Publié dans Travaux de logique 11, 57-89, 1997,
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

LOGIQUE MULTIVALENTE

Marek BLASZCZYK

Jan Lukasiewicz

Jan Lukasiewicz[1] naît le 21 décembre 1878 à Lwów[2] et y demeure jusqu'en 1915. Passées les années de gymnase, il entre en 1897 à l'Université de Jan Kazimierz où il fait des études d'histoire de la philosophie sous la direction de Kazimierz Twardowski (disciple de Brentano). Devenu docteur (1902), il passe trois ans dans l'enseignement privé tout en occupant les fonctions de bibliothécaire adjoint à l'Université. En 1905, ayant reçu une bourse du gouvernement autonome de Galicie, il complète sa formation philosophique à Berlin, puis à Louvain, où il assiste au cours du futur cardinal Mercier. Nommé privatdozent à Lwów (automne 1906) il assiste au séminaire de Meinong, à Graz. Il reçoit en 1911 le titre de professeur extraordinaire de philosophie à l'Université de Lwów, où il enseigne jusqu'en 1915.

En 1915, il est invité à donner à Varsovie une série de conférences à l'occasion de la réouverture de l'Université. En 1917, il est élu pro-recteur de l'université, après s'être occupé du département de l'enseignement supérieur au ministère polonais de l'éducation publique, comme ministre dans le cabinet Paderewski (après la proclamation de l'indépendance polonaise), il est nommé deux fois recteur en 1922-1923 et en 1931-1932. En 1923, il reçoit le titre de grand commandeur de l'ordre polonais *Polonia Restituta*, et celui de grand commandeur de l'ordre

1 La bibliographie d'après l'article de B. Soboci «In memoriam J. Lukasiewicz», *Philosophical Studies*, Maymooth, XII 1956, T. VI.

2 Lwów (Leopolis, Lemberg) la capitale de la province Galicie, alors sous la domination autrichienne, demeurait profondément polonaise, surtout dans son université. La langue maternelle de J. Lukasiewicz est le polonais

hongrois du mérite. En 1926, il abandonne la philosophie pour la logique mathématique. Il se consacre désormais à celle-ci d'une façon exclusive, et fonde avec Stanislaw Lesniewski un centre de recherches logiques qui devient l'«École de Varsovie». En 1932, on lui donne le titre inhabituel de «professeur ordinaire et honoraire». En 1935, la ville de Varsovie lui offre un prix pour son oeuvre scientifique. En 1937, il entre à l'Académie polonaise des sciences et des arts de Cracovie; il fait également partie des Sociétés des arts et des sciences de Lwów et de Varsovie. En 1938, il reçoit le titre de docteur *honoris causa* de l'Université de Munster («distinction d'ordre purement scientifique et sans arrière-plan politique»). La guerre interrompt ses travaux jusqu'en 1946. Le 17 juillet 1944, il quitte Varsovie avec l'espoir de gagner la Suisse, mais il est bloqué en Allemagne, où il vit dans la clandestinité jusqu'en 1945, date à laquelle il gagne Bruxelles, il accepte, en 1946, l'offre du gouvernement irlandais qui accueille un certain nombre de savants polonais. Dans la dernière période de sa vie (1946-1956), il vit hors de Pologne. En 1953, il reçoit un prix d'une fondation philosophique anglaise pour l'avancement qu'il a apporté à la logique philosophique, puis, en 1955, Trinity College (Dublin) lui confère le titre de docteur *honoris causa*. Lukasiewicz meurt le 13 février 1956 à Dublin.

L'oeuvre de Jan Lukasiewicz

L'oeuvre de Lukasiewicz, comme sa vie, peut être «partagée» en trois parties[3]:

1. Philosophique (Lwów–Warszawa) jusqu'à 1920.
2. Logique en Pologne (de publication de la logique trivalente jusqu'à la guerre).
3. Logique à Dublin (1946-1956).

Dans la première période, jusqu'en 1920, les publications de Lukasiewicz sont consacrées aux problèmes de la philosophie et à l'histoire de la philosophie. A la suite de Twardowski, il pense

3 Cette classification est subjective.

à la philosophie «d'un point de vue logique», cela demeura pendant toute sa vie. Autrement dit, il s'agissait d'appliquer à ces problèmes la clarté, la rigueur et la précision de l'analyse logique. Au cours de cette période, Lukasiewicz met au clair sa conception de la méthode philosophique adéquate, qu'il appelle «scientifique». Il l'applique à trois sujets:

- la notion de cause (Analyse et construction du concept de cause 1906),
- le principe de contradiction (Sur le principe de contradiction dans l'oeuvre d'Aristote 1910),
- l'idée de probabilité (Sur les fondements logiques du calcul des probabilités 1913).

Mais ces trois sujets n'en font qu'un dans la pensée de Lukasiewicz et sont tous organisés autour d'une idée unique. Cette idée n'appartient ni à la logique, ni à la méthodologie, mais bien à la métaphysique et, plus précisément, à une métaphysique que l'on pourrait appeler «existentielle» puisqu'elle concerne la liberté de l'homme dans le monde. Cet article écrit en 1927 et publié pour la première fois en 1961 sous le titre *Sur le déterminisme* dans ses Oeuvres choisies (direction de Jerzy Slupecki *Z zagadnien Logiki i Filozofii* PWN, Warszawa 1961; traduction anglaise dans [10]). Durant cette période, Lukasiewicz publie aussi un certain nombre d'articles consacrés à l'histoire de la logique et surtout à la logique d'Aristote ainsi qu'à la logique stoïcienne.

La deuxième période est marquée par l'invention, ou plutôt la découverte, de la logique multivalente. Cette logique est une formalisation de ses travaux précédents. Les chefs-d'oeuvre de cette période sont: *Sur la logique trivalente* (1920), *Untersuchungen Über den Aussagenkalkül* (avec Tarski en 1930), *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls* (1930). Cette période apporte aussi des travaux sur l'histoire de la logique; deux publications sur la logique mono-axiomatique (*Remarques sur l'axiome de Nicod*, 1931 et *Der Äqiuvalenzkalkül*, 1939) sont particulièrement intéressantes. C'est à ce moment-là que Lukasiewicz axiomatise la syllogistique aristotélicienne, ses réflexions aboutissent à la rédaction d'un livre qui paraît en 1951 sous le titre *Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic* (traduit en français en 1972 sous le titre: *La syllogistique d'Aristote dans la perspective de la logique formelle moderne*).

La dernière période, à Dublin, apporte deux importants systèmes de logique modale (quadrivalente): A system of modal logic I-II (1953) et de logique intuitionniste: On the intuitionistic theory of deduction (1952).

Les travaux, que je présente dans cette section, ont été choisis de manière totalement subjective. J'ai choisi de mettre en lumière les questions les plus importantes, celles qui mettent en évidence l'oeuvre du maître dans tous les aspects de sa recherche. On trouvera en annexe une bibliographie de Lukasiewicz.

Notations de Lukasiewicz

Jan Lukasiewicz crée une notation simplifiant l'écriture des propositions symboliques. Cette dernière n'utilise pas de parenthèses et change la place «traditionnelle» du foncteur.

– Les énoncés: p, q, r...

