Publié dans Travaux de logique 7, 167-200, 1992,
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

IMPORTANCE OU INSIGNIFIANCE MATHEMATIQUE DES INDECIDABLES DE GÖDEL?

Jean-Paul Delahaye

1. Introduction

«95% des mathématiciens se moquent éperdument de ce que peuvent faire tous les logiciens et tous les philosophes» (Dieudonné 1982: 16).

«The feeling was that Gödel's theorem was of interest only to logicians». Robert Solovay. Cité par Gina Kolata (Kolata 1985).

«La proposition indécidable A décrite par Gödel paraît très artificielle, sans lien avec aucune autre partie de la théorie des nombres actuelle; sa principale utilité était d'établir l'impossibilité d'une preuve de la non contradiction de l'arithmétique. Parmi les nombreuses questions classiques non résolues de la théorie des nombres, on n'a pas encore à ma connaissance établi que l'une d'elles est indécidable» (Dieudonné 1987).

«What people would really like is to take a big unsolved problem like Fermat's Last Theorem and show it is undecidable. That would be spectacular». Joel Spencer. Cité par Gina Kolata (Kolata 1985).

«La croyance que la théorie de la démonstration de Hilbert fait partie intégrante de la mathématique (...) ne nous paraît pas justifiée, et nous considérons que l'intervention de la métamathématique dans l'exposé de la logique peut et doit être réduite à la partie élémentaire qui traite du maniement des symboles abréviateurs et des critères déductifs» (Bourbaki 1969: 57).

1.1. Importance philosophique et importance mathématique

Les indécidables dont les théorèmes de Gödel de 1931 nous démontrent l'existence et qu'ils nous exhibent, ont-ils une signification mathématique réelle, ou au contraire sont-ils des énoncés pathologiques sans intérêt autre que logique ou philosophique?

C'est cette question que nous voulons nous poser. Nul ne conteste l'intérêt logique ou philosophique de ces indécidables, seul leur intérêt mathématique est en cause. Et en effet il se trouve que bien des mathématiciens les considèrent avec prudence et les jugent comme des curiosités. N. Bourbaki par exemple ne les mentionne que dans ses notes historiques.

Tenter de comprendre ce que peut vouloir dire «les indécidables sont sans véritable importance pour les mathématiques» est un défi tant il est évident que ce qui est important pour la philosophie des mathématiques l'est aussi pour les mathématiques elles-mêmes. Notre méthode sera de parcourir les différentes classes d'indécidables que les logiciens ont mis à jour depuis 1931. A propos de chacune nous imaginerons un dialogue contradictoire sur l'importance mathématique des indécidables. Parfois aussi nous envisagerons le problème de la physique. Notre conclusion sera que si soutenir l'insignifiance mathématique des indécidables est encore possible, cela se fait toujours au prix d'un réductionnisme qui possède plusieurs formes dont les deux plus extrêmes sont le formalisme et le finitisme. Certaines variantes du réductionnisme comme le prédicativisme de Feferman, se nourrissant des récents résultats de la théorie de la preuve, refusent de dire leur dernier mot et prétendent même faire revivre le programme de Hilbert qu'on pensait enterré justement par les théorèmes d'indécidabilité de 1931.

Nous verrons finalement que le problème de l'importance mathématique des indécidables de Gödel concentre en lui tout le problème de la philosophie des mathématiques, en un mot que le problème de l'importance mathématique des indécidables de Gödel est un problème important ... philosophiquement!

1.2. Comment définir un indécidable de Gödel

Nous commençons par proposer une définition des «indécidables de Gödel». La définition que nous donnons n'est pas mathématique, elle a simplement pour but de préciser un usage établi qui refuse que n'importe quel énoncé indépendant de n'importe quel système formel puisse être considéré comme un «indécidable de Gödel». Plus loin nous serons d'ailleurs amenés à préciser que parmi les indécidables de Gödel il faut encore distinguer ceux qui renforcent réellement les systèmes auxquels on les ajoute (comme les énoncés de consistance) de ceux qui sont conservatifs (comme l'axiome du choix, ou le lemme de König).

Un indécidable de Gödel c'est: un énoncé mathématique vrai et non démontrable, plus précisément: un indécidable de Gödel c'est un énoncé mathématique E tel que:

(1) E n'est pas démontrable dans un système formel S1 qui permet de l'exprimer.

(2) On peut montrer (dans un système formel S2) la non-prouvabilité de E.

(3) On peut montrer (dans un système formel S3) que E est vrai.

(4) Le système S1 est une **axiomatisation raisonnable** d'un champ mathématique donné et reconnu comme intéressant, et on a pu penser que cette axiomatisation formalisait bien le champ en question, (comme par exemple l'arithmétique de Peano du premier ordre vis-à-vis de l'arithmétique). Cette condition est réalisée si on a cru à un moment donné que S1 est une axiomatisation complète du champ en question. Cette condition est aussi satisfaite si certains soutiennent que tous les énoncés intéressants (dans un sens à préciser) du champ en question sont prouvables avec S1. Beaucoup de mathématiciens pensent que ZF + AC par exemple permet d'exprimer et de démontrer tout énoncé mathématique vraiment intéressant. La condition (4) sert à éviter qu'on appelle «indécidable de Gödel» n'importe quel axiome indépendant d'un système S1 clairement trop faible : l'axiome des parallèles par exemple n'est pas considéré comme un indécidable de Gödel, de même l'axiome de l'infini n'est pas un indécidable de ZF-{axiome de l'infini}.

(5) Le système S2 est un système dont on a certaines raisons de penser qu'il est consistant (par exemple ZF + AC).

(6) Le système S3 est un système raisonnable dont on a aussi certaines raisons de penser qu'il est consistant. Dans le cas de certains axiomes des grands cardinaux en théorie des ensembles, les raisons de croire à la consistance de S3 sont assez ténues (S3 est obtenu en ajoutant un axiome de grand cardinal à ZF + AC), il y a même des cas où la consistance de S3 est douteuse.

Remarques:

- On pourrait peut-être supprimer (3) mais alors il faudrait préciser «dont la négation n'est pas démontrable».
- Le plus souvent on ne précise que S1. Les systèmes S2 et S3 sont plus forts que S1, et par exemple il est fréquent que S2 et S3 soient équivalents à S1 + consistance(S1).

2. Classification des indécidables de Gödel

Dans ce paragraphe nous présentons une classification des indécidables de Gödel et pour chaque type d'indécidables nous imaginons un petit dialogue entre **Monsieur Insignifiance** qui ne trouve aucun intérêt mathématique réel à ces indécidables, et **Monsieur Importance** qui lui leur trouve un sens et défend l'idée qu'ils sont d'authentiques résultats mathématiques. Les dialogues sont quelque peu naïfs, sauf à propos des derniers éléments de la classification où ils prennent un tour un peu plus technique.

2.1. Les indécidables de Gödel donnés par la démonstration du premier théorème d'incomplétude de Gödel

Ils ont un sens simple, moyennant des considérations métamathématiques sur la prouvabilité.

Ils signifient en effet: «je ne suis pas démontrable dans S1».

S1 peut être n'importe quel système extension (primitive récursive) du système Q de Robinson qui est un système plus faible que PA (l'arithmétique du premier ordre de Peano) et même que PRA (l'arithmétique primitive récursive). Voir par exemple (Boolos Jeffrey 1980) pour des définitions précises, voir aussi (Girard 1987) où Q est noté EA. La restriction aux extensions primitives récursives n'est pas une véritable restriction (voir Girard 1987: 58).

Ils sont démontrés exister, mais mieux que cela, ils sont produits effectivement: si S1 est donné, la démonstration de Gödel permet d'expliciter un indécidable de S1.

Pour S2 on peut prendre S1+consistance(S1). Dans la démonstration originale de Gödel S3 est plus fort que S1+consistance(S1) puisque Gödel utilisait l'ω-consistance de S1 (l'impossibilité dans S3 de démontrer ∃n P(n) en même temps que nonP(0) nonP(1) etc. C'est Rosser (1936) qui en modifiant l'énoncé de Gödel (qui n'a donc plus un sens aussi simple) a permis de prendre S2=S3= S1+consistance(S1).

Les formulations (données par Kleene) du premier théorème de Gödel utilisant les concepts de la théorie de la récursivité sont très intéressantes, elles s'appliquent à tout système formel et d'une certaine façon éclairent le phénomène de l'indécidabilité: l'ensemble des vérités de l'arithmétique du premier ordre n'est pas récursivement énumérable, l'ensemble des théorèmes que peut démontrer un système formel est toujours récursivement énumérable (à cause des conditions d'effectivité qu'on impose aux systèmes formels: il faut qu'un procédé mécanique puisse vérifier si une suite donnée de formules est bien une démonstration) donc **aucun système formel ne peut produire que des vérités de l'arithmétique du premier ordre et les produire toutes.**

Monsieur Insignifiance: ces énoncés étranges qui affirment au travers d'un codage épouvantable leur propre indémontrabilité sont des divertissements mathématiques amusants et non des mathématiques.

Monsieur Importance: le paradoxe du menteur, et les paradoxes de la théorie des ensembles qui se présentent sous des formes très proches ont touché les mathématiciens du début du siècle, qui y ont vu plus que des divertissements insignifiants, alors pourquoi refuser de considérer comme authentiquement mathématiques ces premiers indécidables. Il est dans la nature des mathématiques de s'intéresser à toutes les conséquences qu'on peut tirer des méthodes de raisonnement dont elles disposent. Ce que fait le premier théorème de Gödel, ce n'est que cela.

