



Faculté des Sciences
Institut de mathématiques
Rue Emile-Argand 11, 2000 Neuchâtel

Chaînes alimentaires de type Lotka-Volterra bruitées et quasi-stationnarité avec frontières mobiles aléatoires

Thèse

présentée à la Faculté des Sciences
pour l'obtention du grade de docteur ès Sciences en mathématiques

par

Antoine Bourquin

Acceptée sur proposition du jury :

Prof. Michel Benaïm	Université de Neuchâtel, CH	Directeur de thèse
Dr. Bertrand Cloez	INRAE, Montpellier, FR	Rapporteur
Prof. Christian Mazza	Université de Fribourg, CH	Rapporteur
Prof. Felix Schlenk	Université de Neuchâtel, CH	Rapporteur
Dr. Edouard Strickler	CNRS, Université de Lorraine, FR	Rapporteur

Soutenue avec succès le 20 juin 2023

IMPRIMATUR POUR THESE DE DOCTORAT

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel autorise
l'impression de la présente thèse soutenue par

Monsieur Antoine BOURQUIN

Titre :

**“Chaînes alimentaires de type
Lotka-Volterra bruitées et quasi-
stationnarité avec frontières mobiles
aléatoires”**

sur le rapport des membres du jury composé comme suit :

- Prof. Michel Benaïm, directeur de thèse, Université de Neuchâtel, Suisse
- Dr Bertrand Cloez, INRAE, Montpellier, France
- Prof. Christian Mazza, Université de Fribourg, Suisse
- Prof. Felix Schlenk, Université de Neuchâtel, Suisse
- Dr Edouard Strickler, CNRS, Université de Lorraine, France

Neuchâtel, le 11 août 2023

Le Doyen, Prof. R. Bshary



Remerciements

Après quatre longues années de dur labeur, il est temps pour l'auteur de cette thèse de se lancer dans son dernier défi de taille : remercier toutes les personnes qui ont contribué directement ou indirectement à l'élaboration de ce document.

Je ne peux décemment pas commencer ces remerciements autrement qu'en remerciant mon directeur de thèse, Michel Benaïm, pour tous ses conseils avisés et pour sa patience devant mes innombrables questions très souvent (trop souvent) triviales. Merci aussi pour toutes ces discussions sur le ski et la station des Diablerets.

La deuxième personne que je tiens à remercier chaleureusement est Édouard. Tu as su en tant qu'assistant me transmettre cette passion pour les probabilités et les processus de Markov. Sans toi, je me serais certainement tourné vers d'autres maths plus profanes. Je te remercie aussi infiniment pour les quelques jours passés à Nancy où ce fut un échange de maths des plus intéressants même si rien de concret ne fut fait par la suite. Merci également pour toutes les confs que tu as organisées et où tu m'as convié pour découvrir les probas dans leur ensemble !

Un tout grand merci à Bertrand Cloez pour avoir fait partie de mon jury de thèse et d'avoir fait l'aller-retour Montpellier-Neuchâtel en 2 jours. Je n'ai pas eu beaucoup l'occasion de discuter avec toi mais chaque fois ce fut sur des maths bien plus qu'intéressantes et passionnantes. Merci aussi pour ta bonne humeur lors de cette conférence anniversaire du parton à l'EPFL.

Merci aussi à Christian Mazza pour être un autre membre actif de ce jury de thèse. Ce fut un immense plaisir de pouvoir discuter avec toi autour d'un verre (ou deux...) lors de cette semaine de conférences aux Diablerets. Tes questions plus biologiques ont révélé que la théorie développée dans cette thèse pouvait avoir des applications plus concrètes.

Enfin, un tout grand merci au dernier membre de ce jury, Felix Schlenk, avec qui j'ai eu la chance d'enseigner pendant le premier printemps Covid. Ce fut une expérience extrêmement perturbante mais ô combien enrichissante. Merci aussi pour ta bonne humeur et tes bonnes blagues qui mettent l'ambiance dans l'Institut.

Un tout tout grand merci à mon coloc Léonard, immense beau gosse et futur tenant du titre de Roland-Garros, pour cette coloc de l'Orée, toutes ces immenses discussions autour des maths ou de nos élèves qui faisaient n'importe quoi. Merci aussi pour toutes les parties de cartes et les stratégies plus ou moins réussies des parties de Siddies ! Merci aussi pour ta bonne humeur quotidienne qui ont fait que cette coloc respire un peu plus la joie !

Je ne peux que continuer par el famoso Zum, pilier de l'Institut. Merci pour avoir mis l'ambiance pendant 4 ans avec un florilège de petites phrases devenues si célèbres comme "L'erreur", "Le beau jeu" ou encore "Tu sais, c'est pas grave". Merci aussi de m'avoir forcé à prendre des pauses enfumées toutes les 10 minutes (qui en dureraient 30 d'ailleurs...) pour éviter de faire de cette thèse un nouveau livre de référence. Merci aussi d'avoir tenté de m'inculquer les fondements du rap francophone bien que je pense que c'est peine perdue que je comprenne un jour pleinement ce genre musical.

Merci à mon petit frère de thèse, Jérémy, pour m'avoir accompagné lors de ces trop

nombreux séminaires et conférences où on était dans le même état de détresse, ça fait du bien d'avoir un compagnon d'infortune. La conférence en France était incroyable avec une dégustation de vins qui restera dans les souvenirs pour son vigneron des plus ambianceurs... Il faut aussi (et surtout) noter que nous avons été double tenant du titre du plus fameux tournoi de pétanque du monde !

Ahhhhhh... Que serait un Institut si on avait pas un fada de sport comme Laurent ? Les petites sessions d'entraînement à la piscine où je t'apprenais à renier tes origines de terrien pour devenir un poisson furent des plus épiques. Merci aussi pour avoir été la seule personne de l'Institut avec qui je pouvais discuter de la musique la plus douce aux oreilles, le Métal !

Un grand merci au neuchâtelois d'adoption, Thomas, pour toutes ces soirées crêpes/fondues/films/cartes où chacune était l'occasion de déguster des boissons houblonnées du pays des moules-frites. Un grand merci aussi de m'avoir fait découvrir la fanf... euh le Brass Band, ce fut à chaque fois des découvertes plus qu'intéressantes et passionnantes ! Grâce à toi, j'ai aussi appris qu'il était possible pour un humain de se nourrir (presque) exclusivement de patates. Cela reste pour moi un grand mystère !

Merci beaucoup à Laura pour sa motivation sans fin à aller boire des coups ! Les bouteilles de Damassine de la coloc ne s'en sont jamais remises... Merci aussi pour le si fameux "parce que, chez nous, à G'nève", phrase devenue culte dès lors. Merci aussi pour toutes ces soirées cartes notamment chez toi avec ton tigre sauvage comme animation entre les donnes.

Merci beaucoup au grimpeur fou et expert mondial du fromage, Alex aka Lapin, pour ces innombrables discussions et débats autour du sacro-saint produit laitier caillé affiné. Merci aussi pour toutes ces soirées raclette et fondue ! Et surtout merci d'avoir apporté le Hanabi dans nos vie, quelle découverte ! Merci aussi pour ces journées ski avec ta motivation sans faille pour aller dans la poudre !

William, tu es arrivé en même temps que moi à l'Institut, moi commençant ma thèse, toi l'ayant tout juste en poche. Ce fut comme qui dirait un choc des cultures mathématiques ! Merci beaucoup d'avoir été mon co-auteur, ces journées au tableau furent des plus intéressantes ! Mais par contre, quelle idée terrible d'avoir choisi la Chaux-de-Fonds comme lieu d'adoption, toi le bordelais d'origine !

Le titre de personne la plus chill revient certainement de droit à Joé. Merci pour ces parties de Hanabi. Tu fus de plus et sans aucun doute le plus redoutable adversaire du Einstein würfelt nicht !

Un immense merci à Dylan pour avoir été partenaire du tournoi de pétanque jusqu'au bout ! Heureusement que tu étais là pour m'accompagner aux urgences après notre victoire !

Un tout grand merci aux professeurs de l'Institut : Bruno, Elisa et Paul pour la liberté que vous m'avez laissée dans mon enseignement, ce fut un véritable plaisir de travailler avec vous. Un merci particulier à toi, Alain, pour tes nombreuses anecdotes ainsi que pour ta participation à toutes les activités de l'Institut.

Merci aux autres collègues d'avoir été là même si on avait moins de contacts, Oliver, Flavio, Giulia, Hélène, Tobias et Radu.

Un tout tout grand merci à toi Christine, la meilleure secrétaire de tous les temps, pour ces innombrables discussions ! Il n'y avait pas de meilleur remède au monde contre les innombrables coups de blues de la thèse. Il faut dire que ces pauses ont fini par devenir

un petit rituel qui devenait à chaque fois plus long et auquel je ne me serais pas permis de déroger.

Un tout grand merci à mes zurichois préférés, Antoine et Emma, pour tous ces week-ends dans cette belle ville, les nombreuses parties de Siddie et tous ces endroits incroyables que vous m'avez fait découvrir (notamment ces fameux sushis). Merci vraiment à vous deux d'être des personnes aussi gentilles, compréhensives. Votre soutien me fut très précieux. Merci Antoine pour toutes ces vacances passées ensembles avec en point d'orgue, la dégustation du plus grand nombre possible de bières anglaises. Merci Emma pour toutes ces discussions sur tous les sujets de la vie et d'être une personne qui s'intéresse autant aux autres.

Un grand merci à mon compagnon de festivals de toujours, Xixi, pour tous ces concerts incroyables qu'on a faits ensemble. Tous ces pogos, walls of death et autres magnificences du Métal. Je me réjouis déjà de continuer de partager cette passion avec toi de même que celle de faire de l'alcool. Désormais, je peux dire que je connais personnellement le maître brasseur de la meilleure brasserie du monde.

Le titre du meilleur grand nounours revient sans conteste à Maël. Merci beaucoup d'avoir squatté mon bureau pendant une année, ce fut sincèrement une joie immense que de pouvoir essayer de comprendre ton travail de master avec comme conversation mythique "Tu prends un complexe de Rips. (Incompréhension de ma part.) Un simplexe. (Pas mieux.) Un triangle (Ahhhh...)". Merci de m'avoir fait découvrir tous ces petits coins de Neuchâtel et d'être toujours motivé pour jouer aux cartes ou boire un verre !

Un grand merci à Oxana, ma troisième coloc, qui nous a rejoint en cours de route. Par contre, si tu avais pu laisser ta collection de tasses dans le galetas, nos armoires ne serait pas sur le point de s'écrouler. Merci pour toutes ces discussions sur l'art et l'architecture, ce furent des moments très enrichissants. J'avoue aussi que je ne savais pas qu'un humain pouvait se nourrir exclusivement de poivrons, d'oeufs et de lapins en chocolat...

Merci beaucoup à mon co-hydromelier de génie, Yannick pour toutes ces innombrables heures à brasser ce nectar des dieux. Mes deux mains gauches ont donné lieu à quelques moments fort drôles, heureusement que l'hydromel n'en fut pas impacté ! Merci aussi pour tous ces autres moments notamment ceux au Lago où les parties de pommes s'enchaînaient au rythme des descentes de bières.

Merci beaucoup à toi Alex π pour ces 5 années d'études ! Toutes tes expressions jurassiennes valent le détour avec les plus récentes comme "Regardez-moi ct'équipe de carnaval" ou "Oui... Mais bon !" ou encore ton intarissable source de memes. Merci également pour toutes ces vacances passées ensembles à tirer des godets.

Je ne peux continuer ces remerciements sans remercier tous mes élèves pour leurs innombrables questions (trop souvent wtf) et toutes ces heures passées à essayer de vous inculquer les principes de base des mathématiques. Ces heures furent pour moi source de grandes joies et m'ont permises de remettre (trop souvent) les choses de ma thèse à plus tard.

Je veux remercier en particulier Quentin, Daric et Nisia. Paradoxalement, je ne vous ai pas eu comme élèves (sauf Nisia) et pourtant, je pense que vous êtes les personnes qui sont venues le plus dans mon bureau pour poser toutes les questions qui vous passaient par la tête. Il restera le mythique examen de Topo où les entraînements furent, comment dire, épiques. Merci aussi à toi Nisia pour m'avoir permis d'être ton expert de travail de master, que de belles maths se fussent !

Un merci particulier aussi à Céline pour ses listes interminables de questions en Topo qui de semaine en semaine ne faisaient que s'allonger. C'était un très grand challenge mais ô combien stimulant (et aussi chronophage !).

Un immense merci du fond du coeur pour ma volée du premier printemps Covid, Sonia, Perrine, Alessio, Dorian et Timothée. Ce fut une période difficile et sans les séances Zoom hebdomadaires avec des élèves qui, comme vous, gardaient la pêche et la motivation, ça l'aurait été encore plus.

J'espère Arthur Marquand que tu as pu me supporter dans les innombrables cours où je fus ton assistant et je crois que tu es l'élève à qui j'ai le plus transmis les belles maths. Merci à Otz & co (Gwenaëlle, Félicien et Syril) pour les innombrables heures de questions sur des sujets triviaux de MIP. Un merci aussi à Justine, Loris, Arthur Gygax, Louise, Noé et David pour avoir été des élèves qui posent des questions (beaucoup) pertinentes (enfin parfois) (et qui rasant des forêts à chaque série pour Noé...).

Je voudrais aussi remercier du fond du coeur toutes les personnes du sauvetage qui m'ont offert un si bel accueil parmi elles, Flavian, Olivier, Émeric, Clément, Céline, Gwendoline, Joël, Coline, Théa, Lise et Virginie. Nager avec vous lors de ces innombrables entraînements m'ont permis non seulement d'apprendre une farandole de techniques de sauvetage mais aussi de pouvoir l'espace d'un instant ne plus penser à la thèse. Merci aussi pour les sessions lac de cet été, les débuts en board et en kayak furent des plus approximatifs mais quel plaisir de voguer sur le lac depuis !

Un tout grand merci à Caroline et Luana d'avoir été mes coéquipières pour cette fameuse traversée Marthe Robert. L'immense coup de gueule de Caroline lors du premier ravitaillement fut certainement un des moments les plus épiques de cette course. Merci Luana pour tous ces entraînements au lac et à la piscine ainsi que d'avoir fait la traversée du lac de Morat et celle de Bienne avec moi.

Je tiens aussi à remercier du plus profond de mon coeur toute ma famille pour son soutien indéfectible lors de ces quatre années de thèse. Ce fut des fois (souvent... (très souvent...)) un peu difficile de vous faire comprendre ce que je faisais sans passer pour le scientifique fou.

Abstract

In the first part of this thesis, we study Lotka-Volterra food chains. This model considers n species whose interactions are governed by Lotka-Volterra equations. More precisely, species i is the prey of species $i + 1$ and the predator of species $i - 1$. In addition, there can be intra-specific interactions but there can be no other interactions than those mentioned above.

First, we consider this model as a stochastic differential equation, i.e. we assume that the drift is a Lotka-Volterra type food chain. In this model, we also assume that the noise is degenerate and, more precisely, that it only affects species 1 or species n .

We show that, under these assumptions, species persistence is equivalent to the drift having an equilibrium point with all its coordinates positive. Under the condition that all species are present, we understand persistence to mean that the semigroup converges in total variation to a single invariant probability measure whose support is contained in the positive orthant. If we neglect the intra-specific competition of at least one species, then we show that the speed of convergence is polynomial. However, if all species have intra-specific interactions, then the speed of convergence is exponential.

In a second step, we consider this model as a piecewise deterministic Markov process. I.e. we consider the model generated by the random switching between N food chains of the Lotka-Volterra type. We also assume that there are two food chains that differ only in the resources allocated to the first species.

Under these conditions, we show that the persistence of species is equivalent to the positivity of the coordinates of the equilibrium point of the average chain. Furthermore, we show that the speed of convergence is exponential. In the case of extinction, we also determine which species become extinct and which species survive. We also show that the extinction rate is exponential while the semi-group converges in law to an invariant probability measure putting weight only on the surviving species. In addition, we also discuss the critical case and the sensitivity of the model to parameters.

The second part of this thesis deals with quasi-stationarity with random moving boundaries. More precisely, we assume that the boundary can only take a finite number of possible values and that these changes are governed by a jump process. Under new Champagnat-Villemonais conditions, we show the existence of a Q-process and a quasi-ergodic measure. Moreover, we also show the ergodicity of the flow induced by the marginal law of the process conditioned not to be absorbed.

Keywords: Markov processes; stochastic differential equations; degenerate noise; piecewise deterministic Markov processes; stochastic persistence; Lotka-Volterra model; Hörmander condition; quasi-stationarity; quasi-ergodic distribution; Q-process; random moving boundaries; time-inhomogeneous Markov processes.

Résumé

Dans la première partie de cette thèse, nous étudions les chaînes alimentaires de type Lotka-Volterra. Ce modèle considère n espèces dont les interactions sont régies par des équations de Lotka-Volterra. Plus précisément, l'espèce i est la proie de l'espèce $i + 1$ et le prédateur de l'espèce $i - 1$. De plus, il peut y avoir des interactions intra-spécifiques mais il ne peut pas y avoir d'autres interactions que celles mentionnées ci-dessus.

Dans un premier temps, nous considérons ce modèle sous la forme d'une équation différentielle stochastique, c.-à-d. que nous supposons que la dérive est une chaîne alimentaire de type Lotka-Volterra. Dans ce modèle, nous supposons également que le bruit est dégénéré et plus précisément, qu'il n'affecte que l'espèce 1 ou l'espèce n .

Nous montrons que, sous ces hypothèses, la persistance des espèces est équivalente au fait que la dérive possède un point d'équilibre ayant toutes ses coordonnées positives. Sous la condition que toutes les espèces sont présentes, nous entendons par persistance que le semi-groupe converge en variation totale vers une unique probabilité invariante dont le support est contenu dans l'orthant positif. Si nous négligeons la compétition intra-spécifique d'au moins une espèce, nous montrons qu'alors, la vitesse de convergence est polynomiale. Cependant, si toutes les espèces possèdent des interactions intra-spécifiques, alors la vitesse de convergence est exponentielle.

Dans un second temps, nous considérons ce modèle sous la forme d'un processus de Markov déterministes par morceaux. C.-à-d. nous considérons le modèle engendré par le switch aléatoire entre N chaînes alimentaires de type Lotka-Volterra. Nous faisons aussi l'hypothèse qu'il y a deux chaînes alimentaires qui ne diffèrent que par les ressources allouées à la première espèce.

Sous ces conditions, nous montrons que la persistance des espèces est équivalente à la positivité des coordonnées du point d'équilibre de la chaîne moyenne. De plus, nous montrons que la vitesse de convergence est exponentielle. Dans le cas de l'extinction, nous déterminons également quelles espèces s'éteignent et quelles espèces survivent. Nous montrons aussi que la vitesse d'extinction est exponentielle tandis que le semi-groupe converge en loi vers une probabilité invariante mettant du poids uniquement sur les espèces survivantes. De plus, nous traitons également du cas critique ainsi que de la sensibilité du modèle aux paramètres.

La deuxième partie de cette thèse traite de la quasi-stationnarité avec frontières mobiles aléatoires. Plus précisément, nous faisons l'hypothèse que la frontière ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs possibles et que ces changements sont régis par un processus de sauts. Sous de nouvelles conditions de type Champagnat-Villemonais, nous montrons l'existence d'un Q -processus et d'une mesure quasi-ergodique. De plus, nous montrons aussi l'ergodicité du flot induit par la loi marginale du processus conditionné à ne pas être absorbé.

Mots-clés : Processus de Markov; équations différentielles stochastiques; bruit dégénéré; processus de Markov déterministes par morceaux; persistance stochastique; modèle de Lotka-Volterra; condition de Hörmander; quasi-stationnarité; distribution quasi-ergodique; Q-processus; frontières mobiles aléatoires; processus de Markov non homogènes.

Contents

1	Introduction	1
1.1	Processus de Markov	1
1.2	Contexte des dynamiques de populations	6
1.3	Cas des équations différentielles stochastiques	8
1.4	Cas des processus de Markov déterministes par morceaux	12
1.5	Quasi-stationnarité	15
1.6	Qu'y a-t-il dans cette thèse ?	20
1.6.1	Chaînes alimentaires de type Lotka-Volterra	20
1.6.2	Modélisation des chaînes alimentaires de type Lotka-Volterra par des SDE	21
1.6.3	Modélisation des chaînes alimentaires de type Lotka-Volterra par des PDMP	23
1.6.4	Quasi-stationnarité avec frontières mobiles aléatoires	26
2	Stochastic persistence in degenerate stochastic Lotka-Volterra food chains	29
2.1	Introduction	29
2.2	Notations and results	31
2.2.1	Notations	31
2.2.2	Preliminaries	32
2.2.3	Main results	33
2.3	Stochastic persistence	35
2.3.1	Some mathematical tools	35
2.3.2	Proof of Theorem 2.6	38
2.4	Rate of convergence	40
2.4.1	General main results on the rate of convergence	40
2.4.2	Proof of Theorem 2.7	42
2.4.3	Proofs of Theorem 2.24 and Theorem 2.25	43
2.5	Extinction	51
2.5.1	Proof of Theorem 2.11	52
2.6	Appendix	53
2.6.1	Proof of Proposition 2.13 point 2	53
2.6.2	Proof of Proposition 2.4	54
3	Persistence in randomly switched Lotka-Volterra food chains	57
3.1	Introduction	57
3.2	Notation and results	60
3.2.1	Notation	60
3.2.2	Main results	61
3.3	Mathematical tools	63

3.4	Proofs	66
3.4.1	Proof of Theorem 3.5	66
3.4.2	Proof of Theorem 3.6	70
3.4.3	Proof of Theorem 3.7	74
3.4.4	Proof of Proposition 3.1	74
3.5	Sensitivity	75
4	Invariant measure for conditional semi-flows induced by random absorbing boundaries	81
4.1	Introduction	81
4.2	Main assumptions and results	82
4.2.1	A few results about quasi-stationarity with moving boundaries . . .	83
4.2.2	Set up and main assumptions	85
4.2.3	Main results	85
4.3	Ergodicity for conditional semi-flows induced by random moving boundaries	87
4.4	Q -process and quasi-ergodic distribution	89
4.5	Example, Markov chains on a finite state space	92
	Bibliography	95

Chapitre 1

Introduction

Nous allons présenter ici les notions et résultats principaux qui seront utilisés durant cette thèse. Il n'est pas pour objectif de refaire ici un cours entier sur les processus de Markov, les processus sous-markoviens ainsi que leurs applications. Cette partie a plus pour but de mettre un contexte sur les modèles étudiés ainsi que de fixer les notations et définitions qui peuvent parfois légèrement différer d'un auteur à l'autre. C'est pourquoi nous supposons qu'à partir de ce moment précis, le lecteur est familier avec ce genre de notions si ce n'est un expert du domaine.

Cette partie est grandement inspirée de l'article *Stochastic Persistence* de M. Benaïm [Ben18], du livre *Markov Chains on Metric Spaces, A Short Course* de M. Benaïm et T. Hurth [BH22] ainsi que de la thèse *Persistence de Processus de Markov Déterministes par Morceaux* de E. Strickler [Str19].

1.1 Processus de Markov

Nous considérons $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et (M, d) un espace polonais, c.-à-d. un espace métrique séparable complet. Nous allons commencer par nous donner un processus de Markov à temps continu $X = (X(t))_t$ défini sur Ω à valeurs dans M . Nous allons supposer que ses trajectoires sont càdlàg (i.e. continues à droite, limites à gauche). Pour μ une probabilité sur M , on note \mathbb{P}_μ (resp. \mathbb{E}_μ) la loi (resp. l'espérance) du processus X sous la condition initiale μ . Dans le cas particulier de la mesure de Dirac en un point, δ_x , on notera plutôt \mathbb{P}_x et \mathbb{E}_x . On notera également X^μ ou X^x le processus sous cette condition initiale.

Rappelons que le *semi-groupe* $(P_t)_t$ associé au processus X est défini pour toute fonction réelle mesurable bornée f et pour tout $x \in M$ par

$$P_t f(x) := \mathbb{E}_x[f(X(t))] = \int_M f(y) P_t(x, dy).$$

Le semi-groupe agit également sur les boréliens par

$$P_t(x, B) := P_t \mathbf{1}_B(x)$$

où B est un borélien. Rappelons que cet opérateur satisfait la propriété de semi-groupe, ou aussi appelée les *équations de Chapman-Kolmogorov*,

$$\begin{aligned} P_{t+s} &= P_t \circ P_s \quad \text{pour tout } t, s \geq 0, \\ P_0 &= Id. \end{aligned}$$

Notons également que le semi-groupe agit sur les probabilités par

$$\mu P_t(B) := \int_M P_t(x, B) \mu(dx)$$

pour n'importe quelle probabilité μ et n'importe quel borélien B .

Définition 1.1. *On dit qu'une probabilité μ sur M est invariante pour le processus X , si pour tout $t \geq 0$,*

$$\mu P_t = \mu.$$

On note $\mathcal{P}_{inv}(A)$, resp. $\mathcal{P}_{erg}(A)$, l'ensemble des probabilités invariantes, resp. ergodiques, sur $A \subset M$. On rappelle qu'une probabilité invariante μ est dite *ergodique* si $\mu(B) \in \{0, 1\}$ pour tout ensemble borélien invariant B . On rappelle aussi que B est dit *invariant* si $P_t \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_B$ pour tout t .

Après ces définitions préliminaires, il est temps de savoir ce qu'il nous intéressera de comprendre sur ce processus. Nous n'allons pas y aller par quatre chemins, nous serons intéressés par le comportement à long terme du processus X . Autrement dit, nous voulons savoir quand ce processus admet une probabilité invariante, si elle est unique et si c'est le cas, quelle est la vitesse de convergence du semi-groupe vers elle. En d'autres termes, si μ est l'unique probabilité invariante, quelle est la vitesse de convergence de P_t vers μ . Ici, on va considérer principalement deux types de convergence, la convergence en variation totale et la convergence en loi.

Rappelons que la norme en *variation totale* est définie pour deux probabilités μ, ν par

$$\|\mu - \nu\|_{TV} := \sup \{ |\mu f - \nu f| \mid f : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable bornée, } \|f\|_\infty < 1 \},$$

avec la notation

$$\mu f := \int_M f(x) \mu(dx).$$

On dit qu'une suite de probabilités (μ_n) converge *faiblement* ou *en loi* vers μ si pour toute fonction réelle continue bornée f ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n f = \mu f.$$

Afin de pouvoir répondre à toutes ces interrogations, il nous faut un peu plus d'outils mathématiques bien acérés. On commence par définir $C_b(M)$ comme l'ensemble des fonctions réelles continues bornées sur M .

Définition 1.2. *On dit que le processus X (ou son semi-groupe (P_t)) est Feller si pour toute fonction $f \in C_b(M)$, l'application $(t, x) \mapsto P_t f(x)$ est continue.*

Il est important de noter que la notion de processus Feller est assez confuse. En effet, suivant les auteurs, ils préféreront utiliser des notions plus adaptées au contexte comme la notion de Feller forte ou Feller faible. La définition considérée ici est souvent appelée C_b -Feller dans la littérature.

Une des raisons principales de considérer des processus Feller est la proposition suivante qui garantit l'existence de probabilités invariantes dans le cas où l'espace d'états M est compact, voir [Str19, Proposition 1.6].

Proposition 1.3. *Si le processus X est Feller et l'espace d'états M est compact, alors il existe des probabilités invariantes.*

Nous verrons dans la suite que cette notion apparaîtra dans énormément de grands résultats. Notamment, les processus de Markov des Chapitres 2 et 3 seront Feller.

Nous voulons à présent déterminer un critère dans le cas où M est non compact et pour cela, nous allons commencer par définir le fameux générateur infinitésimal. Nous notons \mathcal{L} le *générateur infinitésimal* de $(P_t)_t$ défini pour les fonctions $f \in C_b(M)$ satisfaisant :

1. Pour tout $x \in M$, la limite $\mathcal{L}f(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t}$ existe.
2. $\mathcal{L}f \in C_b(M)$.
3. $\sup_{0 < t \leq 1} \frac{1}{t} \|P_t f - f\|_\infty < \infty$.

L'ensemble de telles fonctions est noté $\mathcal{D}(\mathcal{L}) \subset C_b(M)$ et est appelé le *domaine* de \mathcal{L} .

Intuitivement, le point 1. nous dit que cet objet joue d'une certaine manière le rôle de la dérivée pour ce type de processus. En effet, pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ et tout $t \geq 0$, on a $P_t f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ et pour tout $x \in M$,

$$\frac{dP_t f}{dt}(x) = \mathcal{L}(P_t f)(x) = P_t(\mathcal{L}f)(x). \quad (1.1)$$

Voir [LG16, Proposition 6.10] par exemple. Une autre conséquence que nous utiliserons très souvent est la très belle *formule de Dynkin*, voir [Dyn65, Theorem 5.1].

Proposition 1.4 (Formule de Dynkin). *Supposons que le processus X soit Feller, alors pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, tout $x \in M$ et tout temps d'arrêt τ tels que $\mathbb{E}_x[\tau] < \infty$, on a*

$$\mathbb{E}_x[f(X(\tau))] = f(x) + \mathbb{E}_x \left[\int_0^\tau \mathcal{L}f(X(s)) ds \right].$$

La proposition suivante est une caractérisation très intéressante des probabilités invariantes pour les processus Feller en terme du générateur infinitésimal et est tirée de [Str19, Proposition 1.5].

Proposition 1.5. *Si X est un processus Feller de générateur \mathcal{L} , alors μ est une probabilité invariante si et seulement si $\mu \mathcal{L}f = 0$ pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$.*

Nous définissons maintenant ce qu'on appelle communément le carré du champ qui est d'une certaine manière l'analogie de la variance pour notre processus X . Notons $\mathcal{D}^2(\mathcal{L}) \subset C_b(M)$ l'ensemble des fonctions f telles que $f, f^2 \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Ainsi l'opérateur *carré du champ*, Γ , est défini pour les fonctions $f \in \mathcal{D}^2(\mathcal{L})$ par

$$\Gamma(f) := \mathcal{L}f^2 - 2f\mathcal{L}f.$$

Notons que $\Gamma(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (P_t f^2 - (P_t f)^2)$, ce qui implique immédiatement que $\Gamma(f) \geq 0$.

Pour définir un critère sur l'existence de probabilités invariantes dans le cas d'un espace d'états non compact, il nous faut encore quelques petites définitions.

Une fonction continue $f : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ est dite *propre* si pour tout $R > 0$, l'ensemble $\{x \in M \mid f(x) \leq R\}$ est compact. Dans le cas où $M = \mathbb{R}^n$, cette propriété est équivalente à $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Un autre outil qui va jouer un rôle décisif dans l'existence de probabilités invariantes est la famille des *mesures empiriques d'occupation* $(\Pi_t^x)_t$ définie pour la condition initiale $x \in M$ par

$$\Pi_t^x(\cdot) := \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X^x(s) \in \cdot\}} ds.$$

Nous notons pour des fonctions continues $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$

$$M_x^{f,g}(t) := f(X^x(t)) - f(x) - \int_0^t g(X^x(s)) ds.$$

On dit que (f, g) est dans le *générateur étendu* si pour tout $x \in M$, $(M_x^{f,g}(t))_t$ est une martingale locale. Si de plus

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_x^{f,g}(t)}{t} = 0,$$

on dit que (f, g) satisfait la *loi forte des grands nombres*. Remarquons immédiatement que par (1.1), $(f, \mathcal{L}f)$ est dans le générateur étendu pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Ainsi, le terme étendu est bien choisi.

Nous pouvons enfin établir le critère suivant qui est tiré de [Ben18, Théorème 2.2].

Proposition 1.6. *Supposons que le processus X soit Feller. Supposons aussi qu'il existe une fonction propre $V : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $(V, \mathcal{L}V)$ satisfait la loi forte des grands nombres et qu'il existe des constantes $\alpha > 0$, $C \geq 0$ telles que*

$$\mathcal{L}V \leq -\alpha V + C.$$

Alors,

1. Pour tout $x \in M$, $\limsup_{t \rightarrow \infty} \Pi_t^x V \leq \frac{C}{\alpha}$. De plus, $(\Pi_t^x)_t$ est tendue et ses points limites faibles sont dans $\mathcal{P}_{inv}(M)$. En particulier, $\mathcal{P}_{inv}(M)$ est non-vide.
2. L'ensemble $\mathcal{P}_{inv}(M)$ est compact et $\mu V \leq \frac{C}{\alpha}$ pour toute probabilité $\mu \in \mathcal{P}_{inv}(M)$.
3. On a pour tout $t \geq 0$,

$$P_t V \leq e^{-\alpha t} \left(V - \frac{C}{\alpha} \right) + \frac{C}{\alpha}.$$

Remarque 1.7. *La fonction V est ce qu'on appelle communément une fonction de Lyapunov. Il est intéressant de noter que ce critère se généralise pour des fonctions (f, g) appartenant au générateur étendu, satisfaisant la loi forte des grands nombres et telles que*

$$g \leq -f + C$$

pour une certaine constante $C \geq 0$. Notons également que l'Hypothèse 3 et le Théorème 2.2 de [Ben18] généralisent encore ce critère.

Remarque 1.8. *Il est intéressant de voir que la Proposition 1.3 est un cas particulier de la proposition précédente dans le cas où M est compact. En effet, dans ce cas il suffit de prendre $V \equiv 0$ comme fonction de Lyapunov.*

Il est à présent temps de nous pencher sur l'élaboration d'un critère assurant l'unicité de la probabilité invariante.

Définition 1.9. *Un point $x \in M$ est un point de Doeblin s'il existe un voisinage U de x , une mesure non nulle ξ sur M et un temps $t > 0$ tels que pour tout $y \in U$, on a l'inégalité*

$$P_t(y, \cdot) \geq \xi(\cdot).$$

En pratique, il est très difficile de démontrer qu'un point est un point de Doeblin puisqu'il faut déterminer une mesure qui va fonctionner uniformément sur un voisinage. Heureusement, nous ne sommes pas totalement démunis pour déterminer de tels points. En effet, dans certains cas particuliers, nous pourrions utiliser les fameuses conditions de Hörmander ou conditions de crochet qui vont impliquer l'existence d'un point de Doeblin. Nous définirons précisément ces notions dans le cadre de certaines équations différentielles stochastiques (Section 1.3) et dans celui de certains processus de Markov déterministes par morceaux (Section 1.4). Cependant, nous verrons malgré tout que ces conditions ne sont pas des recettes miracles et qu'elles sont loin d'être aussi faciles à vérifier que nous le voudrions.

Pour accompagner cette notion de point de Doeblin, nous allons définir celle d'accessibilité.

Définition 1.10. *Un point $y \in M$ est dit accessible depuis $x \in M$ si pour tout voisinage U de y , il existe un temps $t \geq 0$ tel que $P_t(x, U) > 0$.*

On note Γ_x l'ensemble des éléments y accessibles depuis x et pour $D \subset M$, on note $\Gamma_D = \bigcap_{x \in D} \Gamma_x$ l'ensemble des points accessibles depuis D .

Intuitivement et comme le nom le laissait penser, y est accessible depuis x si en partant de x on peut être aussi proche de y qu'on le désire si on est assez patient pour attendre suffisamment longtemps. Nous verrons des critères plus pratiques pour vérifier que des points sont accessibles, à nouveau dans les cas particuliers des Sections 1.3 et 1.4.

En combinant ces deux outils, on arrive à la proposition suivante qui va décrire un peu plus l'ensemble des probabilités invariantes. Il s'agit d'une combinaison entre le Lemme 1.4 et la Proposition 1.8 de [Str19].

Proposition 1.11. *Supposons que le processus X est Feller. S'il existe un point de Doeblin x qui est accessible depuis M (i.e. $x \in \Gamma_M$), alors il existe au plus une probabilité invariante.*

On remarque immédiatement qu'en combinant les Propositions 1.6 et 1.11, on obtient un critère pour l'existence et l'unicité de la probabilité invariante. Même mieux ! Ces deux conditions suffisent en fait à impliquer la convergence exponentielle en variation totale du semi-groupe vers cette unique probabilité invariante.

Théorème 1.12. *Supposons que le processus X soit Feller. Supposons aussi l'existence d'une fonction propre $V : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $(V, \mathcal{L}V)$ satisfait la loi forte des grands nombres et qu'il existe des constantes $\alpha > 0$, $C \geq 0$ telles que*

$$\mathcal{L}V \leq -\alpha V + C.$$

S'il existe un point de Doeblin $x \in \Gamma_M$, alors il existe une unique probabilité invariante Π sur M et des constantes $\lambda > 0$ et $K \geq 0$ telles que pour tout $t \geq 0$ et toute fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée avec $\|f\|_V \leq 1$,

$$\|P_t f - \Pi f\|_V \leq K e^{-\lambda t} \|f - \Pi f\|_V,$$

où $\|f\|_V := \sup_{x \in M} \frac{|f(x)|}{1+V(x)}$. En particulier, il existe une constante $K' \geq 0$ telle que pour tout $x \in M$,

$$\|P_t(x, \cdot) - \Pi(\cdot)\|_{TV} \leq K' e^{-\lambda t} (1 + V(x)).$$

Il s'agit du Théorème 4.10 de [Ben18] et on peut aussi citer [Str19, Corollaire 1.1].

Remarque 1.13. On peut remplacer la condition de la fonction de Lyapunov sur le générateur infinitésimal par une condition de la fonction de Lyapunov sur le semi-groupe, un peu comme celle du point 3. de la Proposition 1.6. Plus précisément, cette condition est

$$P_t V \leq \gamma V + K \quad \text{pour tout } t \in [T_0, T_1],$$

pour certaines constantes $0 < \gamma < 1$, $K \geq 0$ et pour certains temps $T_0 < T_1$.

Notons aussi que la preuve de ce théorème fait appel au fameux théorème de Harris et nous renvoyons à [BH22, Théorème 8.7] pour un énoncé précis.

1.2 Contexte des dynamiques de populations

Dans cette thèse, nous allons explorer quelques modèles de dynamiques de populations dont le contexte choisi ici est le même que celui de [Ben18]. Nous cherchons à modéliser n espèces cohabitant paisiblement ou non ainsi que leurs interactions. Comme le laissait penser la section précédente, nous allons les modéliser par un processus de Markov.

Ainsi, les questions qui nous intéressaient précédemment deviennent : est-ce que toutes les espèces survivent ? Si oui, en quelle proportion et à quelle vitesse vont-elles se retrouver proche de l'équilibre ? Si non, quelles espèces vont s'éteindre, à quelle vitesse et en quelle proportion les espèces survivantes se retrouveront-elles ?

