



MÉTHODES DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINES POUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES EN JONCTION FLEUVE/OCÉAN ET LES LOIS DE CONSERVATION SCALAIRES.

THÈSE

présentée à la faculté des sciences
pour l'obtention du grade de docteur ès sciences

par

Souleymane DOUCOURÉ

soutenue avec succès le 16 mars 2012
et acceptée sur proposition du jury

M. OLIVIER BESSON	UNiNe, (DIRECTEUR DE THÈSE, RAPPORTEUR)
M. PASCAL AZERAD	UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER II, (RAPPORTEUR)
M. MARTIN J. GANDER	UNIVERSITÉ DE GENÈVE, (RAPPORTEUR)
M. DIARAF SECK	UNIVERSITÉ CHEIKH A. DIOP, (EXAMINATEUR)
M. ALAIN VALETTE	UNiNe, (EXAMINATEUR)

UNIVERSITE DE NEUCHATEL
Institut de Mathématiques
Rue Emile-Argand 11
CH-2009 NEUCHATEL (SUISSE)

IMPRIMATUR POUR LA THESE

**Méthodes de décomposition de domaines pour les
équations de Navier-Stokes anisotropes en jonction
fleuve/océan et les lois de conservation scalaires**

Souleymane Doucouré

UNIVERSITE DE NEUCHATEL

FACULTE DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel,
sur le rapport des membres du jury

MM. O. Besson (directeur de thèse),
A. Valette,
P. Azerad (Université de Montpellier F),
M. Gander (Université de Genève)
et D. Seck, (Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal)

autorise l'impression de la présente thèse.

Neuchâtel, le 23 avril 2012

Le doyen :
P. Kropf

A PAPI

Remerciements

Le travail lié à une thèse de doctorat peut être perçu de l'extérieur comme une construction individuelle ne nécessitant par conséquent que des ressources internes. Mon expérience me permet de témoigner du contraire, de sorte que mes années de thèse se sont effectuées avant tout grâce au soutien et à la compagnie de plusieurs personnes auxquelles je dois ma reconnaissance.

Trouver les bons mots pour dire merci est une chose difficile d'autant plus dans une langue qui n'est pas sa langue maternelle. Je tiens d'abord à manifester ma plus profonde et sincère reconnaissance envers mon directeur de thèse M. Olivier Besson pour m'avoir offert la possibilité de réaliser ce travail. M. Olivier Besson a toujours fait preuve d'une totale confiance, d'un soutien et d'une gentillesse permanente à mon égard. Malgré son emploi du temps chargé, il a su trouver du temps à m'accorder aussi bien lors de l'encadrement scientifique que dans ma vie quotidienne par ses conseils et suggestions, ce qui a fait de nos rapports simples et chaleureux. Nos nombreux échanges scientifiques m'ont permis de découvrir et apprécier un champ d'investigation nouveau pour moi, les méthodes de décomposition de domaines. Sa rigueur scientifique et ses conseils avisés m'ont aidé et motivé dans la réalisation de cette de thèse. Enfin, il a su m'orienter et m'apporter l'optimisme et la confiance en moi nécessaire à la réalisation d'un tel projet et plus particulièrement dans les moments difficiles où le doute m'effleurait. Pour tout cela, merci.

Je n'oublie pas les personnes qui ont accepté de faire partie de mon jury de thèse : M. Alain Valette, Professeur à l'université de Neuchâtel, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury, M. Diaraf Seck, Professeur à l'université Cheikh Anta Diop de Dakar qui m'a honoré de sa présence. Je tiens à remercier tout particulièrement, pour le temps précieux qu'ils ont consacré à me relire, mes rapporteurs M. Pascal Azerad, HDR à l'université de Montpellier II et M. Martin J. Gander, Professeur à l'université de Genève, qui ont ainsi contribué, par leur attention, leurs remarques et interrogations, à l'amélioration de la qualité de mon mémoire de thèse. Qu'ils trouvent ici toute ma gratitude.

Pendant les années de thèse j'ai beaucoup apprécié l'ambiance amicale qui régnait au sein de l'institut de Mathématiques, je tiens à remercier tous les professeurs, les maîtres assistants, et les assistants. Je souhaite remercier particulièrement Fabien Crevoisier un doctorant de M. Olivier Besson, pour les discussions autour des méthodes de génération de maillage et de visualisation sur AVS.

En tant qu'assistant j'ai eu à travailler avec plusieurs enseignants notamment Béatrice De Tilière, Goul-nara Arzhantseva, Antoine Gournay et Alexandre Girouard, ces collaborations ont été très fructueuses pour moi, je les remercie.

Je n'aurais peut-être jamais commencé une thèse, si, tout au long de ma formation et bien au-delà, je n'avais eu la chance de me retrouver sous le parrainage du Professeur Mary Teuw Niane, qui a toujours su m'inciter à donner le meilleur de moi-même lors de mes activités de recherche. Je le remercie de toute l'attention qu'il a manifesté pour mon parcours universitaire, pour son génie mathématique et sa simplicité.

Je profite également de cette page pour remercier tous mes amis notamment : Gora Dieng et sa femme Emilie, Ndiaga Seck, Mamadou Sy, Issa Baldé, Emmauelle Sauriol, Diène Ngom, Abdourahmane Guiro, Ousmane Bâ, Amine Niang...

Je pense aujourd'hui avec beaucoup de tendresse à ma mère, à la confiance qu'elle m'accorde, à ses encouragements et ses prières quotidiennes. Je veux la remercier de tout mon cœur, ainsi que mes frères et sœurs.

Pour finir, merci à ma femme Ami, pour sa patience et son soutien avant et durant ma thèse. Sans elle, je n'aurais pas surmonté les périodes de stress. Puisse cette thèse être le début de la réalisation de nos rêves...

Avril 2012,
Souleymane Doucouré

Version abrégée

L'objet de cette thèse est l'approximation du point de vue mathématique et numérique des équations de Navier-Stokes anisotropiques dans une jonction fleuve/océan, et des lois de conservation scalaires en espace-temps pour des applications à l'environnement côtier.

Dans la première partie, les méthodes de décomposition de domaines sont appliquées à un modèle de viscosité turbulente 3-D afin d'améliorer l'hypothèse hydrostatique dans une jonction entre deux *bassins peu-profonds* dont l'un est *mince* (e.g fleuve/océan). Des résultats théoriques sont prouvés pour donner un sens mathématique au modèle asymptotique obtenu. Ce modèle est ensuite réduit à un problème asymptotique 2-D de type Saint-Venant. En utilisant le schéma de différentiation rétrograde d'ordre 2, les modèles stationnaires obtenus sont formulés en des équations d'interface (dites de Steklov-Poincaré), qui sont résolues par des schémas itératifs entre sous-domaines. Finalement des résultats numériques sont donnés pour illustrer l'influence des quantités physiques (viscosité, termes surfaciques du vent) sur la stabilité des différents algorithmes.

Dans la deuxième partie, l'équation de Steklov-Poincaré est analysée en espace-temps pour les lois de conservation scalaires en appliquant la méthode STILS (Space-Time Integrated Least-Square method). Un schéma itératif entre sous-domaines est alors proposé pour la résolution de cette équation avec des approximations marche-en-temps de STILS [70]. Des résultats numériques sont alors donnés pour l'exemple de Hansbo [54] et celui de Smolarkiewicz [81, 83]. On prouve enfin que cette méthode de décomposition de domaine sans recouvrement peut être interprétée comme une extension en espace-temps du schéma itératif d-ADN (damped and Adaptive Dirichlet-Neumann Method) [49] pour un problème de diffusion défini par un tenseur de rang 1.

