Publié dans Travaux de logique 11, 79-109, 1996,
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

DE LA CATÉGORIE SÉMANTIQUE DU NOM À LA DÉFINITION COLLECTIVE DE LA CLASSE

Nadine GESSLER

> Elle essaya même de s'imaginer à quoi peut ressembler la flamme d'une chandelle quand la chandelle est fondue.
> (Lewis Caroll)

Esquisse d'un problème

Les articles qui précèdent se développent autour des catégories du nom et de la proposition. Mais celle du nom soulève, dans la perspective logique qui est la nôtre, un problème sémantique majeur auquel je me propose ici d'apporter une solution.

Le nom, en effet, dénote. Ce faisant, il capte du monde un objet. Par exemple: «ce cahier», «la Vallée du Nil». Mais ces objets particuliers, bien qu'individualisés dans le discours, sont aussi des entités complexes. Ce cahier, que le lecteur tient entre ses mains, est une entité composée, entre autres choses, du premier article, de la page 48 ou de l'ensemble de tous les mots sans *e* qui apparaissent dans cet article. Aussi, et c'est là le noeud du problème, peut-on distinguer deux niveaux dans la manière d'appréhender un objet référentiel. Selon le premier, corollaire de *la prédication distributive*, l'objet est appréhendé dans son unité: l'objet est un tout, une entité particulière, individualisée par le nom, et classé avec d'autres semblables sous une propriété commune. Ce qui caractérise le second niveau, au contraire, c'est son caractère *collectif*: l'objet est appréhendé dans sa dimension complexe, c'est-à-dire comme l'agrégat, l'agglomérat, la collection de tous les ingrédients, parties, fragments qui le composent.

Or de ces deux niveaux, distincts mais complémentaires, la sémantique extensionnelle représentée par la théorie classique des ensembles ne retient que le niveau distributif. Ainsi le modèle classique ne saurait rendre compte de certaines démarches déductives et de certaines opérations logiques de la pensée qui s'appuient sur l'organisation complexe d'un objet de référence. Considérons, à ce titre, les deux exemples suivants. Le premier est un argument de De Morgan. Le second est une proposition que j'emprunte à P. Joray qui en propose ici même une analyse logique sur la base de l'outil catégoriel.

(1) Tout cheval est un animal
donc
Toute tête de cheval est une tête d'animal

(2) La maison *dont* le toit est rouge est grande.

La théorie classique des ensembles ne permet pas de valider l'argument (1). Elle ne permet pas non plus d'analyser l'opération de subordination exprimée par le relatif *dont* (2) par un opérateur logique. En effet, la relation ici en jeu, tant avec l'argument qu'avec le relatif, est une relation d'ingrédience entre des entités et des parties de ces entités. Or il est impossible de prendre en considération une telle relation dans le cadre de la sémantique distributive où – selon la terminologie bien établie – les ensembles (ou classes) sont définis comme des extensions de concepts.

La résolution du problème sémantique soulevé requiert donc une autre sémantique, de qualité collective, telle que la partie puisse être comprise comme un ingrédient, un fragment du tout, de la même manière qu'une main est le fragment d'un corps ou le manche celui d'un couteau.

Cette sémantique – bien que dans l'ombre – existe. C'est celle de la théorie des classes collectives ou *méréologie*. Développée par Stanislaw Lesniewski (1886-1939) durant la deuxième décennie de ce siècle, cette théorie formalise une version collective de la classe qui permet, sur la base de la prédication distributive, de traiter tout objet comme l'unité collective de tous ses ingrédients, parties, agrégats. Le logicien polonais la développa suite à son analyse de l'antinomie de Russell de la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes. Il la présenta comme la théorie «naturelle» des classes, estimant par là que la définition collective de la classe est conforme au sens commun. Et, en se fondant sur cette version de la classe, il est parvenu à résoudre le paradoxe de Russell.

C'est à cette démarche que je m'intéresserai dans un premier temps. D'une part parce que la méréologie en est le résultat direct. D'autre part parce que c'est l'analyse de l'antinomie russellienne qui entraîna littéralement Lesniewski à construire – pour son propre système des fondements des mathématiques – des systèmes logiques fortement liés à la notion de catégories syntaxico-sémantiques. En effet, la méréologie n'est pas, à proprement parler, une théorie logique. Sa construction a donc posé le problème de la formalisation des raisonnements logiques auxquels elle fait appel. Lesniewski a développé pour cela deux systèmes logiques: la *protothétique* (calcul propositionnel) et l'*ontologie* (calcul des noms) (cf. D. Miéville 1984 et ici même). La méréologie repose structurellement sur la base logique et la grammaire catégorielle de ces deux systèmes. Mais historiquement, elle est le premier des trois systèmes conçus par Lesniewski.

Ensuite, après avoir aussi précisé les propriétés essentielles de la classe collective, j'en proposerai une de bases axiomatiques. Et enfin, je montrerai que le modèle collectif permet d'apporter des solutions formelles, ou pour le moins d'envisager des solutions, aux deux problèmes sémantiques posés précédemment.

Une découverte qui consterna Frege

Retournons tout d'abord à l'antinomie de Russell. Je rappelle que l'antinomie a perturbé le programme logiciste des fondements des mathématiques qui, de Frege à Russell, visait à fonder les mathématiques sur des notions logiques *via* la théorie des ensembles et la définition ensembliste du nombre. Soit, pour cette définition:

> Le nombre qui appartient au concept F est l'extension du concept: "équinumérique au concept F". (Frege 1884: 79; trad. Frege 1969: 194)

Ou, en langage russellien:

> Le nombre d'une classe est la classe des classes qui lui sont semblables. (Russell 1970: 31)

Mais comme Russell le communiqua à Frege en juin 1902 suite à la lecture du premier volume de ses *Grundgesetze der Arithmetik,* la notion de classe de classe, qui intervient dans la définition du nombre, est soumise à une contradiction. Celle-ci survient avec la question suivante: la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes est-elle ou non élément d'elle-même? Si elle est élément d'elle-même, alors elle ne peut pas être définie comme la classe de toutes les classes qui *ne sont pas éléments d'elles-mêmes.* Et l'inverse: si elle n'est pas élément d'elle-même, alors elle ne peut pas être définie comme la classe de *toutes* les classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes (cf. D. Bourquin ici même).

On peut traduire les étapes du paradoxe de la manière suivante:

Appelons W la classe de toutes les classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes. On définit donc W de sorte que pour toute classe x:

$$x \in W \equiv \neg(x \in x)$$

On substitue ensuite W à x:

$$W \in W \equiv \neg (W \in W).$$

Au moment où Frege prit connaissance de l'antinomie[1], le deuxième volume des *Grundgesetze der Arithmetik* était sur le point d'être publié. Frege rédigea alors rapidement une postface dans laquelle il tentait de sauver du naufrage la notion de classe en affaiblissant un des axiomes de son système. Mais, comme le montrera Lesniewski plus tard, la correction de Frege ne suffit pas pour échapper au paradoxe[2] (Sobocinski 1950: 220-228).

