

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

TRAVAUX DU CENTRE DE RECHERCHES SEMIOLOGIQUES

sous la direction de M. Jean-Blaise GRIZE

Notes sur l'ontologie et la méréologie de Leśniewski

par Jean-Blaise Grize, Neuchâtel

No 12 – Mars 1972

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
Centre de Recherches
sémiologiques

Archives

NOTES SUR L'ONTOLOGIE ET LA
MERELOGIE DE LESNIEWSKI

par Jean-Blaise GRIZE, Neuchâtel

<u>Sommaire :</u>	<u>page</u>
0. <u>Introduction</u>	1
0.1 Nature du document	1
0.2 Le système de Lesniewski	2
0.3 La formalisation	3
1. <u>L'ontologie</u>	4
1.1 Introduction	4
1.2 L'axiome de l'ontologie	5
1.3 Quelques conséquences immédiates	7
1.4 Les propositions A, E, I, O	9
1.5 Les objets	11
1.6 Pour continuer	12
2. <u>La méréologie</u>	14
2.1 Introduction	14
2.2 Axiomatisation de la notion d'élément	15
2.3 La notion de classe collective	16
2.4 Aperçu sur l'antinomie de Russell	24
2.5 Les ensembles méréologiques	27
2.6 La notion de partie	29
<u>Appendice</u>	30
<u>Bibliographie</u>	35

0. INTRODUCTION

0.1 Nature de ce document

Il y a quelques années déjà, Jacques Rouault avait signalé l'importance que la logique de Lesniewski pourrait avoir pour l'étude de certains phénomènes linguistiques¹⁾. Cette logique est toutefois d'un accès assez peu commode. Les textes sont bien rarement en français, ils sont publiés dans de nombreuses revues, leur présentation est souvent très dense, les démonstrations difficiles. Il m'a donc semblé utile d'y consacrer, pendant l'hiver 1971-1972, l'un des cours que je donne à Paris dans le cadre de l'Ecole Pratique des Hautes Etudes et qui est destiné à un public de chercheurs en sciences humaines. Le présent document n'est rien d'autre que la mise au net des notes dont je me suis servi. Cela signifie que sa seule originalité est dans son mode de présentation et nullement dans son contenu.

Je me suis ainsi attaché à présenter les principaux théorèmes de la façon la plus simple possible, quitte à m'accorder des règles très fortes. J'ai utilisé systématiquement la déduction naturelle, sous la forme que lui a donnée F.B. FITCH 1952 et dont j'ai fait usage dans le premier fascicule de ma Logique moderne, 1969. Enfin, bien que Lesniewski ait élaboré ses constructions pour faire face à l'antinomie de Russell, je n'ai retenu de son oeuvre que ce qui concerne le plus immédiatement les non-mathématiciens.

1) DUPRAZ et ROUAULT, 1968. Pour des raisons de commodités, je supprime l'accent sur le premier S de LESNIEWSKI.

0.2 Le système de Lesniewski

Lesniewski a construit trois théories dont les deux premières sont logiques et la troisième extra-logique. Ce sont :

- (1) La protothétique, dont le concept de base est celui de proposition.
- (2) L'ontologie, dont le concept de base est celui de nom.
- (3) La méréologie qui est une axiomatisation de la relation de partie à tout.

Chacune présuppose celle qui la précède.

La protothétique constitue un calcul des propositions dont l'originalité est triple.

- 1) Il permet, à partir de la catégorie primitive de proposition, de construire autant de nouvelles catégories sémantiques que l'on désire, les foncteurs permettant, non seulement d'engendrer des propositions, mais de nouveaux foncteurs.
- 2) Il utilise des quantificateurs, de sorte qu'une expression comme

$$p \supset (\forall q) f(q)$$

par exemple, a un sens ¹⁾.

- 3) Il repose sur le seul foncteur primitif $\equiv$ (biconditionnelle) et sur un unique axiome.

Il est possible de tirer de la protothétique la logique classique des propositions. D'autre part, au moment où les propositions p , q , etc. sont analysées en termes de sujets et de prédicats, on dispose de l'équivalent de la logique des prédicats du premier ordre.

Dans ce cours, je me donne comme acquise la logique des prédicats du premier ordre sans identité, sous sa forme usuelle. Je ne dirai donc rien de la protothétique.

1) J'adopte partout les notations usuelles et je renonce à introduire celles de Lesniewski et des auteurs de son Ecole.

0.3 La formalisation

Il est de mise aujourd'hui de traiter les systèmes formels comme si l'on ignorait les interprétations que l'on a en vue. L'attitude de Lesniewski est très différente. Il se propose de formaliser certaines notions, celles par exemple que recouvre est (3e personne du verbe "être"), celle que recouvre l'expression est élément de, etc. Ces locutions ont un sens pour celui qui parle français. Lesniewski se donne pour tâche de fixer ce sens - plus exactement une partie de ce sens - à l'aide d'axiomes et d'en déduire ensuite les conséquences. Il s'en suit donc :

- 1) que Lesniewski estime, comme le faisait Aristote, que les langues naturelles véhiculent aussi des rapports logiques et qu'il est légitime d'y prendre appui;
- 2) que la signification des symboles coexiste avec les règles formelles qui les dirigent.

L'interprétation est donc un guide heuristique permanent et ce ne sont pas les axiomes qui donnent un sens aux signes, mais bien le sens des signes qui justifie et explique les axiomes. Un système formel se présente donc comme le résultat d'une formalisation de nos intuitions.

1. L'ONTOLOGIE

1.1 Introduction

La catégorie de base est celle de nom et l'ontologie va se présenter comme un système de relations entre noms. On peut avoir affaire à des noms réels ou à des noms fictifs, mais le problème n'est pas de faire une théorie du monde. L'ontologie est une partie de la logique, c'est donc un langage au sein duquel certaines choses existent et d'autres pas.

Il est aujourd'hui banal de rappeler que est (sont) a des sens multiples et que la formalisation classique est capable d'en distinguer plusieurs. C'est ainsi qu'on aurait, par exemple, en utilisant l'initiale du mot comme nom :

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| (1) Jean est malade | mJ |
| (2) Jean est un malade | $J \in \{x mx\}$ |
| (3) Paquelin est Molière | $P = M$ |
| (4) L'eau est incolore | $?$ |
| (5) Les soucis sont des fleurs | $\{x sx\} \subset \{x fx\}$ |
| (6) Le loup est un animal | $\{x lx\} \subset \{x ax\}$ |

On fait donc usage de deux types de distinction :

l'une entre relateurs ($\in, =, \subset$), l'autre notationnelle ($ax, x \in \{y | ay\}$).

Lesniewski se propose d'axiomatiser au plus près l'idée centrale connotée dans diverses langues par les mots est (latin, français), jest (polonais), ist (allemand), is (anglais), etc. Il introduit pour cela le signe ε (à ne pas confondre avec le signe ensembliste) et qui sera lu est.

La distinction entre "Jean est malade" et "Jean

est un malade", plus généralement la distinction entre adjectif et substantif n'est pas ici pertinente.

Considérons le raisonnement suivant, donné par LUSCHEI, 1962.

Si Socrates est coniunx Xantippae, et coniunx Xantippae est homo, Socrates est homo et coniunx Xantippae.

Selon que le régime matrimonial est monogamique ou non, la traduction française et ensembliste change. Le latin et le lesniewskien sont invariants!

En revanche, il sera commode - bien que non nécessaire - d'adopter la distinction suivante :

les noms individuels seront représentés par des majuscules : A, B, C, ...

les noms génériques par des minuscules : x, y, z, ...

Avec ces conventions, les deux écritures

Majuscule	ε	Majuscule	Majuscule	ε	minuscule
sont correctes et les deux écritures					
minuscule	ε	minuscule	minuscule	ε	Majuscule
sont incorrectes.					

Remarque Dans toute expression de la forme $\alpha\epsilon\beta$, une majuscule peut être substituée à une minuscule.

1.2 L'axiome de l'ontologie

Lesniewski a donné plusieurs versions de l'ontologie¹⁾. Je choisis celle de 1920.

Supposons que l'on dise :

"Nicole est étudiante" : $A\epsilon x$

(1) Voir, par exemple, LEJEWSKI, 1957-58.

