

Université de Neuchâtel

Faculté des Lettres

**LA RECHERCHE DIRECTE DES FACTEURS  
PRIMAIRES EN ANALYSE FACTORIELLE**

**THÈSE**

présentée à la Faculté des Lettres de l'Université de Neuchâtel  
pour obtenir le grade de Docteur ès lettres

par

**Jean-Paul BOSS**

Mathématicien diplômé E. P. F.

1957

# La recherche directe des facteurs primaires en analyse factorielle

par J.-P. BOSS

(Université de Neuchâtel; Suisse)

L'analyse factorielle présente cette particularité un peu paradoxale d'avoir atteint un haut degré de technicité bien que ses bases théoriques, tant psychologiques que statistiques, soient loin d'être assurées. Les exposés d'EYSENCK (7) et de DARMOIS (6), au colloque sur l'analyse factorielle tenu à Paris du 11 au 16 juillet 1955, sont à cet égard deux témoignages caractéristiques parmi beaucoup d'autres. Cependant ces réserves n'ont pas empêché l'analyse factorielle d'être largement utilisée, et souvent avec succès. Dès lors, il nous a semblé qu'une recherche limitée à l'aspect technique de l'analyse pouvait présenter quelque intérêt malgré les lacunes fondamentales que nous avons signalées et auxquelles s'attaquent d'ailleurs de nombreux chercheurs.

Notre étude se rattache directement aux méthodes d'analyse factorielle de THURSTONE (19) dont nous adopterons les notations. Il s'agit plus particulièrement des problèmes relatifs aux structures obliques. Nous avons songé avant tout aux difficultés que rencontre le praticien, en particulier dans le problème des rotations. Il nous est apparu, à propos de cas précis d'analyse, qu'un long apprentissage devait être nécessaire pour que ces rotations aboutissent à une structure interprétable psychologiquement. Aussi proposons-nous un procédé qui les élimine dans une large mesure, en faisant appel le plus possible aux informations préalables que l'on possède sur les tests soumis à l'analyse.

Il existe certes déjà de nombreuses méthodes

qui répondent à cette préoccupation mais il n'y en avait pas, à notre connaissance, qui s'intègrent totalement dans les techniques même de THURSTONE (\*).

## LES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE L'ANALYSE FACTORIELLE

L'analyse factorielle linéaire est caractérisée par la relation

$$s_{ij} = \sum_k f_{ik} p_{kj}$$

où  $s_{ij}$  est le résultat du sujet  $j$  au test  $i$ ;

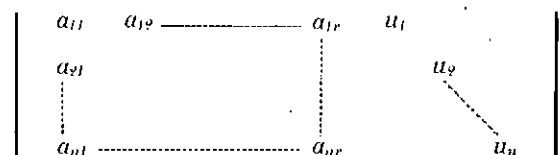
$p_{kj}$  est le résultat du sujet  $j$  au facteur  $k$ ;

$f_{ik}$  est la pondération du test  $i$  relative au facteur  $k$ .

Sous forme matricielle, la rotation ci-dessus s'écrit

$$S = F \cdot P$$

THURSTONE fait un certain nombre d'hypothèses sur la matrice  $F$  qui constituent les caractéristiques de sa méthode multi-factorielle. Pour lui  $F$  est composée d'une matrice complète  $A$ , dite matrice réduite ou matrice des facteurs communs, et d'une matrice diagonale  $U$  des facteurs spécifiques (\*\*):



(\*) La méthode dite *Multiple Group Method* proposée par Thurstone (20) lui-même est une variante de l'analyse centroïde, tandis que notre procédé intervient après l'analyse centroïde ordinaire.

(\*\*) On peut écrire  $F = F_1 + F_2$  où  $F_1$  et  $F_2$  sont les matrices  $A$  et  $U$  complétées par des zéros.

On a naturellement :

$$a_{ik} = f_{ik} \text{ pour } k \leq r$$

et

$$u_i = f_{i, i+r}$$

$h_i^2 = \sum_{k=1}^r a_{ik}^2$  est la communauté du test  $i$ ,  $u_i^2$  sa spécificité et on a :

$$h_i^2 + u_i^2 = 1$$

D'autre part, si  $R_I$  est la matrice des intercorrélations de tests (les termes diagonaux étant égaux à l'unité), on a :

$$R_I = R_u + R$$

où  $R_u$  est une matrice diagonale formée des spécificités

et  $R$  la matrice des corrélations où les termes diagonaux sont les communautés.

On peut montrer que :

$$R_I = F.F' \text{ et } R = A.A'$$

Le problème de base de l'analyse factorielle est la détermination de  $A$ ,  $R$  étant donné. Ce problème est surdéterminé. Parmi toutes les solutions qui ont été élaborées, nous ne considérerons que celle de l'analyse centroïde utilisée par THURSTONE. Les hypothèses mathématiques relatives aux principaux systèmes d'analyse ont été dégagées par FAVERGE (8) dans le chapitre qu'il consacre à l'analyse factorielle. Quant à la pratique de l'analyse centroïde, elle est exposée en détail par THURSTONE lui-même (19) et surtout par GUILFORD (9) qui l'ont mise à la portée de tout psychotechnicien, même peu familiarisé avec les mathématiques.

#### LA GÉOMÉTRIE DE L'ANALYSE FACTORIELLE

Un système de  $n$  tests dont on a calculé les  $\frac{n(n-1)}{2}$  corrélations peut être représenté par  $n$  vecteurs unités de même origine, le cosinus de l'angle de deux vecteurs quelconques étant égal au coefficient de corrélation des deux tests correspondants. L'analyse centroïde en déterminant  $A$ , et par conséquent  $F$ , permet d'induire sur ces vecteurs un système de  $n+r$  axes orthogonaux ( $r$  axes de facteurs communs et  $n$  axes spécifiques,  $r \leq n$ ). Chaque ligne de  $F$  représente les pro-

jections d'un vecteur. Si on se borne à la matrice  $A$ , on a un système de  $r$  axes orthogonaux qui engendrent l'espace des facteurs communs. Les projections des vecteurs-tests dans ce sous-espace ont pour longueurs les racines carrées des communautés, mais le produit scalaire de deux vecteurs-tests dans le sous-espace reste égal à sa valeur primitive, c'est-à-dire au coefficient de corrélation correspondant, ainsi que le montrent les relations  $F.F' = R_I$  et  $A.A' = R$ . Cela signifie que les angles des vecteurs dans l'espace des facteurs communs sont plus petits que ceux des vecteurs originaux lorsque les corrélations sont positives et plus grands lorsqu'elles sont négatives.

La dimension  $r$  de l'espace des facteurs communs est en principe égale au rang de la matrice  $R$  des corrélations. Arithmétiquement, ce dernier est presque toujours égal au nombre de tests (sauf pour  $n = 3$ ). Cependant, on ne commet souvent qu'une erreur négligeable en prenant  $r$  sensiblement inférieur à  $n$ , ce qu'on cherche toujours à obtenir. Mais ce choix ne dépend pas d'un critère arithmétique ou géométrique. Les critères statistiques eux-mêmes, à son sujet, n'ont été établis qu'expérimentalement. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point.

Le système d'axes obtenu par l'analyse centroïde dans l'espace des facteurs communs ne se prête pas, selon THURSTONE, à une interprétation statistique, sa position étant largement arbitraire. Ce sont les rotations, orthogonales ou non, que l'on va effectuer dans cet espace qui permettront de trouver un système de référence interprétable. Il faut remarquer cependant que la position des axes centroïdes n'est pas si arbitraire qu'on a voulu le dire. Le premier axe a la direction de la somme vectorielle des tests (dans l'espace des facteurs communs) et les autres sont bipolaires (\*). De plus, la méthode centroïde, appliquée à une matrice complète de corrélations, donne pour  $r = n$  un système assez proche de celui des axes principaux d'HOTELLING (12).

Le rôle joué par les facteurs spécifiques, et l'espace qu'ils engendrent, est minime dans l'analyse du premier ordre, mais il réapparaît au moment de l'analyse du second ordre et devient même très important dans la perspective où nous nous placerons.

(\*) Un axe est dit «bipolaire» lorsque la somme algébrique des projections le concernant est nulle.

## STRUCTURE SIMPLE ET VECTEURS PRIMAIRES

Dès que l'on cherche dans l'espace à  $r$  dimensions des facteurs communs un système de référence se prêtant mieux à l'interprétation psychologique que celui de l'analyse centroïde, la difficulté n'est pas tellement d'en trouver un que d'en choisir un.

Le principe directeur, qui a guidé THURSTONE et qu'ont presque toujours adopté ceux qui se sont penchés sur ce problème, est d'obtenir un grand nombre de projections nulles, ou en tout cas assez faibles pour pouvoir être négligées. Ce principe a tout naturellement engendré des méthodes visant à découvrir des hyperplans à  $r - 1$  dimensions contenant le plus grand nombre possible de vecteurs-tests, assurant ainsi des projections nulles sur les normales correspondantes choisies comme système de référence.

Ce premier principe ne se révélant pas suffisamment sélectif, THURSTONE a été amené à définir, d'une façon purement pragmatique, ce qu'il a appelé une structure simple. Nous en empruntons les critères à FAVERGE (8) :

1. il y a au moins un coefficient nul pour chaque variable (test);

2. il y a pour chaque facteur au moins autant de coefficients nuls qu'il y a de facteurs;

3. pour chaque couple de facteurs, il y a au moins autant de variables qui contiennent un facteur et pas l'autre qu'il y a de facteurs (\*).

En même temps, THURSTONE proposait plusieurs méthodes propres à découvrir de telles structures simples, dont la plus connue est celle des « vecteurs étendus » (19). Il s'agit de méthodes graphiques, procédant par rotations successives. La principale difficulté de leur emploi, dès que  $r > 3$ , est que les hyperplans doivent être localisés par l'examen successif de plans à deux dimensions. Cette difficulté augmente rapidement avec le nombre de facteurs communs. L'intérêt de la méthode des « vecteurs étendus » est de « réduire » d'une unité la dimension de l'espace des facteurs communs, ce qui est particulièrement utile pour les petites valeurs de  $r$ .

Un grand nombre de factoristes ont cherché des méthodes plus analytiques et automatiques,

en particulier TUCKER qui, après avoir proposé une méthode semi-analytique (24), s'est efforcé de définir objectivement la structure simple en 10 points (25) dont nous citons les cinq premiers qui ont une importance directe pour la suite de notre exposé; les cinq derniers concernent d'ailleurs des critères statistiques souhaitables, mais non définitivement élaborés.

1. L'accent est mis sur la concentration maximale de vecteurs dans les hyperplans, c'est-à-dire un nombre maximum de zéros sur les normales aux hyperplans; de faibles écarts sont admissibles pratiquement.

2. Les vecteurs localisés dans un hyperplan, à de faibles écarts près, engendrent un espace de dimension  $r - 1$ ,  $r$  étant la dimension de l'espace des facteurs communs.

3. Le nombre de facteurs de la structure simple est exactement celui des facteurs communs.

4. Les facteurs obliques sont admis.

5. On peut admettre dans la batterie analysée un certain nombre de tests complexes ayant des projections sur plusieurs facteurs, voire même sur tous.

On voit que les ajustements proposés ne modifient en rien le principe fondamental.

Dans le cas, très fréquent, en pratique, où les normales aux hyperplans ne sont pas orthogonales deux à deux, il faut distinguer le système de référence constitué par ces normales et le système d'axes déterminés par les intersections  $r - 1$  à  $r - 1$  des hyperplans. Ces axes sont appelés axes primaires par THURSTONE; les vecteurs unités correspondants sont les vecteurs primaires. On peut associer à chaque normale un axe primaire déterminé : celui qui n'est pas contenu dans l'hyperplan correspondant. Selon THURSTONE, ce sont ces axes primaires qui représentent les facteurs psychologiques. Le cosinus de l'angle de deux vecteurs primaires, par exemple, donne le coefficient de corrélation entre les facteurs correspondants.

Il est fort possible que la structure des vecteurs-tests soit telle qu'il n'existe aucun vecteur dans le voisinage immédiat des axes primaires. On dit alors que la batterie ne contient pas de test pur mesurant un seul facteur. En revanche, il est également possible qu'un ou plusieurs axes pri-

(\*) Ces critères ne doivent pas être pris trop à la lettre. Ils sont plutôt les signes apparents d'un ensemble de principes plus complexes et moins rigides.

maires coïncident avec un vecteur-test ou même un faisceau de vecteurs-tests.

Un cas nous intéresse tout particulièrement, celui où les vecteurs de l'espace des facteurs communs sont groupés en faisceaux. Si le nombre de faisceaux est le même que celui des facteurs communs, il est clair que les intersections des hyperplans, c'est-à-dire les axes primaires, seront situés à l'intérieur des faisceaux. On pourra alors déterminer directement la position des axes primaires à partir des faisceaux, sans passer par les hyperplans. C'est le principe du procédé que nous proposons et dont le détail sera exposé plus loin.

Au vu de ce qui précède, on pourrait penser que la portée d'un tel procédé est très limitée, mais nous verrons comment il est possible de se libérer du cadre très étroit dans lequel nous venons de nous placer.

#### LE CALCUL MATRICIEL DES STRUCTURES SIMPLES

Nous appellerons, dans le cas d'une analyse de  $n$  tests en  $r$  facteurs communs :

$F(n,r)$  la matrice centroïde réduite (\*), ( $n$  lignes,  $r$  colonnes), c'est-à-dire la matrice des projections des vecteurs-tests sur les axes orthogonaux de l'analyse centroïde;

$V(n,r)$  la matrice des projections des vecteurs-tests sur les normales aux hyperplans;

$A(r,r)$  la matrice de transformation telle que  $V = FA$ ;

$T(r,r)$  la matrice des projections des vecteurs primaires sur le système d'axes orthogonaux.

Les colonnes de  $A$  et les lignes de  $T$  sont normalisées (somme des carrés des éléments égale à l'unité).

THURSTONE a montré que les matrices  $T$  et  $A$  sont liées par la relation :

$$TA = D$$

où  $D$  est une matrice diagonale.

La matrice  $TT'$  est importante. Elle donne les cosinus des angles entre les vecteurs primaires, c'est-à-dire les corrélations entre les facteurs primaires. Elle est ainsi la clef du système d'axes

primaires, donc de la structure des facteurs psychologiques. Il faut noter que les corrélations qu'elle donne sont celles de tests idéaux dont la communauté est égale à l'unité. Ainsi l'analyse d'une batterie de tests d'intelligence donnera une corrélation plus élevée entre les facteurs numériques et verbaux, par exemple, qu'entre les tests correspondants de la batterie elle-même.

