen und s_1, N, C unabhängig von z, s und $\tilde\mu', \tilde\mu'', \mu', \mu''$ sind.

Die Temperiertheitsannahme ist zur Zeit hauptsächlich technischer Natur und dient zur Beschränkung der Diskussion auf eine ganz bestimmte Funktionenklasse.

II.2 Abfallen der Funktionen $h_{\tilde\mu'\tilde\mu''\mu'\mu''}(s,\sigma'+\tilde\mu)$ für $\sigma' \to \infty$.

Die Untersuchung des Hochenergieverhaltens von $h_{\tilde\mu'\tilde\mu''\mu'\mu''}(s,\theta)$ zerfällt in zwei Schritte. Zunächst kann auf Grund unserer Annahmen eine Aussage über das Abfallen der $h'_{\tilde\mu'\tilde\mu''\mu'\mu''}(s,\sigma'+\tilde\mu)$ für $\sigma' \to \infty$ gemacht werden, woraus sich dann die Hochenergieschranken ergeben.

Zunächst wird nun das Abfallen mit $\sigma' \to \infty$ von $\mathrm{Im}\, h_{\mu'\mu''\mu'\mu''}(s,\sigma$ bewiesen; mit Hilfe von (7) überträgt sich diese Eigenschaft auf $h_{\tilde\mu'\tilde\mu''\mu'\mu''}(s,\sigma'+\tilde\mu)$. Aus (4) folgt für $1 < z < A(s)$

$$A'_{\mu'\mu''\mu'\mu''}(s,\theta) = \frac{\sqrt{s}}{q}\sum_{\sigma'=0}^{\infty} (2\sigma'+2|\mu|+1)\cdot \mathrm{Im}\, h'_{\mu'\mu''\mu'\mu''}(s,\sigma')\cdot \cdot P_{\sigma'}^{(0,2|\mu|)}(z) , \qquad (9)$$

da für $\tilde\mu' = \mu'$, $\tilde\mu'' = \mu''$, $\tilde\mu = \mu$ gilt; es ist $\tilde\mu = \tilde\mu = |\mu|$ und damit $C(\sigma', \tilde\mu, \tilde\mu) = 1$, sodass mit (5)

$$h'_{\mu'\mu''\mu'\mu''}(s,\sigma') = h_{\mu'\mu''\mu'\mu''}(s,\sigma'+\tilde\mu) . \qquad (10)$$

Wegen $P_{\sigma'}^{(0,2|\mu|)}(z) \geq 0, z > 1$ und der Unitaritätsbedingung (7) besteht die Summe (9) aus nichtnegativen Summanden; es gilt demnach

$$0 \leq \frac{\sqrt{s}}{q(s)} \left(2\sigma' + 2|\mu| + 1\right) P_{\sigma'}^{(0,2|\mu|)}(z)\ \mathrm{Im}\, h'_{\mu'\mu''\mu'\mu''}(s,\sigma') \leq$$

$$\leq \mathrm{Im}\, h'_{\mu'\mu''\mu'\mu''}(s,\theta)\ , \tag{11}$$

für $1 \leq z \leq A(s)$. Die Temperiertheitsbedingung (8) und das Resultat (A17) aus Anhang II ergeben

$$0 \leq \mathrm{Im}\, h'_{\mu'\mu''\mu'\mu''}(s,\sigma') < \pi\, q(s)\, s^{-1/2}\, C\, s^{N} \left(2\sigma' + 2|\mu| + 1\right)^{-1} \left[\frac{2}{\sqrt{(2\sigma'+1)}}\right]^{-1/2} \cdot$$

$$\cdot \left[z+1\right]^{2|\mu|} \left[z + \sqrt{z^2-1}\right]^{-\sigma'}\ , \tag{12}$$

wobei $1 \leq z \leq A'(s)$, $A'(s) = 1 + t_0'/2q^2(s)$, $0 < t_0' < t_0$, $s > s_1$, $C > 0$ und unabhängig von s. Diese Abschätzung ist optimal für den gröestmöglichen Wert des Argumentes im letzten Faktor, d.h. $z = A'(s)$ mit t_0' möglichst nahe bei t_0.

Durch Anwendung von $z + \sqrt{z^2-1} \geq 1 + \sqrt{2(z-1)}$, $z \geq 1$, kann nun (12) umgeformt werden zu

$$0 \leq \mathrm{Im}\, h'_{\mu'\mu''\mu'\mu''}(s,\sigma') < C_1\, s^{N_1} \exp\left[-\frac{k}{\sqrt{s}}\,\sigma'\right]\ , \tag{13}$$

$s > s_2$, $k > 0$ und unabhängig von s. Mit (10) und (7) ergibt (13) nun allgemein

$$\left|h_{\tilde\mu'\tilde\mu''\mu'\mu''}(s,\sigma'+\tilde\mu)\right|^2 \leq \mathrm{Im}\, h_{\mu'\mu''\mu'\mu''}(s,\sigma'+\tilde\mu) < C_1\, s^{N_1} \exp\left[-\frac{k}{\sqrt{s}}\,\sigma'\right]\ , \tag{14}$$

$s > s_2$; $\tilde\mu', \tilde\mu'', \mu', \mu''$ beliebig. Für genügend grosse Werte von σ' klingen demnach die Funktionen $h_{\tilde\mu'\tilde\mu''\mu'\mu''}(s,\sigma'+\tilde\mu)$ exponentiell ab.

II.3 Hochenerggieverhalten der Funktionen $h_{\tilde\mu'\tilde\mu''\mu'\mu''}(s,\theta)$.

a) Vorwärtsstreuung: $z = 1$. Aus (4) folgt

$$\left|h'_{\tilde\mu'\tilde\mu''\mu'\mu''}(s,\theta=0)\right| \leq \frac{\sqrt{s}}{q} \sum_{\sigma'=0}^{\infty} \left(2\sigma' + 2\tilde\mu + 1\right) \left|h'_{\tilde\mu'\tilde\mu''\mu'\mu''}(s,\sigma')\right| \cdot$$

$$\cdot \left|P_{\sigma'}^{(|\mu-\tilde\mu|,\,|\mu+\tilde\mu|)}(z=1)\right| \ . \tag{15}$$

Aus (5) und $C(\sigma'=\infty,\tilde\mu,\mu) \leq C(\sigma',\tilde\mu,\mu) \leq C(\sigma'=0,\tilde\mu,\mu)$ erhält man

$$|h^{l}_{\bar\mu'\bar\mu''\mu'\mu''}(s,\sigma')| \le \alpha(\sigma',\bar\mu,\bar\mu)^{1/2}\ |h_{\bar\mu'\bar\mu''\mu'\mu''}(s,\sigma'+\bar\mu)|\ . \tag{16}$$