- (1) On présuppose par là-même l'existence de "Nicole", c'est-à-dire qu'il existe un certain nom, "la fille du voisin" (B) par exemple, qui est "Nicole" :

$$(\exists B)(B \varepsilon A)$$

- (2) D'autre part, de "la fille du voisin" ou de tout autre nom propre à désigner "Nicole", comme "Mlle Dupont", "la jeune fille qui passe", etc., on peut dire "est étudiante" :

$$(\forall B)(B \varepsilon A \supset B \varepsilon x)$$

- (3) Enfin "Nicole" est un nom individuel et l'on présuppose son unicité. Puisque "la fille du voisin" et "Mlle Dupont" sont "Nicole", il s'ensuit que "la fille du voisin" est "Mlle Dupont".

De là l'axiome de l'ontologie qui comporte trois parties :

$$\begin{aligned} \text{Ax} \quad & (\forall A, x) : A \varepsilon x \equiv (\exists B)(B \varepsilon A) \wedge (\forall B)(B \varepsilon A \supset B \varepsilon x) \wedge (\forall B, C) \\ & (B \varepsilon A \wedge C \varepsilon A \supset B \varepsilon C) \end{aligned}$$

Remarques

1) Dans les références, je renverrai à chacune des trois clauses de l'axiome en notant Ax(1), Ax(2) et Ax(3).

2) Maintenant qu'il est posé, l'axiome est une expression formelle. Ainsi dans l'antécédent de Ax(3), B précède C et on a $B \varepsilon C$ dans le conséquent et pas $C \varepsilon B$.

3) Nous construisons une théorie des noms et pas du monde. Ainsi serait-il incorrect - quoique bien commode - d'interpréter Ax(1) en disant :

"Il existe une personne qui est Nicole"

4) SOBOCINSKI a montré en 1929¹⁾ que l'axiome Ax était déductivement équivalent à

$$(\forall A, x) : A \varepsilon x \equiv (\exists B)(A \varepsilon B \wedge B \varepsilon x)$$

Cet axiome est plus simple mais moins explicite.

D'autre part, les démonstrations des théorèmes sont plus compliquées.

1) Cité par LEJEWSKI 1957-58, p. 63.

1.3 Quelques conséquences immédiates

<u>T₁</u>	$\vdash (\forall A, x) : A \in x \supset A \in A$
1	$A \in x$ hyp
2	$(\exists B)(B \in A)$ 1, Ax(2)
3	$(\forall B)(B \in A \supset B \in A)$ Loi logique
4	$(\forall B \exists C)(B \in A \wedge C \in A \supset B \in C)$ 1, Ax(3)
5	$A \in A$ 2, 3, 4, Ax

Remarque J'applique tacitement la règle d'introduction de $\forall$.
Ce théorème donne, par exemple: "Si Socrate est mortel, Socrate est Socrate".

Il est possible de poser une première définition¹⁾

DfV $A \in V \text{.} = \text{df.} A \in A$

Nous lirons l'expression $A \in V$: A est un objet.
La justification sera donnée plus loin. Pour le moment, on peut remarquer que V est un analogue de la classe totale ensembliste. Mais un analogue seulement : rien ne permet d'affirmer ici que V soit une classe. Nous verrons d'ailleurs que, pour Lesniewski, il n'existe pas de classe vide. En revanche, l'idée de "rien" a un sens :

Df $\wedge$ $A \in \wedge \text{.} = \text{df.} A \in A \wedge \sim(A \in A)$

soit : A n'est rien ssi A est A et A n'est pas A. L'intérêt de cette définition est de montrer que "rien" n'est pas un objet.

<u>T₂</u>	$\vdash \sim(A \in \wedge)$
1	$\sim(P \wedge \sim P)$ loi logique
2	$\sim(A \in \wedge \wedge \sim(A \in \wedge))$ 1, $P/\wedge \in \wedge$ ²⁾
3	$\sim(A \in \wedge)$ 2, Df $\wedge$

1) Je m'écarte, ici aussi, des procédés de Lesniewski pour adopter l'usage courant.

2) J'écris X/Y pour indiquer que je substitue Y à X.

Intuitivement, si "Poquelin est Molière" alors "Molière est Poquelin". On aura aussi que si $A \in B$, $B \in A$, mais à la condition supplémentaire que B soit un objet.

<u>T3</u>	$\vdash (\forall A, B, x) : A \in B \wedge B \in x \supset B \in A$		
1	$A \in B \wedge B \in x$	hyp	
2	$B \in x$	1, $\wedge e$	
3	$(\forall C, D) (C \in B \wedge D \in B \supset C \in D)$	2, $Ax(3)$	
4	$B \in B \wedge A \in B \supset B \in A$	3, $\forall e$, C/B, D/A	
5	$B \in B$	2, T_1	
6	$A \in B$	1, $\wedge e$	
7	$B \in B \wedge A \in B$	5, 6, $\wedge i$	
8	$B \in A$	7, 4, $\supset e$	

Ceci permet d'introduire une relation d'identité entre objets :

Df= $A=B.$ =df. $A \in B \wedge B \in A$

Je postulerais que la relation = satisfait à la règle :

=e	n	$A = B$	
	m	$f(A)$	
		$f[B]$	$n, m, =e$

où $f[B]$ est la même expression que $f(A)$, à ceci près que quelques mentions de A ont été remplacées par une mention de B.

On est alors conduit à la loi caractéristique de l'ontologie :

T4 $\vdash (\forall A, B, x) : A \in B \wedge B \in x \supset A = B$

Deux noms individuels sont donc identiques si

- (1) l'un est l'autre
- (2) l'autre est (un) quelque chose

Notons enfin que la relation $\in$ est transitive :

T5 $\vdash (\forall A, B, x) : A \in B \wedge B \in x \supset A \in x$

1	$A \in B \wedge B \in x$	hyp
2	$B \in x$	1, $\wedge e$
3	$(\forall C)(B \in C \supset C \in x)$	2, $Ax(2)$
4	$A \in B \supset A \in x$	3, $\forall e, C/A$
5	$A \in x$	2, 4, $\supset e$

Ainsi par exemple : si Homère est l'auteur de l'Odyssée et que ce dernier est aveugle, Homère est aveugle.

1.4 Les propositions $\underline{A}$, $\underline{E}$, $\underline{I}$, $\underline{O}$

Lorsque la langue et la tradition aristotélicienne disent :

"Les losanges ont leurs côtés égaux"

elles présupposent l'existence des losanges. En d'autres termes, le quantificateur universel a un import existentiel. C'est l'attitude qu'adopte Lesniewski.

Nous poserons d'abord qu'un nom générique x existe, s'il existe au moins un individu qui est x :

Df ex $ex(x) \text{ . = df. } (\exists A)(A \in x)$

Dès lors dire que chaque x est y , c'est poser :

- (1) que x existe
- (2) que tout ce qui est x est aussi y .

Df $\sqsubset$ $x \sqsubset y \text{ . = df. } ex(x) \wedge (\forall A)(A \in x \supset A \in y)$

On prouve immédiatement :

T6 $\vdash (\forall x) : ex(x) \supset x \sqsubset x$

T7 $\vdash (\forall x, y, z) : x \sqsubset y \wedge y \sqsubset z \supset x \sqsubset z$

La relation $\sqsubset$ est donc réflexive sous condition et toujours transitive.

Une universelle affirmative "chaque x est y " aura donc comme expression :

$\underline{A}$ $x \sqsubset y$.

Pour ce qui concerne les particulières affirmatives, rien de spécial. Posons :

Df Δ $xΔy.$ = df. $(\exists A)(A \in x \wedge A \in y)$

Donc "quelque x est y" s'écrit :

$$\underline{\underline{I}} \quad xΔy$$

Quant aux négatives, on les obtient régulièrement. "Aucun x n'est y" s'exprime par $\neg(\exists A)(A \in x \wedge A \in y)$ ce qui équivaut à $(\forall A)(A \in x \supset \neg(A \in y))$.