Abstract

The purpose of this thesis is to investigate, from both mathematical and numerical view point the anisotropic Navier-Stokes equations in a river/ocean junction and scalar conservation laws in space-time, with particular concern on environmental applications.

In the first part, domain decomposition methods are applied to set up effective interface conditions for asymptotic approximations of a turbulent viscosity model. This asymptotic analysis performs the hydrostatic hypothesis in a junction between two shallow domains when one has the property to be thin (e.g estuaries). Assuming the junction with a rigid-lid flow, existence results are proved for different asymptotic models. In the free-surface flow case, the conditions are reduced to couple 2-D shallow water equations. Then these equations are formulated in Steklov-Poincaré equations. Iteration schemes are proposed to perform the interface equations. Some numerical results are given to illustrate the influence of the physical quantities on the stability of the domain decomposition schemes.

In the second part, the Steklov-Poincaré equation is analyzed in space-time frame for scalar conservation laws in using the STILS (Space-Time Integrated Least-Square) method. An iteration scheme is proposed to solve this equation with time-marching approximations of STILS [70]. Some numerical results are given to test the performance of the method for examples providing in [54, 81, 83]. Finally, we prove that our method can be seen as a generalization of the classical d-ADN (damped and Adaptive Dirichlet-Neumann) method [49] in space-time framework.

Table des matières

1	Introduction Générale	17
1.1	Courants, vagues, marées, vents et anisotropie	17
1.2	Méthode de décomposition de domaine	20
1.2.1	Principes généraux	20
1.2.2	Motivations	20
1.2.3	Historique	21
1.3	Introduction de la première partie	22
1.4	Introduction de la deuxième partie	24
I	MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINE EN FLEUVE/OCEAN	27
2	Modèle de viscosité turbulente fleuve/océan	29
2.1	Equations des fluides incompressibles	29
2.1.1	Milieux continus	29
2.1.2	Modes de représentations	29
2.1.3	Notions de contraintes	30
2.1.4	Théorème de transport de Reynolds.	30
2.1.5	Lois de conservation	31
2.1.6	Loi de comportement du fluide incompressible	32
2.1.7	Equations de Navier-Stokes incompressibles	33
2.2	Quotients d’aspects	33
2.3	Tenseur de Cauchy anisotrope	34
2.4	Hypothèses d’approximation	35
2.4.1	Force de Coriolis	35
2.4.2	Hypothèse de Boussinesq	36
2.5	Jonction anisotrope fleuve/océan	36
2.5.1	Changements d’échelle	38
2.5.2	Viscosité avec quotient d’aspect	39
3	Approximation des équations avec toit rigide	41
3.1	Décomposition de domaine homogène des ENS	41
3.1.1	Equations globales	42
3.1.2	Equations 2–domaines	43
3.2	Notations et rappels préliminaires	43
3.2.1	Trace sur les espaces de Sobolev	46
3.2.2	Inégalité de Poincaré Friedrichs	48

3.3	Propriétés du tenseur des déformations	48
3.4	Problème renormalisé	49
3.5	Problème limite	51
3.6	Formulations faibles	51
3.6.1	Espaces fonctionnels	52
3.6.2	Formes bilinéaires	52
3.7	Résultat d'existence et de convergence	53
3.7.1	Inégalité de Poincaré courbe	53
3.7.2	Estimation des termes de vitesse	54
3.7.3	Estimation des termes de pression	57
3.7.4	Passage à la limite	58
4	Approximation des couplages Oseen/Oseen et Oseen/Navier-Stokes	61
4.1	Décomposition de domaine hétérogène des ENS	61
4.2	Multi-modèles renormalisés	62
4.3	Multi-modèles asymptotiques	63
4.4	L'espace $\hat{\mathbf{H}}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$	63
4.5	Espaces de fonctions à divergence nulle	65
4.6	Approximation de la solution faible	65
4.6.1	Formulations faibles	66
4.6.2	Estimations à priori	66
4.6.3	Estimations pour les termes non linéaires	67
4.7	Sens de la condition de Dirichlet à l'interface	69
4.7.1	Preuve du théorème pour le cas Oseen/Oseen	70
4.7.2	Preuve du théorème pour le cas Oseen/Navier-Stokes	71
4.8	Sens de la condition de Neumann à l'interface	72
5	Approximation des équations avec surface libre	79
5.1	Modèle asymptotique	79
5.2	Moyennes des équations	81
5.2.1	Conditions limites	81
5.2.2	Rappel de la règle de Leibnitz	82
5.2.3	Moyenne des équations de continuité	82
5.2.4	Moyennes des équations de quantité de mouvement	83
5.2.5	Moyennes des conditions d'interface	83
5.3	Formulation hauteur-vitesse	84
5.4	Discrétisation en temps	85
5.4.1	Schéma de différentiation rétrograde	85
5.4.2	Etapes de résolution	86
5.5	MDD pour l'étape de diffusion	88
5.5.1	Formulation faible	88
5.5.2	Equation de Steklov-Poincaré	89
5.5.3	Procédure itérative	92
5.6	MDD pour l'étape de transport	93
5.6.1	Formulation faible	93
5.6.2	Formulation de Steklov-Poincaré	94
5.6.3	Schéma itératif entre sous-domaines	95
5.7	Approximation de Galerkin	96
5.7.1	Etape de diffusion	96
5.7.2	Etape de transport	97
5.8	Résultats numériques	98
5.8.1	Choix de la viscosité	98
5.8.2	Courants de vitesse	104

II	MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINE EN ESPACE-TEMPS	111
6	Lois de conservation scalaires	113
6.1	Description du problème	113
6.2	Cadre spatio-temporel	114
6.3	Formulation STILS globale	116
6.4	Formulation STILS 2-domaines (STILS-DDM)	117
6.4.1	Espaces de Sobolev anisotropes	117
6.4.2	Equation d'interface	120
6.4.3	Schéma itératif entre sous-domaines	122
6.5	Approche marche en temps pour STILS	124
6.5.1	STILS globale	124
6.5.2	STILS-DDM	124
7	Discrétisation par éléments finis en espace et en temps	125
7.1	Discrétisations spatiale et temporelle	125
7.1.1	Equations discrètes	126
7.1.2	Schéma d'itération entre sous-domaines	127
7.2	Résultats numériques	128
7.2.1	Schéma TMQ1	128
7.2.2	Schéma TMQ2	141
8	Interprétation de la méthode	149
8.1	De l'advection à la diffusion	149
8.2	Condition d'interface Dirichlet-Neumann	150
8.3	Formulation faible 2-domaines	151
8.4	Conditions d'interface adaptatives	153
8.5	Algorithme itératif	154
8.5.1	Etude des sous-problèmes	155
8.5.2	Résultat de convergence	156
9	Conclusion générale	159
A	Notations et rappels mathématiques	165
A.1	Définitions des opérateurs différentiels	165
A.2	Interprétation des opérateurs	166
A.3	Identités et propriétés utiles	166
A.4	Formulation en terme du tenseur anisotrope	167
A.5	Inégalité de Korn pour le tenseur anisotrope	168
A.6	Dérivée directionnelle	170
B	Méthodes de projection de Krylov, Matrices creuses	173
B.1	Méthode de projection	173
B.1.1	Définition d'une méthode de projection	173
B.1.2	Méthode polynomiale de projection	174
B.1.3	Préconditionnement d'une méthode polynomiale	174
B.2	Méthode du Gradient Conjugué (GC)	175
B.2.1	Convergence de GC	176
B.2.2	Gradient Conjugué préconditionné (GCP)	176
B.3	Méthode du gradient bi-Conjugué (GBIC)	177
B.3.1	Construction de GBIC	177
B.3.2	Convergence de GBIC	177
B.4	Matrices creuses	178
B.4.1	Stockage des matrices creuses	178
B.4.2	Produit matrice-vecteur	178

B.5 Fichiers de modules des codes numériques	178
Bibliographie.	185

Mots clés : Equations de Navier-Stokes (ENS) ; Viscosité dynamique turbulente ; Viscosité cinématique turbulente ; Tenseur des contraintes de Cauchy ; Approximation hydrostatique ; Opérateur de Steklov-Poincaré ; Schéma de Richardson ; Lois de conservation scalaires ; Méthode des moindres carrés intégrés en espace-temps ; Approche marche-en-temps ; Méthode de décomposition de domaine (MDD).