– Les connecteurs:

négation (non)	N
conjonction (et)	K
disjonction (ou inclusif)	A
implication matérielle (si ... alors)	C
biconditionnelle (si et seulement si)	E

Règle générale: tous les connecteurs (foncteurs) sont placés devant les opérandes ou l'opérande.

Quelques exemples:

$\neg p$	non p	Np
$p \wedge q$	p et q	Kpq
$p \vee q$	p ou q	Apq
$p \rightarrow q$	si p alors q	Cpq

$p \equiv q$	p si et seulement si	Epq
$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$	CKCpqpq	
$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$	CKCpqNqNp	
$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$	ENApqKNpNq	

Exemple de preuve:

La preuve du théorème d'identité «si p alors p» (Bochenski «Formale Logik» [1956])

Les axiomes:

1. CCpqCCqrCpr
2. CCNppp
3. CpCNpq

La preuve: Voyons maintenant comment il est possible de dériver à partir des axiomes, et à l'aide des règles d'inférence, de nouvelles thèses. Nous allons déduire des axiomes 1–3 la loi d'identité Cpp. Cette déduction requiert deux applications de la règle de substitution et deux autres de la règle de détachement. Elle se fait de la façon suivante:

1. q/CNpq × C3–4

4. CCCNpqrCpr

4. q/p, r/p × C2–5

5. Cpp.

La première ligne s'appelle «ligne de dérivation». Elle est composée de deux parties que sépare le signe ×. La première partie, 1. q/CNpq signifie qu'il faut substituer CNpq à q dans (1.). Pour abréger la démonstration, nous ne mentionnons pas la thèse qui résulte de cette substitution. Elle aurait la forme suivante:

1a. CCpCNpqCCCNpqrCpr

Quant à la seconde partie, C3–4, elle indique comment est construite cette thèse que nous avons omise, et montre clairement qu'il est permis de lui appliquer la règle de détachement: la thèse (1a.) commence par C; viennent ensuite les axiomes (3.) comme antécédent, et (4.) comme conséquent. Nous pouvons donc détacher (4.) à titre de thèse nouvelle. La ligne de dérivation qui se trouve avant (5.) a une explication semblable à celle de (1.). La barre oblique (/) est le signe de la substitution et le tiret (–) le signe indiquant le détachement.

Logiques multivalentes

Les systèmes de logique propositionnelle peuvent être définis de plusieurs façons. Pour rendre les choses plus «claires», je définis ci-dessous les système proposés par Lukasiewicz en 1929 dans ses *Eléments de logique mathématique* [4].

Système $\mathfrak{L}_2$ ou C–N

Le calcul propositionnel est un système déductif. Dans chaque système déductif il y a un certain nombre de termes indéfinis dits *termes primitifs* de la théorie. La signification de ces termes est issue de leurs insertions dans les axiomes. Les propositions, qu'on appelle les *axiomes* de la théorie, sont reconnues sans preuve, mais elles doivent être évidentes par elles-mêmes. Toutes les propositions acceptées comme axiomes dans un système peuvent être des thèses et devenir prouvables dans d'autres systèmes. Le système présenté ici ne contient pas que des termes primitifs mais aussi des termes définis. Dans les définitions, le symbole «=» signifie «est» et la définition a la forme suivante *definiendum* = *definiens*. Chaque côté du signe «=», c'est-à-dire le *definiendum* et le *definiens*, a exactement la même signification et peut être remplacé par l'autre sans aucune limitation. Les définitions doivent obéir à toutes les règles de construction de la définition explicite correcte. D'après Lukasiewicz, les définitions ne peuvent pas jouer de rôle créatif dans le système. Elles servent à abréger certaines expressions appartenant au système ou, par l'introduction d'un terme nouveau, elles peuvent contribuer à une nouvelle intuition dans la théorie.

Dans le système présenté il y a trois règles: une *règle de remplacement* sous entendue, signifiant simplement que chaque forme de *definiendum* peut être remplacée par son *definiens* et vice-versa, deux règles d'inférence: *règle de substitution* et *règle de détachement*. La première nous permet de déduire des thèses nouvelles à partir d'une assertion du système, en substituant, à une variable, une expression α douée de sens toujours la même pour une même variable. Les expressions douées de sens sont définies inductivement, de la façon suivante:

1. Toute variable propositionnelle est une expression douée de sens;
2. Nα est une expression douée de sens si α en est une;
3. C$\alpha\beta$ est une expression douée de sens si α et β sont des expressions douées de sens.

La règle de détachement est le *modus ponens* des stoïciens. Si l'on fait l'assertion d'une proposition de type C$\alpha\beta$ ainsi que de son antécédent α, on peut également faire celle de son conséquent β et le détacher de l'implication à titre de nouvelle thèse.

Ces deux règles nous permettent de déduire, de notre ensemble d'axiomes, toutes les thèses (propositions vraies) du système C–N. Si l'on veut avoir, outre C et N, d'autres foncteurs dans notre système, il faut les introduire par l'intermédiaire de définitions. Pour la conjonction K par exemple, il y a deux façons de le faire. 1) La conjonction «p et q» et «il-n'est-pas-vrai-que (si p alors non-q)» ont le même sens, et l'on pourrait exprimer cette connexion entre Kpq et NCpNq par la formule suivante:

Kpq = NCpNq

nous autorisant à remplacer le *definiens* par le *definiendum* et vice versa. 2) Nous pourrions également exprimer la connexion existant entre Kpq et NCpNq par deux implications converses:

CKpqNCpNq et CNCpNqKpq.

Il est nécessaire d'être familiarisé avec la pratique des démonstrations si l'on désire déduire à partir des axiomes, par exemple la loi de simplification CpCqp ou la loi de commutation CCpCqrCqCpr. Une autre méthode plus simple existe, inventée par le logicien américain Charles S. Peirce vers 1885. Elle se fonde sur le «principe de bivalence», qui établit que toute proposition est vraie ou fausse, c'est-à-dire que des deux valeurs de vérité possibles – le vrai ou le faux –, elle en choisit une et uniquement une. Il s'agit de distinguer ce principe de la loi du tiers-exclu (*tertium non datur*) selon laquelle de deux propositions contradictoires l'une doit nécessairement être vraie. Cette loi fut considérée comme la base de la logique par les stoïciens, en particulier par Chrisippe.

Toutes les fonctions de la théorie de la déduction sont des fonctions de vérité, c'est-à-dire que leur vérité et leur fausseté ne dépendent que de la vérité et de la fausseté de leurs arguments. Créons maintenant une nouvelle constante appelée «proposition fausse» et désignons-la par 0; désignons de façon analogue par 1 toute proposition vraie. Nous pouvons alors définir la négation de la manière suivante:

$$N1 = 0 \text{ et } N0 = 1.$$

Ces symboles signifient que la négation d'une proposition fausse a le même sens qu'une proposition vraie (ou plus brièvement: est vraie), et la négation d'une proposition vraie est fausse. Pour l'implication, nous avons les quatre définitions que voici:

$$C00 = 1, C01 = 1, C10 = 0, C11 = 1.$$

Autrement dit, une implication est fausse dans le seul cas où son antécédent est vrai et son conséquent faux; dans tous les autres cas, elle est vraie. Cette définition, la plus ancienne que l'on ait de l'implication, est attribuée à Philon de Mégare et a été adoptée par les stoïciens.