Mathématiquement, cela revient à considérer un processus de Markov $X = (X_1, \dots, X_n)$ sur l'espace d'états $M \subseteq \mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ où chaque X_i représente la densité de l'espèce i . On note

$$M_+ := \{x \in M \mid x_i > 0, i = 1, \dots, n\},$$

$$\partial M := \left\{ x \in M \mid \prod_{i=1}^n x_i = 0 \right\},$$

l'ensemble de survie, resp. l'ensemble d'extinction des espèces. Comme nous ne voulons pas modéliser le phénomène de la génération spontanée, nous supposons que ces deux ensembles sont invariants pour le processus X , i.e. $P_t \mathbf{1}_{\partial M} = \mathbf{1}_{\partial M}$ et $P_t \mathbf{1}_{M_+} = \mathbf{1}_{M_+}$ pour tout $t \geq 0$. Nous allons maintenant définir un peu plus précisément les notions de persistances et d'extinctions.

Définition 1.14. 1. On dit que les n espèces sont persistantes stochastiquement s'il existe une unique probabilité invariante Π sur M_+ telle que pour toute condition

initiale $x \in M_+$,

$$\|P_t(x, \cdot) - \Pi(\cdot)\|_{TV} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

2. Il y a extinction presque sûre d'au moins une espèce si pour toute condition initiale $x \in M_+$,

$$\mathbb{P}_x \left(\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) \in \partial M \right) = 1.$$

3. L'espèce i va s'éteindre presque sûrement si pour toute condition initiale $x \in M_+$,

$$\mathbb{P}_x \left(\lim_{t \rightarrow \infty} X_i(t) = 0 \right) = 1.$$

On remarque immédiatement qu'il y a extinction dès qu'une espèce disparaît, i.e. il existe i tel que $\lim_{t \rightarrow \infty} X_i(t) = 0$ presque sûrement. Dans les Chapitres 2 et 3, nous aurons besoin de notions de persistance et d'extinction plus précises que nous définirons à ce moment-là.

Pour avoir de la persistance, une simple fonction de Lyapunov comme au Théorème 1.12 ne suffit plus étant donné que nous voulons ici une probabilité invariante sur M_+ et non plus sur M . Il nous faut donc une fonction de Lyapunov qui va contrôler l'infini (cette fois-ci comme dans le Théorème 1.12), une fonction de Lyapunov qui va contrôler le bord et enfin, un point de Doebelin $x \in M_+$ accessible depuis M_+ . Nous ne voulons pas entrer ici dans les détails techniques et c'est pourquoi nous renvoyons le lecteur aux Hypothèses 3 et 4 ainsi qu'au Théorème 4.10 de [Ben18] pour la construction de ces fonctions de Lyapunov et d'un résultat général correspondant.

Remarque 1.15. Dans le cas où l'espace d'états M est compact, on a déjà une fonction de Lyapunov qui contrôle l'infini (il suffit de prendre la fonction nulle par la Remarque 1.8). On en a donc seulement besoin d'une qui contrôle le bord dans ce cas.

Nous allons quand même développer un peu en ce qui concerne la construction de la fonction de Lyapunov contrôlant le bord. Une manière de procéder est de considérer les si fameux *taux d'invasion*. L'idée est de regarder, non pas le comportement asymptotique de $X_i(t)$, mais celui de $\frac{\ln(X_i(t))}{t}$. On remarque immédiatement que cela permettra de déterminer si l'espèce i survivra ou non puisque, si cette limite est positive, l'espèce i aura tendance à croître tandis que si elle est négative, l'espèce i va tendre vers l'extinction.

On verra que sous de bonnes hypothèses, cette limite existe. Même mieux ! Dans certaines équations différentielles stochastiques et dans certains processus de Markov déterministes par morceaux (c.f. Sections 1.3 et 1.4), si la distribution initiale est une probabilité ergodique sur le bord on arrivera à déterminer une formule (voir les Définitions-Propositions 1.20 et 1.30). Plus précisément, pour $\mu \in \mathcal{P}_{erg}(\partial M)$, on notera, si la limite existe, le *taux d'invasion* de l'espèce i par rapport à μ ,

$$\lambda_i(\mu) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(X_i^\mu(t))}{t}.$$

D'après les Chapitres 5 et 6 de [Ben18], dans ces mêmes cas particuliers, une condition suffisante pour construire une fonction de Lyapunov qui contrôle le bord (et donc assurer la persistance des espèces) est l'existence de constantes positives $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ telles que

pour toute probabilité $\mu \in \mathcal{P}_{erg}(\partial M)$,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i(\mu) > 0. \quad (1.2)$$

Intuitivement, cette condition nous dit que le bord va repousser le processus s'il s'en approche trop près puisqu'en moyenne, on aura un taux d'invasion positif pour les espèces sur le bord.

En ce qui concerne le cas de l'extinction, c'est un peu plus délicat et à nouveau, nous ne voulons pas entrer ici dans les détails. Notons quand même qu'une manière de procéder est de déterminer une condition similaire à la condition (1.2) mais pour un nombre restreint d'espèces et sans surprise, ce seront celles qui persisteront. Nous pouvons citer le Théorème 1.3 de [HN18a] et le Théorème 3 de [BS19a] qui utilisent ce genre de conditions et nous renvoyons aussi le lecteur au Théorème 1.14 de [Str19] pour des conditions plus générales.

1.3 Cas des équations différentielles stochastiques

Une première manière de modéliser ces espèces est d'utiliser les *équations différentielles stochastiques* (abrégées en SDE). Cela permet notamment de considérer du bruit qui modélise des changements dans les taux de naissance et de mort des individus, comme par exemple des changements aléatoires de températures qui influent sur la survivabilité des individus.

Plus précisément, on considère la SDE sur \mathbb{R}_+^n suivante :

$$dX_i(t) = X_i(t)F_i(X(t))dt + \Sigma_i(X(t))X_i(t)dB_t^i \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

où $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction \mathcal{C}^∞ , (B_t^1, \dots, B_t^n) est un vecteur de mouvements browniens indépendants et $\Sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction \mathcal{C}^∞ bornée. Notons que nous pouvons affaiblir les hypothèses sur les fonctions F et Σ , mais nous avons choisi ce contexte pour plus de simplicité et de clarté.

Pour le lecteur assidu, nous le renvoyons à [LG16] pour les fondements du calcul stochastique. Pour la théorie générale sur les modèles de population, nous le renvoyons à [SBA11, HNC21] et pour des exemples, nous le renvoyons entre autres à [HTU22] pour un modèle sur les récoltes et les stockages, à [HNC21] pour un modèle épidémique de type SIR, à [HNS22] pour une classification des modèles de populations à trois espèces ainsi qu'à [HN18c, HN18b] pour des modèles de chaînes alimentaires.

Nous allons à présent redéfinir les notions des sections précédentes dans ce contexte ainsi que des critères sur l'existence d'une solution, sur l'existence de probabilités invariantes et sur la vitesse de convergence.

On va noter l'espace d'états \mathbb{R}_+^n au lieu de M , l'ensemble de survie \mathbb{R}_{++}^n au lieu de M_+ et l'ensemble d'extinction $\partial\mathbb{R}_+^n$ pour ∂M , où ces ensembles sont définis comme à la section précédente.

On note L le *générateur formel* et Γ_L le *carré du champ formel* qui sont définis pour

des fonctions $g : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{C}^2 , par

$$Lg(x) := \sum_{i=1}^n x_i F_i(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Sigma_i^2(x) x_i^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(x)$$

et

$$\Gamma_L(g)(x) := \sum_{i=1}^n \Sigma_i^2(x) x_i^2 \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \right)^2.$$

La proposition suivante est une proposition fourre-tout qui nous donnera l'existence d'une solution forte ainsi que l'existence de probabilités invariantes. De plus, elle donnera aussi un lien entre L et \mathcal{L} (le générateur infinitésimal) et un autre entre Γ_L et Γ , le carré du champ tel qu'il est défini à la Section 1.1. Il s'agit de la Proposition 3.1 de [Ben18].

Proposition 1.16. *Supposons qu'il existe une fonction \mathcal{C}^2 propre $U : \mathbb{R}_+^n \rightarrow [1, \infty[$ et des constantes $\alpha, \gamma > 0$, $\beta \geq 0$ telles que*

$$LU \leq -\alpha U + \beta$$

et

$$\Gamma_L(U) \leq \gamma U^2.$$

Alors,

- 1) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^n$, il existe une unique solution forte $(X^x(t))_{t \geq 0} \subset \mathbb{R}_+^n$ à la SDE (1.3) avec la condition initiale $X^x(0) = x$. De plus, $X^x(t)$ est continue en (t, x) et en particulier, le processus est Feller.
- 2) Notons $\mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}_+^n)$ l'ensemble des fonctions réelles \mathcal{C}^2 à support compact, alors $\mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}_+^n) \subset \mathcal{D}^2(\mathcal{L})$, l'ensemble des fonctions f telles que $f, f^2 \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. De plus, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}_+^n)$,

$$\mathcal{L}f(x) = Lf(x) \quad \text{et} \quad \Gamma(f)(x) = \Gamma_L(f)(x).$$

- 3) L'ensemble $\partial \mathbb{R}_+^n$ est invariant.
- 4) La fonction $U^{1/2}$ est une fonction de Lyapunov et en particulier, il existe des probabilités invariantes sur \mathbb{R}_+^n .
- 5) $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}(U(X^x(t))) \leq \frac{\beta}{\alpha}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^n$ et $\mu U = \int U d\mu \leq \frac{\beta}{\alpha}$ pour tout $\mu \in \mathcal{P}_{inv}(\mathbb{R}_+^n)$.

Pour définir les autres notions des sections précédentes, commençons par définir les champs de vecteurs,

$$\begin{aligned} A^0(x) &= \left(x_1 \left(F_1(x) - \frac{1}{2} \Sigma_1^2(x) \right), \dots, x_n \left(F_n(x) - \frac{1}{2} \Sigma_n^2(x) \right) \right), \\ A^j(x) &= \Sigma_j(x) x_j e_j, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

où e_j est le j -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n . Pour définir une condition de Hörmander, nous avons encore besoin de définir les ensembles

$$\begin{aligned} E^1 &:= \{A^1, \dots, A^n\}, \\ E^k &:= E^{k-1} \cup \{[V, W] \mid V \in E^{k-1}, W \in E^{k-1} \cup \{A^0\}\} \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Nous notons $[\cdot, \cdot]$ l'opérateur du crochet de Lie qui est défini pour des champs de vecteurs lisses $V, W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et pour $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$[V, W](x) := DW(x)V(x) - DV(x)W(x), \quad (1.4)$$

où $DV(x) = \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j}$ est la matrice jacobienne de V au point x . Dernière petite notation, pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $k \geq 1$, on écrit $E^k(x) := \{V(x) \mid V \in E^k\}$.

Définition 1.17. *La SDE (1.3) satisfait la condition forte de Hörmander au point $x \in \mathbb{R}_+^n$ s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$\text{span}(E^k(x)) = \mathbb{R}^n.$$

Remarque 1.18. *Par [Ben18, Corollaire 5.4] ou [BH22, Théorème 6.30], si la condition forte de Hörmander est vérifiée en x , alors x est un point de Doeblin.*

Considérons à présent le système de contrôle déterministe associé à (1.3),

$$\dot{y} = A^0(y) + \sum_{j=1}^n u^j A^j(y), \quad (1.5)$$

où la fonction de contrôle $u = (u^1, \dots, u^n) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est au moins continue par morceaux. On note $y(u, x, \cdot)$ la solution maximale de (1.5) partant de x et dont la fonction de contrôle est u . La caractérisation suivante de l'accessibilité est tirée de [Ben18, Proposition 5.3].

Proposition 1.19. *Soient $x, z \in \mathbb{R}_+^n$, alors $z \in \Gamma_x$ si et seulement si pour n'importe quel voisinage O de z , il existe une fonction de contrôle u telle que $y(u, x, t) \in O$ pour un certain $t \geq 0$.*

Nous allons maintenant définir les taux d'invasion dans ce contexte.

Définition 1.20. *Le taux d'invasion de l'espèce i par rapport à $\mu \in \mathcal{P}_{erg}(\partial\mathbb{R}_+^n)$ est défini par*

$$\lambda_i(\mu) := \mu \left(F_i - \frac{1}{2} \Sigma_i^2 \right) = \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \left(F_i - \frac{1}{2} \Sigma_i^2 \right) d\mu,$$

pour autant que $F_i - \frac{1}{2} \Sigma_i^2 \in L^1(\mu)$.

Par la Remarque 2.2 de [HN18c], cette définition est bien la même que celle définie à la Section 1.2. Grâce à la forme particulière de (1.3), pour tout $I \subset \{1, \dots, n\}$, les ensembles de la forme

$$\{x \in \mathbb{R}_+^n \mid x_i > 0 \text{ si } i \in I \text{ et } x_i = 0 \text{ sinon}\}$$

sont invariants pour le processus. Ainsi les probabilités ergodiques sur le bord doivent être supportées par un tel espace et pour $\mu \in \mathcal{P}_{erg}(\partial\mathbb{R}_+^n)$, nous notons I_μ le I associé à

μ . Ces probabilités ergodiques sur le bord ont la propriété suivante tirée du Lemme 5.1 de [HN18a].

Proposition 1.21. *Soit $\mu \in \mathcal{P}_{erg}(\partial\mathbb{R}_+^n)$. Alors pour $i \in I_\mu$,*

$$\lambda_i(\mu) = 0.$$

L'intuition derrière ce résultat est que si l'on est dans le support d'une probabilité ergodique sur le bord, alors le processus a tendance à ne pas trop croître ni décroître.

On peut maintenant donner le critère suivant qui assure l'existence et l'unicité de la probabilité invariante. Il est tiré du Corollaire 5.4 de [Ben18].

Théorème 1.22. *Supposons que les hypothèses de la Proposition 1.16 soient vraies et que*

$$F_i - \frac{1}{2}\Sigma_i^2 \in L^1(\mu) \quad \forall \mu \in \mathcal{P}_{inv}(\partial\mathbb{R}_+^n) \text{ et } \forall i = 1, \dots, n.$$

On suppose aussi qu'il existe des nombres $p_1, \dots, p_n > 0$ tels que pour tout $\mu \in \mathcal{P}_{erg}(\partial\mathbb{R}_+^n)$

$$\sum_{i=1}^n p_i \lambda_i(\mu) > 0. \quad (1.6)$$

S'il existe un point $x^* \in \Gamma_{\mathbb{R}_{++}^n} \cap \mathbb{R}_{++}^n$ satisfaisant la condition forte de Hörmander, alors,

- (a) $\mathcal{P}_{inv}(\mathbb{R}_{++}^n) = \{\Pi\}$ et Π est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n .
- (b) Pour tout $f \in L^1(\Pi)$ et tout $x \in \mathbb{R}_{++}^n$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \Pi_t^x f = \Pi f$ presque sûrement. De plus, $(P_t)_t$ converge vers Π en variation totale.
- (c) Si de plus, la condition forte de Hörmander est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}_{++}^n$, alors la densité de Π est C^∞ .

Remarque 1.23. *Par le point 5) de la Proposition 1.16, pour avoir l'intégrabilité de $F_i - \frac{1}{2}\Sigma_i^2$ par rapport à n'importe quelle probabilité invariante sur le bord, il suffit que*

$$\sum_{i=1}^n \left| F_i - \frac{1}{2}\Sigma_i^2 \right| \leq aU + b$$

pour certaines constantes $a, b \geq 0$.

Pour pouvoir en dire plus sur la vitesse de convergence, il nous faut des conditions plus fortes sur les fonctions de Lyapunov. À nouveau, ce résultat est tiré du Corollaire 5.4 de [Ben18].

Théorème 1.24. *Supposons que les conditions du théorème précédent soient vérifiées. Supposons de plus qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $i = 1, \dots, n$,*

$$1 + \varepsilon F_i \geq 0$$

et qu'il existe $q > 1$ et $C \geq 0$ tels que

$$\left| \frac{LU}{U} \right|^q + \sum_{j=1}^n |F_j|^q \leq C\sqrt{U}.$$

Alors, il existe des constantes $\lambda, \theta, \gamma > 0$ et $K \geq 0$ telles que pour tout $t \geq 0$ et toute fonction $f : \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée telle que $\|f\|_{W_\theta} \leq 1$,

$$\|P_t f - \Pi f\|_{W_\theta} \leq K e^{-\lambda t} \|f - \Pi f\|_{W_\theta},$$

où $W_\theta(x) := \frac{U^\theta(x)}{(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i})^{\theta\gamma}}$ et $\|f\|_{W_\theta} := \sup_{x \in \mathbb{R}_{++}^n} \frac{|f(x)|}{1+W_\theta(x)}$.

1.4 Cas des processus de Markov déterministes par morceaux

Une deuxième manière de modéliser ces espèces est de passer par la théorie des *processus de Markov déterministes par morceaux* (PDMP en abrégé). En fait, c'est un petit abus de langage puisque dans cette thèse, nous considérons plutôt le cas particulier des processus issus de changements aléatoires d'environnements. Cela nous permettra, contrairement au cas des SDE, de négliger le bruit dit quotidien pour nous concentrer sur l'effet du changement aléatoire d'environnements sur les espèces. Cela peut modéliser, entre autres, le passage entre le jour et la nuit, le changement de saisons, de températures ou encore l'éruption d'un volcan.

De manière informelle, cela veut dire que nous allons laisser les espèces faire tranquillement leur vie dans un environnement puis à un temps aléatoire, nous allons changer d'environnement. Les espèces vont ainsi vivre dans ce nouvel environnement et de nouveau à un temps aléatoire, nous allons effectuer un nouveau changement d'environnement. En continuant ainsi de suite, nous obtenons notre processus.

Pour le lecteur assidu qui veut perfectionner ses connaissances dans la théorie générale des PDMP, nous le renvoyons au livre de M. Davis [Dav93] qui est entre autres l'inventeur de cette théorie. Nous le renvoyons aussi à [BH12] pour des conditions sur la régularité des mesures invariantes, à [CDG⁺17] pour une compilation d'exemples en biologie, à [HS19] pour un modèle proie-prédateur, à [GPS19] pour un modèle de Moran et à [Bon23, RTW12] pour des applications concrètes sur les cancers pour le premier et sur les membranes pour le second.

Pour définir mathématiquement ces processus, nous allons noter $E := \{1, \dots, N\}$ l'ensemble des environnements possibles et l'environnement j sera modélisé par le champ de vecteurs $G^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Nous allons supposer ici qu'il est de la forme

$$G_i^j(x) := x_i F_i^j(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.7)$$

où $F^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs que nous admettrons \mathcal{C}^∞ pour plus de simplicité.

Nous supposons qu'il existe un sous-ensemble compact $B \subset \mathbb{R}_+^n$ positivement invariant pour tous les environnements, i.e. si on note φ^j le flot induit par la dynamique du j -ème

environnement (c.-à-d. le flot induit par $dx(t) = G^j(x(t))dt$), alors

$$\varphi_t^j(B) \subset B$$

pour tout $t \geq 0$ et tout $j \in E$.

On définit ainsi notre processus sur l'espace d'états $B \times E$ par

$$\begin{cases} dX(t) = G^{J(t)}(X(t))dt, \\ \mathbb{P}(J(t+s) = j \mid \mathcal{F}_t, J(t) = i) = b_{ij}s + o(s) \quad \text{pour } i \neq j, \end{cases} \quad (1.8)$$

où $J(t)$ est un processus de sauts à temps continu sur E , $\mathcal{F}_t = \sigma\{(X(s), J(s)) \mid s \leq t\}$ est la filtration naturelle et $b_{ij} > 0$ sont les taux de sauts. Notons que J joue le rôle du temps aléatoire de changement d'environnements. On va noter la solution de ce processus $(Z^{(x,j)}(t))_{t \geq 0}$ sous la condition initiale $Z^{(x,j)}(0) = (x, j)$ et on suppose qu'elle est bien définie pour tout temps $t \geq 0$.

Remarque 1.25. *L'hypothèse de l'existence d'un compact positivement invariant B peut sembler assez restrictive, mais dans bon nombre d'exemples, avec probabilité 1, le processus va entrer dans $B \times E$ en temps fini. C.-à-d. pour tout $(x, j) \in \mathbb{R}_+^n \times E$, il existe $t \geq 0$ tel que $Z^{(x,j)}(t) \in B \times E$. On peut notamment citer l'Exemple 3.4 sur un modèle SIS de [NS20] et l'Exemple 3.2 sur un modèle SIR de [Str21]. Ainsi, on peut travailler sur ce compact sans que ce ne soit trop restrictif.*

On va utiliser ici les notations $B \times E$, $B_+ \times E$ et $\partial B \times E$ au lieu de M , M_+ et ∂M . On précise aussi que B_+ et ∂B sont définis exactement de la même manière que M_+ et ∂M avec B au lieu de M . On remarque immédiatement que $\partial B \times E$ est positivement invariant pour le processus Z .

Le résultat suivant est tiré de [BLBMZ15, Proposition 2.1].

Proposition 1.26. *Le processus (1.8) est Feller.*

Remarque 1.27. *Comme l'espace d'états est compact, alors, par la Proposition 1.3, il existe des probabilités invariantes. Cependant, rien ne garantit qu'elles ne donnent pas de masse à $\partial B \times E$.*

Il est maintenant temps de redéfinir les notions des sections précédentes. Le générateur infinitésimal \mathcal{L} est défini dans ce contexte pour des fonctions $g : B \times E \rightarrow \mathbb{R}$ lisses en la première variable par

$$\mathcal{L}g(x, i) := \langle G^i(x), \nabla g(x, i) \rangle + \sum_{j \in E} b_{ij} (g(x, j) - g(x, i)),$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n , b_{ij} , $i \neq j$ sont les taux de sauts et on pose $b_{ii} = 0$.

Comme pour le cas des SDE, nous allons définir une condition forte de Hörmander qui, si elle est vérifiée en un point, alors ce point est de Doeblin, c.f. [BH22, Théorème 6.7]. Pour cela, nous définissons les ensembles

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &:= \{G^i - G^j \mid i, j = 1, \dots, N\}, \\ \mathcal{F}_k &:= \mathcal{F}_{k-1} \cup \{[V, G^j] \mid V \in \mathcal{F}_{k-1}, j = 1, \dots, N\} \quad k \geq 1, \end{aligned}$$

où $[\cdot, \cdot]$ est l'opérateur du crochet de Lie défini par (1.4). Nous notons pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $k \geq 1$, $\mathcal{F}_k(x) := \{V(x) \mid V \in \mathcal{F}_k\}$.

Définition 1.28. *On dit que le PDMP (1.8) satisfait la condition forte de Hörmander au point $(x, j) \in B \times E$ s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\text{span}(\mathcal{F}_k(x)) = \mathbb{R}^n.$$

Nous allons utiliser un système déterministe de contrôle pour avoir une caractérisation sympathique de l'accessibilité. On considère l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{y}(t) = \sum_{j=1}^N u^j(t) G^j(y(t)), \quad (1.9)$$

où la fonction de contrôle $u = (u^1, \dots, u^N) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^N$ est au moins continue par morceaux. On note $y(u, x, \cdot)$ la solution maximale de (1.9) sous la condition initiale x et la fonction de contrôle u . Le résultat suivant est la Proposition 6.2 de [Ben18].

Proposition 1.29. *Soient $(x, j), (y, i) \in B \times E$. Alors $(y, i) \in \Gamma_{(x, j)}$ si et seulement si pour n'importe quel voisinage $O \subset B$ de y , il existe une fonction de contrôle u telle que $y(u, x, t) \in O$ pour un certain $t \geq 0$.*

On sait grâce à la preuve de la Proposition 3.5 de [Bou23] que la définition suivante du taux d'invasion est la même que celle de la Section 1.2.

Définition 1.30. *Le taux d'invasion de l'espèce i par rapport à $\mu \in \mathcal{P}_{inv}(\partial B \times E)$ est défini par*

$$\lambda_i(\mu) := \sum_{j=1}^N \int_B F_i^j(x) d\mu^j(x), \quad (1.10)$$

où $\mu^j(A) := \mu(A \times \{j\})$ pour tout borélien $A \subset B$.

Il est intéressant de remarquer que les espaces

$$\{x \in B \mid x_i > 0 \text{ si } i \in I \text{ et } x_i = 0 \text{ sinon}\} \times E$$

pour $I \subset \{1, \dots, n\}$ sont invariants pour notre processus. Cela est dû à la forme particulière des champs de vecteurs G^j . Ainsi les probabilités ergodiques sur le bord doivent être supportées par un tel espace et pour $\mu \in \mathcal{P}_{erg}(\partial B \times E)$, nous notons I_μ le I précédent associé à μ . La proposition suivante donne une propriété intéressante de ces probabilités ergodiques sur le bord.

Proposition 1.31. *Soit $\mu \in \mathcal{P}_{erg}(\partial B \times E)$. Alors pour $i \in I_\mu$,*

$$\lambda_i(\mu) = 0.$$

Ce résultat est tiré de [Bou23, Proposition 3.5]. L'intuition derrière ce résultat est que si on est dans le support d'une probabilité ergodique sur le bord, le processus a tendance à ne pas trop bouger.

On peut enfin énoncer le théorème principal de la partie persistance pour ce type de modèles. Il s'agit du Corollaire 6.3 de [Ben18].

Théorème 1.32. *Supposons qu'il existe des nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ tels que pour n'importe quelle $\mu \in \mathcal{P}_{erg}(\partial B \times E)$*

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i(\mu) > 0. \quad (1.11)$$

Nous supposons aussi l'existence d'un point $(p^, j) \in \Gamma_{(B_+ \times E)} \cap (B_+ \times E)$ vérifiant la condition forte de Hörmander. Alors,*

- (a) *Il existe une unique probabilité invariante Π sur $B_+ \times E$.*
- (b) *Π est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $B \times E$ et pour toute condition initiale $(x, j) \in B_+ \times E$, $\Pi_t^{(x,j)}$ converge faiblement vers Π p.s. lorsque t tend vers l'infini.*
- (c) *Pour tout $(x, j) \in B_+ \times E$,*

$$\|P_t((x, j), \cdot) - \Pi(\cdot)\|_{TV} \leq C(1 + W(x))e^{-\rho t}$$

pour certains $\rho > 0$, $C \geq 0$ et la fonction W est définie pour $x \in B_+$ par

$$W(x) := e^{(\theta \max\{-\sum_{i=1}^n \alpha_i \ln(x_i), 1\})}$$

pour un certain $\theta > 0$.

Il est intéressant de noter que grâce à la compacité de l'espace d'états, et contrairement au cas des SDE, nous n'avons pas besoin de renforcer les conditions sur les fonctions de Lyapunov pour obtenir une convergence exponentielle en variation totale.

1.5 Quasi-stationnarité

Cette section considère un cadre un peu différent et est fortement inspirée de la thèse *Quasi-stationnarité avec frontières mobiles* de W. Oçafrain [Oça19]. Nous supposons que notre espace d'états M se réécrit comme $M \cup \{\partial\}$ où ∂ est un élément dit *absorbant*, c.-à-d.

$$X(t) = \partial, \quad \text{pour tout } t \geq \tau_\partial$$

où $\tau_\partial := \inf\{t \mid X(t) = \partial\}$ est le *temps d'atteinte de ∂* . On va faire l'hypothèse que le processus va mourir (ou atteindre ∂) en temps fini, c.-à-d. pour tout $x \in M$,

$$\mathbb{P}_x(\tau_\partial < \infty) = 1.$$

On va aussi faire l'hypothèse que le processus a toujours une probabilité positive de survivre jusqu'au temps t pour tout t , i.e. pour tout $x \in M$ et tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}_x(t < \tau_\partial) > 0.$$

La première chose qu'on remarque, c'est qu'avec de telles conditions, il existe une unique probabilité invariante δ_∂ , la mesure de Dirac en ∂ . Ainsi, les questions des chapitres précédents ne présentent pas un grand intérêt dans ce contexte. Ce qui le devient par contre, c'est le comportement du processus avant d'être absorbé par ∂ . C'est pourquoi nous allons nous intéresser ici à la notion de *quasi-stationnarité*.

Si par malheur le lecteur ne trouvait pas son bonheur dans ces pages, nous l'invitons à étancher sa soif de connaissances en se penchant sur l'excellent survol de S. Méléard et D. Villemonais [MV12]. Nous lui conseillons aussi [CV16a, CV17a, CV17b] pour une série de critères et de propriétés sur ces processus, [BCOV21] pour d'autres critères et propriétés sur ces processus dans le cas dégénéré, [BC15, BCP18] pour des méthodes d'approximation des QSD (c.f. définition suivante) et enfin [vD91, CV16b] pour des exemples sur les processus de naissance et de mort.

Définition 1.33. *On dit qu'une probabilité α sur M est une distribution quasi-stationnaire (abrégée en QSD) pour le processus X si pour tout $t \geq 0$,*

$$\mathbb{P}_\alpha(X(t) \in \cdot \mid t < \tau_\partial) = \alpha(\cdot).$$

Il est important de noter que cette notion de QSD joue le rôle analogue à celle de la probabilité invariante dans le cadre de la quasi-stationnarité. C'est pourquoi, la plupart des questions qui nous intéressaient dans les sections précédentes se reportent sur la QSD. Cette fois-ci, pour ce qui est de la convergence, nous allons regarder celle du semi-groupe conditionné à ne pas être absorbé vers la QSD, c.-à-d. $\mathbb{P}_\mu(X(t) \in \cdot \mid t < \tau_\partial) \rightarrow \alpha(\cdot)$.

Nous continuons en rappelant le résultat classique suivant qui stipule que sous \mathbb{P}_α , τ_∂ suit une loi exponentielle. Voir par exemple [Oça19, Proposition 1].

Proposition 1.34. *Si α est une QSD alors, il existe $\lambda > 0$ tel que*

$$\mathbb{P}_\alpha(t < \tau_\partial) = e^{-\lambda t}.$$

On définit le *semi-groupe tué* $(\tilde{P}_t)_t$ par

$$\tilde{P}_t f(x) := \mathbb{E}_x[f(X_t) \mathbf{1}_{t < \tau_\partial}]$$

pour toute fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée et tout $x \in M$. En notant \tilde{L} le générateur associé, le résultat suivant fait écho à la Proposition 1.5 dans le cadre de la quasi-stationnarité (voir Proposition 4 de [MV12]).

Proposition 1.35. *Supposons qu'il existe un sous-ensemble $D \subset \mathcal{D}(\tilde{L})$ tel que pour tout sous-ensemble $B \subset M$, il existe une suite de fonctions $(f_n)_n \subset D$ uniformément bornées qui converge simplement vers $\mathbf{1}_B$. Alors, une probabilité α est une QSD si et seulement s'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que pour tout $f \in D$ et pour tout $t \geq 0$,*

$$\alpha \tilde{L} f = -\lambda \alpha f.$$

Dans ce cas, la constante λ est la même que celle de la Proposition 1.34.

Nous allons maintenant définir deux conditions qui vont garantir l'existence et l'unicité de la QSD ainsi que la convergence exponentielle en variation totale du semi-groupe

conditionné à ne pas être absorbé vers cette QSD. En d'autres termes, des conditions magiques qui nous permettent de répondre entièrement à nos questions. Elles sont dues à N. Champagnat et D. Villemonais dans [CV16a]. Nous invitons aussi le lecteur à se pencher sur leur article [CV23] pour d'autres types de conditions.

Hypothèse 1.36. *Il existe une probabilité ν sur M , un temps $t_0 \geq 0$ et deux constantes $c_1, c_2 > 0$ tels que*

(A1) *Pour tout $x \in M$,*

$$\mathbb{P}_x(X(t_0) \in \cdot \mid t_0 < \tau_\partial) \geq c_1 \nu(\cdot).$$

(A2) *Pour tout $x \in M$ et tout $t \geq 0$,*

$$\mathbb{P}_\nu(t < \tau_\partial) \geq c_2 \mathbb{P}_x(t < \tau_\partial).$$

La condition (A1) est une version conditionnelle de la condition de Doeblin et (A2) est une inégalité de type Harnack. Le résultat suivant est le Théorème 2.1 de [CV16a].

Théorème 1.37. *Les conditions (A1)-(A2) sont satisfaites si et seulement s'il existe une unique QSD α sur M et des constantes $C, \gamma > 0$ telles que pour n'importe quelle probabilité initiale μ sur M ,*

$$\|\mathbb{P}_\mu(X(t) \in \cdot \mid t_0 < \tau_\partial) - \alpha(\cdot)\|_{TV} \leq Ce^{-\gamma t}.$$

Un autre objet intéressant dans le contexte de la quasi-stationnarité est le concept de Q -processus. L'idée est de regarder la loi du processus X conditionnée à ne jamais être absorbée. Cela nous donnera des informations sur la trajectoire du processus X à condition qu'il survive très longtemps. Pour ce faire, nous définissons, si elle existe, la famille de probabilités $(\mathbb{Q}_x)_{x \in M}$ par

$$\mathbb{Q}_x(B) := \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x(B \mid T < \tau_\partial)$$

pour tout $s \geq 0$ et tout $B \in \mathcal{F}_s$.

Définition 1.38. *Si la famille $(\mathbb{Q}_x)_{x \in M}$ existe, alors le processus de Markov $((X_t)_{t \geq 0}, (\mathbb{Q}_x)_{x \in M})$ est appelé le Q -processus de X .*

Ainsi, il est aussi intéressant d'avoir des conditions sur l'existence d'un tel processus. En fait, l'Hypothèse 1.36 nous donne un tel résultat et le théorème suivant est tiré de [CV16a, Théorème 1.3].

Théorème 1.39. *Sous l'Hypothèse 1.36, il existe un Q -processus qui est un processus de Markov. De plus, ce processus admet une unique probabilité invariante β sur M et il existe des constantes $C, \gamma > 0$ telles que pour tout $x \in M$,*

$$\|\mathbb{Q}_x(X(t) \in \cdot) - \beta(\cdot)\|_{TV} \leq Ce^{-\gamma t}.$$

Le dernier concept de base que nous verrons ici est celui de la distribution quasi-ergodique.

Définition 1.40. On dit que β est une distribution quasi-ergodique pour le processus X s'il existe une probabilité initiale μ telle que pour toute fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée,

$$\mathbb{E}_\mu \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)) ds \mid t < \tau_\partial \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \beta f.$$

Cette notion est intéressante puisque sous de bonnes conditions, la distribution quasi-ergodique est la probabilité invariante du Q -processus. Le théorème suivant présente une telle condition et c'est le Corollaire 2.3 de [CV17b].

Théorème 1.41. Supposons que l'Hypothèse 1.36 est vérifiée et notons β la probabilité invariante du Q -processus. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée,

$$\left| \mathbb{E}_\mu \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)) ds \mid t < \tau_\partial \right) - \beta f \right| \leq \frac{C \|f\|_\infty}{t}.$$

W. Oçafrain a étendu toutes ces notions dans sa thèse [Oça19] dans le cadre plus général des frontières mobiles, c.-à-d. dans le cadre où l'élément absorbant ∂ varie au cours du temps. Il a notamment considéré des cas où la frontière est périodique dans [Oça18] et dans un cadre plus général dans [Oça20b] où il établit des conditions semblables à celles de l'Hypothèse 1.36.

Nous allons à présent redéfinir ces notions dans ce contexte. Il est important de noter que puisque la frontière varie au cours du temps, cela nous amène à considérer des processus de Markov non-homogènes. Plus précisément, nous nous donnons une famille de sous-ensembles mesurables $A = (A_t)_{t \geq 0}$ de M représentant la frontière mobile absorbante du processus X . Notons $M_t := M \setminus A_t$ l'espace d'états du processus X au temps t . Comme dans le cas homogène, nous définissons

$$\tau_A := \inf\{t \geq 0 : X_t \in A_t\} \tag{1.12}$$

comme le temps d'atteinte de la frontière A par X . Nous nous plaçons dans un contexte où ce temps d'atteinte est un temps d'arrêt. C'est le cas si nous supposons, par exemple, que les A_t sont fermés et que le processus X a ses trajectoires càdlàg.

Nous notons encore $\mathbb{P}_{s,x}$ la loi du processus X sous les conditions initiales s, x , i.e. $\mathbb{P}_{s,x}(X_s = x) = 1$. Nous supposons aussi que pour tout $s \leq t$ et tout $x \in M_s$,

$$\mathbb{P}_{s,x}(t < \tau_A) > 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{s,x}(\tau_A < \infty) = 1$$

Définition 1.42. Dans le contexte des frontières mobiles, on a les définitions suivantes.

1. Si la famille de probabilités $(\mathbb{Q}_{s,x})_{s \geq 0, x \in M_s}$ définie par

$$\mathbb{Q}_{s,x}(B) := \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{s,x}(B \mid T < \tau_A), \quad \text{pour tout } B \in \mathcal{F}_{s,t} := \sigma(X_u : s \leq u \leq t)$$

existe, alors le processus $((X_t)_{t \geq 0}, (\mathbb{Q}_{s,x})_{s \geq 0, x \in M_s})$ est le Q -processus.

2. Une probabilité β est une distribution quasi-ergodique s'il existe une distribution

initiale μ telle que pour toute fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée,

$$\mathbb{E}_{0,\mu} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(X_s) ds \mid t < \tau_A \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \beta(f).$$

Remarque 1.43. Il a été démontré dans [Oça18, Proposition 1] que la généralisation naturelle de la notion de QSD,

$$\mathbb{P}_{s,\alpha}(X(t) \in \cdot \mid t < \tau_A) = \alpha(\cdot), \quad \text{pour tout } t \geq s,$$

n'est pas pertinente dès que les frontières sont mobiles. En effet, dans ce cas-là de tels objets ne peuvent exister.

Nous supposons les conditions suivantes qui sont similaires à celles de l'Hypothèses 1.36 dans le cas des frontières mobiles.

Hypothèse 1.44. Il existe une famille de probabilités $(\nu_t)_{t \geq 0}$ telle que ν_t est définie sur M_t , un temps $t_0 \geq 0$ et deux constantes $c_1, c_2 > 0$ tels que

1. Pour tout $s \geq 0$ et $x \in M_s$,

$$\mathbb{P}_{s,x}(X_{s+t_0} \in \cdot \mid s + t_0 < \tau_A) \geq c_1 \nu_{s+t_0}(\cdot).$$

2. Pour tout $t \geq s$ et tout $x \in M_s$,

$$\mathbb{P}_{s,\nu_s}(t < \tau_A) \geq c_2 \mathbb{P}_{s,x}(t < \tau_A).$$

Ces conditions sont tirées de l'article [Oça20b]. Remarquons que l'auteur s'est inspiré des conditions plus générales de [CV18] dans lesquelles les constantes c_1, c_2 dépendent de s et qui peuvent amener à des vitesses de convergence sous-exponentielles.

De manière analogue au cas homogène, nous obtenons les mêmes genres de résultats qui sont résumés dans le théorème suivant.

