Publié dans Travaux de logique 11, 161-187, 1997,
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

LA LOGIQUE DÉVELOPPEMENTALE

Denis MIÉVILLE

Je vous écris du bout du monde. Vous n'imaginez pas tout ce qu'il y a dans le ciel, il faut l'avoir vu pour le croire. Ainsi, tenez, les ... mais je ne vais pas vous dire leur nom tout de suite.
Henri Michaux

Préambule

Notre intérêt va vers l'étude d'une logique développementale, une logique avec laquelle il est possible de marquer les étapes du développement cognitif. Il s'agit donc d'une logique qui, bien que ne contenant pas de foncteurs de vérité liés à la temporalité, est à même de révéler la chronologie de son développement. Cette logique peut être caractérisée globalement de la manière suivante:

1) elle est une logique vérifonctionnelle et extensionnelle;
2) elle se distingue des logiques classiques par l'ensemble particulièrement important des foncteurs logiques qu'elle peut contenir;
3) elle est conçue de manière à être progressivement étendue pour donner accès à de nouveaux foncteurs.

Cette caractérisation doit être affinée et justifiée. Dans un premier temps, nous nous y emploierons en proposant un ensemble de considérations qui sont de nature à éclairer cette perspective développementale. Ensuite nous exposerons les fondements d'une telle logique. Enfin, nous en évoquerons quelques conséquences.

Quelques considérations à propos de la logique développementale

Première considération:

La logique classique du premier ordre n'est pas le tout de la logique extensionnelle. Il s'agit, certes d'une banalité, mais une banalité qu'il est nécessaire parfois de rappeler. En effet, la logique classique du premier ordre est avant toute chose la logique mathématique. Elle a été élaborée en fonction d'un dessein bien particulier, très explicitement lié à la construction des fondements de l'arithmétique. Elle a donc été développée de manière à disposer des objets conceptuels indispensables à sa finalité. Une conséquence de cette démarche est que la logique qui en résulte contient un nombre relativement modeste de catégories syntaxico-sémantiques et, par voie de conséquence, elle fait usage d'un nombre restreint d'opérations logiques.

Deuxième considération:

Pour aborder logiquement les démarches raisonnées des sciences déductives, et cela dans leur dimension extensionnelle et vérifonctionnelle, les catégories syntaxico-sémantiques des noms [N] et des propositions [S] s'imposent comme les catégories fondamentales. La catégorie des propositions est indispensable pour aborder ce qui relève des valeurs de vérité, et la catégorie des noms est indissociablement liée aux objets qui peuplent les univers sur lesquels les raisonnements logiques sont appliqués.

Troisième considération:

Toute catégorie syntaxico-sémantique différente des catégories S et N nécessaires à l'édifice logique est définissable en termes des deux catégories de base. Ainsi, dans la logique classique des propositions, en plus des deux catégories fondamentales S et N, deux autres catégories sont nécessaires. Il y a d'une part la catégorie des foncteurs formateurs de propositions à un opérande propositionnel [S/S], à laquelle appartient l'opération de négation. Il y a d'autre part la catégorie des foncteurs formateurs de propositions à deux opérandes propositionnels [S/SS], dont la conjonction et la disjonction font notamment partie.

Suite aux considérations qui précèdent, il est dès lors légitime de se poser la question du nombre des catégories syntaxico-sémantiques que la logique doit contenir, et donc du nombre des foncteurs qui leur sont associés, pour remplir son rôle par rapport à l'ensemble du savoir déductif. Cette question n'est pas nouvelle et en 1931, Tarski se la posait déjà.

> Le langage d'un système complet de logique devrait contenir en tant que tel – en acte ou en puissance – toutes les catégories sémantiques possibles apparaissant dans le langage des sciences déductives. Cette circonstance confère justement à ce langage un caractère universel dans un certain sens et est l'un des facteurs auxquels la logique doit son importance fondamentale pour l'ensemble du savoir déductif. La variété des catégories sémantiques dans tels ou tels systèmes fragmentaires de logique ou dans d'autres sciences déductives peut être considérablement limitée – tant au point de vue de leur nombre que de leur ordre (Tarski 1974, vol. 1: 219, 1ère éd. 1931).

Comme l'évoque Tarski, la variété des catégories sémantiques peut être limitée dans certains systèmes – fragmentaires, ajoute-t-il – de logique. Le plus bel exemple de cette limitation est encore la logique classique du premier ordre qui ne connaît que les variétés suivantes: N, S, S/S, S/SS, et la famille des quantificateurs qui opèrent sur des fonctions propositionnelles à arguments nominaux pour former des expressions de la catégorie des propositions, S/fonction propositionnelle.

Il est donc admis qu'il existe plusieurs langages liés à divers systèmes de logique; Tarski offre même une classification de ceux-ci:

> ...nous pouvons distinguer quatre *espèces de langages:* (1) les langages dont toutes les variables appartiennent à une même catégorie sémantique; (2) les langages où le nombre de catégories contenant des variables est plus grand que un mais fini; (3) les langages où les variables appartiennent à un nombre infini de catégories différentes, l'ordre de celles-ci ne dépassant cependant pas un nombre naturel <u>n</u> déterminé à l'avance; enfin (4) les langages contenant des variables d'un ordre quelconque si élevé qu'il soit (Tarski 1974, vol. 1: 219-220).

Considérant que le langage d'un système complet de la logique doit contenir des variables d'un ordre quelconque, si élevé qu'il soit, il est indispensable de s'interroger sur la forme que prendrait la manifestation d'un tel projet. Avant d'avancer quelques éléments de réponse, nous poserons ce qui suit:

Quatrième considération:

Le nombre des catégories syntaxico-sémantiques d'un système complet de logique est infini. En effet, la pensée est capable de concevoir une infinité dénombrable de catégories à partir de celles de base que sont les catégories des noms et des propositions. La définition inductive suivante est de nature à révéler progressivement toutes ces catégories:

i. N et S sont des catégories.
ii. Si C, C_1, C_2, ..., C_n sont des catégories, alors $C/C_1C_2\ldots C_n$ est une catégorie. Il s'agit de la catégorie des foncteurs formateurs d'expressions de la catégorie C à n arguments dont le premier est de la catégorie C_1, ..., le $n^{ième}$ de la catégorie C_n.
iii. Rien n'est une catégorie sinon par ce qui précède.