Or, si nous voulons vérifier, dans la théorie de la déduction, une expression douée de sens et contenant au moins les deux foncteurs N, C, il faut substituer, aux variables figurant dans cette expression, selon toutes les combinaisons possibles, les symboles 1 et 0, et réduire les formules ainsi obtenues. Si, après réduction, toutes les formules ont 1 comme résultat final, l'expression est vraie: c'est une thèse; mais si une quelconque de ces formules a 0 pour résultat final, l'expression est fausse. Exemple: la loi de la transposition CCpqCNqNp donne:

Pour p/0, q/0: $CC00CN0N0 = C1C11 = C11 = 1$,
Pour p/0, q/1: $CC01CN1N0 = C1C01 = C11 = 1$,

Pour p/1, q/0: CC10CN0N1 = C0C10 = C00 = 1,
Pour p/1, q/1: CC11CN1N1 = C1C00 = C11 = 1.

On obtient, au terme de toutes les substitutions, le résultat: 1, la loi de transposition est donc bien une thèse de notre système. Autre exemple: CNCpqq. Il suffit ici d'un seul essai de substitution:

p/1, q/0: CNC100 = CN00 = C10 = 0.

Le résultat final étant 0, l'expression CNCpqq est fausse.

Les quantificateurs sont désignés par des caractères grecs majuscules, le quantificateur universel par Π et le quantificateur particulier ou existentiel par Σ.

Définition de la logique bivalente

Termes indéfinis:

p, q, r, s — variables propositionnelles
N, C, — négation, implication.

C	0	1	N
0	1	1	1
1	0	1	0

Termes définis:

Kpq = NCpNq — conjonction
Apq = CNpq — alternative (ou inclusive)
Epq = NCCpqNCqp — équivalence.

Axiomes: — système C–N de Lukasiewicz (1929)

L1. CCpqCCqrCpr — loi du syllogisme hypothétique
L2. CCNppp — loi de Clavius[4]
L3. CpCNpq — loi de Duns Scot

4 L'expression «Si (si non-p alors p), alors p» a été utilisée par Euclide pour la démonstration du théorème mathématique suivant: «si le produit de deux entiers, a et b, est divisible par un nombre premier n, alors si a n'est pas divisible par n, b doit être divisible par n».

Règles d'inférence:

Règle de substitution
Règle de détachement modus ponens.

Une logique bivalente mono-axiome

En 1931, Lukasiewicz a publié dans [7] (traduction anglaise dans [10]) les résultats de ses recherches sur l'axiome de Nicod ainsi que son système ne contenant qu'un axiome. Le système de Nicod est un point de départ pour des réflexions plus profondes sur la déduction généralisée. Nous présentons ce système pour son caractère inhabituel et parce qu'à l'époque il était vivement discuté par tous les membres de l'«école polonaise de logique».

Termes indéfinis:

p, q, r, s ... variables propositionnelles
D foncteur[5] de Sheffer |

D	0	1
0	1	1
1	1	0

Axiome:

$(\mathfrak{N})$ DDpDqrDDtDttDDsqDDpsDps.

Règles d'inférence:

Règle de substitution
Règle de détachement $D\alpha D\beta\gamma$

L'axiome de Nicod n'est pas une proposition évidente. Lukasiewicz en propose sa version. Il démontre qu'un axiome à quatre variables a la même signification qu'un d'axiome à cinq variables. Voici l'axiome:

$(\mathfrak{L})$ DDpDqrDDsDssDDsqDDpsDps.

5 Le créateur du terme «foncteur» est T. Kotarbinski.

Il pose ensuite l'équivalence de ces deux propositions en montrant que l'axiome $\mathfrak{N}$ est plus général que $\mathfrak{L}$, et que l'on peut déduire $\mathfrak{N}$ à partir de $\mathfrak{L}$. Notre attention est attirée par la règle de détachement appliquée par Nicod. Si la thèse $D\alpha D\beta\gamma$ fait partie du système et que la thèse α appartient aussi au système, alors on peut ajouter l'expression γ comme une thèse du système. Lukasiewicz ajoute également β et son raisonnement est le suivant: on considère que la règle est vraie, c'est-à-dire:

$$D\alpha D\beta\gamma = 1$$

on admet que la proposition α est aussi vraie en obtenant

$$D1D\beta\gamma = 1.$$

Pour simplifier le raisonnement et surtout le rendre plus intuitif, on substitue au foncteur D sa propre définition conçue sur la conjonction Dpq = NKpq (D/NK), on obtient ainsi:

$$NK1NK\beta\gamma = 1.$$

Pour que la proposition $NK1NK\beta\gamma$ soit vraie, il faut que la proposition $K1NK\beta\gamma$ soit fausse en raison de la négation au début de la thèse. On voit que ce n'est possible que dans le seul cas où la proposition $K\beta\gamma$ est vraie, c'est-à-dire dans le cas où β et γ sont vraies. On peut alors non seulement ajouter la proposition γ au système comme Nicod le souhaite, mais également β.

Puis Lukasiewicz présente une version avec le quantificateur universel pour prouver que son axiome est plus court que celui de Nicod:

(No) $\Pi p\ \Pi q\ \Pi r\ \Pi s\ \Pi t$ DDpDqrDDtDttDDsqDDpsDps
(Lo) $\Pi p\ \Pi q\ \Pi r\ \Pi s$ DDpDqrDDsDssDDsqDDpsDps.

Cette recherche, confiée à M. Wajsberg comme travail de diplôme, a donné un résultat inattendu. En 1927, ce dernier définit la notion «organique» et l'attache à l'axiome. L'axiome de Nicod et celui de Lukasiewicz ne sont pas «organiques» parce qu'ils contiennent les parties DtDtt et DsDss qui sont elles-mêmes des thèses du système. Pour éviter cela, Wajsberg propose son axiome et montre qu'on peut remplacer le $\mathfrak{L}$ et le $\mathfrak{N}$ dans le système de Nicod:

($\mathfrak{W}$) DDpDqrDDDsrDDpsDpsDpDpq.

L'intuition de Wajsberg est prophétique car, quelques années plus tard, S. Lesniewski démontre que, dans la déduction de la thèse DtDtt, Nicod a commis une erreur, erreur répétée par Lukasiewicz qui écrivit un erratum où il montre qu'il avait trouvé un axiome ne contenant pas cette thèse, axiome différent de celui de Wajsberg.

($\mathfrak{L}$1) DDpDqrDDpDrpDDpDrpDDsqDDpsDps.

Les travaux sur le système de Nicod ont provoqué la naissance de la déduction généralisée et toute une série de systèmes mono-axiomatiques basés sur l'implication (sans négation) et aussi, à mon avis, le système équivalentiel (ou biconditionnel) [8] de Lukasiewicz.

Logiques multivalentes de Lukasiewicz

Le premier système de la logique trivalente est publié par Lukasiewicz [3] en 1920. Puis, avec tous les membres de l'«Ecole de Lwów et Varsovie», il publie plusieurs systèmes de la même classe de logique à ensemble fini de valeurs $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{L}_4$, ..., $\mathfrak{L}_n$, ainsi qu'un système de logique à ensemble infini (mais dénombrable) de valeurs $\mathfrak{L}_{\aleph_0}$.

Logique trivalente $\mathfrak{L}_3$

Il s'agit du premier système multivalent, créé par Lukasiewicz en 1920 [3].

