

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL  
FACULTÉ DES SCIENCES

---

Sur les fonctions spéciales  
qui apparaissent dans les  
représentations du groupe des  
déplacements du plan

THÈSE PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL  
POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

HENRI BESSON

PHYSICIEN DIPLOMÉ

DÉCEMBRE 1972

SUR LES FONCTIONS SPECIALES QUI APPARAISSENT DANS LES REPRESENTATIONS<sup>C</sup>

DU GROUPE DES DEPLACEMENTS DU PLAN

Thèse présentée à la Faculté des Sciences  
de l'Université de Neuchâtel  
pour l'obtention du grade de docteur ès sciences  
par

Henri Besson

physicien diplômé

décembre 1972

Résumé

Il est naturel de représenter le groupe des déplacements du plan dans l'espace des solutions de l'équation

$$(+)\quad \Delta \Upsilon + k^2 \Upsilon = 0$$

ou dans certains sous-espaces puisque le laplacien est invariant par rapport à ce groupe.

On peut séparer les variables de l'équation (+) dans quatre systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales [3]. Si on procède ainsi, on obtient des systèmes de solutions aux variables séparées qui constituent des bases dans le sous-espace des solutions de l'équation (+) pour une même valeur de  $k$ . Il est possible de représenter le groupe des déplacements du plan à l'aide de transformations définies sur ces vecteurs de base. Si on applique cette méthode dans les quatre systèmes de coordonnées mentionnés ci-dessus et qui sont les coordonnées polaires, elliptiques, cartésiennes et paraboliques, on peut faire apparaître les fonctions de Hankel, les fonctions de Mathieu, les fonctions exponentielles et les fonctions de Weber ainsi que retrouver des formules d'addition classiques.

Table des matières

1. Introduction

1.1 Rappel historique

1.2 Généralités

2. Equation de Helmholtz et équations aux variables séparées

2.1 Equation de Helmholtz et coordonnées polaires

2.2 Equation de Helmholtz et coordonnées elliptiques

2.3 Equation de Helmholtz et coordonnées cartésiennes

2.4 Equation de Helmholtz et coordonnées paraboliques

3. L'espace de représentation  $\mathcal{H}_k$  et ses éléments

3.1 Les éléments de  $\mathcal{H}_k$  sont exprimés à l'aide des fonctions de Hankel

3.2 Les éléments de  $\mathcal{H}_k$  sont exprimés à l'aide des fonctions de Mathieu

3.3 Les éléments de  $\mathcal{H}_k$  sont exprimés à l'aide des fonctions exponentielles

3.4 Les éléments de  $\mathcal{H}_k$  sont exprimés à l'aide des fonctions de Weber

4. Fonctions spéciales et représentations du groupe des déplacements du plan

4.1 Représentation du groupe des déplacements du plan et fonctions de Hankel

4.2 Représentation du groupe des déplacements du plan et fonctions de Mathieu

4.3 Représentation du groupe des déplacements du plan et fonctions exponentielles

4.4 Représentation du groupe des déplacements du plan et fonctions de Weber

5. Conclusion

6. Bibliographie

## 1. Introduction

### 1.1 Rappel historique

En 1965, les Editions Nauka à Moscou publiaient un livre de N. I. Vilenkin: " Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes " [1]. Ce livre, rapidement traduit en anglais puis en français, révélait, à un public plus large que jusqu'alors, les résultats de recherches entreprises depuis quelques années pour découvrir un ordre plus profond parmi les nombreuses formules et propriétés relatives aux fonctions spéciales.

Diverses techniques de représentation des groupes, qui sont maintenant bien connues, permettent d'obtenir beaucoup de résultats classiques de façon naturelle ou mieux motivée. Cependant, H. W. Macfadyen et P. Winternitz ont présenté un nouveau procédé de représentation dans un article paru en février 1971 et intitulé " Crossing Symmetric Expansions of Physical Scattering Amplitudes; The  $O(2,1)$  Group and Lamé Fonctions " [2]. L'utilisation de cette méthode permet de justifier le recours à certaines fonctions spéciales, dont il n'est pas question dans le livre de N. I. Vilenkin, pour représenter le groupe des déplacements du plan et de retrouver des formules d'addition.

### 1.2 Généralités

Comme nous l'avons dit, Macfadyen et Winternitz [2] introduisent une nouvelle technique de représentation d'un groupe. Plus précisément, ces auteurs rappellent qu'il ne s'impose pas de réduire un groupe à des sous-groupes pour le représenter, comme cela s'était fait jusque là. Partant d'un problème de diffusion de particules, ces auteurs sont amenés à étudier le groupe  $O(2,1)$ , c'est-à-dire le groupe des déplacements de l'espace de Minkowski  $M(2,1)$ . La représentation se construit dans l'ensemble des fonctions propres d'un opérateur invariant pour le groupe. Le procédé de séparation des variables permet, dans ce cas, de ramener la question à des considérations sur des produits de fonctions de Lamé. Ces produits ont un caractère particulier de symétrie que nous retrouverons pour des produits d'autres fonctions spéciales.

C'est le cas du groupe  $M(2)$  des déplacements du plan euclidien  $E_2$  que nous allons considérer. Comme on le sait, le laplacien est un opérateur

invariant par rapport au groupe  $N(2)$ . Dans ces conditions, on peut prendre, comme espace de représentation, l'ensemble des fonctions propres de cet opérateur qui sont associées à une même valeur propre (cf. [2] et la littérature qui est indiquée). Autrement dit, cet espace de représentation est formé des solutions de l'équation de Helmholtz

$$(1.2.1) \quad \Delta \Psi + k^2 \Psi = 0$$

pour une même valeur de  $k$ .

Les variables de l'équation (1.2.1) sont séparables dans certains systèmes orthogonaux de coordonnées curvilignes. Dans notre cas, ces systèmes sont au nombre de quatre (cf. [3]). Rechercher les solutions des équations aux variables séparées revient à étudier les fonctions propres d'opérateurs différentiels à une seule variable. Ces fonctions propres sont des fonctions spéciales qui permettent de construire explicitement une représentation. L'étude de ces fonctions se trouve ainsi justifiée du point de vue de la théorie de la représentation des groupes. Chaque classe de fonctions spéciales qui s'introduit de cette manière apparaît clairement associée à un groupe et à un système d'opérateurs particuliers. De plus, nous verrons que, lorsqu'on écrit explicitement les éléments des matrices qui correspondent aux éléments du groupe, on écrit tout naturellement des formules d'addition.