Théorème 1.45. Supposons que l'Hypothèse 1.44 soit vérifiée. Alors,

1. Si la frontière est périodique, asymptotiquement périodique ou convergente, il existe une distribution quasi-ergodique pour le processus X .
2. Il existe un Q -processus pour le processus X .
3. Il existe deux constantes $C, \gamma > 0$ telles que, pour tout $s \leq t \leq T$, $x \in M_s$ et $B \in \mathcal{F}_{s,t}$,

$$|\mathbb{Q}_{s,x}(B) - \mathbb{P}_{s,x}(B \mid T < \tau_A)| \leq C e^{-\gamma(T-t)}.$$

Le point 1. est [Oça20b, Théorème 2] pour la frontière périodique ou asymptotiquement périodique et [Oça20a, Théorème 2] pour la frontière convergente, nous renvoyons le lecteur à ces deux articles pour les définitions précises de ces types de frontières. Le point 2. découle de [CV18, Théorème 3.3] et la dernière partie suit de [Oça20b, Théorème 1].

1.6 Qu'y a-t-il dans cette thèse ?

Le but de cette section est de présenter les résultats principaux de cette thèse.

1.6.1 Chaînes alimentaires de type Lotka-Volterra

Cette première partie a pour objectif de présenter ce qu'on appelle les *chaînes alimentaires de type Lotka-Volterra*. On verra dans les deux parties suivantes (1.6.2 et 1.6.3) qu'un des objectifs de cette thèse est d'étudier ce modèle, d'abord sous la forme d'une SDE et ensuite sous la forme d'un PDMP. Ce seront d'ailleurs les propos des Chapitres 2 et 3.

L'idée est de généraliser les équations de Lotka-Volterra du modèle proie-prédateur en un modèle de chaîne alimentaire. Ce qu'on va appeler une *chaîne alimentaire de type Lotka-Volterra* est le champ de vecteurs $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ défini par

$$G_i(x) := x_i F_i(x) \quad i = 1, \dots, n,$$

où $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est le champ de vecteurs défini par

$$F_i(x) := \begin{cases} a_{10} - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 & i = 1, \\ -a_{i0} + a_{i,i-1}x_{i-1} - a_{ii}x_i - a_{i,i+1}x_{i+1} & i = 2, \dots, n-1, \\ -a_{n0} + a_{n,n-1}x_{n-1} - a_{nn}x_n & i = n, \end{cases} \quad (1.13)$$

avec $a_{11}, a_{ij} > 0$ pour $i \neq j$ et $a_{ii} \geq 0$ pour $i = 2, \dots, n$.

Notons que a_{ii} représente le taux de compétition intra-espèce de l'espèce i , a_{i0} son taux de mortalité (ou son taux de croissance pour l'espèce 1), $a_{i,i-1}$ son taux de prédation de l'espèce $i-1$ et $a_{i,i+1}$ son taux de mortalité dû au prédateur $i+1$.

Les premiers à avoir considéré un tel modèle sont T. Gard et T. Hallam en 1979 dans [GH79]. Ils ont considéré le cas déterministe, c.-à-d. le modèle sous la forme d'une équation différentielle ordinaire

$$\dot{X}(t) = G(X(t)), \quad (1.14)$$

en faisant également l'hypothèse qu'il n'y a pas de compétition inter-espèce, i.e. $a_{ii} = 0$ pour $i = 2, \dots, n$. Ils ont montré que la persistance des espèces est équivalente à la positivité d'une constante dépendante, bien entendu, des paramètres du modèle.

En fait, cette constante est intimement liée au point d'équilibre de F , i.e. un point $p \in \mathbb{R}^n$ tel que $F(p) = 0$. Il est facile de voir que cet équilibre existe et est unique. On dira d'ailleurs qu'il est *positif* si $p \in \mathbb{R}_{++}^n$.

Un premier résultat en ce sens est [HS98, Théorème 5.3.1] de J. Hofbauer et K. Sigmund qui stipule que si ce point d'équilibre est positif, alors peu importe la condition initiale $x \in \mathbb{R}_{++}^n$, la solution va converger vers ce point. Ce résultat est résumé dans le théorème suivant.

Théorème 1.46. *Notons $X^x(t)$ la solution de (1.14) sous la condition initiale $x \in \mathbb{R}_{++}^n$ et p le point d'équilibre de F . Si p est positif, alors*

$$X^x(t) \rightarrow p.$$

Définition 1.47. *On dit qu'un point y d'un processus X est globalement asymptotique-*

ment stable *s'il satisfait la conclusion du théorème précédent.*

Notons $F|_k$ la restriction de F aux k premières espèces. Remarquons que $F|_1$ a toujours un point d'équilibre positif. En fait, si F n'a pas d'équilibre positif, il existe $k < n$ tel que $F|_i$ a un équilibre positif pour $i = 1, \dots, k$ et $F|_i$ non pour $i = k + 1, \dots, n$. On renvoie le lecteur au Lemme 2.34 pour plus de détails.

Supposons maintenant que F n'a pas d'équilibre positif et prenons k comme précédemment. Notons p^k le point d'équilibre de $F|_k$ et posons $p^* := (p_1^k, \dots, p_k^k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}_+^n$, alors la proposition suivante complète le théorème précédent. Il convient de noter qu'aux modestes connaissances de l'auteur, ce résultat est nouveau et il en assume donc pleinement la paternité.

Proposition 1.48. *Le point p^* est globalement asymptotiquement stable sur \mathbb{R}_{++}^n .*

Preuve. Prenons $c_1 > 0$ et définissons c_i par $c_{i-1} a_{i-1,i} = c_i a_{i,i-1}$ pour $i = 2, \dots, n$. Définissons également la fonction

$$V(x) := \sum_{i=1}^k c_i (x_i - p_i^* \ln(x_i)) + \sum_{i=k+1}^n c_i x_i.$$

On peut montrer que V est bien une fonction de Lyapunov (au sens classique des équations différentielles) en imitant la preuve du Théorème 5.3.1 de [HS98] et en utilisant le Lemme 2.34. □

Finalement, ce que nous dit ce résultat, c'est que si une espèce va mourir, alors toutes celles au-dessus d'elle dans la chaîne alimentaire vont aussi trépasser. On verra que dans les modèles bruités, un comportement similaire va se produire.

1.6.2 Modélisation des chaînes alimentaires de type Lotka-Volterra par des SDE

Cette partie présente les résultats du Chapitre 2 qui sont tirés de l'article [BBN22],

Stochastic persistence in degenerate stochastic Lotka-Volterra food chain, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B, Vol. 27, No. 11, November 2022, pp. 6841-6863,

élaboré en collaboration avec Michel Benaïm et Dang H. Nguyen.

Le but de l'article est d'étudier les chaînes alimentaires de type Lotka-Volterra sous la forme d'une SDE. Plus précisément, d'étudier sur \mathbb{R}_+^n la SDE

$$dX_i(t) = X_i(t)F_i(X(t)) dt + \sigma_i X_i(t) dB_t^i \quad i = 1, \dots, n,$$

où F est le champ de vecteurs défini par (1.13), $\sigma_i \geq 0$ sont des constantes et (B_t^1, \dots, B_t^n) est un vecteur de mouvements browniens indépendants. On remarque tout de suite que cette SDE est bien dans le cadre de celles de la Section 1.3.

On commence par noter que ce modèle a déjà été étudié par A. Hening et D. Nguyen dans le cas sans compétition inter-espèce dans [HN18c] et dans le cas où elle est présente

dans [HN18b]. Mais alors quel est l'intérêt de l'étudier à nouveau ? En fait, c'est parce qu'ils ont considéré seulement le cas non-dégénéré. Ainsi, le but de cet article est de montrer qu'on retrouve les mêmes genres de résultats dans le cas dégénéré.

Pour avoir la dégénérescence du système, on va supposer qu'au moins un des σ_i est nul et bien entendu qu'ils ne le sont pas tous. On va même faire l'hypothèse que le bruit affecte au minimum la première ou la dernière espèce, i.e. $\sigma_1 > 0$ ou $\sigma_n > 0$. On a encore besoin de définir le champ de vecteurs

$$\tilde{F}_i := F_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2 \quad i = 1, \dots, n,$$

qui est le champ de vecteurs de la SDE sous la forme Stratonovich. D'une certaine manière, \tilde{F} va jouer le rôle analogue à F (défini par (1.13)) dans le cadre de la SDE. On peut enfin présenter le théorème suivant qui traite du cas de la persistance et qui est la combinaison des Théorèmes 2.6 et 2.7.

Théorème 1.49. *Supposons que $\sigma_1 > 0$ ou $\sigma_n > 0$ et que \tilde{F} possède un équilibre positif. Alors,*

- (a) *Il existe une unique probabilité invariante Π sur \mathbb{R}_{++}^n qui est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n et dont la densité est \mathcal{C}^∞ .*
- (b) *Pour toute $f \in L^1(\Pi)$ et tout $x \in \mathbb{R}_{++}^n$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \Pi_t^x f = \Pi f$ presque sûrement.*
- (c) *Le semi-groupe $(P_t)_t$ converge vers Π en variation totale.*
 - *S'il existe $1 < i \leq n$ tel que $a_{ii} = 0$, alors la vitesse de convergence est au moins polynomiale.*
 - *Si $a_{ii} > 0$ pour tout i , alors la vitesse de convergence est exponentielle.*

Nous avons aussi obtenu des résultats pour le cas de l'extinction. À noter quand même qu'une partie avait déjà été faite dans [HN18c, HN18b] et c'est pourquoi ces résultats sont seulement partiels et complémentaires aux leurs. Notons pour $1 \leq k < n$, $\mathbb{R}_+^{(k)} := \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid x_1, \dots, x_k \geq 0, x_{k+1}, \dots, x_n = 0\}$ et $\mathbb{R}_{++}^{(k)} := \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid x_1, \dots, x_k > 0, x_{k+1}, \dots, x_n = 0\}$. Le théorème suivant est le Théorème 2.11.

Théorème 1.50. *Supposons qu'il existe $1 \leq k < n$ tel que $\tilde{F}|_k$ possède un équilibre positif et $\tilde{F}|_{k+1}$ non avec la particularité que la $k+1$ -ème coordonnée de son point d'équilibre est strictement négative. Supposons de plus que $\sigma_1 > 0$ ou $\sigma_k > 0$. Alors,*

- (a) $\mathcal{P}_{inv}(\mathbb{R}_+^n) = \mathcal{P}_{inv}(\mathbb{R}_+^{(k)})$ et $\mathcal{P}_{inv}(\mathbb{R}_{++}^{(k)}) = \{\Pi\}$.
- (b) *Si $a_{ii} > 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, le semi-groupe $(P_t(x, \cdot))_t$ converge faiblement vers $\Pi(\cdot)$ pour toute condition initiale $x \in \mathbb{R}_{++}^n$.*

Remarque 1.51. *Par souci de complétude, nous allons donner ici les résultats principaux de [HN18c, HN18b] sur l'extinction. Sous les conditions du théorème précédent,*

- (a) *S'il existe $1 < i \leq n$ tel que $a_{ii} = 0$, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x[X_j(s)] ds = 0$ pour tout $j = k+1, \dots, n$ et toute condition initiale $x \in \mathbb{R}_{++}^n$.*

(b) Si $a_{ii} > 0$ pour tout i , alors les espèces k, \dots, n vont s'éteindre presque sûrement et la vitesse de convergence est exponentielle.

Dans le cas de la persistance, il faut noter que les vitesses de convergence obtenues ne se déduisent pas du Théorème 1.24 étant donné que notre modèle ne satisfait pas ses hypothèses. C'est pourquoi nous avons dû déterminer d'autres conditions qui assurent des vitesses de convergence.

Pour cela, on se place dans le cadre où F est \mathcal{C}^∞ mais pas forcément une chaîne alimentaire de type Lotka-Volterra. L'idée est de renforcer les conditions sur la fonction de Lyapunov de la Proposition 1.16 et de construire de nouvelles fonctions de Lyapunov. Comme ce sont des constructions très techniques, nous ne les détaillerons pas ici et c'est pourquoi nous renvoyons le lecteur à la Section 2.4.

On note tout de même que nous aurons à nouveau besoin de la condition (1.6) ainsi que d'un point $x^* \in \Gamma_{\mathbb{R}_+^n} \cap \mathbb{R}_+^n$ satisfaisant la condition forte de Hörmander pour ces constructions.

Cependant, afin de tout de même donner un énoncé succinct, nous allons définir pour une fonction $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ et une mesure μ , la f -norme par

$$\|\mu\|_f := \sup\{|\mu g| \mid g : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable bornée, } |g| < f\}.$$

Le premier théorème donne des taux polynomiaux tandis que le second considère des taux exponentiels, ce sont, respectivement, les Théorèmes 2.24 et 2.25.

Théorème 1.52. *Sous les bonnes hypothèses de renforcement des fonctions de Lyapunov (c.f. Théorème 2.24), il existe une fonction \mathcal{C}^2 propre $W : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ et une constante $\beta > 0$ telles que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\beta \|P_t(x, \cdot) - \Pi(\cdot)\|_W = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n.$$

Théorème 1.53. *Si on renforce encore les hypothèses du théorème précédent (c.f. Théorème 2.25), il existe une fonction continue propre $\widehat{W} : \mathbb{R}_+^n \rightarrow [1, \infty[$ et une constante $\varsigma > 0$ telles que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\varsigma t} \|P_t(x, \cdot) - \Pi(\cdot)\|_{\widehat{W}} = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n.$$

En particulier, nous verrons que ces convergences impliquent celle en variation totale.

1.6.3 Modélisation des chaînes alimentaires de type Lotka-Volterra par des PDMP

Cette partie présente les résultats du Chapitre 3 qui sont tirés de mon article [Bou23],

Persistence in randomly switched Lotka-Volterra food chains, ESAIM: Probability and Statistics, 27:324–344, 2023.

L'objectif de cet article est de comprendre comment se comporte les chaînes alimentaires de type Lotka-Volterra dans le cadre des PDMP et plus précisément dans celui de la Section 1.4.

On considère $E := \{1, \dots, N\}$ l'ensemble des environnements possibles et on suppose que chacun modélise une chaîne alimentaire de type Lotka-Volterra, c.-à-d. pour tout $j \in E$, on considère le champ de vecteurs

$$G_i^j(x) := x_i F_i^j(x), \quad i = 1, \dots, n,$$

avec

$$F_i^j(x) := \begin{cases} a_{10}^j - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 & i = 1, \\ -a_{i0}^j + a_{i,i-1}x_{i-1} - a_{ii}x_i - a_{i,i+1}x_{i+1} & i = 2, \dots, n-1, \\ -a_{n0}^j + a_{n,n-1}x_{n-1} - a_{nn}x_n & i = n, \end{cases}$$

où $a_{i0}^j, a_{11}, a_{ik} > 0$ pour $i \neq k, k \neq 0$ et $a_{ii} \geq 0$ pour $i = 1, \dots, n$.

Le premier résultat que nous démontrons est la proposition suivante. Il s'agit de la Proposition 3.1.

Proposition 1.54. *Il existe un compact $B \subset \mathbb{R}_+^n$ tel que $B \times E$ est positivement invariant pour le PDMP engendré par les G^j . De plus, avec probabilité 1, le processus va entrer dans ce compact en temps fini.*

On va considérer ici le cas où il existe un changement d'environnements qui affecte uniquement la première espèce. Cela va modéliser par exemple l'ajout de nutriments qui ne peuvent être mangés que par cette espèce. Plus précisément, on a l'hypothèse suivante.

Hypothèse 1.55. *Il existe deux environnements $\beta_1, \beta_2 \in E$ tels que*

$$\begin{cases} a_{10}^{\beta_1} \neq a_{10}^{\beta_2}, \\ a_{i0}^{\beta_1} = a_{i0}^{\beta_2} \quad \text{pour } i = 2, \dots, n. \end{cases}$$

Comme le processus de sauts J est irréductible sur E , nous notons $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N)$, $\nu_j > 0$, son unique probabilité invariante. Nous définissons le *champ de vecteurs moyen* par

$$G^\nu := \sum_{j=1}^N \nu_j G^j.$$

Nous définissons F^ν et a_{ij}^ν de la même manière. Remarquons d'ailleurs que G^ν reste une chaîne alimentaire de type Lotka-Volterra et nous verrons que F^ν jouera le rôle analogue à (1.13) dans le cas des PDMP.

Comme à la Sous-Section 1.6.1, on définit pour $k < n$, $F|_k^\nu$ la restriction de F^ν à k espèces. On note K comme étant le premier $k < n$ tel que $F|_K^\nu$ possède un équilibre positif et $F|_{K+1}^\nu$ non ou $K = n$ s'il n'existe pas un tel k . Nous notons aussi q^{*k} l'équilibre de $F|_k^\nu$.

Définissons la constante suivante qui sera liée au comportement de l'espèce $k+1$,

$$\mathcal{I}_{k+1}^- := -a_{k+1,0}^\nu + a_{k+1,k} q_k^{*k}.$$

Nous verrons dans la Sous-Section 2.6.2 que cette constante est positive si et seulement si $F|_{k+1}^\nu$ possède un équilibre positif. Définissons pour $1 \leq k < n$ les ensembles $B^k := \{x \in B \mid x_1, \dots, x_k \geq 0 \text{ et } x_{k+1}, \dots, x_n = 0\}$ et $B_+^k := \{x \in B \mid x_1, \dots, x_k > 0 \text{ et } x_{k+1}, \dots, x_n = 0\}$.

On peut enfin énoncer les résultats du Chapitre 3 qui sont, respectivement, les Théorèmes 3.5, 3.6 et 3.7.

Théorème 1.56 (Persistence). *Supposons que l'Hypothèse 1.55 soit vérifiée et que $K = n$. Alors,*

- (a) *Il existe une unique probabilité invariante Π sur $B_+ \times E$.*
- (b) *Π est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $B \times E$ et pour toute condition initiale $(x, j) \in B_+ \times E$, $\Pi_t^{(x,j)}$ converge faiblement vers Π p.s. lorsque t tend vers l'infini.*
- (c) *Il existe une fonction continue $W : B_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{x \rightarrow \partial B} W(x) = \infty$ et des constantes $\rho, C > 0$ telles que pour toute condition initiale $(x, j) \in B_+ \times E$,*

$$\|P_t((x, j), \cdot) - \Pi(\cdot)\|_{TV} \leq C(1 + W(x))e^{-\rho t}.$$

Théorème 1.57 (Extinction). *Supposons que l'Hypothèse 1.55 soit vérifiée, que $K = k < n$ et que $\mathcal{I}_{k+1}^- < 0$. Alors,*

- (i) *$\mathcal{P}_{inv}(B \times E) = \mathcal{P}_{inv}(B^k \times E)$ et il existe une unique probabilité invariante Π^k sur $B_+^k \times E$.*
- (ii) *Les espèces $k+1, k+2, \dots, n$ vont s'éteindre presque sûrement exponentiellement vite et les taux d'extinction sont $\mathcal{I}_{k+1}^-, -a_{k+2,0}^\nu, \dots, -a_{n,0}^\nu$ respectivement.*
- (iii) *Pour tout $(x, j) \in B_+ \times E$, le semi-groupe $P_t((x, j), \cdot)$ converge faiblement vers $\Pi^k(\cdot)$.*

Théorème 1.58 (Cas critique). *Supposons que l'Hypothèse 1.55 soit vérifiée, que $K = k < n$ et que $\mathcal{I}_{k+1}^- = 0$. Alors,*

- *Les espèces $1, \dots, k$ sont persistantes en moyenne, i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X_i(s) ds = q_i^{*k}$ pour $i = 1, \dots, k$.*
- *Les espèces $k+2, k+3, \dots, n$ vont s'éteindre presque sûrement exponentiellement vite et les taux d'extinction sont $-a_{k+2,0}^\nu, -a_{k+3,0}^\nu, \dots, -a_{n,0}^\nu$ respectivement.*
- *$\mathcal{P}_{inv}(B_+^{k+1} \times E)$ est vide et les points limites faibles de (Π_t) sont presque sûrement dans $\mathcal{P}(B^k \times E)$. De plus, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X_{k+1}(s) ds = 0$.*

Il est intéressant de noter que le cas critique n'a pas fait l'objet de beaucoup d'études, mais on peut tout de même citer [NS20].

Finalement, la Section 3.5 établit quelques résultats sur la sensibilité du modèle aux paramètres. Supposons que nous perturbons les paramètres des F^j de manière à ce que chaque paramètre dépende de l'environnement, c.-à-d. que a_{ik} deviennent \tilde{a}_{ik}^j pour $k \neq 0$ et $a_{i0}^j = \tilde{a}_{i0}^j$ sinon. Notons \tilde{F}^j ces nouveaux champs de vecteurs et remarquons que les \tilde{G}^j associés via (1.7) sont encore des chaînes alimentaires de type Lotka-Volterra. On fera référence au modèle non-perturbé pour le PDMP engendré par les G^j et le modèle perturbé pour celui engendré par les \tilde{G}^j .

Comme nous n'avons qu'un nombre fini de paramètres, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$|a_{im}^j - \tilde{a}_{im}^j| \leq \varepsilon \quad \forall i, m \text{ et } \forall j \in E.$$

Nous montrons dans la Proposition 3.27 que si ε est suffisamment petit, le modèle perturbé et le modèle non-perturbé ont les mêmes signes pour les taux d'invasion. Donc, si ε est suffisamment petit et si le modèle non-perturbé est dans le cas persistant, alors le modèle perturbé est aussi dans ce cas-là. Remarquons que cela fonctionne aussi pour le cas de l'extinction et que ce sont les mêmes espèces qui survivent ou qui s'éteignent.

Notons aussi que nous ne pouvons rien dire sur le cas critique puisqu'en perturbant le modèle, nous ne sommes plus capables de calculer \mathcal{I}_{k+1}^- qui, nous le verrons (c.f. Proposition 3.23), dépend des taux d'invasion. Ainsi, nous ne pouvons pas déterminer si cette constante restera nulle ou non.

1.6.4 Quasi-stationnarité avec frontières mobiles aléatoires

Cette partie présente les résultats du Chapitre 4 élaborés en collaboration avec William Oçafrain. Même si ce chapitre prend la forme d'un article, les résultats n'ont pas encore été ni publiés, ni soumis à un journal, ni même postés sur Arxiv. Une des raisons à cela est que ces résultats sont en cours de généralisation, ceci en collaboration avec William Oçafrain et Oliver Tough.

L'objectif de ce chapitre est de généraliser la notion de frontières mobiles en la notion de frontières mobiles aléatoires. On considère ici la situation où il y a un nombre fini de frontières possibles et on suppose que la frontière absorbante change de manière aléatoire au cours du temps parmi celles-là. Notre but est de définir des conditions semblables à celles de l'Hypothèse 1.44 afin d'obtenir des résultats similaires à ceux du Théorème 1.45.

Plus précisément, nous considérons $((X_t)_{t \geq 0}, (\mathbb{P}_{s,x})_{s \geq 0, x \in E}, (\mathcal{F}_{s,t})_{s \leq t})$ un processus de Markov vivant sur un espace d'états polonais E . Nous considérons également N sous-ensembles de E , $(A_i)_{i=1, \dots, N}$ et nous notons $\Lambda := \{1, \dots, N\}$. Nous allons commencer par considérer $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \Lambda$ une fonction càdlàg et nous lui associons la frontière mobile déterministe $(A_{w_t})_{t \geq 0}$. Nous notons

$$\tau_w := \inf\{t \geq 0 : X_t \in A_{w_t}\}$$

le temps d'atteinte de cette frontière mobile. Comme à la Section 1.5, nous supposons que nous sommes dans les bons cas pour que τ_w soit un temps d'arrêt pour tout w . L'hypothèse suivante assurera que le modèle présenté dans la suite sera bien défini.

Hypothèse 1.59. *Pour toute fonction càdlàg $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \Lambda$, $s \geq 0$ et $x \in E_{w_s}$,*

$$\mathbb{P}_{s,x}(\tau_w < +\infty) = 1,$$

et pour tout $s \leq t$ et $x \in E_{w_s}$,

$$\mathbb{P}_{s,x}(\tau_w > t) > 0.$$

Nous pouvons maintenant établir l'hypothèse principale de ce chapitre.

Hypothèse 1.60. *Il existe $c_1, c_2 > 0$ et $t_0 \geq 0$ tels que, pour toute fonction càdlàg $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \Lambda$, il existe une famille de probabilités $(\nu_t^{(w)})_{t \geq 0}$ telle que pour tout $t \geq 0$, $\nu_t^{(w)}$ est définie sur E_{w_t} et telle que*

- *Pour tout $s \geq 0$ et tout $x \in E_{w_s}$,*

$$\mathbb{P}_{s,x}(X_{s+t_0} \in \cdot \mid \tau_w > s + t_0) \geq c_1 \nu_{s+t_0}^{(w)}(\cdot).$$

- Pour tout $s \leq t$ et tout $x \in E_{w_s}$,

$$\mathbb{P}_{s, \nu_s^{(w)}}(\tau_w > t) \geq c_2 \mathbb{P}_{s,x}(\tau_w > t).$$

On remarque tout de suite que cette hypothèse demande que l'Hypothèse 1.44 soit vraie pour toute fonction càdlàg w .

Pour générer de l'aléa, on va se donner un processus de sauts irréductible $(I_t)_{t \geq 0}$ sur Λ et on lui associe la famille de probabilités $(\hat{\mathbb{P}}_i)_{i \in \Lambda}$ telle que $\hat{\mathbb{P}}_i(I_0 = i) = 1$. On note I^∞ l'ensemble de ses trajectoires. Pour $w \in I^\infty$, $t \geq s$, et $\mu \in \mathcal{P}(E_{w_s})$, on définit

$$\phi_{w,t,s}(\mu) := \mathbb{P}_{s,\mu}(X_t \in \cdot \mid \tau_w > t),$$

le flot associé à cette frontière. Ainsi pour $i \in \Lambda$ et $\mu \in \mathcal{P}(E_i)$, on peut définir le processus $(Y_t)_{t \geq 0}$ par $Y_0 := \mu$, $I_0 := i$ et pour tout $t \geq 0$ par

$$Y_t := \phi_{(I_s)_{s \geq 0}, t, 0}(Y_0).$$

Notons que ce processus est bien défini grâce à l'Hypothèse 1.59. Ainsi, le processus $(Y_t, I_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Markov sur $\mathcal{P}(E) \times \Lambda$ et on note $(\hat{P}_t)_{t \geq 0}$ son semi-groupe.

On définit maintenant la distance de Wasserstein sur $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E) \times \Lambda)$ pour $\Gamma, \Delta \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E) \times \Lambda)$ par

$$\mathcal{W}_1(\Gamma, \Delta) := \inf_{((\mu, I^\mu), (\nu, I^\nu)) \in \Pi_{\Gamma, \Delta}} \mathbb{E}(\|\mu - \nu\|_{TV} + \mathbf{1}_{I^\mu \neq I^\nu}),$$

où $\Pi_{\Gamma, \Delta}$ est l'ensemble des couplages entre Γ et Δ .

On peut à présent énoncer le premier résultat de ce chapitre qui assure l'existence et l'unicité de la probabilité invariante pour le processus $(Y_t, I_t)_{t \geq 0}$ ainsi que la convergence exponentielle en Wasserstein de $(\hat{P}_t)_t$ vers cette probabilité invariante. Il s'agit du Théorème 4.5.

Théorème 1.61. *Sous les Hypothèses 1.59 et 1.60, il existe une unique probabilité invariante Π sur $\mathcal{P}(E) \times \Lambda$ telle que pour tout $t \geq 0$, $i \in \Lambda$ et $\mu \in \mathcal{P}(E_i)$,*

$$\mathcal{W}_1(\hat{P}_t((\mu, i), \cdot), \Pi(\cdot)) \leq C e^{-\gamma t},$$

pour certaines constantes $C, \gamma > 0$.

Le second résultat assure, sous les Hypothèses 1.59 et 1.60, l'existence d'un Q -processus et d'une distribution quasi-ergodique pour le processus X . Notons que ces objets sont définis comme à la Définition 1.42 avec $\tau_I := \inf\{t \geq 0 \mid X_t \in A_{I_t}\}$ au lieu de τ_A . C'est le Théorème 4.6.

Théorème 1.62. *Supposons que les Hypothèses 1.59 et 1.60 sont vérifiées. Alors, pour tout $i \in \Lambda$, il existe $\hat{\mathbb{P}}_i$ -presque sûrement un Q -processus et une distribution quasi-ergodique pour le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ absorbé par la frontière mobile aléatoire $(A_{I_t})_{t \geq 0}$.*

Remarque 1.63. *Toutes ces définitions et tous ces résultats restent valides en temps discret.*

Nous avons ensuite appliqué ces résultats dans le contexte des chaînes de Markov discrètes sur un espace d'états fini. Si nous supposons que $\tilde{E} := \bigcap_{i=1}^N E_i \neq \emptyset$, que la chaîne est irréductible sur \tilde{E} et qu'il y a certaine sorte d'irréductibilité sur E , alors nous montrons que les Hypothèses 1.59 et 1.60 sont vérifiées.

Plan de la thèse

Cette thèse est organisée comme suit.

- Le Chapitre 2 est tiré de l'article [BBN22]. Nous définissons les chaînes alimentaires de type Lotka-Volterra sous la forme d'une SDE dégénérée en donnant des critères pour la persistance et l'extinction. Nous établissons aussi des critères plus généraux sur un type de SDE afin d'obtenir des vitesses de convergence et nous appliquons ensuite ces critères dans ce contexte.
- Le Chapitre 3 est tiré de l'article [Bou23] et nous considérons aussi les chaînes alimentaires de type Lotka-Volterra mais sous le prisme des PDMP cette fois. En plus de discuter de la persistance et de l'extinction, nous traitons aussi du cas critique ainsi que la sensibilité du modèle aux paramètres.
- Au Chapitre 4, nous nous intéressons à la quasi-stationnarité avec frontières mobiles aléatoires. Nous redéfinissons notamment les notions de Q -processus et de distribution quasi-ergodique dans ce contexte. Nous établissons également des critères pour l'existence de tels objets.

Chapter 2

Stochastic persistence in degenerate stochastic Lotka-Volterra food chains

This chapter is based on the article [BBN22] which is a joint work with Michel Benaïm and Dang H. Nguyen. It has been published in Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B, Vol. 27, No. 11, November 2022, pp. 6841-6863.

Abstract

We consider a Lotka-Volterra food chain model with possibly intra-specific competition in a stochastic environment represented by stochastic differential equations. In the non-degenerate setting, this model has already been studied by A. Hening and D. Nguyen in [HN18b, HN18c] where they provided conditions for stochastic persistence and extinction. In this paper, we extend their results to the degenerate situation in which the top or the bottom species is subject to random perturbations. Under the persistence condition, there exists a unique invariant probability measure supported by the interior of \mathbb{R}_+^n having a smooth density.

Moreover, we study a more general model, in which we give new conditions which make it possible to characterize the convergence of the semi-group towards the unique invariant probability measure either at an exponential rate or at a polynomial one. This will be used in the stochastic Lotka-Volterra food chain to see that if intra-specific competition occurs for all species, the rate of convergence is exponential while in the other cases it is polynomial.

Keywords Markov processes; stochastic differential equations; stochastic persistence; Lotka-Volterra food chains; prey-predator; Hörmander condition; rate of convergence; degenerate noise

2020 MSC 60J60, 60H10, 37H15, 92D25

2.1 Introduction

We consider a stochastic food chain model with n species. Species n is the apex predator which hunts species $n-1$ which is in turn the predator of species $n-2$ which hunts species $n-3$ and so on until species 1 which is at the bottom of the food chain.

More precisely, the model is given by the following (possibly degenerate) Lotka-Volterra food chain stochastic differential equation on $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$,

$$dX_i(t) = X_i(t)F_i(X(t)) dt + \sigma_i X_i(t) dB_t^i \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

whereby

$$F_i(x) = \begin{cases} a_{i0} - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 & i = 1, \\ -a_{i0} + a_{i,i-1}x_{i-1} - a_{ii}x_i - a_{i,i+1}x_{i+1} & i = 2, \dots, n-1, \\ -a_{n0} + a_{n,n-1}x_{n-1} - a_{nn}x_n & i = n, \end{cases} \quad (2.2)$$

with $a_{11}, a_{ij} > 0$ for $i \neq j$, $a_{ii} \geq 0$, $\sigma_i \geq 0$ for $i = 1, \dots, n$ and $(B_t^1, \dots, B_t^n)_{t \geq 0}$ a vector of independent Brownian motions.

The quantity $X_i(t)$ represents the density of species i at time t , a_{ii} its intra-specific competition rate, a_{i0} its death rate (or growth rate for species 1), $a_{i,i-1}$ the rate at which it hunts species $i-1$, and $a_{i,i+1}$ the rate at which it is hunted by species $i+1$. In addition, the capital growth rate of species i is subject to environmental fluctuations whose variance is measured by σ_i^2 .

In the deterministic case (i.e. $\sigma_i = 0$ for all i), this model was first considered by T. Gard and T. Hallam in the late seventies in [GH79] when there is no intra-specific competition (i.e. $a_{ii} = 0$ for all $i \geq 2$). They gave a criterion based uniquely on the coefficients a_{ij} for persistence and extinction.

Equation (2.1) with non-zero σ_i s, is a natural way to incorporate random fluctuations in the growth rate. Although the choice of a constant variance σ_i^2 seems oversimplified as commented on in [All16], stochastic models with linear diffusion terms have been used extensively by biologists for predicting population dynamics and estimating extinction likelihoods in [DMS91, Fol94, LES03]. They were also used to explore how stochasticity can facilitate or inhibit the persistence of populations, coexistence of interacting species or genotypes; see e.g. [ERSS13, Sch12a] and the references therein.

Following this line, A. Hening and D. Nguyen in [HN18b, HN18c] studied (2.1) in the non-degenerate case (i.e. $\sigma_i \neq 0$ for all i) and provided general conditions for persistence and extinction.

The main purpose of this paper is to extend their results to the degenerate setting whereby some but not all of the σ_i s are 0. This is motivated by the fact that environmental fluctuations may have different impacts to different species in an ecological system. For instance, some species, perhaps because of their biological nature, may be negligibly affected by the sources of environmental randomness under consideration.

We will focus our attention here on the specific case whereby the noise affects at least the top or bottom species (meaning that $\sigma_1 \neq 0$ or $\sigma_n \neq 0$) and show that the conditions given in [HN18b, HN18c] ensuring persistence of the process remain valid. Here by persistence we mean that:

- (a) There exists a unique invariant probability measure on $\mathbb{R}_{++}^n := \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \prod_{i=1}^n x_i > 0\}$ called the *persistent measure*.
- (b) Whenever the initial condition lies in \mathbb{R}_{++}^n , the process converges (in distribution) to the persistent measure.

Another key question is to understand the rate of this convergence and how this rate is determined by the model parameters. We will see here that positive intra-specific rates (i.e. $a_{ii} > 0$ for all i) ensure an exponential rate of convergence (exactly like in the non-degenerate case ([HN18a] [HN18b])) whilst, if some of the rates are zero (i.e. $a_{ii} = 0$ for some i), one can only ensure a polynomial rate of convergence. This will be established

in Section 2.4, in a general framework providing new results that can be applied beyond Lotka-Volterra food chain models.

Outline of contents The first part of Section 2.2 is devoted to some preliminaries and notations. We present the main results of this paper in the second part. More precisely, under some conditions, we characterize the persistence of all species and the rates of convergence to a unique invariant probability measure. We also provide criteria for the extinction of some species. The first part of Section 2.3 is devoted to the introduction of some mathematical tools and follows [Ben18]. In particular, we provide a very useful criterion which ensures the persistence. In the second part, we prove Theorem 2.6, which provides conditions for stochastic persistence.

In section 2.4, we shall prove general results on the rates of convergence of the semi-group towards the unique invariant probability measure. We will then use these to prove Theorem 2.7, which characterizes the convergence rates of our model. We will see that the intra-specific competition will give an exponential rate whereas without it we will only have a polynomial one. Section 2.5 then focuses on the case of extinction of at least one species. The appendix (Section 2.6) contains some technical proofs of Section 2.2 and 2.3 for convenience.

2.2 Notations and results

2.2.1 Notations

Throughout the paper, we let

$$\mathbb{R}_{++}^n := \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n \mid \prod_{i=1}^n x_i > 0 \right\} \quad \text{and} \quad \partial\mathbb{R}_+^n := \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n \mid \prod_{i=1}^n x_i = 0 \right\}$$

denote, respectively, the interior and the boundary of \mathbb{R}_+^n . For $1 \leq j < n$, we define \mathbb{R}_+^j and \mathbb{R}_{++}^j in the same way and we also define

$$\mathbb{R}_+^{(j)} := \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n \mid x_1, \dots, x_j \geq 0, x_{j+1}, \dots, x_n = 0 \right\}$$

and

$$\mathbb{R}_{++}^{(j)} := \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n \mid x_1, \dots, x_j > 0, x_{j+1}, \dots, x_n = 0 \right\}.$$

We let $(X^x(t))_{t \geq 0}$ denote the solution to (2.1) with initial condition $X^x(0) = x$ and $(P_t)_{t \geq 0}$ denote its transition kernel defined by $P_t f(x) := \mathbb{E}[f(X^x(t))]$ for every measurable bounded function $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ and by $P_t(x, B) := P_t \mathbf{1}_B(x)$ for all Borel set $B \subset \mathbb{R}_+^n$.

A Borel set B is called *invariant* if

$$P_t \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_B$$

for all $t \geq 0$.

Given an invariant set $A \subset \mathbb{R}_+^n$ (typically $A = \mathbb{R}_{++}^n$ or $A = \partial\mathbb{R}_+^n$), we let $\mathcal{P}_{inv}(A)$ (resp. $\mathcal{P}_{erg}(A)$) denote the *set of invariant* (resp. *ergodic*) *probability measure* of the process that are supported by A , i.e. $\mu(A) = 1$ for $\mu \in \mathcal{P}_{inv}(A)$ (resp. for $\mu \in \mathcal{P}_{erg}(A)$). Recall that an invariant probability measure μ is *ergodic* if for every invariant Borel set B , $\mu(B) \in \{0, 1\}$.

We also let $(\Pi_t^x)_{t \in \mathbb{R}_+}$ denote the *set of empirical occupation measures* of the process $(X^x(t))$ with initial condition $x \in \mathbb{R}_+^n$, that is

$$\Pi_t^x(\cdot) := \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X^x(s) \in \cdot\}} ds.$$

For a function $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ and a measure μ , we write $\mu f := \int f(x) \mu(dx)$.

Recall that the *total variation distance* between two probability measures μ, ν on \mathbb{R}_+^n is defined by

$$\|\mu - \nu\|_{TV} := \sup\{|\mu f - \nu f| \mid f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ measurable bounded, } \|f\|_\infty < 1\}.$$

In the same manner, for $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, we define the *f-norm* by

$$\|\mu\|_f := \sup\{|\mu g| \mid g : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ measurable bounded, } |g| < f\}.$$

Remark that when $f = 1$, it is the total variation norm.