Cinquième considération:

S'il est concevable d'envisager, potentiellement parlant, toutes les possibilités issues des deux catégories de base, le nombre effectif des opérations logiques connues, et donc des catégories qui leur correspondent dans le langage des sciences déductives est à un moment donné fini.

Dans l'impossibilité de disposer d'une théorie logique contenant en acte la totalité des opérations logiques, il faut concevoir un système logique qui soit en mesure d'être progressivement enrichi de nouvelles catégories et de nouveaux foncteurs. Les considérations précédentes nous engagent alors à aborder les questions suivantes:

Si l'ensemble des opérations logiques liées au langage des sciences déductives n'est pas connu de manière exhaustive, une fois pour toutes, mais seulement de manière progressive, en fonction des objets problématiques que la logique parvient à résoudre:

1 – De quelle manière inscrire progressivement la signification de nouveaux foncteurs?
2 – A partir de quelle base en termes de significations primitives fonder de nouveaux foncteurs?
3 – De quel type de système faut-il disposer pour qu'il puisse effectivement être façonné de manière progressive?
4 – Quelles sont les conséquences liées à une telle manière de faire?
5 – Une sémantique purement distributive est-elle encore adéquate pour représenter des opérations logiques d'une complexité croissante?

Nous répondrons tout d'abord à la troisième question. Disposer d'un système logique capable d'intégrer progressivement des idées nouvelles nous engage à réfléchir d'une part sur le choix de la base axiomatique sur laquelle fonder l'édifice logique en devenir et d'autre part, sur la nature d'une procédure rendant effective une telle progression d'idées logiques nouvelles. Il est donc nécessaire, dans un premier temps, de justifier un choix possible de significations primitives initiales à partir desquelles on peut accéder à de nouvelles significations. Construire des significations nouvelles à partir d'autres significations préalablement inscrites présuppose une activité définitoire. Il est dès lors intéressant de s'intéresser aux conditions qui règlent toute bonne définition explicite. Celles-ci sont connues depuis fort longtemps et nous ne nous y attarderons guère (à ce sujet, cf. Miéville 1994). Pour notre propos, nous ne retiendrons pour l'instant qu'une condition: une bonne définition établit une relation d'équivalence entre une expression propositionnelle *A* qui contient le terme constant nouveau ou le foncteur nouveau à définir, et une autre expression propositionnelle *B*, qui présente dans son organisation ce qui sert à définir. Or, deux entités propositionnelles ont entre elles une relation d'équivalence si et seulement si, en leur appliquant l'opération de biconditionnelle, on obtient une expression logiquement valide:

$$A \longleftrightarrow B \quad \text{si et seulement si} \quad \vdash \; A \equiv B.$$

Cette information est importante à deux niveaux: d'une part elle fournit un candidat particulièrement intéressant, la biconditionnelle, pour remplir le rôle d'une des significations primitives à inscrire dans la base axiomatique du système en devenir et d'autre part, elle offre une indication fondamentale quant à la nature des définitions dans le cadre d'un système qui est enrichi progressivement d'idées logiques nouvelles. Traditionnellement, toute définition explicite n'est qu'une commodité linguistique. En effet, bien que subjectivement parlant on lui accorde une finalité cognitive, elle n'apparaît formellement que comme une abréviation. Et c'est bien sa fonction effective dans les systèmes classiques, qui introduisent toute définition à l'aide d'un signe métalinguistique,

$$A = \text{df. } B.$$

N'accorder qu'un statut abréviatif à la définition n'est guère satisfaisant intellectuellement parlant et surtout inutile par rapport au projet de l'élaboration d'un système qui devrait toujours pouvoir s'enrichir d'idées logiques nouvelles. Russell, déjà, à l'aube de notre siècle, en était conscient.

> it is a curious paradox, puzzling to the symbolic mind, that definitions, theoretically, are nothing but statements of symbolic abbreviations, irrelevant to the reasoning and inserted only for practical convenience, while yet in the development of a subject, they always require a very

> large amount of thought, and often embody some of the greatest achievements of analysis (Russell 1956: 63, 1ère éd. 1903).

Afin de briser le caractère pratique lié à la dimension abréviative de la définition et lui substituer le rôle quasi créatif qui doit lui revenir, il est indispensable de penser l'activité définitoire comme une règle d'inférence qui introduit des expressions-définitions comme des théorèmes du système. A ce prix-là, il y aurait rupture avec le rôle purement et effectivement abréviatif des définitions. Une telle règle devra être conçue de manière à déterminer les critères d'admission d'expressions-définitions nouvelles en fonction des significations préalablement inscrites dans le système. Ces expressions-définitions apparaîtraient dans le système sous la forme d'expressions biconditionnelles ayant statut de théorème:

$$\vdash A \equiv B.$$

Sur la base de ces remarques liées à la réalisation d'une logique développementale, il convient donc d'une part de déterminer les axiomes nécessaires afin de fonder au moins la signification de l'opération de biconditionnelle et d'autre part, d'expliciter les conditions inférentielles permettant d'introduire dans le système en devenir de nouvelles expressions biconditionnelles porteuses de concepts logiques nouveaux, expressions ayant le statut de théorème. Mais avant d'aborder cet aspect des choses, il est nécessaire de franchir un obstacle important. En effet, cette manière d'envisager le développement d'une théorie logique ne présuppose en aucune manière un ordre d'accès aux catégories et aux opérations logiques, ni une limite exhaustive visant à les circonscrire. A cette indétermination sémantique liée à l'ensemble des opérations logiques effectivement connues correspond une indétermination syntaxique. Ne connaissant pas à l'avance ce que l'on va définir, il n'est tout simplement pas possible de proposer une liste de symboles préalablement fixés en fonction d'un projet sémantique catégoriellement et fonctionnellement fermé. Un système développemental ne saurait donc posséder une des caractéristiques essentielles de tout système formel au sens classique du terme: celui d'être «*donné tout entier*, *en une seule fois*» (Chazal 1995: 73). Au temps initial d'une logique développementale, seules les significations initiales indispensables sont présentes; toute autre signification est l'objet d'une définition interne au système, définition qui ne soutient aucun lien avec un objet syntaxique préalablement inscrit. Hormis ce qui est proposé dans la base axiomatique, nul autre symbole n'est explicité *a priori*. La sélection de nouveaux symboles supportant de nouvelles significations, et leur reconnaissance catégorielle et fonctionnelle, doivent donc passer par une procédure d'identification qui s'appuie sur d'autres critères que ceux d'une forme qui renvoie univoquement à une signification. La solution passe par une détermination contextuelle des symboles.