Falls man noch (A22) und A(24) verwendet, wird aus (15)

$$|h^{l}_{\bar\mu'\bar\mu''\mu'\mu''}(s,0)| < C_2 \sum_{\sigma'=0}^{\infty} (2\sigma'+2\bar\mu+1)\,(\sigma'+|\mu-\bar\mu|)^{|\mu-\bar\mu|} \cdot |h_{\bar\mu'\bar\mu''\mu'\mu''}(s,\sigma'+\bar\mu)|\ , \tag{17}$$

für $s>s_3$. Die Summe wird nun in zwei Terme aufgeteilt, $\sum_{\sigma'=0}^{\infty} = \sum_{\sigma'=0}^{\sigma_0'-1} + \sum_{\sigma'=\sigma_0'}^{\infty}$ (18), wobei im folgenden σ_0' geeignet gewählt wird. Im ersten Term wird die Schranke $|h_{\bar\mu'\bar\mu''\mu'\mu''}(s,\sigma'+\bar\mu)|\le 1$ und im zweiten die Schranke (14) verwendet. Mit der Wahl

$$\sigma_0' = (1+\varepsilon)\frac{N_2}{k}\sqrt{s}\,\log s\ ,\ \varepsilon>0\ , \tag{19}$$

findet man exponentielles Abklingen des zweiten Termes in (18) mit wachsendem s. Der erste Term ist kleiner als $C_3\,\sigma_0'^{\,2+|\mu-\bar\mu|}$; es existiert also eine Schranke

$$|h^{l}_{\bar\mu'\bar\mu''\mu'\mu''}(s,0)| < C_4\ (\sqrt{s}\,\log s)^{2+|\mu-\bar\mu|}\ , \tag{20}$$

für $s>s_3$. Während dies vom Froissart'schen Resultat (1) abweicht, folgt mit (3) für die physikalischen Amplituden für $s>s_3$

$$\bar\mu \neq \mu : \quad h_{\bar\mu'\bar\mu''\mu'\mu''}(s,0) = 0\ , \tag{21a}$$

$$\bar\mu = \mu : \quad |h_{\bar\mu'\bar\mu''\mu'\mu''}(s,0)| < C_5\ s\,(\log s)^2\ . \tag{21b}$$

b) Rückwärtsstreuung: $z=-1$. Unter Benützung von (A23) ergibt sich mit (A24) analog zur Vorwärtsstreuung für $s>s_3$

$$|h^{l}_{\bar\mu'\bar\mu''\mu'\mu''}(s,\pi)| < C_6\ (\sqrt{s}\,\log s)^{2+|\mu+\bar\mu|}\ . \tag{22}$$

Für die physikalischen Amplituden folgt wiederum für $s>s_3$

$$\bar\mu \neq -\mu : \quad h_{\bar\mu'\bar\mu''\mu'\mu''}(s,\pi) = 0\ , \tag{23a}$$

$$\bar\mu = -\mu : \quad |h_{\bar\mu'\bar\mu''\mu'\mu''}(s,\pi)| < C_7\ s\,(\log s)^2\ . \tag{23b}$$

c) Streuung für $-1 < z < +1$. Hier verwenden wir das Resultat (A32) aus Anhang II. Das bei der Vorwärtsstreuung angewendete Verfahren ergibt in diesem Fall für $s > s_3$

$$|h'_{\lambda\lambda'\mu\mu'}(s,\theta)| < C_\varepsilon \, k^{(|\mu-\lambda|,|\mu'-\lambda'|)}(z) \; s^{3/4} \; (\log s)^{3/2} , \qquad (24)$$

Für die physikalischen Amplituden folgt

$$|h_{\lambda\lambda'\mu\mu'}(s,\theta)| < C_\varepsilon \, (\sin\theta)^{-1/2} \; s^{3/4} \; (\log s)^{3/2} , \qquad (25)$$

$$s > s_3 \, , \; -1 < z < +1 .$$

III. - DAS HOCHENERGIEVERHALTEN DER FUNKTIONEN $h_{\lambda\lambda'\mu\mu'}(s,\theta)$ BEI HOLOMORPHIE IN Z IM GEBIET D(s).

In diesem Abschnitt wird das Hochenergieverhalten der Funktionen $h_{\lambda\lambda'\mu\mu'}(s,\theta)$, $0 < \theta < \pi$, unter folgenden, im Vergleich zum letzten Abschnitt stärkeren Annahmen untersucht:

b') Falls $s > (m'+m'')^2$, ist $h'_{\lambda\lambda'\mu\mu'}(s,\theta)$ holomorph in z im Gebiet D(s).

d') Temperiertheit im Gebiet D(s).

Da die Froissart'sche Schranke für Vor- und Rückwärtsstreuung schon im spinlosen Fall nicht verbessert werden konnte, beschränken wir uns auf $0 < \theta < \pi$. Das Verfahren besteht darin, mit Hilfe einer geeignet gewählten Funktion $g_{\lambda\lambda'\mu\mu'}(s,w)$ die gewünschten Eigenschaften von $h_{\lambda\lambda'\mu\mu'}(s,\theta)$ herzuleiten.

III.1 Die Zuordnung $h'_{\lambda\lambda'\mu\mu'}(s,\theta) \longrightarrow g_{\lambda\lambda'\mu\mu'}(s,w)$.

Wir definieren $h^a_{\lambda\lambda'\mu\mu'}(s, z = \cos\theta) \equiv h'_{\lambda\lambda'\mu\mu'}(s,\theta)$. Auf Grund der Voraussetzungen a) und b') sowie der Resultate aus Anhang III, g) kann dieser Funktion die Funktion $g_{\lambda\lambda'\mu\mu'}(s,w)$ zugeordnet werden, sodass

$$g_{\lambda\lambda'\mu\mu'}(s,w) = 2^{-(|\mu-\lambda|+|\mu'-\lambda'|)} \left(2w\frac{\partial}{\partial w} + |\mu-\lambda| + |\mu'-\lambda'| + 1\right) g_{\lambda\lambda'\mu\mu'}(s,w) , \qquad (26)$$

$$g_{\lambda\tilde\lambda\tilde\mu\mu'\mu''}(s,w)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(s)} dz\; K_{\lambda}^{(|\mu-\tilde\mu|,|\mu+\tilde\mu|)}(z,w)\; h''_{\tilde\lambda\tilde\mu\mu'\mu''}(s,z)\ . \qquad (27)$$

$g_{\lambda\tilde\lambda\tilde\mu\mu'\mu''}(s,w)$ ist holomorph für $\{w;\ w\in[C_{r_\lambda(s)}\cup a(E'_{b[r_\lambda(s)]}\cap D(s))]=\hat D(s)\}$, wobei $r_\lambda(s)=r(s)-\varepsilon_\lambda>1$, $\varepsilon_\lambda>0$ und $b[r(s)]=A(s)$. Analog zur Darstellung von $h''_{\tilde\lambda\tilde\mu\mu'\mu''}(s,z)$ durch eine Jacobi'sche Entwicklung in $E_{b[r(s)]}$ existiert für $g_{\tilde\lambda\tilde\mu\mu'\mu''}(s,w)$ die (A52) entsprechende Entwicklung in Potenzen von w für $w\in C_{r(s)}$

$$g_{\tilde\lambda\tilde\mu\mu'\mu''}(s,w)=\frac{\sqrt{s}}{q}\sum_{\sigma'=0}^{\infty}(2\sigma'+2\tilde\mu+1)\;h'_{\tilde\lambda\tilde\mu\mu'\mu''}(s,\sigma')\;w^{\sigma'}\ . \qquad (28)$$

Während nun die Konvergenzellypse $E_{b[r(s)]}$ der Jacobi'schen Reihe mit wacheender Energie in das Intervall $-1\le\xi\le+1$ degeneriert, bleibt der Konvergenzkreis endlich und geht gegen den Einheitskreie. Dies ist der entscheidende Gewinn beim Obergang zur Funktion $g_{\tilde\lambda\tilde\mu\mu'\mu''}(s,w)$.