Si l'on pose :

Df ∇ $x∇y.$ = df. $(\forall A)(A \in x \supset \neg(A \in y))$.

on aura :

$$\underline{\underline{E}} \quad x∇y$$

Enfin, pour "quelque x n'est pas y", on a $(\exists A)(A \in x \wedge \neg(A \in y))$ que l'on notera par analogie :

Df ⊃ $x⊃y.$ = df. $(\exists A)(A \in x \wedge \neg(A \in y))$

d'où :

$$\underline{\underline{O}} \quad x⊃y$$

Nous disposons ainsi de tout le matériel nécessaire à la reconstruction de la syllogistique aristotélicienne-

Remarque Il est utile d'introduire aussi l'inclusion usuelle que je lirai "tous les x sont y".

Df c $xcy.$ = df. $(\forall A)(A \in x \supset A \in y)$

Comme les minuscules (noms génériques) peuvent être remplacées par des majuscules (noms individuels), on aura en particulier :

T8 $\vdash (\forall A, B) : A \in B \supset A \subset B$

1	A ∈ B	hyp
2	C C ∈ A	hyp
3	A ∈ B	1, reit
4	C ∈ B	2, 3, T5
5	C ∈ A ⊃ C ∈ B	2-4, ⊃i
6	(∀C)(C ∈ A ⊃ C ∈ B)	2-5, ∀i
7	A ⊂ B	6, Df c

Réciproquement :

<u>T9</u>	$\vdash (\forall A, B) : A \subset B \wedge A \in V \rightarrow A \in B$	
1	$A \subset B \wedge A \in V$	hyp
2	$A \subset B$	} 1, $\wedge e$
3	$A \in V$	
4	$(\forall C)(C \in A \rightarrow C \in B)$	2, DfC
5	$A \in A \rightarrow A \in B$	4, $\forall e, C/A$
6	$A \in A$	3, DfV
7	$A \in B$	6, 5, $\rightarrow e$

Comme dans la langue d'usage ϵ et $\subset$ sont très proches. Ils coïncident même s'il s'agit d'objets.

1.5 Les objets

Il convient d'examiner les raisons qui nous ont permis d'interpréter $A \in V$ par "A est un objet". Notons d'abord que tout ce qui est V existe :

<u>T10</u>	$\vdash (\forall A) : A \in V \rightarrow \exists \text{ex}(A)$	
1	$A \in V$	hyp
2	$A \in A$	1, DfV
3	$(\exists B)(B \in A)$	2, $\exists i$
4	$\text{ex}(A)$	3, Dfex

L'existence toutefois ne garantit pas l'unicité, laquelle peut d'ailleurs se définir sans présupposer l'existence :

Df sol $\text{sol}(x) \text{.} = \text{df.} (\forall A, B)(A \in x \wedge B \in x \rightarrow A = B)$

En d'autres termes :

$\text{ex}(A)$ signifie : il existe au moins un A.

$\text{sol}(A)$ signifie : il existe au plus un A.

L'idée d'objet correspond à l'existence d'un et d'un seul A:

Df ob $\text{ob}(A) \text{.} = \text{df.} \text{ex}(A) \wedge \text{sol}(A)$

Dès lors, on a :

$$\text{T11} \quad \vdash (\forall A) : A \in V. \equiv . \text{ob}(A)$$

En effet, si dans l'axiome on substitue A à x, on trouve :

$$A \in A. \equiv : (\exists B)(B \in A) . \wedge . (\forall B)(B \in A \supset B \in A) . \wedge . (\forall B, C)(B \in A \wedge C \in A . \supset . B \in C)$$

Or, $(\exists B)(B \in A) . = \text{df. ex}(A)$

$(\forall B)(B \in A . \supset . B \in A)$ est une loi logique et

$(\forall B, C)(B \in A \wedge C \in A . \supset . B \in C) . = \text{df. sol}(x)$ aux

changements d'écriture près.

Le théorème 11 justifie la lecture que nous avons faite de $A \in V$,

Remarque Les définitions précédentes permettent d'écrire l'axiome Ax sous la forme abrégée :

$$\text{Ax} \quad (\forall A, x) : A \in x. \equiv . \text{ob}(A) \wedge (\forall B)(B \in A . \supset . B \in x)$$

Ceci explique pourquoi x ne figure que dans une seule des clauses du membre de droite de l'axiome original.

1.6 Pour continuer

Il est possible de poursuivre l'étude de l'ontologie dans deux directions.

(1) On peut expliciter d'autres conséquences de l'axiome. Ainsi a-t-on, en particulier, le théorème suivant qui sera utile par la suite :

$$\text{T12} \quad \vdash (\forall A, B) : A \in B \wedge (\forall C, D)(C \in B \wedge D \in B . \supset . C = D) : \supset . A = B$$

Pour démontrer T12, établissons deux lemmes :

Lemme 1 On sait, par définition, que si $C = D$ alors $C \in D$.

On obtient :

$$\vdash (\forall C, D)(C \in B \wedge D \in B . \supset . C = D) \supset (\forall C, D)(C \in B \wedge D \in B . \supset . C \in D)$$

Lemme 2 Si l'on substitue B à A et à x dans Ax et que l'on change le nom des variables liées, on a :

$$\vdash B \in B. \equiv . (\exists C)(C \in B) . \wedge . (\forall C)(C \in B . \supset . C \in B) . \wedge . (\forall C, D)(C \in B \wedge D \in B . \supset . C \in D)$$

Dès lors :

1	$A \in B$	} hyp
2	$(\forall C, D)(C \in B \wedge D \in B \supset C = D)$	
3	$A \in B \wedge B \in B \supset A = B$	2, $\forall e$, C/A, D/B
4	$(\exists C)(C \in B)$	1, $\exists i$
5	$(\forall C)(C \in B \supset C \in B)$	Loi logique
6	$(\forall C, D)(C \in B \wedge D \in B \supset C = D)$	2, Lemme 1
7	$B \in B$	4, 5, 6, lemme 2
8	$A \in B \wedge B \in B$	1, 7, $\wedge i$
9	$A = B$	3, 8, $\supset e$

(2) On peut aussi introduire des opérations entre noms génériques, analogues à celles d'union et d'intersection entre classes ensemblistes.

Ainsi, par exemple, si l'on veut dire que "A est représentant de commerce (x) ou agent d'assurance (y)", on posera:

Df $\smile$ $A \in x \vee y . = df : . A \in A . \wedge : A \in x \vee A \in y$

La clause $A \in A$ garantit que A est un objet.

2. LA MERELOGIE

2.1 Introduction

La méréologie peut être conçue comme la théorie générale des rapports qui existent entre des choses, tant abstraites que concrètes. Ses concepts de base ne se réduisent pas à ceux de la logique. Celle-ci ne sert que de moyen d'expression, comme elle peut servir de moyen d'expression à l'axiomatisation de la théorie des groupes, par exemple¹⁾. Les plus importants sont les suivants :

(1) Le concept de classe collective ou classe méréologique, qui se distingue de celui de classe ensembliste, dite classe distributive.

Une classe distributive est, à proprement parler, l'extension d'un concept. Si p est le concept "planète" dire que Jupiter est une planète c'est soit poser pJ soit $J \in \{x | px\}$ et l'information transmise est la même dans les deux écritures. Soit donc la classe distributive

$P = \text{df } \{\text{Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune, Pluton}\}$

Elle contient neuf éléments et rien d'autre.

Les calottes polaires de Mars, la tache rouge de Jupiter, les anneaux de Saturne n'appartiennent pas à P . Et cependant, tout cela et mille autres choses ont affaire avec le concept "planète". La notion de classe collective doit pail-

1) voir, par ex. KLEENE, 1971, p. 223 sq.

lier à cette lacune.

Prenons un autre exemple. Soit la classe distributive $C = \{\text{une tête, deux bras, deux jambes, un tronc}\}$. De toute évidence C n'est pas un corps. Par opposition, la classe collective engendrée par les éléments de C formera une réelle totalité. Elle sera un corps et comprendra les mains, les yeux, les cheveux, etc.

(2) Une classe collective sera un tout. Il conviendra donc d'introduire une relation de partie à tout. Lesniewski a distingué la relation est partie de (au sens strict, où la partie est nécessairement distincte du tout) de la relation est élément de (au sens large, où le tout est aussi élément de lui-même). Il a même introduit la relation est ingrédiant de qui s'est révélée être équivalente à "est élément de"¹⁾

Il faut bien noter que la relation de partie à tout ne coïncide nullement avec celle d'inclusion. Ainsi, il est exact de dire

"Les mots sont éléments des phrases"

J'utilise "est élément de", puisqu'il peut se trouver qu'un mot tienne lieu d'une phrase. Mais, il est manifestement faux de poser

$$\{x|x \text{ est un mot}\} \subset \{x|x \text{ est une phrase}\}$$

puisque ceci supposerait que tout mot est une phrase.