Les systèmes de coordonnées curvilignes s'obtiennent par transformation du plan de Gauss. Comme nous désirons nous limiter aux systèmes orthogonaux, nous ne retenons que les transformations qui conservent les angles, c'est-à-dire les transformations conformes.

Soit donc une transformation conforme

$$(1.2.2) \quad f : \zeta \in D \subset \mathbb{C} \longmapsto z = f(\zeta) \in \mathbb{C}$$

où

$$(1.2.3) \quad z = x + iy \quad ; \quad x, y \in \mathbb{R} \quad ,$$

$x$  et  $y$  étant les variables du système de coordonnées cartésiennes.

On a de plus dans (1.2.2)

$$(1.2.4) \quad \zeta = \beta + i\gamma \quad ; \quad \beta \in D_\beta \subset \mathbb{R} \quad , \quad \gamma \in D_\gamma \subset \mathbb{R} \quad ,$$

$\beta$  et  $\gamma$  étant les variables du système de coordonnées curvilignes.

En coordonnées cartésiennes, l'équation (1.2.1) s'écrit

$$(1.2.5) \quad \Delta_{x,y} \Psi_k + k^2 \Psi_k(x,y) = 0$$

où  $\Psi_k(x,y)$  désigne une fonction propre du laplacien associée à la valeur propre  $-k^2$ .

Donnons-nous maintenant un système de coordonnées curvilignes  $(\beta, \gamma)$  permettant la séparation des variables de l'équation (1.2.1). Ecrite dans ce système, cette équation prend la forme

$$(1.2.6) \quad \Delta_{\beta,\gamma} W_k = -k^2 W_k(\beta, \gamma)$$

où  $\Delta_{\beta,\gamma}$  est le laplacien transcrit dans le système de coordonnées curvilignes  $(\beta, \gamma)$  et où  $W_k(\beta, \gamma)$  est donné par

$$(1.2.7) \quad W_k(\beta, \gamma) = \Psi_k(x(\beta, \gamma), y(\beta, \gamma)) \quad .$$

On démontre (cf. [14]) qu'il existe, avec le laplacien, un deuxième opérateur  $L_S$  du second ordre, caractéristique du système de coordonnées curvilignes utilisé, invariant par rapport au groupe  $M(2)$  qui commute avec le laplacien. On a donc

$$(1.2.8) \quad L_S W_k = -\lambda W_k(\beta, \gamma) \quad .$$

Par combinaison appropriée de (1.2.6) et de (1.2.8), on obtient les deux équations

$$(1.2.9) \quad D_\beta W_k = -\lambda W_k(\beta, \gamma)$$

où  $D_\beta$  est un opérateur différentiel qui n'agit que sur  $\beta$  et

$$(1.2.10) \quad D_\gamma W_k = -\lambda W_k(\beta, \gamma)$$

où  $D_\gamma$  est un opérateur différentiel qui n'agit que sur  $\gamma$  .

Si on pose

$$(1.2.11) \quad W_k(\beta, \gamma) = u_k(\beta) v_k(\gamma)$$

il vient

$$(1.2.12) \quad D_\beta u_k = -\lambda u_k(\beta)$$

et

$$(1.2.13) \quad D_\gamma v_k = -\lambda v_k(\gamma)$$

On donne le nom de constante de séparation à la constante  $\lambda$ . Ces équations aux valeurs propres admettent des familles de solutions notées respectivement

$$(1.2.14) \quad u_k(\beta) = u_{k,\nu}(\beta) \quad ; \quad v_k(\gamma) = v_{k,\nu}(\gamma)$$

où l'indice  $\nu$  est fonction de  $\lambda$ . On doit préciser dans chaque cas la relation qui lie  $\nu$  et  $\lambda$ .

Selon les équations (1.2.12) et (1.2.13),  $u_{k,\nu}(\beta)$  et  $v_{k,\nu}(\gamma)$  sont fonctions propres des opérateurs  $D_\beta$  et  $D_\gamma$  respectivement, pour la même valeur de  $\lambda$ . Compte tenu de (1.2.11), les fonctions  $u_{k,\nu}(\beta)$  et  $v_{k,\nu}(\gamma)$  permettent d'écrire une solution aux variables séparées de (1.2.6) que nous notons

$$(1.2.15) \quad W_{k,\nu}(\beta, \gamma) = u_{k,\nu}(\beta) v_{k,\nu}(\gamma)$$

Par linéarité, l'équation (1.2.6) possède des solutions qui ne sont pas du type (1.2.15) et que l'on peut donner par

$$(1.2.16) \quad W_k(\beta, \gamma) = \sum_{\nu \in N} a_{k,\nu} u_{k,\nu}(\beta) v_{k,\nu}(\gamma)$$

où  $N$  est l'ensemble des valeurs accessibles à  $\nu$  dans le cas considéré (spectre de  $\nu$ ).

Lorsque les lignes de coordonnées ne sont pas laissées invariantes par des sous-groupes de  $K(2)$ , les opérateurs  $D_\beta$  et  $D_\gamma$ , apparus dans les équations (1.2.12) et (1.2.13), sont identiques à un changement de

variable du type  $\beta = \pm i\gamma$ . Il s'ensuit que  $u_{k,\nu}(\beta)$  et  $v_{k,\nu}(\gamma)$ , fonctions propres de  $\mathcal{D}_\beta$  et  $\mathcal{D}_\gamma$  resp., sont des fonctions spéciales de la même classe et que les solutions aux variables séparées (1.2.15) de (1.2.6) présentent, en  $\beta$  et en  $\gamma$ , la symétrie particulière dont ont parlé Macfadyen et Winternitz [2].

Considérons maintenant un déplacement du plan  $g \in M(2)$ . Cet élément dépend de trois paramètres  $\rho, \psi$  et  $\alpha$ .  $\rho$  et  $\psi$  sont resp. le module et l'angle polaire d'une translation,  $\alpha$  est l'angle d'une rotation. A ce déplacement est associé un changement de système de coordonnées  $\Phi_g: (\beta, \gamma) \mapsto (\beta_0, \gamma_0)$ . Si  $z = x+iy = f(\zeta)$  d'après (1.2.2), on a

$$(1.2.17) \quad f(\zeta) = \rho e^{i\psi} + e^{i\alpha} f(\zeta_0) \quad \text{où}$$

$$(1.2.18) \quad \zeta = \beta + i\gamma \quad ; \quad \zeta_0 = \beta_0 + i\gamma_0 \quad ; \quad \beta, \beta_0 \in \mathcal{D}_\beta \subset \mathbb{R} \quad ; \quad \gamma, \gamma_0 \in \mathcal{D}_\gamma \subset \mathbb{R}.$$

L'équation (1.2.1) s'écrit, dans les coordonnées  $(\beta_0, \gamma_0)$ ,

$$(1.2.19) \quad \Delta_{\beta_0, \gamma_0} W_k = -k^2 W_k(\beta_0, \gamma_0).$$

Soit une solution aux variables séparées de cette équation que nous notons  $W_{k, \nu_1}$ . Par invariance du laplacien, la fonction

$$(1.2.20) \quad W_k(\beta, \gamma) = W_{k, \nu_1}(\beta_0(\beta, \gamma), \gamma_0(\beta, \gamma))$$

est solution de (1.2.6).