Mit Hilfe der Unitaritätsschranke in der Form von Voraussetzung c) kann für $w\in C_\lambda$ folgende Abschätzung hergeleitet werden

$$|g_{\tilde\lambda\tilde\mu\mu'\mu''}(s,w)|\le\frac{\sqrt{s}}{q}\,c(\sigma,\tilde\mu,\mu)^{\frac{1}{2}}\;\frac{2(\lambda+\tilde\mu)}{(1-|w|)^2}\ . \qquad (29)$$

Schliesslich überträgt sich mit Hilfe der Darstellung (A26,27) die Temperiertheitseigenschaft (Voraussetzung d') auf die Funktion $g_{\tilde\lambda\tilde\mu\mu'\mu''}(s,w)$:

$$|g_{\tilde\lambda\tilde\mu\mu'\mu''}(s,w)|<C_\lambda\,s^{N_\lambda}\ , \qquad (30)$$

wobei $w\in\hat D(s)$, $s>s_2>(m'+m'')^2$, C_λ, N_λ, s_2 unabhängig von w.

Mit (29) und (30) hat man zwei obere Schranken für die Funktion $g_{\tilde\lambda\tilde\mu\mu'\mu''}(s,w)$ erhalten. Da $q(s)\sim\sqrt{s}$ für grosse s, ist die erate unabhängig von s; weiter gilt sie für $w\in C_\lambda$. Deshalb ergibt sich nun die Frage nach dem Verhalten einer im Gebiet D(s) in w holomorphen Funktion g(s,w) auf dem Einheitskreis, $w\in\partial C_\lambda$, für die im Innern des Einheitskreises eine Schranke des Typus' (29) gilt, während im äussern des Einheitskreises cin mit (30) verträgliches Anwachaen mit s nach einem Potenz-

gesetz erlaubt ist. Für eine solche Funktion gilt [8]

$$|q_{\mu'\bar{\mu}'\mu''\bar{\mu}''}(s, w = re^{i\theta})| < C_2 \left(\frac{\log s}{\sin\theta}\right)^2 , \qquad (31)$$

wobei $s > s_2 > (m'+m'')^2$, $1 - |\sin\theta|/\log s < r \leq 1$, $0 < \theta < \pi$. Zur Herleitung dieses Resultates ist notwendig, dass $D(s)$ für $s = \infty$ endlich ist (da $w = 1, -1 \notin \hat{D}(s = \infty)$, kann keine Aussage für diese Werte von $w \in \partial C_4$ gemacht werden).

III.2. Hochenergieverhalten der Funktionen $h_{\mu'\bar{\mu}'\mu''\bar{\mu}''}(s, \theta)$, $0 < \theta < \pi$.

Eine Aussage über das Hochenergieverhalten der Funktionen $h_{\mu'\bar{\mu}'\mu''\bar{\mu}''}(s, \theta)$ erhält man nun, indem man die Schranken (29) und (31) für $q_{\mu'\bar{\mu}'\mu''\bar{\mu}''}(s, w)$ mit Hilfe einer Darstellung des Typus' (A57) auswertet, d.h. für $-1 < z < +1$ gilt

$$h^{\sigma}_{\mu'\bar{\mu}'\mu''\bar{\mu}''}(s, z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma(\theta)} dw \; K^{(|\mu'-\bar{\mu}'|, |\mu'+\bar{\mu}'|)}(z, w) \; q_{\mu'\bar{\mu}''\mu''\bar{\mu}''}(s, w) . \qquad (32)$$

Für die Abschätzung dieses Integrales verwenden wir für den absoluten Betrag der Funktion $K^{(|\mu'-\bar{\mu}'|, |\mu'+\bar{\mu}'|)}(z, w)$ für $w = re^{\pm i\theta}$, $0 \leq r < 1$, folgende Schranken:

a)

$$|K(z, w)| > \sqrt{2} \sqrt{1-r} \sqrt{|\sin\theta|} \qquad (33)$$

b) Für $\alpha, \beta > 0$ und ganzzahlig gilt längs $\gamma(\theta)$:

$$|(1 - w - K(z, w))^{\alpha} \; (1 + w - K(z, w))^{\beta}| < C_3 \; (1-z)^{\alpha/2} \; (1+z)^{\beta/2} . \qquad (34)$$

Die Integration in (32) längs des Weges $\gamma(\theta)$ zerfällt in die radialen Teile und in die Integration längs zweier kleiner Kreise um $w = e^{\pm i\theta}$. Der von diesen herrührende Beitrag verschwindet. Da die Schranken (29) und (31) für $q_{\mu'\bar{\mu}'\mu''\bar{\mu}''}(s, w)$ und die Schranken (33) und (34) nicht vom Vorzeichen von θ abhängen und beim Umlaufen der Verzweigungspunkte $w = e^{\pm i\theta}$ die Wurzelausdrücke nur das Vorzeichen ändern, erhält man aus (32),

falls man noch die Substitution $\sqrt{1-r} = x$ ausführt, die Abschätzung

$$|h'_{\pi'\pi''\mu'\mu''}(s,\theta)| < (1-z)^{-|\mu-\pi|/2}\,(1+z)^{-|\mu+\pi|/2}\,(\sin\theta)^{-1/2}\left\{C_4\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{1} dx\, x^{-4} + C_5\,\varepsilon^{-2}\int_{0}^{\sqrt{\varepsilon}} dx\right\} \tag{35}$$

wobei $\varepsilon = \sin\theta/\log s$, $s > s_4 > (m'+m'')^2$.

Damit erhält man für $h'_{\pi'\pi''\mu'\mu''}(s,\theta)$ die Schranke

$$|h'_{\pi'\pi''\mu'\mu''}(s,\theta)| < C_6\,(1-z)^{-|\mu-\pi|/2}\,(1+z)^{-|\mu+\pi|/2}\,(\sin\theta)^{-2}\,(\log s)^{3/2} \quad , \tag{36}$$

für $s > s_6 > (m'+m'')^2$. Für die physikalischen Amplituden $h_{\pi'\pi''\mu'\mu''}(s,\theta)$ folgt mit (3) für $s > s_6 > (m'+m'')^2$

$$|h_{\pi'\pi''\mu'\mu''}(s,\theta)| < C_7\,(\sin\theta)^{-2}\,(\log s)^{3/2} \quad . \tag{37}$$

Damit sind der Schranke (2) für spinlose Teilchen entsprechende Resultate für die Funktionen $h_{\pi'\pi''\mu'\mu''}(s,\theta)$ ermittelt.

ANHANG I

Ziel dieses Anhanges ist den Zusammenhang zwischen den Matrixelementen $d^{\sigma}_{\mu\nu}(z)$ der irreduziblen, unitären Darstellungen der Drehgruppe R_+ und den eigentlichen Jacobi'schen Polynomen zu finden. Damit wird zugleich der Beweis der Aequivalenz der Entwicklung (4) mit der Jacob-Wick'schen Darstellung [1] für $h_{\pi'\pi''\mu'\mu''}(s,\theta)$ erbracht.

AI.1 Jacobi'sche Polynome $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ für spezielle negative Werte von α und β .