(3) Enfin, il sera utile de définir la situation où deux objets sont extérieurs l'un à l'autre de celle où ils ont quelque élément commun.

2.2 Axiomatisation de la notion d'élément

Lesniewski a donné deux axiomatisations de la méréologie²⁾. J'adopterai toutefois une axiomatisation qui se donne la notion d'élément comme primitive et que j'emprunte à CLAY, 1965.

1) KEARNS, 1967, p. 82.

2) Voir LEJEWSKI, 1967.

Le symbole 'el' est un foncteur qui s'applique à un nom individuel, de sorte que 'el(A)' par exemple signifie "élément de A". Il s'ensuit que l'expression

$$B \text{el}(A)$$

se lira "B est élément de A". Il faut bien prendre garde que $B \text{el}(A)$ n'a, en principe rien à voir avec $\alpha \in \beta$ dans la théorie ensembliste.

Ayant choisi "est élément de" et non "est partie de", on peut poser un premier axiome qui postule que tout objet est élément de lui-même:

Ax1 $(\forall A) : A \in A . \supset . A \text{el}(A)$

Par DfV et T11, on aurait aussi pu poser

$$(\forall A) : \text{ob}(A) . \supset . A \text{el}(A).$$

Si deux objets sont éléments l'un de l'autre, ils sont identiques :

Ax2 $(\forall A, B) : A \text{el}(B) \wedge B \text{el}(A) . \supset . A = B$

Il est intuitivement évident que "est élément de", au sens de "est ingrédient de" est une relation transitive :

Ax3 $(\forall A, B, C) : A \text{el}(B) \wedge B \text{el}(C) . \supset . A \text{el}(C)$

Enfin, nous poserons que si A est élément de B, B est un objet :

Ax4 $(\forall A, B) : A \text{el}(B) . \supset . B \in B.$

2.3 La notion de classe collective

La construction part d'une définition et introduit deux nouveaux axiomes.

L'idée est de définir un objet qui est la classe (collective) des x où x est, en général, un nom collectif. Si, par exemple, x est "livres-de-ma-bibliothèque", on veut que $Kl(x)$ représente "la classe des livres-de-ma-bibliothèque".

Remarque J'utilise Kl pour les classe collectives.

La définition sera celle de $A \in Kl(x)$ donc de la

proposition "A est la classe des x". Elle comporte trois clauses :

(1) $A \in A$, donc une classe est un objet. Dans l'exemple ci-dessus A est le nom de cet objet que j'appelle "ma bibliothèque".

(2) $(\forall D)(D \in x \supset D \in el(A))$, c'est-à-dire que, tout ce qui est "livre-de-ma-bibliothèque" est élément de ma bibliothèque.

(3) $(\forall D)[D \in el(A) \supset (\exists E)(E \in x \wedge el(D) \wedge el(E))]$

Cette clause est la plus originale. Soit D un élément quelconque de ma bibliothèque, par exemple "le troisième rayon" comme on dit, étant entendu que l'on pense aux livres qui sont dessus. Il faut alors pouvoir trouver un E qui est "livre-de-ma-bibliothèque" et tel que quelque élément du troisième rayon est élément de E. Supposons que E soit le Littré, dont les tomes sont sur le troisième rayon. Alors le tome V est à la fois élément de D et de E.

L'expression $el(D) \wedge el(E)$ est une abréviation pour $(\exists F)(F \in el(D) \wedge F \in el(E))$, de sorte que l'on posera finalement :

$$\begin{aligned} \underline{DfKl} \quad A \in Kl(x) &= df : A \in A \wedge \\ &(\forall D)(D \in x \supset D \in el(A)) \wedge \\ &(\forall D)[D \in el(A) \supset (\exists E, F)(E \in x \wedge F \in el(D) \wedge F \in el(E))] \end{aligned}$$

Les choses ne sont peut-être pas encore très claires. Voici donc un exemple et deux contre-exemples de Lesniewski lui-même¹⁾.

Proposons-nous de former la classe A des segments-de- $\alpha\beta$:



On aura donc $A \in Kl(x) = df A \in Kl(\text{segments-de-}\alpha\beta)$. Dès lors :

1) A est un objet. C'est le "trait" $\alpha\beta$.

1) Rapporté par LUSCHEI, 1962, p. 68.

- 2) Tout segment-de- $\alpha\beta$, comme $\alpha\beta$, $\alpha\delta$, ..., $\gamma\delta$, $\gamma\eta$, ..., $\eta\beta$ est élément de A, élément ou ingrédient du "trait" $\alpha\beta$.
- 3) Prenons un élément D quelconque de A, par exemple $\gamma\eta$, on peut trouver un segment-de- $\alpha\beta$, par exemple $E = \delta\gamma\delta\beta$ et un F, disons $\delta\eta$, tel que $\delta\eta$ est élément de $D(\gamma\eta)$ et de $E(\delta\beta)$ -

1er contre-exemple

Le "trait" $\alpha\beta$ n'est pas Kl (segments-de- $\alpha\delta$). Les conditions (1) et (2) sont évidemment satisfaites : $\alpha\beta$ est un objet et tout ce qui est segment-de- $\alpha\delta$ est élément de $\alpha\beta$.

En revanche, (3) n'est pas satisfaite. En effet, si nous prenons pour D l'élément $\eta\beta$ qui est bien un ingrédient de $\alpha\beta$, on ne trouve aucun segment-de- $\alpha\delta$ qui ait quelque élément commun avec un élément de $\eta\beta$.

2e contre-exemple

Le "trait" $\alpha\gamma$ n'est pas Kl (segments-de- $\alpha\beta$). La condition (1) est évidemment satisfaite. La condition (3) aussi : on n'a que $\alpha\gamma$ qui est élément de $\alpha\gamma$ et il suffit de prendre encore $\alpha\gamma$ pour E et F. En revanche, la condition (2) n'est pas satisfaite : tout ce qui est segment-de- $\alpha\beta$, par exemple $\delta\eta$, n'est pas élément de $\alpha\gamma$.

La notion de classe collective va s'éclairer par ses propriétés. Je désignerai les théorèmes par Mn pour les distinguer de ceux de l'ontologie. On a d'abord que si A est la classe d'un objet, cet objet est élément de A:

<u>M1</u>	$\vdash$	$(\forall A, B) : A \in Kl(B) \wedge B \in B \supset B \in el(A)$	
1		$A \in Kl(B) \wedge B \in B$	hyp
2		$A \in Kl(B)$	} 1, $\wedge e$
3		$B \in B$	
4		$(\forall D)(D \in B \supset D \in el(A))$	2, DfKl(2) (*)
5		$B \in B \supset B \in el(A)$	4, $\forall e$, D/B
6		$B \in el(A)$	3, 5, $\supset e$

(*) Signifie : 2e clause de la définition de Kl.

D'autre part, on a :

$$\underline{M2} \quad \vdash (\forall A) : A \in Kl(A) \supset A \in el(A)$$

1	$A \in Kl(A)$	Hyp
2	$A \in A$	1, DfKl(1)
3	$A \in el(A)$	2, Ax.1

Si l'on reprend l'exemple de la classe engendrée par les parties du corps, on comprend que la notion de classe collective vide n'ait aucun sens. D'une certaine façon, une classe distributive est comme une boîte : elle peut être vide. Mais une classe collective n'existe que par ses éléments. On a, en effet :

$$\underline{M3} \quad \vdash (\forall A, x) : A \in Kl(x) \supset (\exists B)(B \in x)$$

1	$A \in Kl(x)$	hyp
2	$A \in A$	1, DfKl(1)
3	$A \in el(A)$	2, Ax1
4	$(\forall D) [D \in el(A) \supset (\exists E, F)(E \in x \wedge \dots)]$	1, DfKl(3)
5	$A \in el(A) \supset (\exists E, F)(E \in x \wedge \dots)$	4, $\forall e$, D/A
6	$(\exists E, F)(E \in x \wedge \dots)$	3, 5, $\supset e$
7	$E, F \mid E \in x \wedge \dots$	hyp
8	$E \in x$	7, $\wedge e$
9	$(\exists B)(B \in x)$	8, $\exists i$
10	$(\exists B)(B \in x)$	6, 7-9, $\exists e$

La notion de classe collective n'est pas entièrement déterminée par sa définition. En particulier l'unicité doit être garantie par un axiome:

$$\underline{Ax5} \quad (\forall A, B, x) : A \in Kl(x) \wedge B \in Kl(x) \supset A = B$$

Ainsi si $Pferd \in Kl(\text{chevaux})$ et $Horse \in Kl(\text{chevaux})$ alors $Pferd = Horse$.