Keywords : Navier-Stokes equations ; Dynamical turbulent viscosity ; Kinematical turbulent viscosity ; Cauchy stress tensor ; Hydrostatic approximation ; Steklov-Poincaré operator, Richardson scheme ; Scalar conservation laws ; Space-time integrated least-squares (STILS) method ; Time-Marching approach ; Domain decomposition method (DDM).

1.1 Courants, vagues, marées, vents et anisotropie

Dans l'estuaire ou l'embouchure d'un fleuve, comme en toute zone côtière, les mouvements de l'eau peuvent être classés en deux catégories, les courants, qui sont les mouvements d'ensemble de l'eau sur des distances de plusieurs dizaines de mètres, et les vagues qui se manifestent par mouvements oscillants de courtes durées.

A ces deux catégories, on peut ajouter les mouvements turbulents qui sont des déplacements désordonnés de petites échelles. Ces turbulences se produisent fréquemment dans la nature et ce d'autant plus que les mouvements moyens sont importants.

Le détail de ces turbulences est très complexe en raison de son extrême variabilité. Par contre, il est important de souligner qu'elles résultent de mécanismes de forcages externes, qui sont essentiellement la marée et le vent, et de forcages internes à la masse de l'eau, principalement constituées des différences de densité. Ces dernières sont particulièrement importantes du fait de la rencontre entre les eaux douces apportées par le fleuve et les eaux marines.

Les marées provoquées par les attractions de la lune et du soleil, se traduisent par une variation de la surface libre, qui se propage à travers l'océan et s'amplifie près des côtes.

Le vent intervient dans l'hydrodynamique côtière de deux façons : d'une part, il exerce à la surface de l'eau une poussée qui a tendance à entraîner la masse de l'eau dans sa direction, ce qui induit des recirculations, d'autre part il génère les vagues qui se propagent ensuite jusqu'à la côte.

Pour mieux comprendre l'influence de ces mécanismes hydrodynamiques à la circulation côtière, on ne peut négliger une de leurs caractéristiques principales, l'anisotropie. L'isotropie parfaite n'est pas un élément naturel de notre environnement. Au contraire, pour la plupart des fluides géophysiques, la variation de l'écoulement en fonction de la direction est une règle quasi générale, mais souvent négligée

en raison de la complexité qu'elle introduit dans la résolution des équations primitives des fluides géophysiques [42, 57, 80, 61]. Cette variation est principalement liée aux différences de dimensions entre les directions caractéristiques de l'écoulement.

Il n'y a pas deux estuaires ou deux embouchures identiques, mais comme la plupart des domaines géophysiques ce sont des *bassins peu profonds* [73, 62, 87], i.e le rapport "*profondeur/étendue horizontale*" est très inférieur à 1%. Cette particularité de faible profondeur a permis de donner une justification mathématique à l'hypothèse hydrostatique comme modèle asymptotique des fluides géophysiques à partir des équations de Navier-Stokes stationnaires [17] (O. Besson, M. R. Laydi, R. Touzani, 1990), [18] (O. Besson, M. R. Laydi, 1992) et celles instationnaires [12] (P. Azerad, 1996), [14] (P. Azerad, F. Guillén, 2001). Par ailleurs, l'approximation hydrostatique est aussi utilisée pour la modélisation des mouvements de masses d'air [28, 29, 30]. Le calcul des courants en trois dimensions pour le lac de Neuchâtel et le lac Léman présenté dans [19] (O. Besson, 2002) prouve que cette hypothèse asymptotique traduit la prédominance des mouvements horizontaux de l'écoulement tridimensionnel dans un bassin peu profond.

Une autre remarque importante liée aux *rapports d'aspect* est celle de la largeur du fleuve très petite comparée à sa longueur caractéristique (par exemple le fleuve Sénégal, mesurant environ 1750 km de long, s'étend en période des hautes eaux sur 300m de large et 10m de profondeur). Ce deuxième quotient réduit l'impact de la rotation terrestre (force de Coriolis), des tractions surfaciques (vent) sur l'écoulement, et en conséquence les courants transversaux sont négligeables devant ceux longitudinaux.

Ainsi nous présentons un modèle mathématique tridimensionnel améliorant l'hypothèse de pression hydrostatique dans une jonction fleuve/océan.

Un autre aspect important dans l'hydrodynamique de la jonction fleuve/océan concerne le caractère inhomogène de la densité (le mélange des eaux douces du fleuve à celles salées apportées par l'océan). L'idéal étant de prendre en compte la densité variable dans la modélisation d'une telle zone côtière, nous introduisons une analyse mathématique et numérique pour les lois de conservation scalaires dans un cadre spatio-temporel.

Le but de cette thèse composée de deux parties est donc consacré à l'approximation hydrostatique des équations de Navier-Stokes dans une jonction fleuve/océan, et des lois de conservation scalaires en espace-temps par décomposition de domaine.

Dans la première partie, nous considérerons les équations de Navier-Stokes avec viscosité anisotropique (voir [17, 18, 11, 12, 14])

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v + 2\omega \times v \right) - \Delta_\eta v + \nabla p &= \rho g \\ \nabla \cdot v &= 0 \end{aligned}$$

soumises à l'hypothèse de Boussinesq [23], et à la force de Coriolis dans un couplage fleuve/océan dépendant des deux *quotients d'aspects* définis ci-dessus.

En appliquant la **méthode de décomposition de domaine sans recouvrement** (MDD) des équations de Navier-Stokes [76, 45, 44], le but est d'une part de pouvoir améliorer l'hypothèse hydrostatique en s'appuyant sur les éléments anisotropiques propres à chaque bassin, et d'autre part d'obtenir des conditions de transmission adéquates pour un couplage de modèles asymptotiques 3-D traduisant la continuité d'un écoulement essentiellement 1-D dans un domaine (fleuve), et 2-D dans l'autre (océan). Cette approche permet aussi de donner une justification mathématique du passage du modèle tridimensionnel global au modèle asymptotique dans le domaine avec toit rigide. Pour le cas avec surface libre, la MDD sans recouvrement permet de résoudre le modèle dans un cadre simplifié.