Im folgenden bezeichnen n, ℓ , ℓ' stets ganze Zahlen.

a) Nach [10] gilt:

$$P_n^{(-\ell,\beta)}(x) = \frac{\binom{n+\beta}{\ell}}{\binom{n}{\ell}} \; 2^{-\ell} \; (x-1)^{\ell} \; P_{n-\ell}^{(\ell,\beta)}(x) \; , \tag{A1}$$

$n \geq 0$, β beliebig, $1 \leq \ell \leq n$.

b) Behauptung:

$$P_n^{(\alpha,-\ell)}(x) = \frac{\binom{n+\alpha}{\ell}}{\binom{n}{\ell}} \; 2^{-\ell} \; (x+1)^{\ell} \; P_{n-\ell}^{(\alpha,\ell)}(x) \; , \tag{A2}$$

$n \geq 0$, α beliebig, $1 \leq \ell \leq n$.

Beweis: Wir benützen

$$P_n^{(\alpha,-\ell)}(x) = (-1)^n \; P_n^{(-\ell,\alpha)}(-x) \tag{A3}$$

$$= (-1)^n \; \frac{\binom{n+\alpha}{\ell}}{\binom{n}{\ell}} \; 2^{-\ell} \; (-x-1)^{\ell} \; P_{n-\ell}^{(\ell,\alpha)}(-x)$$

$n \geq 0$, α beliebig, $1 \leq \ell \leq n$. Dies ergibt

$$P_n^{(\alpha,-\ell)}(x) = (-1)^{n+\ell} \; \frac{\binom{n+\alpha}{\ell}}{\binom{n}{\ell}} \; 2^{-\ell} \; (-1)^{n-\ell} \; (x+1)^{\ell} \; P_{n-\ell}^{(\alpha,\ell)}(x) \; ,$$

woraus (A3) folgt.

c) Behauptung:

$$P_n^{(-\ell,-\ell')}(x) = 2^{-(\ell+\ell')} \; (x-1)^{\ell} \; (x+1)^{\ell} \; P_{n-\ell-\ell'}^{(\ell,\ell')}(x) \; , \tag{A4}$$

$n \geq 0$, $0 \leq \ell \leq n$, $0 \leq \ell' \leq n$, $\ell + \ell' \leq n$.

Beweis:

$$P_n^{(-\ell,-\ell')}(x) = \frac{\binom{n-\ell'}{\ell}}{\binom{n}{\ell}} \; 2^{-\ell} \; (x-1)^{\ell} \; P_{n-\ell}^{(\ell,-\ell')}(x) \; ,$$

$n \geq 0$, $1 \leq \ell \leq n$,

$$= \frac{\binom{n-\ell'}{\ell}}{\binom{n}{\ell}} \; 2^{-\ell} (x-1)^{\ell} \; \frac{\binom{n-\ell+\ell'}{\ell'}}{\binom{n-\ell}{\ell'}} \; 2^{-\ell'} (x+1)^{\ell'} \; P_{n-\ell-\ell'}(x) \; , \tag{A5}$$

$n \geq 0$, $1 \leq \ell \leq n$, $1 \leq \ell' \leq n$, $\ell + \ell' \leq n$.

Nun gilt $\binom{n-\ell'}{\ell}\binom{n}{\ell'} \Big/ \binom{n-\ell}{\ell'}\binom{n}{\ell} = 1$, sodass aus (A5) die Behauptung folgt.

AI.2. Zusammenhang zwischen $d^{\sigma}_{\mu\nu}(z)$ und verallgemeinerten Jacobi'schen Polynomen.

Die explizite Definition der Funktionen $d^{\sigma}_{\mu\nu}(z)$ [11] und jene der $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ [10] ergeben

$$d^{\sigma}_{\mu\nu}(z) = 2^{-\nu}\sqrt{\frac{(\sigma-\nu)!\,(\sigma+\nu)!}{(\sigma-\mu)!\,(\sigma+\mu)!}}\;(1-z)^{(\nu-\mu)/2}\,(1+z)^{(\nu+\mu)/2}\,P_{\sigma-\nu}^{(\nu-\mu,\nu+\mu)}(z) \qquad (A6)$$

mit $-\sigma \leq \mu,\nu \leq +\sigma$. Da σ,μ,ν entweder alle ganzzahlig oder alle halbzahlig sind folgt, dass $\sigma-\nu$, $\nu-\mu$, $\nu+\mu$ stets ganze Zahlen sind. Gleichung (A6) ergibt Fälle, in welchen verallgemeinerte Jacobi'sche Polynome mit negativ ganzzahligen obern Indizes vorkommen. Ziel des folgenden ist, beliebige $d^{\sigma}_{\mu\nu}(z)$ durch eigentliche Jacobi'sche Polynome auszudrücken, deren obere Indizes grösser als -1 sind und welche sich durch besondere Eigenschaften auszeichnen.

Wir bemerken noch, dass trivialerweise stets

$$\tilde{\mu\nu} \leq \sigma \;, \qquad (A7)$$

$\tilde{\mu\nu}$ = grössere der beiden Zahlen $|\mu|$ und $|\nu|$, gilt.

AI.3. Zusammenhang zwischen $d^{\sigma}_{\mu\nu}(z)$ und eigentlichen Jacobi'schen Polynomen.

Um diesen Zusammenhang herstellen zu können, müssen zunächst Fallunterscheidungen nach verschiedenen Indizeswerten definiert werden. Anschliessend wird mit Hilfe der Resultate aus AI.1 der gewünschte Zusammenhang ermittelt.

a) Wir unterscheiden folgende 4 Fälle:

I: Falls $\nu+\mu \geq 0, \nu-\mu \geq 0$, ist stets

$$\tilde{\mu\nu} = |\nu| = \nu \quad , \quad \sigma-\nu \geq 0 \;. \qquad (A8)$$

II: Falls $\nu+\mu \geq 0, \nu-\mu \leq -1$, ist stets

$$\tilde{\mu} = |\mu| = \mu \quad , \quad \sigma - \nu \geq -(\nu-\mu) \geq 1. \tag{A9}$$

III: Falls $\nu+\mu \leq -1$, $\nu-\mu \geq 0$, ist stets

$$\tilde{\mu} = |\mu| = -\mu \quad , \quad \sigma - \nu \geq -(\nu+\mu) \geq 1. \tag{A10}$$

IV: Falls $\nu+\mu \leq -1, \nu-\mu \leq -1$, ist stets

$$\tilde{\mu} = |\nu| = -\nu \quad , \quad \sigma - \nu \geq -2\nu > -(\nu \pm \mu) \geq 1. \tag{A11}$$

In den Fällen I - IV ist jede Indizeskombination μ,ν enthalten und die Resultate (A8-11) können leicht verifiziert werden.

b) Zusammenhang zwischen $d^{\sigma}_{\mu\nu}(z)$ und eigentlichen $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$.

I: $\nu+\mu \geq 0$, $\nu-\mu \geq 0 \longrightarrow \nu \geq \mu$, $\tilde{\mu} = |\nu| = \nu$. (A12)

Gleichung (A6) drückt $d^{\sigma}_{\mu\nu}(z)$ unmittelbar durch eigentliche Jacobi'sche Polynome aus.