We say that a map $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ is *proper* if $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

2.2.2 Preliminaries

We start this part by rewriting (2.1) in the Stratonovich formalism

$$dX_i(t) = X_i(t) \tilde{F}_i(X(t)) dt + \sigma_i X_i(t) \circ dB_t^i \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

where

$$\tilde{F}_i(x) = F_i(x) - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

Remark 2.1. If we let $\tilde{a}_{10} = a_{10} - \frac{1}{2} \sigma_1^2$, $\tilde{a}_{i0} = a_{i0} + \frac{1}{2} \sigma_i^2$ for $i \geq 2$ and $\tilde{a}_{ij} = a_{ij}$ if $i \neq 0$, then \tilde{F} is defined by (2.2) with a_{ij} replaced by \tilde{a}_{ij} .

An equilibrium p^* for \tilde{F} given by (2.4) (i.e. $\tilde{F}(p^*) = 0$) is called *positive* if $p^* \in \mathbb{R}_{++}^n$. It turns out that the existence of a such point (which has to be unique) is a necessary and sufficient condition for stochastic persistence. Before stating our main theorems, we will give another equivalent condition of the existence of this positive equilibrium for \tilde{F} and we start by defining a parameter, called $\tilde{\delta}(n)$.

For $a, b, m \in \mathbb{N}$, $a \leq b$, we let $A_a^b(m)$ denote the set of permutations of $\{a, a+1, \dots, b-1, b\}$ that are product of m disjoint transpositions of the form $(i \ i+1)$ and we let

$$A_a^b := \bigcup_{m=0}^{\infty} A_a^b(m).$$

Remark that $A_a^b(m) = \emptyset$ if $m > \frac{b-a+1}{2}$. Now, we define

$$\tilde{\delta}(n) := \tilde{a}_{10} \prod_{j=2}^n \tilde{a}_{j,j-1} - \sum_{k=2}^n \tilde{a}_{k0} \prod_{l=k+1}^n \tilde{a}_{l,l-1} \sum_{\alpha \in A_1^{k-1}} \prod_{j=1}^{k-1} \tilde{a}_{j,\alpha(j)}.$$

Example 2.2.

$$\begin{aligned} A_1^3 &= \{Id_{\{1,2,3\}}, (1\ 2), (2\ 3)\}, \\ A_1^4 &= \{Id_{\{1,2,3,4\}}, (1\ 2), (2\ 3), (3\ 4), (1\ 2)(3\ 4)\}, \\ \tilde{\delta}(2) &= \tilde{a}_{10} \tilde{a}_{21} - \tilde{a}_{20} \tilde{a}_{11}, \\ \tilde{\delta}(3) &= \tilde{a}_{10} \tilde{a}_{32} \tilde{a}_{21} - \tilde{a}_{20} \tilde{a}_{32} \tilde{a}_{11} - \tilde{a}_{30} \tilde{a}_{22} \tilde{a}_{11} - \tilde{a}_{30} \tilde{a}_{12} \tilde{a}_{21}. \end{aligned}$$

Remark 2.3. If $\tilde{a}_{ii} = 0$ for $i \geq 2$, then $\tilde{\delta}(n) = \tilde{\kappa}(n) \prod_{i=2}^n \tilde{a}_{i,i-1}$ where $\tilde{\kappa}(n)$ is introduced in [HN18c]. In some sense, $\tilde{\delta}(n)$ can be seen as a generalisation of $\tilde{\kappa}(n)$, since it is also defined for $a_{ii} \geq 0$.

We can now state the link between the constant $\tilde{\delta}(n)$ and the nature of the equilibrium of \tilde{F} .

Proposition 2.4. $\tilde{\delta}(n) > 0 \iff \tilde{F}$ has a positive (necessarily unique) equilibrium p^* .

The proof is technical and postponed to Appendix 2.6.2. Moreover, since the existence of a positive equilibrium for \tilde{F} is a necessary and sufficient condition for stochastic persistence, so is the positivity of $\tilde{\delta}(n)$.

Remark 2.5. The proof of Proposition 2.4 provides an explicit formula for p^* . This extends the results in [HN18b] since it also provides an explicit formula for \mathcal{I}_n (as defined in [HN18b]). It is also interesting to note that by [HN18b, Proposition 3.1] $\tilde{\delta}(n)$ and \mathcal{I}_n have the same sign and as only the positivity of these two parameters is important, working with one or the other doesn't matter.

2.2.3 Main results

With the help of the previous parts, we can now state the stochastic persistence theorem.

Theorem 2.6. Suppose that $\sigma_1 > 0$ or $\sigma_n > 0$ and that $\tilde{\delta}(n) > 0$. Then

- (a) $\mathcal{P}_{inv}(\mathbb{R}_{++}^n) = \{\Pi\}$.
- (b) Π is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure of \mathbb{R}^n and its density is \mathcal{C}^∞ .
- (c) For all $f \in L^1(\Pi)$ and $x \in \mathbb{R}_{++}^n$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \Pi_t^x f = \Pi f$ a.s. and (P_t) converges to Π in total variation.

The next result specifies the rate of convergence of (P_t) toward Π .

Theorem 2.7. Suppose that $\sigma_1 > 0$ or $\sigma_n > 0$ and that $\tilde{\delta}(n) > 0$.

- (a) If $a_{ii} = 0$ for some $i = 2, \dots, n$, then there exists $q_0 > 1$ such that for all $1 < q < q_0$ there exists a proper \mathcal{C}^2 function $W_q : \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ such that for all $1 \leq \beta \leq q$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\beta-1} \|P_t(x, \cdot) - \Pi(\cdot)\|_{W_{\beta,q}} = 0, \quad x \in \mathbb{R}_{++}^n$$

where $W_{\beta,q} = W_q^{1-\beta/q}$.

(b) If $a_{ii} > 0$ for all i , then there exist $\varsigma > 0$ and a continuous proper function $\widehat{W} : \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow [1, \infty[$ such that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\varsigma t} \|P_t(x, \cdot) - \Pi(\cdot)\|_{\widehat{W}} = 0, \quad x \in \mathbb{R}_{++}^n.$$

Remark 2.8. Theorem 2.7 clearly implies convergence in total variation (take $\beta = q$ in (a) and note that $\widehat{W} \geq 1$ in (b)).

We have seen in the previous theorems that positivity of parameter $\widetilde{\delta}(n)$ ensures the persistence of all species. If we want to characterise extinction of at least one of them, we have to suppose that there exists $1 \leq i \leq n$ such that $\widetilde{\delta}(i) \leq 0$. Intuitively if species i goes extinct, species $i + 1$ must become extinct too since its only source of food is species i . Arguing in the same manner, we intuitively conclude that species $i + 2, \dots, n$ also must become extinct. This will be done in Lemma 2.34.

A. Hening and D. Nguyen already proved it in [HN18b, HN18c] in the degenerate and non-degenerate setting :

Theorem 2.9 (A. Hening, D. Nguyen 2018). *Suppose that there exists $1 \leq j^* < n$ such that $\widetilde{\delta}(j^*) > 0$ and $\widetilde{\delta}(j^* + 1) \leq 0$.*

(a) *If $a_{ii} = 0$ for some $i = 2, \dots, n$, then $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x[X_k(s)] ds = 0$, for $k = j^* + 1, \dots, n$ and all $x \in \mathbb{R}_{++}^n$. Moreover, for every $\varepsilon > 0$, there exists a compact set $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}_{++}^{(j^*)}$ such that for all $x \in \mathbb{R}_{++}^n$,*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}_x[(X_1(s), \dots, X_{j^*}(s)) \in K_\varepsilon] ds \geq 1 - \varepsilon.$$

(b) *If $a_{ii} > 0$ for all $i = 1, \dots, n$, then X_{j^*+1}, \dots, X_n go extinct almost surely exponentially fast and for every $\varepsilon > 0$, there exists a compact set $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}_{++}^{(j^*)}$ such that for all $x \in \mathbb{R}_{++}^n$,*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x[(X_1(t), \dots, X_{j^*}(t)) \in K_\varepsilon] \geq 1 - \varepsilon.$$

Moreover, if $\sigma_1, \dots, \sigma_{j^} > 0$, there exists a unique invariant probability measure Π supported by $\mathbb{R}_{++}^{(j^*)}$ such that for all $x \in \mathbb{R}_{++}^n$, $P_t(x, \cdot)$ converges weakly to $\Pi(\cdot)$, i.e. for all continuous bounded functions $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t f(x) = \Pi f(x).$$

Remark 2.10. Statement (a) of Theorem 2.9 is proved in [HN18c] in the case where $a_{ii} = 0$ for all $i \geq 2$. The proof easily extends verbatim to the present situation.

The next theorem complements the second assertion of Theorem 2.9.

Theorem 2.11. *Suppose that there exists $1 \leq j^* < n$ such that $\widetilde{\delta}(j^*) > 0$ and $\widetilde{\delta}(j^* + 1) \leq 0$ and moreover that $\sigma_1 > 0$ or $\sigma_{j^*} > 0$. Then*

(a) $\mathcal{P}_{inv}(\mathbb{R}_+^n) = \mathcal{P}_{inv}(\mathbb{R}_+^{(j^*)})$ and $\mathcal{P}_{inv}(\mathbb{R}_{++}^{(j^*)}) = \{\Pi\}$.

(b) If $a_{ii} > 0$ for all $i = 1, \dots, n$, $P_t(x, \cdot)$ converges weakly to $\Pi(\cdot)$ for all $x \in \mathbb{R}_{++}^n$.

Remark 2.12. In [HN18c], when except for the lowest tropic level, species have no intraspecific competition (that is, $a_{ii} = 0, i = 2, \dots, n$), the authors cannot show that $X_k(t), k \geq j^*$ converges to 0 exponentially fast with probability 1 if $\tilde{\delta}(j^*) > 0$ and $\tilde{\delta}(j^* + 1) \leq 0$ because it is not easy to show the tightness of the family of random occupation measures when $a_{ii} = 0, i = 2, \dots, n$.

Using newly-developed coupling techniques, one can obtain the exponential convergence of $X_k(t), k \geq j^*$ with probability 1. This result is beyond the scope of this paper and it will be reported in [BNN20].

2.3 Stochastic persistence

2.3.1 Some mathematical tools

In this section, we introduce some tools that will be needed for the proof of Theorem 2.6. We consider the general stochastic differential equation given by (2.1) under the assumption that F_i is \mathcal{C}^∞ but not necessarily of the form (2.2).

Let L and Γ_L respectively denote the *formal generator* and the *formal carré du champ* defined by

$$Lg(x) := \sum_{i=1}^n x_i F_i(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(x)$$

and

$$\Gamma_L(g)(x) := \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i^2 \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \right)^2$$

for $g : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ a \mathcal{C}^2 map (see [Ben18, Section 3.2] for more details).

Let $C_b(\mathbb{R}_+^n)$ be the set of real-valued bounded continuous functions on \mathbb{R}_+^n . We let \mathcal{L} be the *infinitesimal generator* of $(P_t)_{t \geq 0}$ on $C_b(\mathbb{R}_+^n)$ and $\mathcal{D}(\mathcal{L}) \subset C_b(\mathbb{R}_+^n)$ be its *domain*. Following [Ben18], recall that $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ is defined as the set of $f \in C_b(\mathbb{R}_+^n)$ for which

1. $\mathcal{L}f(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t}$ exists for all $x \in \mathbb{R}_+^n$;
2. $\mathcal{L}f \in C_b(\mathbb{R}_+^n)$;
3. $\sup_{0 < t \leq 1} \frac{1}{t} \|P_t f - f\|_\infty < \infty$.

For a map $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ such that $f^2 \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, we let

$$\Gamma f := \mathcal{L}(f^2) - 2f\mathcal{L}f$$

denote the *carré du champ* operator.

The next result is Proposition 3.1 in [Ben18] but for the second part of assertion 2 for which we provide the proof in the Appendix 2.6.1.

Proposition 2.13. *Suppose that there exists a \mathcal{C}^2 proper map $U : \mathbb{R}_+^n \rightarrow [1, \infty[$ and constants $\alpha, \gamma > 0, \beta \geq 0$ such that*

$$LU \leq -\alpha U + \beta \tag{2.5}$$

and

$$\Gamma_L(U) \leq \gamma U^2. \quad (2.6)$$

Then,

- 1) For each $x \in \mathbb{R}_+^n$, there exists a unique strong solution $(X^x(t))_{t \geq 0} \subset \mathbb{R}_+^n$ to (2.1) with initial condition $X^x(0) = x$ and $X^x(t)$ is continuous in (t, x) . In particular, the process is $C_b(\mathbb{R}_+^n)$ -Feller, that is for each continuous bounded function $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$, the mapping $(t, x) \mapsto P_t f(x)$ is continuous.
- 2) $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}(U(X^x(t))) \leq \frac{\beta}{\alpha}$ for all $x \in \mathbb{R}_+^n$ and $\mu U = \int U d\mu \leq \frac{\beta}{\alpha}$ for all $\mu \in \mathcal{P}_{inv}(\mathbb{R}_+^n)$.
- 3) If $\mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}_+^n)$ is the set of \mathcal{C}^2 real valued maps with compact support, then $\mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}_+^n) \subset \mathcal{D}^2(\mathcal{L})$, the set of functions f such that $f, f^2 \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ and for all $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}_+^n)$,

$$\mathcal{L}f(x) = Lf(x) \quad \text{and} \quad \Gamma(f)(x) = \Gamma_L(f)(x).$$

- 4) The set $\partial\mathbb{R}_+^n$ is invariant under $(P_t)_{t \geq 0}$.
- 5) For $c > 1$, the process

$$M_t(x) := U^{\frac{1}{2}}(X^x(t)) - U^{\frac{1}{2}}(x) - c \int_0^t U^{\frac{1}{2}}(X^x(s)) ds, \quad t \geq 0$$

is a martingale that satisfies the strong law of large numbers, that is

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_t(x)}{t} = 0$$

\mathbb{P}_x almost surely for all $x \in \mathbb{R}_+^n$. There also exists $K \geq 0$ such that

$$LU^{\frac{1}{2}} \leq -cU^{\frac{1}{2}} + K.$$

In the proof of persistence, accessibility also plays a key role.

Definition 2.14. A point $y \in \mathbb{R}_+^n$ is accessible from $x \in \mathbb{R}_+^n$ if for every neighbourhood U of y , there exists $t \geq 0$ such that $P_t(x, U) > 0$.

We denote by Γ_x the set of points y that are accessible from x and for $D \subset \mathbb{R}_+^n$, we let $\Gamma_D = \bigcap_{x \in D} \Gamma_x$ be the set of accessible points from D .

Let

$$A^0(x) = (x_1 \tilde{F}_1(x), \dots, x_n \tilde{F}_n(x)) \quad \text{and} \quad A^j(x) = \sigma_j x_j e_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.7)$$

where e_j stands for the j -th vector of the canonical basis of \mathbb{R}^n . Now, we consider the deterministic control system associated to (2.3)

$$\dot{y} = A^0(y) + \sum_{j=1}^n u^j A^j(y) \quad (2.8)$$

where the control function $u = (u^1, \dots, u^n) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ is at least piecewise continuous. We let $y(u, x, \cdot)$ denote the maximal solution to (2.8) starting from x and with control function u .

The next result is Proposition 5.3 in [Ben18].

Proposition 2.15. *Let $x, z \in \mathbb{R}_+^n$, then $z \in \Gamma_x$ if and only if for every neighbourhood O of z , there exists a control sequence u such that $y(u, x, t) \in O$ for some $t \geq 0$.*

We also need the so-called Hörmander condition. Let

$$\begin{aligned} E^1 &:= \{A^1, \dots, A^n\}, \\ E^k &:= E^{k-1} \cup \{[V, W] \mid V \in E^{k-1}, W \in E^{k-1} \cup \{A^0\}\} \quad k \geq 2, \end{aligned}$$

where $[\cdot, \cdot]$ denotes the Lie bracket operator and A^1, \dots, A^n are defined by (2.7). Recall that given two smooth vector fields $V, W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ and $x \in \mathbb{R}^n$,

$$[V, W](x) := DW(x)V(x) - DV(x)W(x),$$

where $DV(x) = \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j}$ stands for the Jacobian matrix of V at x .

For $x \in \mathbb{R}^n$ and $k \geq 1$, we let $E^k(x) := \{V(x) \mid V \in E^k\}$.

Definition 2.16. *We say that (2.3) satisfies the strong Hörmander condition at $x \in \mathbb{R}_+^n$ if there exists $k \in \mathbb{N}^*$ such that*

$$\text{span}(E^k(x)) = \mathbb{R}^n.$$

For $\mu \in \mathcal{P}_{erg}(\partial\mathbb{R}_+^n)$ provided $\tilde{F}_i \in L^1(\mu)$ we let

$$\mu\tilde{F}_i := \int \tilde{F}_i d\mu$$

denote the *invasion rate* of species i with respect to μ . See [Ben18] Chapter 5 or [HN18c] for more details.

Theorem 2.6 will be deduced from the next theorem which is a reformulation of Corollary 5.4 in [Ben18].

Theorem 2.17. *Suppose the hypotheses of Proposition 2.13 are satisfied and assume moreover that*

$$\tilde{F}_i \in L^1(\mu) \quad \forall \mu \in \mathcal{P}_{inv}(\partial\mathbb{R}_+^n) \text{ and } i = 1, \dots, n, \quad (2.9)$$

and that there exist positive numbers p_1, \dots, p_n such that for all $\mu \in \mathcal{P}_{erg}(\partial\mathbb{R}_+^n)$,

$$\sum_{i=1}^n p_i \mu\tilde{F}_i > 0. \quad (2.10)$$

If there exists $x^* \in \Gamma_{\mathbb{R}_+^n} \cap \mathbb{R}_{++}^n$ satisfying the strong Hörmander condition, then,

(a) $\mathcal{P}_{inv}(\mathbb{R}_{++}^n) = \{\Pi\}$ and Π is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure of \mathbb{R}^n .

- (b) For all $f \in L^1(\Pi)$ and $x \in \mathbb{R}_{++}^n$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \Pi_t^x f = \Pi f$ a.s. and (P_t) converge to Π in total variation.
- (c) If furthermore the strong Hörmander condition is satisfied for every $x \in \mathbb{R}_{++}^n$, then the density of Π is C^∞ .

Remark 2.18. By part (2) of Proposition 2.13, a sufficient condition for (2.9) is

$$\sum_{i=1}^n |\tilde{F}_i| \leq aU + b$$

for some constants $a, b > 0$.

2.3.2 Proof of Theorem 2.6

To prove the theorem, we assume that F_i is given by (2.2). Let

$$U(x) := 1 + \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad (2.11)$$

where $c_1 > 0$, $c_i = c_1 \prod_{k=2}^i \frac{a_{k-1,k}}{a_{k,k-1}}$ for $i = 2, \dots, n$.

Lemma 2.19. The function U and the parameters

$$\alpha := \min_{i=2, \dots, n} \{a_{i0}\}, \quad \beta := \alpha + \sup_{x_1 > 0} \{c_1 x_1 (a_{10} - a_{11} x_1) + c_1 \alpha x_1\}, \quad \gamma := \max_{i=1, \dots, n} \{\sigma_i^2\}$$

satisfy hypotheses (2.5) and (2.6) of Proposition 2.13. Moreover

$$\tilde{F}_i \in L^1(\mu)$$

for all $\mu \in \mathcal{P}_{inv}(\partial\mathbb{R}_+^n)$ and $i = 1, \dots, n$.

Proof. The first part of the proof is easy and left to the reader (see [HN18c, Lemma 3.2] for a detailed one). The second one follows from Remark 2.18. \square

We now relate the sign of $\tilde{\delta}(n)$ to the persistence condition (2.10).

Proposition 2.20. $\tilde{\delta}(n) > 0$ is equivalent to condition (2.10) of Theorem 2.17.

Proof. First suppose that $\tilde{\delta}(n) > 0$. By Lemma 4 in [SBA11], condition (2.10) is equivalent to

$$\max_{i=1, \dots, n} \mu \tilde{F}_i > 0, \quad (\star)$$

for every $\mu \in \mathcal{P}_{inv}(\partial\mathbb{R}_+^n)$. By Lemma 3.5 of [HN18c], the first part of the proof of Theorem 1.1 (i) in [HN18b] and Remark 2.3, (\star) is verified.

Remark that in [HN18b,HN18c] the aforesaid proofs do not require the non-degeneracy of the process, so they are still true in this setting.

Conversely, suppose (2.10) is true. By Theorem 5.1 of [Ben18] and Lemma 2.19, there exists $\mu \in \mathcal{P}_{inv}(\mathbb{R}_{++}^n)$ such that $\mu \tilde{F}_i = 0$ for all $i = 1, \dots, n$. Now, let us write explicitly the system $\mu \tilde{F}_i = 0$:

$$\begin{cases} 0 = \tilde{a}_{10} - \tilde{a}_{11} \int x_1 \mu(dx) - \tilde{a}_{12} \int x_2 \mu(dx) & i = 1, \\ 0 = -\tilde{a}_{i0} + \tilde{a}_{i,i-1} \int x_{i-1} \mu(dx) - \tilde{a}_{ii} \int x_i \mu(dx) - \tilde{a}_{i,i+1} \int x_{i+1} \mu(dx) & i \neq 1, n, \\ 0 = -\tilde{a}_{n0} + \tilde{a}_{n,n-1} \int x_{n-1} \mu(dx) - \tilde{a}_{nn} \int x_n \mu(dx) & i = n. \end{cases}$$

So $(\int x_1 \mu(dx), \dots, \int x_n \mu(dx))$ is the unique solution of the previous system and by definition of μ , this solution is strictly positive. By Proposition 2.4, $\tilde{\delta}(n) > 0$. \square

The next proposition is Theorem 5.3.1 of [HS98] for the intra-specific case and Exercise 5.3.2 of [HS98] for the non-intra-specific one.

Proposition 2.21. *Assume the equivalent conditions of Proposition 2.4 are satisfied, then for the deterministic system $\dot{X}_i = X_i \tilde{F}_i(X)$, $i = 1, \dots, n$ (i.e. system (2.3) without noise), p^* (as defined in Proposition 2.4) is globally asymptotically stable i.e. for every initial condition $x_0 \in \mathbb{R}_{++}^n$, the solution $X^{x_0}(t)$ has the property that $X^{x_0}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} p^*$.*

Corollary 2.22. *Under the equivalent conditions of Proposition 2.4, $p^* \in \Gamma_{\mathbb{R}_{++}^n}$.*

Proof. We start by rewriting the control equation for (2.3)

$$\dot{y}_i = y_i \tilde{F}_i(y) + u^i y_i \sigma_i \quad i = 1, \dots, n,$$

where $u = (u^1, \dots, u^n) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ is at least piecewise continuous.

If we take $u \equiv 0$, by Proposition 2.21 the solution $y(0, x, t) \rightarrow p^*$ for every $x \in \mathbb{R}_{++}^n$. We conclude by using Proposition 2.15. \square

Now, we discuss Hörmander's condition.

Proposition 2.23. *Assume that either $\sigma_1 > 0$ or $\sigma_n > 0$. Then the strong Hörmander condition for (2.3) is satisfied for every $x \in \mathbb{R}_{++}^n$.*

Proof. Recall that for $x \in \mathbb{R}_+^n$, $A^1(x) = \sigma_1 x_1 e_1$ and $A^0(x) = (x_1 \tilde{F}_1(x), \dots, x_n \tilde{F}_n(x))$. We immediately get for $x \in \mathbb{R}_+^n$ that $DA^1(x)$ and $DA^0(x)$ are the $n \times n$ matrix defined as

$$DA^1(x)_{ij} = \begin{cases} \sigma_1 & \text{if } (i, j) = (1, 1), \\ 0 & \text{if } (i, j) \neq (1, 1), \end{cases}$$

and as

$$DA^0(x) = \begin{pmatrix} \tilde{F}_1(x) + x_1 \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial x_1}(x) & x_1 \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial x_2}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial x_1}(x) & \tilde{F}_2(x) + x_2 \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial x_2}(x) & x_2 \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial x_3}(x) & \ddots & \vdots \\ 0 & x_3 \frac{\partial \tilde{F}_3}{\partial x_2}(x) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x_{n-1} \frac{\partial \tilde{F}_{n-1}}{\partial x_n}(x) \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \frac{\partial \tilde{F}_n}{\partial x_{n-1}}(x) & \tilde{F}_n(x) + x_n \frac{\partial \tilde{F}_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

We now define recursively the family of vector fields $b^k \in E^k$, $k \geq 1$ by

$$\begin{cases} b^1 = A^1, \\ b^{k+1} = [b^k, A^0]. \end{cases}$$

We have for $x \in \mathbb{R}_{++}^n$ that b^k has the form

$$b_k^k(x) = \sigma_1 x_1 \prod_{i=2}^k x_i \tilde{a}_{i,i-1} \quad \text{and} \quad b_j^k(x) = 0 \text{ for all } j > k.$$

The assumption $\sigma_1 > 0$ makes $\{b^1(x), \dots, b^n(x)\}$ a basis of \mathbb{R}^n for every $x \in \mathbb{R}_{++}^n$. So Hörmander's condition holds true for every $x \in \mathbb{R}_{++}^n$.

The case $\sigma_n > 0$ is very similar and left to the reader. □

By Lemma 2.19, the function U defined by (2.11) satisfies the hypotheses of Proposition 2.13 and furthermore (2.9) is satisfied. Since $\tilde{\delta}(n) > 0$ and by Proposition 2.20, hypothesis (2.10) holds true. Under conditions $\sigma_1 > 0$ or $\sigma_n > 0$ and $\tilde{\delta}(n) > 0$, Corollary 2.22 and Proposition 2.23 make the equilibrium p^* an accessible point satisfying the strong Hörmander condition. Proposition 2.23 proves moreover that the strong Hörmander condition holds at every $x \in \mathbb{R}_{++}^n$.

Then hypotheses of Theorem 2.17 hold true and Theorem 2.6 follows.

2.4 Rate of convergence

2.4.1 General main results on the rate of convergence

As in Section 2.3.1, we consider the general stochastic differential equation given by (2.1) under the assumption that F_i is \mathcal{C}^∞ but not necessarily of the form (2.2).

We suppose here that there exists a map $U : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying the hypotheses of Proposition 2.13 and the additional conditions:

$$\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{U(x)}{\ln \|x\|} > 0, \quad (2.12)$$

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \left(LU(x) + p_0 \sum_{i=1}^n |F_i(x)| \right) < 0 \text{ for some } p_0 > 0 \quad (2.13)$$

and

$$\sum_{i=1}^n |F_i(x)| \leq CU^{d_0}(x) \text{ for some } d_0 \geq 1 \text{ and } C > 0. \quad (2.14)$$

We also assume that the persistence condition of Theorem 2.6 is satisfied, that is there exist $p_1, \dots, p_n > 0$ such that

$$\sum_{i=1}^n p_i \mu \tilde{F}_i > 0 \text{ for every } \mu \in \mathcal{P}_{erg}(\partial\mathbb{R}_+^n). \quad (2.15)$$

Remark that we can assume that $\sum_{i=1}^n p_i$ is sufficiently small without loss of generality.

Consider the function

$$V(x) = U(x) - \sum_{i=1}^n p_i \ln x_i.$$

When $\sum_{i=1}^n p_i$ is sufficiently small, we deduce from (2.12) and (2.13) that the function $V(x)$ satisfies

$$V(x) > 0 \text{ for any } x \in \mathbb{R}_{++}^n \text{ and } \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$$

and

$$LV(x) \leq h_1 \mathbf{1}_{\{\|x\| \leq M\}} - h_2 \mathbf{1}_{\{\|x\| \geq M\}}, \quad x \in \mathbb{R}_{++}^n \quad (2.16)$$

for some positive constants h_1, h_2, M .

Let us define the constant $q_0 > 1$ such that

$$-\alpha + \frac{q_0 - 1}{2} \gamma = 0 \quad (2.17)$$

where α and γ are as in (2.5) and (2.6).

Finally, for $q \in]1, \min\{q_0, \frac{q_0+2}{2}\} [$, let

$$W_q = \begin{cases} V^q + CU^q & \text{if } 1 < q \leq 2, \\ V^q + CU^{2q-2} & \text{if } q > 2, \end{cases} \quad (2.18)$$

and

$$\widehat{W}(x) = \left(\frac{U(x)}{\prod_{i=1}^n x_i^{p_i}} \right)^{\varepsilon^*} \quad (2.19)$$

for some $C, \varepsilon^* > 0$. Remark that $W_q > 0$ and that $\widehat{W} \geq 1$ when $\sum_{i=1}^n p_i$ is sufficiently small.

We can now state two new general theorems for the rates of convergence.

Theorem 2.24. *Assume that there exists a map $U : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying the hypotheses of Proposition 2.13, (2.12), (2.13), (2.14) and (2.15). Suppose moreover that there exists $x^* \in \Gamma_{\mathbb{R}_{++}^n} \cap \mathbb{R}_{++}^n$ which satisfies the strong Hörmander condition. Then for all $q \in]1, \min\{q_0, \frac{q_0+2}{2}\} [$ and for all $1 \leq \beta \leq q$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\beta-1} \|P_t(x, \cdot) - \Pi(\cdot)\|_{W_{\beta,q}} = 0, \quad x \in \mathbb{R}_{++}^n$$

where $W_{\beta,q} = W_q^{1-\beta/q}$ and W_q is defined by (2.18).

Theorem 2.25. *Assume that there exists a map $U : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying hypotheses of Proposition 2.13, (2.14) and (2.15). Suppose that (2.12) and (2.13) are strengthened to*

$$\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\ln U(x)}{\ln \|x\|} > 0 \quad (2.20)$$

and

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow \infty} \left(L \ln U(x) + p_0 \sum_{i=1}^n |F_i(x)| \right) < 0 \text{ for some } p_0 > 0 \quad (2.21)$$

respectively. Assume moreover that there exists $x^* \in \Gamma_{\mathbb{R}_{++}^n} \cap \mathbb{R}_{++}^n$ which satisfies the strong Hörmander condition. Then there exists $\varsigma > 0$ such that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\varsigma t} \|P_t(x, \cdot) - \Pi(\cdot)\|_{2\widehat{W}} = 0, \quad x \in \mathbb{R}_{++}^n$$

where \widehat{W} is defined by (2.19).

Before proving these theorems, we will apply them in the next part to prove the polynomial or exponential rate of convergence in the Lotka-Volterra food chain model.

2.4.2 Proof of Theorem 2.7

To prove Theorem 2.7, we will use Theorem 2.24 and 2.25.

- (a) Suppose that $a_{ii} = 0$ for some $i = 2, \dots, n$. By Lemma 2.19, U satisfies the hypotheses of Proposition 2.13. We have from (2.5) that

$$LU(x) + p_0 \sum_{i=1}^n |F_i(x)| \leq -\alpha U + \beta + p_0 \sum_{i=1}^n |F_i(x)|.$$

Since F_i and U are linear functions, then for p_0 sufficiently small (2.13) holds true and (2.12) is trivially verified. We also deduce that for each $d_0 \geq 1$, there exists a constant $C > 0$ such that (2.14) holds. Since $\widetilde{\delta}(n) > 0$, by Proposition 2.20, (2.15) is immediately verified. Moreover by Corollary 2.22 and Proposition 2.23, $p^* \in \Gamma_{\mathbb{R}_{++}^n} \cap \mathbb{R}_{++}^n$ satisfies the strong Hörmander condition.

Thus, by Theorem 2.24, for all $q \in]1, \min\{q_0, \frac{q_0+2}{2}\}[$ and for all $1 \leq \beta \leq q$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\beta-1} \|P_t(x, \cdot) - \Pi(\cdot)\|_{W_{\beta,q}} = 0, \quad x \in \mathbb{R}_{++}^n$$

where q_0 is defined by (2.17), W_q by (2.18) and $W_{\beta,q} = W_q^{1-\beta/q}$.

- (b) Suppose that $a_{ii} > 0$ for all i . The verification of the hypotheses of Proposition 2.13 and of inequalities (2.14) and (2.15) is basically the same as in the case (a). (2.20)

follows from the form of U . To prove (2.21), first remark that

$$\begin{aligned} L \ln U(x) &= \frac{LU(x)}{U(x)} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma_L(U)(x)}{U^2(x)} \\ &= \frac{c_1 x_1 (a_{10} - a_{11} x_1) - \sum_{i=2}^n c_i a_{i0} x_i - \sum_{i=2}^n c_i a_{ii} x_i^2}{1 + \sum_{i=1}^n c_i x_i} - \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^n c_i^2 \sigma_i^2 x_i^2}{\left(1 + \sum_{i=1}^n c_i x_i\right)^2}. \end{aligned}$$

It thus becomes clear that $L \ln U(x)$ is bounded above by a linear function of $\|x\|$ with a negative slope. Then (2.21) holds true for $p_0 > 0$ sufficiently small. Since $\tilde{\delta}(n) > 0$, by Corollary 2.22 and Proposition 2.23, $p^* \in \Gamma_{\mathbb{R}_{++}^n} \cap \mathbb{R}_{++}^n$ satisfies the strong Hörmander condition.

Thus, by Theorem 2.25, there exists $\varsigma > 0$ such that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\varsigma t} \|P_t(x, \cdot) - \Pi(\cdot)\|_{2\widehat{W}} = 0, \quad x \in \mathbb{R}_{++}^n$$

where \widehat{W} is defined by (2.19).

This concludes the proof.

Remark 2.26. *In the case (a), i.e. $a_{ii} = 0$ for some $i = 2, \dots, n$, if $\sigma_1 > 0$ and $\sigma_i = 0$, for $i = 2 \dots, n$, then we can easily verify that for any $q > 0$,*

$$LU^q(x) \leq \beta_q - \alpha_q U^q(x)$$

for some $\beta_q, \alpha_q > 0$. Thus, in view of Proposition 2.32, the degree of $t^{\beta-1}$ in Theorem 2.7 part (a) can be any positive number.

Remark 2.27. *The positivity of a_{ii} allows us to choose a stronger Lyapunov function. It implies that (X_t^x) enters in a compact exponentially fast and this is why the semi-group (P_t) converges to the stationary distribution exponentially fast.*

2.4.3 Proofs of Theorem 2.24 and Theorem 2.25

We start by the proof of Theorem 2.24. In order to obtain the polynomial convergence rate, we will show that for each $q \in]1, \min\{q_0, \frac{q_0+2}{2}\}[$, there is a $T > 0$ such that the proper function $W_q : \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ defined by (2.18) satisfies

$$P_T(W_q(x)) - W_q(x) \leq -\kappa W_q^{(q-1)/q}(x) + K \mathbf{1}_{\{W_q \leq R\}}(x) \quad (2.22)$$

for some $\kappa, K, R > 0$. We will also show that the Markov chain $(X^x(kT))_{k \in \mathbb{N}}$ is aperiodic, irreducible and all compact sets in \mathbb{R}_{++}^n are petite. Then by [JR02, Theorem 3.6], for all $1 \leq \beta \leq q$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\beta-1} \|P_t(x, \cdot) - \Pi(\cdot)\|_{W_{\beta,q}} = 0, \quad x \in \mathbb{R}_{++}^n$$

where $W_{\beta,q} = W_q^{1-\beta/q}$.

To proceed, let us recall some concepts and results needed to prove the main theorem. Let $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \dots)$ be a discrete-time Markov chain on a general state space (E, \mathcal{E}) , where \mathcal{E} is a countably generated σ -algebra. Denote by \mathcal{P} the Markov transition kernel

for Φ . If there is a non-trivial σ -finite positive measure φ on (E, \mathcal{E}) such that for any $A \in \mathcal{E}$ satisfying $\varphi(A) > 0$ we have

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}^k(x, A) > 0, \quad x \in E$$

where \mathcal{P}^k is the k -step transition kernel of Φ , then the Markov chain Φ is called φ -irreducible. It is known that if Φ is φ -irreducible, then there exist a positive integer d and disjoint subsets $E_0, \dots, E_{d-1} \subset E$ such that for all $i = 0, \dots, d-1$ and all $x \in E_i$, we have

$$\mathcal{P}(x, E_j) = 1 \text{ where } j = i + 1 \pmod{d}$$

and

$$\varphi \left(E \setminus \bigcup_{i=0}^{d-1} E_i \right) = 0.$$

The smallest positive integer d satisfying the above condition is called the *period* of Φ . An *aperiodic* Markov chain is a chain with period $d = 1$.

A set $C \in \mathcal{E}$ is called *petite*, if there exist a non-negative sequence $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ with $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$ and a nontrivial positive measure ν on (E, \mathcal{E}) such that

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathcal{P}^k(x, A) \geq \nu(A), \quad x \in C, A \in \mathcal{E}.$$

Lemma 2.28. *If there exists $p^* \in \Gamma_{\mathbb{R}_{++}^n} \cap \mathbb{R}_{++}^n$ satisfying the strong Hörmander condition, then for any $T > 0$, the Markov chain $(X^x(kT))_{k \in \mathbb{N}}$ is aperiodic, irreducible and all compact sets in \mathbb{R}_{++}^n are petite.*

Proof. Due to the strong Hörmander condition, by [IK74] the transition probability $P_t(x, \cdot)$ of $(X^x(t))$ has a smooth density, denoted by $p(t, x, y)$. Let $q^* \in \mathbb{R}_{++}^n$ and $T > 0$ such that $p(T, p^*, q^*) > 0$. Since $p(t, x, y)$ is smooth, we can find $r > 0$ such that

$$\inf \{p(T, x, y) \mid x \in B(p^*, r), y \in B(q^*, r)\} =: \delta_r > 0, \quad (2.23)$$

where $B(x, r)$ is the open ball with radius r centered at x .