Par la suite, le paradoxe fut effectivement éliminé aussi bien dans les axiomatiques proposées pour la théorie des ensembles que dans les *Principia Mathematica*, synthèse culminante du mouvement logiciste rédigée par Russell et Whitehead et publiée en 1910. Russell, pour éviter le paradoxe, invente la théorie simple des types. La règle de formation des énoncés du type «$x \in y$» qu'il propose interdit de construire la contradiction qui affecte le système de Frege (cf. D. Bourquin). Il était bien clair, néanmoins, que la théorie des types – et avec elle les axiomatiques de la théorie des ensembles – était davantage une dissolution du problème de l'antinomie qu'une véritable résolution. Et il était tout aussi clair que l'antinomie avait bel et bien jeté le doute sur le bien-fondé de la notion de classe, notion pourtant parmi les plus familières qui soient.

C'est très précisément sur ce point que Lesniewski va réagir, faisant valoir que ce qu'il y a de problématique au sein de l'antinomie, c'est la notion même de classe. Il va montrer que la contradiction est le résultat d'une confusion, d'un amalgame de deux conceptions différentes de la notion de classe: soit une conception distributive et une autre collective. Et c'est en les distinguant l'une de l'autre qu'il résout l'antinomie.

Mais avant d'aller plus loin et de restituer la genèse d'une telle distinction, il convient d'examiner la relation particulière que Lesniewski établit entre antinomie et intuition. C'est elle qui explicite la voie dans laquelle il s'engage pour résoudre le problème soulevé par Russell.

---

1 «Votre découverte de la contradiction m'a surpris au plus haut point et, j'allais presque dire, m'a consterné, puisque de ce fait, le fondement sur lequel je pensais pouvoir se construire l'arithmétique se met à vaciller.» (Lettre du 22 juin 1902 de Frege à Russell).

2 Russell le crut sur le moment (1903: Appendice 522).

Antinomie et intuition selon Lesniewski

Pour Lesniewski, le seul moyen d'éliminer l'antinomie est de comprendre pourquoi elle se produit. Car une antinomie, selon le sens qu'il assigne à ce terme[3], est plus qu'une simple contradiction formelle qu'on peut éliminer en recourant à des expédients divers. Une contradiction n'est une antinomie que si nous la *croyons* déduite validement de présupposés à la vérité desquels, *intuitivement*, nous *croyons*. Cela signifie que l'antinomie est la manifestation de la présence, parmi les présupposés ou les règles de raisonnement qui entrent en jeu dans sa construction, d'une croyance fausse; et ce qui empêche cette fausseté d'apparaître comme telle, c'est l'intuition illusoire de sa vérité. C'est pourquoi:

> L'unique méthode de "solution" des "antinomies" est la méthode de mise en question intuitive des raisonnements ou des présupposés conduisant à la contradiction. (Lesniewski 1989: 33)

Autrement dit, éliminer l'antinomie consiste à mettre à jour ce qui, au sein des croyances fondamentales, est «en fait faux». Car en cessant de croire en la vérité à laquelle, jusque-là, on adhérait de manière intuitive, on cessera *ipso facto* de voir dans la contradiction une antinomie.

> Alors seulement l'antinomie en question sera surmontée, car son aspect "tragique", causé par la croyance mentionnée, sera éliminé: nous cesserons de croire à la vérité d'un des présupposés de l'antinomie [...] Il n'y aura non plus besoin de faire des "sacrifices" ou de renoncer à quoi que ce soit, car la simple constatation que nous avons cru antérieurement à la vérité d'une thèse suffira, et cette constatation sera un approfondissement de la réalité. (Sobocinski 1949: 96-97)

Cela dit, il convient de préciser quelque peu le sens et le rôle de cette notion d'intuition. Tout d'abord par intuition, il faut comprendre la manière ordinaire d'appréhender la réalité, c'est-à-dire celle du sens commun. Quant au rôle de l'intuition, il s'éclairera avec le passage rapporté ci-dessous. Lesniewski y

3 Sens qu'il emprunte à Nelson (Nelson-Grelling 1908).

conteste les tentatives de reconstruction des fondements des mathématiques que l'antinomie a suscitées pour n'avoir fait qu'occulter davantage la distinction, essentielle à ses yeux, entre les sciences mathématiques «vraies» et les systèmes formels non interprétés. Cette distinction fonde celle, évoquée plus haut, entre une simple contradiction formelle et une véritable antinomie.

> Ce phénomène [les tentatives de reconstruction des fondements des mathématiques] favorisait la disparition du sens de la différence entre les sciences mathématiques, tenues pour des théories déductives appelées à capter la réalité hétérogène du monde dans des lois aussi exactes que possible, et les systèmes déductifs non contradictoires analogues, mais qui, tout en assurant la possibilité d'obtention sur leur terrain d'une quantité toujours croissante de nouveaux théorèmes, se distinguent tout de même par l'absence de toutes valeurs intuitives les rattachant à la réalité. (Lesniewski 1989: 33)

Selon Lesniewski, le langage mathématique est appelé à «capter la réalité hétérogène du monde dans des lois aussi exactes que possibles». C'est là que réside le rôle-clé de cette notion d'intuition qui s'oppose à la conception logiciste des mathématiques caractérisant la tendance dominante depuis la fin du XIXe siècle. Car pour Lesniewski l'intuition impose une position nominaliste: ce monde n'est composé que d'objets individuels, d'entités concrètes. Et les classes font, elles aussi, partie de ces objets du monde. De sorte que le mathématicien se doit de les traiter comme telles et non pas, à la manière des théories habituelles, comme des entités abstraites, non fondées dans le monde. Ainsi ces théories échouent à représenter adéquatement l'intuition. C'est la raison pour laquelle elles conduisent à une contradiction. Et c'est également pourquoi les tentatives de «solution», comme celle de Russell, ne sont pas satisfaisantes. Elles parviennent, certes, à écarter l'antinomie. Mais, arbitrairement limitées et dénuées de fondement intuitif, elles ne la résolvent pas[4].

---

4 «La théorie de M. Ernst Zermelo, architectoniquement raffinée, introduit dans la "théorie des ensembles" plusieurs prohibitions visant l'élimination des "antinomies" du terrain des

> La mathématique extra-intuitive ne contient pas de remèdes contre les insuffisances de l'intuition (Lesniewski 1989: 33)

Il est difficile de savoir si le nominalisme de Lesniewski résulte de son étude de l'antinomie ou s'il la précède. Mais quoi qu'il en soit, il suffit de retenir ici que c'est bien par ce refus des entités abstraites que le problème de l'antinomie sera résolu. Venons-en maintenant aux résultats de l'étude de l'antinomie elle-même, c'est-à-dire à la conception collective de la classe.