2.2. Les indécidables de Gödel donnés par la démonstration du second théorème d'incomplétude de Gödel

> «I regard Hilbert as a mathematician and thus his beloved consistency as mathematical» (Smorynski 1982).

> «I do not know of any case where anything of clear mathematical interest can be proved from T + cons(T) that cannot be proved already from T (except cons(T) itself)» (Drake 1985: 30).

Les indécidables du second théorème d'incomplétude (qui sont équivalents à ceux donnés par le premier théorème, (Smorynski 1977: 829)) ont un sens encore plus simple, toujours moyennant des considérations métamathématiques sur la prouvabilité.

Ils signifient en effet: «le système S1 est consistant».

Comme précédemment ils sont produits effectivement.

Le système S1 peut être n'importe quelle extension (primitive récursive) du système PRA de l'arithmétique primitive récursive (plus forte que le système Q) (Boolos Jeffrey 1980; Girard 1987).

Comme précédemment pour S2 et S3 on peut prendre S1+consistance(S1), mais bien sûr démontrer la consistance de S1 dans un système qui contient comme axiome la consistance de S1 ne paraît pas très intéressant, aussi pour S3 il est plus naturel de penser qu'on fait appel à une théorie puissante comme l'arithmétique du second ordre ou ZF, ou une théorie contenant un principe d'induction.

Dans le cas où S1 est ZF pour se convaincre de consistance(ZF) on peut faire appel à des axiomes de grands cardinaux qui en un certain sens sont naturels et plausibles, mais bien évidemment plus on considère des théories fortes plus la consistance de ces théories devient problématique. Comme nous l'avons déjà indiqué certains axiomes forts concernant les grands cardinaux sont suspectés d'être inconsistants! (voir par exemple Maddy 1988).

Monsieur Insignifiance: Si on ne s'était pas intéressé à la formalisation des démonstrations aucun mathématicien n'aurait jamais rencontré ces énoncés étranges, dont on ne peut comprendre le sens littéral tant ils sont compliqués et tant est indéchiffrable la codification qui les lie à leur interprétation métamathématique.

Monsieur Importance: Si on peut prétendre que les indécidables produits par le premier théorème de Gödel sont d'intérêt mathématique douteux, cela est plus difficile pour les indécidables du second: la consistance de l'arithmétique de Peano est un problème qui avait été étudié avant qu'on sache qu'elle était indécidable (pour PA). Par Hilbert lui-même! (Cf. la citation de Smorynski). Le codage est désagréable certes mais il est possible dans tout système contenant un peu d'arithmétique et c'est justement parce qu'il est possible qu'on rencontre cette difficulté. Ou bien il faut le rendre impossible (comme en calcul propositionnel ou en géométrie élémentaire) ou bien il faut en accepter les conséquences. A ce propos, notons que N. Bourbaki qui juge par ailleurs d'intérêt mathématique secondaire la théorie de la démonstration (et donc les théorèmes de Gödel) dit de la démonstration de Gödel qu'elle est ingénieuse et que le grand nombre de signes nécessaires pour écrire les indécidables de Gödel bien que les rendant pratiquement impossibles à expliciter est sans gravité car «aucun mathématicien ne pense que cela diminue en rien la valeur de ces constructions» (Bourbaki 1969: 60).

2.3. Les indécidables de Gödel produits par la théorie de la récursivité

Développée à partir de 1936 la théorie de la récursivité (c'est-à-dire de la calculabilité) a produit un grand nombre d'indécidables de Gödel, soit directement, soit indirectement.

A chaque fois qu'on démontre qu'un ensemble A n'est pas récursivement énumérable cela signifie que pour tout système formel S une instance au moins de la formule «n appartient à A» est un indécidable de Gödel pour S. A chaque fois en particulier qu'on établit qu'un problème P(n) (dépendant d'un paramètre n) est indécidable, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'algorithme qui pour chaque donnée n puisse produire la solution à P(n) (attention à ne pas confondre 'problème indécidable' qui est une notion absolue, avec 'énoncé indécidable de Gödel' qui est une notion relative à un système formel), cela implique que pour tout système formel correct S au moins une instance du problème est un indécidable de Gödel pour S. (Preuve: Soit S un système formel. Supposons que S donne tous les théorèmes P(n) = R et qu'il ne se trompe jamais, c'est-à-dire supposons que S est correct et complet pour toutes les instances de P(n). L'algorithme d'énumération des théorèmes de S qui existe par définition d'un système formel, fournit alors une procédure de résolution pour P(n) ce qui contredit l'indécidabilité du problème P(n)).

Le premier exemple de problème indécidable est le problème de l'arrêt des machines de Turing, donc: pour tout système formel correct S, il existe au moins une machine de Turing bien précise (et qu'on peut expliciter) qui ne s'arrête pas et dont S ne peut pas démontrer le non-arrêt.

De la même façon pour tout système formel fixé correct S, il existe un couple de programmes d'ordinateurs (Pr1, Pr2) (par exemple écrits en Pascal) calculant la même fonction de N dans N et tel que la preuve de leur équivalence échappe à S (indécidabilité de l'équivalence des programmes).

De la même façon encore pour tout système formel correct S, il existe une configuration finie du jeu de la vie de Conway donnant lieu à une croissance indéfinie et qui échappe au pouvoir de démonstration de S. (Indécidabilité du devenir ultime d'une configuration du jeu de la vie (Berlekamp Conway Guy 1982). Définition du jeu de la vie de Conway: un damier infini; certaines cases occupées par des pions; pour passer d'une configuration à la configuration suivante on applique les règles si une case est vide et possède trois voisins (parmi les huit possibles) alors elle devient occupée, si une case est occupée et possède deux ou trois voisins elle reste occupée, dans tous les autres cas la case sera vide dans la configuration suivante).

Des résultats d'indécidabilité en algèbre, en topologie donnent aussi naissance à des indécidables de Gödel pour tout système formel. Voir par exemple Davis (1977).

Hartmanis et Hopcroft ont tenté d'établir que le fameux problème P=?NP était indépendant des axiomes de ZF, et bien qu'ils n'aient pas réussi, ils ont quand même montré que certaines versions relativisées $P^I=?NP^I$ sont indépendantes de ZF. En fait leur résultat est plus général: pour tout système formel S, ils construisent explicitement un oracle récursif I pour lequel $P^I=NP^I$ et $P^I\neq NP^I$ ne sont pas démontrables dans S (Hartmanis & Hopcroft 1976). Dans le même travail ils explicitent aussi la construction d'un algorithme tel qu'on peut l'ajouter à ZF sans introduire d'inconsistance qu'il fonctionne en temps n^2 ou qu'il fonctionne en temps 2^n.

Monsieur Importance: Cette indécidabilité est concrète puisqu'on peut réaliser mécaniquement des systèmes simulant des machines de Turing, ou le jeu de la vie de Conway, etc. L'indécidabilité des énoncés évoqués pour les machines de Turing ou le jeu de la vie de Conway, ou la complexité des algorithmes, signifie donc qu'aucune théorie physique (formalisée) ne sera jamais en mesure de tout dire du monde mécanique, et donc *a fortiori* du monde physique: quelle que soit la théorie (formelle) qu'on proposera il existera toujours un système physique fini (simulant une machine de Turing ou le jeu de la vie, etc.) dont le devenir ne pourra être prévu par la théorie.

Monsieur Insignifiance: Il s'agit du devenir 'à l'infini', or qui en physique s'intéresse au devenir de quoi que ce soit à l'infini? Les énoncés indécidables produits à partir des problèmes indécidables ne nous concernent pas vraiment. Par exemple les machines de Turing dont le comportement échappe à ZF + AC sont sans intérêt pour nous et nous ne les construirons jamais, ni ne nous y intéresserons jamais.

Monsieur Importance: Pas d'accord, je peux très raisonnablement écrire un programme qui produise une énumération des théorèmes de ZF + AC et s'arrête s'il rencontre la démonstration de 0=1. Le non-arrêt de ce programme (si ZF + AC est consistant) est un indécidable de Gödel (pour ZF + AC). Ce programme est-il si déraisonnable?

Monsieur Insignifiance: Oui, car comme je viens de le dire, ce programme s'arrêtera à cause des limitations de ressource du système informatique que vous utiliserez, ou à cause de sa non fiabilité parfaite, et donc son comportement 'à l'infini' n'est pas un problème du monde physique. De toutes façons il est ridicule d'écrire un programme comme celui que vous évoquez car on sait bien que les techniques de démonstration automatique (et celle que vous utilisez en particulier) sont impuissantes à produire des énoncés mathématiques ayant un quelconque intérêt en temps raisonnable.

Monsieur Importance: Ce n'est pas exact et par exemple le second théorème de Gödel a été produit par un système de démonstration automatique. (Beeson 1988).

Monsieur Insignifiance: Justement cela ne prouve rien puisque le second théorème n'a pas d'intérêt mathématique authentique!!!

Monsieur Importance: Il n'empêche que les résultats d'indécidabilité sont utiles en informatique: il est arrivé bien des fois qu'on découvre qu'un problème dont on cherchait la solution, était indécidable (par exemple le problème de l'utilité d'un morceau de code dans un programme) et qu'on renonce à le résoudre complètement à cause de l'indécidabilité.