Les représentations que nous allons considérer sont des sous-représentations de la représentation quasi-régulière  $w_k \mapsto w_k \circ \Phi_g$  obtenues par restriction à des sous-espaces de solutions aux variables séparées de (1.2.1).

Pour chaque système de coordonnées curvilignes qui permet la séparation des variables, on associe, à  $g \in M(2)$ , la transformation

$$(1.2.21) \quad u_{k, \nu_1}(\beta) v_{k, \nu_1}(\gamma) \mapsto u_{k, \nu_1}(\beta_0) v_{k, \nu_1}(\gamma_0).$$

En vertu de (1.2.20),  $u_{k, \nu_1}(\beta_0) v_{k, \nu_1}(\gamma_0)$  est solution de (1.2.6). Dans les cas où des théorèmes de développement s'appliquent, nous pouvons écrire

$$(1.2.22) \quad u_{k, \nu_1}(\beta_0) v_{k, \nu_1}(\gamma_0) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} A_{k, \nu}^{(\nu_1)}(\rho, \psi, \alpha) u_{k, \nu}(\beta) v_{k, \nu}(\gamma).$$

Comme on le voit, cette dernière expression est une formule d'addition.

## 2. Equation de Helmholtz et équations aux variables séparées

### 2.1 Coordonnées polaires

La transformation conforme qui donne les coordonnées polaires (cf. (1.2.2)) est donnée par

$$(2.1.1) \quad \bar{z} = e^{\zeta} \quad ; \quad z = x+iy, \quad \zeta = \ln r + i\varphi$$

ou

$$(2.1.2) \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

L'équation de Helmholtz prend alors la forme

$$(2.1.3) \quad \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] w_k = -k^2 w_k(r, \varphi)$$

Si on pose, pour une solution aux variables séparées

$$(2.1.4) \quad w_{k,\nu}(r, \varphi) = u_{k,\nu}(r) v_{k,\nu}(\varphi)$$

les variables de l'équation (2.1.3) se séparent et on obtient

$$(2.1.5) \quad \left[ -r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - r \frac{\partial}{\partial r} - k^2 r^2 \right] u_{k,\nu} = -\lambda u_{k,\nu}(r)$$

et

$$(2.1.6) \quad \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_{k,\nu} = -\lambda v_{k,\nu}(\varphi)$$

### 2.2 Coordonnées elliptiques

La transformation conforme qui donne les coordonnées elliptiques (cf. (1.2.2)) est donnée par

$$(2.2.1) \quad \bar{z} = \frac{1}{2} c e^{-\delta} e^{\zeta} + \frac{1}{2} c e^{\delta} e^{\zeta} \quad ; \quad z = x+iy, \quad \zeta = (s+\delta) + it, \quad c \in \mathbb{R}^* - \{0\}$$

ou

$$(2.2.2) \quad \begin{cases} x = c \operatorname{ch} s \operatorname{cost} \\ y = c \operatorname{sh} s \operatorname{sint} \end{cases}$$

L'équation de Helmholtz prend alors la forme

$$(2.2.3) \quad \frac{1}{\frac{1}{2}c^2(\operatorname{ch} 2s + \cos 2t)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] w_k = -k^2 w_k(s, t)$$

Si on pose, pour une solution aux variables séparées

$$(2.2.4) \quad W_{k,v}(s, t) = u_{k,v}(s) V_{k,v}(t)$$

les variables de l'équation (2.2.3) se séparent et on obtient

$$(2.2.5) \quad - \left[ \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{1}{2} c^2 k^2 \operatorname{ch} 2s \right] u_{k,v} = -\lambda u_{k,v}(s)$$

et

$$(2.2.6) \quad \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{2} c^2 k^2 \cos 2t \right] V_{k,v} = -\lambda V_{k,v}(t)$$

### 2.3 Coordonnées cartésiennes

La transformation conforme (cf. (1.2.2)) est ici l'identité. L'équation de Helmholtz a la forme

$$(2.3.1) \quad \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \Psi_k = -k^2 \Psi_k(x, y)$$

Si on pose, pour une solution aux variables séparées

$$(2.3.2) \quad \Psi_{k,v}(x, y) = u_{k,v}(x) V_{k,v}(y)$$

les variables de l'équation (2.3.1) se séparent et on obtient

$$(2.3.3) \quad \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \right] u_{k,v} = -\lambda u_{k,v}(x)$$

et

$$(2.3.4) \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} V_{k,v} = -\lambda V_{k,v}(y)$$

## 2.4 Coordonnées paraboliques

La transformation conforme qui donne les coordonnées paraboliques (cf. (1.2.2)) est donnée par

$$(2.4.1) \quad z = \frac{1}{2} \zeta^2 ; \quad z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta$$

ou

$$(2.4.2) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} (\xi^2 - \eta^2) \\ y = \xi\eta \end{cases}$$

L'équation de Helmholtz prend alors la forme

$$(2.4.3) \quad \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] W_k = -k^2 W_k(\xi, \eta)$$

Si on pose, pour une solution aux variables séparées

$$(2.4.4) \quad W_{k,\nu}(\xi, \eta) = u_{k,\nu}(\xi) v_{k,\nu}(\eta)$$

les variables de l'équation (2.4.3) se séparent et on obtient

$$(2.4.5) \quad \left[ -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - k^2 \xi^2 \right] u_{k,\nu} = -\lambda u_{k,\nu}(\xi)$$

et

$$(2.4.6) \quad \left[ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + k^2 \eta^2 \right] v_{k,\nu} = -\lambda v_{k,\nu}(\eta)$$

### 3. L'espace de représentation et ses éléments

Appelons  $\mathcal{H}_k$  l'ensemble des solutions de l'équation (1.2.1) pour une valeur fixée de  $k$ .