THURSTONE détermine  $T$  à partir de la relation :

$$TA = D$$

d'où :

$$T = DA^{-1}$$

en remarquant que les éléments de  $D$  ne sont autres que les coefficients de normalisation des lignes de  $A^{-1}$  puisque les lignes de  $T$  doivent être normales et que  $D$  est diagonale.

Lorsqu'on ne s'intéresse qu'à  $TT'$  on peut calculer directement :

$$TT' = D(A'A)^{-1}D$$

Les éléments de  $d_i$  de  $D$  s'obtiennent à partir des termes diagonaux  $m_i$  de  $(A'A)^{-1}$  par :

$$d_i = \frac{1}{\sqrt{m_i}}$$

#### LA DÉTERMINATION DIRECTE DES VECTEURS PRIMAIRES

Nous avons déjà vu comment, dans des conditions à vrai dire assez particulières, on pouvait localiser les axes primaires d'une structure simple dans des faisceaux de vecteurs-tests.

La première condition est l'existence même de tels faisceaux. Il n'est pas nécessaire toutefois que tous les tests soient groupés en faisceaux. Il suffit qu'il existe un certain nombre de faisceaux ayant une signification psychologique.

Une seconde condition est que le nombre des faisceaux soit le même que celui des facteurs communs. Mais on peut inverser la relation et choisir le nombre de facteurs communs d'après le nombre de faisceaux raisonnablement identifiés. Cependant, comme nous identifierons les faisceaux par l'examen de la matrice centroïde, il

(\*) Dans les premiers paragraphes, cette matrice était désignée par  $A$ . Nous avons tenu à respecter les notations de Thurstone, même lorsqu'elles peuvent prêter à confusion.

conviendra de pousser son calcul assez loin quitte à ne pas utiliser tous les facteurs dégagés. Cela implique évidemment de ne pas se sentir lié par des critères comme celui de MAC-NEEMAR (8) ou celui de la bimodalité des résidus suggéré par GUILFORD (9). Mais ces critères ont été établis empiriquement et ils ne sont pas toujours concordants. C'est pourquoi il ne nous semble pas qu'il y ait un inconvénient majeur à les remplacer par un critère tout à fait pragmatique.

Le cadre initial étant ainsi sensiblement élargi, il convient aussi d'en marquer les limites. Il ne saurait s'appliquer à une analyse de recherche pure dans laquelle on ne posséderait aucune information préalable sur les tests à moins qu'elle ne révèle, par l'analyse centroïde, un groupement en faisceaux tout à fait caractéristique. Il ne s'applique pas davantage à l'analyse d'une batterie de tests complexes dépendant tous de plusieurs facteurs. Enfin, nous ne l'avons appliqué, comme nos exemples le montreront, qu'à des analyses ne comportant qu'un petit nombre de facteurs communs.

Quant à la détermination pratique des faisceaux, nous avons déjà dit qu'elle ne peut s'opérer par l'examen de la matrice centroïde. Cet examen peut se limiter, lorsqu'on dispose déjà d'hypothèses de groupement, à la constellation des signes comme dans la méthode de BURT (4). Il nous paraît préférable d'opérer graphiquement en établissant les diagrammes fournis par les axes centroïdes pris deux à deux. Cette étude peut être assez rapide d'autant plus qu'on n'utilisera pas le premier axe lorsque toutes ses saturations sont largement positives, ce qui est généralement le cas.

Le groupe de vecteurs-tests déterminant un faisceau étant choisi, on cherche la direction de sa somme vectorielle en additionnant simplement les composantes centroïdes, puis on normalise le vecteur ainsi obtenu qui devient un vecteur primaire.

Lorsque tous les vecteurs primaires décelés par l'examen graphique ont été ainsi calculés, on dispose de la matrice  $T$  et l'on peut établir rapidement  $TT'$ .

Nous avons parlé plus haut du nombre raisonnable de faisceaux à déterminer. Il nous semble que c'est précisément l'examen de  $TT'$  qui indique si le choix a été raisonnable. En effet, si une corrélation de  $TT'$  est sensiblement plus élevée que les autres, il conviendra peut-être de réunir les deux faisceaux correspondants en un seul, en réduisant ainsi d'une unité la dimension de l'espace des facteurs communs. Il peut même arriver que l'on soit conduit à opérer ainsi plusieurs groupements (\*).

Aussi, ne faut-il pas craindre de prendre au début un assez grand nombre de faisceaux quitte à les réduire comme nous venons de l'indiquer (exemple 6).

Le choix de  $T$  étant définitivement arrêté, on peut calculer directement la matrice  $V$  de THURSTONE; en effet de la relation

$$T\Lambda = D$$

on tire :

$$\Lambda = T^{-1}D$$

On sait que  $D$  est une matrice diagonale et que les colonnes de  $\Lambda$  sont normalisées : on voit donc qu'il suffit de normaliser les colonnes de  $T^{-1}$  pour obtenir  $\Lambda$ . On calculera alors  $V$  par :

$$V = F\Lambda = FT^{-1}D$$

Il est intéressant de noter que l'on peut également obtenir directement la matrice

$$FT^{-1}$$

qui donne les composantes vectorielles des vecteurs-tests dans le système oblique des axes primaires.

On peut encore obtenir les projections des vecteurs-tests sur les axes primaires comme dans la méthode de HARRIS, citée par GUILFORD (9). Il suffit de calculer

$$FT'$$

Il est possible que la matrice  $V$ , calculée par notre procédé, ne présente pas des caractéristiques aussi pures que celle qu'on obtiendrait après de nombreuses rotations par les méthodes de THURS-

(\*) Ainsi, il ne nous paraît pas souhaitable que deux vecteurs primaires fassent un angle inférieur à 30°, c'est-à-dire aient une corrélation supérieure à .850 environ. En effet, d'une part la séparation de facteurs aussi voisins risque fort d'être accidentelle et, d'autre part, le calcul numérique de  $T^{-1}$  présente souvent des difficultés quand le déterminant de  $T$  est proche de zéro, ce qui arrive quand deux vecteurs sont presque confondus.

TONE. Rien ne nous empêche, à ce moment-là, d'effectuer par une ultime rotation un ajustement dirons-nous, d'ordre esthétique.

Remarquons enfin que la recherche des faisceaux que nous avons essayé de résoudre de la façon la plus simple possible, peut naturellement être tentée par des méthodes plus complexes, mais éventuellement plus efficaces, comme celles de TRYON (23) ou de BONNADEL (2). Ces auteurs opèrent à partir de la matrice des intercorrélations, mais les faisceaux qu'ils obtiennent peuvent naturellement être utilisés pour la détermination directe des vecteurs primaires, à la suite de l'analyse centroïde.

#### LA MÉTHODE DE REYBURN ET TAYLOR

De nombreuses critiques ont été élevées, soit envers la notion même de structure simple de THURSTONE, soit envers les procédés qu'il utilise pour établir cette structure. Nous retiendrons les objections de REYBURN et TAYLOR (17), d'autant plus intéressantes qu'elles sont accompagnées de propositions constructives. REYBURN et TAYLOR reprochent, entre autres, au procédé de THURSTONE d'être fondamentalement négatif par sa technique et d'ignorer les informations préalables à l'analyse. En n'acceptant, pour les rotations que des critères internes à la batterie, on ne saurait dégager que des facteurs particuliers à cette batterie, d'où une prolifération extrême de facteurs, puisque chaque analyse apporte les siens.

La méthode de REYBURN et TAYLOR consiste à introduire dans l'espace des facteurs communs un système de références orthogonal, en tenant compte d'une théorie générale ou, en tout cas, d'hypothèses précises sur les tests analysés. Ils commencent par choisir un groupe de tests qui leur paraît contenir un facteur général et font passer leur premier axe par le centroïde de ces tests, les  $r - 1$  autres axes occupant des positions quelconques, compte tenu toutefois de l'orthogonalité. Ils opèrent ensuite une seconde rotation sur les  $r - 1$  axes restants, qui amènera l'un d'entre eux dans un second groupe de tests

convenablement choisis, et ainsi de suite.

Cette méthode a d'ailleurs été employée, indépendamment d'eux, en France par BERNYER (1).

Elle présente une petite difficulté technique car la position du dernier axe est déterminée par celles des  $r - 1$  autres. REUCHLIN (14) a habilement tourné cette difficulté en utilisant un facteur commun supplémentaire, puis en abandonnant le dernier axe obtenu par le procédé de REYBURN et TAYLOR.

Nous avons fait une place particulière à cette méthode parce que nous estimons que le procédé décrit au paragraphe précédent répond aux mêmes exigences. Il permet en effet, d'introduire, dans la même mesure que la méthode de REYBURN et TAYLOR, un système d'axes qui tienne compte d'un cadre général, extérieur à l'analyse, et il élimine également l'aspect négatif de la technique des hyperplans.

La différence essentielle est que le système d'axes de REYBURN et TAYLOR est orthogonal, ce qui présente d'incontestables avantages puisque les projections ou saturations obtenues représentent des corrélations entre tests et facteurs, et qu'elles permettent de retrouver immédiatement les corrélations entre les tests et les communautés, ce qui n'est pas le cas dans un système oblique.

Une seconde différence réside dans le fait que REYBURN et TAYLOR s'efforcent de dégager un facteur général, ce qui nous semble répondre à une nécessité dans la plupart des cas pratiques d'analyses. Toutefois, leur technique nous paraît restreindre la portée du facteur général ainsi dégagé en l'associant à un groupe de tests particuliers. Les saturations du premier facteur de REYBURN et TAYLOR favorisent ces tests-là quant au facteur général tout en masquant leur rôle éventuel dans un facteur de groupe.

D'autre part, les saturations obtenues sur les autres axes dépendent de l'ordre d'extraction des facteurs car chacun à son tour utilise les résidus laissés par les facteurs précédents, ainsi que le souligne REUCHLIN (14).

Nous montrerons comment il nous semble qu'on puisse remédier aux inconvénients que nous venons de signaler en conservant les avantages mentionnés plus haut.

L'ANALYSE DE SECOND ORDRE  
ET LA MÉTHODE DE REUCHLIN

On sait que l'analyse de second ordre est celle que l'on fait à partir des intercorrélations des facteurs primaires, donc de la matrice  $TT'$ . Cette analyse est en général menée avec les mêmes méthodes et dans la même perspective que celle du premier ordre, c'est-à-dire que l'on s'intéresse essentiellement aux facteurs communs du second ordre. On cherche alors les saturations des facteurs primaires sur les facteurs du second ordre.

Nous nous intéresserons ici à une méthode moins courante en analyse du second ordre, suggérée par THURSTONE (19), mise au point et appliquée avec succès par REUCHLIN (\*) (14).

Il s'agit de limiter l'analyse du second ordre à un facteur commun (deux à la rigueur) et d'utiliser en revanche les facteurs spécifiques de second ordre.

Géométriquement, on considère les  $r$  vecteurs primaires comme des vecteurs-tests. L'espace de ces tests est celui des facteurs communs du premier ordre. Une analyse de second ordre, dégageant un ou deux facteurs communs et  $r$  facteurs spécifiques, induit dans cet espace un système de référence de  $r + 1$  ou  $r + 2$  axes orthogonaux. Rien n'empêche alors de projeter les  $n$  vecteurs-tests(\*\*) de l'espace des facteurs communs sur ces nouveaux axes. On décrit alors un système de vecteurs à  $r$  dimensions dans un système d'axes à  $r + 1$  ou  $r + 2$  dimensions, ce qui n'altère nullement les deux propriétés essentielles du système de référence orthogonal :

— la corrélation entre deux tests est égale à la somme des produits de leurs saturations ;

— la communauté d'un test est égale à la somme des carrés de ses saturations.

L'analyse du second ordre n'est ainsi utilisée que pour introduire un système d'axes particulier pour les vecteurs-tests de l'espace des facteurs communs.

L'axe du facteur commun du second ordre (ou du premier de ces facteurs s'il y en a deux) a la direction de la somme vectorielle des vecteurs

primaires. Il occupe donc une position centrale vis-à-vis de l'ensemble des vecteurs-tests(\*\*\*), et permet ainsi de dégager un facteur général.

Chacun des axes « spécifiques » du second ordre est orthogonal à l'hyperplan déterminé par l'axe du facteur commun et tous les vecteurs primaires sauf un : c'est-à-dire que les vecteurs-tests voisins des vecteurs primaires auront des projections négligeables sur tous les axes « spécifiques » sauf un. On retrouve ainsi la structure simple de THURSTONE, mais par des facteurs indépendants.

Nous allons aborder l'aspect technique de la méthode en désignant par :

$U$  la matrice complète de l'analyse du second ordre, c'est-à-dire de l'analyse centroïde des vecteurs primaires ( $r$  lignes,  $r + 1$  ou  $r + 2$  colonnes);

$S$  la matrice des projections des  $n$  vecteurs-tests sur le système de référence du second ordre ( $n$  lignes,  $r + 1$  ou  $r + 2$  colonnes);

$\Psi$  la matrice de transformation telle que  $F\Psi = S$ .

On détermine la matrice  $\Psi$  en observant qu'elle engendre également la transformation :

$$T\Psi = U$$

d'où :

$$\Psi = T^{-1} U$$

Il convient d'ajouter un certain nombre de remarques d'ordre pratique.

Tout d'abord le nombre  $r$  des facteurs communs du premier ordre est, en général, bien inférieur au nombre  $n$  de tests, si bien que l'analyse du second ordre est une entreprise plus limitée que celle du premier ordre.

D'autre part, la matrice  $\Psi$  engendre une transformation d'un système orthogonal de dimension  $r$  à un autre système orthogonal de dimension  $r + 1$  ou  $r + 2$ . Une telle transformation pourrait rebuter des analystes non avertis, inquiétés par ce changement de dimension. Imaginons, pour les rassurer, dans un espace à trois dimensions un système de vecteurs co-pla-

(\*) Nous n'utiliserons la méthode de Reuchlin que sous la forme qu'il lui a donnée dans (14). Depuis, il l'a encore développée en faisant intervenir l'analyse de troisième ordre (15).

(\*\*) Ces  $n$  vecteurs-tests sont, ne l'oublions pas, les projections des vecteurs-tests originaux sur l'espace des facteurs communs du premier ordre.

(\*\*\*) On pourra vérifier cette position centrale en constatant pratiquement qu'il est très proche du premier axe de l'analyse centroïde du premier ordre.

naires. Ces vecteurs peuvent être décrits par deux axes orthogonaux situés dans leur plan mais aussi par trois axes orthogonaux de l'espace. Dans les deux cas, les angles et les longueurs des vecteurs se calculeront de la même manière par les produits scalaires.