Monsieur Insignifiance: C'est très exagéré, car ce qui compte en informatique c'est la possibilité de résoudre pratiquement un problème. Si on accepte d'identifier «pratiquement» avec «en temps polynomial» ce qui est communément fait (mais est discutable Gurevich 1989) alors ce ne sont pas les questions d'indécidabilité qui sont importantes mais l'analyse d'algorithme.

2.4. Les indécidables de Post, Barzdin, Chaitin de la théorie des ensembles immunes

2.4.1. «Tous indécidables sauf un nombre fini»

Que la famille infinie des vérités de l'arithmétique élémentaire soit telle qu'un système formel en laisse nécessairement échapper certaines, ce n'est peut-être pas très grave. Mais il est certainement gênant de penser qu'il existe des familles d'énoncés mathématiques dont tout système formel (correct vis-à-vis d'eux, c'est-à-dire qui n'en démontre jamais de faux) ne peut en produire qu'un nombre fini. Pour de telles familles et quel que soit le système formel donné, tous les énoncés sont indécidables sauf quelques-uns.

L'existence de telles familles est liée à ce qu'on appelle les ensembles **immunes** (en termes précis: infinis et ne contenant aucun sous-ensemble infini récursivement énumérable). Les premiers exemples explicites de tels ensembles ont été produits dans les années 40 et 50 par Post et les théoriciens des fonctions récursives (voir par exemple Rogers 1967). Leurs définitions ne sont pas très compliquées mais aujourd'hui on en connaît d'autres assez extraordinaires venant de la théorie algorithmique de l'information.

2.4.2. Les immunes de la théorie algorithmique de l'information

La théorie algorithmique de l'information définit la complexité d'un objet fini par la taille du plus petit programme capable de l'engendrer. Si on prend comme ordinateur de référence un ordinateur assez puissant (équivalent à une machine de Turing universelle) alors cette définition ne dépend du choix de l'ordinateur que par une constante. Autrement dit pour tout couple d'ordinateurs universels U V, il existe une constante c_{UV} telle que pour tout objet fini (assimilé à une suite de digits 0 ou 1) on ait:

$$|K_U(s) - K_V(s)| \leq c_{UV}$$

Un ordinateur universel U étant fixé il est naturel de s'intéresser à la famille d'énoncés:

$$K_U(s) = n \quad \text{s suite finie de 0 ou de 1} \quad \text{n entier}$$

Il a été établi par Barzdin et Chaitin (voir Zvonkin Levin 1970; Chaitin 1987a, 1987b) que dans tout système formel correct S, seul un nombre fini d'énoncés de cette famille pouvait être démontré. Donc pour tout système formel correct S, tous les énoncés sauf un nombre fini concernant la complexité algorithmique sont des indécidables de Gödel pour S. Jamais une théorie mathématique formalisée ne pourra dire plus qu'un nombre fini de choses sur la complexité algorithmique des objets finis. Quel que soit S, tous les énoncés de complexité, sauf un nombre fini sont des indécidables de Gödel pour S.

Sur ce sujet on pourra consulter Kolmogorov Uspenskii (1987); Chaitin (1987a, 1987b); van Lambalgen (1989); Delahaye (1989).

2.4.3. Le nombre oméga de Chaitin

Le nombre oméga de Chaitin (défini comme la probabilité pour qu'un ordinateur universel à programmes autodélimités s'arrête lorsqu'on lui donne un programme tiré au hasard) est un nombre réel qu'on peut écrire:

$$0, a_1\, a_2 \dots a_n \dots \qquad a_i = 0 \text{ ou } 1$$

Il est tel qu'un système formel correct S ne peut fournir qu'un nombre fini de digits a_n de oméga, ce nombre de digits étant majoré par la complexité du système formel lui-même, plus une constante (indépendante du système formel S). Quel que soit S, tous les énoncés donnant les digits de oméga sauf un nombre fini sont des énoncés indécidables de Gödel pour S. Voir Chaitin (1987b, 1987a), Bennett (1979), Delahaye (1989).

Ce nombre oméga apparaît quelque peu magique puisque la connaissance de ses mille premiers digits donnerait un algorithme pour résoudre la plupart des conjectures mathématiques célèbres et en tout cas toutes celles de la forme: dans tel système formel S tel énoncé est-il démontrable? (par exemple: le grand théorème de Fermat est-il démontrable dans l'arithmétique de Peano?) pourvu que la conjecture s'exprime assez brièvement, ce qui est le cas de toutes les conjectures jugées intéressantes! (Bennett 1979). La raison de ce pouvoir du nombre oméga provient de ce qu'il contient sous une forme compressée la solution du problème de l'arrêt de toutes les machines de Turing. Mais remarquons (Bennett 1988) que même si on connaissait les mille premiers digits de oméga le temps nécessaire pour en extraire la solution des conjectures intéressantes serait tellement grand qu'on ne pourrait vraiment l'exploiter (l'information est trop compressée dans oméga, le temps de décompression est donc très long).

Il semble avec ces résultats qu'on ait atteint un étonnant «concentré» d'indécidabilité.

Monsieur Importance: Que la complexité d'un objet fini soit intéressante est évident et donc le résultat sur l'impuissance d'un système formel à traiter plus qu'un nombre fini de cas du problème de la détermination de complexité donne bien des indécidables de Gödel intéressants et simples.

Monsieur Insignifiance: D'abord l'intérêt pratique de la théorie algorithmique de l'information peut être mis en doute, à cause de la fameuse constante c_{UV} qui, il faut le dire, peut devenir aussi grande qu'on veut lorsqu'on choisit mal sa machine universelle. Ensuite cette théorie est tellement ineffective que bien qu'elle indique qu'il y a beaucoup d'indécidables, elle n'en fournit aucun explicitement. Le théorème de Gödel lui est constructif et permet de produire effectivement les indécidables dont il indique l'existence. Van Lambalgen dit même du résultat évoqué plus haut qu'à cause de cette ineffectivité, les résultats de Chaitin sont plutôt «a weak form rather than an extension, of the first incompleteness theorem» (van Lambalgen 1989: 1394).

Monsieur Importance: Le point de vue de van Lambalgen est lui-même discuté et nombreux sont ceux qui s'accordent à trouver les résultats d'indécidabilité produits par la théorie algorithmique de l'information comme de véritables aggravations des résultats d'indécidabilité de Gödel (Davis 1978; Tymoczko 1986; Delahaye 1989; Chaitin 1987a). Et puis, comment prétendre que cette théorie est sans intérêt pratique alors que justement les physiciens se sont mis à l'utiliser pour reformuler les fondements de la thermodynamique (Bennett 1982; Zurek 1989b; Delahaye 1991). L'entropie d'un microétat d'après eux ne peut être définie rigoureusement par les conceptions classiques, fondées sur l'entropie statistique, car celle-ci ne peut définir l'entropie que pour des ensembles d'états. La solution proposée (qui en même temps permet de retirer un peu de subjectivité aux fondements de la thermodynamique) est d'utiliser la théorie algorithmique de l'information. Si cette théorie devait être adoptée, non seulement les indécidables produits par la théorie algorithmique de l'information ne pourraient plus être déclarés sans intérêt, mais de plus ils se trouveraient recevoir un sens physique.
Par ailleurs à propos des digits de oméga, on peut faire une remarque: Si on considère que les indécidables des systèmes forts comme ZF + AC sont sans intérêt mathématique alors les conjectures usuelles des mathématiques doivent avoir leur solution dans ZF + AC (car on peut simplement les formuler par: C ou non-C résulte-t-il de ZF + AC?), et donc dans les premiers digits de oméga. Soutenir que les indécidables ne concernent pas vraiment les mathématiques revient donc à enfermer les mathématiques dans les premiers digits de oméga. C'est là un réductionnisme involontaire et extrême.

2.5. Les indécidables purifiés. Equations diophantiennes

«Impressive as these results are, the problems they concern are still very distant from the bread-and-butter problems of every day number theory ('everyday' over the last 300 years), because the number of variables is so much larger than is considered in such problems, and the complexities of the polynomials involved is so great (according to various measures of complexity). There is no evidence that these undecidability and incompleteness results have any relevance to the classic unsettled problems they have challenged generations of number theorists. ...» (Feferman 1987: 196).

2.5.1. Le dixième problème de Hilbert

Les problèmes les plus purs des mathématiques sont ceux de l'arithmétique élémentaire, et parmi eux sans doute les plus simples de tous sont ceux liés aux équations diophantiennes comme le fameux Grand Théorème de Fermat. C'est pourquoi les logiciens désireux de convaincre les mathématiciens que l'indécidabilité est bien présente au centre même des mathématiques ont recherché des problèmes indécidables exprimables en termes d'équations diophantiennes, c'est-à-dire de la forme $P(x_1,...., x_n) = 0$ avec P polynôme à coefficients entiers, ou en termes d'équations diophantiennes exponentielles, c'est-à-dire de la forme $P(x_1, ..., x_n) = 0$ où P est une fonction n'utilisant que des entiers, des additions, des multiplications et des exponentiations.

A la suite de la résolution par Matijasevic (1970) du dixième problème de Hilbert qui conclut à l'indécidabilité de la résolution des équations diophantiennes (c'est-à-dire à l'inexistence d'un algorithme traitant de la résolubilité de toutes les équations diophantiennes) il est devenu possible de formuler des versions «purifiées» du théorème de Gödel dont nous donnons ici un exemple tiré de Davis Matijasevic Robinson (1976):

Soit A un système d'axiomes dans un langage comportant les symboles mathématiques 0, s, +, ., < et satisfaisant:

(a) A est consistant;
(b) A est récursivement énumérable;
(c) A est suffisamment puissant pour prouver tous les énoncés vrais de la forme:
a+b=c a.b=c a<b où a, b, c sont l'une des séquences de symboles 0, s0, ss0, sss0, ...