II : $\nu+\mu \geq 0$, $\nu-\mu \leq -1 \longrightarrow \nu < \mu$, $\tilde{\mu} = |\mu| = \mu$. (A13a)

Mit (A9) und (A1) folgt

$$P^{(\nu-\mu,\nu+\mu)}_{\sigma-\nu}(z) = \frac{(\sigma+\mu)!\,(\sigma-\mu)!}{(\sigma+\nu)!\,(\sigma-\nu)!}\; 2^{\nu-\mu}\,(-1)^{-(\nu-\mu)}\,(1-z)^{-(\nu-\mu)}\,P^{(-[\nu-\mu],\,\nu+\mu)}_{\sigma-\mu}(z) .$$

Damit wird aus (A6)

$$d^{\sigma}_{\mu\nu}(z) = (-1)^{\nu-\mu}\,2^{-\mu}\sqrt{\frac{(\sigma+\mu)!\,(\sigma-\mu)!}{(\sigma+\nu)!\,(\sigma-\nu)!}}\;(1-z)^{-(\nu-\mu)/2}\,(1+z)^{(\nu+\mu)/2}\,P^{(-[\nu-\mu],\,\nu+\mu)}_{\sigma-\mu}(z) . \tag{A13b}$$

III: $\nu+\mu \le -1\,,\ \nu-\mu \ge 0 \longrightarrow \nu \ge \mu\,,\ \tilde{\mu} = |\mu| = -\mu\,.$ (A14a)

Mit (A10) und (A2) folgt

$$P^{(\nu-\mu,\nu+\mu)}_{\sigma-\nu}(z) = \frac{(\sigma-\mu)!\,(\sigma+\mu)!}{(\sigma-\nu)!\,(\sigma+\nu)!}\,2^{\nu+\mu}\,(1+z)^{-(\nu+\mu)}\,P^{(\nu-\mu,-[\nu+\mu])}_{\sigma+\mu}(z)\,.$$

Damit wird aus (A6)

$$d^{\sigma}_{\mu\nu}(z) = 2^{\mu}\sqrt{\frac{(\sigma-\mu)!\,(\sigma+\mu)!}{(\sigma-\nu)!\,(\sigma+\nu)!}}\,(1-z)^{(\nu-\mu)/2}\,(1+z)^{-(\nu+\mu)/2}\,P^{(\nu-\mu,-[\nu+\mu])}_{\sigma+\mu}(z)\,.$$ (A14b)

IV: $\nu+\mu \le -1\,,\ \nu-\mu \le -1 \longrightarrow \nu < \mu\,,\ \tilde{\mu} = |\nu| = -\nu\,.$ (A15a)

Mit (A11) und (A4) folgt

$$P^{(\nu-\mu,\nu+\mu)}_{\sigma-\nu}(z) = 2^{2\nu}\,(-1)^{-(\nu-\mu)}\,(1-z)^{-(\nu-\mu)}\,(1+z)^{-(\nu+\mu)}\,P^{(-[\nu-\mu],-[\nu+\mu])}_{\sigma+\nu}(z)\,.$$

Damit wird aus (A6)

$$d^{\sigma}_{\mu\nu}(z) = (-1)^{\nu-\mu}\,2^{\nu}\sqrt{\frac{(\sigma-\nu)!\,(\sigma+\nu)!}{(\sigma-\mu)!\,(\sigma+\mu)!}}\,(1-z)^{-(\nu-\mu)/2}\,(1+z)^{-(\nu+\mu)/2}\,P^{(-[\nu-\mu],-[\nu+\mu])}_{\sigma+\nu}(z)\,.$$ (A15b)

(A12) und (A6), (A13a) und (A13b), (A14a) und (A14b) sowie (A15a) und (A15b) zeigen, dass sich in allen vier Fällen und damit für <u>beliebige</u> μ,ν für $d^{\sigma}_{\mu\nu}(z)$ folgende Form ergibt

$$d^{\sigma}_{\mu\nu}(z) = (-1)^{\tilde{\mu}-\nu}\, 2^{-\tilde{\mu}} \sqrt{\frac{(\sigma-\tilde{\mu})!\,(\sigma+\tilde{\mu})!}{(\sigma-\mu)!\,(\sigma+\mu)!}}\, (1-z)^{|\nu-\mu|/2} (1+z)^{|\nu+\mu|/2} P^{(|\nu-\mu|,|\nu+\mu|)}_{\sigma-\tilde{\mu}}(z)\,, \tag{A16}$$

$\sigma \geq \tilde{\mu}$

$\tilde{\mu} = \frac{1}{2}(|\nu+\mu| + |\nu-\mu|)$
= grössere der beiden Zahlen $|\mu|, |\nu|$

$\underset{\sim}{\mu} = |\mu| + |\nu| - \tilde{\mu}$
= kleinere der beiden Zahlen $|\mu|, |\nu|$

$\tilde{\tilde{\mu}}$ = grössere der beiden Zahlen μ, ν.

ANHANG II

In diesem Anhang werden einige mathematische Resultate über Jacobi'sche Polynome hergeleitet und zusammengefasst.

a) Behauptung:

$$P_n^{(0,\beta)}(x) > \sqrt{\frac{2}{\pi(2n+1)}}\; (x-1)^{-\beta}\; \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n\,, \tag{A17}$$

$x \geq 1$; $\beta = 0, 1, 2, \ldots$; $n = 0, 1, 2, \ldots$; $\sqrt{x^2-1} \to x$, $x \to \infty$.

Beweis: Nach Szegö [10] gilt die Rekursionsformel

$$P_n^{(0,\beta)}(x) = \frac{2}{2n+\beta+1}\,(1+x)^{-1}\left\{(n+\beta)\,P_n^{(0,\beta-1)}(x) + (n+1)\,P_{n+1}^{(0,\beta-1)}(x)\right\}. \tag{A18}$$

Die Nullstellen der Jacobi'schen Polynome $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, liegen im Innern des Intervalles $-1 < x < +1$ und es gilt $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) > 0$, $x \geq +1$. Falls $x \geq 1$, $\beta = 1, 2, \ldots$ und $n = 0, 1, \ldots$ besteht demnach die Summe in (A18) aus positiven Summanden und

es folgt die Ungleichung

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) > \frac{2(n+\beta)}{2n+\beta+1}\,(x+1)^{-1}\,P_n^{(\alpha,\beta-1)}(x)\,, \qquad (A19)$$

für $x \geq 1$; $n = 0,1,2,\ldots$; $\beta = 1,\ldots$. Dies ergibt

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) > (x+1)^{-\beta}\,P_n(x)\,, \qquad (A20)$$

$$x \geq 1\,;\ n = 0,1,\ldots\,;\ \beta = 1,2,\ldots,$$

wobei $P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x)$ das Legendre'sche Polynom des Grades n ist. Für Legendre'sche Polynome gilt die Ungleichung

$$P_n(x) > \sqrt{\frac{2}{\pi(2n+1)}}\,\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n\,, \qquad (A21)$$

$$x \geq 1\,;\ n = 0,1,\ldots\,;\ \sqrt{x^2-1} \to x,\ x \to \infty$$

Aus (A20) und (A21) folgt nun (A17). Ungleichung (A21) ist in Ref. [5] mit einem falschen numerischen Faktor angegeben; die richtige Form wurde in I ermittelt.

b) Es gilt [10]