Du point de vue du calcul de  $F\Psi$ , on peut imaginer que la matrice  $F$  soit complétée par une ou deux colonnes de zéros tandis que  $\Psi$  le serait par une ou deux lignes de termes convenablement choisis. La transformation serait tout à fait régulière à condition que  $\Psi$  soit carrée, normalisée et orthogonale, en lignes et en colonnes. On remarquerait alors que dans le produit  $F\Psi$  les termes ajoutés à  $\Psi$  ne jouent aucun rôle puisqu'ils ne multiplient que des zéros.

On voit également que la matrice  $\Psi$  tronquée, telle que nous l'utilisons, doit avoir des lignes normalisées et orthogonales. Cette condition n'est satisfaite, pratiquement, que si l'analyse du second ordre ne laisse pas de résidus; en effet, dès qu'il en reste, la matrice  $U$  se rapporte à un système de vecteurs un peu différents des vecteurs primaires originaux. La matrice  $T^{-1}$  au contraire, se réfère exactement au système original. Il en résulte que les deux facteurs du produit  $T^{-1} \cdot U$  ne sont pas tout à fait accordés, ce qui se traduit par des irrégularités dans la matrice  $\Psi$ .

On y remédie par un ajustement que nous bornerons à une normalisation des lignes de  $\Psi$ .

#### LA DÉTERMINATION DIRECTE DES VECTEURS PRIMAIRES ET L'ANALYSE DE SECOND ORDRE

Dans la mesure où la méthode de REUCHLIN intervient après une analyse en structure simple menée dans la perspective classique de THURSTONE, elle n'échappe pas aux critiques de REYBURN et TAYLOR (\*). Mais elle peut également s'appliquer au procédé de détermination directe des vecteurs primaires, puisque celui-ci fournit immédiatement la matrice  $TT'$  sur laquelle se fait l'analyse du second ordre.

Ainsi, le choix des vecteurs primaires en fonction d'hypothèses préalables permet d'induire

directement un système d'axes orthogonaux comprenant un axe en position de facteur général, c'est-à-dire d'atteindre le même but que la méthode de REYBURN et TAYLOR, mais en évitant les inconvénients que nous avons signalés à son sujet.

Nous avons ainsi, en principe, un procédé qui allie les avantages de la structure simple de THURSTONE, dont le plus important est précisément la simplicité, et ceux de la méthode de REYBURN et TAYLOR, en particulier l'orthogonalité.

En comparant le calcul des deux matrices  $V$  et  $S$  par le procédé que nous proposons :

$$V = FT^{-1}D \text{ et } S = F\Psi = FT^{-1}U$$

on voit que la présentation simultanée des deux systèmes de référence n'entraîne guère de travail supplémentaire, puisque de toute façon on doit calculer  $T^{-1}$ . Aussi avons-nous toujours adopté cette double présentation dans nos exemples. Certes, nous venons de dire que la matrice  $S$  peut remplacer complètement la matrice  $V$  du point de vue de l'interprétation des résultats; mais il faut reconnaître que la mise en évidence de la structure de la batterie de tests est plus apparente dans la matrice  $V$ . Cela ne doit pas nous surprendre, car l'emploi d'axes obliques est particulièrement indiqué pour décrire un système de vecteurs contenus, comme c'est souvent le cas pour vecteurs-tests, dans un cône assez étroit.

L'examen d'un certain nombre de cas pratiques nous a suggéré deux remarques restrictives qui n'altèrent nullement les avantages généraux du système de référence induit par l'analyse du second ordre, mais ne peuvent être tout à fait négligées.

D'une part, nous calculons pour chaque test  $r + 1$  ou  $r + 2$  saturations à partir de  $r$  saturations centroïdes. Les nouvelles saturations ainsi dispersées sur un plus grand nombre de facteurs peuvent, de ce fait, tomber au-dessous des seuils de signification généralement admis.

D'autre part, les résidus de  $TT'$ , comme nous l'avons déjà vu, devraient être rigoureusement nuls après l'extraction d'un ou deux facteurs communs. Cette condition ne peut être remplie

(\*) Reuchlin lui-même a d'ailleurs tenu compte de ces critiques et lorsqu'il emploie la méthode des vecteurs étendus, par exemple, il utilise ce qu'il sait de la nature des tests pour en effectuer le groupement (14, p. 73).

que si le nombre de facteurs communs est égal à trois ( et encore à condition de n'être pas dans le cas de Heywood). Sinon, malgré la normalisation des lignes de  $\Psi$ , le système de référence n'est plus rigoureusement orthogonal. Le calcul des corrélations et des communautés peut alors donner de petites différences par rapport aux résultats obtenus à partir de l'analyse centroïde. Toutefois, dans les cas concrets que nous avons traités, ces différences ont rarement excédé .02 sans jamais dépasser .05.

On pourrait élever une objection plus générale et noter qu'il est curieux de se montrer multifactoriste dans l'analyse du premier ordre et monofactoriste dans celle du second ordre. A cela on peut répondre par les remarques suivantes. Les cas les plus courants d'analyse factorielle, du moins en Europe, concernent des batteries de tests d'intelligence ou d'orientation professionnelle appliquées à des sujets jeunes, car il est fort difficile d'opérer en dehors des cadres scolaires. Dans tous ces cas, on peut observer que l'ensemble des vecteurs-tests constituent une structure assez resserrée, ce qui se remarque par le fait que le premier facteur centroïde ne comporte que des saturations positives et souvent élevées. Le nombre des facteurs communs nécessaire à une description fidèle des corrélations est alors souvent restreint. Ainsi la matrice  $TT'$  est elle-même d'un ordre peu élevé, tandis que ses corrélations sont importantes. Elle se prête alors généralement bien à une analyse en un ou deux facteurs.

Indiquons pour terminer que le procédé de détermination directe des vecteurs primaires pourrait s'appliquer à l'étude de tests nouveaux dont on ne connaîtrait pas la structure factorielle. Il suffirait de les introduire dans une batterie comportant un certain nombre de groupes de tests aussi purs que possible et qui seuls seraient utilisés pour la mise en place du système de référence.

#### CONCLUSION

L'analyse factorielle semble être utilisée dans deux perspectives principales. Les uns la considèrent comme une méthode propre à suggérer, voire à découvrir, des groupements de fait, les

autres comme un instrument commode de vérification d'hypothèses, ainsi que le note REUCHLIN (16).

Dans le premier cas, l'essentiel, comme l'écrit YELA (27), est de découvrir une structure simple au lieu d'imposer un cadre de référence supposé significatif. Pour que la découverte de cette structure soit aussi objective que possible, THURSTONE (21) est allé jusqu'à opérer des rotations sur des tests dont il ignorait volontairement la signification psychologique, les ayant fait numéroter selon un code secret dont il ne prenait connaissance qu'une fois l'analyse terminée.

GUILFORD et ses collaborateurs (10), dans le même souci d'objectivité, recourent à deux analystes effectuant les rotations de façon indépendante. Toutefois, tandis que le premier ne doit se laisser guider que par les critères de structure simple, le second doit « franchement » tenir compte des tests qui ont servi à identifier des facteurs dans des analyses précédentes. Dans une étude postérieure, GUILFORD (11) renonce aux deux opérateurs mais indique que les considérations de base qui ont guidé ses rotations sont les critères de THURSTONE de structure simple, le contenu factoriel de tests de référence et la signification psychologique.

On glisse ainsi vers le second point de vue et l'emploi de méthodes délibérément dirigées, comme celle de REYBURN et TAYLOR, qui visent à imposer de l'extérieur un cadre de référence à l'analyse.

Il faut reconnaître que l'on réduit alors quelque peu la portée de l'analyse factorielle qui devient seulement un moyen de décrire des données complexes avec une certaine économie de moyens.

Les deux tendances que nous venons d'évoquer seront peut-être rapidement dépassées par la mise au point de méthodes analytiques d'analyse factorielle. Certes, jusqu'ici ces méthodes ne se sont pas imposées, soit qu'elles se révèlent moins précises et efficaces que les méthodes graphiques, comme l'analyse par CARROL (5) de l'exemple des boîtes de THURSTONE, soit que la complexité et la longueur des calculs qu'elles imposent aient découragé les utilisateurs éventuels comme cela semble être le cas pour les méthodes mises au point par TUCKER (24) et THURSTONE lui-même (22). Mais l'emploi de

plus en plus fréquent de moyens mécaniques et électroniques, par l'économie du temps qu'ils apportent, peut fort bien imposer des méthodes qui n'avaient jusqu'ici que le défaut d'être trop longues.

Est-ce dire que des procédés comme celui que nous avons proposé ne présenteront alors plus d'intérêt? Nous ne le pensons pas car tous les chercheurs n'auront pas à leur disposition les moyens matériels permettant la mise en œuvre de machines électroniques. D'autre part, les grandes recherches seront souvent précédées d'un certain nombre d'essais et de mise au point sur des bases modestes où les procédés simples et rapides seront utilisés avec profit.

### EXEMPLES

Les données des deux premiers sont tirées de cas classiques des manuels de THURSTONE (19) et THOMSON (18). Celles des trois suivantes sont empruntées à des travaux de REUCHLIN (14), MACCRONE et STARFIELD (13) et BONNARDEL (3). Le dernier concerne une expérience d'application de la batterie de tests d'aptitudes GABT, dite Dvorak, à Neuchâtel (Suisse) (28).

#### Exemple 1

C'est celui des boîtes de THURSTONE (tabl. I). Les « tests » dont il s'agit sont, rappelons-le, des fonctions simples des trois dimensions  $x$ ,  $y$  et  $z$  d'un parallélépipède. La population est constituée par un lot de boîtes d'usage courant.

Le diagramme obtenu (fig. 1) à l'aide des axes  $a_2$  et  $a_3$  suggère immédiatement de faire passer les axes primaires *I*, *II* et *III* (\*) par les faisceaux formés par les tests (1, 13, 18), (2, 14, 19) et (3, 15, 20). On constate d'ailleurs que ces groupements sont ceux auxquels on arriverait en utilisant les informations extérieures à l'analyse, puisqu'ils correspondent aux tests « purs ».

On obtient ensuite, par simple addition des

TABLEAU I

Matrice centroïde $F$			
Tests	$a_1$	$a_2$	$a_3$
1. $x^2$	.659	-.736	.138
2. $y^2$	.725	.180	-.656
3. $z^2$	.665	.537	.500
4. $xy$	.869	-.209	-.443
5. $xz$	.834	.182	.508
6. $yz$	.836	.519	.152
7. $\sqrt{x^2 + y^2}$	.856	-.452	-.269
8. $\sqrt{x^2 + z^2}$	.848	-.426	.320
9. $\sqrt{y^2 + z^2}$	.861	.416	-.299
10. $2x + 2y$	.880	-.341	-.354
11. $2x + 2z$	.889	-.147	.436
12. $2y + 2z$	.875	.485	-.093
13. $\log x$	.667	-.725	.109
14. $\log y$	.717	.246	-.619
15. $\log z$	.634	.501	.522
16. $xyz$	.936	.257	.165
17. $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	.966	-.239	-.083
18. $e^x$	.625	-.720	.166
19. $e^y$	.702	.112	-.650
20. $e^z$	.664	.536	.488

composantes des tests de chaque faisceau; les directions suivantes :

	1	2	3
<i>I</i> (1. 13. 18)	1.951	-2.181	.413
<i>II</i> (2. 14. 19)	2.144	.538	-1.925
<i>III</i> (3. 15. 20)	1.963	1.574	1.510

En normalisant les vecteurs directeurs ci-dessus, on obtient la matrice  $T$ :

	$T$		
	1	2	3
<i>I</i>	.660	-.738	.140
<i>II</i>	.731	.184	-.657
<i>III</i>	.669	.536	.515

On calcule alors  $TT'$  qui donne les cosinus des angles formés par les vecteurs primaires :

	$TT'$		
	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
<i>I</i>	1.000	.225	.118
<i>II</i>	.255	1.000	.249
<i>III</i>	.118	.249	1.000

(\*) Nous utiliserons dans nos exemples les indices, 1, 2, 3, etc., pour les axes centroïdes; *I*, *II*, *III*, etc., pour les axes primaires et  $g$  (facteur général),  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , etc., pour le système orthogonal induit par l'analyse de second ordre.

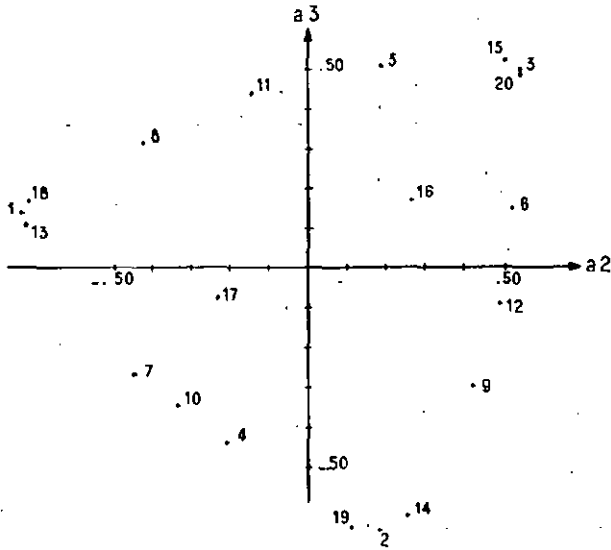


FIG. 1.

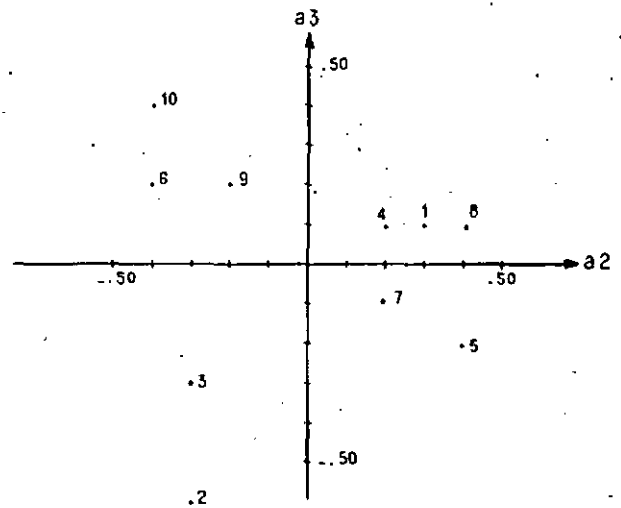


FIG. 2.