Alors il est possible de construire une équation diophantienne $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ associée à A telle que F=0 n'ait pas de solutions en nombres entiers, mais telle que l'énoncé:
non $\exists x_1 \ldots \exists x_n\, F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ ne soit pas démontrable à partir de A.

2.5.2. Un système d'équations universel

A la suite des travaux sur le dixième problème de Hilbert on a aussi cherché à expliciter des équations insolubles (c'est-à-dire dont aucun système formel ne peut traiter tous les cas). Voici l'un des plus beaux exemples d'un tel système dû à Jones (1982):

Pour tout système formel correct S il existe des valeurs entières de x z u y telles que le système suivant n'a pas de solution et tel que S ne peut pas le démontrer:

$$elg^2+A=(b-xy)q^2n \quad q=b^{5^{60}} \quad L+q^4=1+Lb^5$$

$$T+2z=b^5 \quad l=u+tT \quad e=y+mT \quad b=2^w \quad n=q^{16}$$

$$r=[g+eq^3+lq^5+(2(e-zL)(1+xb^5+g)^4+Lb^5+Lb^5q^4)q^4][n^2-n]$$

$$+[q^3-bl+l+TLq^3+(b^5-2)q^5]\,[n^2-1] \quad Nn^2=(2r)!\,/(r!)^2$$

Ce système d'équations est insoluble parce que:

$$x \in W_{\langle z\,u\,y\rangle} \Leftrightarrow \text{le système a des solutions.}$$

($\langle z\ u\ y\rangle$ désigne un entier qui dépend bijectivement et récursivement de z, u, y, et $W_{\langle z\,u\,y\rangle}$ désigne l'ensemble récursivement énumérable de numéro $\langle z\ u\ y\rangle$).

Tout problème du type «F résulte-t-il du système formel S» peut être traduit dans ce système d'équations en calculant le numéro de F et le numéro de l'ensemble r.é. qui correspond à l'ensemble des théorèmes de S. On en déduit d'ailleurs que tout théorème peut être «prouvé» grâce à ce système d'équations avec quelques multiplications et additions (en fait à l'aide d'un autre système du même genre Jones montre que toute démonstration est équivalente à au plus 100 additions et multiplications).

2.5.3. Une équation dont tous les cas sauf un nombre fini sont indécidables

La théorie algorithmique de l'information elle aussi a voulu formuler ses résultats sous forme spectaculaire et purifiée. Cela donne le résultat de Chaitin:

Il existe (et on peut effectivement l'écrire) une équation diophantienne exponentielle $P(m, x_1, ..., x_n) = 0$ telle que tout système formel correct S, ne peut résoudre qu'un nombre fini (de l'ordre de la complexité algorithmique de S) de cas du problème: (m fixé, $P(m, x_1, ..., x_n) = 0$ a-t-il un nombre fini de solutions)? Voir Chaitin 1987b, 1987c; Delahaye 1989; van Lambalgen 1989. Tous les cas du problème de l'équation de Chaitin sauf un nombre fini d'entre eux sont donc des indécidables de ZF + AC (ou de n'importe quel système formel).

Monsieur Importance: Il me semble qu'aucun doute n'est plus possible sur la simplicité des énoncés indécidables qu'on peut rencontrer en mathématiques, ni sur leur fréquence.

Monsieur Insignifiance: Sauf que des systèmes d'équations comme celui écrit plus haut, aucun mathématicien n'en a jamais étudié un seul. Ces systèmes sont toujours écrits en transformant un problème métamathématique sous forme arithmétique: ils sont faits exprès! ce ne sont que des problèmes métamathématiques déguisés! Quant à l'équation de Chaitin elle présente quelques inconvénients: d'abord on ne s'intéresse pas à l'existence d'une solution mais à l'existence d'une infinité de solutions (ce qui est déjà moins simple et fait quitter le fini dont justement l'arithmétique est le langage); mais de plus un système formel S étant donné, il est impossible de connaître d'une façon effective ne serait-ce qu'un seul cas de l'équation qui échappe à S: on sait que tous sauf un nombre fini échappent à S mais on ne peut en connaître précisément aucun; enfin l'équation de Chaitin une fois écrite comporte 12000 variables et occupe 200 pages: si elle n'était la traduction arithmétique d'un autre problème, il est certain, que jamais aucun mathématicien ne s'y serait intéressé.

2.6. Les indécidables de la théorie des ensembles

> «CH is thus an example of an **"interesting"** statement about sets which is independent of the axioms of ZFC. (...). These results (about abelian groups), and others too numerous to mention, show that many **interesting Mathematical questions** cannot be settled on the basis of the Zermelo-Fraenkel axioms for set theory» (Mac Lane 1986: 385).

> «Ce système (ZF) correspond exactement aux besoins de tous les mathématiciens, excepté, bien sûr, les logiciens et aussi ceux que leur attitude philosophique empêche d'accepter les prémisses d'un tel système, c'est-à-dire les mathématiciens dits intuitionnistes ou constructivistes» (Dieudonné 1982: 17).

On sait que le système le plus simple donnant satisfaction aux mathématiciens est ZF + AC, et qu'il est bien sûr sujet aux théorèmes d'incomplétude de Gödel. Mais, et c'est plus intéressant, il est facile de produire directement des énoncés indécidables de ZF + AC, et cela sans avoir recours à un codage, c'est-à-dire sans avoir à utiliser la méthode donnée dans la démonstration des théorèmes d'incomplétude de Gödel.

L'hypothèse du continu HC par exemple est un tel énoncé. Mais même ZF + AC + HC peut facilement être dépassé, par exemple avec un axiome de grand cardinal, comme l'axiome de l'existence de cardinaux inaccessibles.

Depuis la mise au point par Cohen de la technique du «forçage» (1966; Kunen 1980) de nombreux énoncés ont été produits et démontrés indépendants de ZF + AC. En fait des hiérarchies infinies de systèmes plus forts que ZF + AC ont été définies par les théoriciens des ensembles. Ces résultats confirment en un certain sens que les indécidables sont bien là, et que pour les produire il n'est pas nécessaire de recourir à du codage.

Parmi ces axiomes indépendants il faut distinguer ceux qui ont des effets arithmétiques de ceux qui n'en ont pas. Ceux qui n'ont pas d'effets arithmétiques produisent des systèmes formels qui ne sont pas plus forts puisqu'ils ne permettront pas de montrer 0=1 si cela n'était pas possible sans eux.

Les axiomes AC, HC, V=L par exemple n'ont pas d'effets arithmétiques (aucun nouvel énoncé d'arithmétique ne peut être produit par eux qui ne soit déjà produit par ZF, les ajouter ne donne pas un système formel plus fort). Par contre les axiomes d'existence de grands cardinaux eux, impliquent la consistance de ZF et donc ont des conséquences arithmétiques et même des conséquences «diophantiennes».

Ainsi que nous le verrons aussi pour les sous-systèmes de l'arithmétique du second ordre, il y a deux manières de compléter un système formel en lui ajoutant des indécidables: soit on n'en modifie pas la force arithmétique (extension conservative) soit on la modifie. Les extensions qui ne modifient pas la force arithmétique sont bénignes, les autres prennent des risques.

La force d'une extension peut être mesurée par ses effets arithmétiques: ce qui établirait définitivement que «l'infini compte pour le fini» serait la démonstration d'un énoncé arithmétique intéressant (et ne résultant pas simplement d'un codage) grâce à des axiomes «risqués» comme ceux d'existence de grands cardinaux. Ce serait la preuve que réellement même lorsqu'il ne s'agit que de l'arithmétique les indécidables ont du sens. Ce serait la preuve que lorsqu'il s'agit des entiers il faut réellement accepter d'utiliser plus que PA.

Ce pas, Friedman (1987) pense l'avoir franchi en montrant par l'utilisation d'un axiome d'existence de grands cardinaux (cardinaux de Mahlo), un énoncé combinatoire pur qui n'est pas la simple codification arithmétique d'un énoncé métamathématique. L'énoncé en question n'est pas suffisamment simple pour pouvoir être reproduit ici (nous verrons des énoncés combinatoires analogues mais plus simples au paragraphe suivant) et Friedman reconnaît d'ailleurs qu'il faut sans doute encore simplifier ses énoncés combinatoires.

Feferman (1987) lui est sceptique, et se demande s'il n'y aurait pas une forme de cercle vicieux dans l'utilisation faite de ces énoncés par ceux qui y voient une preuve de l'importance des mathématiques de l'infini pour les mathématiques du fini: on prétend que des principes ensemblistes infinitistes forts peuvent produire des énoncés arithmétiques intéressants et vrais, mais en fait la seule raison qu'on a de croire que ces énoncés arithmétiques sont vrais est qu'ils sont équivalents aux énoncés ensemblistes qui permettent de les produire. On se convainc donc de l'importance des axiomes de grands cardinaux pour le fini en les supposant consistants, alors que justement ils ne sont importants que s'ils sont consistants.

Rien ne nous interdit de croire que les énoncés combinatoires que Friedman produit ne sont que le codage déguisé d'énoncés de consistance, comme les équations arithmétiques du paragraphe précédent l'étaient. Cela n'apparaissait pas au premier coup d'œil (voir le système de Jones), le progrès de Friedman serait simplement d'avoir su mieux déguiser le codage.