#### 3.1 Les éléments de $\mathcal{H}_k$ sont exprimés à l'aide des fonctions de Hankel

Toute notre discussion se développe pour  $k$  fixé. Posons donc  $k = 1$  et omettons l'indice  $k$ .

Les solutions de (2.1.5) et de (2.1.6) qui nous intéressent sont celles qui correspondent aux valeurs réelles positives de  $\lambda$ . Posons donc

$$(3.1.1) \quad \lambda = \nu^2, \quad \nu \in \mathbb{R}$$

Pour  $\nu$  fixé, (2.1.6) admet pour solutions linéairement indépendantes

$$(3.1.2) \quad V_\nu^\pm(\varphi) = e^{\pm i(\nu+n)\varphi}, \quad \nu \text{ non entier.}$$

L'équation (2.2.5) avec  $k = 1$  n'est autre que l'équation de Bessel. Pour  $\nu$  fixé, cette équation admet pour solutions linéairement indépendantes

$$(3.1.3) \quad U_\nu(r) = H_{\nu+n}^{(1,2)}(r)$$

où  $H_{\nu+n}^{(1)}$  désigne la première fonction de Hankel et  $H_{\nu+n}^{(2)}$  la deuxième.

Nous nous intéressons aux solutions aux variables séparées de l'équation (2.1.3) qui ont la propriété

$$(3.1.4) \quad w_\nu(r, \varphi + 2\pi) = e^{i2\pi\nu} w_\nu(r, \varphi)$$

D'après (3.1.2) et (3.1.3), cette condition est satisfaite si nous écrivons, compte tenu de (2.1.4)

$$(3.1.5) \quad w_{\nu+n}^{(j)}(r, \varphi) = H_{\nu+n}^{(1,2)}(r) e^{\pm i(\nu+n)\varphi}; \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad (1,+), (1,-), (2,+), (2,-).$$

Remarquons que les solutions (3.1.3) de (2.1.5) se distinguent par leurs comportements asymptotiques qui sont donnés par

$$(3.1.6) \quad H_\nu^{(1,2)}(r) \sim \left(\frac{2}{\pi r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\pm i\left(r - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}; \quad (1,+), (2,-).$$

Théorème de développement (cf. [4]) Soit  $w(r, \varphi)$  une solution holomorphe de (2.1.3) dans un domaine  $r \in D_r \subset \mathbb{C}, D_\varphi: C_1 < \text{Im} \varphi < C_2$ . On suppose que  $w(r, \varphi)$  a la propriété

$$(3.1.7) \quad w(r, \varphi + 2\pi) = e^{i2\pi\nu} w(r, \varphi), \quad \nu \in \mathbb{C}$$

Alors on a le développement en série

$$(3.1.8) \quad w(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_{\nu+n}(r) e^{i(\nu+n)\varphi}.$$

Puisque  $w(r, \varphi)$  est deux fois continûment différentiable en  $\varphi$ , la série (3.1.8) converge absolument et uniformément pour  $r \in D_r$  et  $C_1 < \text{Im} \varphi < C_2 : D_\varphi \ni \varphi$ . Elle est donc différentiable terme à terme par rapport à  $r$ , resp. à  $\varphi$ , dans toute partie compacte de  $D_r$ , resp. de  $D_\varphi$ , autant de fois qu'on veut. En vertu d'un théorème classique (cf. [4]),  $Z_{\nu+n}(r)$  est une fonction cylindrique d'indice  $\nu+n$  holomorphe dans  $D_r$ , c'est-à-dire une solution de (2.1.5).

Pour un exposé plus complet, cf. [4], [6], [7].

### 3.2 Les éléments de $\mathcal{Y}_k$ sont exprimés à l'aide de fonctions de Mathieu

L'équation (2.2.6) porte le nom d'équation de Mathieu et l'équation (2.2.5) celui d'équation de Mathieu modifiée. Si, dans (2.2.6), on remplace  $t$  par  $is$ , on obtient l'équation (2.2.5). C'est un des cas où la symétrie signalée par Macfadyen et Winternitz apparaît.

On peut remarquer que, dans (2.2.6),  $y'$  ne figure pas. On a donc

$$(3.2.1) \quad y \tilde{y}' - y' \tilde{y} = \text{const.}$$

où  $y$  et  $\tilde{y}$  sont deux solutions de (2.2.6). De plus, l'équation (2.2.6) est invariante par rapport à la substitution

$$(3.2.2) \quad t \rightarrow -t; \quad \dot{t} \rightarrow \dot{t} \pm \pi$$

Donc, si  $y(t; \lambda, h^2)$  est solution de (2.2.6),  $y(-t; \lambda, h^2)$  l'est aussi. On a posé dans (2.2.6)

$$(3.2.3) \quad 2h^2 = \frac{1}{2} c^2 k^2.$$

Soit maintenant deux solutions de (2.2.6)  $y_I(t; \lambda, h^2)$  et  $y_{II}(t; \lambda, h^2)$  telles que

$$(3.2.4) \quad \begin{cases} y_I(0) = 1 & y_I'(0) = 0 \\ y_{II}(0) = 0 & y_{II}'(0) = 1 \end{cases}$$

Les solutions  $y_I$  et  $y_{II}$  forment un système fondamental et, pour  $\lambda$  et  $h^2$  fixés, toute solution  $y$  de (2.2.6) peut s'écrire

$$(3.2.5) \quad y = A y_I + B y_{II}$$

Selon (3.2.1) et (3.2.4), on a de plus

$$(3.2.6) \quad y_I y_{II}' - y_I' y_{II} = 1$$

#### Exposant caractéristique et solution de Floquet

Puisque l'équation (2.2.6) comporte un coefficient périodique de période  $\pi$ , Floquet propose de rechercher une solution telle que

$$(3.2.7) \quad y(t+\pi) = \sigma y(t)$$

ou telle que

$$(3.2.8) \quad \begin{cases} y(\pi) = \sigma y(0) \\ y'(\pi) = \sigma y'(0) \end{cases}$$

La solution  $y$  peut être écrite sous la forme (3.2.5). Compte tenu des conditions (3.2.8), il vient, pour les coefficients  $A$  et  $B$

$$(3.2.9) \quad \begin{cases} A(y_I(\pi) - \sigma) + B y_{II}(\pi) = 0 \\ A y_I'(\pi) + B(y_{II}'(\pi) - \sigma) = 0 \end{cases}$$