La conception collective de la classe

Comment Lesniewski a-t-il procédé? Il découvre l'antinomie en 1911 dans un article de Lukasiewicz sur le principe de contradiction chez Aristote. Voulant alors «faire quelque chose» et ne pouvant pas, dans un premier temps, justifier le rejet des suppositions ou des règles de raisonnement conduisant à la contradiction, il va soumettre à l'examen les termes «classe» et «ensemble» qui apparaissent dans la formulation de l'antinomie. Et ce qu'il va chercher à exprimer, c'est le concept ordinaire de classe, d'ensemble, de collection, d'agrégat. Il écrit,

> J'ai commencé à méditer les exemples des situations où je tiens ou ne tiens pas en pratique tels ou tels objets pour des classes, respectivement des ensembles de tels ou tels objets [...] et à soumettre à une analyse critique ma croyance dans les suppositions particulières de l'"antinomie" discutée précisément de ce point de vue. (Lesniewski 1989: 49)

Il apparaît alors que les objets dénotés par ces concepts sont des entités réelles et non des entités abstraites. Une classe composée d'individus concrets est elle-même un individu concret. Dire «la classe des a», c'est nommer un objet qui consiste, au sens littéral du terme, en tous les objets qui sont a. L'expression «classe des hommes», par exemple, dénote un objet réel, la totalité, le «tas» de tous les hommes dans le monde, quel que soit

---

mathématiques, prohibitions privées, hélas! de tout fondement intuitif». (Lesniewski 1989: 33) l'endroit où ils se trouvent. Encore faut-il, cependant, qu'il existe des hommes pour parler de la classe des hommes. En effet, de ce point de vue, pour qu'il existe un objet qui soit la classe des a, il faut qu'il existe au moins un objet a. Par conséquent, la classe vide ne peut pas exister.

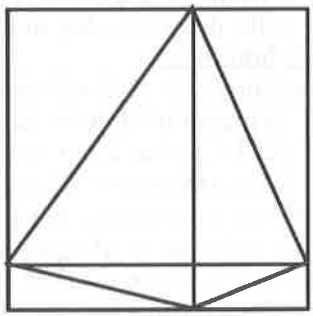
> Etant d'avis que si un objet est la classe de tels et tels a, alors il se compose de ces a, j'ai toujours rejeté, l'existence de monstres théoriques dans le genre de la classe de cercles carrés, comprenant bien que rien ne peut être composé de ce qui n'existe pas. (Lesniewski 1989: 58)

Si le terme «classe» est compris de cette manière, la classe présente alors les propriétés suivantes:

– Un objet est identique à la classe de lui-même et, a *fortiori*, à la classe de la classe de lui-même. Par exemple, ce cahier est le même objet que la classe de lui-même, la classe de la classe des hommes est le même objet que la classe des hommes.

– Le même objet peut être simultanément la classe d'objets différents. En d'autres termes, une classe peut être générée par des éléments de nature différente.

Illustrons cette propriété par un exemple. Soit le carré K de la figure 1:



le carré K

Le carré K peut être appréhendé comme la classe des rectangles de K et simultanément comme la classe des triangles de K. Il peut également être appréhendé comme la classe de lui-même.

– La classe est unique. Si un objet est simultanément la classe des objets a et la classe des objets b, alors la classe des objets a est identique à la classe des objets b. Cependant il n'en résulte pas, comme tel est le cas dans la sémantique distributive, que les objets a soient les mêmes que les objets b. La classe des rectangles du carré K, par exemple, est identique à la classe des triangles de K, mais un rectangle n'est pas un triangle. D'où la conclusion suivante: contrairement à la théorie classique des ensembles, un objet qui appartient à la classe collective des objets a n'est pas nécessairement un des objets a.

Du point de vue distributif, «A appartient à la classe des a» signifie que «A est un élément de l'extension des a», c'est-à-dire que «A est a». Par exemple, «Vénus appartient à la classe des planètes» signifie la même chose que «Vénus est un élément de l'extension du concept planète», soit «Vénus est une planète».

Mais, si les objets sont appréhendés comme les agrégats de tous leurs ingrédients, un objet A qui appartient à la classe collective des objets a peut être un ingrédient quelconque de l'objet constitué par la classe des objets a. Si l'objet A est, par exemple, la classe collective du lecteur, la tête et le coeur du lecteur seront des éléments (ingrédients) de A. De même, si A est la classe des hommes, la tête du lecteur, la classe collective composée des mains du lecteur ou celle des têtes des hommes seront des éléments de la classe des hommes.

Prenons un autre exemple. Soit la «classe des continents». Au sens collectif, cette expression dénote un objet réel. Chaque continent fait partie de la classe ainsi que chacun de ses éléments (ingrédients). Si on interprète «classe des continents» au sens distributif, la classe contiendra cinq éléments et rien de plus. Il sera correct de dire que l'Afrique appartient à la classe des continents, mais il sera faux de dire que la vallée du Nil appartient à la classe des continents. Au contraire, au sens collectif, non seulement l'Afrique est un élément (au sens collectif d'élément) de la classe des continents, mais aussi la Vallée du Nil, la ville de Neuchâtel, la classe (collective) formée de tous les fleuves, ou encore la classe réunissant la vallée du Nil et la ville de Neuchâtel.

Ainsi, tout individu est identique à la classe collective de lui-même, mais aussi à la classe de la classe de lui-même; toute classe est élément d'elle-même; et chaque élément (ingrédient) d'un élément ou chaque classe d'éléments sont eux-mêmes des éléments de l'individu en question, que le tout soit continu ou non.

Chaque classe d'un ou plusieurs objets est traitée comme un *individu*. De tels objets sont des «tas», des agrégats, constitués de tous les ingrédients des objets qui les composent. Goodman, nominaliste comme Lesniewski, exprime ainsi l'intuition du caractère concret de la classe et de l'individu qu'elle représente:

> An individual is simply a segment of the world or of experience, and its boundaries may be complex to any degree. (Goodman 1951: 42)

D'un paradoxe qui n'en est pas un

Par cette définition collective de la classe, Lesniewski peut résoudre le problème de l'antinomie en réfutant un des présupposés. Il n'y a pas d'antinomie parce que *la classe des classes qui ne sont pas éléments d elles-mêmes n'existe pas.*

La démonstration repose sur le principe ontologique de la vérité de toute proposition singulière: toute proposition singulière dont le sujet ne dénote aucun objet est fausse. La stratégie adoptée consiste alors à montrer qu'aucun objet n'est une classe qui n'est pas élément d'elle-même et que, par conséquent, l'expression «la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes» ne dénote aucun objet. En effet, la question «la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes est élément d'elle-même ou n'est pas élément d'elle-même» ne peut recevoir une réponse positive ou négative que s'il existe un objet qui est la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes. Si un tel objet n'existe pas, alors les deux suppositions conduisant à l'antinomie, à savoir (a) la classe des classes qui ne sont éléments d'elles-mêmes est élément d'elle-même et (b) la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes n'est pas élément d'elle-même, sont fausses. Et si elles sont fausses, l'antinomie ne peut pas être construite. Je propose de considérer la preuve que donne Lesniewski de la non existence de la classe de Russell.

Sur la base des trois thèses suivantes:

(1) Si un objet est la classe des a, alors un objet est a.
(2) Un objet peut être la classe de tels objets et être simultanément la classe d'objets tout à fait différents.
(3) Si un objet est P, alors P est la classe des P.

Lesniewski pose la définition suivante:

(4) P est élément de la classe K si et seulement si, compte tenu d'une certaine signification du terme «a» sont remplies les conditions suivantes:
 1) K est la classe des a.
 2) P est a[5].

Il pose ensuite deux thèses de l'ontologie:

(5) Si P est a, alors un et un seul objet est P.
(6) Si P est a, alors P est P.

De 5, 3 et 6 on constate que:

(7) Si P est une classe, alors P est la classe des P.
(8) Si P est une classe, alors
 1) P est la classe des P.
 2) P est P.