Certains spécialistes de la théorie des ensembles recherchent des axiomes qui pourraient entraîner HC ou non HC. Et bien que des avancées aient été réalisées ces dernières années (Maddy 1988) pour l'instant le problème de trouver des axiomes qui aient des conséquences sur HC (ce qui établirait que certains indécidables ont un rôle à jouer) reste irrésolu. A ce propos il faut remarquer que si vraiment les indécidables sont importants alors la recherche de nouveaux axiomes est dans l'essence des mathématiques mêmes, et donc le fait que très peu de mathématiciens s'adonnent à cette recherche confirme bien que dans sa pratique le mathématicien ordinaire ne croit pas à la véritable portée des indécidables.

Monsieur Importance: La multitude d'énoncés indécidables qui a été produite en théorie des ensembles montre bien que pour les systèmes les plus puissants le phénomène d'indécidabilité se produit encore, et cela sans avoir recours à aucun codage. Dès qu'on cherche un peu on rencontre les indécidables de Gödel. C'est faire un drôle de pari que croire qu'ils ne peuvent jamais intervenir dans un vrai problème.

Monsieur Insignifiance: Les énoncés indécidables de ZF + AC n'ont jamais servi jusqu'à présent en mathématiques à résoudre de vrais problèmes, seuls les logiciens les utilisent et s'y intéressent. Et d'ailleurs les mathématiciens (à l'exception de quelques logiciens en théorie des ensembles) ne recherchent pas de nouveaux axiomes susceptibles de compléter ZF + AC. Par leur pratique ils montrent donc que pour eux l'indécidabilité n'a jamais à être envisagée: sans doute attendent-ils pour changer d'attitude qu'on leur montre de vrais problèmes où leurs bons vieux axiomes sont insuffisants! La très grande énergie dépensée (depuis plus de vingt ans) à utiliser les méthodes de forçage n'a en définitive rien produit de très intéressant pour le mathématicien non logicien.

Monsieur Importance: Il faut laisser aux mathématiques le temps de se faire: les derniers résultats de Friedman s'ils n'établissent pas définitivement la preuve de l'importance mathématique des indécidables de ZF + AC, approchent le but de très près. La recherche de nouveaux axiomes ayant des conséquences sur les sous-ensembles de R et en particulier sur HC progresse, les succès même partiels de ces recherches prouvent indirectement et d'une autre façon que les indécidables ont du sens.

2.7. Les indécidables de Paris-Harrington et Friedman

> «A **new landmark** in the expanding evolution of theory started by Gödel's 1931 is the discovery by Paris and Harrington in 1977 of **a mathematically simple and interesting proposition**, not depending on a numerical coding of notions from logic, which is undecidable» (Kleene 1986: 140).

> «The instructions for constructing G are quite indirect; if they were carried out explicitly, the result would be a very long formal sentence,

involving many intercalated references to prime factorizations. Considered just as a sentence of arithmetic, G is not very interesting. Recently J. Paris has constructed **a true and relevant sentence** of Peano arithmetic which is not provable in that arithmetic» (Mac Lane 1986: 383).

«Jusqu'à ces dernières années, les seules arithmétiques non classiques et consistantes (si l'on suppose consistants les axiomes de Peano) étaient artificiellement obtenues au moyen des formules indécises construites par Gödel, **formules atrocement compliquées et dépourvues d'intérêt mathématique**, leur existence seule étant importante pour les logiciens. Depuis 1976 sont apparues des formules arithmétisant le théorème de Ramsey» (Fraïssé 1982: 51).

«Although this result of Gödel is astonishing and remarkable, the criticism has often been raised that Gödel's concrete examples of unprovable finite combinatorial theorems are mathematically rather artificial, since they involve coding of logical syntax. This objection is to be taken seriously, for it is just conceivable that all mathematically meaningful finite combinatorial theorems are provable. The situation has become much clearer as a result of the 1977 work of Paris and Harrington. Namely, this work furnished **a completely transparent theorem of finite combinatorics** which is not provable in PA» (Simpson 1985: 88).

«It seems to me that as one passes from statements of the sort provided by Paris-Harrington and Kirby-Paris for PA, through those provided by Friedman for ATR0 and $(\Pi^1{}_1\text{-CA})_0$, on to those provided by Buchholz for $(\Pi^1{}_1\text{-CA})$+BI the connection with practice becomes more and more tedious. Viewed as an observer from the side-lines, there is a nagging feeling that the statements still have a 'cooked-up' look» (Feferman 1987: 201)

Depuis 1977 des énoncés purement combinatoires et ne résultant pas du codage direct d'énoncés métamathématiques ont été produits et démontrés être des indécidables par exemple pour PA (l'arithmétique de Peano). Ces nouveaux résultats sont unanimement considérés comme un pas en avant dans la démonstration de l'importance (de la gravité?) de l'indécidabilité.

Nous allons en donner deux exemples, à chaque fois avant d'arriver à l'énoncé indécidable nous en présentons des formes intermédiaires.

2.7.1. Le résultat de Paris-Harrington

Théorème de Ramsey infini (1928): Pour tout k et toute partition C1, C2, ..., Cr de l'ensemble $[N]^k$ des parties à k éléments de l'ensemble des entiers N, il existe un ensemble infini M de N tel que $[M]^k$ est inclus dans l'un des Ci.

Cas particulier k=r=2: tout graphe infini complet dont les arcs sont rouges ou verts est tel qu'il existe un sous-graphe infini dont tous les arcs sont de la même couleur.

Théorème de Ramsey fini: Pour tout k, r, m il existe un n tel que si N est un ensemble de n entiers et que C1, C2, ..., Cr est une partition de $[N]^k$ alors il existe M inclus dans N, ayant plus de m éléments tel que $[M]^k$ est inclus dans l'un des Ci.

Cas particulier k=r=2: Pour tout m il existe un n tel que tout graphe complet de plus de n nœuds dont les arcs sont rouges ou verts, contient un sous-graphe complet unicolore de plus de n nœuds.

Exemple: tout ensemble de six personnes contient trois personnes qui, soit se connaissent deux à deux, soit sont étrangères deux à deux: pour n=3, m=6 convient. (voir Graham Spencer 1990).

Théorème de Ramsey fini de Paris et Harrington: Pour tout k, r, m il existe un n tel que si N est un ensemble de n entiers et que C1, C2, ..., Cr est une partition de $[N]^k$ alors il existe M inclus dans N, ayant plus de m éléments tel que $[M]^k$ est inclus dans l'un des Ci et tel que cardinal(M) ≥ minimum(M).

Ce résultat purement combinatoire ne faisant référence ni à la logique, ni à aucune notion d'algorithme a été montré indépendant des axiomes de l'arithmétique du premier ordre PA. (Paris Harrington 1977).

On peut remarquer que c'est un énoncé de la forme «pour tout n il existe m: P» avec P primitif récursif. Les indécidables arithmétiques que donnent le théorème de Gödel sont de la forme «pour tout n: P» P primitif récursif. Chaque instance est prouvable (k, r, m fixés) c'est la rapidité de croissance de la fonction qui échappe à l'arithmétique de Peano (Smorynski 1982; Gallier 1991).

L'énoncé de Paris-Harrington équivaut à un énoncé de consistance: celui de la théorie obtenu en ajoutant consistance(PA) à PA, puis consistance(PA+ consistance(PA)), etc jusqu'à l'ordinal ε_0 (Smorynski 1982).

2.7.2. Le résultat de Friedman sur le théorème de Kruskal

Théorème de Kruskal: si T1, T2, ... est une suite infinie d'arbres alors il existe i et j, i<j tels que Ti est homéomorphe à une partie de Tj.

Ti est homéomorphe à une partie de Tj signifie qu'en enlevant des morceaux de Tj on peut obtenir un arbre exactement semblable à Ti.

Forme finie du Théorème de Kruskal de Friedman (FFF): Pour tout k il existe un n tel que si T1, ..., Tn est une suite d'arbres vérifiant cardinal(Ti)≤k.i, alors il existe i et j, i<j≤n tels que Ti est homéomorphe à une partie de Tj.

Le théorème de Kruskal entraîne directement la forme finie. La forme finie est un énoncé d'arithmétique et Friedman a montré qu'elle était un indécidable de l'arithmétique de Peano, et même qu'elle était indécidable pour des systèmes plus forts. (Simpson 1985; Smorynski 1982; Feferman 1987; Gallier 1991).

Cette fois-ci l'énoncé est encore très simple mais sa force est bien plus grande. En fait il équivaut à l'énoncé de consistance d'une théorie non prédicative, et certains y ont vu la réfutation de la philosophie prédicative des mathématiques:

> «FFF is a concrete assertion about finite objects instantly understandable to any predicativist (predicatician?); but any proof of it must appeal to impredicative principles. In short FFF would have been meaningful to Poincaré, but he would not have been able to prove it or disprove it or accept any proof of it given to him» (Smorynski 1982: 187).

La simplicité de ces énoncés est grande mais n'empêche pas de remarquer que:

> «None of the statements P (of Paris-Harrington or FFF) thus shown to be independant were previously considered *per se* in ordinary combinatorial work. It is a matter of pure speculation whether they would naturally have arisen for consideration in the normal course of such work» (Feferman 1987: 202).

Monsieur Importance: Cette fois-ci il n'y a plus de codage les énoncés sont simples et ont un contenu mathématique immédiat.