Termes indéfinis:

p, q, r, s ...	variables propositionnelles
N, C,	négation, implication

C	0	1/2	1	N
0	1	1	1	1
1/2	1/2	1	1	1/2
1	0	1/2	1	0

Termes définis:

Apq = CCqpp — alternative (ou inclusive)
Kpq = NANpNq — conjonction
Epq = KCpqCqp — équivalence.

Axiomes: système $\mathfrak{L}_3$ de Lukasiewicz (1920)

L1. CqCpq — loi d'affirmation de conséquent
L2. CCpqCCqrCpr — loi de syllogisme hypothétique
L3. CCCpNppp
L4. CCNqCNpCpq.

Règles d'inférence:

Règle de substitution
Règle de détachement — modus ponens.

Au début, le système $\mathfrak{L}_3$ n'était pas fonctionnellement complet, au sens où on ne parvient pas à définir tous les foncteurs possibles[6]. En 1936, J. Slupecki [15] propose un foncteur T et deux axiomes:

p	Tp
0	1/2
1/2	1/2
1	1/2

L5. CTpNTp
L6. CNTpTp

6 Système à trois valeurs a $3^{6^1} = 27$ foncteurs possibles à une variable et $3^{33} = 19683$ à deux variables.

Suite à ces modifications le système est devenu complet dans les deux sens de cette notion.

Au début de ses réflexions, la troisième valeur était pour Lukasiewicz synonyme de «possibilité» ou d'«indéterminé». Mais, il a abandonné cette première signification après une étude systématique de la notion «possible» alors déjà bien définie.

Remarques. On peut remarquer que certaines lois qui sont valides en $\mathfrak{L}_2$ ne le sont pas dans $\mathfrak{L}_3$, par exemple le *tertium non datur* ApNp ou principe de contradiction NKpNp. Ceci est conforme à l'idée de l'auteur. De plus, il y a aussi un certain nombre de contre tautologies (propositions toujours fausses) en logique bivalente et vraies en trivalente par exemple EpNp. Lukasiewicz a défini sa logique en conformité avec sa propre métaphysique héritée de Brentano, Twardowski et Meinong.

Une autre caractéristique qu'on peut y voir, c'est que les propositions dites «indéterminées» dans la conjonction et la disjonction donnent des propositions «indéterminées», ce qui est conforme à l'intuition.

Trivalence et modalité: la logique modale a toujours intéressé Lukasiewicz. Il a essayé par deux fois de construire des systèmes modaux basés sur la logique multivalente. L'idée était simple: tenter de définir les foncteurs modaux comme tous les autres foncteurs du système. Le premier système créé en 1920 était le suivant:

Il a défini le foncteur «il-est-possible-que» par Mp (voir le tableau) et le foncteur «il-est-nécessaire-que» par Lp = NMNp. Lukasiewicz voulait rendre compte de toutes les phrases «modales» attestées comme vraies par la tradition.

Il a démontré la non-contradiction des propositions suivantes dans son système:

(M1) CNMpNp,
(M2) CpNMNp,
(M3) KMpMNp pour certains p, c'est-à-dire Σp KMpMNp,

et proposé les interprétations suivantes:

NM –«il n'est pas possible que»;
NMN – «il est nécessaire que»;

MN – «il est par hasard que».

En 1921, Tarski propose la définition de M dans le système $\mathfrak{L}_3$ comme Mp = CNpp, le troisième foncteur n'ayant pas de signification modale Ip = KMpNLp.

p	Mp	Lp	Ip
0	0	0	0
1/2	1	0	1
1	1	1	0

Lukasiewicz abandonne les travaux sur les systèmes modaux en 1953 quand il publie son système modal quadrivalent.

Généralisation de $\mathfrak{L}_3$ en $\mathfrak{L}_n$

Termes indéfinis:

p, q, r, s ... variables propositionnelles
N, C, négation, implication.

Ces logiques utilisent les valeurs 0 et 1 et les nombres rationnels. En général, pour la logique à n = (3, 4, ...) valeurs, l'ensemble des valeurs est le suivant:

$$A = \{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}\},\ B = \{1\}$$

Cpq = min (1, 1 – p+q)
Np = 1–p.

Termes définis:

Kpq = NCCNpNqNq = min (p, q) conjonction
Apq = CCpqq = max (p, q) alternative (ou inclusive)
Epq = NCCNCpqNCqpNCqp =
min (min (1, 1 – p+q), min (1, 1 – q+p)) équivalence.

Axiomes: système Ln $1 \leq n \leq \aleph_0$ de Lukasiewicz (Wajsberg)[7]

W1. CpCqp
W2. CCpqCCqrCpr
W3. CCNpNqCqp
W4. CCCpNppp.

Règles d'inférence:

Règle de substitution
Règle de détachement modus ponens.

Lukasiewicz a proposé pour la logique $n = \aleph_0$, $\mathfrak{L}_{\aleph_0}$ les axiomes suivants étudiés par ailleurs par Wajsberg:

L1. CCpCqp pour la logique $\mathfrak{L}_{\aleph_0}$
L2. CCpqCCqrCpr
L3. CCCpqqCCqpp
L4. CCCpqCqCqpCqp
L5. CCNpNqCqp.

Logiques de Post

En 1921, indépendamment de Lukasiewicz, Emil L. Post définit [16] une classe de logiques à n valeurs (n est fini). Contrairement à Lukasiewicz, Post n'est pas intéressé par les significations et les interprétations des valeurs «ajoutées», mais il est fasciné par les relations et liaisons purement formelles entre ces valeurs. La définition de Post est basée sur les foncteurs des *Principia Mathematica* [Whitehead, Russell 1910] et sur la méthode matricielle de Peirce.

Définition de la logique P_n^k de Post

Termes indéfinis:

p, q, r, s ... variables propositionnelles
N, A négation, disjonction.

7 Les axiomes avec la preuve proposée par Mordchaj Wajsberg 1931 [24].

Les valeurs de ces logiques sont les nombres naturels. En général, pour la logique à n = (3, 4, ...) valeurs l'ensemble des valeurs est:

$$A = \{0, 1, 2, ..., n\} \quad B = \{0, 1, 2, ..., k\}$$

où $k \leq n$. Ce sont les logiques n-valentes (finies) avec $1 \leq k \leq n$ valeurs distinctes.

Apq = max(p, q)
Np = p+1 pour p < n et 1 pour p = n négation cyclique.

Termes définis:
Kpq = NANpNq
Cpq = ANpq
Epq = KCpqCqp

Axiomes: n'existent pas!

La différence principale, par rapport à la logique de $\mathfrak{L}_n$, (exception des termes indéfinis, de l'interprétation sémantique, de l'axiomatisation, etc.), est que Post traite la négation d'une autre manière que Lukasiewicz. Il n'a attaché aucune signification à la troisième valeur. Sa négation est «cyclique» c'est-à-dire qu'il a rejeté la loi de la double négation qui est satisfaite dans la logique P^1_2. Grâce à cette négation, le système de Post est complet sans avoir à lui ajouter aucun foncteur nouveau. Quant à la disjonction, elle est restée intuitivement claire et tout à fait «classique». Notre attention se porte aussi sur le choix des valeurs distinctes. Dans la logique classique ainsi que dans le système de Lukasiewicz, l'ensemble des valeurs distinctes est élémentaire, et la définition de la tautologie est exactement la même en logique classique que chez Lukasiewicz. Par contre chez Post, on a k-valeurs distinctes; ce qui change de la définition traditionnelle de la notion de tautologie et, par conséquent, empêche l'axiomatisation des logiques de Post (n>2). Ces logiques sont aisément définies à l'aide du mécanisme des matrices et de l'algèbre. J'ajouterai que grâce au calcul matriciel, on a pu démontrer la complétude des logiques de Post.