Cette matrice ne représentant pas de corrélation trop élevée, on peut passer au calcul de  $T^{-1}$  et de  $T^{-1} D$ . Cette dernière matrice s'obtient, rappelons-le, en normalisant les colonnes de  $T^{-1}$ :

		$T$		
		$I$	$II$	$III$
$I$		.478	.488	.492
$2$		-.873	.264	.573
$3$		.288	-.907	.707

		$T^{-1} D$		
		$I$	$II$	$III$
$1$		.461	.459	.476
$2$		-.843	.248	.554
$3$		.278	-.853	.683

L'analyse du deuxième ordre est particulièrement simple lorsque l'ordre de  $TT'$  est 3. En appliquant les formules :

$$a_1^2 = \frac{r_{12}r_{13}}{r_{23}} \quad a_{II}^2 = \frac{r_{21}r_{23}}{r_{13}} \quad a_{III}^2 = \frac{r_{13}r_{23}}{r_{12}}$$

On obtient :

	$a^2$	$s^2 = 1 - a^2$	$a$	$s$
$I$	.121	.879	.348	.938
$II$	.538	.462	.733	.680
$III$	.115	.885	.339	.941

et :

		$U$			
		$g$	$a$	$b$	$c$
$I$		.348	.938		
$II$		.733		.680	
$III$		.339			.941

Il reste à déterminer  $\Psi = T^{-1} U$  et à vérifier l'orthogonalité des lignes de  $\Psi$  par le calcul de  $\Psi\Psi'$  (\*).

		$\Psi$			
		$g$	$a$	$b$	$c$
$1$		.691	.448	.332	.463
$2$		.084	-.819	.180	.539
$3$		-.325	.270	-.617	.665

		$\Psi\Psi'$		
		$1$	$2$	$3$
$1$		1.003	.000	-.001
$2$		.000	1.001	-.001
$3$		-.001	-.001	1.001

On obtient enfin simultanément  $V$  et  $S$  (tabl. II). On voit que dans la matrice  $S$ , le facteur  $g$  joue un rôle de facteur général, tandis que les facteurs  $a, b, c$ , déterminent une structure simple tout à fait semblable à celle de la matrice  $V$  où les trois facteurs  $I, II$  et  $III$  correspondent évidemment aux trois dimensions  $x, y, z$ .

(\*) Si la matrice  $\Psi$  était orthogonale et régulière (carrée), on aurait  $\Psi\Psi' = \Psi'\Psi = 1$ . Mais dans notre cas  $\Psi$  n'est formée que des trois premières lignes d'une matrice orthogonale et régulière. Il est donc possible de vérifier l'orthogonalité par  $\Psi\Psi'$  mais non par  $\Psi'\Psi$ . Dans les cas pratiques où la transformation  $S = F\Psi$  n'est pas tout à fait orthogonale,  $\Psi\Psi'$  ne donne pas les angles des axes  $g, a, b, c, \dots$  de  $S$ , mais ceux que formeraient les axes  $1, 2, 3$  dans la transformation inverse à partir d'un système  $g, a, b, c, \dots$  orthogonal par hypothèse.

TABLEAU II

Tests	$V = FT^{-1} D$			$S = F\psi$			
	I	II	III	$g$	$a$	$b$	$c$
1. $x^2$	.96	.00	.00	.35	.94	.00	.00
2. $y^2$	.00	.94	.00	.73	.00	.68	.00
3. $z^2$	-.01	.01	.96	.34	-.01	.01	.93
4. $xy$	.45	.73	-.01	.73	.44	.52	-.01
5. $xz$	.37	-.01	.85	.43	.36	.00	.82
6. $yz$	-.01	.38	.79	.57	-.01	.28	.77
7. $\sqrt{x^2 + y^2}$	.70	.51	-.03	.64	.68	.37	-.03
8. $\sqrt{x^2 + z^2}$	.84	.01	.39	.45	.82	.01	.38
9. $\sqrt{y^2 + z^2}$	-.04	.75	.44	.73	-.04	.55	.42
10. $2x + 2y$	.60	.62	-.01	.69	.58	.45	.01
11. $2x + 2z$	.66	.00	.64	.46	.64	.00	.62
12. $2y + 2z$	-.03	.60	.62	.68	-.03	.44	.61
13. $\log x$	.95	.03	-.01	.37	.92	.02	-.01
14. $\log y$	-.05	.92	.06	.72	-.05	.66	.05
15. $\log z$	.02	-.03	.94	.31	.02	-.02	.91
16. $xyz$	.26	.35	.70	.62	.25	.26	.68
17. $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	.62	.46	.27	.67	.61	.33	.26
18. $e^x$	.94	-.03	.01	.32	.92	-.03	.01
19. $e^y$	.05	.90	-.05	.71	.05	.65	-.05
20. $e^z$	-.01	.02	.95	.35	-.01	.02	.92

On trouvera (tabl. III) à titre de comparaison, les matrices V obtenus par deux méthodes différentes : rotations directes et vecteurs étendus.

L'accord entre les trois matrices V est excellent mais il est certain que la nature artificielle de l'exemple a facilité cette concordance.

*Exemple 2.*

Exemple de THOMSON (18) illustrant la méthode de REYBURN et TAYLOR.

THOMSON considère la matrice centroïde (imaginée) que constitue le tableau IV. Il la transforme par la méthode de REYBURN et TAYLOR en faisant passer le premier axe par le centroïde des tests 9 et 10 (sur la base de critères extérieurs à l'analyse). Après la première rotation, il fait passer le second axe par le centroïde des résidus des tests 5, 7 et 8. La position du troisième axe est, dès lors, déterminée par les conditions d'orthogonalité.

Dans l'application de notre procédé, nous déterminons également deux axes primaires

par les groupes (9, 10) et (5, 7, 8), pour permettre une comparaison avec les résultats de THOMSON. Le choix du troisième axe reste libre. Nous le ferons passer par le groupe (2, 3) après examen du diagramme ( $a_2 a_3$ ) (fig. 2). Nous obtenons successivement :

	T		
	1	2	3
I	.816	-.376	.439
II	.843	.527	-.105
III	.713	-.389	-.583

	TT'		
	I	II	III
I	1.000	.444	.472
II	.444	1.000	.457
III	.472	.457	1.000

	T <sup>-1</sup>		
	I	II	III
1	.464	.519	.257
2	-.557	1.050	-.607
3	.939	-.067	-.996

	T <sup>-1</sup> D		
	I	II	III
1	.391	.442	.215
2	-.470	.895	-.508
3	.792	-.057	-.834

TABLEAU III

Tests	V (rotations)			V (vecteurs étendus)		
1	.97	.00	.01	.97	.00	.00
2	.01	.94	.03	.03	.94	.01
3	-.01	.02	.96	.01	.02	.96
4	.46	.72	.03	.48	.73	.00
5	.37	.00	.85	.39	.01	.84
6	-.01	.39	.81	.01	.39	.79
7	.71	.51	.00	.72	.51	-.03
8	.84	.01	.40	.85	.02	.38
9	-.03	.76	.47	-.01	.76	.44
10	.60	.62	.02	.62	.62	-.01
11	.65	.00	.65	.67	.01	.64
12	-.03	.61	.65	-.01	.61	.63
13	.95	.03	.00	.96	.03	-.01
14	-.04	.92	.09	-.02	.92	.06
15	.01	-.03	.94	.03	-.02	.94
16	.26	.36	.72	.28	.36	.70
17	.63	.46	.29	.64	.46	.27
18	.94	-.04	.02	.95	-.03	.01
19	.06	.91	-.01	.07	.91	-.04
20	-.01	.03	.96	.00	.03	.95

TABLEAU IV

Tests	F			
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$h^2$
1	.4	.3	.1	.26
2	.5	-.3	-.6	.70
3	.6	-.3	-.3	.54
4	.5	.2	.1	.30
5	.4	.4	-.2	.36
6	.5	-.4	.2	.45
7	.5	.2	-.1	.30
8	.7	.4	.1	.66
9	.7	-.2	.3	.62
10	.6	-.4	.4	.68

	U			
	g	a	b	c
I	.677	.736		
II	.656		.755	
III	.697			.717

	V			
	g	a	b	c
1	.834	.342	.392	.184
2	-.111	-.410	.793	-.435
3	-.102	.691	-.051	-.714

(Matrices V et S, voir tableau V)

Les communautés des tests ont été calculées à partir de la matrice S, pour vérifier l'accord

avec les valeurs obtenues à partir de la matrice centroïde.

La comparaison des trois matrices fait ressortir l'inconvénient que nous avons reproché à la méthode de REYBURN et TAYLOR. En effet, dans la troisième matrice, les tests 10, 9, 6, 8, 3 et 4 ont des saturations élevées dans le premier facteur, les tests 8, 5, 7 et 4 dans le second et les tests 3 et 2 dans le troisième. Les deux matrices V et S, en revanche, mettent en évidence les groupements (10, 9, 6), (8, 5, 1, 7, 4) et (2, 3).

On voit que ces groupements répondent mieux aux exigences des hypothèses de THOMSON que ceux qu'il obtient par la méthode de REYBURN et TAYLOR. La raison en est que les saturations élevées des tests 8, 3 et 4 dans le premier facteur de la troisième matrice ne sont pas dues à l'appartenance de ces tests au premier groupe, mais au rôle de facteur général joué par le premier facteur. La matrice S permet de faire qualitativement et quantitativement cette distinction.

Exemple 3

REUCHLIN (14) analyse par différentes méthodes une batterie de tests d'intelligence appliquée à quatre groupes de jeunes gens de 14 ans. Nous reprenons ici l'analyse concernant le groupe GR

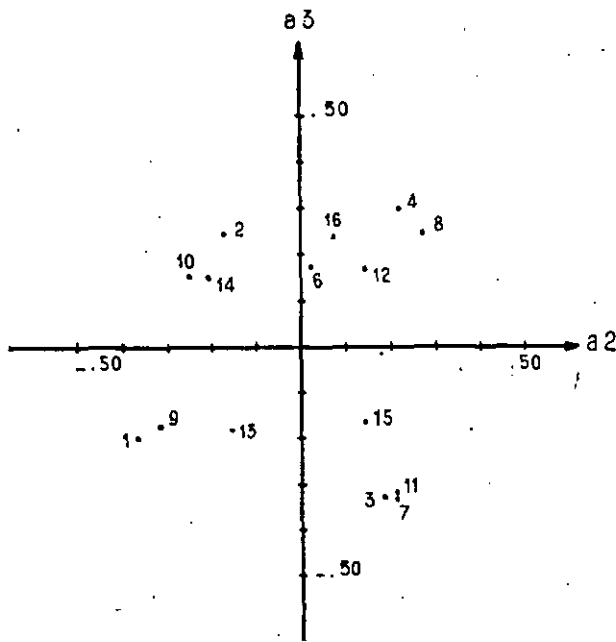


FIG. 3a.

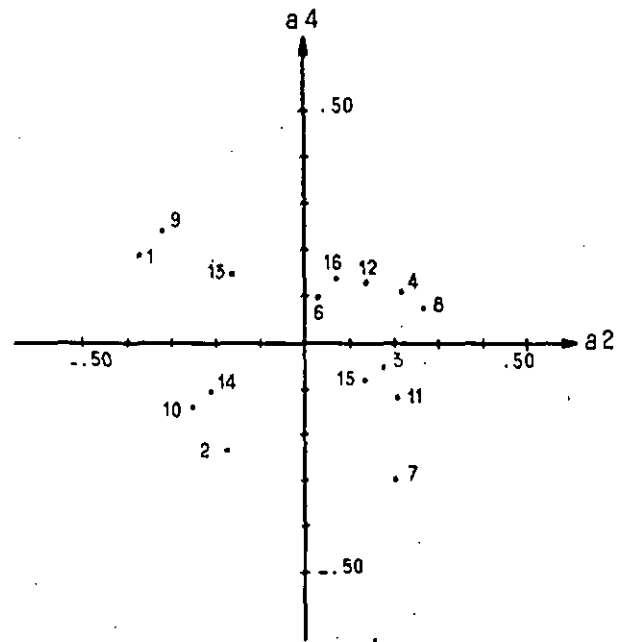


FIG. 3b.

(garçons ruraux) à partir de la matrice centroïde  $F$  du tableau VI. Le groupement des tests de la matrice  $F$ , donné par REUCHLIN, a été fait en fonction des signes des saturations, selon la méthode de BURT. Il correspond d'ailleurs à un groupement significatif du point de vue psychologique :

- 3, 7, 11, 15 : tests verbaux;
- 4, 8, 12, 16, 6 : tests numériques;
- 2, 10, 14 : tests de raisonnement;
- 1, 9, 13 : tests spaciaux.

(fig. 3) nous a suggéré de prendre, pour déterminer les vecteurs primaires, les deux vecteurs-tests les plus extérieurs de chaque quadrant, qui correspondent aux deux tests de chaque groupe ayant les communautés les plus élevées, soit : 2 et 10 pour  $I$  ou  $R$ , 11 et 7 pour  $II$  ou  $V$ , 8 et 4 pour  $III$  ou  $N$ , 9 et 1 pour  $IV$  ou  $S$ . On obtient ainsi :

L'examen des diagrammes  $a_2a_3$ ,  $a_2a_4$ ,  $a_3a_4$

	$T$			
	1	2	3	4
$R$	.882	-.283	.276	-.256
$V$	.834	.263	-.407	-.263
$N$	.894	.288	.324	.112
$S$	.846	-.411	-.221	.256

TABLEAU V

Tests	$V = FT^{-1}D$			$S = F\psi$					Matrice finale de Thomson		
	I	II	III	$g$	$a$	$b$	$c$	$h^2$			
1	.10	.44	-.15	.29	.08	.39	-.13	.26	.26	.41	-.15
2	-.14	-.01	.76	.51	-.12	-.01	.65	.70	.26	.24	.76
3	.14	.01	.53	.56	.12	.01	.46	.54	.47	.19	.53
4	.18	.39	-.08	.39	.16	.35	-.07	.31	.38	.39	-.08
5	-.19	.55	.05	.31	-.17	.48	.04	.36	.09	.59	.05
6	.54	-.15	.14	.44	.47	-.13	.12	.45	.65	-.11	.14
7	.02	.41	.09	.41	.02	.36	.08	.31	.29	.46	.09
8	.17	.66	-.14	.53	.14	.59	-.12	.66	.47	.65	-.14
9	.61	.11	.00	.58	.53	.10	.00	.63	.79	.12	.00
10	.74	-.12	.00	.50	.65	-.10	.00	.68	.82	-.12	.00

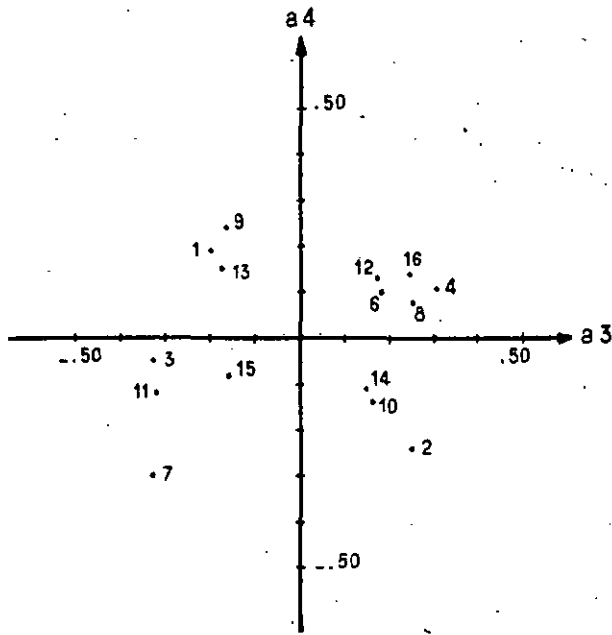


Fig. 3c.