Monsieur Insignifiance: Oui, c'est mieux mais il faut bien constater que ces énoncés-là sont toujours des produits de logiciens et non pas de mathématiciens. Je me demande, comme pour les équations diophantiennes et la théorie des ensembles, si ces prétendus énoncés simples indécidables ne sont pas uniquement un progrès de la codification.

3. Le sens des résultats récents de la théorie de la preuve

> «The necessary use of higher set theory in the mathematics of the finite has yet to be established. (...). Higher set theory is dispensable in scientifically applicable mathematics» (Feferman 1987: 153).

> «Despite Gödel's theorem, one can give a finistic reduction for a subtantial portion of infinistic mathematics including many of the best-known nonconstructive theorems» (Simpson 1988: 349).

> «I would estimate that at least 85% of existing mathematics can be formalized with in WKL_0 or WKL_0^+ or stronger systems which are conservative over PRA with respect to Π^0_2 sentences». (Simpson 1988: 361).

Deux types de résultats récents en théorie de la preuve conduisent à des conclusions intéressant notre propos. Pour plus de détails et des définitions précises on se reportera à Simpson (1985a, 1985b, 1986, 1988); Friedman (1980, 1986); Feferman (1987, 1988); Harrington/Morley/Scedrov/Simpson (1985).

3.1. Réductibilité et extensions conservatives

Il y a d'une part les résultats de réductibilité et d'extensions conservatives: certains systèmes formels entre Z1 (arithmétique du premier ordre, aussi notée PA) et Z2 (arithmétique du second ordre) sont suffisamment forts pour contenir toutes les mathématiques ordinaires et pourtant sont des extensions conservatives vis-à-vis des formules Π^0_2 de PA ou PRA (arithmétique primitive récursive). Ces systèmes ne sont donc pas logiquement plus puissants que PA (ou PRA) et dans ces systèmes la consistance de PA (ou PRA) reste indécidable. Par contre ils sont mathématiquement plus puissants: concernant l'infini ils donnent plus de résultats. Cela prouve qu'en un certain sens la consistance de PA (ou PRA) n'est pas un «vrai énoncé des mathématiques ordinaires». Ces systèmes, si on les identifie aux mathématiques «réelles», prouveraient que les indécidables (de type consistance(S)) ne concernent pas les mathématiques. Concernant PA et l'idée que c'est un système complet pour l'arithmétique on lira Isaacson (1987, 1991).

Ici il faut donner quelques précisions sur les mathématiques ordinaires.

> «By ordinary mathematics we mean roughly speaking, mainstream or non-set-theoretic mathematics, i.e. mathematics as it was before the abstract set theorists got hold of it (or perhaps: as it would have been if the abstract set theorists had never gotten hold of it). Thus ordinary mathematics includes number theory, geometry, calculus, differential equations, real and complex analysis, combinatorics, countable algebra, separable Banach spaces, computability theory, and topology of complete separable metric spaces. It does not include abstract functional analysis, abstract set theory, universal algebra, or general topology» (Simpson 1985: 461).

S. Feferman parle aussi de «scientifically applicable 20th century mathematics». Son point de vue sur la possibilité de développer toutes les mathématiques ordinaires dans des systèmes formels conservatifs vis-à-vis de PA est d'ailleurs très clair:

> «It seems then that all of applicable classical and modern analysis can be developed in this [VTμl] conservative extension of PA» (Feferman 1987: 206).

La vision des mathématiques données par les résultats sur les extensions conservatives de PA est assez nouvelle: partant d'un système intuitivement clair et évident comme PA (qu'il n'est pas question de chercher à fonder!) deux grandes familles d'extensions seraient possibles:

- La famille des extensions comme Z2, ZF, ZF+{axiomes grands cardinaux}, etc. qui étendraient les énoncés élémentaires Π^0_1 de l'arithmétique qu'on peut démontrer et qui en particulier décideraient (positivement bien sûr) de la consistance de PA. Avec de tels systèmes l'indécis diminue mais la consistance devient de plus en plus douteuse. C'est la voie des mathématiques dangereuses, des mathématiques qui prennent le double risque de l'inconsistance et de l'ontologie illusoire.
- La famille des extensions comme Π^1_0-CA_0 ou VTμl qui s'élèvent aussi au-delà de PA et autorisent bien plus que PA, mais conservativement vis-à-vis de PA et donc sans craindre l'inconsistance, et sans prendre d'engagement ontologique supplémentaire. Ces extensions qui d'une certaine façon refusent de croire au sérieux des indécidables, on le sait ne redonnent pas toutes les mathématiques, mais, et c'est cela qui est nouveau et fascinant, redonnent une part tellement grande des mathématiques qu'on peut y faire toutes les mathématiques applicables. Ces réalisations partielles du programme de Hilbert (Feferman 1988; Simpson 1988; Sieg 1988) sont certainement l'une des nouveautés les plus importantes de ces dernières années en logique.

Devant elles la tentation est grande peut-être de tracer un trait entre les mathématiques de l'illusion qui se complaisent dans l'indécidable et lui attribuent du sens, et les mathématiques ordinaires qui elles s'en passent très bien. Qu'on puisse faire de l'analyse, de l'algèbre dans des extensions conservatives de PA (c'est-à-dire dans des systèmes dont la consistance est aussi assurée que celle de PA) indique entre autres choses que le continu n'oblige pas à l'engagement ontologique qu'on a cru (et auquel les physiciens n'ont jamais souscrit).

En un sens donc au moins, aujourd'hui encore, on peut croire que les indécidables de Gödel sont sans importance mathématique.

3.2. Le programme des «reverse mathematics»

Il y a d'autre part les résultats de ce que Simpson appelle les «reverse mathematics». Une étude soigneuse des sous-systèmes de l'arithmétique du second ordre Z2 montre que la plupart des grands résultats de l'analyse classique sont équivalents à des énoncés existentiels. La hiérarchie simplifiée des sous-systèmes de Z2 mise en évidence par ce programme des «reverse mathematics» distingue quelques systèmes chacun obtenu à partir des autres par ajout d'un ou de plusieurs axiomes existentiels (Simpson 1985; Harrington/Morley/Scedrov/Simpson 1985).

La vue donnée par ces résultats est que certains indécidables des systèmes faibles (qu'il faut justement rechercher) sont exactement les énoncés nécessaires pour passer au niveau suivant. La classification des résultats mathématiques en fonction des hypothèses existentielles qu'ils utilisent (et auxquels ils sont équivalents bien souvent) met en valeur certains indécidables qui se trouvent alors placés au centre même des mathématiques.

De la même façon qu'on considère qu'identifier précisément où sert l'axiome du choix dans les résultats qu'on démontre, et qu'on cherche en arithmétique à purifier les méthodes utilisées, on doit admettre que c'est une véritable activité mathématique que de repérer les bons systèmes et les bons indécidables qui permettent de s'élever sans brusquerie inutile (ZF + AC est trop brusque, et donne beaucoup plus qu'il n'est nécessaire). La recherche des systèmes assez forts mais pas trop forts, la mise en évidence des bons axiomes, c'est-à-dire des bons indécidables est certainement une authentique activité mathématique.

3.3. Deux sortes au moins d'indécidables de Gödel

Les deux vues précédentes semblent se contredire complètement: l'une dénie tout sens aux indécidables, l'autre les met au centre de l'activité mathématique. En fait elles ne se contredisent pas si on distingue soigneusement:

- D'une part les indécidables de consistance, ceux construits par codification de la syntaxe, ceux «construits exprès» comme ceux de Paris-Harrington par exemple et qui même s'ils ressemblent aux énoncés que les mathématiciens étudient d'eux-mêmes n'en sont jamais (on découvre en fait que ces indécidables sont toujours des indécidables de consistance, voir par exemple Smorynski 1982).

- Et d'autre part certains énoncés existentiels (comme le lemme de König, le théorème que toute fonction continue sur [0,1] atteint sa borne supérieure, le théorème de complétude de Gödel, l'axiome du choix) qui produisent des extensions conservatives des systèmes auxquels on les ajoute et donc n'engagent pas plus que les systèmes auxquels on les ajoute.

Monsieur Insignifiance: Puisqu'il y a des systèmes formels qui permettent raisonnablement de faire toutes les mathématiques ordinaires et qui sont des extensions conservatives de l'arithmétique de Peano cela signifie que les indécidables produits par les théorèmes d'incomplétude de Gödel (comme celui qui affirme la consistance de Peano ou d'autres systèmes encore plus forts) sont sans importance mathématique. De même qu'il y a des nombres transcendants de peu d'importance (ceux de Liouville) et des nombres transcendants intéressants (comme Π, e) il y aurait des indécidables «faciles» mais sans intérêt (ceux donnés par les théorèmes de Gödel), et des indécidables profonds, respectueux des noyaux de base des mathématiques.

Monsieur Importance: Mais ce sont d'autres indécidables repérés par le programme des «reverse mathematics» qui aujourd'hui disent réellement ce qu'il en est de la pratique mathématique et donc même s'il ne s'agit pas d'indécidables de consistance (ou de diagonalisation-codification) ce sont quand même les indécidables de Gödel qui sont au centre des mathématiques.

Monsieur Insignifiance: Les indécidables de Gödel (au sens de la définition donnée dans l'introduction) OUI, mais pas les indécidables produits par les théorèmes d'incomplétude de Gödel.

Monsieur Importance: Nous sommes d'accord, il faut distinguer deux types d'indécidables. Je reste persuadé quant à moi que les deux types sont importants ...