Le système (3.2.9) est linéaire et homogène par rapport à  $A$  et  $B$ . Il possède une solution non triviale si et seulement si

$$(3.2.10) \quad \sigma^2 - 2 y_I(\pi) + 1 = 0$$

Si on écrit

$$(3.2.11) \quad \sigma = e^{i\pi\nu}$$

(3.2.10) devient

$$(3.2.12) \quad \cos \pi\nu = y_I(\pi; \lambda, h^2)$$

$\nu$ , solution de (3.2.12) pour  $\lambda$  et  $h^2$  fixés, porte le nom d'exposant caractéristique. On peut remarquer que si  $\nu$  est exposant caractéristique,  $\nu \pm n, n \in \mathbb{N}$ , est aussi exposant caractéristique. Donc pour  $\nu$  solution de (3.2.12),  $\lambda$  et  $h^2$  fixés, il existe une solution de (2.2.6) qui a la propriété

$$(3.2.13) \quad \gamma_\nu(t + \pi) = e^{i\pi\nu} \gamma_\nu(t)$$

On note

$$(3.2.14) \quad \gamma_\nu(t) = m e_\nu(t; \lambda, h^2)$$

$\gamma_\nu(t)$  ainsi défini est déterminé à une constante multiplicative près. En vertu de l'invariance de l'équation (2.2.6) par rapport au changement  $t \rightarrow -t$ , la fonction

$$(3.2.15) \quad \gamma_\nu(-t) = m e_\nu(-t; \lambda, h^2)$$

est aussi solution de cette équation. D'après (3.2.13),  $\gamma_\nu(-t)$  est linéairement indépendant de  $\gamma_\nu(t)$  si  $\nu$  n'est pas entier. Notre étude se limite à des solutions de (2.2.6) qui peuvent s'écrire sous forme de combinaisons linéaires de solutions de Floquet avec  $\nu$  réel non-entier. (Solutions dites stables car elles restent bornées en module pour toute valeur de  $t$ ). Le facteur multiplicatif laissé libre est déterminé par la condition de normalisation

$$(3.2.16) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi m e_\nu(t; \lambda, h^2) m e_\nu(-t; \lambda, h^2) dt = 1.$$

#### Solutions de l'équation modifiée

On obtient une solution de (2.2.5) en remplaçant  $t$  par  $is$  dans (3.2.14) puisqu'on passe de l'équation (2.2.6) à l'équation (2.2.5) en opérant ce même changement de variable. On préfère cependant avoir des solutions de (2.2.5) qui aient un comportement asymptotique donné à l'avance. On peut remarquer que pour  $s$  devenant arbitrairement grand, une branche d'hyperbole de coordonnées tend vers un rayon polaire. Cela incite à exiger des solutions de (2.2.5) d'avoir un comportement asymptotique identique au comportement asymptotique d'une fonction de Hankel, de Bessel ou de Neumann (ces deux dernières pouvant d'ailleurs être écrites sous forme de combinaisons linéaires des deux premières).

Désignons une de ces solutions de (2.2.3) par  $M_\nu^{(j)}(s; h)$  où  $j$  prend les valeurs 1, 2, 3, 4 selon que le comportement asymptotique de la solution considérée est identique au comportement asymptotique d'une fonction de Bessel, d'une fonction de Neumann, d'une première ou d'une deuxième fonction de Hankel respectivement. Ces solutions sont définies par

$$(3.2.17) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Z_{\nu+2\ell}^{(j)}(kr) e^{-i(\nu+2\ell)\varphi} me_\nu(t; h^2) dt &= \\ &= (-1)^\ell C_{2\ell}^\nu(h^2) M_\nu^{(j)}(s; h) \\ (j=1, 2, 3, 4; \ell=0, \pm 1, \pm 2, \dots; s > 0) \end{aligned} \right.$$

où

$$(3.2.18) \quad C_{2\ell}^\nu(h^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi me_\nu(t; h^2) e^{-i(\nu+2\ell)t} dt.$$

$M_\nu^{(j)}(s; h)$  a pour comportement asymptotique

$$(3.2.19) \quad M_\nu^{(j)}(s; h) \sim Z_\nu^{(j)}(2hchs)$$

où  $Z_\nu^{(j)}(2hchs)$  désigne une des fonctions cylindriques mentionnées ci-dessus selon la valeur prise par  $j$ . (Cf. [8]).

Une solution aux variables séparées de (2.2.3) s'écrit donc, compte tenu de (2.2.4)

$$(3.2.20) \quad W_{\nu+n}^{(j)}(s; t) = M_{\nu+n}(s; h) me_{\nu+n}(t; h^2).$$

Remarquons qu'en vertu de (3.2.13), les solutions aux variables séparées de ((2.2.3) du type (3.2.20) ont la propriété

$$(3.2.21) \quad M_{\nu+n}(s; h) me_{\nu+n}(t+\pi; h^2) = e^{i\pi\nu} M_{\nu+n}(s; h) me_{\nu+n}(t; h^2).$$

#### Théorème de développement

Toute fonction  $f(t)$  analytique régulière dans une bande parallèle à l'axe réel qui a la propriété

$$(3.2.22) \quad f(t+\pi) = e^{i\pi\nu} f(t)$$

où  $\nu$  est quelconque, est développable en série univoque

$$(3.2.23) \quad f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_j me_{\nu+2j}(t; h^2)$$

qui converge absolument et uniformément dans tout compact. On a pour les coefficients

$$(3.2.24) \quad f_j = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0 + \pi} f(t) m e_{\nu+2j}(-t; h^2) dt$$

La valeur de  $h^2$  qui figure dans (3.2.23) correspond à la valeur de  $\nu$  donnée selon (3.2.12). (Cf [8]).

3.3 Les éléments de  $\mathcal{H}_k$  sont exprimés à l'aide de fonctions exponentielles

Les solutions de (2.3.3) et de (2.3.4) qui nous intéressent sont celles qui correspondent aux valeurs réelles positives de  $\lambda$ . Posons

$$(3.3.1) \quad \lambda = \nu^2 = k^2 \sin^2 \delta, \quad 0 \leq \delta < 2\pi$$

Les valeurs des constantes  $k$  et  $\delta$  étant fixées, l'équation (2.3.4) a les deux solutions linéairement indépendantes

$$(3.3.2) \quad v_{k,\delta}^{\pm}(y) = e^{\pm iky \sin \delta}$$

et l'équations (2.3.3)

$$(3.3.3) \quad u_{k,\delta}^{\pm}(x) = e^{\pm ikx \cos \delta}$$

Les solutions aux variables séparées de (2.3.1) s'écrivent donc, compte tenu de (2.3.2)

$$(3.3.4) \quad \Psi_{k,\delta}^{(j)}(x,y) = e^{\pm ikx \cos \delta} \cdot e^{\pm iky \sin \delta}, \quad j=1,2,3,4: (+,+), (-,+), (+,-), (-,-).$$

Par linéarité, toute combinaison linéaire

$$(3.3.5) \quad \Psi_k(x,y) = \sum_{j=1}^n a_j e^{ikx \cos \delta_j} \cdot e^{iky \sin \delta_j}$$

de solutions du type (3.3.4) est encore solution de (2.3.1).