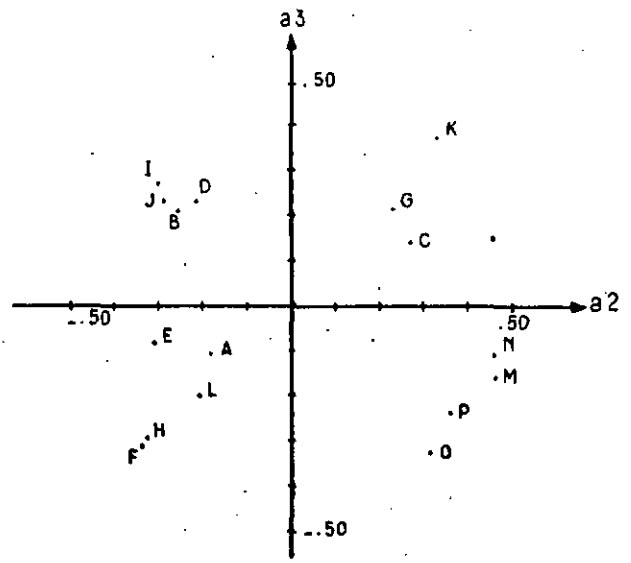


Fig. 4a.

TABLEAU VI

	TT'			
	R	V	N	S
R	1.000	.616	.768	.736
V	.616	1.000	.660	.620
N	.768	.660	1.000	.595
S	.736	.620	.595	1.000

	T-1			
	R	V	N	S
1	.197	.271	.382	.305
2	-.894	.594	1.013	-.724
3	.748	-.996	-.771	-.612
4	-1.436	-.802	1.032	1.196

	T-1 D			
	R	V	N	S
1	.106	.189	.227	.196
2	-.481	.414	.602	-.465
3	.402	-.694	.458	-.393
4	-.772	-.559	.613	.768

F					
Tests	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>	h <sup>2</sup>
3	.67	.18	-.33	-.05	.59
7	.62	.21	-.33	-.30	.63
11	.71	.21	-.32	-.12	.67
15	.60	.14	-.16	-.08	.41
4	.74	.22	.30	.11	.70
8	.78	.27	.25	.08	.75
12	.70	.14	.17	.13	.56
16	.70	.07	.24	.14	.57
6	.64	.03	.18	.10	.45
2	.67	-.17	.25	-.24	.60
10	.64	-.25	.16	-.14	.52
14	.62	-.21	.15	-.11	.46
1	.66	-.37	-.20	.19	.65
9	.76	-.32	-.17	.24	.77
13	.51	-.16	-.18	.15	.34

	R	V	N	S
R				
V	-.058	-.058	.026	.033
N	.026	.033	.033	-.059
S	.033	.026	-.059	

L'analyse du second ordre est un peu plus longue que dans les deux premiers exemples puisqu'ici la matrice  $TT'$  est d'ordre quatre. Nous avons extrait un facteur par la méthode centroïde et par itérations successives jusqu'à stabilisation des communautés. Voici la matrice  $U$  obtenue et celle des résidus de  $TT'$  :

	g	a	b	c	d
R	.893	.451			
V	.755		.656		
N	.831			.556	
S	.787				.617

L'existence des résidus nécessite un ajustement de  $\Psi$  que nous limiterons à une normalisation des lignes :

$\Psi$					
	g	a	b	c	d
1	.938	.089	.178	.212	.188
2	-.078	-.403	.390	.563	-.447
3	.075	.337	-.653	.429	-.378
4	-.089	-.648	-.526	.574	.738

TABLEAU VII

Tests	$V = FT^{-1}D$				$S = F \psi_{aj}$					
	R	V	N	S	g	a (R)	b (V)	c (N)	d (S)	R <sup>2</sup>
3	-.11	.46	.08	.14	.59	-.11	.44	.08	.14	.58
7	.06	.60	-.07	-.08	.56	.00	.56	-.03	-.03	.63
11	-.06	.51	.07	.08	.63	-.08	.49	.08	.09	.66
15	-.01	.33	.10	.05	.54	-.02	.31	.10	.06	.40
4	.01	-.04	.51	.01	.69	.02	-.03	.48	-.03	.71
8	-.01	.04	.50	-.01	.72	.00	.05	.48	-.04	.75
12	-.03	.00	.40	.11	.65	-.01	.01	.37	.07	.56
16	.03	-.08	.40	.12	.66	.05	-.07	.37	.08	.59
6	.05	-.05	.31	.12	.61	.06	-.04	.28	.09	.46
2	.44	.02	.02	-.07	.68	.35	-.03	.04	-.01	.59
10	.36	-.02	-.02	.07	.64	.30	-.05	-.01	.10	.51
14	.31	-.01	.02	.08	.62	.26	-.04	.02	.09	.46
1	.02	.00	-.05	.53	.62	.05	.02	-.09	.50	.65
9	-.02	-.01	.05	.55	.71	.02	.02	.00	.51	.77
13	-.06	.07	.03	.36	.47	-.03	.09	.00	.33	.34

TABLEAU VIII

Facteurs orthogonaux de second ordre						
Tests	g <sub>1</sub>	g <sub>2</sub>	R	V	N	S
3	.25	.53	.12	.48	.04	.01
7	.14	.51	.35	.47	.03	-.02
11	.24	.57	.19	.49	.07	.00
15	.23	.47	.15	.32	.12	.02
4	.33	.61	-.03	.01	.46	-.03
8	.32	.66	.00	.07	.45	-.06
12	.35	.55	-.04	.08	.35	.02
16	.39	.52	-.05	.02	.38	.07
6	.37	.46	-.01	.04	.31	.08
2	.41	.39	.35	-.04	.33	.22
10	.46	.33	.26	.01	.25	.27
14	.43	.34	.22	.02	.24	.24
1	.60	.29	-.04	.28	.01	.37
9	.64	.38	-.08	.29	.07	.35
13	.40	.28	-.05	.26	.02	.20

$\Psi_{aj}Y_{aj}'$

	1	2	3	4
1	1.000	-.004	.004	.020
2	-.004	.999	.017	.049
3	.004	.017	1.000	.073
4	.020	.049	.073	1.000

(Matrices V et S, voir tableau VII)

REUCHLIN a effectué sur les mêmes données, une analyse en structure oblique par la méthode des vecteurs étendus et une analyse par la méthode de REYBURN et TAYLOR. Dans cette seconde analyse, il a localisé les axes R,

TABLEAU IX

Méthode de Burt					
Tests	g	R	V	N	S
3	.65	-.18	.34	.08	.11
7	.63	-.09	.47	-.04	-.04
11	.70	-.15	.38	.07	.06
15	.59	-.05	.24	.09	.04
4	.70	.13	-.08	.42	-.08
8	.74	.10	-.02	.42	-.10
12	.66	.07	-.05	.33	.03
16	.66	.14	-.12	.33	.05
6	.60	.13	-.08	.25	.07
2	.65	.42	.00	-.01	.00
10	.61	.35	-.03	-.04	.14
14	.59	.31	-.03	-.01	.13
1	.61	.03	-.04	-.06	.52
9	.70	.02	-.05	.02	.52
13	.47	-.05	.03	.02	.34

$\Psi\Psi'$				
	1	2	3	4
1	1.000	-.004	.004	.026
2	-.004	.837	.014	.056
3	.004	.014	.873	.086
4	.026	.056	.086	1.579

$\Psi_{aj}$					
	g	a	b	c	d
1	.938	.089	.178	.212	.188
2	-.085	-.440	.426	.615	-.488
3	.080	.361	-.699	.459	-.405
4	-.071	-.516	-.419	.457	.587

*V*, *N* et *S*, pris dans cet ordre, à l'aide des groupes de tests (2, 10, 14), (4, 1, 11), (4, 12) et (1, 9). Pour éviter la localisation automatique du dernier axe, il utilise, comme nous l'avons déjà signalé, un cinquième facteur centroïde. Voici les résultats auxquels il est parvenu :

Tests	Méthodes des vecteurs étendus				Méthode de Reyburn et Taylor			
	<i>R</i>	<i>V</i>	<i>N</i>	<i>S</i>	<i>g(R)</i>	<i>V</i>	<i>N</i>	<i>S</i>
3	.15	.54	.02	.01	.47	.60	.05	.07
7	.38	.53	.01	-.03	.48	.61	-.10	-.13
11	.22	.55	.05	-.01	.51	.64	.04	.06
15	.17	.36	.13	.03	.47	.42	.08	-.01
4	.00	-.02	.61	-.04	.65	.18	.50	-.04
8	.03	.05	.60	-.08	.66	.26	.49	-.05
12	-.01	.08	.46	.03	.60	.20	.39	.04
16	-.01	.00	.50	.09	.64	.11	.39	.05
6	.03	.03	.41	.12	.58	.12	.30	.09
2	.40	-.07	.43	.32	.76	.00	.01	-.07
10	.31	-.01	.31	.39	.72	.00	-.02	.07
14	.27	.01	.31	.35	.69	.01	.01	.00
1	.02	.32	-.03	.54	.60	.18	-.05	.52
9	-.02	.33	.05	.51	.67	.22	.04	-.53
13	-.01	.29	-.01	.29	.43	.31	.02	.26

La matrice de REYBURN et TAYLOR présente une structure comparable à celle de notre matrice *S* à ceci près que le facteur *R* y joue un rôle de facteur général. Aussi, les tests 2, 10 et 14 n'apparaissent-ils plus comme appartenant à un groupe particulier, mais comme des tests purs du facteur général.

La matrice oblique, en revanche, présente de sérieuses différences avec notre matrice *V*. La structure y est moins nettement bi-factorielle. Les tests spatiaux 1, 9 et 13 ont des saturations assez élevées dans le facteur verbal et les tests de raisonnement 2, 10 et 14 dans les facteurs numériques et spatiaux.

Ces différences s'expliquent en comparant la matrice *R* des intercorrélations des facteurs primaires de REUCHLIN à notre matrice *TT'*.

	<i>R</i>			
	<i>R</i>	<i>V</i>	<i>N</i>	<i>S</i>
<i>R</i>	1.000	-.130	-.148	-.266
<i>V</i>	-.130	1.000	.691	.300
<i>N</i>	-.148	.691	1.000	.377
<i>S</i>	-.266	.300	.377	1.000

Une matrice aussi peu homogène ne se prête pas à une analyse du second ordre en un seul facteur et REUCHLIN a dû recourir à deux facteurs généraux. La structure orthogonale qu'il

en induit comporte donc six facteurs (tabl. VIII).

La comparaison de cette matrice avec notre matrice *S* appelle naturellement les mêmes remarques que la comparaison des deux matrices obliques.

Nous ajouterons que l'analyse de REUCHLIN par la méthode des vecteurs étendus nous paraît avoir conduit ici à une solution assez particulière, tant pour la structure oblique que pour le système orthogonal du second ordre. En effet, dans l'analyse du groupe *FR* (filles rurales), REUCHLIN obtient une matrice *R* beaucoup plus homogène et semblable à notre matrice *TT'*.

*R* (filles rurales)

	<i>R</i>	<i>V</i>	<i>N</i>	<i>S</i>
<i>R</i>	.999	.468	.452	.519
<i>V</i>	.468	1.000	.567	.397
<i>N</i>	.452	.567	1.000	.631
<i>S</i>	.519	.396	.630	.999

Enfin, les résultats qu'obtient REUCHLIN par la méthode de BURT (tabl. IX), toujours à partir de la même matrice centroïde *F* sont très voisins de ceux de notre matrice *S* et confirment ainsi le caractère accidentel des solutions obtenues dans le cas particulier du groupe *GR*, à partir de la méthode des vecteurs étendus.

Exemple 4

L'étude de MACCRONE et STARFIELD (13) est particulièrement intéressante, à notre point de vue, parce qu'il s'agit d'une analyse importante, par le nombre de tests et de facteurs, menée par la seule méthode de REYBURN et TAYLOR. Les tests sont ici des questions reprises de l'inventaire de CLARK-THURSTONE et appliquées à différents groupes ethniques de l'Afrique du Sud. La matrice centroïde concernant le groupe de langue anglaise est celle du tableau X.