Il s'agit enfin de s'assurer de l'existence de certaines classes. C'est là un problème délicat, puisque l'on sait que, d'un point de vue ensembliste, postuler qu'à toute fonction propositionnelle correspond un ensemble conduit à l'antinomie de Russell. Lesniewski pose néanmoins l'axiome suivant:

$$\underline{Ax6} \quad (\forall A, x) : A \in x \supset (\exists B)(B \in Kl(x))$$

Ainsi, puisque Roland est un héros, la classe des héros existe. Il suffit même qu'il existe un héros quelconque pour assurer la classe des héros et, réciproquement, dès que la classe existe, quelqu'un est un héros. C'est ce que montre le théorème :

<u>M4</u>	$\vdash (\forall x).(\exists A)(A \in x) \equiv (\exists B)(B \in Kl(x))$	
1	$(\exists A)(A \in x)$	hyp
2	A $A \in x$	hyp
3	$A \in x \supset (\exists B)(B \in Kl(x))$	Ax6, $\forall e$
4	$(\exists B)(B \in Kl(x))$	2, 3, $\supset e$
5	$(\exists B)(B \in Kl(x))$	1, 2-4, $\exists e$
1	$(\exists B)(B \in Kl(x))$	hyp
2	B $B \in Kl(x)$	hyp
3	$B \in Kl(x) \supset (\exists A)(A \in x)$	M3, $\forall e, A/B, B/A$
4	$(\exists A)(A \in x)$	2, 3, $\supset e$
5	$(\exists A)(A \in x)$	1, 2-4, $\exists e$

$A \in Kl(x)$ devrait se lire "A est classe des x" et il s'agit de justifier la lecture de "A est la classe des x". Pour cela démontrons d'abord le théorème suivant :

<u>M5</u>	$\vdash (\forall A, x) : A \in x \supset Kl(x) \in Kl(x)$	
1	$A \in x$	hyp
2	$(\exists B)(B \in Kl(x))$	1, Ax6
3	B $B \in Kl(x)$	hyp
4	$(\forall A, B) : A \in Kl(x) \wedge B \in Kl(x) \supset A = B$	Ax5
5	$B \in Kl(x) \wedge (\forall A, B)(A \in Kl(x) \wedge B \in Kl(x) \supset A = B) \supset B = Kl(x)$	T12, $\forall e, A/B, B/Kl(x), C/A, D/B$ 1)
6	$B = Kl(x)$	3, 4, $\wedge i, 5, \supset e$
7	$Kl(x) \in Kl(x)$	3, 6, $=e$
8	$Kl(x) \in Kl(x)$	2, 3-7, $\exists e$

On a alors :

1) J'admets que $Kl(x)$ est une valeur de l'univers couvert par $\forall$.

M6 $\vdash (\forall A, x) : A \in Kl(x) \rightarrow A = Kl(x)$

1	$A \in Kl(x)$	hyp
2	$(\exists B)(B \in Kl(x))$	1, $\exists i$
3	$(\exists A)(A \in x)$	2, M4
4	$A \mid A \in x$	hyp
5	$Kl(x) \in Kl(x)$	4, M5
6	$Kl(x) \in Kl(x)$	3, 4-5, $\exists e$
7	$A = Kl(x)$	1, 6, T4, B/Kl(x), $x/Kl(x)$ ¹⁾

Dans les classes distributives, il faut distinguer un objet A et la classe qui ne contient que cet objet : $\{A\}$. Cette distinction n'existe pas pour les classes distributives, comme le montre le théorème :

M7 $\vdash (\forall A) : A \in A \equiv A = Kl(A)$

La démonstration de droite à gauche est immédiate :

1	$A = Kl(A)$	hyp
2	$A \in Kl(A)$	1, Df=
3	$A \in A$	2, DfKl(1)

Pour démontrer la relation de gauche à droite, il suffira de prouver que $A \in Kl(A)$: on applique ensuite M6. Quant à la preuve que $A \in Kl(A)$, elle exige, selon la DfKl, trois propositions :

- (1) $A \in A$ ce qui est l'hypothèse
 (2) $(\forall D)(D \in A \rightarrow D \in el(A))$

1	$D \in A$	hyp
2	$A \in A$	prémisse
3	$D = A$	1, 2, T4
4	$A \in el(A)$	2, Ax1
5	$D \in el(A)$	4, 3, =e

- (3) $(\forall D)[D \in el(A) \rightarrow (\exists E, F)(E \in A \wedge F \in el(D) \wedge F \in el(E))]$

1	$D \in el(A)$	hyp
2	$D \in D$	1, T1 ¹⁾
3	$D \in el(D)$	2, Ax1
4	$A \in A$	prémisse
5	$A \in A \wedge D \in el(D) \wedge D \in el(A)$	4, 3, 1, $\wedge i$
6	$(\exists F)(A \in A \wedge F \in el(D) \wedge D \in el(A))$	5, $\exists i$
7	$(\exists E, F)(E \in A \wedge F \in el(D) \wedge F \in el(E))$	6, $\exists i$

1) En admettant que $Kl(x)$ est une valeur de l'univers que recouvre $\forall$.

D'une façon générale, il n'y a pas de classe de classes collective :

$$\text{M8} \quad \vdash (\forall A, x) : A \in K1(x) . \equiv . A \in K1(K1(x))$$

Démontrons d'abord le lemme suivant :

$$\text{Lemme : } \vdash (\forall A, B) : A \in K1(B) \wedge B \in B . \supset . A = B$$

1	$A \in K1(B) \wedge B \in B$	hyp
2	$B \in B$	1, $\wedge e$
3	$B \in K1(B)$	2, M7
4	$A \in K1(B)$	1, $\wedge e$
5	$A = B$	4, 3, Ax5

On aura alors de gauche à droite :

1	$A \in K1(x)$	hyp
2	$(\exists B)(B \in K1(K1(x)))$	1, Ax6, $x/K1(x)$
3	B $B \in K1(K1(x))$	hyp
4	$A \in K1(x)$	1, reit
5	$A = K1(x)$	4, M6
6	$B \in K1(A)$	3, 5, =e
7	$A \in A$	4, DfK1(1)
8	$B = A$	6, 7 Lemme, B/A, A/B
9	$A \in K1(K1(x))$	3, 8, =e
10	$A \in K1(K1(x))$	2, 3-9, $\exists e$

Enfin de droite à gauche :

1	$A \in K1(K1(x))$	hyp
2	$(\forall D) [D \in e1(A) . \supset . (\exists E, F)(E \in K1(x) \wedge \dots)]$	1, DfK1(3)
3	$A \in e1(A) . \supset . (\exists E, F)(E \in K1(x) \wedge \dots)$	2, $\forall e$, D/A
4	$A \in A$	1, DfK1(1)
5	$A \in e1(A)$	4, Ax1
6	$(\exists E, F)(E \in K1(x) \wedge \dots)$	3, 5, $\supset e$
7	E, F $E \in K1(x) \wedge \dots$	hyp
8	$E \in K1(x)$	7, $\wedge e$
9	$E = K1(x)$	8, M6
10	$A \in K1(K1(x))$	1, reit
11	$A \in K1(E)$	10, 9, =e
12	$E \in E$	8, DfK1(1)
13	$A = E$	11, 12, Lemme, B/E
14	$A \in K1(x)$	8, 13, =e
15	$A \in K1(x)$	6, 7-14, $\exists e$

Il reste à étudier de façon un peu plus détaillée la relation entre classe et élément. Et tout d'abord, ce fait essentiel que, tout ce qui est "livre-de-ma-bibliothèque" est élément de "ma bibliothèque", pour reprendre un exemple antérieur.