De 8 on déduit que:

(9) Si P est une classe, alors, compte tenu d'une certaine signification du terme «a», sont remplies les conditions suivantes:
 1) P est la classe des a.
 2) P est a.

5 Par exemple, tout rectangle du carré K de la fig. 1 est élément de la classe des triangles du carré K. En effet, avec «a» pour «rectangle du carré K», on a:
1) La classe des triangles du carré K est la classe des a.
2) Tout rectangle du carré K est a.

De 9, d'après la définition 4, il s'ensuit alors que:

(10) Si P est une classe, alors P est élément de la classe P.

Donc,

(11) Aucun objet n'est une classe qui n'est pas élément d'elle-même.

Par conséquent, d'après 1 et 11:

(12) Aucun objet n'est la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes.

(Lesniewski 1989: 49-51)

Par conséquent il n'y a pas d'antinomie, de la même manière qu'il n'y a pas d'antinomie dans la contradiction entraînée par le supposition qu'un carré rond est rond ou n'est pas rond.

Cette analyse de l'antinomie est la deuxième de Lesniewski. Réalisée en 1914, elle fut publiée en 1927. La première, qui obéit à la même stratégie que celle-ci, avait été publiée en 1914, sous le titre «La classe des classes qui ne sont pas subordonnées à elles-mêmes est-elle subordonnée à elle-même»[6]. Il reste une troisième analyse qui, non publiée du vivant de Lesniewski, fut exposée en 1949 et 1950 par Sobocinski. Dans cette analyse, Lesniewski revient une dernière fois à la contradiction, à la lumière de son système des fondements des mathématiques alors en place. Il réévalue clairement la confusion entre les interprétations distributive et collective que dissimule l'usage ambigu du terme «classe». Et il montre que la contradiction se produit, dans le cadre du système de la logique classique, par suite de l'admission du présupposé énonçant que tout objet qui appartient à la classe des a est nécessairement un des a. Ainsi, c'est donc bien en distinguant les acceptions distributive et collective du terme «classe» que l'antinomie sera éliminée puisque, par l'adoption de la version collective de la classe, le présupposé en question est rejeté au profit de la relation méréologique d'ingrédience, fondée sur l'intuition. C'est aussi dans cette dernière analyse que Lesniewski donne une formulation de l'antinomie comme

6 Lesniewski utilise l'expression «être subordonné à» pour «être élément de».

construction formelle qui, par transgression des directives de construction régulière de ses systèmes déductifs, conduit à une contradiction (cf. D. Bourquin ici même).

Remarques à Frege et aux *Principia Mathematica*

L'étude de l'antinomie et la construction de la méréologie se sont accompagnées d'une sévère remise en question, par Lesniewski, de la notion habituelle de la classe et de son statut d'entité abstraite. Je vais m'intéresser ici aux critiques qu'il adresse aux éléments moteurs du courant logiciste, à savoir Frege, Whitehead et Russell. Ces critiques, lapidaires, éclairent le portrait jusque-là dressé de la classe collective. Et elles permettent de mesurer l'écart qui sépare la conception des classes de Lesniewski de celle du courant dominant qui devait conférer à la théorie classique des ensembles l'importance et le statut qui sont les siens au sein de l'édifice des mathématiques.

Frege

Lesniewski répond aux objections que Frege formula, dans un article publié en 1895, à l'égard de l'algèbre de la logique (ou calcul des domaines) de Schröder. Frege lui reprochait de privilégier une conception purement extensionnelle des classes, c'est-à-dire une conception des classes comme collection d'objets. Il présente deux séries d'objections. La première, d'ordre technique, met en avant deux points. D'une part, la conception collective de la classe a pour conséquence de laisser l'ensemble vide inexpliqué et contraint Schröder à l'inventer. D'autre part, par suite de l'identification d'un singleton {x} avec l'individu x qui en est l'unique élément, elle conduit à une contradiction. La deuxième série d'objections, d'ordre théorique, oppose à cette définition de la classe, qui pour Frege n'a rien de logique, celle d'extension d'un concept:

> La différence complète – ou plutôt l'incompatibilité – qu'il y a entre elles est au premier regard masquée. Ainsi voisinent deux théories des

> classes et des extensions, l'une grossière et informe, l'autre plus fine et la seule utilisable en logique. (Frege 1895: 453)

Reprenons ces différents points à la lumière des remarques de Lesniewski. Tout d'abord, le point d'attaque: la question de la classe vide. En principe, la classe vide est impossible dans le système de Schröder où les classes sont conçues comme des collections d'objets singuliers. Or Schröder, pour pouvoir calculer sur l'intersection, n'en admet pas moins une classe vide. D'où la critique de Frege: l'invention de la classe vide par Schröder est une entorse à sa définition de la classe. Comme il l'écrit:

> Lorsqu'une classe se compose d'objets, lorsqu'un ensemble est l'union collective de ceux-ci, alors elle (il) doit disparaître, quand ces objets disparaissent. Lorsque nous brûlons tous les arbres d'une forêt, alors nous brûlons en même temps la forêt. Il ne peut donc y avoir de classe vide. (Frege 1895: 436-437)

Sur ce point, Lesniewski souscrit pleinement à l'objection de Frege. Les classes définies comme totalités, littéralement composées de leurs ingrédients, disparaissent avec leurs ingrédients tout comme, pour reprendre l'exemple de Frege, la forêt disparaît avec ses arbres. Aucune classe, dans ce sens, ne peut donc être vide.

Mais c'était là l'unique point de rencontre. Lesniewski va tout de suite entrer en conflit avec Frege sur le deuxième point: le rejet par ce dernier de l'identification d'un objet avec la classe qui ne se compose que de lui. Cette identification découle de la conception de la classe comme collection d'objets singuliers.

> Notre supposition selon laquelle les classes singulières coïncident avec les individus est maintenant une conclusion nécessaire de la conception d'après laquelle les classes se composent d'individus. (Frege 1895: 445)

> Nous voulons également considérer un individu comme étant une classe qui ne contient que cet individu. (Schröder 1890: 148)

Il en résulte que la distinction entre la relation d'inclusion entre classes et la relation d'appartenance est effacée.

> L'objet individuel est alors une classe. Ainsi la relation entre la partie et le tout se donne d'une manière naturelle comme la relation fondamentale. (Frege 1895: 442)

La conséquence fâcheuse d'une telle confusion est une contradiction. Frege la met en évidence à travers la démonstration suivante:

> (a) Le doute relatif à la question de savoir si chaque individu peut être tenu pour une classe sera renforcé par la réflexion suivante. Nous pouvons prendre pour P dans notre considération antérieure également une classe qui contient un ensemble d'individus;car, comme l'auteur le dit à la page 148, une telle classe peut se donner pour un être de raison et en ce sens aussi comme un individu.
>
> (b) Si Q est maintenant, comme plus haut, la classe coïncidant avec les objets P, alors Q est une classe singulière qui ne contient comme individu que P.
>
> (c) S'il était vrai maintenant qu'une classe singulière coïncide avec l'individu qui en est l'unique élément, alors P coïnciderait avec Q. Admettons maintenant que a et b soient des objets différents compris par P en tant qu'individus, alors ils seraient maintenant compris aussi par Q; cela voudrait dire que a coïncide avec P aussi bien que b. En conséquence a coïnciderait aussi avec b contrairement à la supposition admise selon laquelle ils seraient différents. (Frege cité in Lesniewski 1989: 60)

Considérons les remarques de Lesniewski. En premier lieu il conteste l'objection de Frege pour qui un objet doit être différent de la classe singulière qui lui correspond. Dans le cadre de la méréologie en effet, un objet est identique à la classe collective de lui-même, et également à toute classe dont il est l'unique élément.