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z=1) = \binom{n+\alpha}{n}\,, \qquad (A22)$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z=-1) = (-1)^n\binom{n+\beta}{n}\,. \qquad (A23)$$

Dabei gilt die Ungleichung

$$\binom{n+\alpha}{n} \leq (n+\alpha)^{\alpha} \qquad (A24)$$

für $n = 0,1,\ldots$, $\alpha = 0,1,\ldots$. Das Gleichheitszeichen gilt für $\alpha = 0$

c) Schranke für $|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|$, $-1 < x < +1$:

Es sei mit $x = \cos\theta$, $-1 < x < +1$,

$$U_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \left(k^{(\alpha,\beta)}(x)\right)^{-1}\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,, \qquad (A25)$$

wobei

$$k^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{(\alpha+\beta+1)/2}\,(1-x)^{-\alpha/2}\,(1+x)^{-\beta/2}\,(1-x^2)^{-1/4}\,. \qquad (A26)$$

Mit $P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x)$ folgt [10]

$$v_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n\, v_n^{(\beta,\alpha)}(x)\,. \qquad (A27)$$

Weiter gelte $M_n^{(\alpha,\beta)} = \max\left|v_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right|$, falls $0 \le x < 1$; wegen (A27) folgt dann mit $\hat{M}_n^{(\alpha,\beta)} = \max\left|v_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right|$, falls $-1 < x \le 0$,

$$\hat{M}_n^{(\alpha,\beta)} = M_n^{(\beta,\alpha)}\,. \qquad (A28)$$

Nun gilt [10]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\; M_n^{(\alpha,\beta)}\right) = \begin{cases} A = 1/\sqrt{\pi} & ,\ -1/2 \le \alpha \le 1/2 \\ A\ (<\infty) > 1/\sqrt{\pi} & ,\ \alpha > 1/2 \end{cases} \qquad (A29)$$

wobei $\beta > -1$. Falls $\beta \ge -1/2$, folgt wegen (A28) die Gültigkeit von (A29) auch für $\hat{M}_n^{(\alpha,\beta)}$.

Definiert man nun $\tilde{M}_n^{(\alpha,\beta)}$ als grösseere der beiden Zahlen $M_n^{(\alpha,\beta)}$ und $\hat{M}_n^{(\alpha,\beta)} = M_n^{(\beta,\alpha)}$, so gilt

$$\tilde{M}_n^{(\alpha,\beta)} = \max\left|v_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right| \qquad (A30)$$

für $-1 < x < 1$. Für die uns interesaierendan Werte $\alpha = 0, 1, \ldots$ und $\beta = 0, 1, \ldots$ folgt aus (A29)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\;\tilde{M}_n^{(\alpha,\beta)}\right) = A \qquad (A31)$$

mit $A \ge 1/\sqrt{\pi}$. Da die Folge der Zahlen $\sqrt{n}\;\tilde{M}_n^{(\alpha,\beta)}$ für endliche Werte von n aus endlichen Gliedern besteht, kann wegen (A31) eine endliche Zahl B (> 0) so gewählt werden, dass für $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\left|\left(\sqrt{n}\;\tilde{M}_n^{(\alpha,\beta)}\right) - A\right| < B$. Dies ergibt nun

$$\sqrt{n}\ \tilde{M}_n^{(\alpha,\beta)} < A + B = C .$$

Mit der Definition (A30) von $\tilde{M}_n^{(\alpha,\beta)}$ und mit (A25,26) folgt hiereue

$$| P_n^{(\alpha,\beta)}(x)| < C\ k^{(\alpha,\beta)}(x)\ 1/\sqrt{n}\ , \qquad (A32)$$

für $-1 < x < +1$, $x = \cos\theta$.

ANHANG III

In diesem Anheng werden Reeultete über erzeugende Funktionen von Jecobi'echen Polynomen und -Funktionen sowie über Jacobi'schen Entwicklungen speziell zugeordnete Potenzreihen hergeleitet.

e) Definitionen:

G = Gebiet in der komplexen z-Ebene = offene Punktmenge in der z-Ebene

∂G = Menge der Rendpunkte von G

$G \cup \partial G = \bar{G}$ = abgeschloesenee Gebiet

A' = Komplementärmenge der Punktmenge A

$I = \{ z ; -1 < z < +1 \}$

$C_r = \{ w ; |w| < r$, w ∈ komplexer w-Ebene $\}$

b) Die erzeugende Funktion der Jecobi'schen Polynome $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$

De wir $P_n^{(\alpha,\beta)}$ nur für genzzehlige, nichtnegetive Werte von α und β benötigen, beschränken wir uns auf diesen Fell, um die Terminologie zu vereinfechen (die Diskussion kenn aber euf beliebige α und β übertregen werden).

Die erzeugende Funktion der $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ iet definiert durch

$$K_\lambda^{(\alpha,\beta)}(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n\ P_n^{(\alpha,\beta)}(z) \qquad . \qquad (A33)$$

FDr Jacobi'sche Entwicklungen mit Koeffizienten a_n gilt [10]

$$\lim_{n\to\infty} \sup |a_n|^{1/n} = \left(b + \sqrt{b^2-1}\right)^{-1} , \tag{A34}$$

wobei b = groesse Halbachse der Konvergenzellypse. Diese ergibt

$$|w| = b - \sqrt{b^2-1} .$$

Diese bedeutet, dass (A33) fUr Wertepaare (w,z) konvergiert mit

$$\left\{ w, z ; \quad w \in C_r , \; z \in E_{b(r)=1/2(r+r^{-1})} , \; 0 < r \leq 1 \right\} \tag{A35}$$

Nach Szegö [10] gilt

$$K_1^{(\alpha,\beta)}(z,w) = 2^{\alpha+\beta} \; K^{-1}(z,w) \left(1 - w + K(z,w)\right)^{-\alpha} \left(1 + w + K(z,w)\right)^{-\beta} , \tag{A36}$$

$$\begin{aligned} K(z,w) &= \sqrt{1 - 2zw + w^2} \quad , \\ K(z,0) &= 1 . \end{aligned} \tag{A37}$$

Die Funktion $K_1^{(\alpha,\beta)}(z,w)$ hat demnach dieselben singulären Stellen wie K(z,w).

Wir definieren noch die Funktion $K^{(\alpha,\beta)}(z,v)$ durch

$$K^{(\alpha,\beta)}(z,v) = \sum_{n=0}^{\infty} v^{-n-1} \; P_n^{(\alpha,\beta)}(z) . \tag{A38}$$

Diese Reihe konvergiert fUr Wertepaare (v,z) mit

$$\left\{ v, z ; \quad v \in \bar{C}_r' , \; z \in E_{b(r)} , \; 1 \leq r < \infty \right\} . \tag{A39}$$

Aus (A38) und (A33) folgt

$$K^{(\alpha,\beta)}(z, v) = v^{-1} \; K_1^{(\alpha,\beta)}(z, v^{-1}) , \tag{A40}$$

wobei das Vorzeichen der Wurzel in den drei von $K(r,u^{-1})$ abhängenden Faktoren von $K_4^{(\alpha,\beta)}(z,u^{-1})$ in mit (A36) konsistenter Weise gewählt werden muss. Dann ergibt sich mit (A36)

$$K^{(\alpha,\beta)}(z,u) = 2^{\alpha+\beta} u^{\alpha+\beta} \; K^{-\alpha}(z,u)\left(1-u+K(z,u)\right)^{-\alpha}\left(1+u+K(z,u)\right)^{-\beta}$$

$$= (z-1)^{-\alpha}(z+1)^{-\beta} \; K^{-\alpha}(z,u)\left(1-u-K(z,u)\right)^{-\alpha}\left(1+u-K(z,u)\right)^{-\beta}. \qquad (A40')$$