Une détermination contextuelle n'est pas une nouveauté. Quiconque s'est interrogé sur la catégorie grammaticale de la marque conjonctive en français, par exemple, a forcément été sensible au fait que, prise isolément, cette conjonction n'appartient pas à une catégorie univoquement déterminée. Pour attribuer à telle ou telle conjonction «et» sa catégorie, il est nécessaire d'étudier la nature des objets linguistiques sur lesquels elle porte. Ainsi, dans la proposition «Pierre lit le journal et Jean rit» la conjonction est de la catégorie des foncteurs formateurs de propositions à deux arguments propositionnels parce que cette conjonction-là porte sur deux entités propositionnelles: «Pierre lit le journal» d'une part, et «Jean rit» de l'autre. Alors que dans l'exemple suivant, «Le drapeau suisse est rouge et blanc», la conjonction est de la catégorie des foncteurs formateurs de noms à deux arguments nominaux parce que cette conjonction-ci porte sur deux entités nominales: «rouge» d'une part, et «blanc» de l'autre. Ainsi, pour obvier à l'indétermination sémantique, et donc syntaxique, propre aux logiques développementales, la manière choisie est justement cette détermination contextuelle dont on esquissera ici le principe. Nous poserons dorénavant que tout foncteur (constant ou variable) d'une quelconque catégorie précédera une paire de parenthèses symétriques – pour l'instant, peu importe sa forme –, parenthèses qui enserrent un nombre fini d'arguments. Ainsi, dans les inscriptions suivantes:

*(ay%) et +[xcvj]

* et + sont deux foncteurs. Le premier agit sur trois arguments, le deuxième sur quatre. Ainsi, et nous le préciserons un peu plus loin, la catégorie d'un foncteur est déterminable en fonction de la forme des parenthèses et du nombre des arguments qui lui sont associés.

Mais comment réaliser si soit «*», soit «+» a le statut de variable ou de constante? La question se pose tout naturellement dans la mesure où nous ne disposons pas ici de listes préalables de symboles, indiquant s'ils fonctionneront comme variables ou comme constantes. La réponse passe encore une fois par un mode de détermination contextuelle. Précisons les choses en imposant ce qui suit:

1) Toute expression bien formée du système en devenir doit être une expression quantifiée.
2) Une expression quantifiée est une expression complexe composée de deux sous-parties concaténées; la première est une expression parenthésée, non vide dont les parenthèses sont équiformes aux parenthèses suivantes: ⌊ et ⌋, et la deuxième, non vide également, dont les parenthèses sont équiformes aux parenthèses suivantes: ⌈ et ⌉. On appelle généralement la première partie un quantificateur, et la deuxième, un sous-quantificateur.

Dans ces conditions, une expression bien formée a la forme globale suivante:

> ⌊... eβα ...⌋⌈... ανμe4 ...⌉, peu importe pour le moment la signification et la forme des éléments que cette expression contient.

Il est dès lors possible de définir, dans une expression, quels symboles ont statut de variable ou statut de constante:

3) Un symbole dans un sous-quantificateur possède le statut de variable si et seulement si
   - il n'est pas une parenthèse symétrique,
   - il est différent des symboles choisis pour définir la partie quantification et la partie sous-quantification d'une expression bien formée,

– il possède un symbole équiforme dans le quantificateur.

Ainsi, sans disposer d'une liste de symboles préalablement déterminés sémantiquement parlant, il est possible de déterminer le statut de chaque symbole de manière contextuelle.
Nous pouvons donc ainsi attribuer aux symboles e et α dans ⌈... ανμe4 ...⌉ le statut de variable parce qu'ils possèdent l'un et l'autre un signe équiforme dans le quantificateur correspondant au sous-quantificateur dans lequel ils sont inscrits: ⌊... eβα ...⌋.

Les symboles ν, μ et 4 dans ⌈... ανμe4... ⌉ ont le statut de constante parce qu'ils ne sont pas des parenthèses symétriques, ils ne sont pas des symboles équiformes aux parenthèses utilisées pour les quantificateurs et les sous-quantificateurs, et parce qu'ils n'ont pas de signes équiformes dans le quantificateur ⌊... eβα ...⌋ qui correspondent au sous-quantificateur dans lequel ils sont inscrits.

Nous sommes en présence d'un certain nombre d'éléments déterminants pour nous diriger vers le projet qui nous intéresse:

- nous savons distinguer ce qui peut avoir statut de constante ou de variable,
- nous savons reconnaître ce qui peut jouer le rôle de foncteur et la forme globale d'une expression de type fonctionnel,
- par ailleurs nous savons que le mode de reconnaissance de la catégorie d'un symbole de foncteur passera par la forme des parenthèses symétriques de l'expression parenthésée qui le suit, ainsi que du nombre des arguments que cette expression contient,
- enfin, la procédure définitoire permettant de donner accès à de nouvelles significations, voire catégories, est directement conçue sur l'existence de l'opération logique de biconditionnelle.

Il est dès lors possible de faire un pas de plus en proposant les significations primitives et les contextes primitifs qui seront à la base de notre système en devenir. La signification primitive sera celle de la biconditionnelle, inscrite dans une base axiomatique et qui fixe, par décision initiale, le premier contexte. Cette décision initiale est d'autant plus importante qu'elle donne le code de détermination de la catégorie syntaxique de la première signification du système, celle qu'il possède à l'état initial. A ce temps-là du système, rien d'autre, syntaxiquement parlant, n'existe.

Par décision, nous imposerons dorénavant que tout symbole, différent d'un symbole de parenthèse ou différent d'un symbole de délimitateur de quantification ou de sous-quantification, sera de la catégorie des foncteurs formateurs de propositions à deux arguments propositionnels [S/SS] si et seulement si il précède une paire de parenthèses symétriques équiformes à (, respectivement), et que cette expression parenthésée contient exactement deux arguments.