On donne l'exemple des tables de la vérité en présentant le système P_3^2 de Post:

A	1	2	3	N	Np	K	1	2	3	C	1	2	3	E	1	2	3
1	1	1	1		2		3	3	2		1	2	2		3	3	3
2	1	2	2		3		3	1	2		1	2	3		3	1	2
3	1	2	3		1		2	2	2		1	1	1		3	2	3

La définition de la négation appliquée par Post, appelée aussi «rotation» nous permet de redéfinir un certain nombre de lois et principes dans leurs formes purement multivalentes.

Par exemple la loi *tertium non datur ApNp*, qui est une tautologie dans la logique bivalente, mais pas dans les systèmes de Lukasiewicz et de Post, peut être définie dans la logique P_3^1 ainsi:

ApANpNNp

et devenir la tautologie. De même, la loi de la double négation peut devenir loi de la n-uple négation dans le système P_3^1. Elle prend la forme:

EpNNNp.

Ces quelques points différencient les systèmes de Post des autres systèmes multivalents et rendent cette logique intéressante également pour les sciences humaines – en particulier pour l'ontologie et l'épistémologie –, car elle leur fournit un outil pour explorer les autres «mondes» possibles.

Généralisation des systèmes finis de Post au système infini $P_{\aleph_0}$

Emil Post n'a pas donné de définition des systèmes infinis, mais on peut l'imaginer [17] comme l'extension du système P_k^1 au système $P_{\aleph_0}$ en changeant quelques éléments.

Les valeurs de la vérité sont définies ainsi:

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \ldots, (\tfrac{1}{2})^k, \ldots, 0.$$

Pour la négation on prend la formule suivante:

$$Np = 1 \text{ pour } p = 0 \text{ et } \frac{1}{2} \times p \text{ pour } p \neq 0.$$

Cette logique $P_{\aleph_0}$ est très intéressante parce qu'elle ne contient aucune tautologie mais seulement des formules bien formées.

On peut conclure que des «manipulations» purement formelles, seule motivation de Post, conduisent aux logiques multivalentes avec un certain nombre d'idées totalement différentes de celles de Lukasiewicz. En effet, elles ne sont pas fondées sur une interprétation sémantique.

Logique de Sobocinski

En 1936, Boleslaw Sobocinski, membre de l'École polonaise de Lukasiewicz, présente une autre logique intéressante. Cette logique n-valentes est différente du courant dominant alors à l'École; elle est basée entre autres sur la négation cyclique.

Définition des logiques de Sobocinski

Termes indéfinis:

p, q, r, s	variables propositionnelles
H, C,	négation, implication.

Les valeurs de ces logiques sont les nombres naturels. En général, l'ensemble des valeurs de vérité, pour la logique à n-valeurs, est le suivant:

$$A = \{1, 2, ..., n\} \qquad B = \{2, ..., n\}.$$

Il s'agit des logiques n-valentes possédant n-1 valeurs distinctes.

L'implication et la négation s'écrivent:

$$Cpq = q, \text{ pour } p \neq q \text{ et } Cpq = n \text{ pour } p = q$$
$$Hp = p + 1 \text{ pour } p < n \text{ et } Hp = 1 \text{ pour } p = n.$$

Il s'agit de formules plus proches de l'idée de Post que de celle de Lukasiewicz. Pour exemple, on présente les tables de vérité de la logique S_3 ainsi:

Cpq	1	2	3	Hp
1	3	2	3	2
2	1	3	3	3
3	1	2	3	1

Les logiques de Sobocinski sont des systèmes complets et axiomatisés.

Axiomes de S_3:

1. CCpCpq
2. CrsCtCCspCrp
3. CCHqCHHq
4. HpCHHpCpq
5. CCHHpHHqHHCpq
6. CHHCpqCHHpHHq.

Les différences par rapport à Post sont grandes, il suffit d'examiner la définition de l'implication pour s'en rendre compte.

Cette «voix polonaise», dans la ligne de Post, est un exemple des polémiques et du dynamisme qui régnaient alors. Ces vives polémiques portaient davantage sur des problèmes d'axiomatisation, de complétude que sur la notion d'interprétation. Jerzy Slupecki proposera en 1939 une synthèse de ces réflexions (voir ci-après).

Logiques de Kleene et Bochvar

En 1938, D.A. Bochvar et S.C. Kleene proposent d'autres logiques trivalentes. Ces logiques sont à la fois «proches» et «éloignées» des systèmes classiques et servent, selon les intentions des auteurs, à la résolution de problèmes théoriques en mathématiques. Elles font partie des logiques «non lukasiewicziennes».

Logique de Kleene

S.C. Kleene, inspiré par la recherche sur les fondements de la mathématique, construit en 1938 [2] une logique qui permet d'analyser les prédicats partiellement définis. A titre d'exemple, citons le prédicat donné par l'équivalence suivante:

$$P(x) \text{ si et seulement si que } 1 \leq \tfrac{1}{x} \leq \neq 2,$$

on peut remarquer que *P(a)* est vraie si $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$, indéfinie ou non déterminée si $a = 0$ et fausse dans les autres cas.

Kleene est intéressé par ce type de propositions dont la valeur de vérité n'est pas déterminée par des algorithmes ou n'est pas importante dans l'application examinée.

Termes indéfinis:

p, q, r, s ... variables propositionnelles
N, K, A, C, E négation, conjonction, disjonction, implication et équivalence
T - «vrai»; I - «indéfini», F - «faux».

Foncteurs forts[8]

Kpq	T	I	F	Np	Apq	T	I	F	Cpq	T	I	F	Epq	T	I	F
T	T	I	F	F		T	T	T		T	I	F		T	I	F
I	I	I	F	I		T	I	I		T	I	I		I	I	I
F	F	F	F	T		T	I	F		T	T	T		F	I	T

On voit que le comportement des foncteurs des valeurs «vrai» (T) et «faux» (F) est le même que chez Lukasiewicz pour la négation, la conjonction et la disjonction. La différence réside dans la méthode d'interprétation de la troisième valeur et dans la définition de l'implication.

Un trait caractéristique de cette logique est qu'elle est non tautologique, malgré la valeur distincte (T). Cette situation est curieuse parce qu'on a l'extension de la logique classique avec un certain nombre des équivalences classiques, par exemple *ECpqANp* ou *EApqCNpq* mais les expressions telles *Cpp* et *Epp*

8 La notion de foncteur fort et faible est donnée par Kleene en 1952 [3].

n'apparaissent pas comme des tautologies. En 1952, Kleene dans son *Introduction aux Métamathématiques* [3] introduit les notions de foncteurs forts cités ci-dessus et faibles (ci-après).