Dans la deuxième partie, nous proposerons une nouvelle approche en espace-temps de la MDD hyperbolique [47, 48] pour les lois de conservation scalaires

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = f$$



FIGURE 1.1 – Jonction fleuve-sénégal/océan-atlantique



FIGURE 1.2 – Jonction fleuve-sénégal/océan-atlantique (période des hautes eaux dans le fleuve)

en appliquant la méthode STILS (Space-Time Integrated Least-Squares) [13, 12, 20, 21]. On considérera le cas de deux sous-domaines en introduisant les opérateurs de Steklov-Poincaré, et un schéma itératif entre les sous-domaines. La méthode est ensuite généralisée dans un cadre multi-domaines par une approche marche en temps de STILS [12, 22, 70]. Enfin le potentiel du schéma itératif est testé avec des exemples classiques de l'équation de transport provenant de [54, 81, 83].

1.2 Méthode de décomposition de domaine

1.2.1 Principes généraux

Les calculateurs parallèles ont connu une grande évolution en puissance et en capacité de stockage au cours des dernières décennies. Les simulations de problèmes physiques de l'ordre de la dizaine de millions de degrés de liberté sont désormais chose courante et la vitesse d'exécution des codes scientifiques s'exprime aujourd'hui en centaines de Mégaflops (millions d'opérations flottantes par seconde) ou même en Teraflops ($1\text{Mflop} = 10^6\text{Flop}$, $1\text{Tflop} = 10^{12}\text{Flop}$). Développer des algorithmes bien adaptés à de telles architectures parallèles est donc devenu un nouveau champ de recherche. Les méthodes de décomposition de domaines ont une implication évidente dans le développement de tels algorithmes. Elles fournissent de bons schémas faciles à implémenter sur les machines parallèles et ont une base mathématique très riche.

Par ailleurs, il faut noter que l'expression "*décomposition de domaine*" possède différentes significations dans le domaine des équations aux dérivées partielles :

En Calcul parallèle, la décomposition de domaine se réfère aux techniques pour décomposer les données et cela peut ne pas dépendre des méthodes numériques utilisées. Dans ce cas, le but est de créer des méthodes moins coûteuses que les méthodes directes et plus robustes que les méthodes itératives.

En Analyse asymptotique, décomposer le domaine veut dire diviser le domaine physique en des domaines modélisés par des équations aux dérivées partielles différentes en y ajoutant des conditions bien appropriées sur les interfaces entre les sous-domaines.

Pour les méthodes de préconditionnement, la décomposition se fait au niveau des systèmes linéaires qui résultent de la discrétisation des équations aux dérivées partielles. Par conséquent, les méthodes de décomposition de domaines deviennent plus un outil pour construire de bons préconditionneurs que la décomposition elle-même.

1.2.2 Motivations

L'objectif principal des méthodes de décomposition de domaines est de retrouver des solutions aux problèmes issus des équations aux dérivées partielles définies sur des géométries compliquées ou de grandes tailles. En effet, la résolution directe du problème dans le domaine global engendre des systèmes linéaires de grandes tailles difficiles à résoudre par des solveurs directs ou méthodes itératives classiques, d'autant plus que de tels systèmes sont souvent mal conditionnés, d'où l'utilité des méthodes de décomposition de domaines. Le principe est assez simple : on transforme un problème de grande taille en une suite de sous-problèmes découplés, de tailles plus petites, qui peuvent être résolus en parallèle. Elles facilitent l'utilisation des schémas numériques (éléments finis, différences finies,...) pour chaque sous-problème et peuvent être combinées avec d'autres méthodes telles que le raffinement local du maillage. L'efficacité des méthodes de décomposition de domaines est telle que même sur un ordinateur en série le gain de temps est considérable.

Dans un autre sens pour obtenir des résultats réalistes de certains phénomènes physiques comme des interactions fluide-fluide ou fluide-structure [38, 39, 40, 66, 67, 75], il est intéressant d'utiliser un modèle différent selon la région physique. Dans ce cas, les méthodes de couplage peuvent s'inspirer des méthodes

de décomposition de domaines en simplifiant par exemple le modèle dans une partie du domaine. La littérature sur les méthodes de décomposition de domaines est abondante pour être citée ici de manière exhaustive. Une conférence annuelle sur les méthodes de décomposition de domaine se tient pour présenter les nouveaux résultats et les diverses appréciations qui sont recueillis par la suite dans des "*Proceedings*" peuvent être télé-chargés gratuitement depuis

<http://www.DDM.org>.

Quant aux diverses et importantes raisons qui ont conduit à la popularité de ces méthodes, cela peut être résumé dans le fait qu'en plus d'être bien adaptées aux machines parallèles, elles possèdent un intérêt mathématique intrinsèque, peuvent s'appliquer à des problèmes sur des géométries complexes, possèdent une base théorique simple, et facilitent l'utilisation de schémas numériques différents pour chaque sous-problème, par exemple, éléments finis, différences finies, méthodes spectrales...

1.2.3 Historique

La première méthode de décomposition de domaine a été développée à la fin du XIXe siècle par le mathématicien H. A. Schwarz dans le but de résoudre le problème de Poisson dans un domaine complexe donné par l'union d'un rectangle et d'un disque.

La méthode de Schwarz nécessite un recouvrement entre les sous domaines [79]. La convergence a été étudiée par H.A. Schwarz, puis Lions [64]. L'inconvénient de ce type de découpage est la complexité de sa mise en oeuvre numérique, surtout dans le cas de problèmes 3-D, en outre il est difficile de définir les zones de recouvrement pour des géométries très complexes. De plus, la convergence de la méthode est très lente.

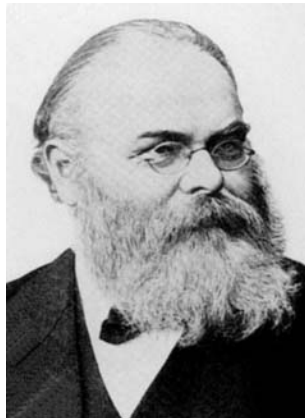


FIGURE 1.3 – K. H. A. Schwarz 1843-1921

Vue la complexité de la première méthode, une autre a été introduite : la méthode de décomposition de domaine sans recouvrement des sous domaines. Dans ce cas, on doit choisir des opérateurs d'interface spécifiques pour que la méthode converge. Une extension de la méthode de Schwarz dans le cas sans recouvrement a été introduite dans [65] (P.L. Lions, 1989), puis [37] (B. Desprès, 1991), [32] (F. Nataf, F. Rogier et P. Charton, 1991), [31] (C. Carlenzoli et A. Quarteroni, 1995).

Dans une variété de situations, l'étude globale du problème par la MDD sans recouvrement est réduite à celle des opérateurs d'interface. Pour certains cas l'interface est entièrement un objet mathématique. C'est l'exemple des équations à coefficients constants (comme l'équation de Poisson, les équations de Stokes à viscosité constante) dans un domaine assez régulier. Dans d'autres situations, au contraire, des interfaces existent réellement et elles sont dues soit à la géométrie du domaine ou à la physique du problème. Ce dernier cas peut être des interfaces séparant des régions avec des écoulements de régimes

différents (visqueux et non-visqueux), ou avec des conductivités thermiques différentes (des équations d'advection-diffusion ou simplement des équations d'advection), des couplages fluide-structure [38, 39, 40]. Il existent beaucoup d'exemples de ce type en mécanique des fluides, en aérodynamique et en thermodynamique [76].

1.3 Introduction de la première partie

Pour $0 < \epsilon, \delta \ll 1$ fixés et $t > 0$, on considère les équations de Navier-Stokes anisotropiques [17, 18, 11, 12, 14] dans un domaine $W(\epsilon, \delta)(t)$. Ce domaine est formé par deux sous-domaines $W_i(\epsilon, \delta)(t)$, $i = 1, 2$, non vides, disjoints, et séparés par une interface $G(t)$. $W_1(\epsilon, \delta)(t)$ et $W_2(\epsilon, \delta)(t)$ modélisent respectivement les portions fleuve et océan de la jonction $W(\epsilon, \delta)(t)$.