Monsieur Insignifiance: ... et moi que les indécidables de consistance ne le sont pas, et que les autres sont des énoncés mathématiques utiles à identifier mais qu'on ne doit pas les considérer comme des indécidables authentiques puisqu'ils ne sont pas indécidables dans les extensions conservatives les plus intéressantes de PA.

4. Conclusion

Les progrès en logique mathématique ces dernières années ont eu deux conséquences remarquables.

(1) Ils ont conduit à proposer beaucoup de nouveaux indécidables. Mais malgré tout aucun énoncé mathématique formulé pour son propre intérêt et indépendant de la logique n'a été montré indécidable, dans un système fort.

(2) Ils ont conduit à des réalisations partielles ou modifiées du programme de Hilbert qui permettent de croire sérieusement qu'on peut faire toutes les mathématiques ordinaires dans des extensions conservatives de systèmes faibles.

Donc aujourd'hui encore en philosophie des mathématiques:

- On peut être **réductionniste** et croire que les indécidables sont sans importance pour les mathématiques applicables (ou ordinaires). Sur ce terrain se rencontrent des mathématiciens convaincus comme Dieudonné que ZF et quelques variantes de ZF constituent un bon cadre pour toutes les mathématiques, et des logiciens qui refusant la philosophie platonicienne considérée comme «moyenâgeuse» (Feferman 1987: 209) tentent d'élaborer des fondements faibles des mathématiques ou au moins des mathématiques ordinaires. Le «**réductionnisme de tranquillité**» du mathématicien «qui travaille», s'accorde avec le «**réductionnisme de perplexité**» du logicien qu'effraient les ontologies débordantes et incroyables. Le premier attend toujours qu'on lui démontre que le Grand Théorème de Fermat ou un «vrai» problème mathématique est indécidable vis à vis de Peano ou de ZF + AC. Le second qui vient de mener à bien des réalisations partielles du programme de Hilbert considère qu'il prouve par là que les indécidables de Gödel d'une certaine façon ne concernent pas les mathématiques ordinaires.

- On peut aussi voir dans les théorèmes d'incomplétude et toute nouvelle occurrence d'indécidables (et particulièrement celles produites par Paris-Harrington et Friedman) la **preuve de la faillite du réductionnisme**. Sur ce terrain le platonicien et l'intuitionniste se rejoignent. Le platonicien considère que les indécidables de l'arithmétique ne sont que la manifestation d'entités de plus hauts niveaux dont ils constituent la preuve indirecte d'existence, l'intuitionniste y voit simplement la manifestation de l'extensibilité indéfinie du concept d'entier et du concept de démonstration.

Aujourd'hui il est clair que c'est cet anti-réductionnisme qui prédomine largement en philosophie des mathématiques. Je pense qu'il a à répondre à bien des questions et qu'une brèche est ouverte dans son assurance trop facile qui se réjouit des indécidables («cooked-up» comme dit Feferman) de Paris-Harrington et Friedman. Cette brèche c'est la mise à jour d'extensions conservatives puissantes de PA qui permettent tout ce dont on a besoin pour la plus grande partie des mathématiques. Et cela sans prendre les engagements sur le «plus loin» et le «plus grand» que nous invitent à souscrire les anti-réductionnistes partisans du monde Cantorien, mais dont on pressent qu'ils défendent un univers trop beau pour être vrai. Et cela aussi sans avoir à se lier pieds et mains comme les autres anti-réductionnistes nous le proposent au nom de mathématiques de l'intuition et de la construction dont ils ont abusivement réduit l'univers.

Note: On remarquera que le «mathématicien qui travaille», par son scepticisme vis-à-vis des indécidables n'est pas du même côté que le platonicien: c'est que le «mathématicien qui travaille» n'a pas besoin vraiment de croire aux objets qu'il manipule: le platonisme déclaré de certains mathématiciens n'est jamais sérieux, seul l'est celui des logiciens en théorie des ensembles.

Monsieur Importance en cœur avec Monsieur Anti-réductionniste: Les indécidables sont partout y compris en arithmétique et en physique. Ils sont la preuve de l'irréductibilité du monde mathématique.

Monsieur Insignifiance en cœur avec Monsieur Réductionniste: Les recherches en théorie de la preuve ont permis de repérer des systèmes formels faibles mais suffisants pour faire toutes les mathématiques ordinaires applicables. Ces systèmes indiquent qu'il n'y a pas d'indécidables intéressants (pour les mathématiques ordinaires), et c'est sans doute ce qui explique l'échec des logiciens, qui pour l'instant n'ont jamais réussi à montrer qu'un énoncé mathématique authentique auquel les mathématiciens s'intéressent pour lui-même, est indécidable vis-à-vis de la théorie de base qui en permet l'expression.

Annexe: Quelques systèmes formels remarquables

Pour plus de détails voir Feferman (1977, 1987, 1988), Friedman (1980, 1986), Gallier (1991), Harrington/Morley/Scedrov/Simpson (1985), Kirby/Paris (1977), Simpson (1985a, 1985b, 1986, 1988), Sieg (1988).

Parmi les systèmes formels mis en évidence par le programme des «reverse mathematics» et de la recherche d'extensions conservatives de PA les systèmes suivants sont les plus importants:

(i) RCA_0 (Recursive Comprehension Axiom) (RCA_0 = {Axiomes de semi-anneau pour N} + Δ^0_1-CA + Σ^0_1-IA).

C'est un sous-système de l'arithmétique du second ordre très faible mais juste assez fort pour prouver l'existence de tous les ensembles récursifs. Il permet de développer les éléments de la théorie des fonctions continues de variables réelles. Dans RCA_0 on peut établir le théorème des intervalles emboîtés pour [0,1] ainsi que le théorème des valeurs intermédiaires. C'est le système qui sert de base à la construction des autres (Simpson 1985).

(ii) WKL_0 est une extension de RCA_0 obtenue en ajoutant le Weak König Lemma WKL_0 qui affirme que tout sous-arbre infini de $2^{<\omega}$ comporte une branche infinie. Kirby et Paris (1977) ont montré que ce système était une extension conservative de PRA vis-à-vis des Π^0_2. C'est aussi une extension conservative de RCA_0 vis-à-vis des Π^1_1.

WKL_0 est un système qui permet de mener un peu plus loin la théorie des fonctions continues de variables réelles.

Dans RCA_0 on a l'équivalence des propriétés suivantes (Simpson 1985):

(i) WKL_0
(ii) Toute fonction continue sur [0,1] est uniformément continue.
(iii) Toute fonction continue sur [0,1] atteint sa borne supérieure.
(iv) Existence locale de solutions pour les équations différentielles ordinaires.

(v) Tout anneau commutatif dénombrable possède un idéal premier.
(vi) Théorème de complétude du calcul des prédicats du premier ordre de Gödel.

On voit donc qu'une part importante des mathématiques «ordinaires» peut être menée dans cette extension conservative de PRA, (c'est-à-dire dans cette extension dont la consistance est équivalente à celle de PRA).

(iii) ACA_0 (Arithmetical Comprehension Axiom) obtenu en ajoutant à RCA_0 l'axiome de compréhension pour toutes les formules Π^1_0. Dans RCA_0 on a l'équivalence des propriétés suivantes:

(i) Σ^0_1-CA.
(ii) Toute suite croissante de nombres réels possède une sous-suite convergente.
(iii) Toute suite de Cauchy de nombres réels est convergente.
(iv) Toute suite croissante de nombres réels possède une borne supérieure.
(v) Toute suite monotone croissante de nombres réels est convergente.
(vi) Tout espace vectoriel dénombrable possède une base.
(vii) Tout anneau commutatif dénombrable possède un idéal maximal.

Ce système est une extension conservative de PA, et toute l'analyse prédicative (de Weyl) peut y être menée. Celle-ci se trouve donc finiment fondée.

(iv) ATR_0 (Arithmetical Transfinite Recursion) obtenue en ajoutant au système précédent un axiome qui équivaut à «deux ordinaux dénombrables sont toujours comparables».

La forme finie du Kruskal FFF n'y est pas démontrable, et en fait est équivalente à la 1-consistance de ATR_0.

C'est un système considéré comme non prédicativiste. La forme finie du Théorème de Kruskal FFF serait donc hors d'atteinte des mathématiques prédicatives (Smorynski 1982).

(v) Π^1_1-CA_0 (Π^1_1-Comprehension Axiom).
FFF est prouvable dans ce système.
Mais Friedman a proposé une forme étendue de FFF qui n'est pas prouvable dans Π^1_1-CA_0
Bien que fort, ce système est réductible à des systèmes intuitionnistes (et donc d'une certaine façon est finiment fondé) (Feferman 1987: 200).

(vi) ALPO contenu dans ZFC très riche conceptuellement et conservatif vis-à-vis de PA (Feferman 1987: 203).

(vii) VTµ| de Feferman est aussi une extension conservative de PA (Feferman 1987).

Laboratoire d'Informatique Fondamentale
Université des Sciences et Techniques de Lille
(U. A. CNRS 369 Bât M3)
F - 59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX

Références bibliographiques

BEESON, M.J. (1988). Computerizing mathematics: logic and computation. In: R. Herken (ed.), *The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey*. Oxford: University Press, 191-225.

BENNETT, C.H. (1979). *On Random and Hard-to-Describe Numbers*. IBM Research Report RC 7483 1-16-79. IBM Watson Research Center.

BENNETT, C.H. (1982). The thermodynamics of computation - a review. *International Journal of Theoretical Physics, Vol 21*, n° 12, 905-940.