Il relève ensuite que Frege, dans la démonstration rapportée ci-dessus, combat la supposition selon laquelle «chaque individu peut être tenu pour une classe» en invoquant la contradiction à laquelle conduirait la supposition qu'«une classe singulière coïncide avec l'individu qui en est l'unique élément». Frege traite donc de manière équivalente les deux suppositions:

(1) chaque individu est identique avec la classe qui n'est composée que de lui;
(2) une classe singulière coïncide avec l'individu compris par elle comme son unique élément.

Mais ces deux suppositions interprétées dans le cadre de la méréologie ne sont pas équivalentes. Il est vrai qu'une classe ne comprenant qu'un seul élément coïncide avec celui-ci. Mais il est faux que tout objet est la classe dont cet objet est l'unique élément. En effet, tout individu est le même objet que la classe collective de lui-même, autrement dit il est décomposable en ses divers éléments (ingrédients). Lesniewski rejette donc la première supposition. Seule une classe singulière ne comprend qu'un seul élément. Dans ce cas seulement, à supposer que de tels objets singuliers existent, l'objet est identique avec la classe dont il est l'unique élément.

C'est ce que démontre Lesniewski de la manière suivante:

> A) si un – et un seul – objet est un élément de la classe K, alors l'élément de la classe K est la classe des éléments de la classe K.
>
> Étant d'avis que
>
> B) si X est la classe des éléments de la classe K, alors la classe K est le même objet que X,
>
> On peut inférer de A et B que
>
> C) si un – et un seul – objet est l'élément de la classe K, alors la classe K est le même objet que l'élément de la classe K; si donc je me servais de l'expression "classe singulière" de manière à affirmer que
>
> D) K est une classe singulière si et seulement si un – et un seul – objet est l'élément de la classe K,
>
> alors, en s'appuyant sur D et C, on peut dire que
>
> E) si une classe est une classe singulière, alors elle est le même objet que son élément. (Lesniewski 1989: 58-59)

Venons-en maintenant à la définition de la classe, chez Frege, comme extension de concept. Frege affirme la priorité logique des concepts sur les classes qui leur correspondent.

> [...] je soutiens que le concept précède logiquement son extension et qu'on se trompe en essayant de faire reposer l'extension du concept ou classe, non sur le concept mais sur les individus. Par ce chemin on débouche sans doute sur un calcul des domaines, mais on n'arrive pas à une logique. (Frege 1895: 455)

En droit donc, les classes sont fondées sur les concepts qui sont premiers. Telle sera la conclusion de l'article consacré à l'algèbre de la logique de Schröder:

> L'extension d'un concept n'est pas faite des objets qui tombent sous ce concept à la manière dont les arbres font la forêt, mais elle prend appui sur le concept même et seulement sur lui. (Frege 1895: 455)

Lesniewski, quant à lui, avoue ne rien comprendre à ce que les mathématiciens entendent par «extension d'un concept» ni à l'affirmation de Frege soutenant que l'extension d'un concept reçoit de ce concept et de lui seul son fondement. A propos de la correspondance fregéenne entre le concept et la classe qui lui correspond, il écrit:

> Si la classe des a, conforme à ma conception des classes et composée de a, ne doit pas constituer l'"extension du concept a", alors, ne sachant pas répondre à la question de savoir ce que devrait être cette "extension du concept a", quand et où on pourrait en prendre connaissance, voire si quelque chose de ce genre existe dans le monde, je suis disposé à supposer timidement qu'il s'agit de quelques objets "inventés" par les logiciens pour le tourment de nombreuses générations. (Lesniewski 1989: 61)

La pensée de Frege sur les classes n'était, certes, pas facile à cerner. Mais Lesniewski la comprend d'autant moins que l'objectif de Frege est aussi éloigné que possible du sien. Frege, en effet, cherche à donner à la notion de classe un fondement logique. Et s'il refuse d'accepter la conception commune de la classe comme collection d'objets, c'est parce que ce «matériel» intuitif n'a été soumis à aucune clarification ni élaboration logiques. Tout le problème de Lesniewski, au contraire, est de parvenir à une définition réelle de la classe, conforme à l'intuition ordinaire. Dès lors la question est celle de savoir comment rendre compte, dans le cadre d'un système déductif, de ces vérités – intuitives – formulées dans le langage ordinaire et qui font appel à la notion de classe. La logique ici n'a pour rôle que celui de formaliser le langage utilisé pour parler des objets concrets que sont les classes. Privant celle-ci de toute compétence fondatrice à l'égard des mathématiques, Lesniewski ne peut accepter qu'un concept logique – au sens de Frege – se substitue au rôle de la classe.

Les Principia Mathematica

Les remarques de Lesniewski portent sur un passage des *Principia* dont je ne citerai que l'essentiel (Whitehead & Russell 1910: 75; Lesniewski 1989: 63). Ces remarques, dès lors que la classe est abordée comme un objet réel, sont implacables. Même si – à décharge des auteurs des *Principia* – elles tirent aussi leur force de l'oubli, par notre logicien polonais, du but que servent Whitehead et Russell. C'est ce que souligne D. Miéville:

> Ils [Whitehead et Russell] privilégient la forme par rapport au contenu. Lesniewski, lui, fait une lecture qui ne quitte jamais ce qui relie les formes au réel. Il ne peut donc trouver dans les *Principia Mathematica* ce qu'ils ne donnent pas à voir. (Miéville 1984: 22)

Examinons ce que les *Principia* ne donnent pas à voir. Dans la théorie des classes de Whitehead et Russell, les symboles de classes sont des symboles incomplets, des commodités linguistiques. Employés sans être définis, ils s'éliminent par la définition contextuelle de la classe.

> Les symboles de classes, tout comme ceux de descriptions, sont, dans notre système, des symboles incomplets: leurs emplois sont définis, mais eux-mêmes ne sont pas censés signifier quoi que ce soit, c'est-à-dire les *emplois* de tels symboles sont définis de telle sorte que lorsque le *definiens* est substitué au *definiendum*, alors il ne reste plus

> aucun symbole dont on pourrait supposer qu'il représente une classe. Ainsi les classes, dans la mesure où nous les introduisons, ne sont que de pures commodités symboliques ou linguistiques, et non des objets authentiques, comme le sont leurs éléments lorsqu'ils sont des individus. (Whitehead & Russell cités in Lesniewski 1989: 63)

C'est par un tel stratagème que Whitehead et Russell résolvent la difficulté de concilier le fait qu'une classe puisse être à la fois un tout (susceptible d'être membre d'un autre tout, autrement dit un objet) et une multiplicité, une collection (c'est-à-dire prédiquée de plusieurs).