Ainsi, dans l'expression suivante, $\lfloor \ldots\ \beta\alpha\ \ldots \rfloor \lceil \ldots\ \alpha(\mathrm{v\ w})\ \ldots \rceil$, je reconnais que le α est un foncteur variable de la catégorie des foncteurs formateurs de propositions à deux arguments propositionnels, non pas parce qu'il est inscrit avec la forme α, mais parce qu'il précède une expression parenthésée dont les parenthèses symétriques sont équiformes à (--) et que cette expression possède deux arguments. Il s'ensuit, et c'est un corollaire, que toute entité inscrite dans une expression parenthésée, dont les parenthèses sont équiformes à (--), et qui contient deux unités, est une expression de la catégorie des propositions. Sur la base de cette réalité ainsi décrite, et en nous basant sur le fait que nous voulons disposer de la signification de la biconditionnelle comme première signification primitive, il est indispensable d'inscrire une base axiomatique pour fixer les choses. Nous emprunterons celle que propose S. Lesniewski, qui fut le premier, à l'aube de ce siècle, à formuler les bases d'une logique développementale. Les axiomes sont exprimés dans le cadre d'un système d'écriture préfixée, parenthésée, et à détermination de type contextuel:

A1: $\lfloor pqr \rfloor \lceil \equiv (\equiv (\equiv (pr) \equiv (qp)) \equiv (rq)) \rceil$

A2: $\lfloor pqr \rfloor \lceil \equiv (\equiv (p \equiv (qr)) \equiv (\equiv (pq)\ r)) \rceil$

A3: $\lfloor pg \rfloor \lceil \equiv (\lfloor f \rfloor \lceil \equiv (g(pp) \equiv (\lfloor r \rfloor \lceil \equiv (f(rr)g(pp)) \rceil$
$\lfloor r \rfloor \lceil \equiv (f(rr)g(\equiv (p \lfloor q \rfloor \lceil q \rceil)\ p)) \rceil)) \rceil \lfloor q \rfloor \lceil g(pq) \rceil) \rceil$

En regard de cette écriture rigoureuse qui respecte les conditions strictes liées au projet d'une logique développementale, présentons une transcription bâtarde, mais plus conforme à notre manière habituelle de procéder:

A1: $(\forall pqr)(((p \equiv r) \equiv (q \equiv p)) \equiv (r \equiv q))$
A2: $(\forall pqr)((p \equiv (q \equiv r)) \equiv ((p \equiv q) \equiv r))$
A3: $(\forall pg)\ [(\forall f)(g(pp) \equiv ((\forall r)(f(rr) \equiv g(pp)) \equiv (\forall r)(f(rr) \equiv g((p \equiv (\forall q)(q))p)))) \equiv (\forall q)(g(pq))]$

Au temps initial de l'existence de notre système, il n'existe que trois expressions logiques, les trois axiomes, et ceux-ci en constituent donc les trois premières thèses. A l'état initial, le système dispose donc de deux catégories syntaxiques: celle des propositions, S, présente à travers l'inscription de symboles variables et celle des foncteurs formateurs de propositions à deux arguments propositionnels, S/SS, catégorie inscrite à travers le symbole du foncteur constant ≡, et de variables. Le système proposé est donc un système d'ordre supérieur. Rappelons que la détermination de la catégorie du symbole ≡ est de la catégorie S/SS non parce qu'il a cette forme précise, mais parce qu'il apparaît dans un contexte particulier dans lequel il est un signe qui précède l'expression parenthésée (pq), et pour aucune autre raison formelle. Les axiomes 1 et 2 expriment certaines des propriétés essentielles qui caractérisent la biconditionnelle; le troisième contient d'une part le principe de bivalence pour la biconditionnelle et les foncteurs variables de la catégorie S/SS et d'autre part, quelques formes du principe d'extensionnalité pour les propositions.

L'avenir de ce système est d'une certaine manière entièrement indéterminé dans la mesure où son expansion progressive peut prendre de multiples chemins. Cette liberté, liée à l'ensemble infini des possibilités de développement, entraîne une indétermination syntaxique. Nous montrerons de quelle manière, grâce à la règle d'inférence définitoire, il est possible de développer dans le temps et l'espace le cheminement logique que l'on veut concevoir, en marquant le temps de la progression cognitive qui lui est liée.

Où il est question de la définition

Une règle inférentielle de définition doit, pour remplir le contrat d'une logique développementale, permettre d'inscrire des théorèmes dans le système. Il s'agit de théorèmes particuliers dans la mesure où une expression définitoire doit être de préférence une expression biconditionnelle; nous avons précédemment expliqué les raisons de ce choix. Ainsi, la règle de définition permettra d'introduire des expressions complexes de la forme très schématique suivante:

$$\lfloor v_1 v_2 \ldots v_n \rfloor \ulcorner \equiv (\mathbf{f}\langle v_1 v_2 \ldots v_n \rangle\, E_{v_1 v_2 \ldots v_n}) \urcorner$$

dont l'expression bâtarde correspondante est la suivante:

$$(\forall pqr)(\mathbf{f}\langle v_1 v_2 \ldots v_n \rangle \equiv E_{v_1 v_2 \ldots v_n})$$

dans laquelle le symbole **f** représente un symbole de foncteur constant nouveau par rapport à la catégorie à laquelle il appartient, foncteur portant sur **n** variables; l'expression $\mathbf{f}\langle v_1 v_2 \ldots v_n \rangle$ est le *definiendum* de la définition, et l'expression $E_{v_1 v_2 \ldots v_n}$, le *definiens*. Cette dernière expression doit être formée avec ce que le système a préalablement construit et contenir les variables $v_1, v_2, \ldots, v_n$. On peut remarquer que, conformément à ce qui avait été annoncé, le *definiendum* et le *definiens* sont bien inscrits dans une expression biconditionnelle:

$$\equiv (\mathbf{f}\langle v_1 v_2 \ldots v_n \rangle\, E_{v_1 v_2 \ldots v_n})$$