Conformément à leurs hypothèses, MACCRONE et STARFIELD dégagent quatre facteurs significatifs par la méthode de REYBURN et TAYLOR. Ils négligent le cinquième facteur dont la mise en place leur échappe, dans cette méthode. Comme les auteurs n'indiquent pas explicitement quels groupes de tests ils ont choisis pour opérer leurs rotations successives, nous avons repris, pour déterminer les quatre premiers

TABLEAU X

F						
Tests	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$h^2$
1	.509	.229	.069	.097	-.063	.33
2	.527	-.192	-.264	.347	.134	.52
3	.323	-.095	-.117	-.205	-.163	.20
4	.509	-.288	-.267	.289	.106	.51
5	.480	.398	.141	.041	.033	.41
6	.520	-.121	-.037	-.107	-.238	.36
7	.680	.359	-.019	-.073	.121	.61
8	.532	-.072	-.164	-.137	-.160	.36
9	.607	-.130	-.097	-.235	.076	.46
10	.431	-.275	-.152	-.290	-.135	.39
11	.381	.204	.063	-.173	-.131	.24
12	.423	-.193	.396	-.077	.267	.45
13	.372	.196	-.134	.239	-.223	.30
14	.568	-.211	-.091	.439	-.125	.58
15	.470	.021	.126	.113	-.118	.26
16	.607	.292	.072	.052	-.161	.49
17	.537	-.120	.244	-.152	-.216	.43
18	.492	.220	.049	.063	-.018	.30
19	.506	-.268	.131	.125	-.082	.37
20	.640	.374	-.223	-.204	.401	.80
21	.749	.306	-.146	-.156	.204	.74
22	.449	-.327	.468	.069	.264	.60
24	.648	-.105	.138	-.158	.131	.49
25	.529	-.097	-.141	-.071	-.128	.33

vecteurs primaires, les trois tests ayant les plus fortes saturations dans chacun de leurs facteurs, soit *I* (7, 20, 21), *II* (6, 8, 10), *III* (2, 4, 14) et *IV* (12, 22, 24). Nous avons vérifié l'appartenance de chaque test d'un groupe à un même faisceau par l'étude des saturations de la matrice centroïde, en particulier par l'examen des signes. Ce même examen nous a permis de choisir le groupe de tests *V* (1, 15, 18) par lequel nous avons fait passer le cinquième axe primaire. Nous obtenons successivement :

	T				
	<i>I</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
<i>I</i>	.829	.416	-.156	-.174	.291
<i>II</i>	.841	-.265	-.200	-.303	-.302
<i>III</i>	.747	-.322	-.290	.501	.054
<i>IV</i>	.744	-.306	.491	-.081	.324
<i>V</i>	.920	.294	.153	.171	-.125

	TT'				
	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>
<i>I</i>	1.000	.583	.459	.521	.795
<i>II</i>	.583	1.000	.603	.535	.651
<i>III</i>	.459	.603	1.000	.489	.627
<i>IV</i>	.521	.535	.489	1.000	.615
<i>V</i>	.795	.651	.627	.615	1.000

	T-I				
	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>
<i>I</i>	.216	.296	.167	.184	.338
<i>2</i>	.587	-.542	-.520	-.610	.882
<i>3</i>	-.842	-.390	-.720	.886	.984
<i>4</i>	-.557	-.924	.948	-.229	.762
<i>5</i>	1.197	-.829	.446	.688	-1.240

	T-I D				
	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>
<i>I</i>	.128	.206	.121	.140	.169
<i>2</i>	.348	-.376	-.376	-.466	.442
<i>3</i>	-.499	-.271	-.520	.676	.493
<i>4</i>	-.330	-.642	.685	-.175	.382
<i>5</i>	.710	-.576	.322	.525	-.622

	U					
	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>I</i>	.768	.640				
<i>II</i>	.774		.633			
<i>III</i>	.692			.722		
<i>IV</i>	.685				.729	
<i>V</i>	.921					.390

	Matrice résiduelle de TT'				
	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>
<i>I</i>		-.011	-.072	-.005	.088
<i>II</i>	-.011		.067	.005	-.061
<i>III</i>	-.072	.067		.015	-.010
<i>IV</i>	-.005	.005	.015		-.016
<i>V</i>	.088	-.061	-.010	-.016	

TABLEAU XI

Tests	V					S						h <sup>2</sup>
	I	II	III	IV	V	g	a	b	c	d	e	
1	.03	-.03	-.01	-.04	.30	.51	.06	-.04	-.02	-.05	.24	.33
2	.11	-.05	.55	-.01	-.08	.47	.08	-.02	.54	.01	-.05	.52
3	.02	.36	-.06	-.04	-.02	.29	.03	.31	-.04	-.01	-.03	.18
4	.08	.04	.54	.03	-.13	.45	.04	.06	.54	-.06	-.10	.51
5	.14	-.13	-.13	-.01	.32	.49	.18	-.14	-.15	-.05	.27	.39
6	-.09	.37	-.02	.00	.12	.49	-.08	.32	.00	.03	.07	.35
7	.33	-.01	-.05	-.01	.16	.66	.36	-.02	-.08	-.05	.16	.60
8	.06	.36	.03	-.06	.02	.49	.07	.31	.04	-.03	.01	.34
9	.21	.31	.04	.16	-.14	.54	.20	.29	.04	.16	-.11	.46
10	.04	.50	-.01	.07	-.15	.37	.03	.45	.02	.10	-.14	.37
11	.05	.17	-.22	-.04	.20	.38	.09	.13	-.22	-.05	.16	.25
12	.00	-.05	-.05	.57	-.01	.39	-.03	.00	-.03	.52	-.01	.42
13	-.05	.01	.13	-.29	.31	.39	-.02	-.02	.12	-.26	.24	.29
14	-.19	.01	.46	-.03	.20	.55	-.20	.02	.46	.01	.13	.57
15	-.12	.05	.02	.06	.27	.47	-.10	.04	.03	.06	.19	.27
16	.01	.06	-.09	-.10	.39	.62	.06	.02	-.10	-.10	.30	.50
17	-.20	.31	-.19	.21	.23	.52	-.17	.27	-.16	.21	.15	.46
18	.08	-.02	-.01	-.02	.24	.49	.11	-.04	-.02	-.04	.20	.30
19	-.19	.14	.15	.22	.13	.48	.21	-.14	.18	.23	.07	.38
20	.68	-.05	.04	.01	-.16	.58	.69	-.04	-.01	-.04	-.06	.82
21	.47	.06	.01	.00	.00	.70	.49	.05	-.02	-.04	.04	.74
22	-.13	.11	.07	.66	.02	.41	-.17	-.04	.09	.61	.01	.58
24	.12	.16	-.02	.33	-.01	.60	.11	.17	-.01	.30	-.01	.49
25	.04	.30	.08	-.03	.03	.49	.04	.27	.09	.00	.01	.32

Ψ

	g	a	b	c	d	e
1	.948	.138	.187	.121	.134	.132
2	.066	.376	-.343	-.375	-.445	.344
3	.066	-.539	-.247	-.520	.646	.384
4	.058	-.356	-.585	.684	-.167	.297
5	-.084	.766	-.525	.322	.502	-.484

Ψ<sub>aj</sub>

	g	a	b	c	d	e
1	.947	.138	.187	.121	.134	.132
2	.078	.443	-.404	-.442	-.524	.405
3	.060	-.494	-.226	-.476	.592	.352
4	.056	-.346	-.569	.665	-.162	.289
5	-.070	.634	-.435	.267	.416	-.401

Ψ<sub>aj</sub>Ψ'<sub>aj</sub>

	1	2	3	4	5
1	1.001	-.011	.015	-.004	-.025
2	-.011	1.000	-.080	-.011	-.047
3	.015	-.080	1.000	-.008	-.241
4	-.004	-.011	-.008	.999	.019
5	-.025	-.047	-.241	.019	1.001

(Matrices V et S, voir tableau XI)

La valeur -.241 peut paraître élevée, mais il faut remarquer que l'angle correspondant, 104°,

reste assez voisin d'un angle droit. L'examen des communautés montre par ailleurs que son influence est négligeable à l'échelle où nous nous plaçons.

MACCRONE et STARFIELD obtiennent la matrice du tableau XII.

Par rapport à celle-ci, nos matrices paraissent dégager un cinquième facteur plus significatif, comportant davantage de saturations positives et, surtout elles permettent mieux de séparer, parmi les tests ayant des saturations élevées dans le premier facteur de MACCRONE et STARFIELD, ceux qui appartiennent au premier groupe, 7, 20 et 21 et ceux qui appartiennent aux autres groupes, 1, 5, 8, 9, 11, 15, 16, 17, 18, 24 et 25.

*Exemple 5*

Nous tentons ici une réanalyse d'une étude de BONNARDEL (3) sur des tests manipulatifs à partir de la matrice centroïde (\*) (tabl. XIII).

(\*) Cette matrice centroïde ne figure pas dans (3). Elle nous a été communiquée directement par le Professeur Bonnardel que nous remercions ici de son obligeance.

TABLEAU XII

Tests	I	II	III	IV	V
1	.54	.01	.07	.05	-.17
2	.38	.23	.57	-.05	.05
3	.23	.36	-.08	-.05	-.02
4	.32	.33	.54	-.02	.07
5	.61	-.16	-.05	.07	-.12
6	.38	.43	.01	.04	-.15
7	.78	.00	-.03	.00	.05
8	.43	.42	.02	-.07	.04
9	.49	.41	.02	.09	.18
10	.25	.56	-.05	.01	.08
11	.42	.11	-.19	.01	-.11
12	.31	.12	.06	.56	.15
13	.39	.04	.17	-.19	-.29
14	.37	.28	.55	.05	-.25
15	.40	.14	.12	.15	-.21
16	.65	.06	-.01	.02	-.25
17	.40	.37	-.09	.30	-.20
18	.53	.01	.05	.03	-.12
19	.31	.34	.25	.28	-.14
20	.79	-.03	-.02	-.12	.40
21	.83	.10	-.01	-.06	.20
22	.27	.16	.22	.67	.08
24	.54	.30	.04	.31	.12
25	.41	.39	.09	-.03	-.05

A partir de cette matrice centroïde, BONNARDIEL effectue des rotations orthogonales par une méthode proche de celle de Reyburn et Taylor. Son premier axe est orienté de manière à contenir toute la communauté des tests *B 101*, *B 22* et *B 43* qui lui ont toujours donné des corrélations élevées avec des critères professionnels. Le second axe est orienté sur les tâches manuelles les plus simples, perles, écrous, tiges, chevilles, le troisième sur les indices de précision (durée totale des erreurs, *DTE*), le quatrième sur les indices de rapidité (durée des essais, *DE*).

Nous avons repris les mêmes hypothèses pour déterminer les quatre premiers vecteurs primaires:

- I* : *B 101*, *B 43*, *B 22*;
- II* : perles, écrous, tiges, chevilles;
- III* : Oméga *DTE*, mexicain *DTE*, *B 23 DTE*, sinus *DTE*;
- IV* : Oméga *DE*, mexicain *DE*, *B 23 DE*, sinus *DE*.

L'examen de la matrice centroïde ne laisse de possibilité, pour le cinquième vecteur primaire, que les tests :

*V*: *MSRT*, disques, *B 31*, *B 32*.

Toutefois, la matrice *TT'* obtenue à partir de ces hypothèses révélait une corrélation de .93 entre les vecteurs *I* et *V*. Aussi avons-nous

décidé de ne garder que les quatre premiers facteurs primaires, ce qui impose de renoncer au cinquième facteur centroïde. Nous avons ainsi :

	<i>T</i>			
	<i>I</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
<i>I</i>	.916	.286	.255	-.116
<i>II</i>	.764	-.203	-.485	-.373
<i>III</i>	.627	.584	-.392	.335
<i>IV</i>	.277	-.843	.441	.137

	<i>TT'</i>			
	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
<i>I</i>	1.000	.561	.603	.109
<i>II</i>	.561	1.000	.426	.118
<i>III</i>	.603	.426	1.000	-.446
<i>IV</i>	.109	.118	-.446	1.000

	<i>T</i>			
	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
<i>I</i>	.501	.291	.357	.347
<i>2</i>	.617	-.465	.037	-.838
<i>3</i>	1.093	-.849	-.626	.143
<i>4</i>	-.736	-.726	1.527	.984

	<i>T-ID</i>			
	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
<i>I</i>	.326	.234	.211	.258
<i>2</i>	.401	-.374	.022	-.623
<i>3</i>	.710	-.682	-.371	.106
<i>4</i>	-.478	-.583	.904	.731

Il fallait s'attendre à ce que la présence de deux facteurs opposés, rapidité et précision (*DE* et *DTE*), introduise une corrélation négative dans la matrice *TT'*. Aussi l'analyse du second ordre va-t-elle nécessiter l'extraction de deux facteurs. Nous avons ici également procédé par itération jusqu'à stabilisation des communautés ce qui représente un travail de calcul sensiblement plus long que dans le cas d'un seul facteur. Nous avons obtenu :

	<i>U</i>					
	<i>g</i>	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>I</i>	.960	.158	.230			
<i>II</i>	.698	-.154			.699	
<i>III</i>	.567	.640			.519	
<i>IV</i>	.087	-.642				.762

Matrice résiduelle de *TT'*

	<i>TT'</i>			
	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
<i>I</i>		-.085	-.042	.126
<i>II</i>	-.085		.129	-.042
<i>III</i>	-.042	.129		-.084
<i>IV</i>	.126	-.042	-.084	

TABLEAU XIII

F							
Tests	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$h^2_4$	$h^2_5$
B 101	.77	.27	.21	-.08	.23	.72	.77
MSRT	.74	.19	.03	-.09	-.23	.59	.65
Disques	.69	.23	.15	-.02	-.10	.55	.56
B 31	.65	.20	.26	-.19	-.05	.57	.57
B 32	.70	.23	.31	-.21	-.15	.68	.71
B 43	.82	.22	.21	-.06	.17	.77	.80
B 22	.78	.25	.24	-.16	.12	.75	.77
Perles	.48	-.17	-.36	-.23	.02	.44	.44
Écrous	.54	-.15	-.40	-.24	.09	.53	.54
Tiges	.49	-.14	-.36	-.28	.07	.47	.47
Chevilles	.60	-.10	-.22	-.28	.11	.50	.51
B 30	.65	-.06	-.10	-.29	-.19	.52	.56
Oméga DE	.29	-.70	.38	.19	.15	.75	.78
Oméga DTE	.50	.48	-.31	.32	.09	.68	.69
Mexicain DE	.26	-.66	.37	.23	-.19	.69	.73
Mexicain DTE	.49	.55	-.39	.23	.12	.75	.76
Tourneur DE	.49	-.43	.17	.29	-.20	.54	.58
Tourneur DTE	.61	.33	-.29	.30	-.03	.66	.66
B 23 DE	.24	-.66	.38	.05	.10	.64	.65
B 23 DTE	.51	.43	-.28	.27	.04	.60	.60
Sinus DE	.12	-.75	.32	-.02	.04	.68	.68
Sinus DTE	.56	.46	-.31	.28	.04	.70	.70

I	$\Psi$					
	$g_1$	$g_2$	$a$	$b$	$c$	$d$
1	.917	.040	.115	.203	.185	.264
2	.216	.731	.142	-.325	.019	-.639
3	.114	-.189	.251	-.593	-.325	.109
4	-.262	.341	-.169	-.507	.793	.750

I	$\Psi_{aj}$					
	$g_1$	$g_2$	$a$	$b$	$c$	$d$
1	.917	.040	.115	.203	.185	.264
2	.205	.692	.134	-.308	.018	-.605
3	.150	-.248	.329	-.778	-.426	.143
4	-.203	.265	-.131	-.393	.615	.582

I	$\Psi_{aj}\Psi'_{aj}$			
	1	2	3	4
1	1.001	.012	-.034	-.003
2	.012	1.000	.049	-.096
3	-.034	.049	.999	-.012
4	-.003	-.096	-.012	1.000

(Matières V et S, voir tableau XIV)

Dans la matrice S, le premier facteur  $g_1$ , peut être interprété comme un facteur général d'aptitude mécanique.  $g_2$  est un facteur bipolaire opposant les tests de précision (saturations positives) aux tests de rapidité (saturations négatives). Enfin, les facteurs de groupes  $a, b, c,$

$d,$  correspondent aux facteurs I, II, III et IV de la matrice V.