Au chapitre 2, On donne une nouvelle formulation de ces équations avec le tenseur de Cauchy défini par une viscosité diagonale anisotrope (voir [41])

$$\sigma^\nu(v, p) = -pI + \nabla v \cdot \nu + \nu \cdot \nabla^t v$$

avec $\nu = \text{diag}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. Le modèle prend en compte la force de Coriolis, l'hypothèse de Boussinesq et les tractions surfaciques du vent.

Un modèle asymptotique fleuve/océan sous l'hypothèse hydrostatique est dérivé pour la jonction avec toit rigide, puis avec surface libre suivant un processus de simplifications :

- On prend en compte le fait que certains termes sont négligeables ou prépondérants.

Pour celà, l'analyse asymptotique consiste à écrire le domaine $W(\epsilon, \delta)(t)$ indépendamment des poids ϵ, δ , et de résoudre le problème dans un domaine équivalent $\Omega(t)$ formé par les sous-domaines $\Omega_i(t)$, $i = 1, 2$, séparés par $\Gamma(t)$. En négligeant les paramètres ϵ et δ portés sur les variables physiques du modèle, on obtient un modèle asymptotique d'équations de Navier-Stokes en fleuve/océan de viscosités turbulentes $\mu^i = \text{diag}(\mu_1^i, \mu_2^i, \mu_3^i)$, $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} (\text{fleuve}) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1^1}{\partial t} + (u^1 \cdot \nabla) u_1^1 - \nabla \cdot \sigma_1^{\mu^1}(u^1, \frac{1}{\rho_0} p^1) = 0 \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^1}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^1}{\partial x_3} = -g \\ \nabla \cdot u^1 = 0 \end{array} \right. \\ (\text{océan}) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1^2}{\partial t} + (u^2 \cdot \nabla) u_1^2 - \nabla \cdot \sigma_1^{\mu^2}(u^2, \frac{1}{\rho_0} p^2) - f^C u_2^2 = 0 \\ \frac{\partial u_2^2}{\partial t} + (u^2 \cdot \nabla) u_2^2 - \nabla \cdot \sigma_2^{\mu^2}(u^2, \frac{1}{\rho_0} p^2) + f^C u_1^2 = 0 \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^2}{\partial x_3} = -g \\ \nabla \cdot u^2 = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

C'est un problème singulier puisque les termes visqueux, advectifs et inertiels n'apparaissent plus dans certaines équations. L'étude mathématique survenant dans ce cas est l'analyse de nouvelles équations dont la structure est différente de celle initiale, avec des inconnues très peu régulières.

Les chapitres 3 et 4 sont consacrés au cas des équations avec frontière rigide. Des résultats d'existence et de convergence sont prouvés pour les équations de Navier-Stokes, et les multi-modèles Oseen/Oseen et Oseen/Navier-Stokes. Ces résultats permettent de donner un sens mathématique aux conditions d'interface admises pour l'étude du modèle stationnaire en utilisant les propriétés de l'espace de trace $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

(dont le dual topologique est noté par $H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, Γ étant l'interface entre les deux sous-domaines). Pour l'étude des équations instationnaires, on introduit un espace de trace $\hat{\mathbf{H}}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ caractérisant les fonctions à divergence nulle.

- On procède ensuite à la réduction du problème asymptotique ci-dessus à une dimension inférieure, c'est à dire l'obtention d'un modèle bidimensionnel (ou un problème multi-physiques 1D/2D) pour un phénomène physique tridimensionnel.
- Enfin, on montre comment découpler les équations afin de résoudre des équations plus simples pour le calcul des grandeurs physiques.

Ainsi au **chapitre 5**, on suppose le domaine avec frontière libre, des conditions de transmission admissibles sont imposées pour l'étude d'un problème asymptotique 2-D de type Saint-Venant en fleuve/océan

$$\begin{aligned}
 (\text{fleuve}) \quad & \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\zeta^1 U_1^1) + \nabla \cdot (\zeta^1 U^1 \otimes U_1^1) - \Delta_{\mu^1}(\zeta^1 U_1^1) + g\zeta^1 \frac{\partial \zeta^1}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \zeta^1}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \zeta^1}{\partial t} + \nabla \cdot (\zeta^1 U^1) = 0 \end{cases} \\
 (\text{océan}) \quad & \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\zeta^2 U_1^2) + \nabla \cdot (\zeta^2 U^2 \otimes U_1^2) - \Delta_{\mu^2}(\zeta^2 U_1^2) + g\zeta^2 \frac{\partial \zeta^2}{\partial x_1} - f^C \zeta^2 U_2^2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\zeta^2 U_2^2) + \nabla \cdot (\zeta^2 U^2 \otimes U_2^2) - \Delta_{\mu^2}(\zeta^2 U_2^2) + g\zeta^2 \frac{\partial \zeta^2}{\partial x_2} + f^C \zeta^2 U_1^2 = 0 \\ \frac{\partial \zeta^2}{\partial t} + \nabla \cdot (\zeta^2 U^2) = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ce modèle asymptotique des eaux peu-profondes fleuve/océan est ensuite discrétisé par le schéma de différentiation rétrograde d'ordre 2, permettant de calculer les inconnues vitesse et hauteur respectivement par des problèmes de diffusion et de transport. En ce sens, les méthodes itératives de décomposition de domaine sans recouvrement (voir par exemple [48, 47, 76]) sont appliquées pour la résolution des différents couplages. L'idée générale de ces méthodes est détaillée comme suit :

- Le problème est formulé en une équation d'interface équivalent

$$Su_\Gamma = \chi$$

l'inconnue u_Γ est définie sur l'interface Γ entre les sous-domaines, et χ est une fonctionnelle définie sur Γ . S est composé de deux sous-opérateurs S_i , $i = 1, 2$ (S_i est appelé opérateur de Steklov-Poincaré). Ainsi on écrit $S = S_1 + S_2$, où chaque S_i est associé à un problème local défini sur le sous-domaine i . L'appellation d'opérateur de Steklov-Poincaré (du nom de deux grands mathématiciens : Vladimir Andreievitch Steklov et Henri Poincaré) est introduite dans les travaux de Aghoskov-Lebedev dans les années 1981 – 1983 [3, 4, 5, 6] en introduisant des méthodes itératives et des opérateurs locaux inverses S_i^{-1} , $i = 1, 2$ (opérateurs de Poincaré-Steklov) pour l'équation d'interface ci-dessus.

- L'équation d'interface est ensuite résolue par une méthode de type Krylov comme le schéma préconditionné de Richardson. Ce schéma peut être vu comme une interprétation des méthodes itératives entre sous-domaines (voir [76] pour les problèmes elliptiques, et [48, 47] pour les problèmes hyperboliques).

On présentera enfin des résultats numériques pour illustrer l'influence de la viscosité sur la convergence des schémas itératifs entre sous-domaines.