> S'il existe un objet tel qu'une classe, alors il doit être, en un certain sens, un objet. Cependant c'est uniquement de classes qu'on peut prédiquer plusieurs. C'est pourquoi si nous admettons les classes comme objets, nous devons supposer que le même objet peut être à la fois un et multiple, ce qui semble impossible. (*Ibidem*)

Ainsi donc dans les *Principia,* grâce à la notation utilisée, il n'est pas besoin de poser que les classes existent, c'est-à-dire d'admettre dans le calcul une catégorie de noms propres destinée à les représenter. L'intension seule est fondamentale.

> Notre théorie des classes reconnaît et réconcilie ces deux faits apparemment opposés [les points de vue de l'extension et de l'intension] en montrant qu'une extension (laquelle n'est autre chose qu'une classe) est un symbole incomplet dont l'emploi acquiert toujours sa signification à travers la référence à une intension. (*Ibidem*)

Le désaccord de Lesniewski avec Whitehead et Russell est donc profond.

Dans la théorie des classes des *Principia*, les classes ne font pas partie de l'inventaire ultime du monde. Ce ne sont pas des réalités perceptibles. Elles ne sont pas considérées comme des entités au même titre que les individus qu'elles contiennent; plus précisément, elles sont d'un autre «type» que les entités qui en sont les éléments. Les symboles incomplets simulent la notation des classes; celles-ci sont alors de simples «fictions logiques» et la typologie n'a aucune portée ontologique. Dans la méréologie, au contraire, le terme «classe» est un nom réel qui désigne un «objet authentique». Les classes existent au même titre que les objets qui en sont les éléments (ingrédients) et les touts et les parties sont de la même catégorie (non linguistique).

Lesniewski relève aussi que les auteurs des *Principia* ne s'expliquent en aucune manière sur ce qu'est une classe au sens admis par eux, c'est-à-dire comme extension de concept. En outre, ajoute-t-il, alors qu'ils rejettent l'existence d'objets qui sont des classes, ils ne semblent avoir aucun doute quant à l'existence d'objets qui seraient des symboles incomplets. L'ambiguïté relevée ici est difficilement évitable puisque la définition contextuelle de la classe sert précisément à paraphraser des contextes où il semble qu'on fasse référence à des entités, de sorte que toute référence à ces entités ait disparu. Mais l'objectif de Lesniewski n'étant pas de souligner le bien-fondé de la démarche de Whitehead et Russell, il conclut à l'inintelligibilité de leurs propos et à l'impossibilité de savoir «de quels objets ils examinent l'existence ou l'inexistence, lorsqu'ils considèrent l'existence ou l'inexistence des objets qui sont des "classes"» (Lesniewski 1989: 65). Et il écrit:

> En reconnaissant dans l'odeur caractéristique qui me parvient des classes de MM. Whitehead et Russell comme dans celle que dégagent les "extensions de concepts" de Frege, l'odeur des spécimens provenant de la riche galerie des objets "inventés", j'aurais tendance à épouser les doutes des auteurs sur le fait que des objets qui seraient de telles "classes" existent dans le monde. (Lesniewski 1989: 65)

Pour clore cette remise en question des *Principia,* je propose un texte d'un autre ouvrage de Russell. Variation sur le thème du «tas», il fait toute la lumière, comme ne manqua pas de le relever lui-même Lesniewski, sur l'écart qui sépare la méréologie de la théorie des classes de Whitehead et Russell.

> Nous ne pouvons pas prendre les classes de manière purement extensionnelle comme de simples tas ou conglomérats. Si nous voulions essayer de le faire, nous trouverions impossible de comprendre où peut bien se trouver une classe comme la classe vide, laquelle n'a pas d'éléments du tout et ne peut pas être tenue pour un "tas"; il nous serait aussi très difficile de comprendre qu'une classe qui n'a qu'un élément ne soit pas identique à celui-ci. Je n'ai pas l'intention d'affir-

> mer ou de nier qu'il y ait des entités telles que les "tas". En tant que logicien mathématique je ne suis pas appelé à avoir une opinion à ce sujet. Tout ce que je maintiens c'est que, s'il existe des choses comme des "tas", alors nous ne pouvons pas les identifier aux classes composées de leurs constituants. (Russell 1970: 217; 1ère édition 1919)

L'axiomatisation de la méréologie

Ontologie et méréologie

Avant d'exposer la base axiomatique, je préciserai les liens que la méréologie entretient avec l'ontologie. L'ontologie et la méréologie sont basées respectivement sur l'axiomatisation des deux interprétations distributive et collective du terme «classe». L'ontologie se charge de la prédication distributive. C'est avec elle que Lesniewski a résolu le problème de la détermination du sens de la proposition individuelle («tel a est b»), sens établi par lui au cours de l'analyse de l'antinomie, et auquel il a réduit la notion de classe distributive.

Au sens distributif, les termes «classe de» et «élément de» sont des pseudo-foncteurs: «a est un élément de la classe des b» revient à «a est b» ($a \varepsilon b$).

Par contre, au sens collectif, les termes «classe de» et «élément de» sont des foncteurs réels, nécessaires pour décrire toute entité comme une totalité méréologique. On ne peut les ramener à aucune autre conception de la logique.

L'ontologie de Lesniewski en tant que système est ontologiquement neutre (Simons 1995). Elle est structurellement adéquate pour parler des objets que sont les classes. La méréologie ne nécessite pas de traits structuraux qui lui sont propres et n'introduit aucun problème en liaison avec la question des entités abstraites.

On notera que contrairement à la théorie des types qui oscille entre la double interprétation de la théorie linguistique et d'une ontologie postulant l'existence d'objets de niveaux (types) différents, les touts et les parties sont, en méréologie, du même ordre (non linguistique), les termes qui les nomment appartiennent à la catégorie des noms. Il n'y a donc chez Lesniewski aucune ambiguïté du type de celle que l'on rencontre chez Russell. Ceci a déjà été en partie souligné dans le paragraphe consacré aux remarques à propos des *Principia.*

L 'axiomatique

La méréologie ayant fait l'objet de plusieurs axiomatisations, je ne présenterai que celle de 1916. Le terme primitif est «partie de». Elle comprend quatre axiomes et fait appel à deux définitions méréologiques de type ontologique qui inscrivent les termes «ingrédient de» (ou «élément de») et «classe de»[7]. Elle a été exposée dans le langage ordinaire (Lesniewski 1989).

Axiome 1:
Pour tout A et B, si A est une partie de B, alors B n'est pas une partie de A.

Axiome 2:
Pour tout A, B et C, si A est une partie de B et B est une partie de C, alors A est une partie de C.

L'axiome 1 établit l'asymétrie de la relation de partie à tout. L'axiome 2 établit la transitivité de cette même relation.
«partie de» est un foncteur formateur de nom à un argument nominal, c'est-à-dire de la catégorie sémantique N/N.

Définition 1:
Pour tout A et B, A est un ingrédient de B, si et seulement si A est le même objet que B *ou* une partie de B.

Définition 2:
Pour tout a et A, A est la classe des a si et seulement si:
(1) A est un objet.
(2) Chaque a est un ingrédient de A.
(3) Pour tout B, si B est un ingrédient de A alors un ingrédient de B est un ingrédient de a.