3.4 Les éléments de  $\mathcal{H}_k$  sont exprimés à l'aide des fonctions de Weber

Si, dans (2.4.6), on remplace  $\eta$  par  $i\xi$ , on obtient l'équation (2.4.5). C'est encore un cas où la symétrie signalée par Macfadyen et Winternitz apparaît. Posons

$$(3.4.1) \quad \lambda = -ka, \quad a = -i(2\nu+1), \quad a \in \mathbb{R}$$

On a donc

$$(3.4.2) \quad \nu = -\frac{1}{2} + i \frac{a}{2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Dans (2.4.5), faisons le changement de variable

$$(3.4.3) \quad t = \sqrt{2ik} \xi, \quad f_{k,\nu}(t) = u_{k,\nu}(\xi(t))$$

et dans l'équation (2.4.6)

$$(3.4.4) \quad \tau = \sqrt{2ik} \eta, \quad g_{k,\nu}(\tau) = v_{k,\nu}(\eta(\tau)).$$

Les équations (2.4.5) et (2.4.6) prennent respectivement les formes

$$(3.4.5) : \quad \frac{d^2 f_{k,\nu}}{dt^2} + \left(-\nu - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} t^2\right) f_{k,\nu}(t) = 0$$

et

$$(3.4.6) \quad \frac{d^2 g_{k,\nu}}{d\tau^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \tau^2\right) g_{k,\nu}(\tau) = 0.$$

L'équation (3.4.6) porte le nom d'équation de Weber. (3.4.5) lui est identique à ceci près que  $\nu$  y est remplacé par  $-\nu-1$ .

Parmi les solutions de (3.4.6), il en existe une qui a pour comportement asymptotique

$$(3.4.7) \quad g_{k,\nu}(\tau) = D_\nu(\tau) \sim \tau^\nu e^{-\frac{1}{4}\tau^2}.$$

Cette fonction porte le nom de fonction de Weber d'indice  $\nu$ . Selon (3.4.7), elle n'est déterminée qu'à un facteur près. La norme habituelle est fixée par

$$(3.4.8) \quad D_\nu(0) = \frac{\sqrt{\pi} \cdot 2^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\right)}$$

(cf. [10]).

L'équation (3.4.6) reste invariante si on fait le changement de variable  $\tau \rightarrow -\tau$ . Donc si  $D_\nu(\tau)$  est solution,  $D_\nu(-\tau)$  l'est aussi. De plus, ces deux solutions sont linéairement indépendantes si  $\nu$  n'est pas entier, ce qui est le cas pour nous en vertu de (3.4.2) (cf. (3.4.7)).

D'après l'identité remarquée entre les équations (3.4.5) et (3.4.6), les solutions de (3.4.5) peuvent être exprimées à l'aide de fonctions de Weber d'indice  $-\nu-1$ .

Toute notre discussion se déroule pour  $k$  fixé. Posons donc, pour rejoindre l'écriture habituelle

$$(3.4.9) \quad k = \frac{1}{2}$$

et omettons l'indice  $k$ . Une solution aux variables séparées de (2.4.3) s'écrit donc, d'après (2.4.4) et compte tenu de (3.4.3) et de (3.4.4)

$$(3.4.10) \quad W_{\nu}^{(j)}(\xi, \eta) = D_{-\nu-1}(\pm\sqrt{i}\xi) D_{\nu}(\pm\sqrt{i}\eta)$$

$j = 1, 2, 3, 4 : (+, +), (-, +), (+, -), (-, -)$

Théorème de Cherry (cf. [11], [12])

Si  $f(x)$  est à variation bornée dans un intervalle fini quelconque de la variable réelle  $x$  et est absolument sommable dans  $(-\infty, +\infty)$ , alors

$$(3.4.11) \quad -4\pi i f(x) = \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}(\nu+\frac{1}{2})\pi i}}{\sin \nu\pi} d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \{D_{\nu}(\sqrt{i}x) D_{-\nu-1}(\sqrt{-i}t) + D_{\nu}(-\sqrt{i}x) D_{-\nu-1}(-\sqrt{-i}t)\} dt.$$

Cette formule est analogue à la formule d'inversion de Fourier.

L'intégrale qui figure dans (3.4.11) (intégrale intérieure) converge absolument si la fonction  $f(t)$  décroît en module plus vite que  $x^{-\frac{1}{2}}$  lorsque  $|x| \rightarrow \infty$ . (cf. [11], [12]).

4. Fonctions spéciales et représentations du groupe des déplacements du plan

Effectuons maintenant le programme exposé au § 1.2 dans les quatre cas explicites que nous avons à considérer.

4.1 Représentation du groupe des déplacements du plan et fonctions de Hankel

Soit  $g$  un déplacement du plan. On peut identifier  $g$  à un changement de coordonnées polaires  $(r, \varphi) \mapsto (r_0, \varphi_0)$  donné par

$$(4.1.1) \quad e^{\mathfrak{z}} = \rho e^{i\psi} + e^{i\alpha} e^{\mathfrak{z}_0}, \quad \mathfrak{z}_0 = \ln r_0 + i\varphi_0$$

On obtient une représentation du groupe des déplacements du plan dans l'ensemble des solutions de

$$(4.1.2) \quad \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] w(r, \varphi) = -w(r, \varphi)$$

qui ont la propriété

$$(4.1.3) \quad W_{\nu}^{(j)}(r, \varphi + 2\pi) = e^{i2\pi\nu} W_{\nu}^{(j)}(r, \varphi)$$

(cf. § 3.1) en associant à  $g$  la transformation  $T(g)$  définie par

$$(4.1.4) \quad T(g): H_{\nu+n}^{(1,2)}(r) e^{\pm(\nu+n)\varphi} \mapsto H_{\nu+n}^{(1,2)}(r_0) e^{\pm(\nu+n)\varphi_0}$$