FIGURE 1.4 – V. A. Steklov 1864 – 1926



FIGURE 1.5 – H. Poincaré 1854 – 1912

1.4 Introduction de la deuxième partie

La deuxième partie de la thèse est consacrée à la méthode de décomposition de domaine en espace-temps pour les lois de conservation scalaires

$$\begin{cases} \partial_t c + \nabla \cdot (uc) = f & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ c(x, 0) = c_0(x) & \text{dans } \Omega \\ c(x, t) = c_1(x, t) & \text{sur } \partial\Omega^- \times (0, T) \end{cases}$$

Les méthodes de décomposition classiques s'appliquent généralement à des problèmes stationnaires : pour résoudre des problèmes en temps, on discrétise la dimension temporelle, on obtient alors une suite de problèmes stationnaires à résoudre, et c'est chacun de ces problèmes qui est résolu par une méthode de décomposition classique. Cette façon de faire oblige souvent l'utilisateur d'avoir le même pas de temps pour tous les sous-domaines. Des méthodes récentes proposent alors une alternative aux méthodes classiques en appliquant la décomposition de domaine directement au problème en temps, afin de résoudre numériquement les sous-problèmes différemment. La plus citée est la méthode de relaxation d'ondes connue sous l'abréviation SWR (*Schwarz Waveform Relaxation*). Cette nouvelle procédure utilise une décomposition avec recouvrement en espace comme l'algorithme classique de Schwarz pour les problèmes stationnaires voir [79] (H.A. Schwarz, 1870), mais ici le schéma résout des problèmes d'évolution et converge en une itération. On peut se référer par exemple à [46] (M.J. Gander, C. Rohde, 2005) pour son application aux lois de conservation avec flux non linéaire.

Nous étudierons dans cette partie une décomposition de domaine sans recouvrement en espace-temps pour les lois de conservation scalaires en utilisant la formulation STILS [13, 12, 20, 21].

L'intérêt de la méthode STILS pour les lois de conservation scalaires réside au niveau de leur résolution par la méthode des éléments finis. Les solutions numériques des lois de conservation scalaires ou l'équation de transport advectif obtenues par les méthodes classiques d'éléments finis (Galerkin, Streamline Diffusion, etc...) peuvent souvent laisser apparaître des problèmes de stabilité, d'oscillations et de diffusions numériques. On applique alors les méthodes des moindres carrés [52, 16] qui sont un moyen plus ou moins efficace de réduction de ces inconvénients. Elles permettent de convexifier des problèmes non coercifs en ajoutant un résidu quadratique aux termes advectifs. Dans [56], elles ont permis d'améliorer la méthode SUPG (Stream Upwind Petrov Galerkin) en la méthode GLS (Galerkin Least Square). Dans [58, 59], la méthode de Streamline Diffusion et celle de Galerkin discontinue ont muté pour donner la méthode CSD (Characteristic Streamline Diffusion) [54]. De son côté la méthode STILS a pu donner de meilleurs résultats numériques comparés aux méthodes classiques d'éléments finis sans ajout de termes diffusifs [22, 70].

On décompose d'abord le domaine Ω :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^I \bar{\Omega}_i, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

et on pose

$$\bar{Q} = \bigcup_{i=1}^I \bar{Q}_i, \quad Q_i = \Omega_i \times (0, T)$$

De manière générale, le but est donc de résoudre les équations hyperboliques ci-dessus dans le cas où $I \geq 2$ en utilisant la méthode des moindres carrés intégrés en espace-temps.

Au **chapitre 6**, on formulera d'abord les équations ci-dessus en espace-temps

$$\tilde{\nabla} \cdot (c\tilde{u}) = f \quad \text{dans } Q = \Omega \times (0, T)$$

où $\tilde{u} = (1, u)^t$, $\tilde{\nabla} = (\partial_t, \nabla)^t$.

Cette équation spatio-temporelle est ensuite écrite sous-forme 2-domaines ($I = 2$) avec la méthode STILS. Des résultats théoriques illustrant l'existence et l'unicité de solution du problème 2-domaines sont prouvés. L'idée est de montrer que le problème 2-domaines est équivalent à une équation d'interface de la forme : trouver $\tilde{\lambda}$ défini sur $\tilde{\Gamma}$ et vérifiant

$$\tilde{S}\tilde{\lambda} = \tilde{\chi}$$

$\tilde{S}$ est l'opérateur de Steklov-Poincaré, $\tilde{\chi}$ est la fonctionnelle définie par les données du problème. Ces résultats sont ensuite généralisés à la formulation STILS pour $I > 2$ de manière récurrente. Enfin un schéma itératif entre sous-domaines est proposé pour résoudre cette équation d'interface.

Cette analyse est ensuite étendue à la version marche en temps de STILS avec la décomposition suivante

$$\bar{Q} = \bigcup_{i,m=1}^{I,M} \bar{Q}_i^m, \quad Q_i^m = \Omega_i \times (t_{m-1}, t_m), \quad [0, T] = t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_M = T$$

Au **chapitre 7**, une discrétisation de Galerkin en espace et en temps basée sur des méthodes d'éléments finis dans les deux dimensions est appliquée pour la résolution du problème marche en temps. Dans ce cas, les résultats d'existence et d'unicité du problème 2-domaines, puis de convergence du schéma itératif entre les sous-domaines sont établis. Par ailleurs, on notera que cette analyse discrète du schéma itératif séparant les dimensions espace et temps, permet à l'utilisateur de pouvoir choisir des fonctions de base différentes en espace et en temps dans les deux sous-domaines. Enfin on présente des résultats numériques comparant les méthode STILS globale et STILS 2-domaines $\equiv$ STILS-DDM pour l'exemple du cylindre fendu [54], et l'expérience du cône absorbé par 6 tourbillons [81, 54, 83].

Au **chapitre 8**, l'équation d'interface est interprétée en remplaçant l'opérateur d'advection par un opérateur de diffusion dégénéré de rang 1

$$\tilde{\nabla} \cdot ((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla} c) = \tilde{\nabla} \cdot (f\tilde{u}) \quad \text{in } Q.$$

On retrouve les résultats du **chapitre 6** en étudiant la décomposition de domaine de ce problème parabolique avec des conditions de transmission adaptatives du type Dirichlet-Neumann.

Les codes numériques développés dans ce travail ont été effectués sur un Macbook pro sous Mac os X (Version 10.6.8, Processeur 2 GHz Intel Core Duo), et les simulations ont été visualisées à l'aide des logiciels Scilab, AVS/Express (Advanced Visualization Systems) et Paraview (Parallel Visualization Application).

Première partie

MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINE EN FLEUVE/OCEAN

Modèle de viscosité turbulente fleuve/océan

Dans ce chapitre, nous dérivons à partir des équations générales des fluides incompressibles [42, 57, 80, 61] un modèle de viscosité turbulente pour la description du mouvement anisotropique de l'écoulement dans une jonction de deux domaines peu-profonds dont l'un est mince (e.g couplage fleuve/océan). Ce modèle est soumis à l'hypothèse de Boussinesq [23] (J. Boussinesq, 1903), à la force de Coriolis et à l'attraction de la terre.

2.1 Equations des fluides incompressibles

Pour étudier un phénomène physique comme l'écoulement de fluides incompressibles dans une jonction entre deux bassins, il convient d'abord d'établir les lois qui le régissent. Cette section a pour but d'introduire les équations qui seront à la base de la suite de ce travail, les équations de Navier-Stokes. L'objectif n'est pas de commencer à traiter le problème, mais il s'agit de la dérivation des équations minimales représentant un fluide mathématiquement et physiquement idéalisé, avec quelques composantes de modélisations supplémentaires qui sont destinées à satisfaire l'anisotropie d'un écoulement géophysique dans un couplage fleuve/océan.

2.1.1 Milieux continus

D'une manière générale, la construction de la mécanique des milieux continus repose sur la supposition qu'un système physique est modélisable mathématiquement par un *continuum**.

