670

Reprinted from:

NUCLEAR PHYSICS, Volume B53 (1973), No. 2

ANALYSE EN PHASES DE LA DIFFUSION PION-CARBONE AU-DESSOUS DE 300 MeV

Thèse présentée à la Faculté des Sciences de
l'Université de Neuchâtel pour obtenir le grade
de docteur

NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY – AMSTERDAM

Nuclear Physics B53 (1973) 349–365. North-Holland Publishing Company

ANALYSE EN PHASES DE LA DIFFUSION $\pi^- - {}^{12}C$ AU DESSOUS DE 300 MeV

J. BEINER
Institut de Physique, Université de Neuchâtel, Suisse

Reçu le 16 Octobre 1972

Abstract: A phase-shift analysis of recent experimental $\pi^- - {}^{12}C$ elastic-scattering data is presented. A phenomenological model is used to predict the higher-order phase shifts so as to reduce the number of unknown parameters. Their statistical error is computed. It indicates that certain of these parameters are badly determined.

1. Introduction

L'étude de la diffusion des pions sur les noyaux est rendue actuelle par les résultats expérimentaux de plus en plus nombreux et précis. Cela explique l'objet de cet article: une tentative d'analyse en phases de mesures [1, 2] de diffusion élastique $\pi^- - {}^{12}C$ aux énergies voisines de celle de la résonance pion-nucléon.

Après avoir exposé certaines difficultés de l'analyse en phases d'une diffusion et démontré la nécessité d'abaisser le nombre de paramètres estimés en introduisant un modèle prédisant toutes les phases d'ordre élevé, les tables contenant les résultats obtenus pour la diffusion $\pi^- - {}^{12}C$ sont présentées. L'erreur sur la valeur estimée des paramètres, qui a été calculée, indique le degré de confiance accordable aux résultats de l'analyse.

2. Analyse en phases

2.1. But et méthodes

La section différentielle efficace élastique d'une diffusion du type $\pi^- - {}^{12}C$ ne dépend que de l'angle θ entre les directions d'incidence et d'émergence et de la grandeur k de l'impulsion du pion. Elle se calcule à l'aide de l'amplitude de diffusion $f(k, \theta)$, qui est la grandeur faisant le pont entre l'expérience de la théorie, par la relation

$$\sigma(k, \theta) = |f(k, \theta)|^2 . \tag{1}$$

L'amplitude de diffusion se développe habituellement en polynômes de Legendre $P_l(\cos\theta)$:

$$f(k,\theta) = (2ik)^{-1} \sum_{l \geqslant 0} (2l+1)(S_l(k)-1)\, P_l(\cos\theta)\,. \tag{2}$$

Les phases $\delta_l(k) = \mathrm{Re}\,[\delta_l(k)] + i\,\mathrm{Im}\,[\delta_l(k)]$ s'introduisent en écrivant

$$S_l(k) = \mathrm{e}^{2i\delta_l(k)} \tag{3}$$

et l'absence de création de pions dans la diffusion impose $|S_l(k)| \leqslant 1$, ce qui implique $\mathrm{Im}\,[\delta_l(k)] \geqslant 0$.

Le but d'une analyse en phases est la détermination de l'amplitude de diffusion. Le problème peut s'énoncer ainsi: Trouver les phases du développement en polynômes de Legendre de l'amplitude de diffusion dont dérivent les sections efficaces mesurées.

Mais la relation (1) liant l'amplitude de diffusion à la section efficace ne s'inverse pas directement. Il faut reformuler ce problème en termes de problème d'approximation: Trouver les valeurs δ_l^* telles que $f(k,\theta;\delta_l^*)$ produise des sections efficaces ajustant l'ensemble des valeurs mesurées.

L'ajustement se fait généralement par la méthode des moindres carrés.

La dépendance en énergie des sections efficaces ouvre la voie à deux stratégies:

(i) une analyse à énergie variable des mesures à tous les angles et toutes les énergies ou

(ii) des analyses à énergie fixe des mesures faites à chacune des énergies.

L'absence de modèles théoriques liant énergie et phases est un inconvénient du premier type d'analyse. Aussi le choix se porte le plus souvent sur le deuxième type, quitte à manipuler ensuite les résultats jusqu'à ce que le comportement en énergie soit cohérent.

2.2. *Multiplicité des solutions*

Pour les calculs, le développement (2) est tronqué à $l = L$. Ainsi l'amplitude de diffusion devient un polynôme de degré L de la variable réelle $x = \cos\theta$ et se factorise:

$$f(x) = f(1) \prod_{n=1}^{L} \frac{x - x_n}{1 - x_n}\,, \tag{4}$$

les x_n étant les racines complexes de ce polynôme. Cette forme de l'amplitude de diffusion montre l'invariance de $|f(x)|^2$ et de $\mathrm{Im}\,f(1)$ pour les $L+1$ transformations ($\bar{z}$ dénote le complexe conjugué de z)

$$x_n \to \bar{x}_n \quad (L \text{ transformations})\,,$$
$$f(1) \to -f(1)\,(1 \text{ transformation})\,. \tag{5}$$

Comme chacune de ces transformations double le nombre des amplitudes donnant les mêmes sections efficaces différentielles et totales, il existe 2^{L+1} possibilités. Certaines amplitudes ainsi obtenues doivent être rejetées car elles contiennent des phases impliquant $|S_l| > 1$. Pourtant ce tri ne réduit pas à un le nombre des solutions valables (réfs. [3–6]). La section efficace coulombienne fixe $f(1)$, ramenant à 2^L le nombre des possibilités, mais il n'est utile de l'introduire dans les calculs que si des mesures précises de la diffusion vers l'avant existent.