Kpq	T	I	F	Np	Apq	T	I	F	Cpq	T	I	F	Epq	T	I	F
T	T	I	F	F		T	I	T		T	I	F		T	I	F
I	I	I	I	I		I	I	I		I	I	I		I	I	I
F	F	I	F	T		T	I	F		T	I	T		F	I	T

Ses motivations sont issues de l'arithmétique. Les nouveaux foncteurs servent à décrire des fonctions propositionnelles récursives où à chaque étape ils doivent être définis, l'indéfinition rend ainsi le calcul indéfini. C'est pour cela que tout foncteur appliqué à «I» donne «I». Il s'agit d'une réflexion de Bochvar.

Logique de Bochvar

En 1939, Bochvar propose [1] d'interpréter la troisième valeur «I» comme «indécidé». Par conséquent, dans la conjonction K, tous énoncés «indécidés», composés avec n'importe quelle valeur, donnent aussi comme résultat «indécidé». Cette idée est totalement différente de celle de Lukasiewicz. Cette troisième valeur ne peut pas être interprétée comme quelque chose d'«intermédiaire» entre la vérité et la fausseté, mais bien comme quelque chose de «paradoxale» ou «sans signification». Bochvar agit ainsi pour tenter de résoudre le paradoxe sémantique.

Termes indéfinis:

p, q, r, s, ... variables propositionnelle
N K négation, conjonction.

Il y a trois valeurs dans le système de Bochvar: T – «vrai», I - «indécidé», F – «faux».

Kpq	T	I	F	Np
T	T	I	F	F
I	I	I	I	I
F	F	I	F	T

Termes définis:
Apq = NKNpNq
Cpq = NKpNq
Epq = KCpqCqp.

Cette logique se caractérise par ses deux «niveaux». Le premier est tout à fait équiforme à la logique faible de Kleene et le deuxième métalogique est basé sur l'assertion externe définie comme *Ap* = «il est vrai que *p*» selon la table suivante:

p	Assertion interne p	Assertion externe Ap
T	T	T
I	I	F
F	F	F

Suite à cette définition, Bochvar a défini les foncteurs externes de la manière suivante:

Forme interne	Forme externe
Np	$N_xp = NAp$
Kpq	$K_xpq = KApAq$
Apq	$A_xpq = AApAq$
Cpq	$C_xpq = CApAq$
Epq	$E_xpq = E\,ApAq$

La négation externe N_xp – «p est faux»; la conjonction K_xpq – «p est vrai et q est vrai»; l'alternative A_xpq – «p est vrai ou q est vrai» et l'implication C_xpq – «si p est vrai, alors q est vrai». Les valeurs de vérité sont données ci-dessous.

K_xpq	T	I	F	N_xp	A_xpq	T	I	F	C_xpq	T	I	F	E_xpq	T	I	F
T	T	F	F	F		T	T	T		T	F	F		T	F	F
I	F	F	F	F		T	F	F		T	T	T		F	T	T
F	F	F	F	T		T	F	F		T	T	T		F	T	T

Par conséquent, la logique interne ne contient pas de tautologie tout comme celle de Kleene et est une logique classique. Il existe une version de la logique faible, L_3^W, de Lukasiewicz, définie à la manière de Bochvar avec l'assertion *W* à la place de *A*.

En 1956, le logicien chinois Moh Swah-kwei propose une interprétation de la troisième valeur du système de Bochvar comme «paradoxal» et l'attribue aux propositions du type «cet énoncé est faux». Il semble que l'interprétation «sans signification» serait plus adéquate. Le système de Bochvar a trouvé sa place dans les travaux concernant les paradoxes sémantiques des théories.

Logique de Slupecki

La logique multivalente la plus générale est proposée par Jerzy Slupecki en 1939 [2], qui avait auparavant défini avec succès le foncteur «T» rendant ainsi complets les systèmes de Lukasiewicz.

Définition des logiques de Slupecki

L'idée de Slupecki est d'introduire des foncteurs généraux tels C, R, et S. Agissant ainsi, il définit la classe la plus générale des logiques multivalentes finies. Pour désigner ces logiques, il a utilisé les symboles L_n^k où n = 2, 3, 4, ... et k < n, parce qu'ils sont caractérisés par deux paramètres: le nombre de valeurs (n) et nombre des valeurs distinctes (k).

Termes indéfinis:

p, q, r, s ... variables propositionnelles
C, R, S,

Cpq = q pour $1 \leq p \leq k$, et 1 pour $k + 1 \leq p \leq n$
Rp = p+1 si p = n, alors Rp = 1
Sp = p pour $3 \leq p \leq n$ Sp = 1 si p = 2, Sp = 2 si p = 1.

Pour *k* valeurs distinctes, le foncteur *Cpq* prend, comme résultat d'application, la valeur logique de la proposition *q*; pour la suite, où *p* > *k* jusqu'à *n*, prend la valeur distincte. Ce foncteur est une sorte d'implication généralisée. Pour le «R», Slupecki définit une notation postienne et pour le «S», il y a changement de la position des deux premières valeurs, la suite restant égale à «p».

Cpq	1 2 3 ... n	Rp	Sp
1*	1 2 3 ... n	2	2
2*	1 2 3 ... n	3	1
3*	1 2 3 ... n	4	3
.	...	.	.
k*	1 2 3 ... n	k + 1	k
k + 1	1 1 1 ... 1	k + 2	k + 1
.	...	.	.
n - 1	1 1 1 ... 1	n	n -1
n	1 1 1 ... 1	1	n

L'astérisque signifie que la valeur est distincte.

Ces démarches permettent à Slupecki d'inclure dans son système toutes les logiques à n-valeurs possibles, à la condition que *n* soit un nombre fini et de démontrer que le système général est complet et axiomatisé pour toutes les valeurs n.

Les résultats de Slupecki closent la discussion sur le problème de la construction des logiques multivalentes finies, mais ne donnent malheureusement pas de réponse sur les interprétations et les applications possibles de cette sorte de logique.

Conclusion

L'objectif de cet exposé était de présenter les logiques multivalentes dans leur dimension canonique de Lukasiewicz et Post à Slupecki qui clôt la question de l'axiomatisation et de la complétude des logiques à un nombre fini de valeurs. Dans ce parcours, quelques événements historiques liés à la multivalence en logique ont été esquissés de manière sommaire. Cet exposé est destiné avant tout à préparer les étudiants à explorer les travaux consacrés aux logiques multivalentes. C'est la raison pour laquelle nous n'avons pas abordé les logiques conçues pour des applications spécifiques: tels les systèmes de Reichenbach servant à analyser des événements de la mécanique quantique, les systèmes probabilistes et possibilistes, utilisés dans le domaine de l'intelligence artificielle. Pour la même raison, nous n'avons pas traité des logiques modales de Lewis ou de la logique floue de Zadeh. Les problèmes de la logique multivalente des prédicats, logique à la fois difficile et intéressante, n'ont également pas été abordés. Des informations utiles sur ces différentes logiques peuvent être trouvées dans la monographie de Rescher [14].

Nous souhaitons que ce qui a été proposé rendra plus facile et agréable la découverte et la lecture des textes fondateurs.

Département de philosophie
Université de Lausanne
1015 Lausanne

Bibliographie

[1] KOTARBINSKI T. (1964). *Wyklady z dziejow logiki* [Leçons sur l'histoire de la logique]. Paris: PUF.