En vertu de ce qui a été dit au § 1.2, la fonction  $H_{\nu+n}^{(1,2)}(r_0) e^{\pm(\nu+n)\varphi_0}$  est solution de (4.1.2) et elle possède la propriété (4.1.3). Selon le théorème de développement du § 3.1, on peut donc écrire

$$(4.1.5) \quad H_{\nu+n}^{(1,2)}(r_0) e^{i(\nu+n)\varphi_0} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Z_{\nu+m}^{(1,2)(n)}(r) e^{i(\nu+m)\varphi}$$

Puisqu'on a

$$(4.1.6) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(\nu+n)\varphi} e^{-i(\nu+m)\varphi} d\varphi = \delta_{mn},$$

on peut écrire pour les coefficients

$$(4.1.7) \quad Z_{\nu+m}^{(1,2)(n)}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_{\nu+m}^{(1,2)}(r_0) e^{+i(\nu+n)\varphi_0} \cdot e^{-i(\nu+m)\varphi} d\varphi.$$

Compte tenu de (4.1.1) et du comportement asymptotique des fonctions de Hankel (cf. (3.1.6)), il vient, après quelques calculs (cf. [4])

$$(4.1.8) \quad H_{\nu+n}^{(1,2)}(r_0) e^{\pm i(\nu+n)\varphi_0} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} t_{mn}(\rho, \psi, \alpha) H_{\nu+m}^{(1,2)}(r) e^{\pm i(\nu+m)\varphi}$$

où

$$(4.1.9) \quad t_{mn}(\rho, \psi, \alpha) = (-1)^{(n-m)} e^{i[(\nu+n)\alpha - (m-n)\psi]} J_{n-m}(\rho).$$

On réobtient ainsi une formule d'addition classique.

#### 4.2 Représentation du groupe des déplacements du plan et fonctions de Mathieu

Identifions le déplacement du plan  $g$  à un changement de coordonnées elliptiques  $(s, t; c) \mapsto (s, t; c_0)$ , la fonction  $c(P)$  ( $P$ , point du plan) étant donnée une fois pour toutes. Ce changement peut être donné par

$$(4.2.1) \quad c \operatorname{ch}(s+it) = \rho e^{i\psi} + c_0 e^{i\alpha} \operatorname{ch}(s_0+it_0).$$

On obtient une représentation du groupe des déplacements du plan dans l'ensemble des solutions de

$$(4.2.2) \quad \frac{1}{\frac{1}{2}c^2 k^2 (\operatorname{ch} 2s - \operatorname{cos} 2t)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] W_k(s, t) = -k^2 W_k(s, t)$$

qui ont la propriété

$$(4.2.3) \quad W_{\nu}^{(j)}(s, t+2\pi) = e^{i2\pi\nu} W_{\nu}^{(j)}(s, t)$$

en associant à  $g$  la transformation  $T(g)$  définie par

$$(4.2.4) \quad M_{\nu+n}^{(j)}(s; h) \operatorname{me}_{\nu+n}(t; h^2) \mapsto M_{\nu+n}^{(j)}(s_0; h_0) \operatorname{me}_{\nu+n}(t_0; h_0^2).$$

En vertu de ce qui a été dit au § 1.2, la fonction  $M_{\nu+n}^{(j)}(s_0; h_0) \operatorname{me}_{\nu+n}(t_0; h_0^2)$  est solution de (4.2.2) et possède la propriété (4.2.3). Selon le théorème de développement du § 3.2, on peut donc écrire

$$(4.2.5) \quad M_{\nu+n}^{(j)}(s_0; h_0) \operatorname{me}_{\nu+n}(t_0; h_0^2) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{\nu+n}^{(j)(n)}(s; h) \operatorname{me}_{\nu+m}(t; h^2).$$

Puisqu'on a

$$(4.2.6) \quad \frac{1}{2i\bar{h}} \int_0^{2i\bar{h}} \operatorname{me}_{\nu+n}(t; h^2) \operatorname{me}_{\nu+m}(-t; h^2) dt = \delta_{mn},$$

on peut écrire pour les coefficients

$$(4.2.7) \quad C_{\nu+m}^{(j)(\alpha)}(s; h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_{\nu+n}^{(j)}(s_0; h_0) m e_{\nu+n}(t_0; h_0^2) m e_{\nu+m}(-t; h^2) dt.$$

Compte tenu de (4.2.1) et du comportement asymptotiques des fonctions  $M_{\nu+n}^{(j)}$  (cf. § 3.2), il vient, après quelques calculs (cf. [8])

$$(4.2.8) \quad M_{\nu+m}^{(j)}(s_0; h_0) m e_{\nu+n}(t_0; h_0^2) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} t_{mn}(\rho, \psi, \alpha) M_{\nu+m}^{(j)}(s; h) m e_{\nu+m}(t; h^2)$$

où

$$(4.2.9) \quad t_{mn}(\rho, \psi, \alpha) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} e^{-i(\nu+n+2p)\alpha} \cdot e^{i(n-m+2(p-q))\psi} \cdot (-1)^{[(n-m)+(p-q)]} J_{[(n-m)+2(p-q)]}^{(k\rho)}$$

On réobtient aussi une formule d'addition classique.

### 4.3 Représentation du groupe des déplacements du plan et fonctions exponentielles

Identifions le déplacement  $g$  du plan à un changement de coordonnées cartésiennes  $(x, y) \mapsto (x_0, y_0)$  donné par

$$(4.3.1) \quad z = \rho e^{i\psi} + e^{i\alpha} z_0$$

On obtient une représentation du groupe des déplacements du plan dans l'ensemble des solutions de

$$(4.3.2) \quad \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \Psi_k = -k^2 \Psi_k(x, y).$$

construites selon

$$(4.3.3) \quad \Psi_k(x, y) = \sum_{j=1}^n a_j e^{ikx \cos \delta_j} \cdot e^{iky \sin \delta_j}$$

en associant à  $g$  la transformation  $T(g)$  définie par

$$(4.3.4) \quad T(g) : e^{ikx \cos \delta} \cdot e^{iky \sin \delta} \mapsto e^{+ikx_0 \cos \delta} \cdot e^{+iky_0 \sin \delta}$$

En vertu de ce qui a été dit au § 1.2, la fonction  $e^{ikx_0 \cos \delta} e^{iky_0 \sin \delta}$  est solution de (4.3.2) qui, compte tenu de (4.3.1), peut s'écrire

$$(4.3.5) \quad e^{ikx_0 \cos \delta} e^{iky_0 \sin \delta} = e^{-ik\rho \cos(\psi - \alpha - \delta)} e^{ikx_0 \cos(\alpha + \delta)} e^{iky_0 \sin(\alpha + \delta)}$$

(4.3.5) est une expression de la forme (4.3.3) réduite à un seul terme. C'est de plus l'expression qui, ici, joue le rôle de formule d'addition.