2.3. Incertitude des solutions

Les données à ajuster sont des mesures, donc:
elles sont entachées d'erreurs expérimentales,
elles ne couvrent pas tout le domaine angulaire de 0° à 180°,
elles sont ponctuelles et limitées en nombre sur ce domaine.

Les phases obtenues par ajustement n'auront de ce fait pas une valeur certaine. L'effet des erreurs des mesures peut s'évaluer par les méthodes d'analyse statistique (réf. [7], par exemple), en employant des algorithmes particulièrement stables pour l'inversion des matrices à cause du nombre élevé de paramètres à estimer (réf. [8, 9]).

Le manque de mesures produit une incertitude supplémentaire des valeurs des paramètres [10], dont l'évaluation pose un problème complexe (réfs. [11–13]).

3. Calcul des phases d'ordre élevé

3.1. Nécessité d'un modèle

Il faut, pour obtenir un développement utilisable de l'amplitude de diffusion aux énergies intermédiaires, inclure des termes dépassant l'ordre $l = 8$. Cela demande donc plus de 18 paramètres réels pour ajuster quelques 25 mesures par énergie. Pour remédier à cette situation statistiquement défavorable, on est constraint de grouper plusieurs phases par le moyen d'un modèle. Comme les termes d'ordre l grand décrivent le bord de la zone de diffusion, où les chocs sont rares et la probabilité de la diffusion est piquée vers l'avant, il est raisonnable d'utiliser l'approximation eikonale pour calculer leur phase Δ en fonction du paramètre d'impact b (réf. [14] p. 113) par

$$\Delta(b) = \left(-\frac{\mu}{2k}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} V(\zeta)\, dz \,. \tag{6}$$

Dans cette formule: μ est la masse réduite du système π-noyau et vaut $\mu = (m_\pi m)/(m_\pi + m)$; k est l'impulsion du pion dans le repère du centre de masse du système π-noyau; $\zeta^2 = b^2 + z^2$, où b est le paramètre d'impact et z est la coordonnée sur l'axe d'incidence; V est le potentiel de l'équation de Schrödinger $(\Delta + k^2 - 2\mu V)\,\psi = 0$ (réf. [14], p. 94).

3.2. Potentiel

Le potentiel de l'interaction pion-noyau apparaît dans la relation (6): il faut donc s'en donner un modèle. Construisons-le avec l'amplitude de diffusion pion-nucléon. On montre (réf. [15] p. 369, par exemple) que le potentiel peut s'approcher par

$$\langle k' | V | k \rangle = -\frac{2\pi}{\mu} A f^* (k, k') \int d^3 r \, \rho (r) \, e^{-iq \cdot r} , \tag{7}$$

où μ est la masse réduite du système pion-noyau, f^* est l'amplitude de diffusion pion-nucléon dans le repère du centre de masse du système pion-noyau, $\boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{k}'$) est l'impulsion du pion incident (émergent) dans ce repère, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}$ est le transfert d'impulsion, A est le nombre de nucléons de la cible, ρ est la densité nucléaire de la cible normalisée à 1 ($\int \rho \, d^3 r = 1$).

En supposant que l'amplitude de diffusion pion-nucléon ne dépend que du transfert d'impulsion $\boldsymbol{q}$ et que le facteur de forme

$$F(\boldsymbol{q}) = \int d^3 r \, \rho (\boldsymbol{r}) \, e^{-i\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{r}} \tag{8}$$

n'est différent de 0 que pour des valeurs $\boldsymbol{q}$ proches de $\boldsymbol{q} = 0$, il est possible de calculer le potentiel en fonction de $\boldsymbol{r}$:

$$V(\boldsymbol{r}) = -\frac{2\pi A}{\mu} f^* (0) \, \rho (\boldsymbol{r}) = -\frac{2\pi A}{\mu} f(0) \frac{k}{k_0} \rho(\boldsymbol{r}) , \tag{9}$$

où $f(0)$ est l'amplitude de diffusion pion-nucléon dans le repère du centre de masse du système pion-nucléon et k_0 est la grandeur de l'impulsion du pion dans ce repère. Dans l'équation (9), l'amplitude de diffusion $f(0)$ s'introduit en utilisant l'égalité $f^*(0)/k = f(0)/k_0$ (réf. [16] p. 796).

La densité nucléaire dépend du noyau. Le noyau ${}^{12}C$, qui est concerné dans cette analyse, est décrit (réf. [17] pp. 28 et 32) par

$$\rho (r) = (3\pi^{\frac{3}{2}} a^3)^{-1} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{r^2}{a^2}\right) e^{-r^2/a^2} , \tag{10}$$

où la portée a est reliée au rayon quadratique moyen R par

$$R = \langle r^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{13}{6}\right)^{\frac{1}{2}} a = 1.472 \, a . \tag{11}$$

3.3. Calcul des phases

La phase s'obtient, en fonction du paramètre d'impact, en introduisant le potentiel de la relation (9), écrit avec la densité de la formule (10), dans l'égalité (6),

ce qui donne

$$\Delta(b) = \frac{1}{9} A \frac{f(0)}{k_0} \frac{1}{a^2} \left(5 + 4\frac{b^2}{a^2}\right) e^{-b^2/a^2} . \tag{12}$$

La relation approximative liant le paramètre d'impact b et l'ordre l de la phase donne

$$\delta_l(k) \approx \Delta\left(\frac{2l+1}{2k}\right) . \tag{13}$$

Ce modèle permet le calcul des phases d'ordre l grand à l'aide de 3 paramètres réels: la portée a (1 paramètre réel) et l'amplitude de diffusion pion-nucléon $f(0)$ vers l'avant (2 paramètres réels).