[2] LUKASIEWICZ J. (1920). Compte-rendu de sa propre conférence: *O pojeciu mozliwosci* [Du concept du possible], prononcée le 5.6.1920 à la 206e séance de la Société Polonaise de Philosophie à Lwów; publié dans *Ruch filozoficzny* Ve année, n° 9.

[3] LUKASIEWICZ J. (1920). Résumé de la conférence *O logice trojwartosciowej* [De la logique trivalente], prononcée le 5.6.1920 à la 207e séance de la Société Polonaise de Philo-

sophie à Lwów; publié dans *Ruch filozoficzny* V[e] année, n° 9.

[4] LUKASIEWICZ J. (1929). *Elementy logiki matematycznej* [Eléments de logique mathématique] Skrypt. (2 wyd.- Warszawa 1958, PWN).

[5] LUKASIEWICZ J. (1930). *Uwagi filozoficzne o wielowrtosciowych systemach rachunku zdan* [Remarques philosophiques sur les systèmes multivalents du calcul propositionnel], en allemand, dans *Sprawozdania z posiedzen Towarzystwa Naukowego Warszawskiego* [Comptes-rendus des séances de la Société scientifique de Varsovie], Section III, XXIII[e] année.

[6] LUKASIEWICZ J., TARSKi A. (1930). *Untersuchungen über den Aussagenkalkul* Sprawozdania z posiedzen Towarzystwa Naukowego Warszawskiego [Comptes-rendus des séances de la Société scientifique de Varsovie], Section III, XXIII[e] année.

[7] LUKASIEWICZ J. (1931). *Uwagi o aksjomacie Nicoda i [dedukcji uogolniajacej].* [Remarques sur l'axiome de Nicod] Ksiega pamiatkowa Polskiego Towarzystwa Filozoficznego. Lwów.

[8] LUKASIEWICZ J. (1939),. Der Aqiuvalenzkalkül. *Collectanea logica* l, 145-169.

[9] LUKASIEWICZ J. (1961). *Z zagadnien Logiki i Filozofii.* Ed. J. Slupecki. Warszawa: PWN.

[10] LUKASIEWICZ J. (1970). *Selected Works.* Amesterdam: North-Holland.

[11] MALINOWSKI G. (1990). *Logiki wielowartosciowe.* Warszawa: PWN.

[12] MC CALL S. (ed.) (1967). *Polish Logic 1920-1939*. Oxford: Clarendon.

[13] POST E.L. (1921). Introduction to a general theory of elementary propositions, *American Journal of Mathematics* VLII.

[14] RESCHER N. (1969). *Many-Valued Logic*. New York: Mc-Graw-Hill.

[15] SLUPECKI J. (1936). *Der volle dreiwertige Aussagenkalkul, Towarzystwa Naukowego Warszawskiego* [Comptes-rendus

des séances de la Société scientifique de Varsovie], Section III, XXIX^{e} année.

[16] SOBOCINSKI B. (1936). *Aksjomatyzacja pewnych wielowartosciowych systemow teorji dedukcji* [Axiomatization of certain many-valued systems of the theory of deduction], Roczniki prac naukowych zrzeszenia asystentow Uniwersytetu J. Pilsudskiego w Warszawie, vol.1, 399-419 [Reviewed by Tarski in *The Journal of Symbolic Logic* 2 (1937), 93.

[17] WOLF R.G. (1977). *A Survey of Many-Valued Logic (1966-1974)*. Dunn: Estein.

ANNEXE

Bibliographie complète de Lukasiewicz

(Source: *Studia Logica*, V, 1951 avec modifications du prof. A. Korcik).

Abréviations:

P.F. Przeglad Filozoficzny; † dans Polish Logic [12]
R.F. Ruch Filozoficzny; ↕ dans Collected Works [10].

1. Streszczenie: Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie 1899, n° 3-4. P. F. V (1902), 232-236.
2. O indukcji jako inwersji dedukcji. P. F. VI (1903), 9-24; 138-152.
3. Recenzja: T. Mianowski: O tzw. pojeciach wrodzonych u Locke'a i Leibniza. P. F. VII (1904), 94-95.
4. O stosunkach logicznych. [On logical relations] P. F. VII (1904), 245.
5. Teza Husserla o stosunku logiki do psychologii. P. F. VII (1904), 476-477.
6. Z psychologii porownywania. P. F. VIII (1905), 290-291.
7. O dwóch rodzajach wniosków indukcyjnych. P. F. IX (1906), 83-84.

8. Analiza i konstrukcja pojecia przyczyny. [Analyse et construction du concept de cause] P. F. IX (1906), 105-179.
9. Tezy Höflera w sprawie przedstawien i sadów geometrycznych. P. F. IX (1906), 451-452.
10. Co poczac z pojeciem nieskonczonosci? P. F. X (1907), 135-137.
11. Recenzja: H. Struve. Die polnische Plhilosophie der letzten zehn. Jahre (1894-1904). To samo w przekladzie polskim K. Krola. P. F. X (1901), 336-346.
12. 0 wnioskowaniu indukcyjnym. P. F. X (I907), 474-475.
13. Logika a psychologia. P. F. X (1907), 489-491.
14. Pragmatyzm, nowa nazwa pewnych starych kierunków myslenia. P. F. XI (1908), 341-342.
15. Sprawozdanie z dwóch prac Stumpfa. P. F. XI (1908), 342-343.
16. Zagajenie pogadanki na temat rozprawy M. Borowskiego: Krytyka pojecia zwiazku przyczynowego. P. F. XI (1908), pp.343.
17. Zadania i znaczenie ogólnej teorii stosunków. P. F. XI (1908), 344-347.
18. O prawdopodobienstwie wniosków indukcyjnych. P. F. XII (1909), 209-210.
19. O pogladach filozoficznych Meinonga. P. F. XII (1909), 559.
20. O zasadzie wylcaczonego srodka. P. F. XIII (1910), 372-373.
21. Über den Satz von Widerspruch bei Aristoteles. Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe de Philosophie (1910), 15-38.
22. O zasadzie sprzecznosci u Arystotelesa. Studium krytyczne. [Sur le principe de contradiction dans l'oeuvre d'Aristote] Krakow (1910).
23. Recenzja: Wl. Tatarkiewicz. Die Disposition der aristotelischen Prinzipien. R. F. I (1911), 20-21.
24. O wartosciach logicznych. R. F. I (1911), 52.
25. O rodzajach rozumowania. Wstep do teorii stosunków. R. F. I (1911), 78.