<u>M9</u>	$\vdash (\forall A, x) : A \in x \supset A \in \text{el}(K1(x))$	
1	$A \in x$	hyp
2	$(\exists B)(B \in K1(x))$	1, Ax6
3	B $B \in K1(x)$	hyp
4	$B = K1(x)$	3, M6
5	$(\forall D)(D \in x \supset D \in \text{el}(B))$	3, DfK1(3)
6	$A \in x \supset A \in \text{el}(B)$	5, $\forall e$, D/A
7	$A \in x$	1, reit
8	$A \in \text{el}(B)$	6, 7, $\supset e$
9	$A \in \text{el}(K1(x))$	8, 4, $=e$
10	$A \in \text{el}(K1(x))$	2, 3-9, $\exists e$

D'autre part tout objet, "ma bibliothèque" par exemple, est la classe de ses éléments.

<u>M10</u>	$\vdash (\forall A) : A \in A \supset A \in K1(\text{el}(A))$	
1	$A \in A$	hyp
2	$(\forall D)(D \in \text{el}(A) \supset D \in \text{el}(A))$	loi logique
3	D $D \in \text{el}(A)$	hyp
4	$D \in D$	3, T1 ¹⁾
5	$D \in \text{el}(D)$	4, Ax1
6	$D \in \text{el}(A) \wedge D \in \text{el}(D) \wedge D \in \text{el}(D)$	3, 5, 5, $\wedge i$
7	$(\exists F)(D \in \text{el}(A) \wedge F \in \text{el}(D) \wedge F \in \text{el}(D))$	6, $\exists i$
8	$(\exists E, F)(E \in \text{el}(A) \wedge F \in \text{el}(D) \wedge F \in \text{el}(E))$	7, $\exists i$
9	$D \in \text{el}(A) \supset (\exists E, F)(\dots)$	3-8, $\supset i$
10	$(\forall D) [D \in \text{el}(A) \supset (\exists E, F)(E \in \text{el}(A) \wedge F \in \text{el}(D) \wedge F \in \text{el}(E))]$	3-9, $\forall i$
11	$A \in K1(\text{el}(A))$	1, 2, 10, DfK1

Appelons "humanité" la classe collective des hommes dont nous supposons qu'ils existent. Il est alors équiva-

1) En admettant que $\text{el}(A)$ est une valeur de l'univers couvert par $\forall$.

lent de dire que Sartre est élément de l'humanité ou que Sartre est un homme. C'est-à-dire qu'on a:

M 11 $\vdash (\forall A, B) : A \in el(B) . \equiv (\exists x) (B \in Kl(x) \wedge A \in x)$

1		$A \in el(B)$	hyp
2		$B \in B$	1, Ax4
3		$B \in Kl(el(B))$	2, M10
4		$B \in Kl(el(B)) \wedge A \in el(B)$	3, 1, $\wedge i$
5		$(\exists x) (B \in Kl(x) \wedge A \in x)$	4, $\exists i$
1		$(\exists x) (B \in Kl(x) \wedge A \in x)$	hyp
2	x	$B \in Kl(x) \wedge A \in x$	hyp
3		$B \in Kl(x)$	2, $\wedge e$
4		$B = Kl(x)$	3, M6
5		$A \in x$	2, $\wedge e$
6		$A \in el(Kl(x))$	5, M9
7		$A \in el(B)$	6, 4, $=e$
8		$A \in el(B)$	1, 2-7, $\exists e$

2.4 Aperçu sur l'antinomie de Russell

SOBOCINSKI 1949-1950 fait une analyse approfondie de la question des antinomies. Je n'en retiendrai ici que ce qui est de nature à éclairer davantage la différence entre la perspective ensembliste et celle de Lesniewski.

Plaçons-nous d'abord au niveau le plus naïf et considérons les propositions suivantes :

- (1) $(\forall A, B, x, y) : A \in Kl(x) \wedge A \in Kl(y) \wedge B \in y . \supset . B \in x$
- (2) $(\forall A, B, x) : A \in Kl(x) \wedge B \in el(A) . \supset . B \in x$
- (3) $(\forall A, B, x, y) : A \in Kl(x) \wedge A \in Kl(y) \wedge B \in y \wedge \sim (B \in Kl(y)) . \supset . B \in x$
- (4) $(\forall A, B, x) : A \in Kl(x) \wedge B \in Kl(x) . \supset . A = B$

Elles paraissent toutes quatre parfaitement acceptables. Ainsi

(1) $x = df$ nombres pairs

$y = df$ nombres divisibles par 2

Si A est la classe des nombres pairs et la classe des nombres divisibles par 2 et si B est divisible par 2, B est pair.

- (3) ne fait que rajouter une restriction : B ne doit pas être la classe des nombres divisibles par 2¹⁾.
- (2) Si A est la classe des nombres pairs et que B est élément de A, B est pair.
- (4) Si Horse est la classe des chevaux et si Pferd est cette même classe, Horse = Pferd.

Voyons toutefois de plus près l'interprétation collective.

- (1) Supposons que x = df phrases de la "Logique sans peine" et y = df mots de la "Logique sans peine". La classe collective engendrée par x et celle engendrée par y sont les mêmes. On peut donc bien poser $A \in Kl(x) \wedge A \in Kl(y)$. Et on voit que si B est un mot de la "Logique sans peine", il est faux d'affirmer que c'en est toujours une phrase.
- (3) Le même raisonnement vaut : la proposition n'est pas acceptable.
- (2) doit être rejeté pour la même raison. A est la "Logique sans peine", donc B, la page 17 par exemple, peut en être élément sans en être une phrase.
- (4) en revanche est acceptable : c'est $Ax5$.

Passons maintenant à l'interprétation distributive.

Ecrire $A \in Kl(x)$ revient à dire que A appartient à l'extension de x , donc à dire que A est un x . On aura donc l'interprétation suivante :

$$A \in Kl(x) \iff A \in x$$

Quant à $A \in el(B)$, le théorème M11 nous permet d'écrire $(\exists x) (B \in Kl(x) \wedge A \in x)$. De là l'interprétation :

$$A \in el(B) \iff (\exists x) (B \in x \wedge A \in x)$$

Dès lors (1) devient :

$$(1)^* \quad (\forall A, B, x, y) : A \in x \wedge A \in y \wedge B \in y \supset B \in x$$

qui est manifestement fausse.

1) Restriction apportée par Frege dans le supplément au tome II (1903) de ses Grundgesetze der Arithmetik et qui visait à éliminer l'antinomie découverte par Russell.

Socrate est un Grec et Socrate est un homme et Louis XVI est un homme n'entraîne pas Louis XVI est un grec.

Quant à (2) on a :

$$(2)^* \quad (\forall A, B, x) : A \in x \wedge (\exists y)(A \in y \wedge B \in y) \supset B \in x$$

et le même contre-exemple ($y = \text{df homme}$) montre que l'expression doit être rejetée.

L'expression (3) devient :

$$(3)^* \quad (\forall A, B, x, y) : A \in x \wedge A \in y \wedge B \in y \wedge \neg(B \in x) \supset B \in x$$

Cette expression est trivialement vraie, puisque l'antécédent de la conditionnelle est toujours faux.

Reste (4) qui donne :

$$(4)^* \quad (\forall A, B, x) : A \in x \wedge B \in x \supset A = B$$

et qui est manifestement inacceptable.

En résumé, on a la situation suivante :

	(1)	(2)	(3)	(4)
Interprétation collective	-	-	-	+
Interprétation distributive	-	-	+	-

(1) et (2) montrent que leur apparente acceptabilité repose sur la confusion spontanée des deux interprétations. Quant à (3) et (4), elles montrent que les deux interprétations sont incompatibles entre elles.

Lesniewski va plus loin et fait voir que l'antinomie de Russell repose, en fait, sur la violation des règles de "bonne écriture".