Le tableau XV est la matrice orthogonale de BONNARDEL obtenue après rotations. Cette matrice obtenue à partir de la matrice centrée de cinq facteurs, comporte naturellement cinq facteurs aussi. Toutefois, BONNARDEL renonce à utiliser le dernier facteur dans l'interprétation des résultats.

En examinant cette matrice on remarque que, conformément à l'hypothèse de départ, les tests B 101 à B 22 ont des saturations élevées dans le premier facteur. Mais des tests d'autres groupes, chevilles, B 30, Oméga DTE, mexicain DTE, tourneur DTE, B 23 DTE et sinus DTE, ont également des saturations significatives dans ce facteur qui joue ainsi à la fois un rôle de facteur de groupe et de facteur général. Certes, BONNARDEL a pris soin de préciser qu'il avait orienté son premier axe à l'aide de tests particulièrement valides et propres à déterminer un facteur général. Notre procédé nous permet de mettre en évidence, par la matrice S, le rôle particulièrement important des tests B 101 à B 22 dans le facteur général sans qu'il nous ait été nécessaire de le

TABLEAU XIV

Tests	V				S						R <sup>2</sup>
	I	II	III	IV	g <sub>1</sub>	g <sub>2</sub>	a	b	c	d	
B 101	.55	-.02	.02	-.01	.81	.14	.20	-.06	.01	.02	.72
MSRT	.41	.13	.07	.01	.74	.13	.13	.10	.07	.03	.60
Disques	.43	-.02	.08	.04	.71	.14	.16	-.04	.06	.05	.56
B 31	.57	.01	-.13	-.07	.71	.05	.21	-.06	-.10	-.02	.56
B 32	.64	-.01	-.15	-.08	.78	.05	.24	-.09	-.13	-.03	.69
B 43	.53	.00	.05	.05	.84	.12	.20	-.04	.03	.08	.77
B 22	.60	.02	-.06	-.05	.83	.10	.22	-.04	-.05	.00	.75
Perles	-.06	.56	.02	.02	.40	-.07	-.06	.52	.10	.04	.45
Écrous	-.05	.60	-.04	.01	.45	-.05	-.06	.56	.12	.04	.54
Tiges	-.02	.58	-.02	-.03	.42	-.06	-.04	.53	.07	.00	.47
Chevilles	.13	.49	-.05	-.01	.55	-.06	.02	.43	.03	.02	.49
B 30	.26	.41	-.09	-.02	.63	-.07	.07	.34	-.02	.02	.52
Oméga DE	-.01	-.04	.08	.69	.14	-.52	.04	-.10	.00	.66	.74
Oméga DTE	-.02	-.04	.52	.03	.45	.51	-.02	.07	.43	-.02	.65
Mexicain DE	-.03	-.08	.11	.69	.11	-.48	.03	-.12	.02	.65	.68
Mexicain DTE	-.01	.04	.47	-.09	.46	.56	-.03	.14	.41	-.13	.73
Tourneur DE	-.03	-.01	.29	.62	.33	-.24	.02	-.01	.19	.58	.54
Tourneur DTE	-.02	.04	.51	.14	.52	.40	-.02	.13	.43	.09	.64
B 23 DE	.06	.01	-.06	.55	.13	-.53	.06	-.06	-.10	.55	.62
B 23 DTE	.01	-.01	.47	.03	.46	.46	-.01	.08	.39	-.01	.58
Sinus DE	-.02	.10	-.13	.52	.01	-.60	.02	.01	-.14	.52	.65
Sinus DTE	.01	.01	.50	.03	.50	.49	-.01	.10	.42	-.01	.68

postuler au départ. D'autre part, les saturations négatives élevées que BONNARDEL obtient dans son troisième facteur, sont reportées dans la matrice *S* sur le second facteur général, ce qui nous paraît faciliter l'interprétation, en particulier la distinction *a posteriori*, des tests de rapidité et de précision.

#### Exemple 6

Ce dernier exemple concerne une recherche à laquelle nous avons personnellement pris part. Pour l'analyse qui nous intéresse ici, nous avons appliqué la batterie *GATB* à un échantillon de 330 jeunes gens de 15 ans, de formations (primaire et secondaire) et d'origines (urbaine et rurale) variées. Nous avons obtenu la matrice des corrélations du tableau XVI.

En soumettant cette matrice à une analyse factorielle, nous savions que nous ne pouvions retrouver les dix facteurs qui avaient été utilisés pour sa construction. En effet, bien que théoriquement selon THURSTONE, il suffise de quinze tests pour identifier dix facteurs, ce nombre se révèle

pratiquement beaucoup trop faible. Il nous a paru intéressant, cependant, de vérifier si les facteurs que nous pouvions dégager correspondaient à des groupements naturels des facteurs originaux.

Nous avons alors effectué une analyse centrotide en nous limitant à six facteurs communs, ce nombre nous étant donné par le critère de MAC NEMAR (Tableau XVII).

L'examen des diagrammes ( $a_2a_3$ ) ( $a_2a_4$ )... (fig. 4) met en évidence quatre groupes principaux de tests :

- B D I J* : tests numériques et verbaux;
- A F H L (E)* : tests perceptifs et spatiaux (test de raisonnement);
- C G K* : tests de visée et de vitesse motrice;
- M N O P* : tests de manipulation.

Toutefois, les informations préalables que nous avons sur les tests et l'étude des diagrammes pouvaient justifier un classement plus fin, en six groupes, en séparant d'une part les tests numériques *D* et *I* des tests verbaux *B* et *J* et, d'autre part, les tests spatiaux *F* et *H* des tests perceptifs *A* et *L*.

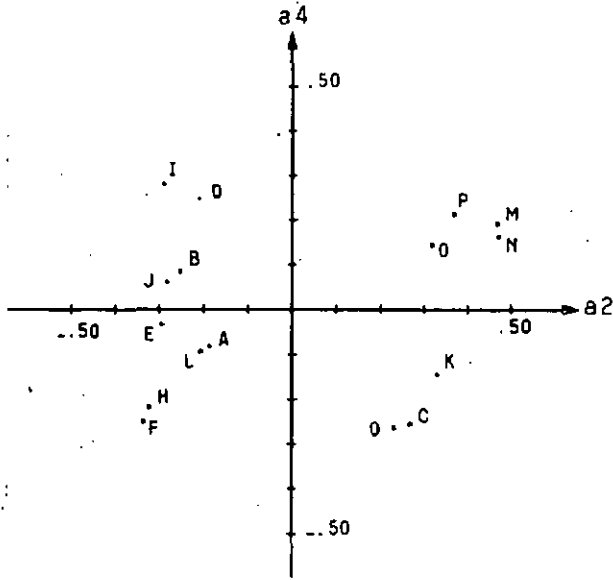


Fig. 4b.

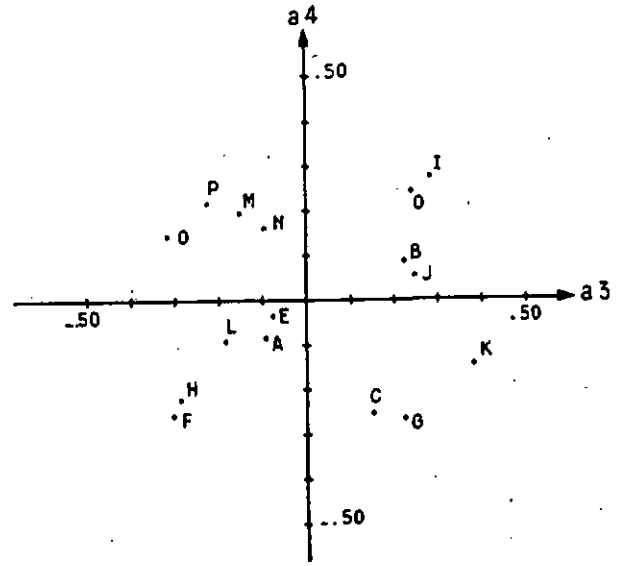


Fig. 4c.

Nous avons alors établi une matrice de vecteurs primaires  $T$  de la façon suivante :

- $I$  (B et J) : facteur verbal.
- $II$  (D et I) : facteur numérique.
- $III$  (F et II) : facteur spatial.
- $IV$  (A et L) : facteur perceptif.
- $V$  (C, G et K) : facteur de vitesse motrice.
- $VI$  (M, N, O, P) : facteur manuel.

et nous avons obtenu pour  $TT'$  :

	$I$	$II$	$III$	$IV$	$V$	$VI$
$I$ ..	1.000	.961	.687	.828	.677	.392
$II$ ..	.961	1.000	.525	.717	.546	.375
$III$ ..	.687	.525	1.000	.861	.427	.328
$IV$ ..	.828	.717	.861	1.000	.619	.526
$V$ ..	.677	.546	.427	.619	1.000	.626
$VI$ ..	.392	.375	.328	.526	.626	1.000

La présence de deux corrélations élevées, correspondant à des angles de  $16^\circ$  et  $30^\circ$  seulement, entre les vecteurs  $I$  et  $II$  d'une part et les vecteurs  $III$  et  $IV$  d'autre part, nous a incité à revenir à une matrice  $T$  de quatre facteurs :

- $I$  (B, D, I, J)
- $II$  (A, F, H, L)
- $III$  (C, G, K)
- $IV$  (M, N, O, P)

Nous avons alors :

	$I$	$II$	$III$	$IV$
$I$	.860	-.340	.310	.219
$II$	.859	-.357	-.297	-.215
$III$	.820	.367	.332	-.289
$IV$	.715	.578	-.290	.267

$TT'$

	$I$	$II$	$III$	$IV$
$I$	1.000	.721	.620	.387
$II$	.721	1.000	.537	.437
$III$	.620	.537	1.000	.625
$IV$	.387	.437	.625	1.000

$-I$

	$I$	$II$	$III$	$IV$
$1$	.343	.362	.243	.272
$2$	-.565	-.565	.604	.666
$3$	.810	-1.017	.782	-.648
$4$	1.189	-.858	-1.117	.881

$T-ID$

	$I$	$II$	$III$	$IV$
$1$	.217	.243	.161	.208
$2$	-.357	-.379	.400	.509
$3$	.512	-.682	.518	-.495
$4$	.751	.576	-.739	.673

$U$

	$g$	$a$	$b$	$c$	$d$
$I$	.786	.618			
$II$	.764		.654		
$III$	.825			.565	
$IV$	.610				.792

Matrice résiduelle de  $TT'$

	$I$	$II$	$III$	$IV$
$I$		.120	-.028	-.092
$II$	.120		-.093	-.029
$III$	-.028	-.093		.122
$IV$	-.092	-.029	.122	

TABLEAU XV

Tests	I	II	III	IV	V
B 101	.86	.00	.00	-.01	-.06
MSRT	.68	.15	.07	.00	.37
Disques	.69	.00	.06	.02	.24
B 31	.69	.00	-.12	-.06	.19
B 32	.74	-.02	-.16	-.07	.30
B 43	.86	.00	.00	.03	.00
B 22	.86	.01	-.06	-.05	.05
Perles	.29	.58	.02	.05	.03
Écrous	.36	.61	.05	.03	-.02
Tiges	.33	.59	.00	.00	.00
Chevilles	.43	.51	-.04	.00	-.02
B 30	.52	.41	-.10	-.01	.30
Oméga DE	.12	.02	-.46	.71	-.13
Oméga DTE	.49	.06	.66	.00	.00
Mexicain DE	.06	-.01	-.41	.69	.20
Mexicain DTE	.51	.11	.67	-.12	-.02
Tourneur DE	.27	.08	-.12	.63	.26
Tourneur DTE	.53	.14	.55	.11	.14
B 23 DE	.11	.03	-.53	.56	-.08
B 23 DTE	.50	.08	.59	.00	.06
Sinus DE	-.04	.11	-.58	.54	-.06
Sinus DTE	.54	.10	.62	.00	.06

TABLEAU XVI

Tests	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
A		.58	.35	.37	.49	.53	.29	.41	.38	.43	.35	.50	.22	.22	.23	.29
B			.43	.57	.55	.52	.37	.37	.61	.71	.53	.56	.23	.28	.16	.34
C				.26	.37	.33	.44	.22	.29	.36	.62	.35	.38	.31	.27	.39
D					.42	.37	.27	.25	.62	.50	.42	.44	.23	.23	.10	.28
E						.58	.26	.47	.50	.56	.30	.52	.16	.21	.19	.30
F							.35	.66	.40	.51	.27	.65	.19	.23	.17	.32
G								.24	.28	.39	.60	.33	.26	.43	.13	.28
H									.32	.42	.17	.47	.05	.10	.20	.24
I										.61	.36	.38	.19	.18	.11	.24
J											.48	.49	.13	.27	.11	.28
K												.36	.41	.48	.22	.41
L													.28	.29	.23	.33
M														.50	.38	.52
N															.37	.52
O																.44
P																

$\Psi$					$\Psi'_{aj}$						
	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>		<i>g</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
1	.913	.212	.233	.137	.215	1	.914	.212	.233	.137	.215
2	.029	-.349	-.364	.341	.527	2	.036	-.433	-.352	.423	.654
3	.110	.501	-.656	.442	-.513	3	.102	.467	-.611	.412	-.478
4	-.105	.535	-.553	-.631	.698	4	-.080	.557	-.419	-.478	.529

$\Psi\Psi'$					$\Psi'_{aj}\Psi'_{aj}$				
	1	2	3	4		1	2	3	4
1	.998	.028	.004	-.005	1	1.000	.034	.004	-.001
2	.028	.649	-.053	.094	2	.034	1.000	-.061	.079
3	.004	-.053	1.152	.082	3	.004	-.061	1.000	.058
4	-.005	.094	.082	1.742	4	-.001	.089	.058	1.001

(Matrices *V* et *S*, voir tableau XVIII)

TABLEAU XVII

<i>F</i>								
Tests	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$h^2_4$	$h^2_6$
A	.637	-.187	-.099	-.082	.079	-.168	.46	.49
B	.770	-.258	.223	.092	.076	-.128	.72	.74
C	.613	.274	.151	-.253	-.148	-.229	.54	.61
D	.609	-.220	.235	.252	.125	-.051	.54	.56
E	.662	-.306	-.077	-.029	-.161	-.035	.54	.57
F	.690	-.342	-.308	-.253	.068	.121	.75	.77
G	.565	.225	.219	-.264	.146	.269	.49	.58
H	.538	-.327	-.286	-.217	-.161	.182	.53	.58
I	.624	-.304	.279	.283	-.088	.051	.64	.65
J	.713	-.291	.243	.063	-.090	.149	.66	.69
K	.676	-.331	.381	-.136	.097	-.059	.73	.74
L	.699	-.209	-.193	-.089	.190	-.066	.58	.62
M	.476	.463	-.146	.197	.111	-.116	.50	.53
N	.526	.460	-.098	.168	.187	.187	.53	.60
O	.384	.306	-.322	.151	-.157	-.086	.37	.40
P	.584	.362	-.232	.219	-.059	-.019	.57	.58