L'ordre inférieur l_0 à partir duquel cette approximation est valable s'obtient en recherchant un compromis entre un minimum du nombre $(2l_0 + 3)$ de paramètres estimés et la qualité de l'ajustement.

3.4. Rayon effectif

Le potentiel de ce modèle néglige la variation de l'amplitude de diffusion pion-nucléon au voisinage de $q = 0$. Essayons toutefois d'évaluer les effets de cette variation. Ecrivons

$$f^*(q) = f^*(0) + \gamma q^2 \tag{14}$$

dans l'équation (7) et calculons le potentiel V' dérivant de cette amplitude. Il vient

$$V'(\boldsymbol{r}) = -\frac{2\pi A}{\mu} f^*(0)\, \rho(\boldsymbol{r}) + \frac{2\pi A}{\mu} \gamma\, \Delta\, \rho(\boldsymbol{r}) . \tag{15}$$

Un terme contenant le laplacien $\Delta\rho$ de la densité s'ajoute au potentiel V précédemment établi.

Les moments relativement à $\boldsymbol{r}$ de ces deux potentiels permettent leur comparison. Les moments d'ordre 2 différent et donnent

$$\langle r^2 \rangle' = \langle r^2 \rangle - \frac{6\gamma}{f^*(0)} \tag{16}$$

en définissant

$$\langle r^2 \rangle' = \left[-\frac{2\pi A}{\mu} f^*(0)\right]^{-1} \int r^2\, V'(\boldsymbol{r})\, d^3 r ,$$

$$\langle r^2 \rangle = \int r^2\, \rho(\boldsymbol{r})\, d^3 r . \tag{17}$$

Puisque le modèle de potentiel adopté ne contient pas le terme dépendant de $\Delta\rho$, il faut absorber son effet en calculant avec une densité effective dont le rayon

$\langle r^2\rangle'$ est lié au rayon nucléaire vrai $\langle r^2\rangle$ par la relation (16). Ainsi, il est judicieux de considérer $\langle r^2\rangle'$ comme paramètre libre (voir sous-sect. 3.3).

Que vaut $\gamma/f^*(0)$? L'hypothèse de la prédominance du terme d'ordre $l = 1$ dans l'amplitude de diffusion pion-nucléon permet une estimation de ce rapport. Dans ce cas,

$$f^*(q) \approx 3f_1\left(1 - \frac{1}{2}\frac{q^2}{k^2}\right) \tag{18}$$

donne (réf. [18])

$$\langle r^2\rangle' = \langle r^2\rangle + \frac{3}{k^2}\,. \tag{19}$$

Les rayons effectifs obtenus devront donc approximativement s'aligner sur une droite de pente égale à 3 s'ils sont reportés en fonction de k^{-2}.

4. Analyse de la diffusion $\pi^- - {}^{12}C$

4.1. Mesures analysées

Les mesures analysées dans ce travail se répartissent en 9 groupes d'énergie cinétique T_π du pion incident dans le laboratoire, entre 69.5 MeV et 280 MeV (réfs. [1, 2]). La table 1 résume les principales caractéristiques de chacun de ces groupes.

4.2. Options de l'analyse

Facteur de normalisation: Pour tenir compte d'une possible différence de normalisation entre les sections efficaces totales et les sections efficaces différentielles, un facteur de normalisation E multipliant les sections différentielles est introduit. La valeur mesurée de E est supposée être 1 et son erreur $\pm$ 0.1. La valeur théorique de E est estimée pas ajustement.

Energie fixée: Les mesures à chaque énergie sont ajustée indépendamment.

Calcul des phases d'ordre élevé: Les phases d'ordre $l \geqslant l_0$ sont calculées par le modèle décrit dans la section 3. La limite l_0 est choisie en optimalisant le compromis: l_0 minimal mais qualité de l'ajustement maximale.

Troncature du développement de l'amplitude de diffusion: le développement de l'amplitude de diffusion est tronqué dès que $(1 - \mathrm{Re}S_l) < 10^{-5}$. Le test est fait dès $l = l_0$.

Méthode d'estimation: l'estimation des valeurs des paramètres est faite en deux étapes. Dans la première étape, les paramètres sont estimés en minimalisant un χ^2 tenant compte des sections efficaces totales élastiques, inélastiques et de leur somme, ainsi que du facteur de normalisation. Dans la deuxième étape, les erreurs sur les para-

Table 1
Principales caractéristiques des mesures.

No. a)	T_π (MeV)	k b) (fm^{-1})	k_0 c) (fm^{-1})	Angle (degrés)	N d)	σ_{tot} (mb)	σ_{el} (mb)	σ_{inel} (mb)
1	69.5	0.775	0.650	20–125	22	537 ± 20 e)	214 ± 30 e)	323 ± 36 e)
2	87.5	0.890	0.749	25–125	21	571 ± 20 e)	213 ± 20 e)	358 ± 28 e)
3	120	1.084	0.882	10–142	24	681 ± 7	252 ± 16	429 ± 18
4	150	1.254	1.003	10–141	25	696 ± 7	255 ± 16	441 ± 18
5	180	1.417	1.114	10–141	22	670 ± 7	247 ± 11	423 ± 13
6	200	1.523	1.183	11–142	22	637 ± 7	241 ± 11	396 ± 13
7	230	1.679	1.287	10– 72	17	584 ± 6	225 ± 17	359 ± 18
8	260	1.833	1.384	10– 72	18	536 ± 6	212 ± 18	324 ± 19
9	280	1.934	1.446	10–132	18	510 ± 6	199 ± 18	311 ± 19

a) Groupes 1–2: réf. [2]. Groupes 3–9: réf. [1].
b) Impulsion du pion incident dans le repère du centre de masse du système pion-noyau.
c) Impulsion du pion incident dans le repère du centre de masse du système pion-nucléon.
d) Nombre de mesures.
e) Valeurs calculées dans réf. [1] et considérées comme mesures pour faciliter l'ajustement, bien qu'en fait elles n'aient pas été mesurées. La valeur $E \approx 1$ (voir table 4) excuse a posteriori ce choix.