Dies zeigt unmittelbar, dass $K^{(\alpha,\beta)}(z,u)$ dieselben Singularitätsstellen besitzt wie $K_4^{(\alpha,\beta)}(z,u)$.

c) Die Funktionen $K_i^{(\alpha,\beta)}(z,w)$, $i = 2, 3$;

$K_2^{(\alpha,\beta)}(z,w)$ ist definiert durch

$$K_2^{(\alpha,\beta)}(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \, k_n^{(\alpha,\beta)} \, P_n^{(\alpha,\beta)}(z) \quad , \qquad (A41)$$

$$k_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)} \; . \qquad (A42)$$

Falls $\alpha = 0$, $\beta = 0,1,2,\ldots\ldots$ oder $\beta = 0$, $\alpha = 0,1,\ldots\ldots$, gilt $K_2^{(\alpha,\beta)}(z,w) = K_4^{(\alpha,\beta)}(z,w)$. Es braucht also nur der Fall $\alpha = 1,2,\ldots$, $\beta = 1,2,\ldots\ldots$ untersucht zu werden. Da $\lim_{n\to\infty} k_n^{(\alpha,\beta)} = 1$, folgt wiederum (A35) für den Konvergenzbereich von (A41).

Um den geschlossenen Ausdruck für $K_2^{(\alpha,\beta)}(z,w)$, $\alpha = 1,2,\ldots$, $\beta = 1,2,\ldots$, zu finden, benützen wir ein Resultat von Brefman [12,13]

$$K_3^{(\alpha,\beta)}(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha+\beta)^{-1} \, w^n \, k_n^{(\alpha,\beta)} \, P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \; F\left(1, \alpha+\beta; \alpha+1; \tfrac{1}{2}\left[1-w-K(z,w)\right]\right) F\left(1, \alpha+\beta; \beta+1; \tfrac{1}{2}\left[1+w-K(z,w)\right]\right) \qquad (A43)$$

falls nicht $\alpha = \beta = 0$.

$F(a,b;c;x)$ ist die Gauss'sche hypergeometrische Funktion [14].

Mit (A43) ergibt sich die Funktion $K_2^{(\alpha,\beta)}(z,w)$ aus $K_3^{(\alpha,\beta)}(z,w)$ durch

$$K_2^{(\alpha,\beta)}(z,w) = \left(w\frac{\partial}{\partial w} + \alpha + \beta\right) K_3^{(\alpha,\beta)}(z,w), \qquad (A44)$$

falls nicht $\alpha = \beta = 0$. Die hypergeometrischen Funktionen in (A43) formen wir mit Hilfe des Gesetzes [14]

$$F(a,b;c;x) = (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; x)$$

um, wobei a, b, c-a oder c-b = nichtnegative ganze Zahl. Da für $\alpha = 1,\ldots$ und $\beta = 1,\ldots$ $(1-\alpha)$ und $(1-\beta)$ nichtpositive ganze Zahlen sind, werden aus den in (A43) auf der rechten Seite stehenden hypergeometrischen Funktionen Polynome ihres Argumentes. Diese können durch allgemeine Jacobi'sche Polynome ausgedrückt werden und man findet für (A43)

$$K_3^{(\alpha,\beta)}(z,w) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\, 2^{\alpha+\beta} \left(1-w+K(z,w)\right)^{-\alpha} \left(1+w+K(z,w)\right)^{-\beta} \cdot P_{\alpha-1}^{(\beta,-\alpha)}\left(K(z,w)-w\right)\, P_{\beta-1}^{(\alpha,-\beta)}\left(K(z,w)+w\right) \qquad (A45)$$

wobei $\alpha = 1,2,\ldots$ und $\beta = 1,2,\ldots$. Mit (A44) und (A45) zeigt sich nun, dass $K_2^{(\alpha,\beta)}(z,w)$, $\alpha = 0,1,\ldots$, $\beta = 0,1,\ldots$, und $K_3^{(\alpha,\beta)}(z,w)$, $\alpha = 1,2,\ldots$, $\beta = 1,2,\ldots$, dieselben singulären Stellen besitzen wie $K_1^{(\alpha,\beta)}(z,w)$.

d) Die Funktion $K_4^{(\alpha,\beta)}(z,w)$:

Diese Funktion ist definiert durch

$$K_4^{(\alpha,\beta)}(z,w) = (z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} w^n\, k_n^{(\alpha,\beta)}\, Q_n^{(\alpha,\beta)}(z) \qquad (A46)$$

$Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ sind die Jacobi'schen Funktionen 2. Art, welche mit den Jacobi'schen Polynomen wie folgt zusammenhängen

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{1}{2}(z-1)^{-\alpha}(z+1)^{-\beta}\int_{-1}^{+1} dy\ \frac{(1-y)^{\alpha}(1+y)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(y)}{z-y} \quad . \tag{A47}$$

Diese Gleichung zeigt explizit, dass $Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ Verzweigungspunkte in $r = \pm 1$ hat; $Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ ist in $\bar{I}'$ eindeutig.

Aus der Theorie [10] der Entwicklungen von regulären Funktionen über Jacobi'schen Funktionen 2. Art, welche den Laurent'schen Reihen analog sind, folgt in derselben Weise wie bei den Jacobi'schen Polynomen (d.h. (A35)) als Konvergenzbereich für (A46)

$$\{w, z;\ w \in C_r\ ,\ z \in \bar{E}'_{b(r)}\ ,\ 1 < r\}. \tag{A48}$$

Setzt man nun die Darstellung (A47) für $Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ in (A46) ein und vertauscht Integration und Summation, so folgt

$$K_4^{(\alpha,\beta)}(z,w) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} dy\ \frac{(1-y)^{\alpha}(1+y)^{\beta}K_2^{(\alpha,\beta)}(y,w)}{z-y} \tag{A49}$$

wobei $\{w, z;\ w \in C_1\ , z \in \bar{E}'_1 = \bar{I}'\}$. Mit Hilfe der Darstellung (A49) kann $K_4^{(\alpha,\beta)}(z,w)$ analytisch fortgesetzt werden, falls der Integrationsweg geeignet verformt wird. Die genauere Untersuchung zeigt, dass $K_4^{(\alpha,\beta)}(z,w)$ neben dem Schnitt $-1 \le z \le 1$ nur noch eine Pinch-Singulatität in der Form eines Verzweigungspunktes an der Stelle $r = b(w) = (1/2)(w + w^{-1})$ hat.

e) Jacobi'sche Entwicklungen und Potenzreihen:

Es sei gegeben

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\alpha,\beta)}\ P_n^{(\alpha,\beta)}(z)\ , \tag{A50}$$

konvergent für $z \in E_{b(r)} = (1/2)(r+r^{-1})$, $r > 1$. Wir bilden zunächst formal die Potenzreihe

$$g^{(\alpha,\beta)}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\alpha,\beta)}\ w^n\ . \tag{A51}$$