Dans l'explicitation de la mise en oeuvre de la règle inférentielle définitoire il sera nécessaire de spécifier que:

i) Si le nouveau foncteur constant **f**, destiné à être introduit, est d'une catégorie syntaxico-sémantique précédemment introduite, il est nécessaire de respecter formellement le contexte qui caractérise cette catégorie préalablement introduite. Ainsi, si l'on désire introduire une nouvelle constante de la catégorie S/SS, il est indispensable de respecter le contexte préalablement choisi, à savoir (--).

ii) Si le nouveau foncteur constant **f**, destiné à être introduit, est d'une catégorie que le système ne connaît pas encore, il est nécessaire de choisir un contexte qui lui attribue une nouvelle identité catégorielle et cela, en prenant la précaution de choisir un parenthèsage qui évite toute confusion. A titre d'exemple, prenons la situation où il est nécessaire d'introduire un foncteur constant binaire, formateur de propositions à deux arguments de la catégorie des foncteurs formateurs de propositions à deux arguments propositionnels, S/(S/SS)(S/SS). Dans ce cas, il est exclu de faire usage des parenthèses équiformes à (et). En effet, ce nouveau foncteur étant binaire lui aussi, le choix des parenthèses (et) rendrait totalement ambiguë la catégorie du nouveau foncteur puisque cette paire de parenthèses a été préalablement utilisée pour identifier dans un autre contexte binaire, une autre catégorie. A part ce cas, toute autre paire de parenthèses différentes de (et) et d'autres paires de parenthèses liées à des contextes catégoriels binaires préalablement inscrits peut être choisie.

Par ailleurs, l'expression de la thèse-définition doit respecter entre le *definiens* et le *definiendum* les conditions fondamentales liées à toute définition explicite. Nous les rappelons ici:

1. Etablir une relation d'équivalence entre un *definiendum* (ce qui porte le défini), et un *definiens* (ce qui permet de définir).
2. Construire le *definiens* sur ce qui a été préalablement posé, voire défini.
3. Inscrire un terme constant nouveau unique dans le *definiendum.* Celui-ci ne doit être équiforme à aucun autre terme préalablement posé ou défini de la même catégorie syntaxico-sémantique.
4. Prendre garde à ce que toute variable du *definiens* possède une occurrence dans le *definiendum.* Ne pas respecter cette condition conduit à la possibilité de constructions contradictoires.

5. Prendre garde à ce que toute variable du *definiendum* possède une occurrence dans le *definiens*. Il s'agit d'une condition de pure esthétique!
6. Veiller à ce qu'aucun signe du *definiendum* ne soit répété. Une infraction à cette condition peut poser des problèmes dans la mise en oeuvre de la règle de substitution.

La procédure définitoire proposée par S. Lesniewski, se fondant sur la constante logique de biconditionnelle, respecte ces conditions.

Nous avons beaucoup insisté, dans l'esprit tout au moins, sur la règle d'inférence définitoire proposée par Lesniewski. Celle-ci permet, à partir d'une base syntaxico-sémantique modeste, de développer progressivement l'ensemble des catégories logiques – et donc des constantes qui lui correspondent – concevables à partir de la catégorie initiale et primitive des propositions, S. Cependant un logicien ne saurait se contenter d'enrichir progressivement la bibliothèque potentiellement infinie des opérations logiques propositionnelles. Il doit encore être capable de les mettre en oeuvre, afin d'atteindre l'ensemble des théorèmes logiques de son système, quel qu'en soit l'état de développement. Une logique développementale doit donc disposer de règles d'inférence supplémentaires: les règles de détachement de la biconditionnelle, de substitution et d'extensionnalité, pour ne citer que les plus importantes. La logique esquissée ici les possède bien entendu, mais notre propos est d'insister avant tout sur la définition temporelle liée au développement syntaxico-sémantique d'une telle logique. Nous ne ferons ainsi qu'évoquer l'existence de ces autres règles d'inférence. En exposant les bases de cette logique des propositions élargie, la protothétique, S. Lesniewski offre une méthodologie permettant un accès à une logique issue de la catégorie des propositions la plus généreuse qui soit.

Pour caractériser l'esprit d'une logique développementale dans laquelle la progression temporelle est dominante, nous avons antérieurement consacré notre propos à la conception purement propositionnelle de la logique. Elle n'est enfin qu'un aspect, certes fondamental, mais incomplet de l'édifice logique.

Si nous avons procédé de cette manière c'est pour insister sur ce qui nous importe ici: la dynamique liée au temps. Mais ce qui relève des activités liées aux valeurs de vérité est aussi déterminant; il s'agit de ce qui participe au discours logique portant sur les problèmes de la référence et des structures relationnelles. Dans cette perspective, la catégorie syntaxico-sémantique des noms est fondamentale et, ajoutée à celle des propositions, elle permet, par combinatoire, d'épuiser l'ensemble des catégories syntaxico-sémantiques qu'une logique complète et idéale devrait posséder. Ici encore, nous empruntons à Lesniewski un système élargi des prédicats d'ordre supérieur, habité du dynamisme développemental qui marque la temporalité. Ce système, que nous allons maintenant aborder, porte le nom d'ontologie.

Un aperçu de l'ontologie de Lesniewski

Proposons une approche présémantique pour aborder l'ontologie de Lesniewski qui constitue un calcul d'ordre supérieur des termes nominaux. Une telle approche est constituée par une appréhension naïve et naturelle que nous avons du monde et de notre manière d'en parler. Nous croyons à l'existence matérielle ou non matérielle de choses; Socrate, cette page, la Lune appartiennent à notre réalité. Nous savons raisonner avec de tels objets et, pour le faire, nous leur associons des noms. Ces noms sont considérés comme des *noms individuels*, des noms qui dénotent des choses considérées comme des entités. Mais on sait qu'il existe des noms d'une autre nature; il y a des *noms généraux*, Nicolas Bourbaki – ce mathématicien polycéphale – est l'un d'entre eux. Il existe également un autre type de noms; les logiciens le savent bien, eux qui n'ont eu de cesse de raisonner sur le thème de Pégase, de l'actuel roi de France, et autre cercle-carré. Il s'agit des *noms vides*, c'est-à-dire, de noms qui ne dénotent aucun objet. Enfin, il existe des objets sans nom et, pour cette raison, nous ne saurions en parler. Lesniewski va admettre cette variété sous la catégorie des noms.