mètres sont calculées en linéarisant au voisinage des valeurs obtenues dans la première étape (réf. [7]). Remarquons que le grand nombre des paramètres estimés impose des algorithmes particulièrement stables pour la manipulation des matrices (réf. [8, 9, 19]).

Suppression de mesures vers l'avant: Comme nos calculs ne tiennent pas compte de la diffusion coulombienne, les mesures faites aux petits angles pour lesquelles la section efficace de Rutherford est supérieure à 10% de la section mesurée ont été supprimées. C'est le cas pour les mesures à 120 MeV (3 mesures supprimées) et à 150 MeV (3 mesures supprimées).

4.3. Remarques sur le calcul des erreurs

L'erreur de l'estimation des paramètres indiquées dans les tables de résultats ne tient compte ni de l'incertitude due au manque de mesures vers l'arrière (sous-sect. 2.3), ni de l'ambiguité provenant de la troncature du développement de l'amplitude de diffusion (sous-sect. 2.2). Elle est calculée en approximation linéaire et provient uniquement de l'erreur des mesures.

Il peut arriver que les erreurs de certains paramètres croissent au delà de toute limite et, par le jeu des corrélations, augmentent celles des autres paramètres. Dans

ce cas l'erreur conditionnelle obtenue en assimilant les paramètres mal déterminés à des constantes d'erreur nulle a été calculée. Cela concerne les mesures faites à 180 MeV (amplitude $f(0)$ vers l'avant considérée constante), à 230 MeV ($f(0)$ et S_0 fixés), à 260 MeV (S_0 fixé) et à 280 MeV ($f(0)$ fixée).

4.4. Résultats

Les valeurs estimées des paramètres obtenues dans cette analyse de la diffusion $\pi^- - {}^{12}C$ élastique sont exposées dans les tables 3 et 4. La table 2 résume les caractéristiques essentiellles des ajustements et leur qualité peut se juger sur les figures 1 et 2.

Rappelons que seuls les termes d'ordre l inférieur du développement de l'amplitude de diffusion ont été estimés directement. Dès $l = l_0$, tous les termes sont calculés à l'aide d'un modèle dépendant de 3 paramètres: le rayon effectif R et une approximation $f(0)$ de l'amplitude de diffusion pion-nucléon vers l'avant.

4.5. Sections efficaces partielles

La section efficace totale, somme des sections efficaces totales élastique et inélastique, s'écrit en fonction des termes du développement de l'amplitude de diffusion:

$$\sigma^{(t)} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l \geq 0} (2l+1)(1 - \mathrm{Re}\, S_l) = \sum_{l \geq 0} \sigma_l^{(t)} , \tag{20}$$

Table 2
Caractéristiques des ajustements.

No.	T_π (MeV)	l_0	l_{max}	P	ν	χ^2/ν
1	69.5	1	7	6	20	0.9
2	87.5	2	7	8	17	0.7
3	120	2	8	8	17	1.3
4	150	4	9	12	14	1.5
5	180	3	10	10	16	2.0
6	200	3	10	10	16	1.9
7	230	4	12	10	11	2.0
8	260	4	12	12	10	1.8
9	280	4	12	12	10	1.2

l_0: ordre du premier déphasage calculé par le modèle.
l_{max}: ordre du dernier déphasage différent de 0.
ν: nombre de degrés de liberté.
P: nombre de paramètres estimés.

Table 3
Valeurs estimées des $S_l = e^{2i\delta_l}$.

	$l = 0$		$l = 1$		$l = 2$		$l = 3$	
T_π (MeV)	Re S_0	Im S_0	Re S_1	Im S_1	Re S_2	Im S_2	Re S_3	Im S_3
69.5	0.34 ± 0.03	−0.26 ± 0.04	0.34 a)	0.49 a)	0.66 a)	0.37 a)	0.91 a)	0.14 a)
87.5	0.31 ± 0.04	−0.01 ± 0.12	0.16 ± 0.03	0.16 ± 0.12	0.48 a)	0.41 a)	0.84 a)	0.19 a)
120	0.11 ± 0.05	−0.10 ± 0.23	−0.10 ± 0.03	0.04 ± 0.16	0.29 a)	0.21 a)	0.57 a)	0.18 a)
150	0.05 ± 0.16	−0.20 ± 0.61	−0.11 ± 0.19	−0.21 ± 0.77	0.09 ± 0.08	0.05 ± 0.59	0.35 ± 0.09	−0.08 ± 0.45
180 b)	−0.11 ± 0.35	−0.06 ± 0.22	−0.04 ± 0.20	−0.20 ± 0.20	−0.03 ± 0.28	−0.14 ± 0.12	−0.26 a)	−0.07 a)
200	−0.08 ± 0.03	−0.20 ± 0.09	−0.04 ± 0.02	−0.19 ± 0.05	−0.06 ± 0.02	−0.23 ± 0.07	0.23 a)	−0.16 a)
230 b)	−0.24 c)	0.08 c)	0.01 ± 0.16	−0.09 ± 0.28	0.15 ± 0.30	−0.50 ± 0.17	−0.01 ± 0.19	0.22 ± 0.36
260 b)	−0.15 c)	−0.32 c)	−0.10 d)	−0.13 d)	0.05 d)	−0.13 d)	0.02 d)	−0.20 d)
280 b)	−0.04 d)	0.02 d)	−0.06 d)	0.00 d)	−0.02 d)	−0.55 d)	0.05 d)	0.10 d)