26. Recenzja: P. Natorp. Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften. R. F. I (1911), 101-112.
27. Recenzja: H. Struve. Historia logiki jako teorii poznania w Polsce. Wyd. drugie. R. F. I (1911), 115-117.
28. O potrzebie zalozenia instytutu metodologicznego. R. F. II (1912), 17-19.
29. Recenzja: Wl. Bieganski. Czym jest logika? R. F. II (1912), 145.
30. ↨ O tworczosci w nauce. Ksiega pamiatkowa ku uczczeniu 250 rocznicy zalozenia Uniwersytetu Lwowskiego. Lwów 1912, 1-15.
31. Nowa teoria prawdopodobienstwa. R. F. III (1913), p. 22.
32. Recenzja: J. Kleiner. Zygmunt Krasinski. Dzieje mysli. R. F. III (1913), 109-111.
33. Logiczne podstawy rachunku prawdopodobienstwa. [Sur les fondements logiques du calcul des probablités] Sprawozdania PAU, 1913, 5-7.
34. ↨ Die logischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Kraków (1913), 75.
35. W sprawie odwracalnosci stosunku racji i nastepstwa. P. F. XVI (1913), 298-314.
36. Rozumowanie a rzeczywistosc. R. F. IV (1914), 54.
37. O nauce. Poradnik dla samouków. Wyd. nowe. T. I.1915, XV-XXXIX. Przedruk: Lwów 1934, 1936, 40.
38. O nauce i filozofii. P. F. XVIII (1915),.190-196.
39. ↨ O pojeciu wielkosci [On the concept of magnitude] P. F. XIX (1916), 1-70.
40. ↨ Tresc wykladu pozegnalnego wygloszonego w auli Uniwersytetu Warszawskiego 7 marca 1918. Warszawa 1918.
41 † O pojeciu mozliwosci. R. F. V (1919/20), 169-170.
42. †↨ O logice trójwartosciowej. [Sur la logique trivalente] R. F. V (1920), 170-171.
43. ↨ Logika dwuwartosciowa. P. F. XXIII (1921), 189-205.
44. O przedmiocie logiki. R. F. VI (1921), 26.
45. Zagadnienia prawdy. Ksiega pamiatkowa XI Zjazdu lekarzy i przyrodnikow polskich. 1922,.84-85, 87.

46. ‡ Interpretacja liczbowa teorii zdan. R. F. VII (1922/23), 92-93.
47. Recenzja: Jan Sleszynski. O logice tradycyjnej. R. F. VIII (1923), 107-108.
48. Kant i filozofia nowozytna. Wiadomosci Literackie I (1924), 19.
49. Dlaczego nie zadowala nas logika filozoficzna? R. F. IX (1925), 25.
50. O pewnym sposobie pojmowania teorii dedukcji. P. F. XXVIII (1925), 134-136.
51. Démonstration de la compatibilité des axiomes de la théorie de la déduction. Annales de la Société Polonaise de Mathématique 3 (1925), 149.
52. Sprawozdanie z dzialalnosci Uniwersytetu Warszawskiego za r. ak.1922/23. Warszawa 1925.
53. Z najnowszej niemieckiej literntury logicznej. R. F. X (1926/27), 197-198.
54. O logice stoikow. P. F. XXX (1927), 278-279.
55. O metodzie w filozofii. P. F. XXXI (1928), 3-5.
56. O pracy Fr. Weidauera: Zur Syllogistik. R. F. XI (1928), 178.
57. Rola definicji w systemach dedukcyjnych. R. F. XI (1928/29), 164.
58. Odefinicjach w teorii dedukcji. R. F. XI (1928/29), 177-178.
59. Wrazenia z VI Miedzynarodowego Zjazdu Filozoficznego. H. F. XI (1928/29), 1-5.
60. O znaczeniu i potrzebach logiki matematycznej. Nauka Polska 10 (1929), 604-620.
60. Elementy logiki matematycznej. Skrypt. 1929 (2 wyd.- Warszawa 1958, PWN).
61. (z A. Tarskim) Untersuclhungen Über den Aussagenkalkül. Comptes-rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Cl. III, 23 (1930), 1-21.
62. †‡ Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls. Comptes-rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, C1. III, 23 (1930), 51-77.

63. ↨ Uwagi o aksjomacie Nicoda i [dedukcji uogolniajacej]. [Remarques sur l'axiome de Nicod] Ksiega pamiatkowa Polskiego Towarzystwa Filozoficznego. Lwow 1931.
64. Ein Vollstundigkeitsbeweis des zweiwertigen Aussagenkalküls. Comptes-rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, C1. III, 24 (1931), 153-183.
65. Z dziejów logiki starozytnej. R. F. XIII (1932-1936), 46.
66. †↨ Z historii logiki zdan. P. F. XXXVII (1934), 417-437.
67. Znaczenie analizy logicznej dla poznania. P. F. XXXVII (1934), 369-377.
68. Zur Geschichte der Aussagenlogik. Erkenntnis 5 (1935-1935), 111-131.
69. Zur vollen Aussagenlogik. Erkenntnis 5 (1935-1936), 176.
70. ↨ Logistyka a filozofia. P. F. XXXIX (1936), 115-131.
71. Bedeutung der logisehen Analyse fur die Erkenntnis. Actes du VIII Congrès International de Philosophie. Prague (1936), 75-84.
72. Co dala filozofii wspólczesna logika matematyczna? P. F. XXXIX (1936), 325-326.
73. ↨ W obronie logistyki. Mysl katolicka wobec logiki wspólczesnej. Studia Gnesnensia, nr 15 (1937), 22.
74. En défense de la logique. La pensée catholique et la logique moderne. Compte-rendu de la session spéciale tenue le 26.9.1936 pendant le IIe Congrès Polonais de Philosophie. Wydawnictwa Wydzialu Teologicznego U.I., seria 1, nr 2 (1937), 7-13.
75 Kartezjusz. Kwartalnik Filozoficzny XV (1938), 123-128.
76. O sylogistyce Arystotelesa. Sprawozdania PAU, 44, (1939), 220-227.
77. Der Aqiuvalenzkalkül. Collectanea logica 1 (1939), 145-169.
78. ↨ Die Logik und das Grundlagenproblem. Les entretiens de Zürich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques 6-9, XII (1938), Zurich 1 41, 82-100.
79. ↨ The shortest axiom of the implicational calculus of propositions. Proceeding of the Royal Irish Academy, Sect. A, 52 (1948), 25-33.

80. (↨) W sprawie aksjomatyki implikacyjnego rachunku zdan. Annales de la Société Polonaise de Mathématique 22 (1956), 87-92.
81. O zasadzie najmniejszej liczby. (Streszczenie referatu nadeslanego na Zjazd). Sprawozdanie z V Zjazdu matematykow polskich w Krakowie w dniach 29-31 maja 1947 r. oraz z Akademii poswieconej uczczeniu pamieci prof. Stanislawa Zaremby. Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego. T. XXI, 1948-1949, Krakow 1950, 28-29.
82. ↨ On variable functors of propositional arguments. Proceedings of the Royal Irish Academy, Sect. t A, 54, (1951), 25-35.
83. Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic. Oxford 1951.
84. ↨ On the intuitionistic theory of deduction. Indagationes Mathematicae. Koninklijke Niederlandse Akademie van Wetenscha ppen, Proceedings, Series A (1952), n° 3, 202-212.
85. Comment on K. J. Cohen's remark. Indagationes Mathematicae. Koninklijke Nedlerlanwlse Akademie van Wetenseha ppen, Proceedings, Series A (1953), n° 2, 113.
86. ↨ Sur la formalisation des théories mathématiques. Colloques internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, XXXVI: Les méthodes formelles en axiomatique. Paris 1953, 11-19.
87. ↨ A system of modal logic. The Journal of Computing Systems, vol. l, n° 3, (1953), 111-149.
88. ↨ A system of modal logic. Actes du XVe Congrès International de Philosophie, XIV, 72-78.
89. ↨ Arithmetic and modal logic. The Journal of Computing System, vol. l, n° 4, (1954), 213- 219.
90. On a controversial problem of Aristotle's modal syllogistic. Dominican Studies 1954 (7), 114-128.
91. †↨ O determinizmie [On determinism] [9].