Les définitions 1 et 2 introduisent respectivement les termes «ingrédient de» et «classe de». Ceux-ci sont des foncteurs

7 Lesniewski a donné une axiomatisation qui se donne la notion d'élément comme primitive et ne comporte pas de termes définis (Clay 1965; Miéville 1984).

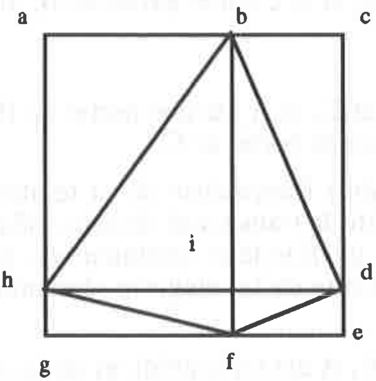
constants ontologiques à un argument nominal. Ils appartiennent à la catégorie sémantique N/N.

Axiome 3:
Pour tout A, a et b, si A est la classe des a, et B est la classe des a, alors A est B.

Axiome 4:
Pour tout a, si un objet est a, alors un objet est la classe des a.

L'axiome 3 établit l'unicité de la classe. L'axiome 4 énonce que si des objets quelconques a existent, alors la classe des a existe.

J'illustrerai la définition de la classe par un exemple et deux contre-exemples. Considérons le carré K:



– Formons la classe A des rectangles du carré K. Dès lors:

(1) A est un objet (la classe A existe). C'est le carré K.
(2) Tout rectangle de A, comme le rectangle bcef, est un ingrédient du carré K.
(3) Pour un ingrédient B quelconque de A, par exemple le rectangle bcid, il existe un ingrédient de B, comme le triangle bcd, qui est ingrédient de l'un des rectangles de K, par exemple le rectangle acdh.

– Le carré K n'est pas la classe générée par le triangle def.

Les conditions (1) et (2) sont satisfaites: le carré K existe et le triangle def est un ingrédient du carré K. La condition (3) n'est pas satisfaite: le rectangle abih est ingrédient du carré K. Mais on ne trouve aucun ingrédient du rectangle abih qui soit ingrédient du triangle def.

– Le triangle bhf n'est pas la classe générée par le carré K.

Les conditions (1) et (3) sont remplies: le triangle bhf existe et tout ingrédient du triangle bhf est ingrédient du carré K. Mais la condition (2) n'est pas satisfaite. Le carré K n'est pas ingrédient du triangle bhf.

Insistons aussi sur le fait que tout fragment, segment, agrégat du carré K, comme le point a, la ligne cd, la classe composée par le segment ab et le triangle bcd, sont autant d'ingrédients de la classe générée par les rectangles du carré K (ou par les triangles du carré K ou encore pour le carré K lui-même).

Pour terminer cette partie, je propose quelques thèses que l'on peut démontrer sur la base de cette axiomatique. J'ai choisi celles qui rendent compte des propriétés les plus élémentaires et les plus caractéristiques de la classe collective.

T1 Pour tout A, si A est un objet, alors A n'est pas une partie de A.

T2 Pour tout A, si A est un objet, alors A est un ingrédient de A.

T3 Pour tout A, si A est un objet, alors A est la classe des A.

T4 Pour tout A, B, C, si A est un ingrédient de B et B est un ingrédient de C, alors A est un ingrédient de C.

T5 Pour tout A, a, b, si A est la classe des a et A est la classe des b, alors la classe des a est identique à la classe des b.

T6 Pour tout A, a, si A est la classe des a, alors la classe de la classe des a est identique à la classe des a.

Une solution pour deux problèmes

Je vais maintenant reconsidérer les deux problèmes sémantiques exposés au début de cet article et montrer comment la méréologie permet d'apporter une solution formelle pour le premier et de poser des éléments de réponse pour le second:

1. Tout cheval est un animal
   donc
   Toute tête de cheval est une tête d'animal.

Je précise en quelques mots pourquoi cet argument ne peut pas être validé dans le modèle classique de la théorie des ensembles. Pour le valider, il faudrait que l'ensemble des têtes des chevaux fût inclus dans celui des chevaux. En d'autres termes, cela supposerait qu'un sous-ensemble formé à partir de l'ensemble représentant l'extension du concept cheval correspond à la propriété «être une tête de cheval». Mais, si une organisation relationnelle construite sur l'ensemble des chevaux peut représenter, par exemple, la propriété «avoir gagné le prix de l'Arc-de-Triomphe» ou la propriété «être plus rapide qu'un alezan», aucune ne peut correspondre à la propriété «être une tête de cheval». Un ensemble est en effet une collection d'objets déterminés par une propriété commune (une extension de concept) et qui sont les éléments de l'ensemble, si bien que ces objets ne peuvent être appréhendés que de manière unidimensionnelle, en tant qu'entités individuelles. Or, si l'on veut expliciter le mécanisme sous-jacent à ce raisonnement, il est nécessaire de «briser» l'entité *cheval* de manière à accéder à son organisation interne. C'est pourquoi la base axiomatique de la méréologie, associée à la base logique de l'ontologie, permet d'apporter une solution formelle au problème sémantique que pose l'argument de De Morgan. Cette base axiomatique fournit une relation de parties au tout, une définition de la relation d'ingrédience (appartenance) et une définition de la classe qui permet de concevoir une entité comme l'unité collective des ingrédients qui la composent.

Pour valider cet argument, il faut distinguer entre:

1. *L'usage distributif* (extensionnel) qui, dans la proposition «chaque a est b» (représentant la proposition «tout cheval est animal»), consiste à prédiquer une propriété définie b de la classe distributive correspondant à l'extension des a, c'est-à-dire

qui exprime une relation d'inclusion forte entre l'extension des a et l'extension des b.

2. *L'usage collectif* du terme «classe» qui permet de décrire la totalité correspondant à l'extension des a et la totalité correspondant à l'extension des b comme des touts méréologiques, c'est-à-dire des individus concrets, littéralement constitués de tous les ingrédients qui composent les objets a et les objets b.

Le niveau distributif est traduit dans le langage formel de l'ontologie. Il s'agit de donner une traduction formelle de la proposition:

> «chaque a est b»

soit

> «l'extension des objets a est fortement incluse dans l'extension des objets b»

Pour cela, en utilisant les directives de définition ontologique de type protothétique, on doit inscrire un relateur correspondant à l'inclusion forte, c'est-à-dire exprimant la relation «être fortement inclus». La définition qui inscrit ce relateur extensionnel inclusif est la suivante:

$$\lfloor ab \rfloor \lceil a \, C \, b \equiv \lfloor \exists c \rfloor \lceil c \, \varepsilon \, a \rceil \wedge \lfloor d \rfloor \lceil d \, \varepsilon \, a \supset d \, \varepsilon \, b \rceil \rceil$$

a C b se lit «chaque a est b».
Le relateur C appartient à la catégorie S/NN.

Une fois ce relateur défini, la solution passe par la démonstration d'une thèse qui spécifie que:

> «Si un objet A est contenu dans un objet B, alors tout ingrédient de l'objet A est également un ingrédient de l'objet B»

ou exprimée de manière un peu plus précise:

> «Si l'extension des objets a est fortement incluse dans l'extension des objets b, alors tout ingrédient de la classe collective générée par les a est également un ingrédient de la classe collective générée par les b».