Posons que A est un ensemble normal s'il n'est pas élément de lui-même et soit α l'ensemble des ensembles normaux. On a donc (dans l'écriture ensembliste) :

$$R_1 \quad (\forall A) : A \in \alpha \equiv \neg(A \in A)$$

Par $\forall e$, A/α , il vient :

$$R_2 \quad \alpha \in \alpha \equiv \neg(\alpha \in \alpha)$$

qui est l'antinomie.

Or, on peut noter :

(1) Les deux $\in$ de R_1 n'ont pas le même sens :

$A \in \alpha$ signifie $A \in \ell(\alpha)$

$\sim(A \in A)$ signifie A n'est pas A

(2) D'autre part, R_1 peut être considéré comme la définition des ensembles normaux α . Or, rien ne nous autorise à penser que α est un objet. Ecrivons :

$$A \in \alpha . = df . A \in A \wedge \sim(A \in A)$$

Dans ces conditions α est rien ($Df \wedge$) et l'on sait que rien n'est pas un objet (T2).

2.5 Les ensembles méréologiques

Il est possible d'affaiblir la notion de classe collective en n'exigeant pas que tout ce qui est x en soit élément ($Df K1(2)$). On obtiendra ce que Lesniewski appelle un ensemble méréologique (set), notion dont ROUAULT 1971 a fait usage dans sa formalisation des langues naturelles.

Posons :

$$\begin{aligned} \underline{Df \ st} \quad A \in st(x) . = df : A \in A . \wedge . (\forall D) [D \in \ell(A) \supset (\exists E, F) \\ (E \in x \wedge E \in \ell(A) \wedge F \in \ell(D) \wedge F \in \ell(E))] \end{aligned}$$

On voit qu'il suffit qu'il existe un x qui soit élément de l'ensemble A , mais que les autres caractères des classes collectives sont conservés. Il s'ensuit que $K1$ et st sont intimement liés, comme le montrent les deux théorèmes suivants.

M12 $\vdash (\forall A, x) : A \in K1(x) \supset A \in st(x)$

1	$A \in K1(x)$	hyp
2	$A \in A$	1, DfK1(1)
3	D $D \in el(A)$	hyp
4	$(\exists E, F)(E \in x \wedge F \in el(D) \wedge F \in el(E))$	1, reit; DfK1(3); 2, $\supset e$
5	E, F $E \in x \wedge F \in el(D) \wedge F \in el(E)$	hyp
6	$(\forall D)(D \in x \supset D \in el(A))$	1, reit; DfK1(2)
7	$E \in x \supset E \in el(A)$	6, $\forall e, D/E$
8	$E \in x$	5, $\wedge e$
9	$E \in el(A)$	7, 8, $\supset e$
10	$E \in x \wedge E \in el(A) \wedge F \in el(D) \wedge F \in el(E)$	4, 9, $\wedge i$
11	$(\exists E, F)[\dots]$	10, $\exists i$
12	$(\exists E, F)[\dots]$	4, 5-11, $\exists e$
13	$D \in el(A) \supset (\exists E, F)[\dots]$	3-12, $\supset i$
14	$(\forall D)[D \in el(A) \supset (\exists E, F)(E \in x \wedge E \in el(A) \wedge F \in el(D) \wedge F \in el(E))]$	3-13, $\forall i$
15	$A \in st(x)$	2, 14, Df st

Mais on peut aller plus loin. Rappelons d'abord (Dfc) que l'on peut écrire :

$$x \in el(A) \stackrel{\text{df.}}{=} (\forall D)(D \in x \supset D \in el(A))$$

On aura :

M13 $\vdash (\forall A, x) : A \in st(x) \wedge x \in el(A) \equiv A \in K1(x)$

On a, de droite à gauche :

1	$A \in K1(x)$	hyp
2	$A \in st(x)$	1, M12
3	$(\forall D)(D \in x \supset D \in el(A))$	1, DfK1(2)
4	$x \in el(A)$	3, Df

et de gauche à droite :

1	$A \in st(x)$	hyp
2	$(\forall D)(D \in x \supset D \in el(A))$	hyp et Df $\subset$
3	$A \in A$	1, Dfst(1)
4	D $D \in el(A)$	hyp
5	$(\exists E, F)(E \in x \wedge E \in el(A) \wedge F \in el(D) \in F \in el(E))$	1, reit, Dfst(2)
6	E, F $E \in x \wedge E \in el(A) \wedge F \in el(D) \wedge F \in el(E)$	hyp
7	$E \in x \wedge F \in el(D) \wedge F \in el(E)$	6, $\wedge e$
8	$(\exists E, F) [\dots]$	7, $\exists i$
9	$(\exists E, F) [\dots]$	5, 6-8, $\exists e$
10	$D \in el(A) \supset (\exists E, F) [\dots]$	4-9, $\supset i$
11	$(\forall D) [D \in el(A) \supset (\exists E, F)(E \in x \wedge F \in el(D) \wedge F \in el(E))]$	4-10, $\forall i$
12	$A \in Kl(x)$	3, 2, 11, DfK1

2.6 La notion de partie

Une partie est un élément propre. On pose

donc :

Df pt $A \in pt(B) \stackrel{\text{df}}{=} A \in el(B) \wedge \neg(A = B)$

Rien n'est évidemment partie de soi-même

M14 $\vdash (\forall A) \neg(A \in pt(A))$

1	$A \in pt(A)$	hyp (rais. par l'absurde)
2	$\neg(A = A)$	1, Dfpt(2)
3	$\neg(A \in A)$	2, Df =
4	$A \in el(A)$	1, Dfpt(1)
5	$A \in A$	4, Ax4
6	$\neg(A \in pt(A))$	1, 3, 5, $\neg i$

De même, si A est partie de B, B ne saurait être partie de A :

M15 $\vdash (\forall A, B) : A \in pt(B) \supset \neg(B \in pt(A))$

1	$A \in pt(B)$	hyp
2	$B \in pt(A)$	hyp (rais. par l'absurde)
3	$A \in pt(B)$	1, reit
4	$B \in el(A)$	2, Dfpt(1)
5	$A \in el(B)$	3, Dfpt(1)
6	$A = B$	4, 5, Ax2
7	$\neg(A = B)$	3, Dfpt(2)
8	$\neg(A \in pt(B))$	1, 6, 7, $\neg i$

A P P E N D I C E

Pour terminer je voudrais, en adaptant ce qui précède, introduire une typologie des relations due à LEONARD et GOODMAN 1940.

Posons d'abord que deux objets sont extérieurs l'un à l'autre s'ils n'ont pas d'élément commun.

Df ext $A \in \text{ext}(B) \text{ . = df . } A \in A \wedge B \in B \wedge (\forall C)(C \in \text{el}(A) \supset \sim(C \in \text{el}(B)))$

La relation d'extériorité a les propriétés attendues :

M16 $\vdash (\forall A, B, C) : A \in \text{el}(B) \wedge B \in \text{ext}(C) \supset A \in \text{ext}(C)$

M17 $\vdash (\forall A, B) : A \in \text{el}(B) \supset \sim(A \in \text{ext}(B) \wedge \sim(B \in \text{ext}(A)))$

Il est dès lors possible de faire la somme de deux objets extérieurs l'un à l'autre :

Df + $A \in B + C \text{ . = df . } A \in \text{Kl}(B \cup C) \wedge B \in \text{ext}(C)$

La somme de deux objets est donc un troisième objet qui est une classe collective. (On sait que les classes sont des objets, par DfKl(1)). On montre sans peine que l'opération + est cummulative et associative.

Introduisons enfin l'idée de "recouvrement" (overlapping). Il s'agit de la relation suivante :

Df ov $A \in \text{ov}(B) \text{ . = df . } A \in A \wedge B \in B \wedge (\exists C)(C \in \text{el}(A) \wedge C \in \text{el}(B))$

En d'autres termes A recouvre B (A est recouvrant B) si A et B sont deux objets qui ont un élément commun. On voit sans peine que, pour des objets, les propositions $A \in \text{ext}(B)$ et $A \in \text{ov}(B)$ sont contradictoires :

M18 $\vdash (\forall A, B) : A \in A \wedge B \in B \supset A \in \text{ov}(B) \equiv \sim(A \in \text{ext}(B))$

Enfin, tout objet se recouvre lui-même :

M19 $\vdash (\forall A) : A \in A \supset A \in \text{ov}(A)$

et si A recouvre B, B recouvre A :

$$\text{M20} \quad \vdash (\forall A, B) : A \in \text{ov}(B) . \equiv . B \in \text{ov}(A)$$

Ceci posé, voyons comment utiliser ces notions pour analyser certaines relations.