Lorsque nous parlons, lorsque nous raisonnons, nous ne cessons d'utiliser – dans les langues indo-européennes en tous les cas – la copule *est*. Cette copule joue un rôle logique considérable, même si elle n'apparaît pas explicitement dans le calcul logique des prédicats, où elle se voit amalgamée d'une certaine manière aux propriétés et aux prédicats. Lesniewski s'y intéresse directement, et ceci pour des raisons d'évidence toute pratique. En effet, lorsqu'il développe les linéaments de sa théorie des ensembles collectifs, il les expose dans une langue naturelle. Axiomes et théorèmes apparaissent comme des propositions particulières dans lesquelles la copule *jest* – l'équivalent polonais du *est* – abonde. Cette copule est associée aux noms qu'il utilise pour organiser les objets de sa théorie. Il s'intéresse donc à la signification de cette copule lorsqu'elle articule des noms. Cet intérêt aboutit à l'explicitation d'une théorie des termes capable de représenter un calcul des noms.

Le génie de Lesniewski est associé à une exigence de rigueur peu commune, ainsi qu'à la conscience qu'une langue formelle doit hériter, dans la mesure de ce qui est possible, de toutes les richesses que nous offre la pensée en discours, et notamment de son pouvoir de créativité. Cette attitude explique en partie son refus de travailler avec les systèmes de la tradition russellienne. Il va donc offrir un système logique qui fixe de manière axiomatique une signification de la copule. Celui-ci, à l'image de tous les systèmes de Lesniewski, est d'une nature conceptuelle et développementale. Il peut donc être également développé de manière progressive, sur la base de ce qui a été préalablement posé ou défini. Cette dynamique est conduite par une directive de définition à caractère ontologique qui permet d'introduire des thèses-définition internes au système. Une telle liberté définitoire permet de représenter progressivement des idées nouvelles dans le système. Elle est rendue possible, rappelons-le, par le fait que toute catégorie syntaxico-sémantique est déterminée de manière contextuelle, autrement dit qu'elle ne dépend pas d'un ensemble prédéterminé de symboles.

Sur la base de ces idées, Lesniewski établira de manière univoque la signification de la copule qu'il utilise dans les discours qui règlent ses déductions logiques. Il en présentera une première version formelle en 1930 sous la forme d'un unique axiome contenant un seul terme primitif, l'epsilon ε. Il ne s'agit en aucun cas du symbole d'appartenance de la théorie classique des ensembles. Ce terme apparaît dans des propositions dites *singulières* dont la forme est la suivante $a \varepsilon b$, et qui peut se lire de la manière présémantique suivante:

a ε b: *a* est le (ou un des) *b*.

Les termes *a* et *b* représentent des objets formels de la catégorie syntaxico-sémantique des noms. L'epsilon ε est donc un foncteur formateur de propositions à partir de deux arguments de la catégorie des noms, ce que nous désignerons par l'équation formelle suivante: S/NN.

L'évaluation d'une proposition singulière de la forme $a \varepsilon b$ est le vrai si et seulement si toutes les conditions suivantes sont réalisées:

1) Le terme *a* ne représente pas un nom sans dénotation;
2) le terme *a* représente un nom individuel. Ce nom ne peut pas dénoter plus d'un individu;
3) si un terme est associé à un nom qui possède la même dénotation que celui associé à *a*, alors il est en correspondance avec les objets – ou l'objet – dont le nom est associé au terme *b*.

Cette formulation n'est pas très élégante. La première clause stipule l'existence de *a*, la deuxième inscrit l'unicité de *a* et enfin la troisième clause explicite un principe de convergence: tout ce qui pourrait être *a* est aussi un des *b*.

Cette signification de l'epsilon de Lesniewski s'exprime au travers de la réalisation formelle suivante dans laquelle $\lfloor a \rfloor$ peut être lu «quel que soit *a* » et $\lfloor \exists b \rfloor$, «il y a *b*».

Axiome:

$$\lfloor ab \rfloor \ulcorner a \varepsilon b \equiv \lfloor \exists c \rfloor \ulcorner c \varepsilon a \urcorner \wedge \qquad \text{(existence)}$$
$$\lfloor dc \rfloor \ulcorner (c \varepsilon a \wedge d \varepsilon a) \supset d \varepsilon c \urcorner \wedge \qquad \text{(unicité)}$$
$$\lfloor c \rfloor \ulcorner c \varepsilon a \supset c \varepsilon b \urcorner \urcorner \qquad \text{(convergence)}$$

En utilisant cette signification de la copule et en choisissant comme domaine sémantique celui des connaissances naïves communément partagées, il est possible dès lors d'évaluer les propositions suivantes:

Aristote est un philosophe de l'Antiquité – comme une proposition vraie.

Jean-Paul II est un mathématicien célèbre– comme une proposition fausse. En effet, bien que *Jean-Paul II* existe et soit unique, il n'est pas le cas qu'il soit un mathématicien.

Pégase est un cheval ailé – comme une proposition fausse, parce que Pégase n'existe pas, Pégase ne dénote aucun objet.

L'homme est mortel – comme une proposition fausse, parce que l'homme dans ce contexte est un nom général, il dénote plus d'un objet. En fait, il s'agit de la forme contractée d'une universelle affirmative qui peut s'écrire ainsi:

$$\lfloor c \rfloor \lceil c \;\varepsilon\; a \supset c \;\varepsilon\; b \rceil$$

et qui serait vraie.

Nous avons choisi de représenter la quantification d'une autre manière que celle généralement utilisée. Il ne s'agit pas d'une coquetterie, mais d'une nécessité dans la mesure où dans les théories de Lesniewski la quantification ne possède pas le caractère existentiel implicite des logiques classiques, ni celui explicite des logiques libres standard. Dans la perspective d'une interprétation sur un domaine sémantique, elle ne saurait donc être objectuelle. Répétons-le, dans cette théorie, existence et quantification restent deux notions distinctes.

Comme la protothétique, l'ontologie de Lesniewski est une théorie logique et, comme telle, elle contient des directives inférentielles. Elles sont au nombre de sept: une directive de détachement, une de substitution, une directive opérant sur la quantification, deux directives d'extensionnalité et deux directives de définition. Pour des raisons déjà évoquées, nous avons insisté ici uniquement sur les directives de définition.