Cet énoncé correspond à une thèse de la méréologie. Son expression formelle est la suivante:

$$\lfloor ab \rfloor \lceil a \, C \, b \supset \lfloor c \rfloor \lceil c \, \varepsilon \, \mathrm{ing}(\mathrm{Kl}(a) \supset c \, \varepsilon \, \mathrm{ing}(\mathrm{Kl}(b) \rceil \rceil.$$

L'argument de De Morgan, qui échappait à toute représentation ensembliste, au sens classique, se trouve ainsi validé par une instanciation de cette thèse[8].

2. La maison dont le toit est rouge est grande

Je rappelle tout d'abord brièvement l'analyse qui a été proposée de la description définie qui est le sujet de cette proposition. En ce qui concerne le cheminement de pensée qui a conduit à ce résultat, je renvoie le lecteur à l'article de P. Joray.

La maison dont le toit est rouge
N N/NS N S/NN N

Le relatif *dont* peut être analysé comme représentant un opérateur logique, un opérateur formateur de nom dont le premier argument est nominal et le second propositionnel. Le rôle anaphorique du relatif «permet de faire porter la prédication sur une partie, un ingrédient de l'antécédent ou encore un objet associé au référent de l'antécédent». Dans notre univers de discours, le relatif *dont* désigne une entité, la maison, à travers un de ses ingrédients, le toit. Rendre compte de cette fonction référentielle exige donc une sémantique dans laquelle il est possible de définir une relation d'ingrédience entre une entité et ses parties. La méréologie permet par conséquent d'envisager une solution formelle au problème sémantique posé par l'analyse de la fonction logique sous-jacente au relatif *dont*. Il reste, bien entendu, à inscrire dans la syntaxe un foncteur constant de la catégorie N/NS. Je ne le ferai pas ici. Il m'importait davantage de suggérer qu'en utilisant la méréologie, il était possible d'introduire dans un système logique des foncteurs de subordination tout aussi importants que les foncteurs de coordination.

---

8 Voir l'article de Miéville (1992) qui, dans le cadre d'une réflexion plus vaste consacrée aux relations, développe très clairement une solution au problème que pose une inférence syllogistique de ce type.

Pour conclure

Nous disposons donc, avec la méréologie, d'une théorie qui concilie, en les distinguant, les niveaux distributif et collectif que recouvre la catégorie sémantique du nom. Cette théorie permet ainsi de compléter le système logique standard, issu du programme logiciste, en l'enrichissant de la dimension collective de la classe. Sa mise en oeuvre permettra aussi de définir de nouvelles opérations logiques nécessaires à l'explicitation toujours plus fine des raisonnements logiques. D'autres travaux s'y emploieront.

Je soulignerai enfin que si elle a été formalisée à l'aube de ce siècle, de nombreuses questions liées à l'ingrédience collective ont été longuement débattues par les médiévaux, et ceci notamment dans le cadre de la question des universaux (Henry 1972 et 1991). Le lecteur se convaincra sans peine que la théorie exposée dans cet article autorise à conclure à la validité du raisonnement suivant attribué à Abélard: «Si la maison a été entièrement détruite par le feu, alors son toit a été détruit». C'est là le mot de la fin.

Centre de Recherches Sémiologiques
Séminaire de logique
Espace Louis-Agassiz 1
CH 2000 NEUCHATEL

Bibliographie

CLAY R. E. (1965). The relation of weakly discrete to set and equinumerosity in mereology. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 6, 325-340.

FREGE G. (1895). Kritische Beleuchtunge einiger Punkte. In E. Schröder's Vorlesungen über die Algebra der Logik. *Archiv für systematische Philosophie*, 1, 433-456.

FREGE G. (1962). *Grundgesetze der Arithmetik.* Hildesheim: Olms, 2 vols (1ère édition 1903).

FREGE G. (1969). *Les fondements de l'arithmétique*. Paris: Seuil, trad. de Claude Imbert.

FREGE G. & RUSSELL B. (1994). *Correspondance juin 1902 - décembre 1904, mars - juin 1912*. Traduction, notes et introduction par C. Webern. Paris; L'UNEBÊVUE.

GOODMAN N. (1951). *The Structure of Appearance*. Havard University Press.

HENRY D. P. (1991). *Medieval Mereology*. Amsterdam: Güner.

HENRY D.P. (1972). *Medieval Logic and Metaphysics*. London: Hutchinson University Press.

KEARNS J.T. (1967). The contributions of Lesniewski. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 8, 61-93.

LARGEAULT J. (1970). *Logique et philosophie chez Frege*. Paris/Louvain: Nauwelaerts.

LEJEWSKI C. (1985). Accomodating the informal notion of mereological class within the framework of Lesniewski's ontology. *Dialectica* 39, 217-241.

LESNIEWSKI S. (1989). *Sur les fondements de la mathématique. Fragments*. Paris: Hermès, trad. de G. Kalinowski.

LESNIEWSKI S. (1992). *Collected Works*. S.J. Surma, J.T. Srezednicki, D.I. Barnett (eds). Dordrecht: Kluwer, 2 vols.

LUSCHEI E.C. (1962). *The Logical Systems of Lesniewski*. Amsterdam: North Holland.

MIÉVILLE D. (1993). L'antre des relations. In D. Miéville (éd.), *Relations formelles et non formelles*. Neuchâtel: Travaux du Centre de Recherches Sémiologiques n° 61.

MIÉVILLE D. (1984). *Un développement des systèmes logiques de S. Lesniewski. Prothétique, Ontologie, Méréologie*. Berne: Lang.

NELSON H. & GRELLING K. (1908). Bemerkungen zu den Paradoxen von Russell und Burali-Forti. *Abhandlungen der Frie'schen Schule*, vol. 2, 301-324.

RICKEY V.F. (1977). A survey of Lesniewski's logic. *Studia Logica* XXXVI/4, 405-424.

RUSSELL B. (1903). *The Principles of Mathematics*. Cambridge: University Press.

RUSSELL B. (1970). *Introduction à la philosophie mathématique*. Paris: Payot (1ère édition 1919).

SCHRÖDER E. (1890). *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik)*, tome I. Leipzig: Teubner.

SIMONS P. (1982). On Understanding Lesniewski. *History and Philosophy of Logic* 3, 165-191.

SIMONS P. (1995). Lesniewski and ontological commitment. In D. Miéville & D. Vernant (éds), *Stanislaw Lesniewski aujourd'hui*. Grenoble/Neuchâtel: Groupe de Recherches sur la philosophie du langage/ Centre de Recherches Sémiologiques.

SINISI V.E. (1976). Lesniewski's analysis of Russell's antinomy. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 17, 19-34.

SOBOCINSKI B. (1949). L'analyse de l'antinomie russellienne par Lesniewski. *Methodos* 1, 94-107, 220-228, 308-316.

SOBOCINSKI B. (1959). L'analyse de l'antinomie russellienne par Lesniewski. *Methodos* 2, 237-257.

WHITEHEAD A.N. & RUSSELL B. (1910-1913). *Principia Mathematica*. 3 vols. Cambridge: CUP.