BENNETT, C.H. (1988). Logical depth and physical complexity. In: R. Herken (ed.), *The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey*. Oxford: Oxford University Press, 227-257.

BERLEKAMP, E., CONWAY, J. & GUY, R. (1982). *Winning Ways for Your Mathematical Plays*. Orlando: Academic Press.

BOOLOS, G.S. & JEFFREY, R.C. (1980). *Computability and Logic*. Cambridge: Cambridge University Press (second edition).

BOURBAKI, N. (1969). *Eléments d'histoire des mathématiques*. Paris: Hermann.

CHAITIN, G.J. (1987). Incompleteness theorems for random reals. *Advances in Applied Mathematics*, 8, 119-146. (Repris dans Chaitin 1987a).

CHAITIN, G.J. (1987a.). *Information, Randomness and Incompleteness: Papers on Algorithmic Information Theory*. Singapore: World Scientific.

CHAITIN, G.J. (1987b). *Algorithmic Information Theory. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 1*. Cambridge: Cambridge University Press.

COHEN, P.J. (1966). *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. Amsterdam: Benjamin.

DAVIS, M. (1977). Unsolvable problems. In: J. Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*. Amsterdam: North-Holland Pub., 567-592.

DAVIS, M. (1978). What is a computation. In: L. A. Steen (ed.), *Mathematics Today: Twelve Informal Essays*. Berlin: Springer Verlag, 241-267.

DAVIS, M., MATIJASEVIC, Y. & ROBINSON, J. (1976). Hilbert's tenth problem. Diophantine equations: positive aspects of a negative solution. *Symposia in Pure Mathematics. Vol 28*. American Mathematical Society, 323-378.

DELAHAYE, J.-P. (1989). Chaitin's equation: An extension of Gödel's theorem. *Notices of The American Mathematical Society*, 984-987.

DELAHAYE, J.-P. (1991). Thermodynamique et informatique théorique: une nouvelle définition de l'entropie physique. *Pour la Science*, 17-20.

DIEUDONNE, J. (1982). Mathématiques vides et significatives. In: *Penser les mathématiques. Séminaire de Philosophie et Mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure*. Paris: Seuil.

DIEUDONNE, J. (1987). *Pour l'honneur de l'esprit humain: Les mathématiques aujourd'hui*. Paris: Hachette.

DRAKE, F.R. (1985). How recent work in mathematical logic relates to the foundation of mathematics. *The Mathematical Intelligencer, Vol 7*, n° 4, 27-35.

FEFERMAN, S. (1977). Theories of finite types related to mathematical pratice. In: J. Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*. Amsterdam: North-Holland Pub., 913-971.

FEFERMAN, S. (1987). Infinity in mathematics: is Cantor necessary? In: *Infinity in Science*. Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana, 151-209.

FEFERMAN, S. (1988). Hilbert's program relativized: proof-theoretical and foundational reduction. *The Journal of Symbolic Logic*, *53*, 2, 364-384.

FRAISSE, R. (1982). Les axiomatiques ne sont-elles qu'un jeu? In: *Penser les mathématiques. Séminaire de Philosophie de Mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure*. Paris: Seuil.

FRIEDMAN, H. (1980). A strong conservative extension of Peano arithmetic. In: J. Barwise *et. al.* (eds), *The Kleene Symposium*. Amsterdam: North-Holland Pub., 113-122.

FRIEDMAN, H. (1986). Necessary uses of abstract set-theory in finite mathematics. *Advances in Mathematics, LX*, 92-122.

GALLIER, J.H. (1991). What's so special about Kruskal's theorem and the ordinal Γ_0. A survey of some results in proof theory. *Annals of Pure and Applied Logic* , 53, 199-260.

GIRARD, J.-Y. (1987). *Proof Theory and Logical Complexity*. Napoli: Bibliopolis.

GÖDEL, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze des Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Mathematik und Physik, 38*, 173-198. (Traduction anglaise: On formally undecidable proposition of

Principia Mathematica and related systems I. *Kurt Gödel Collected Works, Vol. I (Publications 1929-1936)*. Oxford: Oxford University Press, 1986. (Traduction française: Sur les propositions formellement indécidables des Principia Mathematica et des systèmes apparentés. In: E. Nagel *et al.* (eds). *Le théorème de Gödel*. Paris: Seuil, 1989).

GRAHAM, R. & SPENCER, J. (1990). La théorie de Ramsey. *Pour la Science,* 58-63.

GUREVICH, Y. (1989). The challenger-solver game: variations on the theme of P=?NP. *Bulletin E.A.T.C.S.* (European Association for Theoretical Computer Science), n° 39, 112-121.

HARRINGTON, L., MORLEY, M., SCEDROV, A. & SIMPSON, S.G. (1985). *Harvey Friedman's Research in the Foundations of Mathematics*. Amsterdam: North-Holland Pub.

HARTMANIS, J. & HOPCROFT, J.E. (1976). *Independence Results in Computer Science*. Department of Computer Science Cornel. TR 76-296

ISAACSON, D. (1987). Arithmetical truth and hidden higher-order concepts. *Logic Colloquium '85*. Edited by the Paris Logic Group. Amsterdam: Elsevier Science Pub., 147-169.

ISAACSON, D. (1991). Some considerations on arithmetical truth and the ω-rule. In: M. Detlefsen (ed.), *Proof, Logic and Formalization*. London: Routledge.

JONES, J.P. (1982). Universal diophantine equation. *The Journal of Symbolic Logic, 47*, 549-571.

KIRBY, L. & PARIS, J. (1977). Initial segments of models of Peano's axioms. In: *Set-theory and Hierarchy Theory. Notes in Math.* Berllin: Springer Verlag, 211-226.

KLEENE, S.C. (1986). Introductory note to 1930b, 1931, and 1932 (of Gödel). In: *Kurt Gödel Collected Works, Vol. I (Publications 1929-1936)*. Oxford: Oxford University Press.

KOLATA, G. (1985). Does Gödel's theorem matter to mathematics? In: L. Harrington, M. Morley, A. Scedrov, S.G. Simpson (eds), *Harvey Friedman's Research in the Foundations of Mathematics*. Amsterdam: North-Holland Pub., 399-406.

KOLMOGOROV, A N. (1965). Three approaches for defining the concept of information quantity. *Information Transmission. Vol. 1*, 3-11.

KOLMOGOROV, A.N. & USPENSKII, V.A. (1987). Algorithms and randomness. *SIAM Theory Probab. Appl. Vol. 32*, 389-412.

KUNEN, K. (1980). *Set Theory: an Introduction to Independence Proofs*. Amsterdam: North-Holland Pub.

LI, M. & VITANYI, P.M.B. (1990). Kolmogorov complexity and its applications. In: J. van Leeuwen (ed.), *Handbook of Theoretical Computer Science*. Amsterdam: Elsevier Science Pub., 187-254.

MAC LANE, S. (1986). *Mathematics, Form and Function*. Berlin: Springer Verlag.

MADDY, P. (1988). Believing the axioms (I and II). *The Journal of Symbolic Logic, vol. LIII*, 481-511.

MADDY, P. (1992). Physicalistic platonism. In: A. Irvine (ed.), *Physicalism in Mathematics* (to appear).

MATIJASEVIC, J. (1970). Enumerable sets are diophantine. *Soviet Math Doklady , 11*, 354-357.

PARIS, J. & HARRINGTON, L. (1977). A mathematical incompleteness in Peano arithmetic. In: J. Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*. Amsterdam: North-Holland, 1133-1142.

ROGERS, H. (1967). *Theory of Recursive Function and Effective Computability*. McGraw-Hill, Serie in Higher Mathematics.

ROSSER, J.B. (1936). Extensions of some theorems of Gödel and Church. *The Journal of Symbolic Logic.,1*, 87-91.

SIEG, W. (1988). Hilbert's program sixty years later. *The Journal of Symbolic Logic, 53*, 2, 338-348.

SIMPSON, S.G. (1985a). Reverse mathematics. In: A. Nerode & R. Shore (eds), *Recursion Theory; «Proc. Symp. Pure Maths.», XLII*. Providence (R. I.): Amer. Mat. Soc., 461-471.

SIMPSON, S.G. (1985b). Nonprovability of certain combinatorial properties of finite trees. In: L. Harrington, M. Morley, A. Scedrov, S.G. Simpson (eds), *Harvey Friedman's Research in the Foundations of Mathematics*. Amsterdam: North-Holland Pub.

SIMPSON, S.G. (1986). Umprovable theorems and fast-growing functions. In: S.G. Simpson (ed.), *Logic and Combinatorics*. Providence (R. I.): Amer. Math. Soc.

SIMPSON, S.G. (1988). Partial realizations of Hilbert's program. *The Journal of Symbolic Logic, 53*, 2,.349-363.

SMORYNSKI, C. (1977). The incompleteness theorems. In: J. Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*. Amsterdam: North-Holland Pub.

SMORYNSKI, C. (1982). The varieties of aboreal experience. *Mathematical Intelligencer,* 4,182-189.

TYMOCZKO, T. (1986). *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Boston: Birkäuser.

VAN LAMBALGEN, M. (1989). Algorithmic information theory. *The Journal of Symbolic Logic, 54,* 1389-1400.

ZUREK, W.H. (1989). Algorithmic randomness and the physical entropy. *Physical Rev. A. Vol. 40*, 4731-4751.

ZVONKIN, A.K. & LEVIN, L.A. (1970). The complexity of finite object and the development of the concepts of information and randomness by means of the theory of algorithms. *Russ. Math. Survey, 25,* 6, 83-124.