Sur la base de ces directives et en utilisant les informations que contient l'axiome, à savoir les quatre catégories syntaxico-sémantiques primitives (S, N, S/NN, S/SS), ainsi que les constantes associées à certaines d'entre elles (ε, $\equiv$, $\wedge$, $\supset$), il est possible d'inscrire progressivement de nouvelles constantes quelle qu'en soit la catégorie syntaxico-sémantique.

Nous nous sommes intéressés à définir une négation nominale de la catégorie N/N (Miéville 1991), une opération logique de subordination de la catégorie N/SN, ainsi que quelques opérations d'ordre supérieur (Miéville 1993).

Cette générosité syntaxico-sémantique a une conséquence particulièrement riche. En effet, elle fait reculer les limites élémentaires des descriptions extensionnelles classiques. Le fait de disposer de constantes des catégories syntaxiques suivantes, par exemple, N/N ou N/S, incite à nous inquiéter de la subtilité de la description du modèle sémantique. Et dans cette perspective, la volonté de disposer d'une sémantique capable de représenter l'organisation des diverses relations que soutiennent les parties au tout s'impose de manière quasi naturelle. Une fois encore, nous avons emprunté à S. Lesniewski la définition de la classe collective pour l'interpréter (Lesniewski 1916; Miéville 1984). En effet, cette acception collective de la notion de classe permet de rendre compte de l'aspect pluridimensionnel des objets. Elle offre la possibilité de réunir en un tout, une entité des plus complexes sans pour autant admettre n'importe quoi comme ingrédient. On comprendra donc notre intérêt pour ce modèle. De plus, on peut parler du même objet de discours sous des aspects différents, et là encore le recours au modèle collectif élaboré par Lesniewski se révèle d'une grande utilité. Explicitons-en maintenant les propriétés fondatrices.

La classe collective

Dans un premier temps, illustrons notre propos afin de mieux rendre compte de l'interprétation collective. Abordons la classe des carrés de la figure I. De manière distributive, cette classe est constituée de six et seulement six éléments: les carrés ACEG, BDFH, ABIH, HIFG, BCDI, IDEF.

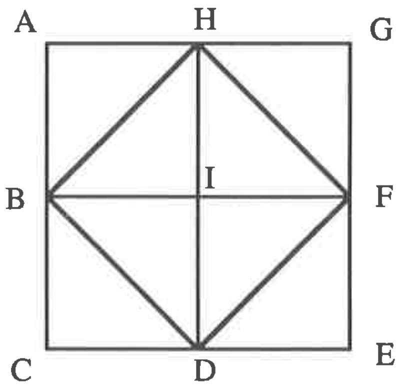

Figure I

Tous les éléments qui la composent sont de même nature: ils tombent tous sous la propriété caractéristique de la classe, autrement dit sous le concept qui l'engendre: être un carré de cette figure géométrique.

La lecture collective de cette classe comportera également ces six éléments, mais bien d'autres choses encore, en effet, les éléments suivants en font notamment partie:

- Les triangles ABH, BIH, HIF, HFG, BCD, BDI, IDF, DEF, BFH, BDF, BDH et HDF.
- Le polygone ABIDEG, entre autres polygones.
- Les segments AB, AC, BC, tout segment contenu dans AC, les points A, B, C, D, tout point contenu dans CD, toute com-

position imaginable de points et (ou) de segments, et (ou) d'autres éléments qui y sont inscrits, appartiennent encore à la classe collective des carrés de la figure I.

– La cardinalité de la classe distributive des carrés de la figure I est de six, celle de la classe collective possède la puissance du continu.
– Par ailleurs, la classe collective des carrés de la figure I est le même objet que la classe des triangles de la figure I. On a donc accès aux mêmes éléments par des modes d'accès conceptuellement très différents.

Lesniewski a défini le concept de classe collective dans le cadre d'une théorie axiomatique du rapport des parties au tout. La relation d'ingrédience qu'il propose est une relation réflexive, antisymétrique et transitive. Le modèle qui domine sa construction, bien que pluriextensionnel, reste extensionnel. Il est probable que sa perception de l'espace géométrique ait guidé ses réflexions. Mais il n'est pas inutile de présenter la définition de la classe collective de manière plus précise. Nous allons nous y employer.

Lorsque Lesniewski s'interroge sur la notion de classe, il refuse d'accepter qu'elle ne soit considérée qu'à l'image d'une commodité linguistique ou symbolique. Il refuse donc l'acception qu'en donne Russell (Whitehead & Russell 1910, I: 75):

> The symbols for classes like those for descriptions, are, in our system, incomplete symbols: their "uses" are defined, but they themselves are not assumed to mean anything at all. That is to say, the uses of such symbols are defined such that, when "definiens" is substituted for the "definiendum", there no longer remains any symbol which could be supposed to represent a class. Thus classes, so far as we introduce them, are merely symbolic or linguistic conveniences, not genuine objects as their members are if they are individuals.

Pour Lesniewski, bien au contraire, une classe est une «chose». De manière intuitive, il trouve naturel de considérer qu'un tas de sable existe de manière analogue avec les grains de sable qui le composent. Ses réflexions le conduisent tout à la fois à donner une acception collective au terme de «classe» et à exposer une théorie générale des ensembles dans laquelle la classe collective est définie: la méréologie (Lesniewski 1916).

C'est la base axiomatique de cette théorie que j'exposerai maintenant.

Axiome I

Quel que soit *A*, quel que soit *B*, si *A* est part de *B*, alors *B* n'est pas part de *A*.

Axiome II

Quel que soit *A*, quel que soit *B*, quel que soit *C*, si *A* est part de *B* et B part de *C*, alors *A* est part de *C*.

Définition I

Quel que soit *A*, quel que soit *B*, *A* est ingrédient de *B* si et seulement si, *A* existe et (*A* est identique à *B* ou *A* est part de *B*).

Définition II

Quel que soit *A*, quel que soit *a*, *A* est la classe des *a* si et seulement si,
**A* existe
*il existe un *B*, *B* est un des *a*
*quel que soit *B*, si *B* est un des *a* alors *B* est un ingrédient de *A*
*quel que soit *B*, si *B* est un ingrédient de *A* alors il existe *C* et *D* tels que: *C* est un des *a*, *D* est ingrédient de *C* et *D* est ingrédient de *B*.