a) Valeur calculée avec R et $f(0)$ (voir table 4).
b) Voir sous-sect. 4.3.
c) Grande erreur, mais annulée pour le calcul des autres erreurs (sous-sect. 4.3).
d) Erreur de l'ordre de ± 1, donc paramètre mal déterminé.

Table 4
Valeurs estimées de R, $f(0)$ et du facteur de normalisation E.

T_π (MeV)	R (fm)	$f(0)/k_0$ (fm^2) Re	Im	E	E^{-1}	$(E^{-1})'$ c)
69.5	3.65 ± 0.06	0.55 ± 0.04	0.30 ± 0.03	0.97 ± 0.08	1.03 ± 0.09	
87.5	3.21 ± 0.14	0.57 ± 0.06	0.37 ± 0.05	0.98 ± 0.07	1.02 ± 0.07	
120	3.21 ± 0.09	0.36 ± 0.08	0.60 ± 0.05	1.02 ± 0.04	0.98 ± 0.04	1.04 ± 0.04
150	2.93 ± 0.21	0.38 ± 0.55	0.75 ± 0.46	1.05 ± 0.05	0.93 ± 0.04	0.94 ± 0.05
180 a)	2.78 ± 0.01	−0.17 b)	0.82 b)	0.99 ± 0.02	1.01 ± 0.02	1.00 ± 0.02
200	2.77 ± 0.03	−0.33 ± 0.06	0.69 ± 0.04	0.95 ± 0.03	1.05 ± 0.03	1.047 ± 0.013
230 a)	2.89 ± 0.03	−0.03 b)	0.51 b)	0.99 ± 0.03	1.01 ± 0.03	1.084 ± 0.012
260 a)	2.58 ± 0.22	−0.38 ± 0.29	0.51 ± 0.12	0.94 ± 0.10	1.06 ± 0.11	1.01 ± 0.02
280 a)	2.58 ± 0.04	−0.40 b)	0.45 b)	0.84 ± 0.04	1.19 ± 0.06	1.16 ± 0.06

a) Voir sous-sect. 4.3.
b) Grande erreur, mais annulée pour le calcul des autres erreurs (sous-sect. 4.3).
c) Valeurs indiquées dans réf. [1].

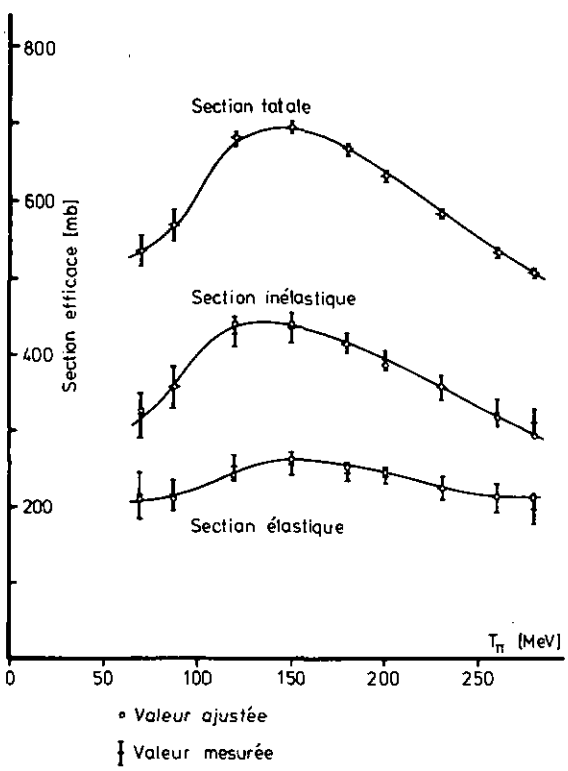

Fig. 1. Sections efficaces totales.

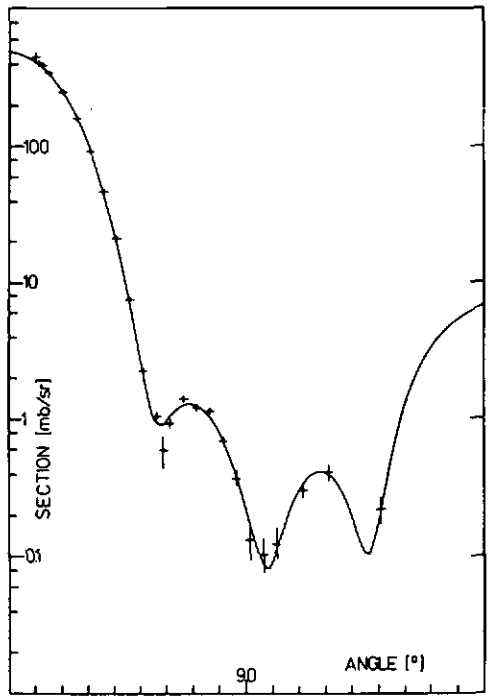

Fig. 2. Section efficace différentielle à 150 MeV (Mesures: réf. [1]). Ajustement de $\chi^2/\nu = 1.5$. (Voir table 2 pour la qualité des ajustements aux autres énergies).