By accessibility of p^* , for each compact set $K \subset \mathbb{R}_{++}^n$ there exists $k_K > 0$ such that

$$P_{kT}(x, B(p^*, r/2)) > 0$$

for any $x \in K$, $k \geq k_K$. Due to the compactness of K and the Feller property of $(X^x(t))$, we can easily obtain that

$$\inf_{x \in K} \{P_{kT}(x, B(p^*, r))\} := \varsigma_{k,K} > 0, \text{ for any } k \geq k_K. \quad (2.24)$$

Applying the Chapman–Kolmogorov equation and using (2.23) and (2.24), we have

$$\inf_{x \in K} \{P_{(k+1)T}(x, C)\} \geq \varsigma_{k,K} \delta_r m(C \cap B(q^*, r)), \quad k \geq k_K \quad (2.25)$$

for any measurable subset $C \subset \mathbb{R}_{++}^n$, where $m(\cdot)$ is the Lebesgue measure on \mathbb{R}_{++}^n . Obviously, (2.25) implies that the Markov chain $((X^x(kT))_{k \in \mathbb{N}}$ is irreducible and every compact set K is petite. Moreover, $((X^x(kT))_{k \in \mathbb{N}}$ is aperiodic because if it is not, then there is $d > 1$ and disjoint subsets E_0, \dots, E_{d-1} such that for all $i = 0, \dots, d-1$ and $x \in E_i$,

$$P_T(x, E_j) = 1, \quad j = i + 1 \pmod{d}.$$

This implies that for any $k \in \mathbb{N}$ and $x \in E_i$

$$P_{(kd+1)T}(x, E_j) = 1, \quad j = i + 1 \pmod{d}. \quad (2.26)$$

Now, observe that at least one of the two sets $E_0 \cap B(q^*, r)$ and $B(q^*, r) \setminus E_0$ has nonzero Lebesgue measure. If $m(E_0 \cap B(q^*, r)) > 0$, for any $x \in E_0$, letting K be a compact set containing x , then we have from (2.25) that

$$P_{(kd+1)T}(x, E_0) \geq \varsigma_{k,K} \delta_r m(E_0 \cap B(q^*, r)) > 0, \quad k \geq k_K$$

which contradict the fact that E_0, E_1 are disjoint and $P_{(kd+1)T}(x, E_1) = 1$. Likewise, if $m(B(q^*, r) \setminus E_0) > 0$, for any $x \in E_{d-1}$, letting K be a compact set containing x , we have from (2.25) that

$$P_{(kd+1)T}(x, B(q^*, r) \setminus E_0) \geq \varsigma_{k,K} \delta_r m(B(q^*, r) \setminus E_0) > 0, \quad k \geq k_K$$

which contradict $P_{(kd+1)T}(x, E_0) = 1$ and $x \in E_{d-1}$. The contradiction argument above shows that the Markov chain $((X^x(kT))_{k \in \mathbb{N}}$ is aperiodic. \square

Now, we want to prove that for all $q \in]1, \min\{q_0, \frac{q_0+2}{2}\} [$, W_q satisfies (2.22). The proof will follow the approach in [BNN20]. To proceed, we first need the next technical results. We start by next lemma that provided very useful inequalities.

Lemma 2.29. *Let $p > 0$. There exists $c_p > 0$ such that for any $a > 0$ and $x \in \mathbb{R}$ we have*

$$|a+x|^{1+p} \leq \begin{cases} a^{1+p} + (1+p)a^p x + c_p |x|^{1+p} & \text{if } p \leq 1, \\ a^{1+p} + (1+p)a^p x + a^p + c_p (|x|^{2p} + 1) & \text{if } p > 1. \end{cases} \quad (2.27)$$

As an application, for a random variable Y and a constant $k > 0$, one has that there exists $\tilde{K}_1 > 0$ such that

$$\mathbb{E}|k+Y|^{1+p} \leq \begin{cases} k^{1+p} + (1+p)k^p \mathbb{E}Y + \tilde{K}_1 \mathbb{E}|Y|^{1+p} & \text{if } p \leq 1, \\ k^{1+p} + (1+p)k^p \mathbb{E}Y + k^p + \tilde{K}_1 (\mathbb{E}|Y|^{2p} + 1) & \text{if } p > 1. \end{cases} \quad (2.28)$$

Moreover, there exists $c_{p,b} > 0$ depending only on $p, b > 0$ such that if $x+a \geq 0$ then

$$(a+x)^{1+p} - b(a+x)^p \leq \begin{cases} a^{1+p} + (1+p)a^p x - \frac{b}{2}a^p + c_{b,p}(|x|^{1+p} + 1) & \text{if } p \leq 1, \\ a^{1+p} + (1+p)a^p x - \frac{b}{2}a^p + a^p + c_{b,p}(|x|^{2p} + 1) & \text{if } p > 1. \end{cases} \quad (2.29)$$

Proof. If $x > a/2$ then

$$(a+x)^{1+p} - a^{1+p} - (1+p)a^p x < c_p x^{1+p}.$$

If $x < -a/2$ then

$$|a+x|^{1+p} - a^{1+p} - (1+p)a^p x \leq c_p |x|^{1+p}.$$

If $p \leq 1$ we are done for this two cases. For $p > 1$, since $a > 0$, it is enough to remark that $c_p |x|^{1+p} \leq a^p + c_p(|x|^{2p} + 1)$.

If $|x| \leq a/2$, consider the function

$$f(x) = (a+x)^{1+p} - a^{1+p} - (1+p)a^p x.$$

We have $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(x) = (1+p)p(a+x)^{p-1}$. By Taylor's expansion, there exists $0 \leq \xi_x \leq 1$ such that

$$f(x) = (1+p)p \frac{x^2(a + \xi_x x)^{p-1}}{2}.$$

If $0 < p \leq 1$, then $x^2(a + \xi_x x)^{p-1} \leq x^2(2|x|)^{p-1} \leq c_p |x|^{p+1}$. If $p > 1$ then we have from Young's inequality that

$$x^2(a + \xi_x x)^{p-1} \leq x^2(3/2a)^{p-1} \leq a^p + c_p |x|^{2p}.$$

Thus, (2.27) has been proved. (2.28) straightforwardly follows. To prove (2.29), we consider two cases. If $0 \leq a+x \leq 2^{-1/p}a$ then we have $(a+x)^{1+p} \leq 2^{-(1+p)/p}a^{1+p}$ and the inequality is true by choosing a constant $c_{b,p}$ sufficiently large that

$$2^{-(1+p)/p}a^{1+p} + \frac{b}{2}a^p \leq a^{1+p} + c_{b,p}.$$

If $a+x \geq 2^{-1/p}a$ then $-b(a+x)^p \leq -\frac{b}{2}a^p$ and (2.29) follows (2.27). □

Let $2\rho := \inf\{\sum_{i=1}^n p_i \mu \tilde{F}_i : \mu \in \mathcal{P}_{inv}(\partial\mathbb{R}_+^n)\} > 0$ and let n^* be a positive integer such that $(n^* - 1)h_2 - 2h_1 \geq \frac{\rho}{2}$.

Lemma 2.30. *Suppose that U satisfies hypotheses of Proposition 2.13 and inequalities (2.12), (2.13), (2.14) and (2.15). Then there exist $T^* > 0, \delta > 0$ such that*

$$\mathbb{E}_x \int_0^T LV(X(s)) ds \leq -\rho T$$

for any $T \in [T^*, n^*T^*]$, $x \in \mathbb{R}_{++}^n$, $\|x\| \leq M$, and $\text{dist}(x, \partial\mathbb{R}_+^n) \leq \delta$.

Proof. The lemma is well known; see [Ben18, Proposition 8.2] or [HN18a, Proposition 4.1]. □

Lemma 2.31. *Suppose U satisfies the hypotheses of Proposition 2.13. Let q_0 like in (2.17), i.e. $q_0 > 1$ satisfies $-\alpha + \frac{q_0-1}{2}\gamma = 0$ where α and γ are as in (2.5) and (2.6). For any $1 < q < q_0$,*

$$LU^q(x) \leq k_{1q} - k_{2q}U^q(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^n \quad (2.30)$$

for some positive constants k_{1q}, k_{2q} . As a result,

$$\mathbb{E}_x U^q(X(t)) \leq \frac{k_{1q}}{k_{2q}} + U^q(x)e^{-k_{2q}t}, \quad t \geq 0. \quad (2.31)$$

On the other hand,

$$\mathbb{E}_x U^p(X(t)) \leq e^{K_p t} U^p(x) \quad (2.32)$$

for any $p \geq 1$ and some constant $K_p > 0$.

Proof. The estimate (2.30) is straight forward calculations but we give here the proof for completeness. For $1 < q < q_0$, by (2.5) and (2.6) we have

$$\begin{aligned} LU^q(x) &= qU^{q-1}(x)LU(x) + \frac{1}{2}q(q-1)U^{q-2}(x)\Gamma_L(U)(x) \\ &\leq qU^q(x) \left(-\alpha + \frac{q-1}{2}\gamma \right) + q\beta U^{q-1}(x). \end{aligned}$$

Since $q < q_0$, then there exist $k_{1q}, k_{2q} > 0$ such that

$$LU^q(x) \leq k_{1q} - k_{2q}U^q(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^n.$$

Then (2.31) follows by a standard application of Itô's formula to the function $e^{k_{2q}t}U^q(X(t))$. Finally, it is easy to check that

$$LU^p(x) \leq K_p U^p(x)$$

for some constant $K_p > 0$. An application of Itô's formula and Gronwall's inequality derives (2.32). A more detailed proof can be found in [Ben18, Section 9.3] for (2.31) and (2.32). □

Proposition 2.32. *Assume U satisfies the hypotheses of Proposition 2.13 and inequalities (2.12), (2.13), (2.14) and (2.15). Let q be any number in the interval $]1, \min\{q_0, \frac{q_0+2}{2}\}[$. There is $\kappa^* > 0$ and $C, C^* > 0$ such that*

$$\mathbb{E}_x [CU^q(X(n^*T^*)) + V^q(X(n^*T^*))] \leq CU^q(x) + V^q(x) - \kappa^* [CU^q(x) + V^q(x)]^{\frac{q-1}{q}} + C^*$$

if $1 < q \leq 2$ and

$$\mathbb{E}_x [CU^{2q-2}(X(n^*T^*)) + V^q(X(n^*T^*))] \leq CU^{2q-2}(x) + V^q(x) - \kappa^* [CU^{2q-2}(x) + V^q(x)]^{\frac{q-1}{q}} + C^*$$

if $q > 2$.

Proof. First we assume that $1 < q \leq 2$. In the sequel, C^* is a generic constant depending on T^*, M, n^* but independent of $x \in \mathbb{R}_+^n$. C^* can differ from line to line.

Suppose $X(0) = x$. We have from Itô's formula that

$$V(X(t)) = V(x) + \int_0^t LV(X(s))ds + M(t).$$

It can be seen that $M(t)$ is a martingale with quadratic variation:

$$\langle M(t) \rangle = \int_0^t \Gamma_L(V)(X(s))ds \leq K \int_0^t U^2(X(s))ds \quad (2.33)$$

for some constant K independent of t .

Note that by (2.14), $|LV(x)| \leq CU^{d_0}(x)$ which together with (2.33) and (2.32) and applications of Itô's isometry and Hölder's inequality implies that

$$\mathbb{E}_x \left| \int_0^t LV(X(s))ds \right|^q \leq C^* U(x)^{qd_0} \quad \text{and} \quad \mathbb{E}_x |M(t)|^q \leq C^* U^q(x), \quad t \leq n^* T^*. \quad (2.34)$$

We have from (2.34) and (2.28) that

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x [V(X(t))]^q &\leq V^q(x) + q \left[\mathbb{E}_x \int_0^t LV(X(s))ds \right] V^{q-1}(x) + C^* \mathbb{E}_x \left| \int_0^t LV(X(s))ds + M(t) \right|^q \\ &\leq V^q(x) + q \left[\mathbb{E}_x \int_0^t LV(X(s))ds \right] V^{q-1}(x) + C^*(1 + U^{qd_0}(x)), \quad t \leq n^* T^*. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Thus, if $\|x\| \leq M$ and $\text{dist}(x, \partial\mathbb{R}_+^n) \leq \delta$, we have $\mathbb{E}_x \int_0^t LV(X(s))ds \leq -\rho t$, $t \in [T^*, n^* T^*]$. As a result

$$\mathbb{E}_x [V(X(T))]^q \leq V^q(x) - q\rho T V^{q-1}(x) + C^*(1 + U^{qd_0}(x)), \quad T \in [T^*, n^* T^*]. \quad (2.36)$$

On the other hand, we have from

$$V(X(T)) = V(x) + \int_0^T LV(X(s))ds + M(T) \leq V(x) + h_1 T + M(T)$$

and (2.28) that

$$\mathbb{E}_x [V(X(T))]^q \leq V^q(x) + qh_1 T V^{q-1}(x) + C_2(1 + U^{qd_0}(x)), \quad T \leq n^* T^*, \quad (2.37)$$

for some C_2 independent of x . Since $V(x)$ is bounded on the set $\{x \in \mathbb{R}_{++}^n : \|x\| \leq M, \text{dist}(x, \partial\mathbb{R}_{++}^n) \geq \delta\}$, by combining (2.36) and (2.37) for $\|x\| \leq M$, we obtain that

$$\mathbb{E}_x [V(X(T))]^q \leq V^q(x) - q\rho T V^{q-1}(x) + C^*, \quad T \in [T^*, n^* T^*]. \quad (2.38)$$

Define

$$\xi = \inf\{t \geq 0 : \|X(t)\| \leq M\} \wedge (n^* T^*).$$

From now on, we suppose that $\|x\| \geq M$. For $t \leq \xi$, we have

$$V(X(t)) = V(x) + \int_0^t LV(X(s))ds + M(t) \leq V(x) - h_2t + M(t). \quad (2.39)$$

We have from (2.38) and the strong Markov property of $X(t)$ that

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{\{\xi \leq T^*(n^*-1)\}} V^q(X(n^*T^*)) \right] \\ & \leq \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{\{\xi \leq T^*(n^*-1)\}} [V^q(X(\xi)) + C^*] \right] \\ & \quad - \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{\{\xi \leq T^*(n^*-1)\}} q\rho(n^*T^* - \xi) V^{q-1}(X(\xi)) \right] \\ & \leq \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{\{\xi \leq T^*(n^*-1)\}} (V(x) + M(\xi))^q + C^* \right] \\ & \quad - q\rho T^* \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{\{\xi \leq T^*(n^*-1)\}} (V(x) + M(\xi))^{q-1} \right] \\ & \quad (\text{due to (2.39)}) \\ & \leq \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{\{\xi \leq T^*(n^*-1)\}} \left(V^q(x) - \frac{q\rho T^*}{2} V^{q-1}(x) + qM(\xi) V^{q-1}(x) + C^* (|M(\xi)|^q + 1) \right) \right] \\ & \quad ((2.29) \text{ is applied here}). \end{aligned} \quad (2.40)$$

If $T^*(n^* - 1) \leq \xi \leq T^*n^*$ we have

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{\{\xi \geq T^*(n^*-1)\}} V^q(X(n^*T^*)) \right] \\ & \leq \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{\{\xi \geq T^*(n^*-1)\}} V^q(X(\xi)) + C^* \right] \\ & \quad + qh_1 \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{\{\xi \geq T^*(n^*-1)\}} (n^*T^* - \xi) V^{q-1}(X(\xi)) \right] \\ & \quad (\text{due to (2.37) and the strong Markov property}) \\ & \leq \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{\{\xi \geq T^*(n^*-1)\}} [(V(x) + M(\xi) - h_2\xi)^q + C^*] \right] \\ & \quad + qh_1 T^* \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{\{\xi \geq T^*(n^*-1)\}} (V(x) + M(\xi) - h_2\xi)^{q-1} \right] \\ & \quad (\text{because of (2.39)}) \\ & \leq \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{\{\xi \geq T^*(n^*-1)\}} \left(V^q(x) - qh_2\xi V^{q-1}(x) + qM(\xi) V^{q-1}(x) + C^* (|M(\xi)| + 1)^q \right) \right] \\ & \quad + 2^{q-1}qh_1 T^* \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{\{\xi \geq T^*(n^*-1)\}} (V^{q-1}(x) + |M(\xi)|^{q-1}) \right] \\ & \quad ((2.27) \text{ and the inequality } |x + y|^{q-1} \leq 2^{q-1}(|x|^{q-1} + |y|^{q-1}) \text{ are applied here}) \\ & \leq \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{\{\xi \geq T^*(n^*-1)\}} \left(V^q(x) - \frac{q\rho T^*}{2} V^{q-1}(x) + qM(\xi) V^{q-1}(x) + C^* (|M(\xi)| + 1)^q \right) \right] \\ & \quad (\text{since } (n^* - 1)h_2 - 2^{q-1}h_1 \geq \frac{\rho}{2} \text{ and } \xi \geq T^*(n^* - 1)). \end{aligned} \quad (2.41)$$

As a result, by adding (2.40) and (2.41) and noting that $\mathbb{E}_x M(\xi) = 0$, we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x V^q(X(n^*T^*)) & \leq V^q(x) - q\frac{\rho}{2} T^* V^{q-1}(x) + C^* \mathbb{E}_x (|M(\xi)| + 1)^q \\ & \leq V^q(x) - q\frac{\rho}{2} T^* V^{q-1}(x) + C^* U^q(x) \end{aligned} \quad (2.42)$$

where the inequality $\mathbb{E}_x(|M(\xi)| + 1)^q \leq C^*U^q(x)$ comes from an application of the Burkholder-Davis-Gundy Inequality, Hölder's inequality and (2.33) and (2.32).

From (2.31), we have

$$\mathbb{E}_x U^q(X(n^*T^*)) \leq U^q(x) - (1 - e^{-k_{2q}n^*T^*})U^q(x) + \frac{k_{1q}}{k_{2q}}. \quad (2.43)$$

Combining (2.42) and (2.43), we can easily get that

$$\mathbb{E}_x [V^q(X(n^*T^*)) + CU^q(X(n^*T^*))] \leq V^q(x) + CU^q(x) - \kappa^*[V^q(x) + CU^q(x)]^{(q-1)/q} + C^*, \quad (2.44)$$

for some $\kappa^* > 0, C^* > 0$ and sufficiently large C .

If $q > 2$ then $q_0 > 2$ and $2q - 2 < q_0$ since $q < \min\{q_0, \frac{q_0+2}{2}\}$. We carry the proof in the same manner with use of the inequalities (2.27), (2.28) and (2.29) for the case $p = q - 1 > 1$ and we obtain that

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x V^q(X(n^*T^*)) &\leq V^q(x) - q\frac{\rho}{2}T^*V^{q-1}(x) + V^{q-1}(x) + C^*\mathbb{E}_x(|M(\xi)| + 1)^{2q-2} \\ &\leq V^q(x) - (q\frac{\rho}{2}T^* - 1)V^{q-1}(x) + C^*U^{2q-2}(x) \\ &\leq V^q(x) - (q\frac{\rho}{4}T^*)V^{q-1}(x) + C^*U^{2q-2}(x) \end{aligned} \quad (2.45)$$

when we choose T^* sufficiently large. (Note that ρ and q do not depend on the choice of T^* so we can choose $T^* > \frac{2}{q\rho}$.) Since $2q - 2 < q_0$, we have from (2.31) that

$$\mathbb{E}_x U^{2q-2}(X(n^*T^*)) \leq U^{2q-2}(x) - (1 - e^{-k_{2,(2q-2)}n^*T^*})U^{2q-2}(x) + \frac{k_{1,(2q-2)}}{k_{2,(2q-2)}}. \quad (2.46)$$

Combining two displays above, we obtain

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x [V^q(X(n^*T^*)) + CU^{2q-2}(X(n^*T^*))] \\ \leq V^q(x) + CU^{2q-2}(x) - \kappa^*[V^q(x) + CU^{2q-2}(x)]^{(q-1)/q} + C^*, \end{aligned} \quad (2.47)$$

for some $\kappa^* > 0, C^* > 0$ and sufficiently large C . □

Fix $q \in]1, \min\{q_0, \frac{q_0+2}{2}\}[$, then W_q defined by (2.18) is proper and for $R > 0$, the set $\{W_q \leq R\}$ is compact and by Lemma 2.28 also petite. Then for $0 < \hat{\kappa} < \kappa^*$, by Proposition 2.32 there exists $R > 0$ such that

$$P_{n^*T}W_q - W_q \leq -\hat{\kappa}W_q^{(q-1)/q} + C^*\mathbf{1}_{\{W_q \leq R\}}.$$

Using Lemma 2.28 and Theorem 3.6 of [JR02], we get for all $1 \leq \beta \leq q$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\beta-1} \|P_t(x, \cdot) - \Pi(\cdot)\|_{W_{\beta,q}} = 0, \quad x \in \mathbb{R}_{++}^n$$

where $W_{\beta,q} = W_q^{1-\beta/q}$. This concludes the proof of Theorem 2.24.

We pass now to the proof of Theorem 2.25 and we first need the next proposition.

Proposition 2.33. *Suppose that hypotheses of Proposition 2.13, (2.14), (2.15), (2.20), (2.21) hold. Then there is $\kappa^* \in (0, 1)$ and $K^* > 0$, $\varepsilon^* > 0$ such that*

$$\mathbb{E}_x \left(\frac{U(X(t))}{\prod_{i=1}^n X_i^{p_i}(t)} \right)^{\varepsilon^*} \leq C^* + \kappa^* \left(\frac{U(x)}{\prod_{i=1}^n x_i^{p_i}} \right)^{\varepsilon^*}, \quad x \in \mathbb{R}_{++}^n.$$

Proof. The result is basically proved in [Ben18, HN18a]. □

In other words, this proposition shows that

$$P_t \widehat{W}(x) \leq K^* + \kappa^* \widehat{W}(x), \quad x \in \mathbb{R}_{++}^n$$

for some constants $K^* > 0$, $\kappa \in (0, 1)$ independent of x and t and for \widehat{W} defined by (2.19). For R large enough and since \widehat{W} is proper, we have

$$P_t \widehat{W}(x) \leq \hat{\kappa}^* \widehat{W}(x) + \hat{K}^* \mathbf{1}_{\{\widehat{W} \leq R\}}(x), \quad x \in \mathbb{R}_{++}^n$$

for some $\hat{\kappa}^* \in (\kappa, 1)$ and a $\hat{K}^* > 0$. Then by Lemma 2.28, the set $\{\widehat{W} \leq R\}$ is petite. By the second corollary of Theorem 6.2 of [MT92], there exists $\varsigma > 0$ such that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\varsigma t} \|P_t(x, \cdot) - \Pi(\cdot)\|_{2\widehat{W}} = 0, \quad x \in \mathbb{R}_{++}^n.$$

This concludes the proof of Theorem 2.25.

2.5 Extinction

In Section 2.2, we have seen that intuitively, if species j^* goes extinct then species $j^* + 1, \dots, n$ do too. Next lemma confirms that this intuition is correct. Remark that A. Hening and D. Nguyen already proved it in [HN18b, HN18c] with other tools since they didn't have the constant $\tilde{\delta}(n)$.

Lemma 2.34. *The following hold true.*

- (a) *If $\tilde{\delta}(n) > 0$, then $\tilde{\delta}(n-1) > 0$.*
- (b) *If $\tilde{\delta}(n-1) \leq 0$, then $\tilde{\delta}(n) < 0$.*
- (c) *If $\tilde{\delta}(n) \leq 0$, then there is no invariant probability measure supported by \mathbb{R}_{++}^n .*

Proof. First, notice that $\tilde{\delta}(n)$ can be rewritten as

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}(n) &= \tilde{a}_{10} \prod_{j=2}^n \tilde{a}_{j,j-1} - \sum_{k=2}^n \tilde{a}_{k0} \prod_{l=k+1}^n \tilde{a}_{l,l-1} \sum_{\alpha \in A_1^{k-1}} \prod_{j=1}^{k-1} \tilde{a}_{j,\alpha(j)} \\ &= \tilde{a}_{n,n-1} \left[\tilde{a}_{10} \prod_{j=2}^{n-1} \tilde{a}_{j,j-1} - \sum_{k=2}^{n-1} \tilde{a}_{k0} \prod_{l=k+1}^{n-1} \tilde{a}_{l,l-1} \sum_{\alpha \in A_1^{k-1}} \prod_{j=1}^{k-1} \tilde{a}_{j,\alpha(j)} \right] - \tilde{a}_{n0} \sum_{\alpha \in A_1^{n-1}} \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{a}_{j,\alpha(j)} \\ &= \tilde{a}_{n,n-1} \tilde{\delta}(n-1) - \tilde{a}_{n0} \sum_{\alpha \in A_1^{n-1}} \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{a}_{j,\alpha(j)}.\end{aligned}$$

Then parts (a) and (b) become clear. Suppose there exists $\mu \in \mathcal{P}_{inv}(\mathbb{R}_{++}^n)$, then by same arguments as in the proof of Proposition 2.20, $\tilde{\delta}(n) > 0$ and (c) follows. \square

Remark 2.35. *The same conclusions holds true with n replaced by i in last lemma and in particular if $\tilde{\delta}(i) \leq 0$ there is no invariant probability measure supported by $\mathbb{R}_{++}^{(i)}$. In particular, this implies that if there exists $1 \leq i \leq n$ such that $\tilde{\delta}(i) \leq 0$, then $\tilde{\delta}(k) < 0$ for all $k = i + 1, \dots, n$ and furthermore, there is no invariant probability measures supported by $\mathbb{R}_{++}^{(k)}$ for all $k = i, \dots, n$.*

2.5.1 Proof of Theorem 2.11

Since $\tilde{\delta}(j^*) > 0$ and $\sigma_1 > 0$ or $\sigma_{j^*} > 0$, by Theorem 2.6 we obtain that

$$(I) \quad \mathcal{P}_{inv}(\mathbb{R}_{++}^{j^*}) = \{\Pi\}.$$

(II) $(P_t^{(j^*)})$ converge to Π in total variation where $(P_t^{(j^*)})$ stands for the transition kernel restricted to the first j^* species.

Point (a) then follows from Remark 2.35 and (I).

By the form of the Lyapunov function \widehat{W} constructed in Theorem 2.25 and by the second Corollary of Theorem 6.2 of [MT92], (P_t) converge weakly uniformly on each compact set of $\mathbb{R}_{++}^{(j^*)}$, i.e. for each continuous bounded function $f : \mathbb{R}_{++}^{(j^*)} \rightarrow \mathbb{R}_+$ and each compact set $K \subset \mathbb{R}_{++}^{(j^*)}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in K} |P_t f(x) - \Pi f(x)| \right) = 0.$$

By [HN18b], we know that species x_1, \dots, x_{j^*} are persistent in probability, that is for any $\varepsilon > 0$, there exists a compact set $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}_{++}^{(j^*)}$ such that for all $x \in \mathbb{R}_{++}^n$,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x [(X_1(t), \dots, X_{j^*}(t)) \in K_\varepsilon] \geq 1 - \varepsilon.$$

Moreover, always by [HN18b], species x_{j^*+1}, \dots, x_n goes extinct almost surely. Then by the latter, the Feller property and by mimicking the proof of Theorem 1.1 (iii) of [HN18b], we get point (b), that is $P_t(x, \cdot)$ converges weakly to $\Pi(\cdot)$ for all $x \in \mathbb{R}_{++}^n$. \square

2.6 Appendix

2.6.1 Proof of Proposition 2.13 point 2

The first part is Proposition 3.1 in [Ben18] and the second one is Lemma 3.2 of [HN18c], but we give the proof for completeness.

Let $\tau_k = \inf \{t \geq 0 \mid U(X^x(t)) \geq k\}$ for x fixed. We write $a \wedge b$ for the infimum between a and b . By Dynkin's formula and hypothesis (2.5),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x [U(X(\tau_k \wedge t))] &= U(x) + \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_k \wedge t} LU(X(s)) ds \right] \\ &\leq U(x) + \beta \mathbb{E}_x [\tau_k \wedge t] - \alpha \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_k \wedge t} U(X(s)) ds \right]. \end{aligned}$$

By letting $k \rightarrow \infty$, we obtain that

$$\mathbb{E}_x [U(X(t))] \leq U(x) + \beta t - \alpha \mathbb{E}_x \left[\int_0^t U(X(s)) ds \right].$$

By definition of a Markov kernel and the Fubini-Tonelli theorem, we finally have

$$P_t U(x) \leq U(x) + \beta t - \alpha \int_0^t P_s U(x) ds.$$

By the same arguments as in the proof of Theorem 2.2 in [Ben18], we get

$$P_t U(x) \leq e^{-\alpha t} \left(U(x) - \frac{\beta}{\alpha} \right) + \frac{\beta}{\alpha}.$$

This implies that for all $x \in \mathbb{R}_+^n$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} P_t U(x) \leq \frac{\beta}{\alpha}.$$

We pass now to the proof of the second part. Let $\mu \in \mathcal{P}_{inv}(\mathbb{R}_+^n)$ and $K > 0$. By Fatou's lemma

$$\begin{aligned} \mu(K \wedge U) &= \mu [P_t(K \wedge U)] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mu [P_t(K \wedge U)] \\ &\leq \mu \left[\limsup_{t \rightarrow \infty} P_t(K \wedge U) \right] \\ &\leq \frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

By letting $K \rightarrow \infty$, we obtain that for every $\mu \in \mathcal{P}_{inv}(\mathbb{R}_+^n)$, $\mu U \leq \frac{\beta}{\alpha}$. □

2.6.2 Proof of Proposition 2.4

For $i \in \{1, \dots, n-2\}$, we define the map

$$f_i : A_{i+1}^n \cup A_{i+2}^n \rightarrow A_i^n$$

for $\alpha \in A_{i+1}^n$ and $\beta \in A_{i+2}^n$ by

$$f_i(\alpha)(j) = \begin{cases} \alpha(j) & \text{if } j \neq i, \\ i & \text{else,} \end{cases} \quad \text{and} \quad f_i(\beta) = \beta(i, i+1).$$

Then, it is straightforward that f_i is a bijection.

We now write explicitly the system $\tilde{F}(x) = 0$:

$$\begin{cases} \tilde{a}_{10} &= \tilde{a}_{11} x_1 + \tilde{a}_{12} x_2, \\ \tilde{a}_{i,i-1} x_{i-1} &= \tilde{a}_{i0} + \tilde{a}_{ii} x_i + \tilde{a}_{i,i+1} x_{i+1} \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \tilde{a}_{n,n-1} x_{n-1} &= \tilde{a}_{n0} + \tilde{a}_{nn} x_n. \end{cases}$$

One can check by induction that

$$x_i = \prod_{j=i+1}^n \frac{1}{\tilde{a}_{j,j-1}} \left[x_n \sum_{\alpha \in A_{i+1}^n} \prod_{j=i+1}^n \tilde{a}_{j,\alpha(j)} + \tilde{a}_{i+1,0} \prod_{j=i+2}^n \tilde{a}_{j,j-1} \right. \\ \left. + \sum_{k=i+2}^n \tilde{a}_{k0} \prod_{l=k+1}^n \tilde{a}_{l,l-1} \sum_{\alpha \in A_{i+1}^{k-1}} \prod_{j=i+1}^{k-1} \tilde{a}_{j,\alpha(j)} \right]$$

for $i = 1, \dots, n-1$.

Now, we determine the value of x_n . By the first equation of the system and the previous relation, we have

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{10} \prod_{j=2}^n \tilde{a}_{j,j-1} &= x_1 \tilde{a}_{11} \prod_{j=2}^n \tilde{a}_{j,j-1} + x_2 \tilde{a}_{12} \tilde{a}_{21} \prod_{j=3}^n \tilde{a}_{j,j-1} \\ &= x_n \left[\sum_{\alpha \in A_2^n} \tilde{a}_{11} \prod_{j=2}^n \tilde{a}_{j,\alpha(j)} + \sum_{\beta \in A_3^n} \tilde{a}_{12} \tilde{a}_{21} \prod_{j=3}^n \tilde{a}_{j,\beta(j)} \right] \\ &+ \tilde{a}_{20} \tilde{a}_{11} \prod_{j=3}^n \tilde{a}_{j,j-1} + \sum_{k=3}^n \tilde{a}_{k0} \prod_{l=k+1}^n \tilde{a}_{l,l-1} \sum_{\alpha \in A_2^{k-1}} \tilde{a}_{11} \prod_{j=2}^{k-1} \tilde{a}_{j,\alpha(j)} \\ &+ \tilde{a}_{30} \tilde{a}_{12} \tilde{a}_{21} \prod_{j=4}^n \tilde{a}_{j,j-1} + \sum_{k=4}^n \tilde{a}_{k0} \prod_{l=k+1}^n \tilde{a}_{l,l-1} \sum_{\beta \in A_3^{k-1}} \tilde{a}_{12} \tilde{a}_{21} \prod_{j=3}^{k-1} \tilde{a}_{j,\beta(j)} \\ &= x_n \sum_{\alpha \in A_1^n} \prod_{j=1}^n \tilde{a}_{j,\alpha(j)} + \sum_{k=2}^n \tilde{a}_{k0} \prod_{l=k+1}^n \tilde{a}_{l,l-1} \sum_{\alpha \in A_1^{k-1}} \prod_{j=1}^{k-1} \tilde{a}_{j,\alpha(j)}. \end{aligned}$$

The last equality follows from the fact that f_1 is a bijection. Then we have

$$x_n \sum_{\alpha \in A_1^n} \prod_{j=1}^n \tilde{a}_{j, \alpha(j)} = \tilde{\delta}(n).$$

As the sum to the left is strictly positive, we have that $x_n > 0$ iff $\tilde{\delta}(n) > 0$. We conclude the proof by noting that $x_n > 0$ iff $x > 0$.

Acknowledgments

Michel Benaïm and Antoine Bourquin are supported in part by the SNF grant 200020-196999. Dang H. Nguyen is supported in part by NSF through the grant DMS-1853467.

We thank two anonymous referees for their useful comments and valuable suggestions.

Chapter 3

Persistence in randomly switched Lotka-Volterra food chains

This chapter is based on my article [Bou23] and it has been published in ESAIM: Probability and Statistics, 27:324–344, 2023.

Abstract

We consider a dynamical system obtained by the random switching between N Lotka-Volterra food chains. Our key assumption will be that at least two vector fields only differ on the resources allocated to the growth rate of the first species. We will show that the existence of a positive equilibrium of the average vector field is equivalent to the persistence of all species. Under this condition, the semi-group converges exponentially quickly to a unique invariant probability measure on the positive orthant. If this condition fails to hold, we have two possibilities. The first possibility is the extinction case, in which a group of species becomes extinct exponentially quickly while the distribution of the remaining species converges weakly to another invariant probability measure. The second possibility is the critical case, in which there is a weaker form of persistence of some species, whilst some of the remaining become extinct exponentially quickly. We will also analyse the sensitivity of this model to the parameters.

Keywords Lotka-Volterra food chains; random switching; piecewise deterministic Markov processes; prey-predator; Hörmander condition; stochastic persistence

2020 MSC 34F05, 37A50, 37H15, 60J99, 92D25

3.1 Introduction

We consider a population model obtained by the random switching between finitely many vector fields. Each environment models a food chain that has the property that species n is the apex predator and hunts species $n - 1$, which in turn is the predator of species $n - 2$ and so on up to species 1 which is at the bottom of the food chain.

More precisely, let $E := \{1, \dots, N\}$ denote the set of possible environments. For each $j \in E$, the dynamic in *environment* j is given by a Lotka-Volterra food chain differential equation on the state space $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ defined as

$$dx(t) = G^j(x(t))dt. \quad (3.1)$$

Here $G^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is the vector field defined by

$$G_i^j(x) := x_i F_i^j(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

with

$$F_i^j(x) := \begin{cases} a_{10}^j - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 & i = 1, \\ -a_{i0}^j + a_{i,i-1}x_{i-1} - a_{ii}x_i - a_{i,i+1}x_{i+1} & i = 2, \dots, n-1, \\ -a_{n0}^j + a_{n,n-1}x_{n-1} - a_{nn}x_n & i = n, \end{cases} \quad (3.3)$$

where $a_{i0}^j, a_{11}, a_{ik} > 0$ for $i \neq k, k \neq 0$ and $a_{ii} \geq 0$ for $i = 1, \dots, n$.

The quantity a_{ii} represents the intra-specific competition rate of species i , a_{i0}^j its death rate (or growth rate for species 1), $a_{i,i-1}$ the rate at which it hunts species $i-1$, and $a_{i,i+1}$ its rate of being hunted by species $i+1$.

Another interpretation of the rate a_{i0}^j is a measure of the habitability of the environment j for species i . Indeed, if a_{i0}^j is small (or large for $i = 1$) then environment j is good for species i whilst if a_{i0}^j is large (or small for $i = 1$) then environment j is inhospitable for species i . An example of switching which would only affect these rates would be cleaning up a polluted area, thereby making the environment more liveable.

The switching model we consider in this paper is defined on $\mathbb{R}_+^n \times E$ by

$$\begin{cases} dX(t) = G^{J(t)}(X(t))dt, \\ \mathbb{P}(J(t+s) = j \mid \mathcal{F}_t, J(t) = i) = b_{ij}s + o(s) \quad \text{for } i \neq j, \end{cases} \quad (3.4)$$

where $J(t)$ is a continuous jump process on E , $\mathcal{F}_t = \sigma\{(X(s), J(s)) \mid s \leq t\}$ is the natural filtration and $b_{ij} > 0$ are the jump rates. The quantity $X_i(t)$ represents the density of species i at time t and $J(t)$ the switching between environments. We let $(Z^{(x,j)}(t))_{t \geq 0}$ denote the solution to (3.4) with initial condition $Z^{(x,j)}(0) = (x, j)$.

Let $\varphi^j = \{\varphi_t^j\}$ denote the flow induced by (3.1). We say that $M \subset \mathbb{R}_+^n$ is *positively invariant under φ^j* if

$$\varphi_t^j(M) \subset M \quad \text{for all } t \geq 0.$$

We also say that $M \times E$ is *positively invariant* for (3.4) if M is positively invariant under φ^j for all $j \in E$.

Proposition 3.1. *There exists a compact set $B \subset \mathbb{R}_+^n$ such that $B \times E$ is positively invariant for (3.4). Moreover for every $(x, j) \in \mathbb{R}_+^n \times E$, with probability 1 there exists a time $t \geq 0$ such that $Z^{(x,j)}(t) \in B \times E$.*

The proof is postponed to Section 3.4.4. This proposition allows us to restrict the state space of the process to $B \times E$ instead of $\mathbb{R}_+^n \times E$.

This type of process is a particular example of piecewise deterministic Markov process (PDMP) in the sense of Davis [Dav84]. We refer the reader to [Ben18, BLBMZ15, BS19b] for some general results on PDMP and [BL16, HS19] for other examples of randomly switching Lotka-Volterra vector fields.

Lotka-Volterra food chains were first considered by T. Gard and T. Hallam [GH79] in 1979 in the deterministic case with no intra-specific competition. They gave a criterion based uniquely on the coefficients for persistence and extinction. Recently, A. Hening

and D. Nguyen [HN18b, HN18c] extended the model to the stochastic differential equations setting and also considered the case with intra-specific competition. They provided conditions for persistence and extinction, mainly under the assumption that the noise is non-degenerate. M. Benaïm, A. Bourquin and D. Nguyen [BBN22] extended these results to the degenerate situation where the noise affects at least the top or the bottom species. They also provided some criteria for polynomial rates of convergence. This paper completes these studies.

We focus here on the situation where there are two environments for which all the rates except the first one (a_{10}) are equal. In other words, the switching between these environments only affects the growth rate of the first species. For instance, this may be the addition of some pollutant or some nutrient only affecting micro-organisms which are at the bottom of the food chain - see [FHVB11, Mor97] for example. This situation is in fact very natural. Indeed, natural changes in the wild are generally not abrupt and the first species is usually the most sensitive to small perturbations.

More precisely, throughout the paper we impose the following assumption.