On considère donc des milieux continus, définis dans l'espace Euclidien $E = \mathbb{R}^3$ muni d'un système de coordonnées $(O, x, y, z) = (O, y_1, y_2, y_3)$. On suppose connues les définitions des opérateurs différentiels usuels. Dans le cas contraire, le lecteur peut se reporter à l'annexe A qui expose ces définitions et présente quelques identités utiles pour les développements ultérieurs.

2.1.2 Modes de représentations

Pour présenter les équations gouvernant la mécanique des milieux continus, on introduit les deux modes de représentations possibles du système modélisé.

Description Lagrangienne Elle correspond à des mesures liées au milieu en mouvement. On considère un domaine matériel Ω_M composé d'un *continuum* matériel en mouvement, et on repère la

*. Les diverses quantités nécessaires à sa représentation peuvent être manipulées comme des fonctions à valeurs scalaires, vectorielles ou tensorielles différentiables presque partout.

configuration initiale Ω_I de ce volume. Cette configuration permet d'identifier toutes les particules de matière $\varpi \in \Omega_I$ et on peut par suite, considérer leurs positions au temps t au travers de la fonction

$$\Psi(\varpi, t), \quad (\varpi, t) \in \Omega_I \times [0, \infty[.$$

Cette représentation est la représentation Lagrangienne, où sont données toutes les trajectoires de toutes les particules composant le milieu étudié, celles-ci étant repérées par rapport à une configuration de référence Ω_I .

Description Eulérienne A l'inverse, la représentation Eulérienne consiste à faire des mesures fixes dans l'espace. En effet, on considère un domaine géométrique fixe Ω_G au travers duquel évolue un milieu matériel continu en mouvement, ce qui définit des points d'observation $x \in \Omega_G$ du milieu mobile fixe au cours du temps. La représentation Eulérienne du mouvement consiste alors en la donnée des vitesses du milieu mobile en ces points d'observation, à tout moment, c'est à dire à la donnée de la fonction

$$v(y, t), \quad (y, t) \in \Omega_G \times [0, \infty[$$

décrivant la vitesse du milieu au point y à l'instant t .

Même si la représentation Lagrangienne est la plus simple à appréhender en première intention, la représentation Eulérienne est préférée dans le cadre des fluides, puisqu'il n'est généralement pas possible de suivre individuellement les différentes particules composant le fluide au cours du temps, lors de ses mouvements complexes. par ailleurs, la notion de mouvement stationnaire est beaucoup plus aisée à appréhender dans le cadre de la description Eulérienne.

2.1.3 Notions de contraintes

On montre maintenant comment définir les efforts internes au matériel présent dans un domaine Ω . Pour les considérer en un point p , on rend p extérieur comme suit : on définit un sous-domaine arbitraire $\Omega_a \subset \Omega$ dont la frontière $\partial\Omega_a$ passe par p en représentant une normale unitaire extérieure n .

Les actions de contact de $\Omega_O = \Omega \setminus \Omega_a$ définies sur la surface $\partial\Omega_a$ sont définies comme suit : elles forment un champ de forces surfaciques, appelé champ des vecteurs contraintes. Comme ces actions modélisent des forces de contact, purement locales, elles ne dépendent en fait pas de la forme générale de Ω_a , mais uniquement de n en chaque point p . En chaque point p , il existe donc à priori une infinité de vecteurs contraintes, dépendant de n (linéairement dépendant de n). Ce qui permet de définir en chaque point un tenseur des contraintes de Cauchy, qui décrit localement l'état des contraintes internes au matériau. C'est un tenseur du second ordre $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,2,3}$. Le vecteur des contraintes dans une direction n est alors donné par $\sigma \cdot n$. Ce tenseur σ étant défini en un point du domaine, il existe un champ de tenseur de rang deux décrivant l'état des contraintes internes du matériau.

Sur la frontière, les contraintes exercées par le milieu ambiant *i.e.* les forces extérieures de surface f_s , doivent être en équilibre avec les contraintes locales, c'est à dire que

$$\sigma \cdot n = f_s \text{ sur } \partial\Omega \quad (2.1)$$

2.1.4 Théorème de transport de Reynolds.

On rappelle que $v : \Omega \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^3$ représente le champ de vitesse Eulérien.

Le théorème de transport de Reynolds est souvent utilisé pour établir les lois de conservation. Il permet d'exprimer les variations d'une quantité sur un domaine mobile au cours du temps.

Soit $\mathcal{O} \subset \Omega$ un sous-domaine de l'espace initial et $\mathcal{O}(t)$ sa forme à l'instant t :

$$\mathcal{O}(t) = \{\Psi(\varpi, t) \mid \varpi \in \mathcal{O}\}.$$

Alors, pour tout champ différentiable $f : \Omega \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, il est possible d'exprimer la variation de cette quantité dans le domaine

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}(t)} f(y, t) dy = \int_{\mathcal{O}(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(y, t) dy + \int_{\partial \mathcal{O}(t)} f v \cdot n ds,$$

où $\partial \mathcal{O}(t)$ représente la surface fermée bordant le volume $\mathcal{O}(t)$ munie d'un élément de surface ds , de normale unitaire extérieure n . Il devient alors plus clair que la variation globale de la quantité f sur $\mathcal{O}$ est égale à la variation de f dans le domaine lui-même, additionnée au flux traversant la surface.

2.1.5 Lois de conservation

On va maintenant rappeler les principes de conservation de masse et de quantité de mouvement qui prennent part à la modélisation de la mécanique des milieux continus.

Conservation de la masse Cette loi est celle transcrivant le principe de conservation de la masse, qui postule que la matière ne disparaît ni n'apparaît arbitrairement. Ceci équivaut à poser que la variation de la masse est nulle.

Donc, en considérant $\rho(y, t)$ la masse volumique on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}(t)} \rho(y, t) dy = 0.$$

Ce qui, en employant le théorème de transport, se transcrit en

$$\int_{\mathcal{O}(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}(y, t) + \nabla \cdot (\rho v)(y, t) \right) dy = 0.$$

Cette dernière relation étant vraie quel que soit le domaine $\mathcal{O}(t)$, elle est vraie partout, ce qui amène à pouvoir formuler l'expression locale du principe de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad \text{sur } \Omega \times [0, \infty[. \quad (2.2)$$

Cette équation est également dénommée équation de continuité.

Conservation de la quantité de mouvement Dans un référentiel Galiléen, le tenseur dynamique est égal à la somme des tenseurs des actions extérieures au système (principe fondamental de la mécanique). On aboutit alors à deux relations, l'une sur les moments et l'autre sur les résultantes. La première permet d'établir la symétrie du tenseur des contraintes. La deuxième exprime que les forces s'appliquant sur un domaine engendrent une variation de sa quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}(t)} \rho v(y, t) dy = \int_{\mathcal{O}(t)} \rho f(y, t) dy + \int_{\partial \mathcal{O}(t)} \sigma \cdot n ds.$$

Par application du théorème de Gauss, on peut réécrire cette relation uniquement sur le volume, en transformant le terme de surface

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}(t)} \rho v(y, t) dy = \int_{\mathcal{O}(t)} \left(\rho f(y, t) + \nabla \cdot \sigma(y, t) \right) dy.$$

En considérant le théorème de transport, on reformule la variation de la quantité de mouvement, pour obtenir