Table 5
Sections efficaces partielles $\sigma_l^{(t)}$.

T_π (MeV)	$l =$ 0	1	2	3	4	5	$\sigma^{(t)}$
69.5	69.1 a)	207.4	178.1	66.0	9.4	0.0	539.1
87.5	54.8	200.0 a)	206.3	88.9	21.4	0.0	569.7
120	47.6	176.4 a)	189.8	160.9	77.0	23.5	682.1
150	38.0	133.1	181.9	181.9 a)	11.5	39.6	696.3
180	34.7	97.7	161.2 a)	62.1	126.8	62.0	668.6
200	29.3	84.5	143.5 a)	146.0	124.3	68.5	634.7
230	27.6	66.2	94.7	157.5 a)	100.2	73.5	583.8
260	21.5	61.7	88.8	128.3 a)	106.0	74.2	535.9
280	17.5	53.4	87.5	117.7 a)	99.0	73.9	507.8

a) Dernier ordre encore estimé indépendamment. Les ordres suivants sont calculés par le moyen du modèle (sous-sect. 3.3).

ce qui introduit les sections efficaces partielles

$$\sigma_l^{(t)} = \frac{2\pi}{k^2}(2l+1)(1 - \mathrm{Re}\, S_l)\,. \tag{21}$$

Les valeurs de ces sections partielles sont indiquées dans la table 5 (voir réf. [19] pour les valeurs des sections partielles élastiques et inélastiques).

5. Tests de cohérence et comparaisons

Pour s'assurer de la cohérence du comportement en fonction de l'énergie, les grandeurs estimées dans cette analyse, ou des grandeurs en dérivant, sont dessinées en fonction de l'énergie et comparées aux valeurs obtenues par d'autres méthodes.

5.1. Diagrammes d'Argand

Les figures 3a à 3d représentent les diagrammes d'Argand des S_l d'ordre l bas. Le diagramme de S_0 est prolongé jusqu'à 0 MeV à l'aide de la valeur de la longeur de diffusion des atomes π –mésiques de ^{12}C (réf. [20]). A partir de

$$Z = k \cot \delta_0 = ik\frac{S_0 + 1}{S_0 - 1} = -\frac{1}{A} + Bk^2\,, \tag{22}$$

on tire

$$S_0 = \frac{Z + ik}{Z - ik} \tag{23}$$

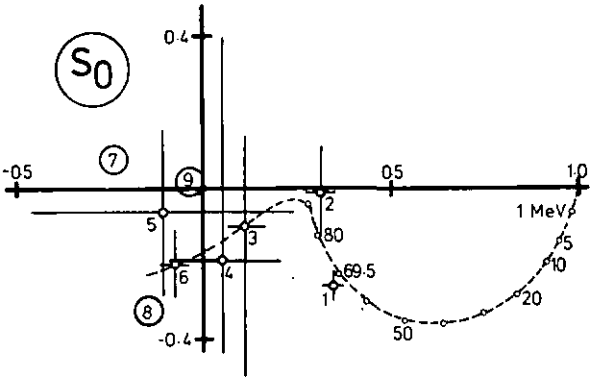

Fig. 3a.

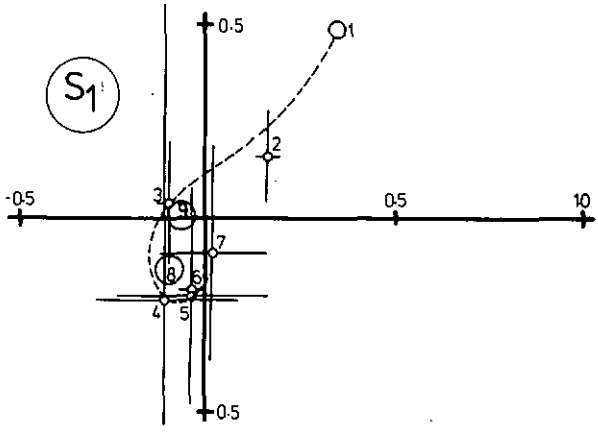

Fig. 3b.

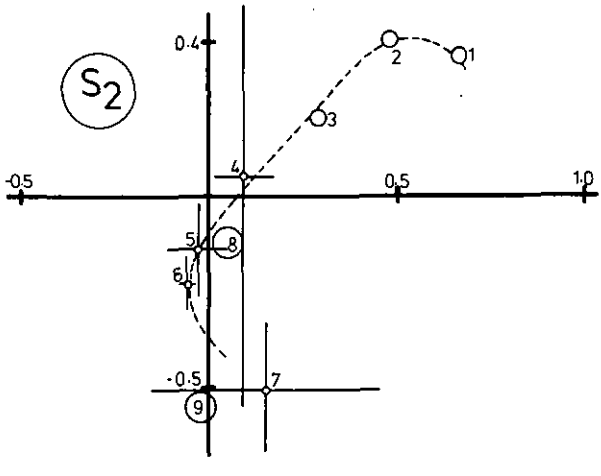

Fig. 3c.

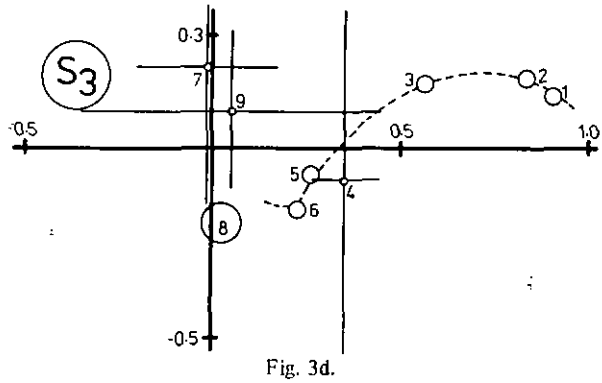

Fig. 3d.