Axiome III

Quel que soit *A*, quel que soit *B* et quel que soit *a*, si *A* est la classe des *a* et *B* la classe des *a*, alors *A* est identique à *B*.

Axiome IV

Quel que soit *A*, quel que soit *a*, si *A* est un des *a* alors il existe *B*, *B* est la classe des *a*.

Ce qui précède appelle quelques remarques:

– Le seul terme primitif de cette base axiomatique est *part de*. La signification de ce terme est une relation d'ordre irréflexive, asymétrique et transitive.

- Le terme défini, *ingrédient de*, établit une relation d'ordre partiel.
- Si A est une classe de a, alors A est ingrédient de lui-même.
- Une même classe collective A peut être engendrée par des éléments générateurs a et b différents, sans pour autant qu'il y ait un rapport de l'ordre du même entre eux, et cette faculté d'offrir une multiplicité de révélateurs des ingrédients d'une même classe collective nous importe directement.
- Dans la perspective collective, la classe vide n'existe pas.
- La méréologie ne propose pas seulement les significations primitives nécessaires à la définition du concept de la classe collective. Cette théorie s'ouvre également sur la définition de tout un ensemble d'opérations possibles, opérations qui permettent un calcul avec et sur les entités collectives.

Epilogue

Dans les pages précédentes, nous avons exposé les éléments fondamentaux caractérisant une logique développementale qui conserve les principes de bivalence et d'extensionnalité. Nous avons également présenté les significations primitives permettant de fonder une telle logique. De plus, nous avons décrit les moyens inférentiels autorisant toute expansion en termes de constantes nouvelles et donc de catégories nouvelles.

Dans la forme comme dans le fond, nous ne sommes pas en présence d'une théorie logique unique qui aurait la propriété d'être développée progressivement. En fait, nous disposons d'une base axiomatique modeste en termes de significations primitives à partir de laquelle une multitude de systèmes logiques peuvent être élaborés. Cette très grande ouverture entraîne incontestablement au moins deux conséquences épistémologiques importantes: la première est liée, et on l'a largement éprouvée comme telle, à une nouvelle manière de concevoir la formalisation. La liberté expansive du système implique une indétermination de la syntaxe qui entraîne, à son tour, une détermination contextuelle de la signification des inscriptions d'une expression. La deuxième conséquence est liée au mouvement progressif dans l'espace et le temps qui participe à l'élaboration de tout système. Ce temps est celui de l'expansion de la connaissance opératoire du système en développement. Il marque les étapes des modifications fortes du système; celles qui s'inscrivent par le biais de définitions créatives. Une définition est qalifiées de *créative* lorsqu'elle donne accès à des théorèmes qui ne contiennent pas le terme nouveau défini, mais que l'on ne saurait déduire sans cette signification nouvelle.

L'expression du temps que ces systèmes fixent n'est pas celle liée aux opérations de vérité. Il s'agit davantage de l'expression du temps associée à l'idée d'expansion et de croissance; cette croissance est celle qui rattache les compétences nouvelles à celles des stades antérieurs. Ce mouvement génétique est à même de pouvoir représenter une filiation de structures. Ainsi, une exploitation possible d'un système développemental est la possibilité de mettre en oeuvre la directive de définition de manière à marquer l'accès progressif au groupe des quatre transformations INRC, groupe qui spécifie le stade des opérations hypothético-déductives tel que Piaget et son école l'ont révélé (Piaget 1949). Des travaux sont en cours dans cette perspective.

Ainsi, un engagement dans la logique développementale ouvre sur de nouvelles aventures intellectuelles; il s'agit d'aventures où le temps lié au développement de la connaissance logique prédomine. Elles nous entraînent à enrichir constamment l'édifice des opérations logiques. Elles nous conduisent également à investiguer toujours davantage la structure de la sémantique formelle.

Séminaire de logique
Université de Neuchâtel
Espace Louis-Agassiz 1
2000 NEUCHÂTEL

Références

CARNAP R. (1949). *The Logical Syntax of Language*. London: Routlledge & Kegan.

CHAZAL G. (1995). *Le miroir automate*. Champ Vallon: Seyssel.

LESNIEWSKI S. (1916). Podstawy ogólnej teoryi mnogosci, I. (Les fondements d'une théorie générale des ensembles). *Prace polskiego kola naukowego w Moskwie. Sekcyz matematycznoprzyrodinicza, 2*. (Traduction anglaise anonyme, 1976).

LUSCHEI E.C. (1962). *The Logical System of Lesniewski*. Amsterdam: North Holland.

MIÉVILLE D. (1984). *Un développement des systèmes logiques de Stanislaw Lesniewski. Protothétique, ontologie, méréologie*. Berne: Lang.

MIÉVILLE D. (1991). *La négation, une étude logique*. Université de Neuchâtel: Centre de Recherches Sémiologiques, (Travaux de logique, n° 6).

MIÉVILLE D. (éd.) (1993). *Relations formelles et relations non formelles*. Université de Neuchâtel: Travaux du Centre de Recherches Sémiologiques, n° 61.

MIÉVILLE D. (éd.) (1997). *Temps, logique et langage*. Actes du symposium tenu lors du colloque international «Penser le temps». Neuchâtel, 8-10 octobre 1996. Université de Neuchâtel: Travaux du Centre de Recherches Sémiologiques, n° 65.

MIÉVILLE D. & VERNANT D. (sous la dir.) (1995). *Stanislaw Lesniewski aujourd'hui*. Grenoble: Département de philosophie / Université de Neuchâtel: Centre de Recherches Sémiologiques.

PIAGET J. (1949). *Traité de logique. Essai de logique opéra - toire*. Paris: Colin.

RUSSELL B. (1903). *The Principles of Mathematics*. London: Allen & Unwin.

SURMA S.J., SRZEDNICK J.T, BARNETT D.I. (eds) (1992). *S. Lesniewski. Collected Works.* Dordrecht: Kluwer Academic Pub.

TARSKI A. (1974). *Logique, sémantique, métamathématique.* Paris: Colin

WITEHEAD A.N. & RUSSELL B. (1910). *Principia Mathematica.* Cambridge: Cambridge University Press.