Soit la relation $r = \text{df}$ être de la même couleur que. Si r_{AB} (A est de la même couleur que B), A et B ont quelque élément en commun, savoir leur couleur, disent "le rouge". Si l'on convient que "le rouge" est ici un nom individuel, on aura :

$$(\exists C)(C \in \text{el}(A) \wedge C \in \text{el}(B))$$

On posera qu'une relation est interne si tous les termes qu'elle relie ont un élément en commun :

$$\text{Df interne} \quad \text{Int}(r) . = \text{df} . (\forall A, B) . r_{AB} \supset A \in \text{ov}(B)$$

Il est clair que la relation de partie à tout est une relation interne, mais il me semble que les relations d'équivalence, de similitude et certaines relations d'ordre (plus court que, plus âgé que) sont aussi des relations internes. Il faut cependant noter qu'une telle propriété n'a rien d'absolu : tout paraît dépendre du point de vue que l'on adopte, en particulier de la décision de considérer certains concepts "abstraits" (couleur, longueur, poids) comme des éléments, comme des ingrédients ou non.

Le problème est le même pour les relations dites externes.

$$\text{Df externe} \quad \text{Exter}(r) . = \text{df} . (\forall A, B) . r_{AB} \supset A \in \text{ext}(B)$$

Ainsi "être à côté de", "être au-dessus de" peuvent être conçues comme des relations externes.

La différence entre une relation interne et une relation externe est que la première exige de considérer un élément commun, la seconde pas. Si "A est à côté de B", n'importe quel C, mis à la place de A sera "à côté de B". Mais si "A est plus lourd que B", seul un C qui a un poids et un poids au moins égal à celui de A, sera "plus lourd que B".

Remarques

1. Sans accorder plus d'importance à la chose que celle d'une remarque en passant, on peut noter que, dans bien

des cas, les relations internes peuvent se mettre sous la forme canonique.

AVOIR un x

où x joue le rôle d'un paramètre susceptible de prendre des valeurs multiples.

2. L'existence de deux types de relations analogues à interne et externe a déjà été soulignée par les logiciens médiévaux. On distinguait entre relations de raison et relations de choses ou réelles. Ainsi :

"Jean ressemble à Pierre par la couleur des yeux" est une relation de raison (interne). Si l'un des termes disparaît, la couleur des yeux de l'autre demeure.

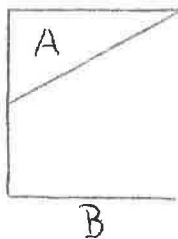
"Jean parle à Pierre" est une relation réelle. Elle disparaît si l'un des termes vient à manquer¹⁾.

Leonard et Goodman introduisent encore d'autres distinctions.

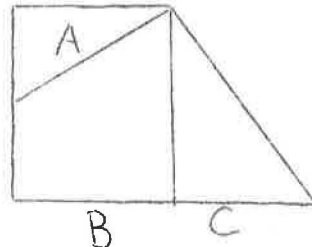
Soit la figure (1). On peut dire "A fait partie de B". Si l'on passe maintenant à la figure (2) et en supposant que le côté vertical commun à B et à C n'appartienne qu'à C, A fait maintenant partie de B+C. Une telle relation est dite expansive :

Df expansive

$$\text{Exp}(r) \text{.} = \text{df.} (\forall A, B, C) \text{.} r_{AB} \supset r_{A(B+C)}$$



Fig(1)



Fig(2)

La relation de recouvrement est expansive.

Il est possible de renforcer les conditions et d'introduire la notion de relation cumulative :

1) Cf. PEIRCE, 1965, 1.365.

Df cumulative

$$\text{Cumul}(r) \text{.}=\text{df.}(\forall A,B,C) : rAB \wedge rAC \supset rA(B+C)$$

Il s'ensuit que toute relation expansive est cumulative, sans que la réciproque ne soit vraie. Ainsi la relation "au-dessus de" est cumulative sans être expansive.

Soit les trois objets A, B et C de la figure (3).

Ⓐ

Ⓑ

Ⓒ

On a : A est extérieur à B

A est extérieur à C

B est extérieur à C

Fig(3)

Il est clair que la relation "est extérieur à" est cumulative. Mais elle est encore agglomérative :

Df agglomérative

$$\text{Aggl}(r) \text{.}=\text{df.}(\forall A,B,C) : rAB \wedge rAC \wedge rBC \supset rA(B+C)$$

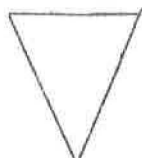
Toute relation cumulative est agglomérative, mais pas réciproquement, comme le montre le cas de la relation de similitude entre triangles (Fig.(4)).



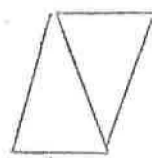
A



B



C



B+C

Fig(4)

Terminons par un dernier type de relations : les relations dissectives. Soit la relation "contenir" au sens où le tout contient ses parties. On a :

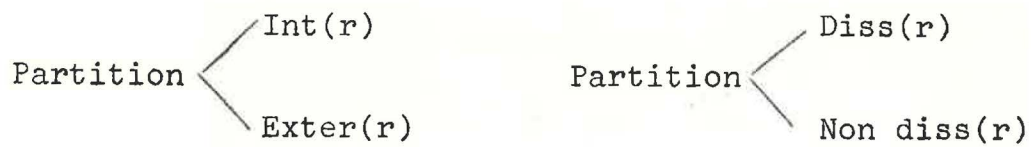
Df dissective

$$\text{Diss}(r) \text{.}=\text{df.}(\forall A,B,C) : rAB \wedge C \in \text{el}(B) \supset rAC$$

La relation "voir" n'est, en général, pas dissective. Si je vois une maison (de l'extérieur), je ne vois pas chacune de

ses parties.

En résumé, on a deux partitions et une hiérarchie:



Hiérarchie : $\text{Exp}(r) \longrightarrow \text{Cumul}(r) \longrightarrow \text{Aggl}(r)$

Il ne s'agit, dans tout ceci, que de suggestions, de sorte que le plus sage est de finir par un problème :

Problème : Les définitions ci-dessus ont-elles quelque intérêt et, si oui, à quelles relations concrètes s'appliquent-elles ?

BIBLIOGRAPHIE

- R.E. CLAY The relation of weakly discrete to set and equinumerosity in mereology. Notre Dame Journal of formal logic, 1965, VI, 4, 325-340.
- F.B. FITCH Symbolic logic. New York, The Ronald Press Co, 1952.
- J.B. GRIZE Logique moderne I. Paris, La Haye, Mouton, Gauthier-Villars, 1970.
- J.T. KEARNS The contribution of Lesniewski. Notre Dame Journal of formal logic, 1967, VIII.1-2, 61-93.
- S.C. KLEENE Logique mathématique. Trad. J. Largeault. Paris, A. Colin, 1971.
- C. LEJEWSKI Zu Lesniewskis Ontologie. Ratio, 1957-58, II, 50-78.
- C. LEJEWSKI A single axiom for the mereological notion of proper part. Notre Dame Journal of formal logic, 1967, VIII.4, 279-285.
- H.S. LEONARD,
N. GOODMAN The calculus of individual and its uses. Journal of Symbolic Logic, 1940, 5.2, 45-55.
- E.C. LUSCHEI The logical systems of Lesniewski. Amsterdam, North-Holland Publ. Cy., 1962.
- S.C. PEIRCE Collected Papers. Cambridge, Harvard Univ. Press, 1965.
- J. ROUAULT,
M. DUPRAZ Lexis-Affirmation-Négation : Etude fondée sur les classes. Centre d'étude pour la traduction automatique Grenoble, 1968. Document G.2400-A.
- J. ROUAULT Approche formelle de problèmes liés à la sémantique des langues naturelles. Thèse, Université scientifique et médicale de Grenoble, 1971.
- B. SOBOCINSKI L'analyse de l'antinomie russellienne par Lesniewski. Methodos, 1949, 1, 94-107, 220-228, 308-316; 1950, 2, 237-257.