Fig. 3a–3d. Diagrammes d'Argand de S_0, S_1, S_2 et S_3. (Energies numérotées de 1 à 9, voir table 2).

et

$$B = \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{A} + ik\frac{S_0 + 1}{S_0 - 1}\right). \tag{24}$$

La valeur de A est (réf. [20])

$$A = 0.38i - i0.109.$$

Le coefficient B permet de trouver un diagramme passant dans le voisinage du point obtenu à 69.5 MeV par l'analyse en phases. La valeur $B = 2.799 - i\ 1.083$ donne la trajectoire de la figure 3a. Il est remarquable de constater que cette trajectoire prolongée jusqu'à 87.5 MeV est compatible avec le point 2 du diagramme.

5.2. Rayon effectif et amplitude pion-nucléon

Les développements de la sous-section 3.4 prouvent que le rayon quadratique moyen $R^2 = \langle r^2 \rangle$ de la densité nucléaire reporté en fonction de k^{-2} parcourt approximativement une droite (éq. (19)). Ce comportement constitute un test de la cohérence des valeurs obtenues pour R à chaque énergie et la figure 4 montre que cette caractéristique est vérifiée. La droite ajustée par moindres carrés livre la valeur $\langle r^2 \rangle_C = 5.9 \pm 0.2$ fm^2 pour le carré du rayon de la densité nucléaire du noyau ^{12}C (à comparer à 6.05 fm^2 (réfs. [17, 21]) et 4.2 ± 0.3 pour la pente (à comparer avec 3 (voir sous-section 3.4).

La deuxième paramètre dont dépendent les phases d'ordre élevé est $f(0)$, qui peut approximativement s'interpréter comme amplitude de diffusion pion-nucléon vers l'avant sous-sect. 3.2 et éq. (12)).

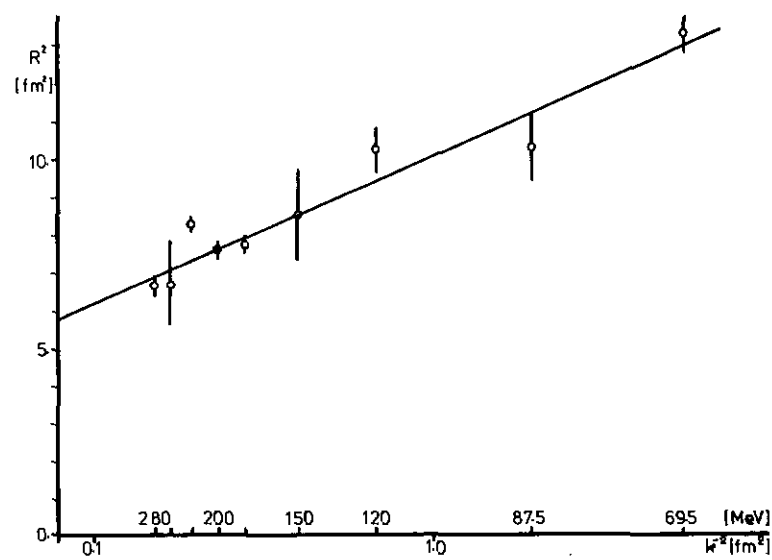

Fig. 4. Comportement du rayon effectif.

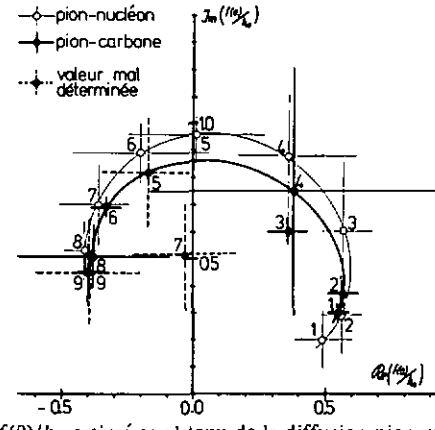

Fig. 5. Comparaison de $f(0)/k_0$ estimé et obtenu de la diffusion pion-nucléon (Energies numérotées de 1 à 9, voir table 2).

Il est donc intéressant de comparer les valeurs estimées à partir de la diffusion pion-carbone et celles calculées à partir des résultats de la diffusion pion-nucléon (fig. 5). Les valeurs tirées de la diffusion pion-nucléon reportées dans cette figure sont corrigées par la distribution de Fermi des impulsions dans la matière nucléaire et affectées d'une incertitude calculée à l'aide du deuxième moment de cette distribution (réf. [22]).Cette comparaison fait ressortir un décalage systématique des valeurs estimées dans le sens positif. Ainsi la résonance pion-noyeau se situe entre 150 et 180 MeV (points 4 et 5), alors que la résonance pion-nucléon a lieu après 180 MeV (point 5).