TABLEAU XVIII

	$V = FT^{-1}D$				$S = F \psi_{aj}$					$h^2$
	I	II	III	IV	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	
A	.09	.34	.04	.03	.57	.12	.33	.01	.02	.45
B	.44	.08	.07	-.02	.71	.43	.12	.04	-.06	.71
C	-.08	.09	.47	.02	.61	-.06	.03	.38	.11	.53
D	.52	-.07	-.06	.07	.55	.47	-.01	-.93	.01	.53
E	.19	.35	-.03	.00	.59	.22	.35	-.06	-.04	.52
F	-.08	.65	.00	-.05	.61	.01	.61	-.06	-.06	.75
G	-.04	.05	.49	-.05	.57	-.02	.01	.39	.02	.48
H	-.08	.58	-.03	-.06	.47	.00	.54	-.08	-.08	.52
I	.60	-.09	-.09	.03	.57	.55	-.01	-.06	-.05	.63
J	.43	.08	.08	-.08	.66	.43	.12	.05	-.12	.65
K	.12	-.14	.54	.03	.68	.10	-.17	.46	.11	.72
L	.06	.43	-.01	.08	.62	.10	.41	-.03	.06	.57
M	.01	-.07	.04	.54	.42	-.06	-.09	.11	.58	.54
N	.03	-.08	.09	.51	.47	-.04	-.10	.15	.55	.56
O	-.08	.11	-.09	.50	.32	-.12	.08	-.02	.52	.39
P	.04	.04	-.04	.57	.51	-.02	.02	.03	.59	.60

Des quatre facteurs dégagés par cette analyse, le premier *I* (*a*), correspond bien au *V:ed* de VERNON (26) puisqu'il comprend les tests numériques et verbaux. Les trois autres, en revanche, seraient des subdivisions du facteur *k:m*. Le facteur *II* (*b*) groupant les tests perceptifs et spatiaux, pourrait être utilisé pour l'orientation vers les études techniques. Les deux derniers sont nettement différenciés bien qu'ils concernent tous deux des épreuves psychomotrices. Les

tests du facteur *III* (*c*) sont du type papier-crayon (tapping), tandis que ceux du facteur *IV* (*d*) sont des manipulations (rivets et chevilles). Le facteur *III* (*c*) semble ainsi révéler des qualités psychomotrices intrinsèques, tandis que le facteur *IV* (*d*) indique une habileté manuelle liée à l'utilisation d'un outil.

La matrice *S* dégage en plus un facteur général très important dans notre analyse, contribuant à 32 p. 100 de la variance totale et 56 p. 100 de la

TABLEAU XIX

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
A																
B	.08															
C	.00	.00														
D	.02	.02	.00													
E	.01	.01	.01	.01												
F	.02	.01	.01	.02	.01											
G	.04	.04	.04	.04	.03	.02										
H	.03	.03	.03	.03	.04	.03	.02									
I	.01	.03	.03	.01	.04	.01	.02	.01								
J	.04	.03	.03	.02	.06	.03	.04	.02	.01							
K	.00	.01	.03	.01	.04	.01	.05	.04	.00	.00						
L	.00	.03	.00	.03	.05	.01	.04	.04	.01	.05	.00					
M	.00	.00	.02	.02	.02	.01	.04	.04	.02	.02	.02	.01				
N	.03	.00	.09	.04	.01	.03	.04	.02	.03	.04	.03	.04	.04			
O	.03	.01	.02	.02	.02	.02	.04	.04	.02	.04	.00	.02	.04	.04		
P	.02	.02	.01	.02	.01	.03	.06	.06	.03	.04	.00	.02	.04	.04	.03	

variance expliquée. Tous les tests (sauf *O* dont la communauté est faible) ont, dans le facteur général, une saturation supérieure à .40 et, pour les deux tiers d'entre eux, supérieure aux saturations dans les facteurs de groupes.

Il nous a paru intéressant de calculer pour cet exemple les différences entre les corrélations reconstituées à partir de la matrice *S* et, d'une part, les corrélations originales, d'autre part les corrélations obtenues à partir de la matrice *F*. Les premières différences (tabl. XIX) sont données au-dessus de la diagonale de la matrice,

les secondes au-dessous de cette diagonale.

Rappelons que les différences supérieures sont dues aux résidus de l'analyse centroïde et à l'ajustement imparfait de la matrice *F*, tandis que les différences inférieures, sensiblement plus faibles, ne sont dues qu'à l'orthogonalité imparfaite de *F'*<sub>gr</sub>.

Nous avons enfin essayé de retrouver la matrice *V* par la méthode des vecteurs étendus et nous sommes parvenus, après cinq rotations, à une matrice (tabl. XX) très voisine de *V*.

Les intercorrélations des vecteurs primaires correspondants à cette matrice sont :

TABLEAU XX

Tests	I	II	III	IV
A	.13	.35	.04	.02
B	.48	.09	.08	.01
C	.04	.10	.48	.00
D	.55	.07	.11	.00
E	.23	.35	.03	.00
F	.00	.66	.00	.09
G	.03	.07	.49	.07
H	.01	.04	.03	.09
I	.04	.58	.07	.08
J	.63	.08	.03	.05
K	.47	.09	.09	.03
L	.16	.12	.55	.06
M	.10	.43	.00	.52
N	.01	.08	.04	.49
O	.03	.08	.10	.47
P	.08	.10	.10	.47
P	.05	.03	.04	.55

*TT'*

	I	II	III	IV
I	1.000	.661	.506	.321
II	.661	1.000	.488	.484
III	.506	.488	1.000	.642
IV	.321	.484	.642	1.000

### RÉSUMÉ

La partie la plus délicate de l'analyse factorielle de THURSTONE est la suite des rotations qui permettent de passer de l'analyse centroïde à la structure simple.

Nous proposons un procédé qui évite ces rotations.

Il s'agit de localiser les axes primaires, à l'aide des faiseaux décelés par l'examen graphique des résultats de l'analyse centroïde et des informations sur les tests.

Dès que la position des axes primaires est connue par rapport aux axes centroïdes, il est possible de retrouver par un calcul direct la matrice oblique  $V$  de THURSTONE.

On évite ainsi la séquence des rotations et ses aléas.

La solution en structure oblique sans facteur général ne satisfait cependant pas toujours les psychologues. Nous leur proposons d'établir, à partir d'une même analyse centroïde, parallèlement à la matrice  $V$ , une matrice  $S$  orthogonale ayant un axe en position de facteur général. Nous utilisons à cet effet l'une des techniques d'analyse du second ordre suggérées par THURSTONE, mise au point par REUCHLIN. Mais notre procédé permet d'accéder à l'analyse du second ordre sans passer par la matrice oblique  $V$ . La matrice  $S$  ainsi obtenue s'apparente alors à celle que fournit la méthode de REYBURN et TAYLOR en ayant toutefois l'avantage d'être indépendante de l'ordre dans lequel on choisit les axes de référence.

### SUMMARY

*The most critical part of THURSTONE's factorial analysis is the succession of rotations by which it is possible to pass from the centroid analysis to the simple structure.*

*We put forward a procedure which avoids these rotations. This consists of localising the primary axes by means of the grouping together revealed by the graphical examination of the results of the centroid and of the information on the tests.*

*As soon as the position of the primary axes is known in relation to the centroid axes, it is possible, by direct calculation, to arrive at THURSTONE's oblique matrix  $V$ .*

*Thus both the sequence of rotations and its attendant risks are avoided.*

*However the oblique structural solution without a general factor does not always satisfy psychologists. For their benefit, starting also from the same centroid analysis parallel to matrix  $V$ ,*

*we suggest an orthogonal matrix  $S$  having an axis in the position of the general factor. To obtain this, we use one of the analytical techniques of the second order suggested by THURSTONE and perfected by REUCHLIN. But our procedure allows us to reach the analysis of the second order without passing by oblique matrix  $V$ . Matrix  $S$  thus obtained is then closely connected with that furnished by the method of REYBURN and TAYLOR and having moreover the advantage of being independent of the order in which the axes of reference are chosen.*

### RESUMEN

*La parte más delicada del análisis factorial de THURSTONE es la sucesión de las rotaciones que permiten pasar del análisis centroide a la estructura simple.*

*Proponemos un procedimiento que evite estas rotaciones.*

*Se trata de localizar los ejes primarios con la ayuda de los haces revelados por del examen gráfico de los resultados del análisis centroide y de las informaciones sobre los tests.*

*Una vez conocida la posición de los ejes primarios con relación a los ejes centroïdes es posible hallar, mediante un cálculo directo, la matriz oblicua  $V$  de THURSTONE.*

*De este modo se evita la secuencia de las rotaciones y sus aléas.*

*La solución en estructura oblicua sin factor general nos satisface, sin embargo, siempre a los psicólogos. Nosotros les proponemos de establecer, a partir de un mismo análisis centroide, paralelamente a la matriz  $V$ , una matriz  $S$  ortogonal que tenga un eje en posición de factor general. A este efecto utilizamos una de las técnicas de análisis del segundo orden sugeridas por THURSTONE y adaptada convenientemente por REUCHLIN. Pero nuestro procedimiento permite acceder al análisis del segundo orden sin pasar por la matriz oblicua  $V$ . La matriz  $S$  así obtenida se aparenta entonces a la que proporciona el método de REYBURN y TAYLOR, teniendo sin embargo la ventaja de ser independiente del orden en el cual se escogen los ejes de referencia.*

## Bibliographie

Les comptes-rendus du colloque sur l'analyse factorielle (Paris 11-16 juillet 1955) ont été publiés en 1956 par le Centre National de la Recherche Scientifique en un volume intitulé : « L'analyse factorielle et ses applications ». Nous le désignons par l'abréviation C. N. R. S. 1956.

- (1) BERNYER G. : *Recherches statistiques sur quelques tests d'aptitudes appliqués à l'Enseignement secondaire*. Biotypologie, 1951, 12, 1-16.
- (2) BONNARDEL R. : *Les « diagrammes d'intercorrélation » en analyse factorielle*. Travail humain, 1953, 1-2, 103-136.
- (3) BONNARDEL R. : *Analyse factorielle d'une de tests manipulatifs. Signification des facteurs en fonction du comportement au travail*. Travail humain, 1955, 1-2, 1-16.
- (4) BURT C. : *Group factors analysis*. Br. J. Psychol. Statistical Section, 1950, 3, 40-75.
- (5) CARROL J. B. : *An analytical solution for approximating simple structure in factor analysis*. Psychometrika, 1953, 18, 23-38.
- (6) DARMOIS G. : *Observations théoriques sur l'analyse factorielle linéaire et générale*. C. N. R. S., 1956, 295-301.
- (7) EYSENCK H. J. : *L'analyse factorielle et le problème de la validité*. C. N. R. S., 1956, 237-248.
- (8) FAVERGE J.-M. : *Méthodes statistiques en psychologie appliquée*. P. U. F., 2<sup>e</sup> éd., 1954.
- (9) GUILFORD J. P. : *Psychometric Methods*. Mc Graw-Hill Book Company, 2<sup>e</sup> éd., 1954.
- (10) GUILFORD J. P., GREEN F. R., CHRISTENSEN P. R., COMREY A. L. : *A factor analytic study of reasoning abilities*. Psychometrika, 1953, 18, 135-160.
- (11) GUILFORD J. P., CHRISTENSEN P. R., WILSON R. C., LEWIS D. J. : *A factor analytic study of creative-thinking ability*. Psychometrika, 1954, 19, 297-311.
- (12) HOTELLING H. : Voir (19), 473-510 et (8) 218-227.
- (13) MACCRONE D. and STARFIELD A. : *A comparative study in multiple factor analysis of « neurotic » tendency*. Psychometrika, 1949, 14, 1-20.
- (14) REUCHLIN M. et VALIN E. : *Tests collectifs du Centre de Recherches. Binop*, 1953, 3.
- (15) REUCHLIN M. : *Facteurs observés et facteurs théoriques en psychologie*. C. N. R. S., 1956, 187-204.
- (16) REUCHLIN M. : *Rapport de Synthèse*, C. N. R. S., 1956, 395-406.
- (17) REYBURN H. A. and Taylor J. C. : *On the interpretation of common factors. A criticism and a statement*. Psychometrika, 1943, 8, 53-64.
- (18) THOMSON G. H. : *L'analyse factorielle des aptitudes humaines*. Trad. française P. Naville, P. U. F., 1950.
- (19) THURSTONE L. L. : *Multiple-factor analysis*. The University of Chicago Press, 1947.
- (20) THURSTONE L. L. : *A multiple group method of factoring the correlation matrix*. Psychometrika, 1945, 10, 73-78 et (19), 170-175.
- (21) THURSTONE L. L. : *Problèmes actuels et méthodes nouvelles en analyse factorielle*. C. N. R. S., 1956, 31-42.
- (22) THURSTONE L. L. : *An analytical method for simple structure*. Psychometrika, 1954, 19, 173-182.
- (23) TRYON R. C. : *Identification of social areas by cluster analysis*. University of California Press, 1955.
- (24) TUCKER L. R. : *A semi-analytical method of factor rotation to simple structure*. Psychometrika, 1944, 9, 43-68.
- (25) TUCKER L. R. : *The objective definition of simple structure in linear factor analysis*. Psychometrika, 1955, 20, 209-225.
- (26) VERNON P. E. : *La structure des aptitudes humaines*. Trad. française M. Reuchlin, P. U. F., 1952.
- (27) YELA M. : *Application of the concept of simple structure to Alexander's data*. Psychometrika, 1949, 14, 121-135.
- (28) BOSS J. P. : *Recherches sur la validation de la batterie d'orientation professionnelle GATB*. Revue Suisse de psychologie (sous presse).

La Faculté des Lettres de l'Université de Neuchâtel, sur le rapport de M. Philippe MULLER et de M<sup>lle</sup> Sophie PICCARD, professeurs, autorise l'impression de la thèse présentée par M. Jean-Paul Boss, mathématicien diplômé E. P. F., en laissant à l'auteur la responsabilité de ses opinions.

Neuchâtel, le 9 juillet 1957.

*Le Doyen :*

J. RYCHNER.

---

*Le Directeur de Publication* : D<sup>r</sup> M. FAUTREL

---

IMPRIMERIE ALENÇONNAISE  
— PLACE POULET-MALASSIS, ALENÇON (ORNE) —  
Dépôt légal : 4<sup>e</sup> trimestre 1957. — N<sup>o</sup> d'ordre : 4.633

---