Assumption 3.2. *There exist $\beta_1, \beta_2 \in E$ such that*

$$\begin{cases} a_{10}^{\beta_1} \neq a_{10}^{\beta_2}, \\ a_{i0}^{\beta_1} = a_{i0}^{\beta_2} \quad \text{for } i = 2, \dots, n. \end{cases}$$

By standard arguments on finite Markov chains, there exists a unique invariant probability measure of J on E defined by

$$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N) \tag{3.5}$$

where $\nu_j > 0$ and $\sum \nu_j = 1$. Let

$$G^\nu := \sum_{j=1}^N \nu_j G^j \tag{3.6}$$

denote the *average vector field*.

Roughly speaking, our main results can be summarized as the equivalence of the following conditions:

1. G^ν has a positive *equilibrium* q^* (i.e. $G^\nu(q^*) = 0$ and $q_i^* > 0$ for $i = 1, \dots, n$).
2. The trajectories induced by $\dot{x} = G^\nu(x)$ converge to q^* .
3. The PDMP defined by (3.4) is *stochastically persistent*.

Outline of contents Section 3.2 introduces some notation and states the three main results. The first result (Theorem 3.5) gives conditions ensuring persistence of all species, the second (Theorem 3.6) is devoted to the extinction case and the third one (Theorem 3.7) deals with the critical case. In Section 3.3 we introduce some general mathematical tools and establish some properties of the so-called *invasion rate* (defined by (3.9)). In Section 3.4 we prove the main theorems and Proposition 3.1. Finally, in Section 3.5 we investigate the sensitivity of the model subject to small disturbances.

3.2 Notation and results

3.2.1 Notation

Throughout the paper we let

$$B_+ := \left\{ x \in B \mid \prod_{i=1}^n x_i > 0 \right\} \quad \text{and} \quad \partial B := \left\{ x \in B \mid \prod_{i=1}^n x_i = 0 \right\}$$

denote respectively the interior and the boundary of B . For $1 \leq k < n$, we also let

$$B^k := \{x \in B \mid x_1, \dots, x_k \geq 0 \text{ and } x_{k+1}, \dots, x_n = 0\},$$

$$B_+^k := \{x \in B \mid x_1, \dots, x_k > 0 \text{ and } x_{k+1}, \dots, x_n = 0\},$$

$$\partial B^k := \left\{ x \in B^k \mid \prod_{i=1}^k x_i = 0 \right\}.$$

For every initial condition $(x, j) \in B \times E$, we let $(P_t)_{t \geq 0}$ denote the *transition kernel* of the process $Z^{(x,j)}(t)$ (the solution to (3.4)) defined by

$$P_t f(x, j) := \mathbb{E}[f(Z^{(x,j)}(t))]$$

for every measurable bounded function $f : B \times E \rightarrow \mathbb{R}$ and by

$$P_t((x, j), A) := P_t \mathbf{1}_A(x, j)$$

for all Borel set $A \subset B \times E$. We also let $\mathbb{P}_{(x,j)}$ and $\mathbb{E}_{(x,j)}$ denote the probability measure (respectively the expected value) conditioned on $Z^{(x,j)}(0) = (x, j)$.

A Borel set $A \subset B \times E$ is called *invariant* if

$$P_t \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A, \quad \text{for all } t \geq 0.$$

Given an invariant set $A \subset B \times E$ (typically $A = B_+ \times E$ or $A = \partial B \times E$), we let $\mathcal{P}_{inv}(A)$ (resp. $\mathcal{P}_{erg}(A)$) denote the *set of invariant* (resp. *ergodic*) *probability measures* of the process that are supported by A , i.e. $\mu(A) = 1$ for $\mu \in \mathcal{P}_{inv}(A)$ (resp. for $\mu \in \mathcal{P}_{erg}(A)$). Recall that an invariant probability measure μ is *ergodic* if for every invariant Borel set B , $\mu(B) \in \{0, 1\}$.

We also let $\left(\Pi_t^{(x,j)} \right)_{t \in \mathbb{R}_+}$ denote the *set of empirical occupation measures* of the process $(Z^{(x,j)}(t))$ with initial condition $(x, j) \in B \times E$, which are defined by

$$\Pi_t^{(x,j)}(\cdot) := \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{Z^{(x,j)}(s) \in \cdot\}} ds.$$

For a measurable function $f : B \times E \rightarrow \mathbb{R}$ and a measure μ , we write $\mu f := \int f(x) \mu(dx)$ whenever it makes sense.

We recall that the *total variation distance* between two probability measures μ and ν

on $B \times E$ is defined by

$$\|\mu - \nu\|_{TV} := \sup\{|\mu f - \nu f| \mid f : B \times E \rightarrow \mathbb{R} \text{ measurable bounded, } \|f\|_\infty < 1\}.$$

We say that a sequence of probability measures (μ_n) on $B \times E$ *converges weakly* to a probability measure μ if for all continuous bounded functions $f : B \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n f = \mu f$.

3.2.2 Main results

We will start by defining some general notions of persistence and extinction that will be used in this paper:

1. We say that the n species are *stochastically persistent* if there exists a unique invariant probability measure Π on $B_+ \times E$ such that $P_t((x, i), \cdot)$ converges in total variation to Π for all initial conditions $(x, i) \in B_+ \times E$.
2. Species $1, \dots, k$ with $k < n$ are *weakly persistent* if there is a unique invariant probability measure Π^k on $B_+^k \times E$ such that $P_t((x, i), \cdot)$ converges weakly to Π^k for all initial conditions $(x, i) \in B_+ \times E$.
3. Species i *goes extinct almost surely exponentially quickly with rate $\lambda < 0$* if for all $(x, j) \in B_+ \times E$,

$$P_{(x,j)} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln X_i^x(t)}{t} = \lambda \right) = 1.$$

We refer to [Sch12b] for an overview of the different forms of persistence and related notions.

Returning to our model, we note that intuitively due to the form of the G^j s, if species i goes extinct, species $i + 1$ must become extinct too since its only source of food is species i . Arguing in the same manner we conclude that species $i + 2, \dots, n$ must also become extinct. We shall see that this is indeed the case in the main results.

To do this, let us first recall that the average vector fields is defined by $G^\nu = \sum_{j=1}^N \nu_j G^j$ where $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N)$ is the unique invariant probability measure of J on E . It is important to note that G^ν is also a Lotka-Volterra food chain defined by (3.2), that is $G_i^\nu(x) = x_i F_i^\nu(x)$ where F^ν is defined by (3.3) with coefficients

$$a_{ik}^\nu := \sum_{j=1}^N \nu_j a_{ik}^j. \tag{3.7}$$

Remark also that $a_{ik}^\nu = a_{ik}$ for $k \neq 0$.

We say that a point x is an *equilibrium* of a function H provided $H(x) = 0$. Moreover we call it *positive* if all its coordinates are strictly positive (i.e. $x_i > 0$ for all i).

Lemma 3.3. *There exists a unique equilibrium for F^ν .*

This lemma has already been proved in [BBN22, Proposition 1] where an explicit formula is given in the proof. We can also refer to [HN18c, Section 4] where the authors also explicitly calculate the equilibrium in the case where $a_{ii} = 0$ for $i = 2, \dots, n$.

For $k < n$, we let $F_{|k}^\nu$ denote the average vector field for the model (3.4) with k species (i.e. F^ν defined by (3.6) with n replaced by k). This is important to remark that by the previous lemma, for each $1 \leq k \leq n - 1$, there exists a unique equilibrium for $F_{|k}^\nu$.

In fact, we will see that all the dynamics of the system will be determined by the equilibrium of F^ν and the one of $F_{|k}^\nu$ for $k = 1, \dots, n - 1$. This is why for the remaining of the paper, we let q^* denote the unique equilibrium of F^ν and q^{*k} denote the one of $F_{|k}^\nu$ for $k = 1, \dots, n - 1$. Note that these equilibria can have negative coordinates, i.e. $q^* \in \mathbb{R}^n, q^{*k} \in \mathbb{R}^k$. Next proposition investigates the relations between q^{*k} and q^{*k+1} .

Proposition 3.4. *The followings holds true.*

1. *If q^{*k+1} is positive then so too is q^{*k} .*
2. *The equilibrium q^{*k} is positive if and only if $q_k^{*k} > 0$.*
3. *If $q_k^{*k} \leq 0$ then $q_{k+1}^{*k+1} < 0$. In particular if q^{*k} is non-positive, then so too is q^{*k+1} .*

This proposition is a combination of Lemma 5.1 of [BBN22] and Lemma 4.1 of [HN18c]. Let us define the constant

$$\mathcal{I}_{k+1}^- := -a_{k+1,0}^\nu + a_{k+1,k} q_k^{*k}$$

which, as we shall see, is related to the survival of the species $k + 1$. It is important to remark that by Lemma 5.1 and the proof of Proposition 2.4 of [BBN22], $\mathcal{I}_{k+1}^- = C q_{k+1}^{*k+1}$ for a constant $C > 0$. Then by the second point of the previous proposition, \mathcal{I}_{k+1}^- is positive if and only if $F_{|k+1}^\nu$ has a positive equilibrium.

Now, it is essential to notice that $F_{|1}^\nu$ always has a positive equilibrium since $a_{10}^j > 0$ for all j . Then, we define K as the first $k < n$ such that $F_{|K}^\nu$ has a positive equilibrium and $F_{|K+1}^\nu$ not or $K = n$ if there is no such k .

In the next theorems, we will see that there are three possibilities for the dynamic. The first one is when $K = n$ in which all species persist. The second one occurs under the conditions that $K = k < n$ and that $\mathcal{I}_{k+1}^- < 0$ and we have the persistence of the k first one and the extinction of the $n - k$ last species. The last possibility is the critical case when $K = k < n$ and $\mathcal{I}_{k+1}^- = 0$ in which we have the persistence of the first k species and the extinction of the last $n - k - 1$ species while the $k + 1$ th dies in a more weaker sense.

Theorem 3.5 (Persistence). *Suppose that Assumption 3.2 holds and that $K = n$. Then,*

- (a) *There exists a unique invariant probability measure Π on $B_+ \times E$.*
- (b) *Π is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on $B \times E$ and for all $(x, j) \in B_+ \times E$, $\Pi_t^{(x,j)}$ converges weakly to Π a.s. as t goes to infinity.*
- (c) *There exist a continuous function $W : B_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ with $\lim_{x \rightarrow \partial B} W(x) = \infty$ and constants $\rho, C > 0$ such that for all $(x, j) \in B_+ \times E$*

$$\|P_t((x, j), \cdot) - \Pi(\cdot)\|_{TV} \leq C(1 + W(x)) e^{-\rho t}.$$

Further details on W will be given in section 3.4.1. Note also that this theorem shows in particular the stochastic persistence of the n species.

Theorem 3.6 (Extinction). *Suppose that Assumptions 3.2 holds, that $K = k < n$ and that $\mathcal{I}_{k+1}^- < 0$. Then,*

- (i) $\mathcal{P}_{inv}(B \times E) = \mathcal{P}_{inv}(B^k \times E)$ and there exists a unique invariant probability measure Π^k on $B_+^k \times E$.
- (ii) Species $k + 1, k + 2, \dots, n$ go extinct almost surely exponentially quickly with rates $\mathcal{I}_{k+1}^-, -a_{k+2,0}^\nu, \dots, -a_{n0}^\nu$ respectively.
- (iii) For all $(x, j) \in B_+ \times E$, the transition kernel $P_t((x, j), \cdot)$ converges weakly to $\Pi^k(\cdot)$.

In particular, species $1, \dots, k$ are weakly persistent.

Theorem 3.7 (Critical case). *Suppose that Assumptions 3.2 holds, that $K = k < n$ and that $\mathcal{I}_{k+1}^- = 0$. Then,*

- Species $1, \dots, k$ are persistence in mean, i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X_i(s) ds = q_i^{*k}$ for $i = 1, \dots, k$ where q_i^{*k} is the positive equilibrium of $F|_k^\nu$.
- Species $k + 2, k + 3, \dots, n$ go extinct almost surely exponentially quickly with rates $-a_{k+2,0}^\nu, -a_{k+3,0}^\nu, \dots, -a_{n0}^\nu$ respectively.
- $\mathcal{P}_{inv}(B_+^{k+1} \times E)$ is empty and the weak limit points of (Π_t) lies almost surely in $\mathcal{P}(B^k \times E)$. Moreover, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X_{k+1}(s) ds = 0$.

It is important to notice that very few has been done for the critical case. We can cite [NS20] in which a criterion and numerous examples are given.

3.3 Mathematical tools

In this section, we introduce some of the tools and properties needed for the proofs of the main theorems. We consider the general PDMP given by (3.4) assuming that the F^j s are C^∞ and sufficiently good for the process to be well defined at all $t \geq 0$, but are not necessarily of the form (3.3).

We define for $g : B \times E \rightarrow \mathbb{R}$ smooth in the first variable the *infinitesimal generator* \mathcal{L} by

$$\mathcal{L}g(x, i) := \langle G^i(x), \nabla g(x, i) \rangle + \sum_{j \in E} b_{ij} (g(x, j) - g(x, i)),$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ stands for the canonical scalar product of \mathbb{R}^n and b_{ij} s are the jump rates defined by (3.4) for $i \neq j$ and $b_{ii} = 0$ otherwise.

Definition 3.8. *A point $(y, i) \in B \times E$ is accessible from $(x, j) \in B \times E$ if for every neighbourhood U of (y, i) , there exists $t \geq 0$ such that $P_t((x, j), U) > 0$.*

We denote by $\Gamma_{(x,j)}$ the set of points (y, i) that are accessible from (x, j) and for $D \subset B \times E$, we let $\Gamma_D = \bigcap_{(x,j) \in D} \Gamma_{(x,j)}$ be the set of accessible points from D .

To characterize accessibility, we consider the deterministic control system associated to (3.4),

$$\dot{y}(t) = \sum_{j=1}^N u^j(t) G^j(y(t)), \quad (3.8)$$

where the control function $u = (u^1, \dots, u^N) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^N$ is at least piecewise continuous. We let $y(u, x, \cdot)$ denote the maximal solution to (3.8) starting from x with control function u . The next characterization is Proposition 6.2 in [Ben18].

Proposition 3.9. *Suppose that $(x, j), (y, i) \in B \times E$. Then $(y, i) \in \Gamma_{(x, j)}$ if and only if for every neighbourhood $O \subset B$ of y , there exists a control function u such that $y(u, x, t) \in O$ for some $t \geq 0$.*

We also need the so-called Hörmander conditions. Let

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &:= \{G^i - G^j \mid i, j = 1, \dots, N\}, \\ \mathcal{F}_k &:= \mathcal{F}_{k-1} \cup \{[V, G^j] \mid V \in \mathcal{F}_{k-1}, j = 1, \dots, N\} \quad k \geq 1, \end{aligned}$$

where $[\cdot, \cdot]$ denotes the Lie bracket operator. Recall that this operator is defined for every smooth vector fields $V, W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ and every $x \in \mathbb{R}^n$ by

$$[V, W](x) := DW(x)V(x) - DV(x)W(x),$$

where $DV(x) = \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j}$ stands for the Jacobian matrix of V at x .

For $x \in \mathbb{R}^n$ and $k \geq 1$, we write $\mathcal{F}_k(x) := \{V(x) \mid V \in \mathcal{F}_k\}$.

Definition 3.10. *We say that (3.4) satisfies the strong Hörmander condition at $(x, j) \in B \times E$ if there exists $k \in \mathbb{N}$ such that*

$$\text{span}(\mathcal{F}_k(x)) = \mathbb{R}^n.$$

It satisfies the weak Hörmander condition if \mathcal{F}_0 is weakened to $\mathcal{F}_0^I = \{G^1, \dots, G^N\}$ and there exist k and (x, j) like in the strong Hörmander condition.

By the form of the G^j s, spaces of the form

$$B_+^I := \{x \in B \mid x_i > 0 \text{ if } i \in I \text{ and } x_i = 0 \text{ otherwise}\}$$

for some $I \subset \{1, \dots, n\}$ are invariant for the process given by (3.4). An ergodic probability measure on the boundary must then be supported by such a space. More precisely for each $\mu \in \mathcal{P}_{\text{erg}}(\partial B \times E)$, there exists $I_\mu \subset \{1, \dots, n\}$ such that $\mu(B_+^{I_\mu} \times E) = 1$.

For each $\mu \in \mathcal{P}_{\text{inv}}(B \times E)$ and each $j \in E$, we define the measure μ^j by $\mu^j(A) := \mu(A \times \{j\})$ for all Borel set $A \subset B$. As an example consider the invariant measure μ defined by $\mu^j = \nu_j \delta_0 \mathbf{1}_{\{j\}}$ for all j where δ_0 is the Dirac measure at $0 \in B$ and ν is the unique invariant probability measure on E . Then $\mu = \delta_0 \otimes \nu$ and $I_\mu = \emptyset$.

Definition 3.11. *The invasion rate of species i with respect to $\mu \in \mathcal{P}_{inv}(\partial B \times E)$ is defined by*

$$\lambda_i(\mu) := \sum_{j=1}^N \int_B F_i^j(x) d\mu^j(x). \quad (3.9)$$

The next proposition gives a very useful property of the invasion rates with respect to an ergodic probability measure on the boundary.

Proposition 3.12. *Let $\mu \in \mathcal{P}_{erg}(\partial B \times E)$. Then for $i \in I_\mu$,*

$$\lambda_i(\mu) = 0.$$

Proof. Let the process $Z^\mu(t) = (X^\mu(t), J^\mu(t))$ be the solution of (3.4) with initial distribution $\mu \in \mathcal{P}_{erg}(\partial B \times E)$. Since F_i^j 's are \mathcal{C}^∞ and $B \times E$ is compact, then F_i^j are μ -integrable. For $i \in \{1, \dots, n\}$ by Birkhoff's ergodic theorem we get that

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(X_i^\mu(t))}{t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\dot{X}_i^\mu(s)}{X_i^\mu(s)} ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t F_i^{J^\mu(s)}(X^\mu(s)) ds \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{J^\mu(s)=j\}} F_i^j(X^\mu(s)) ds \\ &= \sum_{j=1}^N \int_B F_i^j(x) \mu^j(dx) = \lambda_i(\mu). \end{aligned}$$

For $i \in I_\mu$, if $\lambda_i(\mu) \neq 0$ the previous equation shows that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_i^\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } \lambda_i(\mu) < 0, \\ \infty & \text{if } \lambda_i(\mu) > 0, \end{cases}$$

which is in contradiction with $\mu(B_+^\mu \times E) = 1$. □

Remark 3.13. *This proof doesn't require that F^j is \mathcal{C}^∞ but only \mathcal{C}^0 , thus the previous result is much more general.*

It is also interesting to note that this result can be deduced from the equality $\mu \mathcal{L}g = 0$ with $g(x, i) = \ln(x_i)$.

Note again that this has already been proved in the setting of discrete Markov chains in [SBA11] and in the context of some general stochastic differential equations in [Ben18, HNC21], but not in the context of switching vector fields.

The next proposition shows a link between this invasion rate and the empirical occupation measure.

Proposition 3.14. *For all $(x^*, j^*) \in B_+ \times E$,*

$$\mathbb{P}_{(x^*, j^*)} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(X_i(t))}{t} - \lambda_i(\Pi_t) \right) = 0 \right) = 1. \quad (3.10)$$

Proof. Like in Proposition 3.12, we have that

$$\begin{aligned} \frac{\ln(X_i^{x^*}(t)) - \ln(x^*)}{t} &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{J^{j^*}(s)=j\}} F_i^j(X^{x^*}(s)) ds \\ &= \sum_{j=1}^N \int_B F_i^j(x) \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{Z^{(x^*,j^*)}(s) \in dx\}} ds \\ &= \sum_{j=1}^N \int_B F_i^j(x) \Pi_t^{(x^*,j^*)}(dx) = \lambda_i \left(\Pi_t^{(x^*,j^*)} \right). \end{aligned}$$

We conclude the proof by letting t go to infinity. \square

When the F^j s are of the form (3.3), we can determine exactly the form of the set I_μ for $\mu \in \mathcal{P}_{erg}(\partial B \times E)$. The next proposition has already been proved in [HN18b, Lemma A.1] in the stochastic differential equations setting. We extend here the result to the model with random switching.

Proposition 3.15. *Suppose that the F^j s are of the form (3.3), then for each $\mu \in \mathcal{P}_{erg}(\partial B \times E)$ there exists $1 \leq k < N$ such that $I_\mu = \{1, 2, \dots, k\}$ or $I_\mu = \emptyset$.*

Proof. We start by noting that $I_\mu = \emptyset$ if and only if $\mu = \delta_0 \otimes \nu$. We then suppose that $\mu \neq \delta_0 \otimes \nu$ and we write $I_\mu = \{i_1, \dots, i_k\}$ with $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. We first assume that $i_1 > 1$, then by definition $\mu(\{(x, j) \in B \times E \mid x_{i_1-1} = 0\}) = 1$. By Proposition 3.12,

$$0 = \lambda_{i_1}(\mu) = -a_{i_1,0}^\nu - a_{i_1,i_1} \sum_{j=1}^N \int x_{i_1} d\mu^j(x) - a_{i_1,i_1+1} \sum_{j=1}^N \int x_{i_1+1} d\mu^j(x)$$

where $a_{i_1,0}^\nu$ is defined by (3.7). Since the right-hand side is strictly negative, this is a contradiction. We now assume that there exists m such that $i_m - 1 > i_{m-1}$. Then $\mu(\{(x, l) \in B \times E \mid x_{i_m-1} = 0\}) = 1$ and once again by Proposition 3.12,

$$0 = \lambda_{i_m}(\mu) = -a_{i_m,0}^\nu - a_{i_m,i_m} \sum_{j=1}^N \int x_{i_m} d\mu^j(x) - a_{i_m,i_m+1} \sum_{j=1}^N \int x_{i_m+1} d\mu^j(x)$$

which also leads to a contradiction since the right-hand side is always strictly negative. \square

3.4 Proofs

3.4.1 Proof of Theorem 3.5

Theorem 3.5 will be deduced from the next one which is Corollary 6.3 of [Ben18].

Theorem 3.16. *Suppose that there exist $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ such that for all $\mu \in \mathcal{P}_{erg}(\partial B \times E)$*

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i(\mu) > 0. \quad (3.11)$$

Assume moreover that there exists $(p^, j) \in \Gamma_{(B_+ \times E)} \cap (B_+ \times E)$ which satisfies the strong Hörmander condition. Then*

- (a) *There exists a unique invariant probability measure Π on $B_+ \times E$.*
- (b) *Π is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure of $B \times E$ and for all $(x, j) \in B_+ \times E$, $\Pi_t^{(x,j)}$ converges weakly to Π a.s. as t goes to infinity.*
- (c) *For all $(x, j) \in B_+ \times E$,*

$$\|P_t((x, j), \cdot) - \Pi(\cdot)\|_{TV} \leq C(1 + W(x))e^{-\rho t}$$

for some $\rho > 0$ and

$$W(x) := e^{(\theta \max\{-\sum_{i=1}^n \alpha_i \ln(x_i), 1\})}$$

for some $\theta > 0$.

As said in the introduction, the positive equilibrium of F^ν , q^* , will play a central role and more precisely its variations (q^*, j) , $j \in E$ are points that will satisfy hypotheses of the previous theorem. We start by proving the accessibility of these points.

Proposition 3.17. *Assume that F^ν has a unique positive equilibrium q^* . Then for any $j \in E$, (q^*, j) is accessible for all $(x, i) \in B_+ \times E$.*

Proof. Since G^ν is still a Lotka-Volterra food chain, by Theorem 5.3.1 of [HS98], q^* is globally asymptotically stable for the dynamic induced by the system

$$\dot{Y}_i(t) = G_i^\nu(Y(t)) \quad i = 1, \dots, n.$$

This means that for every initial condition $y_0 \in B_+$, the solution $Y^{y_0}(t)$ has the property that $Y^{y_0}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} q^*$.

Then by Proposition 3.9, it is enough to choose $u(t) = \nu$ which is the invariant probability measure on E for the control function in (3.8) to have accessibility of (q^*, j) for all $j \in E$. □

Remark 3.18. *This proof also shows that if a point p^* is globally asymptotically stable for the dynamic induced by a linear combination of the vector fields G^j , then for all $k \in E$, (p^*, k) is accessible for all $(x, i) \in B_+ \times E$.*

We go on with the strong Hörmander condition.

Proposition 3.19. *Under assumptions of Theorem 3.5, the strong Hörmander condition holds true at (q^*, j) for all $j \in E$.*

Proof. By Assumption 3.2, there exist β_1, β_2 such that $G_i^{\beta_1} = G_i^{\beta_2}$ for $i = 2, \dots, n$ and $G_1^{\beta_1}(q^*) - G_1^{\beta_2}(q^*) \neq 0$. Let us consider the sequence (b^k) defined by

$$\begin{cases} b^1 = G^{\beta_1} - G^{\beta_2} = (G_1^{\beta_1} - G_1^{\beta_2})e_1, \\ b^{k+1} = [b^k, G^{\beta_1}], \end{cases}$$

where e_1 is the first vector of the canonical basis of \mathbb{R}^n . We want to prove that $\{b^1(q^*), \dots, b^n(q^*)\}$ is a basis of \mathbb{R}^n .

To do this, we first remark that DG^{β_1} is a tridiagonal matrix

$$DG^{\beta_1} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \ddots & \vdots \\ 0 & g_{32} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & g_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & g_{n,n-1} & g_{nn} \end{pmatrix}$$

with coefficients

$$\begin{cases} g_{ii}(x) = F_i^{\beta_1}(x) - a_{ii}x_i, \\ g_{i,i+1}(x) = -a_{i,i+1}x_i, \\ g_{i,i-1}(x) = a_{i,i-1}x_i. \end{cases}$$

It is then not hard to see that for each $x \in B_+$,

$$b_k^k(x) = (G_1^{\beta_1}(x) - G_1^{\beta_2}(x)) \prod_{i=2}^k a_{i,i-1}x_i \quad \text{and} \quad b_i^k(x) = 0 \text{ for } i > k.$$

By Assumption 3.2, $\{b^1(q^*), \dots, b^n(q^*)\}$ is a basis of \mathbb{R}^n and therefore the strong Hörmander condition holds true at (q^*, j) for all $j \in E$. □

Remark 3.20. *If Assumption 3.2 is replaced by*

$$\begin{cases} a_{n0}^{\beta_1} \neq a_{n0}^{\beta_2}, \\ a_{i0}^{\beta_1} = a_{i0}^{\beta_2} \quad \text{for } i = 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

Then a very similar proof also shows the strong Hörmander condition at (q^, j) for all $j \in E$.*

Remark 3.21. *This proof works also in a more general context but gives the weak Hörmander condition. Indeed, suppose that G^1 is a food chain living on \mathbb{R}_+^n having the properties that species i eats species $i-1$, is hunted by species $i+1$, can have intra-specific interactions and doesn't interact with the other species. In a mathematical point of view,*

this means that for all x in the interior of \mathbb{R}_+^n ,

$$\begin{cases} \frac{\partial G_i^1}{\partial x_{i+1}}(x) < 0 & \text{for } i = 1, \dots, n-1, \\ \frac{\partial G_i^1}{\partial x_{i-1}}(x) > 0 & \text{for } i = 2, \dots, n, \\ \frac{\partial G_i^1}{\partial x_j}(x) = 0 & \text{for } j \neq i-1, i, i+1. \end{cases}$$

We consider a second vector fields

$$G^2(x) := h(x)e_1$$

where $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is a smooth function whose induced dynamics leaves \mathbb{R}_+ invariant (i.e. $h(0) = 0$) and e_1 stands for the first vector of the canonical basis of \mathbb{R}^n . We consider the randomly switched model given by (3.4) for the vector fields G^1 and G^2 . Then the weak Hörmander condition holds true at $(x, j) \in \mathbb{R}_+^n \times \{1, 2\}$ provided $h(x) \neq 0$.

Indeed, let's take the same family of vector fields (b^k) as in the previous proposition, i.e.

$$\begin{cases} b^1 = G^2, \\ b^{k+1} = [b^k, G^1], \end{cases}$$

which has also the property that

$$b_k^k(x) = h(x) \prod_{i=2}^k \frac{\partial G_i^1}{\partial x_{i-1}}(x) \quad \text{and} \quad b_i^k(x) = 0 \text{ for } i > k.$$

Once again, this makes the set $\{b^1(x), \dots, b^n(x)\}$ a basis of \mathbb{R}^n provided $h(x) \neq 0$ and proves the weak Hörmander condition at (x, j) .

Remark 3.22. Under the assumptions of Theorem 3.5 and with Remark 3.21, by using Proposition 2.10 of [BHS18], we also find the strong Hörmander condition at (q^*, j) .

The next result is a key one to characterize the persistent condition (3.11).

Proposition 3.23. Condition (3.11) of Theorem 3.16 is equivalent to the existence of a unique positive equilibrium for F^ν .

Proof. We first suppose the existence of a positive equilibrium for F^ν . By Lemma 4 of [SBA11], condition (3.11) is equivalent to

$$\max_{i=1, \dots, n} \lambda_i(\mu) > 0, \tag{3.12}$$

for every $\mu \in \mathcal{P}_{inv}(\partial B \times E)$. We first prove (3.12) for $\mu \in \mathcal{P}_{erg}(\partial B \times E)$.

If $\mu = \delta_0 \otimes \nu$, then $\lambda_1(\mu) = a_{10}^\nu > 0$. If μ is any other ergodic probability measure, let $\bar{x}_i = \sum_{j=1}^N \int x_i \mu^j(dx)$. By Proposition 3.15, there exists $1 \leq k < n$ such that $\mu(B_+^k \times E) = 1$. Then,

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1}(\mu) &= -a_{k+1,0}^\nu + a_{k+1,k} \bar{x}_k \\ &= -a_{k+1,0}^\nu + a_{k+1,k} q_k^{*k} \end{aligned}$$

where we recall that q^{*k} is the equilibrium of $F|_k^\nu$. With Proposition 3.12, we obtain the system of equations $\lambda_i(\mu) = 0$ for $i = 1, \dots, k$. The solution of this system is exactly the equilibrium of $F|_k^\nu$, then $\bar{x}_k = q_k^{*k}$ and the second equality is therefore proved.

By Lemma 5.1 and the proof of Proposition 2.4 in [BBN22], $\lambda_{k+1}(\mu) = C q_{k+1}^{*k+1}$ for some constant $C > 0$. Then the existence of a positive equilibrium for F^ν and Proposition 3.4 prove the positivity of $\lambda_{k+1}(\mu)$.

Suppose now that $\mu \in \mathcal{P}_{inv}(\partial B \times E)$. Then by the ergodic decomposition theorem there exist $\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_k} \in \mathcal{P}_{erg}(\partial B \times E)$ and $p_j > 0$ such that

$$\mu = p_1 \mu_{i_1} + \dots + p_k \mu_{i_k}$$

with $i_1 < \dots < i_k$, $\mu_{i_j}(B_+^{i_j} \times E) = 1$ and $\sum_{j=1}^k p_j = 1$. Thus by Proposition 3.12, $\lambda_{i_1+1}(\mu_{i_j}) = 0$ for $j = 2, \dots, k$. By the ergodic case, this implies that $\lambda_{i_1+1}(\mu) = p_1 \lambda_{i_1+1}(\mu_{i_1}) > 0$.

Conversely, suppose that condition (3.11) holds. Then by Theorem 6.1 and Theorem 4.4 of [Ben18], there exists at least one ergodic probability measure μ supported by $B_+ \times E$. By mimicking the proof of Proposition 3.12, we get that

$$\lambda_i(\mu) = 0 \quad i = 1, \dots, n.$$

Let $\bar{x}_i = \sum_{j=1}^N \int x_i \mu^j(dx)$, then the previous system can be rewritten as follows

$$\begin{cases} 0 = a_{10}^\nu - a_{11} \bar{x}_1 - a_{12} \bar{x}_2 & i = 1, \\ 0 = -a_{i0}^\nu + a_{i,i-1} \bar{x}_{i-1} - a_{ii} \bar{x}_i - a_{i,i+1} \bar{x}_{i+1} & i = 2, \dots, n-1, \\ 0 = -a_{n0}^\nu + a_{n,n-1} \bar{x}_{n-1} - a_{nn} \bar{x}_n & i = n. \end{cases}$$

This system of equations has exactly one solution $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ which is by linearity the equilibrium of F^ν . Moreover since the support of μ is $B_+ \times E$, $\bar{x}_i > 0$ for all i and this concludes the proof. \square

The existence of a unique positive equilibrium for F^ν implies condition (3.11) by Proposition 3.23. It also implies accessibility of (q^*, j) for all $j \in E$ by Proposition 3.17. Moreover by Assumption 3.2 and Proposition 3.19, the strong Hörmander condition holds true at these points. Then Theorem 3.5 follows from Theorem 3.16.

3.4.2 Proof of Theorem 3.6

Part i) Under the hypotheses of Theorem 3.6, there is no invariant probability measure on $B_+^i \times E$ for $i = k+1, \dots, n$. Indeed, let us assume that there is one supported by $B_+^i \times E$ for one $i = k+1, \dots, n$. By mimicking the proof of Proposition 3.23, we can show that $F|_i^\nu$ has a unique positive equilibrium so that Proposition 3.4 gives a contradiction.

We obtain in particular that

$$\mathcal{P}_{inv}(B \times E) = \mathcal{P}_{inv}(B^k \times E)$$

which concludes the proof of the first part.

Part ii) We start by claiming that for all $\mu \in \mathcal{P}_{erg}(B^k \times E)$

$$\lambda_i(\mu) = \begin{cases} -a_{k+1,0}^\nu & \text{if } I_\mu = \{1, \dots, j\}, j < k \text{ and } i = k + 1, \\ \mathcal{I}_{k+1}^- & \text{if } I_\mu = \{1, \dots, k\} \text{ and } i = k + 1, \\ -a_{i0}^\nu & \text{if } i > k + 1. \end{cases} \quad (3.13)$$

By definition of λ_i , bottom and upper cases are immediate. Let μ be such that $I_\mu = \{1, \dots, k\}$, then by Proposition 3.12, $\lambda_i(\mu) = 0$ for $i = 1, \dots, k$. The solution of this system of equations is q^{*k} and then $\lambda_{k+1}(\mu) = -a_{k+1,0}^\nu + a_{k+1,k} q_k^{*k} = \mathcal{I}_{k+1}^-$. The claim is thus proved. We recall that by the assumptions, $\mathcal{I}_{k+1}^- < 0$.

It follows from (3.13) and Proposition 3.14 that for all $(x, j) \in B_+ \times E$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_i^x(t) = 0 \quad i = k + 1, \dots, n.$$

Now we claim that with probability 1 the weak limit points of $(\Pi_t^{(x,j)})$ when $t \rightarrow \infty$ are in $\mathcal{P}_{inv}(B_+^k \times E)$ for all $(x, j) \in B_+ \times E$.

Indeed by Theorem 2.2 of [Ben18], for every $(x, j) \in B_+ \times E$, $(\Pi_t^{(x,j)})$ is tight and the weak limit points are invariant probability measure almost surely. Suppose by contradiction that there is a point $(x, j) \in B_+ \times E$ such that with positive probability, there exists a sequence $(t_m)_m$ such that $\Pi_{t_m}^{(x,j)} \rightarrow \mu$ weakly, $\mu = \rho_1 \mu_1 + \rho_2 \mu_2$ with $\mu_1 \in \mathcal{P}_{inv}(B^{k-1} \times E)$, $\mu_2 \in \mathcal{P}_{inv}(B_+^k \times E)$, and $\rho_1 > 0$.

In the same manner as in the proof of Proposition 3.23, $\lambda_k(\mu_1) > 0$. Moreover Proposition 3.12 implies that $\lambda_k(\mu_2) = 0$. Then with Proposition 3.14 we get that

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln X_k^x(t_m)}{t_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_k(\Pi_{t_m}^x) = \lambda_k(\mu) > 0.$$

This is in contradiction with the compactness of B and the claim is therefore proved.

By Proposition 3.14, equation (3.13) and the property of $(\Pi_t^{(x,j)})$ above we finally get almost surely that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln X_i^x(t)}{t} = \begin{cases} -a_{i0}^\nu & \text{if } i > k + 1, \\ \mathcal{I}_{k+1}^- & \text{if } i = k + 1. \end{cases}$$

Then species $k + 1, k + 2, \dots, n$ go extinct almost surely exponentially quickly with rate $\mathcal{I}_{k+1}^-, -a_{k+2,0}^\nu, \dots, -a_{n0}^\nu$ respectively.

Part iii) We start this part by the next proposition which gives a characterisation of the remaining species x_1, \dots, x_k .