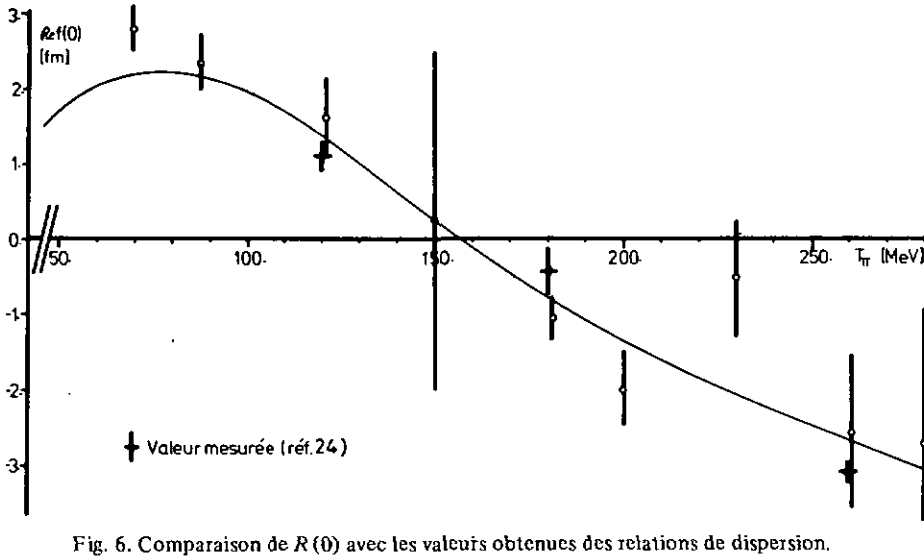

Fig. 6. Comparaison de $R(0)$ avec les valeurs obtenues des relations de dispersion.

5.3. Partie réelle de l'amplitude pion-noyau

La partie réelle de l'amplitude de diffusion pion-noyau $F(0)$ à 0 degré peut se calculer à l'aide de la section totale par le moyen des relations de dispersion. Des calculs ont été faits pour la diffusion pion-carbone (réf. [23]) et les résultats sont comparés dans la figure 6. Cette comparaison permet de rejeter les jeux de phases ajustant correctement les mesures, mais prédisant une partie réelle de signe opposé à celle théoriquement calculée.

6. Remarques finales

L'analyse en phases, méthode souvent employée pour la description de la diffusion, présente encore de nombreuses difficultés. L'imprécision des résultats, la multiplicité des solutions, la dépendance d'un modèle sont autant d'inconvénients qu'il faudrait amoindrir ou même supprimer. Mais pour l'instant, l'analyse en phases reste le moyen de décrire des mesures de diffusion par des paramètres significatifs. Les résultats présentés dans la section 4 souffrent des défauts de la méthode. Ils ne sont donc pas uniques et définitifs. Cependant, ils livrent déjà un ensemble de phases décrivant la diffusion des pions négatifs sur le carbone et de comportement en énergie cohérent.

Ce travail a profité de l'aide de nombreuses personnes: les remercier toutes est une tâche agréable, mais le citer toutes est un devoir impossible. Je remercie particulièrement le Professeur Huguenin qui a dirigé ce travail, ainsi que les collaborateurs de la section de Physique Théorique de l'Université de Neuchâtel qui en ont discuté avec moi et m'ont communiqué des résultats permettant des comparaisons fructueuses. Je remercie aussi le Professeur Banderet pour son aide en analyse numérique et le Professeur Stroot et le groupe du CERN de qui j'ai obtenu les mesures de diffusion. Les calculs numériques ont été commencés sur l'ordinateur IBM 7040 du centre de calcul de l'EPFL, Suisse, et terminés sur l'ordinateur UNIVAC 1108 du centre de calcul d'Ebauches S.A. Le Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique a soutenu financièrement ce travail.

Références

[1] F. Binon et al., Nucl. Phys. B17 (1970) 168.
[2] R.M. Edelstein et al., Phys. Rev. 112 (1961) 252.
[3] A. Gersten, Nucl. Phys. B12 (1969) 537.
[4] A. Martin, in Scattering theory: unitarity, analyticity and crossing (Springer Verlag, Berlin, 1969).
[5] A. Martin, Nuovo Cimento 59A (1969) 131.
[6] R.B. Gerber and M. Karplus, Phys. Rev. 1D (1970) 998.

[7] S. Brandt, in: Statistical and computational methods in data analysis (North-Holland, Amsterdam, 1970).
[8] G.H. Golub, Num. Math. 7 (1965) 206.
[9] P. Businger and G.H. Golub, Num. Math. 7 (1965) 269.
[10] J. Beiner, Helv. Phys. Acta 42 (1969) 550.
[11] R.E. Cutkosky, Phys. Rev. 174 (1968) 1859.
[12] R.E. Cutkosky, Ann. of. Phys. 54 (1969) 350.
[13] P. Preshader and J. Pišut, Nuovo Cimento 3A (1971) 603.
[14] K. Gottfried, in Quantum mechanics, vol. 1 (Benjamin, New York, 1966).
[15] L.S. Rodberg and R.M. Thaler, in Introduction to the quantum theory of scattering (Academic Press, New York, 1967).
[16] M. Goldberger and K. Watson, in Collision theory (Wiley, New York, 1964).
[17] Landolt–Börnstein, in Nuclear radii, vol. 2 (Springer Verlag, Berlin, 1967).
[18] C. Wilkin, Proc. on interactions of elementary particles with nuclei, Trieste, 1970, p.332.
[19] J. Beiner, Manuscrit de thèse de l'Université de Neuchâtel, Suisse, 1971.
[20] E. Lambert, Helv. Phys. Acta 43 (1970) 713.
[21] I. Sich and J.S. McCarthy, Nucl. Phys. A150 (1970) 631.
[22] M. Perrinjaquet, communication personelle;
M. Perrinjaquet, Helv. Phys. Acta 44 (1971) 609.
[23] T.E.O. Ericson and M.P. Locher, Nucl. Phys. A148 (1970) 1.
[24] F. Binon et al., Nucl. Phys. B33 (1971) 42.