Wiederum gilt wegen der Konvergenz von (A50)

$$\lim_{n \to \infty} \sup \left| a_n^{(\alpha,\beta)} \right|^{1/n} = \left(b(r) + \sqrt{b^2(r)-1} \right)^{-1} \quad , r > 1 .$$

Für die Terme in (A51) folgt demnach

$$\lim_{n \to \infty} \sup \left| a_n^{(\alpha,\beta)} w^n \right|^{1/n} = |w| \left(b(r) + \sqrt{b^2(r)-1} \right)^{-1} . \qquad (A52)$$

Für den Konvergenzradius ϱ der Reihe (A51) gilt also nach dem Wurzelkriterium

$$\varrho = b(r) + \sqrt{b^2(r)-1} = r \quad , \quad r > 1. \qquad (A53)$$

f) Integralderstellung für h(z):

Setzt man in (A50) den aus der Theorie der Potenzreihen folgenden Ausdruck durch ein Umlaufintegral für die Koeffizienten $a_n^{(\alpha,\beta)}$ ein, so folgt mit (A38)

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial C_{r-\varepsilon}} dw \; K^{(\alpha,\beta)}(z,w) \; g^{(\alpha,\beta)}(w) \quad , \qquad (A54)$$

wobei $\{ z ; z \in E_{b(r_1)} , r_1 = r - \varepsilon_1 > 1 , \varepsilon_1 > \varepsilon > 0 \}$.

Es sei nun die Funktion $g^{(\alpha,\beta)}(w)$ holomorph in einem Gebiet W und stetig in $\bar{W}$; durch geeignete Verformung des Integrationswegee kann h(z) mit Hilfe der Darstellung (A54) aus $E_{b(r_1)}$ heraus fortgesetzt werden. Das Integral

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial W} dw \; K^{(\alpha,\beta)}(z,w) \; g^{(\alpha,\beta)}(w) \qquad (A55)$$

existiert für (mit $a(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$)

$$\{ z ; z \in E_{b(r_1)} \} \cup \{ z ; w = a(z) \in (C'_{r_1} \cap W) \to z \in b(C'_{r_1} \cap W) \} =$$

$$= \{ z ; z \in [E_{b(r_1)} \cup b(C'_{r_1} \cap W)] , r_1 = r - \varepsilon_1 > 1 , \varepsilon_1 > 0 \} ,$$

und definiert in diesem Gebiet h(z) als holomorphe Funktion.

Im folgenden interessiert insbesondere der Fall $-1 \leq x \leq +1$. Die Singularitäten von $K^{(\alpha,\beta)}(z,w)$ in w bei festem z liegen denn bei

$$w = \begin{cases} z + i\sqrt{1-z^2} = e^{i\theta} \\ z - i\sqrt{1-z^2} = e^{-i\theta} \end{cases} \qquad (A56)$$

In (A54) kann denn der Integrationsweg $\partial C_{r-\varepsilon}$, $r-\varepsilon>1 (\varepsilon>0)$, ohne dass sich dabei der Wert des Integrals ändert, in einen Weg $\gamma(\theta)$ verformt werden, der die komplexen Vektoren $\exp(\pm i\theta)$ beliebig nahe umschliesst, d.h. für h(z) gilt die Darstellung

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma(\theta)} dw \; K^{(\alpha,\beta)}(z,w)\, g^{(\alpha,\beta)}(w), \qquad (A57)$$

wobei $-1 \leq x \leq +1$.

g) Integraldarstellung für $g^{(\alpha,\beta)}(w)$:

Für die Koeffizienten der Jacobi'schen Entwicklung (A50) gilt [1]

$$a_n^{(\alpha,\beta)} = 2^{-\alpha-\beta}(2n+\alpha+\beta+1)\, k_n^{(\alpha,\beta)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial E_{b(r-\varepsilon)}} dz\, (z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta} Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)\, h(z), \qquad (A58)$$

wobei $r>1$, $r-\varepsilon>1$, mit $\varepsilon>0$. Dies in (A51) eingesetzt ergibt mit (A46)

$$g^{(\alpha,\beta)}(w) = 2^{-\alpha-\beta}\left(2w\frac{\partial}{\partial w} + \alpha+\beta+1\right) g_1^{(\alpha,\beta)}(w), \qquad (A59)$$

$$g_1^{(\alpha,\beta)}(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial E_{b(r-\varepsilon)}} dz\; K_0^{(\alpha,\beta)}(z,w)\, h(z), \qquad (A60)$$

wobei $\{w;\ w \in C_{r_1},\ r_1 = r-\varepsilon_1 > 1\ ,\ \varepsilon_1 > \varepsilon > 0\}$.

Es sei nun die Funktion h(z) holomorph in einem Gebiet Z und stetig in $\bar{Z}$; durch geeignete Verformung des Integrationsweges kann $g_1^{(\alpha,\beta)}(w)$ mit Hilfe der Darstellung (A60) aus C_{r_1} heraus fortgesetzt werden. Das Integral

$$g_1^{(\alpha,\beta)}(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial Z} dz\ K_0^{(\alpha,\beta)}(z,w)\ h(z) \qquad (A61)$$

existiert denn für (mit $b(w) = (1/2)(w + w^{-1})$)

$$\{w;\ w \in C_{r_1}\} \cup \{w;\ z = b(w) \in (E'_{b(r_1)} \cap Z) \Leftrightarrow w \in a(E'_{b(1)} \cap Z)\} =$$

$$\{w;\ w \in [C_{r_1} \cup a(E'_{b(r_1)} \cap Z)]\ ,\ r_1 = r-\varepsilon_1 > 1\ ,\ \varepsilon_1 > 0\}$$

und definiert in diesem Gebiet $g_1^{(\alpha,\beta)}(w)$ und damit $g^{(\alpha,\beta)}(w)$ als holomorphe Funktion.

LITERATURHINWEISE

1) M. Jacob, G.C. Wick, Annals of Physics 7, 404 (1959)

2) M. Froissart, Phys.Rev. 124, 1053 (1961)

3) S. Mandelstam, Phys.Rev. 112, 1344 (1958)

4) O.W. Greenberg, F.E. Low, Phys.Rev. 124, 2047 (1961)

5) A. Martin, Phys.Rev. 129, 1432 (1963)

6) A. Martin, in Strong Interactions and High Energy Physics, Ed. G.R. Moorhouse (Oliver and Boyd, 1964)

7) H. Lehmann, Nuovo Cimento 10, 579 (1958)

8) T. Kinoshita, J.J. Loeffel, A. Martin, Phys.Rev.Letters 10 460 (1963) and Phys.Rev. 135, 1964 (1964)

9) H. Cornille, Nuovo Cimento, in Vorbereitung

10) G. Szegö, in Orthogonal Polynomials, American Mathematical Society Colloquium Publications 23 (1939)

11) I.M. Gel'fand, Z.Y. Shapiro, in Representations of the Group of Rotations of 3-dimensional Space and Their Applications, American Mathematical Society Translations, Serie 2, 2 (1956)

12) F. Brafman, Proc. American Mathematical Society 2, 942 (19

13) Ed. A. Erdélyi, Bateman Manuscript Project III, (McGraw-Hill, 1955)

14) Ed. A. Erdélyi, Bateman Manuscript Project I, (McGraw-Hill, 1955)