Proposition 3.24. *For every $\varepsilon > 0$, there exists a compact set $K \subset B_+^k \times E$ such that for all $(x, j) \in B_+ \times E$,*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{(x,j)}((X_1(t), \dots, X_k(t), J(t)) \in K) \geq 1 - \varepsilon.$$

Remark 3.25. *This property is called persistence in probability of species $1, \dots, k$ in [HN18b] and we still refer to [Sch12b] for an overview of the different forms of persistence.*

Proof. Since F_k^ν has a unique positive equilibrium, by Proposition 3.23 there exist $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$ such that

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i(\mu) > 0$$

for every $\mu \in \mathcal{P}_{inv}(\partial B^k \times E)$. Let $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ be a smooth function with bounded first and second derivatives such that $\xi(t) = t$ for $t \geq 1$ and let

$$V(x, j) := \xi \left(- \sum_{i=1}^k \alpha_i \ln(x_i) \right).$$

The latter with the help of Lemma 8.2 and Theorem 6.1 of [Ben18] (see also the proof of Theorem 1.14 of [Str19] or Lemma 3.15 of [BL16]) implies that there exist constants $T, \kappa, \theta > 0$ and $0 < \rho < 1$ such that the function

$$V_\theta := e^{\theta V}$$

satisfies on $B_+ \times E$

$$P_T V_\theta \leq \rho V_\theta + \kappa.$$

Let $(x, j) \in B_+ \times E$, then by the strong Markov property

$$\mathbb{E}_{(x,j)} [V_\theta(Z(mT))] \leq \rho^m V_\theta(x, j) + \kappa \sum_{i=0}^{m-1} \rho^i,$$

and therefore

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{(x,j)} [V_\theta(Z(mT))] \leq \frac{\kappa}{1 - \rho}. \quad (3.14)$$

It is straightforward that

$$\mathcal{L}V_\theta(x, j) = -\theta V_\theta(x, j) \sum_{i=1}^k \alpha_i F_i^j(x).$$

By compactness of M and smoothness of the F^j s, there exists $c > 0$ such that

$$\mathcal{L}V_\theta \leq cV_\theta.$$

For (x, j) fixed, let the stopping time $\tau_m := \inf \{t \geq 0 \mid V_\theta(Z^{(x,j)}(t)) \geq m\}$. For a, b , we write $a \wedge b$ for the minimum between a and b . Then by Dynkin's formula,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(x,j)} [V_\theta(Z(t \wedge \tau_m))] &= V_\theta(x, j) + \mathbb{E}_{(x,j)} \left[\int_0^{t \wedge \tau_m} \mathcal{L}V_\theta(Z(s)) ds \right] \\ &\leq V_\theta(x, j) + c \mathbb{E}_{(x,j)} \left[\int_0^{t \wedge \tau_m} V_\theta(Z(s)) ds \right]. \end{aligned}$$

Since $V_\theta(x, j) \rightarrow \infty$ when $x \rightarrow \partial B^k$, by letting $m \rightarrow \infty$, we obtain that

$$\mathbb{E}_{(x,j)} [V_\theta(Z(t))] \leq V_\theta(x, j) + c \mathbb{E}_{(x,j)} \left[\int_0^t V_\theta(Z(s)) ds \right],$$

and by using Gronwall's lemma, we get that

$$\mathbb{E}_{(x,j)} [V_\theta(Z(t))] \leq e^{ct} V_\theta(x, j).$$

For $t \in [mT, (m+1)T]$, the strong Markov property implies that

$$\mathbb{E}_{(x,j)} [V_\theta(Z(t))] \leq e^{cT} \mathbb{E}_{(x,j)} [V_\theta(Z(mT))]. \quad (3.15)$$

Finally, we combine (3.14) and (3.15) to obtain

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{(x,j)} [V_\theta(Z(t))] \leq e^{cT} \frac{\kappa}{1 - \rho}. \quad (3.16)$$

Now, let us fix $\varepsilon > 0$ and define the compact set

$$K := \left\{ (x, j) \in B_+^k \times E \mid \varepsilon V_\theta(x, j) \leq e^{cT} \frac{\kappa}{1 - \rho} \right\}.$$

Then with (3.16), we get that

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{(x,j)} (Z(t) \notin K) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{(x,j)} \left[\varepsilon e^{-cT} \frac{1 - \rho}{\kappa} V_\theta(Z(t)) \right] \leq \varepsilon,$$

which concludes the proof. □

By the hypotheses of Theorem 3.6, $F|_k^\nu$ has a unique positive equilibrium which implies by Theorem 3.5 that there exists a unique invariant probability measure Π^k on $B_+^k \times E$ such that the semi-group converges exponentially quickly to it. Moreover, with the form of the function W the convergence is uniform on each compact set of $B_+^k \times E$ meaning that for each continuous bounded function $f : B_+^k \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ and each compact set $K \subset B_+^k \times E$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sup_{(x,j) \in K} |P_t f(x, j) - \Pi^k f(x, j)| \right) = 0. \quad (3.17)$$

Moreover, by [BLBMZ15, Proposition 2.1] the process is Feller, meaning that for each $f : B \times E \rightarrow \mathbb{R}$ continuous bounded, the map $(t, (x, j)) \mapsto P_t f(x, j)$ is continuous.

Then, with the extinction exponentially quickly of species $k+1, \dots, n$, Proposition 3.24, (3.17) and the Feller property, we can imitate the proof of Theorem (iii) of [HN18b] to get the weak convergence of the semi-group $P_t((x, j), \cdot)$ to the invariant probability measure $\Pi^k(\cdot)$. This concludes the proof of the third part.

3.4.3 Proof of Theorem 3.7

The two first parts of Theorem 3.7 work in the same way as in the proof of Theorem 3.6 combined with Proposition 3.14. We also refer to the proof of Theorem 1.1 point (ii) of [HN18b].

For the last part, we want to use Corollary 2.8 of [NS20]. To do so, let us define the extinction set

$$M_0 := \{(x, i) \in B \times E \mid x_{k+1} = 0\},$$

the living set $M_+ := (B \times E) \setminus M_0$ and the map

$$\begin{aligned} H &: B \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, i) &\longmapsto H(x, i) := -F_{k+1}^i(x). \end{aligned}$$

Then by Theorem 6.1 of [Ben18], H , M_0 and M_+ satisfy the assumptions of [NS20] for some good function V . It thus remains to prove the following:

If $\mathcal{P}_{inv}(M_+)$ is not empty, then there is $\mu \in \mathcal{P}_{inv}(M_+)$ and $\tilde{\mu} \in \mathcal{P}_{inv}(M_0)$ such that

$$\mu H > \tilde{\mu} H.$$

First remark that with Proposition 3.15, $\mathcal{P}_{inv}(M_0) = \mathcal{P}_{inv}(B^k \times E)$. Moreover, since $F_{|k}^\nu$ has a positive equilibrium and with the help of Theorem 3.5, there is an ergodic probability measure $\tilde{\mu}$ such that $\tilde{\mu}(B_+^k \times E) = 1$. Then by (3.13), $\lambda_{k+1}(\tilde{\mu}) = \mathcal{I}_{k+1}^-$.

On the other hand, if there is $\mu \in \mathcal{P}_{inv}(M_+)$, then we can always choose it ergodic and with Proposition 3.12 and Proposition 3.15, $\mu(B_+^{k+1} \times E) > 0$. Then, the same argument as in Proposition 3.23 implies that $\mathcal{I}_{k+1}^- > 0$ and thus $\tilde{\mu} H < 0$.

We conclude the proof by noting that with the help of Lemma 7.5 of [Ben18] or of the proof of Proposition 2.7 of [NS20], $\mu H = 0$ for all $\mu \in \mathcal{P}_{inv}(M_+)$.

3.4.4 Proof of Proposition 3.1

Let

$$S(t) := X_1(t) + \sum_{i=2}^n \varepsilon_i X_i(t)$$

be the total weighted sum of all individuals of the population with weights $\varepsilon_i = \prod_{k=2}^i \frac{a_{k-1,k}}{a_{k,k-1}}$. In particular, $\varepsilon_i a_{i,i-1} = \varepsilon_{i-1} a_{i-1,i}$. In this proof, we omit the time dependence of the variables to simplify the notation, i.e. $S_t = S$ and $X_i(t) = X_i$. Then, using (3.4) and the definition of the ε_i s, we get that

$$\begin{aligned} \dot{S} &= a_{10}^j X_1 - a_{11} X_1^2 - \sum_{i=2}^n \varepsilon_i a_{ii} X_i^2 - \sum_{i=2}^n \varepsilon_i a_{i0}^j X_i \\ &\quad - a_{12} X_1 X_2 + \varepsilon_2 a_{21} X_1 X_2 + \sum_{i=3}^n \varepsilon_i a_{i,i-1} X_{i-1} X_i - \varepsilon_{i-1} a_{i-1,i} X_{i-1} X_i \\ &\leq a_{10}^j X_1 - a_{11} X_1^2 - \sum_{i=2}^n \varepsilon_i a_{i0}^j X_i. \end{aligned}$$

Let $\gamma = \max_{j \in E} a_{10}^j$ and $\varepsilon = \min_{j \in E} \min_{i=2, \dots, n} \varepsilon_i a_{i0}^j$, then

$$\begin{aligned} \dot{S} &\leq \gamma X_1 - a_{11} X_1^2 - \varepsilon \sum_{i=2}^n X_i \\ &= (\gamma + \varepsilon) X_1 - a_{11} X_1^2 - \varepsilon S \\ &\leq R - \varepsilon S \end{aligned}$$

for some constant $R > 0$. If $S \geq \frac{R}{\varepsilon}$, then $\dot{S} \leq 0$ and if $S(0) \leq \frac{R}{\varepsilon}$, then $S(t) \leq \frac{R}{\varepsilon}$ for all $t \geq 0$. This makes the compact set

$$B := \left\{ x_1 + \sum_{i=2}^n \varepsilon_i x_i \leq \frac{R}{\varepsilon} + 1 \right\}$$

positively invariant under φ^j (the flow induced by (3.2)) for all $j \in E$. Then $B \times E$ is positively invariant for (3.4) and for every initial condition $(x, j) \in \mathbb{R}_+^n \times E$, with probability 1, there exists a time $t \geq 0$ such that $Z^{(x,j)}(t) \in B \times E$.

3.5 Sensitivity

In this part, we will further analyse the sensitivity of model (3.4). First, we will see that if all the vector fields are in some sense good for species k , then this species survives in the switched model. Moreover, if all environments are good for at most the k first species, then species $k + 1, \dots, n$ become extinct in the PDMP setting. Note that, this property is not true in general, see [BL16] for example.

In a second step, we will see that if we perturb the coefficients a_{ik} , $k \neq 0$, in each environment, so that in environment j , a_{ik} becomes a_{ik}^j , then for a sufficiently small perturbation, the noisy model still satisfies assumptions of Theorem 3.5 or of Theorem 3.6 if the non-disturbed one satisfies them. Note that in the following, we will see that it is not possible to calculate explicitly \mathcal{I}_{k+1}^- for the perturbed model so that it is not possible to say something about the critical case (i.e. Theorem 3.7) for the perturbed model.

To do so, we first need to introduce some notations. Consider the more general situation where the vector fields F^j are defined by (3.3) but each coefficient depends on the environment, that is a_{ik} , $k \neq 0$, becomes a_{ik}^j . For $a, b, m \in \mathbb{N}$, $a \leq b$, we let $A_a^b(m)$ denote the set of permutations of $\{a, a + 1, \dots, b - 1, b\}$ that are product of m disjoint transpositions of the form $(i \ i + 1)$ and we let

$$A_a^b := \bigcup_{m=0}^{\infty} A_a^b(m).$$

Remark that $A_a^b(m) = \emptyset$ if $m > \frac{b-a+1}{2}$. Now, we define for $1 \leq k \leq n$ and $j \in E$,

$$\delta^j(k) := a_{10}^j \prod_{i=2}^k a_{i,i-1}^j - \sum_{m=2}^k a_{m0}^j \prod_{l=m+1}^k a_{l,l-1}^j \sum_{\alpha \in A_1^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} a_{i,\alpha(i)}^j. \quad (3.18)$$

Example 3.26.

$$\begin{aligned} A_1^3 &= \{Id_{\{1,2,3\}}, (1\ 2), (2\ 3)\}, \\ A_1^4 &= \{Id_{\{1,2,3,4\}}, (1\ 2), (2\ 3), (3\ 4), (1\ 2)(3\ 4)\}, \\ \delta^j(2) &= a_{10}^j a_{21}^j - a_{20}^j a_{11}^j, \\ \delta^j(3) &= a_{10}^j a_{32}^j a_{21}^j - a_{20}^j a_{32}^j a_{11}^j - a_{30}^j a_{22}^j a_{11}^j - a_{30}^j a_{12}^j a_{21}^j. \end{aligned}$$

We already know that $F_{|k}^j$ has a unique equilibrium $(\bar{x}_1^j, \dots, \bar{x}_k^j)$ and moreover the proof of Proposition 2.4 of [BBN22] gives us an explicit formula for \bar{x}_k^j ,

$$\bar{x}_k^j \sum_{\alpha \in A_1^k} \prod_{i=1}^k a_{i,\alpha(i)}^j = \delta^j(k). \quad (3.19)$$

Since F^ν is still a Lotka-Volterra food chain, we define $\delta^\nu(k)$ in the same way with a_{im}^j replaced by a_{im}^ν and the formula (3.19) holds for q^{*k} , the equilibrium of $F_{|k}^\nu$. Another point is that by (3.19) and the proof of Proposition 2.4 of [BBN22], $F_{|k}^j$ has a unique positive equilibrium if and only if $\delta^j(k) > 0$ (and the same holds for $F_{|k}^\nu$ and $\delta^\nu(k)$).

Let's go back to the case where the vector fields F^j are defined by (3.3). Let

$$\Delta_k := \sum_{\alpha \in A_1^k} \prod_{i=1}^k a_{i,\alpha(i)}^j = \sum_{\alpha \in A_1^k} \prod_{i=1}^k a_{i,\alpha(i)}. \quad (3.20)$$

The second equality follows from the fact that $a_{im}^j = a_{im}$ for $m \neq 0$. Then, for $\mu \in \mathcal{P}_{erg}(\partial B \times E)$ such that $\mu(B_+^k \times E) = 1$, by the proof of Proposition 3.23 we have that

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1}(\mu) &= -a_{k+1,0}^\nu + a_{k+1,k} q_k^{*k} \\ &= \frac{1}{\Delta_k} \delta^\nu(k+1) \\ &= \frac{1}{\Delta_k} \left[a_{10}^\nu \prod_{i=2}^{k+1} a_{i,i-1} - \sum_{m=2}^{k+1} a_{m0}^\nu \prod_{l=m+1}^{k+1} a_{l,l-1} \sum_{\alpha \in A_1^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} a_{i,\alpha(i)} \right] \\ &= \frac{1}{\Delta_k} \sum_{j=1}^N \nu_j \left[a_{10}^j \prod_{i=2}^{k+1} a_{i,i-1} - \sum_{m=2}^{k+1} a_{m0}^j \prod_{l=m+1}^{k+1} a_{l,l-1} \sum_{\alpha \in A_1^{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} a_{i,\alpha(i)} \right] \\ &= \frac{1}{\Delta_k} \sum_{j=1}^N \nu_j \delta^j(k+1). \end{aligned}$$

The second equality follows from Lemma 5.1 of [BBN22]. Recall that by the proofs of the main theorems of this paper, the survival of species $k+1$ only depends on the sign of $\lambda_{k+1}(\mu)$. This works in the same manner for one environment $j \in E$ but with the sign of $\delta^j(k+1)$. Indeed, if $\delta^j(n) > 0$, then by Proposition 3.17 environment j causes all species to survive. Otherwise, by Lemma 5.1 of [BBN22] (or Proposition 3.4), if $\delta^j(i) > 0$ then

$\delta^j(i-1) > 0$, this implies that there exists $m < n$ such that $\delta^j(m) > 0$ and $\delta^j(m+1) \leq 0$. One can show that $(\bar{x}_1^j, \dots, \bar{x}_m^j, 0, \dots, 0)$ is globally asymptotically stable for the dynamic induced by F^j where $(\bar{x}_1^j, \dots, \bar{x}_m^j)$ is the positive equilibrium of $F_{|m}^j$ (this works in the same way as in [HS98, Theorem 5.3.1]). In this environment, species $1, \dots, m$ survive while the others become extinct.

In other words, environment j is favourable to species k if and only if $\delta^j(k) > 0$. By the latter equation, this means that if all environments are good for species k then the PDMP is also good for species k , meaning that with probability 1, species k survives. Moreover, if all environments are good for at most k species then the PDMP is bad for species $k+1, \dots, n$.

Now, we will investigate the sensitivity of the model. Consider another PDMP Lotka-Volterra food chain defined by (3.4) with the same jump rates b_{ij} and with also N environments \tilde{F}^j defined by (3.3) but whose coefficients depend on the environment, that is

$$\tilde{F}_i^j(x) := \begin{cases} \tilde{a}_{10}^j - \tilde{a}_{11}^j x_1 - \tilde{a}_{12}^j x_2 & i = 1, \\ -\tilde{a}_{i0}^j + \tilde{a}_{i,i-1}^j x_{i-1} - \tilde{a}_{ii}^j x_i - \tilde{a}_{i,i+1}^j x_{i+1} & i = 2, \dots, n-1, \\ -\tilde{a}_{n0}^j + \tilde{a}_{n,n-1}^j x_{n-1} - \tilde{a}_{nn}^j x_n & i = n. \end{cases} \quad (3.21)$$

Then there exist $\varepsilon > 0$ such that

$$|a_{im}^j - \tilde{a}_{im}^j| \leq \varepsilon \quad \forall i, m \text{ and } \forall j \in E. \quad (3.22)$$

We call the *basic model* for the one with the environments F^j and the *noisy model* for the one with the environments \tilde{F}^j .

Proposition 3.27. *Let μ be an ergodic probability measure for the basic model and let μ_ε be another ergodic probability measure for the noisy one. Suppose that $I_\mu = I_{\mu_\varepsilon} = \{1, \dots, k\}$ so that $\mu(B_+^k \times E) = \mu_\varepsilon(B_+^k \times E) = 1$, then for ε sufficiently small, $\lambda_{k+1}(\mu)$ and $\lambda_{k+1}(\mu_\varepsilon)$ have the same sign.*

Proof. By Proposition 3.12, we have that

$$\lambda_i(\mu_\varepsilon) = 0 \quad i = 1, \dots, k,$$

that is

$$\begin{cases} 0 = \tilde{a}_{10}^\nu - \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{11}^j \int x_1 d\mu_\varepsilon^j - \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{12}^j \int x_2 d\mu_\varepsilon^j, \\ 0 = -\tilde{a}_{i0}^\nu + \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{i,i-1}^j \int x_{i-1} d\mu_\varepsilon^j - \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{ii}^j \int x_i d\mu_\varepsilon^j - \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{i,i+1}^j \int x_{i+1} d\mu_\varepsilon^j & i \neq 1, k, \\ 0 = -\tilde{a}_{k0}^\nu + \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{k,k-1}^j \int x_{k-1} d\mu_\varepsilon^j - \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{kk}^j \int x_k d\mu_\varepsilon^j. \end{cases}$$

Let $\tilde{x}_i^\varepsilon := \sum_{j=1}^N \int x_i d\mu_\varepsilon^j$, then by (3.22)

$$\begin{cases} a_{10}^\nu + \varepsilon \geq (a_{11} - \varepsilon) \tilde{x}_1^\varepsilon + (a_{12} - \varepsilon) \tilde{x}_2^\varepsilon, \\ 0 \leq -(a_{i0}^\nu - \varepsilon) + (a_{i,i-1} + \varepsilon) \tilde{x}_{i-1}^\varepsilon - (a_{ii} - \varepsilon) \tilde{x}_i^\varepsilon - (a_{i,i+1} - \varepsilon) \tilde{x}_{i+1}^\varepsilon & i \neq 1, k, \\ 0 \leq -(a_{k0}^\nu - \varepsilon) + (a_{k,k-1} + \varepsilon) \tilde{x}_{k-1}^\varepsilon - (a_{kk} - \varepsilon) \tilde{x}_k^\varepsilon. \end{cases}$$

Then it is straightforward that

$$\tilde{x}_k^\varepsilon \leq f_k(\varepsilon) = \frac{\delta^\varepsilon(k)}{\Delta_k^\varepsilon} \quad (3.23)$$

where $\delta^\varepsilon(k)$ and Δ_k^ε are defined by (3.18) and (3.20) respectively but with a_{10}^j replaced by $a_{10}^\nu + \varepsilon$, a_{i0}^j by $a_{i0}^\nu - \varepsilon$ $i \neq 1$, $a_{i,i-1}^j$ by $a_{i,i-1} + \varepsilon$ and $a_{ii}^j, a_{i,i+1}^j$ by $a_{ii}^j - \varepsilon, a_{i,i+1}^j - \varepsilon$.

In the same manner we obtain that

$$\tilde{x}_k^\varepsilon \geq f_k(-\varepsilon) = \frac{\delta^{-\varepsilon}(k)}{\Delta_k^{-\varepsilon}} \quad (3.24)$$

where $\delta^{-\varepsilon}(k)$ and $\Delta_k^{-\varepsilon}$ are defined as before with ε replaced by $-\varepsilon$. Note that $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_k(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_k(-\varepsilon) = q_k^{*k}$.

Then if we let $g_{k+1}(\varepsilon) := -(a_{k+1,0}^\nu - \varepsilon) + (a_{k+1,k} + \varepsilon)f_k(\varepsilon)$,

$$g_{k+1}(-\varepsilon) \leq \lambda_{k+1}(\mu_\varepsilon) \leq g_{k+1}(\varepsilon).$$

In particular, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_{k+1}(\varepsilon) = \lambda_{k+1}(\mu)$ which concludes the proof. \square

As a result, if the noisy model satisfies Assumption 3.2 and the basic one satisfies assumptions of Theorem 3.5 or Theorem 3.6 then the conclusions of these theorems are also true for the noisy model.

Indeed, suppose first that the basic model satisfies assumptions of Theorem 3.5. Then for $\varepsilon > 0$ sufficiently small, by the previous proposition and Proposition 3.23, condition (3.11) of Theorem 3.16 is satisfied. Consider \tilde{G}^ν the average vector field of the noisy model, then

$$a_{ik}^\nu - \varepsilon \leq \tilde{a}_{ik}^\nu \leq a_{ik}^\nu + \varepsilon \quad \forall i, k.$$

Like in the proof of Proposition 3.27, for $\varepsilon > 0$ sufficiently small, as F^ν has a positive equilibrium, so does \tilde{F}^ν . Then by Proposition 3.17, Assumption 3.2, and Proposition 3.19, this equilibrium is accessible and verifies the strong Hörmander condition. By Theorem 3.16, the same conclusions as for basic model apply for the noisy one.

Now suppose that the basic model satisfies assumptions of Theorem 3.6. By Proposition 3.27, for sufficiently small $\varepsilon > 0$, the proof of Theorem 3.6 works in the same way for the noisy model. The only thing that needs to be clarified is the rate of extinction of species $k+1$, $\mathcal{I}_{k+1}^{\varepsilon-}$. Indeed, we cannot have an explicit formula for this since we are not able to calculate $\lambda_{k+1}(\mu_\varepsilon)$ explicitly for μ_ε an ergodic probability measure for the noisy model such that $I_{\mu_\varepsilon} = \{1, \dots, k\}$.

However, with the help of the bounds of $\tilde{x}_{k+1}^\varepsilon$ given by (3.23) and (3.24), we can have an estimate of it

$$\frac{\delta^{-\varepsilon}(k+1)}{\Delta_k^{-\varepsilon}} \leq \mathcal{I}_{k+1}^{\varepsilon-} \leq \frac{\delta^\varepsilon(k+1)}{\Delta_k^\varepsilon}.$$

So that the extinction part works in the same way for the noisy model as for the basic one.

Note that it also works the other way round. Indeed, let us consider a PDMP Lotka-Volterra food chain with vector fields \tilde{F}^j defined by (3.21) which satisfies Assumption

3.2. In order to have the conclusions of Theorem 3.5 or of Theorem 3.6, it suffices to find $\varepsilon > 0$ sufficiently small and coefficients a_{ik} , $k \neq 0$ such that

$$|a_{ik} - \tilde{a}_{ik}^j| < \varepsilon \quad \forall i, k \text{ and } j \in E$$

and such that the PDMP with vector fields F^j with coefficients a_{ik} , $k \neq 0$ and a_{i0}^j satisfies assumptions of Theorem 3.5 or Theorem 3.6 and Proposition 3.27.

Acknowledgments

This work was supported by the SNF grants 200020-196999. I thank Michel Benaïm and Edouard Strickler for useful discussions and reviews, and Oliver Tough for his kind comments on the introduction.

I thank the two anonymous referees for their useful comments on the presentation of the main results. In particular, it helped me to realise that the critical case was not being addressed, which is now the case.

Chapter 4

Invariant measure for conditional semi-flows induced by random absorbing boundaries

This chapter is a joint work with William Oçafrain which has not yet been submitted to Arxiv. It is currently being generalised with the help of William Oçafrain and Oliver Tough.

Abstract

We study a process absorbed by randomly moving boundaries and the process induced by the conditional semi-flows of the previous one. More precisely, we prove under suitable conditions the convergence in Wasserstein distance of the second process toward a unique stationary distribution on the space of probability measures. We also prove under these conditions the existence of a Q -process and a quasi-ergodic distribution for the first process. We also consider an example of Markov chain on a finite state space.

Keywords Quasi-stationarity; quasi-ergodic distribution; Q -process; random moving boundaries; time-inhomogeneous Markov processes; random walk

2020 MSC 60B10; 60J25; 37A25; 60F99; 60J10

4.1 Introduction

This paper aims to study some asymptotic properties of Markov processes conditioned not to be absorbed by randomly moving boundaries. This is a follow-up to a series of papers dealing with *quasi-stationarity with deterministic moving boundaries*, first studied in the Ph.D. thesis [Oça19] and then in the papers [Oça18, Oça20b, Oca20c, Oça20a].

Quasi-stationarity with moving boundaries refers to the study of Markov processes $(X_t)_{t \geq 0}$ conditioned not to hit a moving boundary $(A_t)_{t \geq 0}$, where $(A_t)_{t \geq 0}$ is a collection of measurable subsets representing the moving absorbing subset for the process X . In this theory, we particularly study the asymptotic behavior of conditional probability measures, such as the marginal law of X_t conditioned not to be absorbed

$$\mathbb{P}(X_t \in \cdot \mid \tau_A > t),$$

where τ_A is the hitting time of the moving boundary $(A_t)_{t \geq 0}$ by the process X , i.e.

$$\tau_A := \inf\{t \geq 0 : X_t \in A_t\}.$$

Another topic of interest is the asymptotic behavior of the probability measure

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{X_s \in \cdot} ds \mid \tau_A > t \right),$$

when t goes to infinity. In particular, when it converges, the limiting probability measure is called the *quasi-ergodic distribution*.

The last main concept of interest is the so-called *Q-process*, understood as the process X "conditioned never to be absorbed" and whose the law on $[0, t]$ is defined by the limiting law of

$$\mathbb{P}((X_u)_{0 \leq u \leq t} \in \cdot \mid \tau_A > T + t),$$

when T goes to infinity.

In this paper, we want to study these same asymptotic properties for a moving boundary taken randomly. This means in particular that the probability measures mentioned earlier are now random probability measures for which we want to study the almost sure convergence. In particular, under some suitable conditions that we will spell out later, we will prove that a *Q-process* and a quasi-ergodic distribution exist almost surely.

The paper is organised as follows.

- In Section 4.2, we first present the notions of quasi-stationarity with deterministic moving boundaries. Then, we deal with the random moving boundaries case and present the general assumptions made on the process X as well as the main results of the paper (Theorem 4.5 and Theorem 4.6).
- In Section 4.3, we prove Theorem 4.5 which is concerned by the asymptotic behavior of $\mathbb{P}(X_t \in \cdot \mid \tau_A > t)$ when A is a random moving boundary.
- In Section 4.4, we prove the almost sure existence of a *Q-process* and a quasi-ergodic distribution which are the purpose of Theorem 4.6.
- Finally, in Section 4.5, we provide an example of a Markov chain on a finite state space.

4.2 Main assumptions and results

This section aims to present the main assumptions of this paper, as well as the main results that will be proved in the rest of the paper. We begin by presenting some results on quasi-stationarity with moving boundaries that have been proven in the literature.

4.2.1 A few results about quasi-stationarity with moving boundaries

We consider a càdlàg Markov process $X = (X_t)_{t \geq 0}$ living on a Polish state space E . We endow the process X with a family of probability measures $(\mathbb{P}_{s,x})_{s \geq 0, x \in E}$ satisfying

$$\mathbb{P}_{s,x}(X_s = x) = 1$$

for all $s \geq 0$ and $x \in E$.

We take a family of measurable subsets $(A_t)_{t \geq 0}$ of E with respect to the Borel σ -algebra of E and we denote by τ_A the *hitting time of the boundary A by the process X* , that is,

$$\tau_A := \inf\{t \geq 0 : X_t \in A_t\}.$$

We also let $E_t := E \setminus A_t$ denote the *living state space at time t* .

Implicitly, we will consider that $(X_t)_{t \geq 0}$ and $(A_t)_{t \geq 0}$ have sufficiently good properties so that τ_A is a stopping time with respect to the natural filtration of X , denoted by $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. This can be done for example by assuming that $(X_t)_{t \geq 0}$ has almost surely càdlàg paths and $(A_t)_{t \geq 0}$ are closed subsets of E .

As mentioned in the introduction, quasi-stationarity with moving boundaries carries on studying, in a very broad meaning, asymptotic behavior for processes conditioned not to be absorbed by moving boundaries. A very natural question concerns the asymptotic behavior of the probability measures $\mathbb{P}_{s,\mu}(X_t \in \cdot \mid \tau_A > t)$, for some initial distribution μ , when t goes to infinity. If a weak convergence of these probability measures is not expected in the general case (a convergence could be expected when the boundaries are "converging", see [Oça20b]), we could however expect a mixing property with respect to a given distance (in general the total variation distance). That is, for two different initial distributions μ_1, μ_2 , the distance in total variation between $\mathbb{P}_{s,\mu_1}(X_t \in \cdot \mid \tau_A > t)$ and $\mathbb{P}_{s,\mu_2}(X_t \in \cdot \mid \tau_A > t)$ goes to 0 when t goes to infinity. This can be seen as a phenomenon of asymptotic oblivion of the initial distribution for the conditional marginal law.

This property holds true, provided the following assumption.

Assumption 4.1 (Assumption (A'), [Oça20b]). *There exists a family of probability measures $(\nu_t)_{t \geq 0}$ such that ν_t is defined on E_t , a time $t_0 \geq 0$ and two constants $c_1, c_2 > 0$ such that*

(A'1) *For all $s \geq 0$ and $x \in E_s$,*

$$\mathbb{P}_{s,x}(X_{s+t_0} \in \cdot \mid \tau_A > s + t_0) \geq c_1 \nu_{s+t_0}(\cdot).$$

(A'2) *For all $s \leq t$ and $x \in E_s$,*

$$\mathbb{P}_{s,\nu_s}(\tau_A > t) \geq c_2 \mathbb{P}_{x,s}(\tau_A > t).$$

Remark 4.2. *This assumption is the time-inhomogeneous version of [CV16a, Assumption (A)]. See also [BCG20, Definition 2.2].*

Under Assumption 4.1, a mixing property has been proved in [CV18, Theorem 2.1] by showing the existence of two constants $C, \gamma > 0$ such that, for all $s \leq t$ and all initial

distributions μ_1, μ_2 on E_s ,

$$\|\mathbb{P}_{s,\mu_1}(X_t \in \cdot \mid \tau_A > t) - \mathbb{P}_{s,\mu_2}(X_t \in \cdot \mid \tau_A > t)\|_{TV} \leq Ce^{-\gamma(t-s)},$$

where $\|\cdot\|_{TV}$ is the usual total variation norm. In the original paper [CV18], the authors actually considered a weaker condition than Assumption 4.1, allowing c_1 and c_2 to implicitly depend on s , allowing therefore to deal with sub-exponential mixing property. We refer the reader to [CV18] for a complete overview of their work. Nevertheless, in our case, we will make use of the stronger condition Assumption 4.1 for now.

Concerning the Q -process, we define the family of probability measures $(\mathbb{Q}_{s,x})_{s \geq 0, x \in E_s}$ (if it exists) by

$$\mathbb{Q}_{s,x}(\Gamma) := \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{s,x}(\Gamma \mid \tau_A > T), \quad \text{for all } \Gamma \in \mathcal{F}_{s,t} := \sigma(X_u : s \leq u \leq t). \quad (4.1)$$

The Q -process is then the time-inhomogeneous Markov process $((X_t)_{t \geq 0}, (\mathbb{Q}_{s,x})_{s \geq 0, x \in E_s})$. Recall that this process can be interpreted as the law of the process X conditioned to be never absorbed.

In [CV18, Theorem 3.3], under Assumption 4.1, the authors show the existence of a Q -process for the process X . This result has been extended in [Oça20b, Theorem 1] by proving that the convergence (4.1) holds exponentially fast and uniformly in the initial condition. More precisely, the author showed the existence of two constants $C, \gamma > 0$ such that, for all $s \leq t \leq T$, $x \in E_s$ and $\Gamma \in \mathcal{F}_{s,t}$,

$$|\mathbb{Q}_{s,x}(\Gamma) - \mathbb{P}_{s,x}(\Gamma \mid \tau_A > T)| \leq Ce^{-\gamma(T-t)}.$$

Using the notation $\eta \circ \mu(dx) := \frac{\eta(x)\mu(dx)}{\mu(\eta)}$ (where η is a positive function), a consequence of this exponential convergence is that, for all initial distribution μ supported on E_0 and $t > 0$,

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}_{0,\mu}(X_s \in \cdot \mid \tau_A > t) ds - \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{Q}_{0,\eta \circ \mu}(X_s \in \cdot) ds \right\|_{TV} \leq \frac{C}{\gamma t}, \quad (4.2)$$

where η is a positive function which we will not spelled out here. Hence, by [Oça20b, Theorem 5], the inequality (4.2) implies that the probability measure $\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}_{0,\mu}(X_s \in \cdot \mid \tau_A > t) ds$ converges weakly (resp. in total variation) if and only if $\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{Q}_{0,\eta \circ \mu}(X_s \in \cdot) ds$ converges weakly (resp. in total variation) when t goes to infinity. This provides therefore a criterion establishing the existence of a *quasi-ergodic distribution*, defined as a probability measure β such that there exists an initial probability measure μ supported on E_0 such that, for all bounded measurable function $f : E \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}_{0,\mu} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(X_s) ds \mid \tau_A > t \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \beta(f).$$

Hence, in [Oça20b, Theorem 2], the author proved that a unique quasi-ergodic distribution exists when the boundary is periodic or "converging". A similar result has been extended in [Oça20a, Theorem 2], dealing with boundaries asymptotically periodic.

For the interested reader, in the time-homogeneous case we refer to [CV23, MV12] for general theory on the quasi-stationarity, to [CV16a, CV17b] for some criteria to the

convergence to the Q -process and to [CV17a, ZLS14] for the notion of quasi-ergodicity. Less has been done for the time-inhomogeneous setting but we can cite [BCG20, CV18, DMV18]. For the theory of moving boundaries, we can refer to [Oça20a] and to the Ph.D. thesis [Oça19].

4.2.2 Set up and main assumptions

As in the previous subsection, we consider $((X_t)_{t \geq 0}, (\mathbb{P}_{s,x})_{s \geq 0, x \in E}, (\mathcal{F}_{s,t})_{s \leq t})$ a càdlàg Markov process living on a Polish state space E . We consider as well moving boundaries taking values in a finite set of measurable subsets $\{A_1, \dots, A_N\}$. Here, the moving boundary is governed by a càdlàg function $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \{1, \dots, N\}$, i.e. the moving boundary is $(A_{w_t})_{t \geq 0}$.

We let $\Lambda := \{1, \dots, N\}$. For convenience, we will use the notation τ_w instead of τ_A to refer to the hitting time of the moving boundary corresponding to the function w , i.e.

$$\tau_w := \inf\{t \geq 0 : X_t \in A_{w_t}\}.$$

A first necessary condition which has to be verified for each w is the following.

Assumption 4.3. *For all càdlàg function $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \Lambda$, $s \geq 0$ and $x \in E_{w_s}$,*

$$\mathbb{P}_{s,x}(\tau_w < +\infty) = 1,$$

and for all $s \leq t$ and $x \in E_{w_s}$,

$$\mathbb{P}_{s,x}(\tau_w > t) > 0.$$

We can now present the main assumption of this paper.

Assumption 4.4. *There exist $c_1, c_2 > 0$ and $t_0 \geq 0$ such that, for all càdlàg function $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \Lambda$, there exists a sequence of probability measures $(\nu_t^{(w)})_{t \geq 0}$ such that for all $t \geq 0$, $\nu_t^{(w)}$ is defined on E_{w_t} and such that*

- For all $s \geq 0$ and all $x \in E_{w_s}$,

$$\mathbb{P}_{s,x}(X_{s+t_0} \in \cdot \mid \tau_w > s + t_0) \geq c_1 \nu_{s+t_0}^{(w)}(\cdot).$$

- For all $s \leq t$ and all $x \in E_{w_s}$,

$$\mathbb{P}_{s, \nu_s^{(w)}}(\tau_w > t) \geq c_2 \mathbb{P}_{s,x}(\tau_w > t).$$

In other terms, Assumption 4.4 is to assume that Assumption 4.1 is true for every w with c_1, c_2 and t_0 which do not depend on w .

As seen previously, a consequence of Assumption 4.4 is the existence of a Q -process for every w càdlàg function. In particular, we will denote by $\mathbb{Q}_{s,x}^{(w)}$ the probability measure $\mathbb{Q}_{s,x}$ defined as in (4.1) with $\tau_A = \tau_w$.

4.2.3 Main results

The aim of this paper is to establish some results of quasi-stationarity with moving boundaries when w is taken as a random function. As in the deterministic framework, our study will mainly carry on:

- The asymptotic behavior of the conditional marginal law when t goes to infinity.
- The almost sure existence of a Q -process.
- The asymptotic behavior of the expectation $\mathbb{E}_\mu(\frac{1}{t} \int_0^t f(X_s) ds \mid \tau_w > t)$, when t goes to infinity.

The random function w will be represented by the process $(I_t)_{t \geq 0}$, assumed to be an irreducible Markov jump càdlàg process (or an irreducible aperiodic Markov process in the time-discrete case) defined on Λ . To $(I_t)_{t \geq 0}$ we associate a family of probability measures $(\hat{\mathbb{P}}_i)_{i \in \Lambda}$ such that $\hat{\mathbb{P}}_i(I_0 = i) = 1$.

We denote the set of all the càdlàg trajectories $w = (w_s)_{s \geq 0}$ by I^∞ . We also denote, for all $w \in I^\infty$, $t \geq s$, and μ supported on E_{w_s} ,

$$\phi_{w,t,s}(\mu) := \mathbb{P}_{s,\mu}(X_t \in \cdot \mid \tau_w > t).$$

In particular, this object is well defined for every $w \in I^\infty$ since we have assumed that Assumption 4.3 holds true for all $w \in I^\infty$.

Then, for μ supported on E_{I_0} , we introduce the process $(Y_t)_{t \geq 0}$ defined for $Y_0 := \mu$ and all $t \geq 0$ by

$$Y_t := \phi_{(I_s)_{s \geq 0}, t, 0}(Y_0).$$

In the same way, the process Y defined in this way is well defined since $(I_s)_{s \geq 0} \in I^\infty$ for every realisation. Then, the process $(Y_t, I_t)_{t \geq 0}$ is a Markov process on $\mathcal{P}(E) \times \Lambda$, where $\mathcal{P}(E)$ is the space of probability measures on E , and we denote by $(P_t)_{t \geq 0}$ its associated semigroup.

We are first interested in the existence and uniqueness of an invariant probability measure Π for the process $(Y_t, I_t)_{t \geq 0}$ as well as the rate of convergence of the semi-group toward it. Since we are in a space of probability measures, it is natural to deal with the convergence in Wasserstein distance. Recall that this distance is defined for $\Gamma, \Delta \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E) \times \Lambda)$ by

$$\mathcal{W}_1(\Gamma, \Delta) := \inf_{((\mu, I^\mu), (\nu, I^\nu)) \in \Pi_{\Gamma, \Delta}} \mathbb{E}(\|\mu - \nu\|_{TV} + \mathbf{1}_{I^\mu \neq I^\nu}), \quad (4.3)$$

where $\Pi_{\Gamma, \Delta}$ is the set of all the couplings between Γ and Δ .

We have all the ingredients to state the first main theorem of this paper.

Theorem 4.5. *Under Assumptions 4.3 and 4.4, there exists a unique probability measure Π on $\mathcal{P}(E) \times \Lambda$ such that, for all $t \geq 0$, $i \in \Lambda$ and $\mu \in \mathcal{P}(E_i)$,*

$$\mathcal{W}_1(P_t((\mu, i), \cdot), \Pi(\cdot)) \leq Ce^{-\gamma t},$$

for some constants $C, \gamma > 0$.