#### 4.4 Représentation du groupe des déplacements du plan et fonctions de Weber

Identifions enfin le déplacement  $g$  du plan à un changement de coordonnées paraboliques donné par

$$(4.4.1) \quad \frac{1}{2} \zeta^2 = \rho e^{i\psi} + e^{i\alpha} \cdot \frac{1}{2} \zeta_0^2, \quad (\zeta, \eta) \mapsto (\zeta_0, \eta_0).$$

On obtient une représentation du groupe des déplacements du plan en associant à  $g$  la transformation  $T(g)$  définie sur les sur les fonctions

$$(4.4.2) \quad W_\nu^{(j)}(\zeta, \eta) = D_{-\nu-1}(\pm\sqrt{i}\zeta) D_\nu(\pm\sqrt{i}\eta)$$

solutions de

$$(4.4.3) \quad \frac{1}{\zeta^2 + \eta^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] W_k(\zeta, \eta) = -k^2 W_k(\zeta, \eta).$$

par

$$(4.4.4) \quad T(g) : D_{-\nu-1}(\pm\sqrt{i}\zeta) D_\nu(\pm\sqrt{i}\eta) \mapsto D_{-\nu-1}(\pm\sqrt{i}\zeta_0) D_\nu(\pm\sqrt{i}\eta_0).$$

La formule de Cherry (3.4.11) permet d'écrire

$$(4.4.5) \quad D_{-\nu-1}(\pm\sqrt{i}\zeta_0) D_\nu(\pm\sqrt{i}\eta_0) = \frac{1}{4\pi} i \int_{-\frac{\pi}{2}-i\infty}^{-\frac{\pi}{2}+i\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}(\nu+\frac{1}{2})\pi i}}{\sin \nu' \pi} \left( C_I^{(j)(\nu)}(\nu') D_{\nu'}(\sqrt{i}\eta) + C_{II}^{(j)(\nu)}(\nu') D_{\nu'}(-\sqrt{i}\eta) \right) d\nu'$$

où

$$(4.4.6) \quad C_I^{(j)(\nu)}(\nu') = \int_{-\infty}^{+\infty} D_{-\nu-1}(\pm\sqrt{i}\zeta_0) D_\nu(\pm\sqrt{i}\eta_0) D_{-\nu'-1}(\mp\sqrt{i}\eta) d\eta$$

et

$$(4.4.7) \quad C_{II}^{(j)(\nu)}(\nu') = \int_{-\infty}^{+\infty} D_{-\nu-1}(\pm\sqrt{i}\zeta_0) D_\nu(\pm\sqrt{i}\eta_0) D_{-\nu'-1}(\sqrt{i}\eta) d\eta.$$

La condition de convergence des intégrales (4.4.6) et (4.4.7) (cf. § 3.4) n'est pas satisfaite. En effet, en module, le comportement asymptotique (3.4.7) décroît comme  $|x|^{-1/2}$  pour  $|x| \rightarrow \infty$ . Cependant, Cherry (cf. [12]) propose une méthode de prolongement analytique qui permet d'assurer la convergence de ces intégrales pour autant que  $\alpha$ , angle de rotation du déplacement  $g$ , soit différent de zéro ou de  $\pi$ .

## 5. Conclusion

Au gré de la méthode que nous avons présentée au § 1.2, nous avons fait apparaître quatre classes de fonctions spéciales en liaison avec le groupe des déplacements du plan. Ces quatre classes sont les fonctions de Hankel, les fonctions de Mathieu, les fonctions exponentielles et les fonctions de Weber. De plus, dans les trois cas, nous avons pu reconstruire des formules d'addition classiques à l'aide d'une représentation du groupe des déplacements du plan. Dans le quatrième cas, la démarche reste possible grâce à la formule de Cherry [12].

## 6. Bibliographie

- [1] N. J. Vilenkin, Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes (Nauka 1965, Dunod 1969)
- [2] N. W. Macfarlayen et P. Winternitz, Crossing Symmetric expansions of Physical Scattering Amplitudes; The  $O(2,1)$  Group and Lamé Functions (J. Math. Phys. 12, 2, 281, 1971)
- [3] P. M. Morse & H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics (Mc Graw-Hill 1953)
- [4] F. W. Schäfke, Einführung in die Theorie der speziellen Funktionen der mathematischen Physik (Springer 1963)
- [5] R. Campbell, Théorie générale de l'équation de Mathieu et de quelques autres équations différentielles de la mécanique (Masson 1955)

- [6] E. Whittaker & G. N. Watson, A Course of Modern Analysis  
(Cambridge University Press, 1940)
- [7] G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions  
(Cambridge University Press, 1952)
- [8] J. Meixner & F. W. Schäfke, Mathieusche Funktionen und Sphäroid-  
funktionen (Springer, 1954)
- [9] F. G. Tricomi, Funzioni ipergeometriche confluenti  
(Monogr. matem. C. N. R. No 1, Roma, Cremonese, 1954)
- [10] F. G. Tricomi, Fonctions hypergéométriques confluentes  
(Mémorial des sciences math. No 140, Gauthier-Villars,  
1960)
- [11] "Bateman Project", Erdélyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi,  
Higher transcendental Functions  
(Mc Graw-Hill, 1955)
- [12] T. M. Cherry, Expansions in Terms of Parabolic Cylinder Functions  
(Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), 8, 50-65, 1949)
- [13] P. Winternitz & I. Fris, Invariant Expansions of relativistic Amplitudes  
and Subgroups of the proper Lorentz Group  
(J. Nucl. Phys. (USSR) 1, 889-901, 1965)
- [14] H. Besson, Sur les fonctions spéciales qui apparaissent dans les  
représentations du groupe des déplacements du plan  
(C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, p. 102-104, 1971)

# IMPRIMATUR POUR LA THÈSE

Sur les fonctions spéciales qui apparaissent  
dans les représentations du groupe des  
déplacements du plan  
de M. Henri Besson, physicien diplômé

---

## UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

FACULTÉ DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel,  
sur le rapport de Messieurs les professeurs

W. Sörensen, R. Bader et P. Huguenin

autorise l'impression de la présente thèse sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont contenues.

Neuchâtel, le 14 décembre 1973

Le doyen :

  
A. Jacot-Guillarmod