As seen in the previous subsection, the existence of a Q -process related to the process $(I_t)_{t \geq 0}$ is straightforward since $(I_t)_{t \geq 0} \in I^\infty$. Note that, it is defined as in (4.1) with $(I_t)_{t \geq 0}$ instead of w .

However, the question of the almost sure existence of a quasi-ergodic distribution is still relevant from our point of view. In the same way as for the semi-flow $\phi_{w,t,s}$, we can

define, for all $w \in I^\infty$, $t > 0$ and $\mu \in \mathcal{P}(E_{w_0})$, the probability measure

$$\beta_{w,t}(\mu) := \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}_{0,\mu}(X_s \in \cdot \mid \tau_w > t) ds.$$

Again, these probability measures are well defined for all $w \in I^\infty$ since we have assumed that $\mathbb{P}_{0,\mu}(\tau_w > t) > 0$ for all w .

Then we will prove the following result which ensures the existence of the quasi-ergodic distribution.

Theorem 4.6. *Under Assumptions 4.3 and 4.4, there exists a probability measure β on E such that, for all $i \in \Lambda$ and $\mu \in \mathcal{P}(E_i)$, the weak convergence*

$$\beta_{(I_s)_{s \geq 0}, t}(\mu) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \beta$$

holds true $\hat{\mathbb{P}}_i$ -almost surely.

Remark 4.7. *It is interesting to note that the sequence $(\beta_{(I_s)_{s \geq 0}, t}(\mu))_{t \geq 0}$ is random while β not.*

Remark 4.8. *The statements of the two theorems above are also valid in the discrete-time case.*

4.3 Ergodicity for conditional semi-flows induced by random moving boundaries

The goal of this part is to prove Theorem 4.5. In fact, we will prove the following more general result.

Theorem 4.9. *We assume that there exist some constants $C, \gamma > 0$ such that, for any $t \geq s \geq 0$, any trajectory $w \in I^\infty$, and any $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(E_{w_s})$,*

$$\|\phi_{w,t,s}(\mu_1) - \phi_{w,t,s}(\mu_2)\|_{TV} \leq C e^{-\gamma(t-s)}. \quad (4.4)$$

Then there exists a unique probability measure Π on $\mathcal{P}(E) \times \Lambda$ such that, for all $t \geq 0$, $i \in \Lambda$ and $\mu \in \mathcal{P}(E_i)$,

$$\mathcal{W}_1(P_t((\mu, i), \cdot), \Pi(\cdot)) \leq C' e^{-\gamma' t},$$

for some constants $C', \gamma' > 0$.

Remark 4.10. *The condition (4.4) holds true under Assumptions 4.3 and 4.4 (see [CV18, Theorem 2.1]) and Theorem 4.5 is a consequence. Note also again that this theorem is stated in the continuous case but the discrete version works the same.*

Proof. We want to prove that, for all $t \geq 0$, $i, j \in \Lambda$, $\mu_1 \in \mathcal{P}(E_i)$ and $\mu_2 \in \mathcal{P}(E_j)$,

$$\mathcal{W}_1(P_t((\mu_1, i), \cdot), P_t((\mu_2, j), \cdot)) \leq C' e^{-\gamma' t}.$$

Let us denote by $(I_t^i)_{t \geq 0}$ and $(I_t^j)_{t \geq 0}$ two independent Markov processes having the same transition law and starting from i and j respectively. We denote by τ' the meeting time

of $(I_t^i)_{t \geq 0}$ and $(I_t^j)_{t \geq 0}$ and we construct the process $(\tilde{I}_t^j)_{t \geq 0}$ as

$$\tilde{I}_t^j := \begin{cases} I_t^j & \text{if } t < \tau', \\ I_t^i & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then, it is well known that $(\tilde{I}_t^j)_{t \geq 0}$ has the same law as $(I_t^j)_{t \geq 0}$. In the following, we will make a slight abuse of notations by denoting I^i instead of $(I_t^i)_{t \geq 0}$ for the trajectory so that we will use $\phi_{I^i, t, 0}$ instead of $\phi_{(I_t^i)_{s \geq 0}, t, 0}$, for the sake of clarity.

Then by (4.4), for all $t \geq \tau'$,

$$\begin{aligned} \|\phi_{I^i, t, 0}(\mu_1) - \phi_{\tilde{I}^j, t, 0}(\mu_2)\|_{TV} &= \|\phi_{I^i, t, \tau'} \circ \phi_{I^i, \tau', 0}(\mu_1) - \phi_{\tilde{I}^j, t, \tau'} \circ \phi_{\tilde{I}^j, \tau', 0}(\mu_2)\|_{TV} \\ &\leq C e^{-\gamma(t-\tau')}. \end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\|\phi_{I^i, t, 0}(\mu_1) - \phi_{\tilde{I}^j, t, 0}(\mu_2)\|_{TV}) &= \mathbb{E}(\|\phi_{I^i, t, 0}(\mu_1) - \phi_{\tilde{I}^j, t, 0}(\mu_2)\|_{TV} \mathbf{1}_{\tau' \leq t}) \\ &\quad + \mathbb{E}(\|\phi_{I^i, t, 0}(\mu_1) - \phi_{\tilde{I}^j, t, 0}(\mu_2)\|_{TV} \mathbf{1}_{\tau' > t}) \\ &\leq C e^{-\gamma t} \mathbb{E}(e^{\gamma \tau'}) + 2\mathbb{P}(\tau' > t). \end{aligned}$$

We state the following lemma, whose proof will be postponed until after the present proof.

Lemma 4.11. *There exist $\tilde{\gamma}, \tilde{C} > 0$ such that*

$$\mathbb{P}_{i,j}(\tau' > t) \leq \tilde{C} e^{-\tilde{\gamma} t}. \quad (4.5)$$

A consequence of this lemma is the existence of a $\gamma_0 > 0$ such that

$$\mathbb{E}(e^{\gamma_0 \tau'}) < +\infty.$$

Let us define $\gamma' := \min\{\gamma, \gamma_0, \tilde{\gamma}\}$, then Lemma 4.11 and equations (4.4) and (4.5) are still valid with γ' instead of (resp.) $\tilde{\gamma}, \gamma, \gamma_0$. Then, there exists $C' > 0$ such that

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\|\phi_{I^i, t, 0}(\mu_1) - \phi_{\tilde{I}^j, t, 0}(\mu_2)\|_{TV} + \mathbf{1}_{I_t^i \neq \tilde{I}_t^j} \right) &= \mathbb{E}(\|\phi_{I^i, t, 0}(\mu_1) - \phi_{\tilde{I}^j, t, 0}(\mu_2)\|_{TV}) + \mathbb{P}(\tau' > t) \\ &\leq C e^{-\gamma' t} \mathbb{E}(e^{\gamma' \tau'}) + 3\mathbb{P}(\tau' > t) \\ &\leq C' e^{-\gamma' t}. \end{aligned}$$

Hence, by definition of the Wasserstein distance, one obtains that

$$\mathcal{W}_1(P_t((\mu_1, i), \cdot), P_t((\mu_2, j), \cdot)) \leq C' e^{-\gamma' t}.$$

Integrating over $\mu(d\mu_1, di)$ and $\nu(d\mu_2, dj)$, we get that

$$\mathcal{W}_1(\mu P_t, \nu P_t) \leq C' e^{-\gamma' t}.$$

This implies that for all $s \geq 0$,

$$\mathcal{W}_1(\mu P_{t+s}, \mu P_t) \leq C' e^{-\gamma' t}.$$

Then the family $(\mu P_t)_{t \geq 0}$ is a Cauchy sequence on $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E) \times \Lambda), \mathcal{W}_1)$. Let us define the distance

$$d((\mu, i), (\nu, j)) := \|\mu - \nu\|_{TV} + \mathbf{1}_{i \neq j}, \quad (4.6)$$

then, the space $(\mathcal{P}(E) \times \Lambda, d)$ is Polish. One has by [Vil09, Theorem 6.18] that $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E) \times \Lambda), \mathcal{W}_1)$ is also Polish, so that there exists a probability measure Π on $\mathcal{P}(E) \times \Lambda$ such that

$$\mathcal{W}_1(\mu P_t, \Pi) \leq C' e^{-\gamma t}.$$

□

Proof of Lemma 4.11. Let $((I_t)_{t \geq 0}, (\tilde{I}_t)_{t \geq 0}), (\mathbb{P}_{i,j})_{i,j \in \Lambda}$ be a Markov process on Λ^2 such that

$$\mathbb{P}_{i,j}((I_t, \tilde{I}_t) \in \cdot) = \hat{\mathbb{P}}_i(I_t \in \cdot) \otimes \hat{\mathbb{P}}_j(\tilde{I}_t \in \cdot).$$

Recall that we denote by τ' the meeting time of $(I_t)_{t \geq 0}$ and $(\tilde{I}_t)_{t \geq 0}$. By the Markov property, for all $s, t \geq 0$,

$$\mathbb{P}_{i,j}[\tau' > s + t] = \mathbb{E}_{i,j}[\mathbf{1}_{\tau' > s} \mathbb{P}_{I_s, \tilde{I}_s}(\tau' > t)].$$

Hence, we deduce that, for all $s, t \geq 0$,

$$\max_{i,j} \mathbb{P}_{i,j}(\tau' > s + t) \leq \max_{i,j} \mathbb{P}_{i,j}(\tau' > s) \max_{i,j} \mathbb{P}_{i,j}(\tau' > t).$$

By Fekete's lemma, there exists $C > 0$ and $\gamma \geq 0$ such that

$$\max_{i,j} \mathbb{P}_{i,j}(\tau' > t) \leq C e^{-\gamma t}.$$

It remains to prove that $\gamma \neq 0$. Note that $\gamma = 0$ if and only if there exist $i_0, j_0 \in \Lambda$ such that

$$\mathbb{P}_{i_0, j_0}(\tau' = +\infty) > 0.$$

However, since the process $(I_t)_{t \geq 0}$ is an irreducible jump process (or an irreducible aperiodic Markov process in the time-discrete case), it is well known (see [Bré13]) that $\tau' < +\infty$ a.s. for all i_0, j_0 . Thus, γ can be chosen positive and the conclusion follows, i.e. for all $i, j \in \Lambda$,

$$\mathbb{P}_{i,j}(\tau' > t) \leq C e^{-\gamma t}.$$

□

4.4 Q -process and quasi-ergodic distribution

In this section, we first establish some results on the Q -process for the process $(X_t)_{t \geq 0}$ absorbed by the moving boundaries $(A_{I_t})_{t \geq 0}$. In a second time, using these results we will turn to the proof of Theorem 4.6.

For $w \in I^\infty$, we define its associated *killed semigroup* $(P_{s,t}^w)_{t \geq s \geq 0}$ for $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

measurable bounded and $x \in E_{w_s}$ by

$$P_{s,t}^w f(x) := \mathbb{E}_{s,x}(f(X_t)\mathbf{1}_{\tau_w > t}).$$

We define $P_{s,t}^I$ in the same way for the process $I = (I_t)_{t \geq 0}$ with the random stopping time

$$\tau_I := \inf\{t \geq 0 : X_t \in A_{I_t}\}.$$

Proposition 4.12. *Under Assumptions 4.3 and 4.4, there exists a family of random variables $(H_{i,s})_{i \in \Lambda, s \geq 0}$ such that, for all $i \in \Lambda$, $s \geq 0$ and $\mu, \nu \in \mathcal{P}(E_{I_s})$, the convergence*

$$\frac{\mathbb{P}_{s,\mu}(\tau_I > t)}{\mathbb{P}_{s,\nu}(\tau_I > t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\mu(H_{i,s})}{\nu(H_{i,s})}$$

holds $\hat{\mathbb{P}}_i$ -almost surely. Moreover, one has $\hat{\mathbb{P}}_i$ -almost surely the equality

$$H_{i,s}(x) = P_{s,t}^I H_{i,t}(x), \quad \forall s \leq t, \forall x \in E_{I_s}.$$

Remark 4.13. *In particular, for all $i \in \Lambda$ and $s \geq 0$, the random variable $H_{i,s}$ depends only on the process $(A_{I_t})_{t \geq s}$.*

Proof of Proposition 4.12. By Assumptions 4.3, 4.4 and [CV18, Theorem 3.3], for every trajectory $w \in I^\infty$, there exists a Q -process defined by (4.1) and it follows from [CV18, Proposition 3.1] that there exists of a family of nonnegative functions $(\eta_{w,s})_{s \geq 0}$ on E_{w_s} such that

$$\frac{\mathbb{P}_{\mu,s}(\tau_w > t)}{\mathbb{P}_{\nu,s}(\tau_w > t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\mu(\eta_{w,s})}{\nu(\eta_{w,s})}$$

and

$$P_{s,t}^w \eta_{w,t} = \eta_{w,s}.$$

We take $(w_s)_{s \geq 0} = (I_s^i)_{s \geq 0}$. Then [CV18, Proposition 3.1] implies that, $\hat{\mathbb{P}}_i$ -a.s., there exists $(\eta_{I,s})_{s \geq 0}$ nonnegative such that

$$\frac{\mathbb{P}_{\mu,s}(\tau_I > t)}{\mathbb{P}_{\nu,s}(\tau_I > t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\mu(\eta_{I^i,s})}{\nu(\eta_{I^i,s})}$$

and

$$P_{s,t}^{I^i} \eta_{I^i,t} = \eta_{I^i,s}.$$

We set $H_{s,i} = \eta_{I^i,s}$ and the result follows. □

The next proposition ensure the existence of a Q -process.

Proposition 4.14. *Suppose that Assumptions 4.3 and 4.4 hold true. Then, for all $i \in \Lambda$, there exists $\hat{\mathbb{P}}_i$ -almost surely a Q -process for the process $(X_t)_{t \geq 0}$ absorbed by the random boundary $(A_{I_t})_{t \geq 0}$, whose semigroup is defined by*

$$Q_{s,t}^I f(x) = \frac{P_{s,t}^I [f \times H_{i,t}](x)}{H_{i,s}(x)},$$

where $x \in E_{I_s}$ and $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ is measurable bounded. Moreover, $\hat{\mathbb{P}}_i$ -almost surely, there exist $C, \gamma > 0$ such that, for all $t \geq s$ and $\mu, \nu \in \mathcal{P}(E_{I_s})$,

$$\|\mu Q_{s,t}^I - \nu Q_{s,t}^I\|_{TV} \leq C e^{-\gamma(t-s)}.$$

Proof. The existence of a Q -process almost surely is a consequence of [CV18, Theorem 3.3], as well as the last inequality. \square

With all these results in mind, we can now proceed to the proof of Theorem 4.6.

Proof of Theorem 4.6. First, let us define the set

$$\mathcal{E} := \{(\mu, i) \in \mathcal{P}(E) \times \Lambda \mid \mu \in \mathcal{P}(E_i)\}.$$

Next, we denote by $(Q_{s,t}^I)_{s \leq t}$ the semigroup of the Q -process for the process $(X_t)_{t \geq 0}$ absorbed by $(A_{I_t})_{t \geq 0}$. For all $\mu \in \mathcal{P}(E_{I_0})$, the process $(Z_t)_{t \geq 0} := (\mu Q_{0,t}^I, I_t)_{t \geq 0}$ is a Markov process living on \mathcal{E} . We denote by $(R_t)_{t \geq 0}$ its semigroup. By the previous proposition, for all $i \in \Lambda$, $\hat{\mathbb{P}}_i$ -almost surely, one has for all $s \leq t$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(E_{I_s})$,

$$\|\mu_1 Q_{s,t}^I - \mu_2 Q_{s,t}^I\|_{TV} \leq C e^{-\gamma(t-s)}.$$

By a reasoning similar to that of the proof of Theorem 4.9, there exists a probability measure π on $\mathcal{P}(E) \times \Lambda$ such that for all initial condition $(\mu, i) \in \mathcal{E}$,

$$\mathcal{W}_1(R_t((\mu, i), \cdot), \pi(\cdot)) \leq C' e^{-\gamma' t},$$

for some $C', \gamma' > 0$. This means that, for all function $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-Lipschitz with respect to the distance d defined by (4.6) and all initial condition $(\mu, i) \in \mathcal{E}$,

$$|R_t f(\mu, i) - \pi(f)| \leq C' e^{-\gamma' t}. \quad (4.7)$$

We now prove the existence of an ergodic theorem for the process $(\mu Q_{0,t}^I, I_t)_{t \geq 0}$. Let f be a 1-Lipschitz function. For all $(\mu, i) \in \mathcal{E}$ and $t > 0$, we get that

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mu, i} \left(\left| \frac{1}{t} \int_0^t f(Z_s) ds - \mathbb{E}_{\mu, i} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(Z_s) ds \right) \right|^2 \right) \\ &= \frac{2}{t^2} \int_0^t \int_s^t [\mathbb{E}_{\mu, i}(f(Z_s)f(Z_u)) - \mathbb{E}_{\mu, i}(f(Z_s))\mathbb{E}_{\mu, i}(f(Z_u))] dud s \\ &= \frac{2}{t^2} \int_0^t \int_s^t \mathbb{E}_{\mu, i}(f(Z_s)[\mathbb{E}_{Z_s}(f(Z_{u-s})) - \mathbb{E}_{\delta_{(\mu, i)R_s}}(f(Z_{u-s}))]) dud s \\ &\leq \frac{2C}{t^2} \int_0^t \int_s^t \mathbb{E}_{\mu, i}(|f(Z_s)|) e^{-\gamma(u-s)} dud s \\ &= \frac{2C}{\gamma t} \mathbb{E}_{\mu, i} \left(\frac{1}{t} \int_0^t |f(Z_s)| ds \right) - \frac{2C e^{-\gamma t}}{\gamma t^2} \int_0^t e^{\gamma s} \mathbb{E}_{\mu, i}(|f(Z_s)|) ds. \end{aligned}$$

In other words, by changing the value of the constant $C > 0$, the previous inequality

and the exponential ergodicity of the process Z imply the existence of a constant $C > 0$ (different from the previous one) such that, for all $(\mu, i) \in \mathcal{E}$ and $t > 0$,

$$\mathbb{E}_{\mu,i} \left(\left| \frac{1}{t} \int_0^t f(Z_s) ds - \mathbb{E}_{\mu,i} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(Z_s) ds \right) \right|^2 \right) \leq \frac{C}{t} \pi(|f|) + o(1/t).$$

By (4.7), there exists $C > 0$ (again different from the previous one) such that, for all f 1-Lipschitz, $(\mu, i) \in \mathcal{E}$, when t goes to infinity,

$$\mathbb{E}_{\mu,i} \left(\left| \frac{1}{t} \int_0^t f(Z_s) ds - \pi(f) \right|^2 \right) \leq \frac{C}{t} \pi(|f|) + o(1/t).$$

By a similar argument as in [Oça20a, Proof of Theorem 2], we obtain the ergodic theorem for all f 1-Lipschitz and initial condition $(\mu, i) \in \mathcal{E}$,

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(Z_s) ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \pi(f).$$

By taking $f_g(\mu, i) = \mu(g)$, with g such that $\|g\|_\infty \leq 1$, we get that

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mu Q_{0,s}^I g ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \pi(f_g).$$

By using (4.2) which holds true $\hat{\mathbb{P}}_i$ -almost surely, we conclude the almost sure existence of a unique quasi-ergodic distribution β , which is defined by

$$\beta : g \mapsto \pi(f_g).$$

□

4.5 Example, Markov chains on a finite state space

We consider a discrete-time Markov chain $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ defined on the state space E which is supposed to be finite. We take the state space $\Lambda := \{0, \dots, N\}$ with $N \geq 2$ and the absorbing subsets A_1, \dots, A_N . As in the introduction, we denote by $E_i := E \setminus A_i$ the living state space. We also denote by $\tilde{E} := \bigcap_{i=1}^N E_i$ the safe space. We will make the following assumptions.

1. $\tilde{E} \neq \emptyset$.
2. The restriction of the chain $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ to \tilde{E} is irreducible and aperiodic.
3. For all $i \in \Lambda$ and for all $x \in E_i \setminus \tilde{E}$, there exists $y \in \tilde{E}$ such that

$$\mathbb{P}_x(X_1 \in \tilde{E}) > 0 \quad \text{and} \quad \mathbb{P}_y(X_1 = x) > 0.$$

Example 4.15. To have a more precise example in mind, consider $E = \{0, \dots, K\}$ with $K \geq 4$ and $(X_n)_n$ the Markov chain defined on E by Figure 4.1.

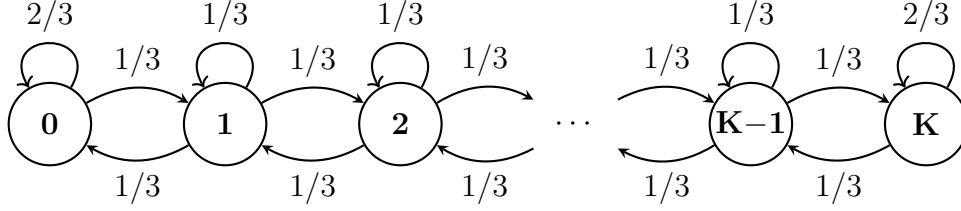


Figure 4.1

Suppose that $\Lambda = \{1, 2\}$, $A_1 = \{0, K\}$ and $A_2 = \{0, 1, K-1, K\}$, then $\tilde{E} = \{2, \dots, K-2\}$ and the hypotheses are satisfied.

With these assumptions, we have the following proposition.

Proposition 4.16. Let $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be an irreducible aperiodic Markov process on Λ . Then, Assumptions 4.3 and 4.4 are satisfied. In particular, the conclusions of Theorems 4.5 and 4.6 hold true.

Proof. We begin by noting that thanks to the assumptions of this section, Assumption 4.3 is trivially verified.

To prove that Assumption 4.4 is also true, we first let $\tau_{\tilde{E}^c} := \inf\{t \geq 0 : X_t \notin \tilde{E}\}$ denote the hitting time of the complementary of the set \tilde{E} . The irreducibility and aperiodicity of $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on \tilde{E} imply the existence of a time $k > 0$ and a constant $c > 0$ such that, for all $x, y \in \tilde{E}$,

$$\mathbb{P}_x(X_k = y, \tau_{\tilde{E}^c} > k) \geq c > 0.$$

Note that for all $w \in I^\infty$, $\tau_{\tilde{E}^c} \leq \tau_w$ $\mathbb{P}_{m,x}$ -almost surely for all $m \in \mathbb{N}$ and $x \in E_{w_m}$. Then, the previous minorization implies that, for all $x, y \in \tilde{E}$, $m \in \mathbb{N}$ and $w \in I^\infty$,

$$\mathbb{P}_{m,x}(X_{m+k} = y, \tau_w > m+k) \geq c. \quad (4.8)$$

Now, let $m \in \mathbb{N}$, $w \in I^\infty$, $x \in E_{w_m}$ and $y \in E_{w_{m+k+2}}$. By the assumptions, there exist $x_1, y_1 \in \tilde{E}$ such that

$$\mathbb{P}_x(X_1 = x_1) > 0 \quad \text{and} \quad \mathbb{P}_{y_1}(X_1 = y) > 0.$$

Then by (4.8) and the Markov property,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{m,x}(X_{m+k+2} = y, \tau_w > m+k+2) \\ & \geq \mathbb{P}_x(X_1 = x_1) \mathbb{P}_{m+1,x_1}(X_{m+k+1} = y_1, \tau_w > m+k+1) \mathbb{P}_{y_1}(X_1 = y) \\ & > 0. \end{aligned}$$

Hence, there exists $c' > 0$ such that for all $m \in \mathbb{N}$, $w \in I^\infty$, $x \in E_{w_m}$ and $y \in E_{w_{m+k+2}}$,

$$\mathbb{P}_{m,x}(X_{m+k+2} = y, \tau_w > m+k+2) > c'.$$

Thus for all $m \in \mathbb{N}$, $w \in I^\infty$ and $x \in E_{w_m}$,

$$\mathbb{P}_{m,x}(X_{m+k+2} \in \cdot \mid \tau_w > m + k + 2) > c' |E_{w_{m+k+2}}| \nu_{m+k+2}^{(w)}(\cdot)$$

where $\nu_{m+k+2}^{(w)}$ is the uniform law on $E_{w_{m+k+2}}$ and $|E_{w_{m+k+2}}|$ stands for the cardinality of $E_{w_{m+k+2}}$. Then, the first part of Assumption 4.4 is verified for $c_1 = c' |\tilde{E}|$, $t_0 = k + 2$ and $\nu_m^{(w)}$ the uniform law on E_{w_m} for all $m \in \mathbb{N}$.

The second part follows since, for all $x \in E_{w_m}$ and all $n \geq m$,

$$\mathbb{P}_{m,\nu_m^{(w)}}(\tau_w > n) = \frac{1}{|E_{w_m}|} \sum_{y \in E_{w_m}} \mathbb{P}_{m,y}(\tau_w > n) \geq \frac{1}{|E|} \mathbb{P}_{m,x}(\tau_w > n),$$

so that we can take $c_2 = \frac{1}{|E|}$. This concludes the proof. □

We will now discuss the necessity of the assumptions 1 and 3 of this section. Let $E = \{1, 2, 3\}$ and $(X_n)_n$ be the Markov chain on E defined by Figure 4.2.

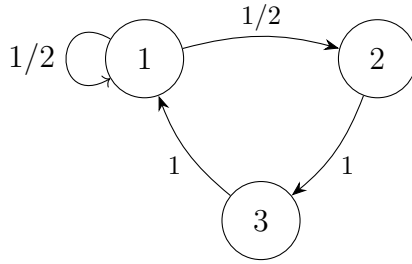


Figure 4.2

1. Suppose that $\Lambda = \{1, 2\}$, $A_1 = \{2\}$ and $A_2 = \{3\}$. Then $\tilde{E} = \{1\}$, $(X_n)_n$ is irreducible and aperiodic on \tilde{E} and the third assumption is not true. Moreover, there are trajectories w such that $\mathbb{P}_2(n < \tau_w) = 0$ for some $n \geq 1$, take $w = (2, 2, 2, \dots)$ for example. This proves that Assumptions 4.3 can't hold true in this setting.
2. If $\tilde{E} = \emptyset$ then assumption 3 is not satisfy at all and by the previous case this process is not well defined. For a more concrete counter-example, consider this time $\Lambda = \{1, 2, 3\}$, $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$ and $A_3 = \{3\}$.

Remark 4.17. *In both cases, the set of trajectories w that satisfy $\mathbb{P}_2(n < \tau_w) = 0$ for some $n \geq 1$ is of positive probability.*

Acknowledgments

Antoine Bourquin is supported in part by the SNF grant 200020-196999. We thank Michel Benaïm and Oliver Tough for useful discussions and reviews.

Bibliography

- [All16] Edward Allen. Environmental variability and mean-reverting processes. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 21(7):2073–2089, 2016.
- [BBN22] Michel Benaïm, Antoine Bourquin, and Dang H. Nguyen. Stochastic persistence in degenerate stochastic Lotka-Volterra food chains. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 27(11):6841–6863, 2022.
- [BC15] Michel Benaïm and Bertrand Cloez. A stochastic approximation approach to quasi-stationary distributions on finite spaces. *Electron. Commun. Probab.*, 20:no. 37, 14, 2015.
- [BCG20] Vincent Bansaye, Bertrand Cloez, and Pierre Gabriel. Ergodic behavior of non-conservative semigroups via generalized Doeblin’s conditions. *Acta Appl. Math.*, 166:29–72, 2020.
- [BCOV21] Michel Benaïm, Nicolas Champagnat, William Oçafrain, and Denis Villemonais. Degenerate processes killed at the boundary of a domain. *arXiv preprint arXiv:2103.08534*, 2021.
- [BCP18] Michel Benaïm, Bertrand Cloez, and Fabien Panloup. Stochastic approximation of quasi-stationary distributions on compact spaces and applications. *Ann. Appl. Probab.*, 28(4):2370–2416, 2018.
- [Ben18] Michel Benaïm. Stochastic persistence. *arXiv preprint arXiv:1806.08450*, 2018.
- [BH12] Yuri Bakhtin and Tobias Hurth. Invariant densities for dynamical systems with random switching. *Nonlinearity*, 25(10):2937–2952, 2012.
- [BH22] Michel Benaïm and Tobias Hurth. *Markov Chains on Metric Spaces: A Short Course*. Springer, 2022.
- [BHS18] Michel Benaïm, Tobias Hurth, and Edouard Strickler. A user-friendly condition for exponential ergodicity in randomly switched environments. *Electron. Commun. Probab.*, 23:no. 44, 12, 2018.
- [BL16] Michel Benaïm and Claude Lobry. Lotka-Volterra with randomly fluctuating environments or “How switching between beneficial environments can make survival harder”. *Ann. Appl. Probab.*, 26(6):3754–3785, 2016.
- [BLBMZ15] Michel Benaïm, Stéphane Le Borgne, Florent Malrieu, and Pierre-André Zitt. Qualitative properties of certain piecewise deterministic Markov processes. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 51(3):1040–1075, 2015.

- [BNN20] Michel Benaïm, Dang N. Nguyen, and Nhu Nguyen. Stochastic Kolmogorov systems under regime-switching: Coexistence and extinction. *preprint*, 2020.
- [Bon23] Céline Bonnet. A PDMP to model the stochastic influence of quiescence dynamics in blood cancers. *arXiv preprint arXiv:2303.06412*, 2023.
- [Bou23] Antoine Bourquin. Persistence in randomly switched Lotka-Volterra food chains. *ESAIM: Probability and Statistics*, 27:324–344, 2023.
- [Bré13] Pierre Brémaud. *Markov chains: Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues*, volume 31. Springer Science & Business Media, 2013.
- [BS19a] Michel Benaïm and Sebastian J. Schreiber. Persistence and extinction for stochastic ecological models with internal and external variables. *J. Math. Biol.*, 79(1):393–431, 2019.
- [BS19b] Michel Benaïm and Edouard Strickler. Random switching between vector fields having a common zero. *Ann. Appl. Probab.*, 29(1):326–375, 2019.
- [CDG⁺17] Bertrand Cloez, Renaud Dessalles, Alexandre Genadot, Florent Malrieu, Aline Marguet, and Romain Yvinec. Probabilistic and piecewise deterministic models in biology. In *Journées MAS 2016 de la SMAI—Phénomènes complexes et hétérogènes*, volume 60 of *ESAIM Proc. Surveys*, pages 225–245. EDP Sci., Les Ulis, 2017.
- [CV16a] N Champagnat and D Villemonais. Exponential convergence to quasi-stationary distribution and Q -process. *Probab. Theory Related Fields*, 164(1-2):243–283, 2016.
- [CV16b] Nicolas Champagnat and Denis Villemonais. Population processes with unbounded extinction rate conditioned to non-extinction. *arXiv preprint arXiv:1611.03010*, 2016.
- [CV17a] Nicolas Champagnat and Denis Villemonais. Uniform convergence of conditional distributions for absorbed one-dimensional diffusions. *Adv. in Appl. Probab.*, 50(1):178–203, 2017.
- [CV17b] Nicolas Champagnat and Denis Villemonais. Uniform convergence to the Q -process. *Electron. Commun. Probab.*, 22:Paper No. 33, 7, 2017.
- [CV18] Nicolas Champagnat and Denis Villemonais. Uniform convergence of penalized time-inhomogeneous Markov processes. *ESAIM Probab. Stat.*, 22:129–162, 2018.
- [CV23] Nicolas Champagnat and Denis Villemonais. General criteria for the study of quasi-stationarity. *Electron. J. Probab.*, 28:–, 2023.
- [Dav84] Mark H. A. Davis. Piecewise-deterministic Markov processes: a general class of nondiffusion stochastic models. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 46(3):353–388, 1984. With discussion.

- [Dav93] M. H. A. Davis. *Markov models and optimization*, volume 49 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall, London, 1993.
- [DMS91] Brian Dennis, Patricia L. Munholland, and J. Michael Scott. Estimation of growth and extinction parameters for endangered species. *Ecological monographs*, 61(2):115–143, 1991.
- [DMV18] Pierre Del Moral and Denis Villemonais. Exponential mixing properties for time-inhomogeneous diffusion processes with killing. *Bernoulli*, 24(2):1010–1032, 2018.
- [Dyn65] E. B. Dynkin. *Markov processes. Vols. I, II*, volume 122 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 121*. Academic Press, Inc., Publishers, New York; Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1965. Translated with the authorization and assistance of the author by J. Fabius, V. Greenberg, A. Maitra, G. Majone.
- [ERSS13] Steven N. Evans, Peter L. Ralph, Sebastian J. Schreiber, and Arnab Sen. Stochastic population growth in spatially heterogeneous environments. *J. Math. Biol.*, 66(3):423–476, 2013.
- [FHVB11] Carolyn Faithfull, Magnus Huss, Tobias Vrede, and Ann-Kristin Bergström. Bottom-up carbon subsidies and top-down predation pressure interact to affect aquatic food web structure. *Oikos*, 120(2):311–320, 2011.
- [Fol94] Patrick Foley. Predicting extinction times from environmental stochasticity and carrying capacity. *Conservation Biology*, 8(1):124–137, 1994.
- [GH79] Thomas C. Gard and Thomas G. Hallam. Persistence in food webs. I. Lotka-Volterra food chains. *Bull. Math. Biol.*, 41(6):877–891, 1979.
- [GPS19] Arnaud Guillin, Arnaud Personne, and Edouard Strickler. Persistence in the moran model with random switching. *arXiv preprint arXiv:1911.01108*, 2019.
- [HN18a] Alexandru Hening and Dang H. Nguyen. Coexistence and extinction for stochastic Kolmogorov systems. *Ann. Appl. Probab.*, 28(3):1893–1942, 2018.
- [HN18b] Alexandru Hening and Dang H. Nguyen. Persistence in stochastic Lotka-Volterra food chains with intraspecific competition. *Bull. Math. Biol.*, 80(10):2527–2560, 2018.
- [HN18c] Alexandru Hening and Dang H. Nguyen. Stochastic Lotka-Volterra food chains. *J. Math. Biol.*, 77(1):135–163, 2018.
- [HNC21] Alexandru Hening, Dang H. Nguyen, and Peter Chesson. A general theory of coexistence and extinction for stochastic ecological communities. *J. Math. Biol.*, 82(6):Paper No. 56, 76, 2021.

- [HNS22] Alexandru Hening, Dang H. Nguyen, and Sebastian J. Schreiber. A classification of the dynamics of three-dimensional stochastic ecological systems. *Ann. Appl. Probab.*, 32(2):893–931, 2022.
- [HS98] Josef Hofbauer and Karl Sigmund. *Evolutionary games and population dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [HS19] Alexandru Hening and Edouard Strickler. On a predator-prey system with random switching that never converges to its equilibrium. *SIAM J. Math. Anal.*, 51(5):3625–3640, 2019.
- [HTU22] Alexandru Hening, Ky Quan Tran, and Sergiu C. Ungureanu. The effects of random and seasonal environmental fluctuations on optimal harvesting and stocking. *J. Math. Biol.*, 84(6):Paper No. 41, 42, 2022.
- [IK74] Kanji Ichihara and Hiroshi Kunita. A classification of the second order degenerate elliptic operators and its probabilistic characterization. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 30:235–254, 1974.
- [JR02] Søren F. Jarner and Gareth O. Roberts. Polynomial convergence rates of Markov chains. *Ann. Appl. Probab.*, 12(1):224–247, 2002.
- [LES03] Russell Lande, Steinar Engen, and Bernt-Erik Saether. *Stochastic population dynamics in ecology and conservation*. Oxford University Press on Demand, 2003.
- [LG16] Jean-François Le Gall. *Brownian motion, martingales, and stochastic calculus*, volume 274. Springer, 2016.
- [Mor97] David J.W. Moriarty. The role of microorganisms in aquaculture ponds. *Aquaculture*, 151(1-4):333–349, 1997.
- [MT92] Sean P. Meyn and R. L. Tweedie. Stability of Markovian processes. I. Criteria for discrete-time chains. *Adv. in Appl. Probab.*, 24(3):542–574, 1992.
- [MV12] Sylvie Méléard and Denis Villemonais. Quasi-stationary distributions and population processes. *Probab. Surv.*, 9:340–410, 2012.
- [NS20] Dang H. Nguyen and Edouard Strickler. A method to deal with the critical case in stochastic population dynamics. *SIAM J. Appl. Math.*, 80(3):1567–1589, 2020.
- [Oça18] William Oçafrain. Quasi-stationarity and quasi-ergodicity for discrete-time Markov chains with absorbing boundaries moving periodically. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 15(1):429–451, 2018.
- [Oça19] William Oçafrain. *Quasi-stationnarité avec frontières mobiles*. PhD thesis, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2019.
- [Oça20a] William Oçafrain. Ergodic theorem for asymptotically periodic time-inhomogeneous Markov processes, with application to quasi-stationarity with moving boundaries. *arXiv preprint arXiv:2010.05483*, 2020.

- [Oça20b] William Ocafrain. Q -processes and asymptotic properties of Markov processes conditioned not to hit moving boundaries. *Stochastic Process. Appl.*, 130(6):3445–3476, 2020.
- [Oca20c] William Ocafrain. Quasi-stationarity for one-dimensional renormalized Brownian motion. *ESAIM Probab. Stat.*, 24:661–687, 2020.
- [RTW12] Martin G. Riedler, Michèle Thieullen, and Gilles Wainrib. Limit theorems for infinite-dimensional piecewise deterministic Markov processes. Applications to stochastic excitable membrane models. *Electron. J. Probab.*, 17:no. 55, 48, 2012.
- [SBA11] Sebastian J. Schreiber, Michel Benaïm, and Kolawolé A. S. Atchadé. Persistence in fluctuating environments. *J. Math. Biol.*, 62(5):655–683, 2011.
- [Sch12a] Sebastian J. Schreiber. The evolution of patch selection in stochastic environments. *The American Naturalist*, 180(1):17–34, 2012.
- [Sch12b] Sebastian J. Schreiber. Persistence for stochastic difference equations: a mini-review. *J. Difference Equ. Appl.*, 18(8):1381–1403, 2012.
- [Str19] Edouard Strickler. *Persistence de processus de Markov déterministes par morceaux*. PhD thesis, Université de Neuchâtel, 2019.
- [Str21] Edouard Strickler. Randomly switched vector fields sharing a zero on a common invariant face. *Stoch. Dyn.*, 21(2):Paper No. 2150007, 20, 2021.
- [vD91] Erik A. van Doorn. Quasi-stationary distributions and convergence to quasi-stationarity of birth-death processes. *Adv. in Appl. Probab.*, 23(4):683–700, 1991.
- [Vil09] Cédric Villani. *Optimal transport: old and new*, volume 338. Springer, 2009.
- [ZLS14] JunFei Zhang, ShouMei Li, and RenMing Song. Quasi-stationarity and quasi-ergodicity of general Markov processes. *Sci. China Math.*, 57(10):2013–2024, 2014.