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}(t)} \rho v(y, t) dy = \int_{\mathcal{O}(t)} \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}(y, t) + \nabla \cdot (\rho v \otimes v)(y, t) \right) dy,$$

où $v \otimes v = (v_i v_j)_{i,j=1,2,3}$ représente le tenseur de rang 2, obtenu par produit tensoriel de deux vecteurs. Finalement on obtient la forme intégrale de la conservation de la quantité de mouvement

$$\int_{\mathcal{O}(t)} \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}(y, t) + \nabla \cdot (\rho v \otimes v)(y, t) \right) dy = \int_{\mathcal{O}(t)} (\rho f(y, t) + \nabla \cdot \sigma(y, t)) dy.$$

Comme la conservation de la masse, on en déduit l'expression totale du principe de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) = \rho f(y, t) + \nabla \cdot \sigma \quad \text{sur } \Omega \times [0, \infty[\quad (2.3)$$

2.1.6 Loi de comportement du fluide incompressible

Loi de comportement : Un fluide, ne comportant pas de configuration de référence, n'admet pas de mesure de déformation directe. En revanche, la vitesse de déformation est mesurable par le tenseur des taux de déformation $e = \frac{1}{2}(\nabla v + \nabla^t v)$. La loi de comportement d'un fluide établit donc une relation entre les contraintes internes au fluide représentées par le tenseur de contraintes σ , et e .

Dans le cas d'un fluide Newtonien, la relation entre contraintes et déformations est affine, ce qui implique une loi de comportement de la forme

$$\sigma = 2\eta e + (\eta' \text{Tr}(e) - p)I, \quad (2.4)$$

où I représente le tenseur identité, Tr la trace, et p la pression absolue, normalement dépendante de l'état thermodynamique local. Les deux coefficients η et η' sont les premier et deuxième coefficients de viscosité caractéristique du fluide. η est la viscosité dynamique, mesurée en Poiseuille, et de dimension physique $kg.m^{-1}.s^{-1}$

Fluide incompressible : On prend maintenant en compte les fluides Newtoniens incompressibles, qui nous intéressent particulièrement parce qu'ils modélisent bien les écoulements d'eau. Dans ce cas précis, tout sous-domaine du fluide conserve son volume au cours du temps

$$\int_{\mathcal{O}(t)} dy = \int_{\mathcal{O}(0)} dy, \quad t \in [0, \infty[$$

Ce qui implique que les variations du volume du fluide sont nulles au cours du temps

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}(t)} dy = 0, \quad t \in [0, \infty[.$$

Cette relation peut alors être réexprimée grâce au théorème de transport

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}(t)} dy = 0 = \int_{\mathcal{O}(t)} \nabla \cdot v dy, \quad t \in [0, \infty[.$$

Cette propriété étant vraie pour tout sous-domaine du fluide, on peut exprimer le principe d'incompressibilité localement par

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (2.5)$$

En rappelant que $\nabla \cdot v = \text{Tr}(e)$, la loi de comportement des fluides incompressibles s'écrit donc

$$\sigma = 2\eta e - pI \quad (2.6)$$

2.1.7 Equations de Navier-Stokes incompressibles

On supposera que le milieu est homogène, c'est à dire que la même loi de comportement s'applique à l'intégralité du domaine Ω .

En insérant la loi de comportement (2.4) dans les équations générales de la mécanique des milieux continus (2.3), on obtient la relation suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) &= \rho f + \nabla \cdot [2\eta e + (\eta' \text{Tr}(e) - p)I] \\ &= \rho f + \eta[\nabla \cdot \nabla v + \nabla \cdot \nabla^t v] + \nabla \cdot [(\eta' \nabla \cdot v)I] - \nabla \cdot [pI] \\ &= \rho f + \eta \Delta v + \eta \nabla \nabla \cdot v + \eta' \nabla \nabla \cdot v - \nabla p \\ &= \rho f + \eta \Delta v + (\eta + \eta') \nabla \nabla \cdot v - \nabla p \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) = v \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) \right] + \rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right]$$

qui peut être simplifiée en considérant l'équation de continuité (2.2)

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) = \rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right].$$

Finalement les équations de Navier-Stokes compressibles sur $\Omega \times [0, \infty[$ sont données par

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right] = \eta \Delta v + (\eta + \eta') \nabla \nabla \cdot v - \nabla p + \rho f.$$

Dans le cas incompressible on a :

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right] = \eta \Delta v - \nabla p + \rho f.$$

Nous arrivons ainsi à l'écriture des équations de Navier-Stokes incompressibles en coordonnées cartésiennes

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right) = \eta \Delta v - \nabla p + \rho f \quad \text{sur } \Omega \times (0, \infty) \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \text{sur } \Omega \times (0, \infty) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad \text{sur } \Omega \times (0, \infty) \quad (2.9)$$

où $v = (v_1, v_2, v_3)$, p , et f désignent respectivement le champ de vitesse, la pression hydrodynamique, et les forces extérieures, ρ est la densité du fluide, et η est la viscosité dynamique du fluide.

2.2 Quotients d'aspects

La complexité des équations de Navier-Stokes (2.7)-(2.9) (en trois dimensions) a poussé les physiciens et les mathématiciens à fabriquer de nouveaux modèles plus simples, qui sont des approximations satisfaisantes des équations de Navier-Stokes dans certaines conditions, en particulier pour certaines géométries. C'est le cas pour les domaines anisotropes, où les dimensions sont très inégales. Différents modèles plus simples sont alors obtenus en fonction des ordres de grandeur, des paramètres caractéristiques du problème, et des paramètres choisis comme négligeables ou prépondérants.

La plus citée est l'approximation hydrostatique, basée sur la loi selon laquelle la pression p croît linéairement avec la profondeur (ou ce qui revient au même, décroît linéairement avec l'altitude). Cette loi est rigoureusement exacte dans les fluides au repos, car l'équation d'Euler s'écrit alors $\nabla p = \rho \mathbf{g}$. La raison selon laquelle elle est aussi vraie dans des domaines tels que les fleuves, les océans, la galaxie

tient au fait que ces domaines géophysiques vérifient la *loi des flaques* : la profondeur h est beaucoup plus petite que l'étendue horizontale L , i.e le quotient $\epsilon = h/L \ll 1$.

Dans certains bassins comme les fleuves, les courants transversaux sont négligeables devant ceux longitudinaux. Ceci s'explique par un deuxième quotient $\delta = l/L \ll 1$, l étant la largeur caractéristique du domaine.

En ce sens les embouchures ou les estuaires peuvent être vus comme des jonctions entre deux domaines *peu profonds* dont l'un est plutôt *mince*.

Ces différences d'échelles induisent des turbulences différentes dans les trois directions. Pour cette raison, un modèle de viscosité turbulente peut être utilisé dans de telles jonctions. Ainsi les équations de Navier-Stokes (2.7)-(2.9) s'écrivent maintenant avec un vecteur de viscosité turbulente $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$:

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v\right) = \Delta_\eta v - \nabla p + \rho f \quad \text{sur } \Omega \times (0, \infty) \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \text{sur } \Omega \times (0, \infty) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad \text{sur } \Omega \times (0, \infty) \quad (2.12)$$

où $\nabla = (\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3}) = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ désigne le gradient pour les coordonnées spatiales,

$$(v \cdot \nabla)v = ((v \cdot \nabla)v_1, (v \cdot \nabla)v_2, (v \cdot \nabla)v_3))^t$$

et

$$\Delta_\eta v = \nabla \cdot \nabla_\eta v = (\Delta_\eta v_1, \Delta_\eta v_2, \Delta_\eta v_3)^t, \quad \Delta_\eta v_i = \nabla \cdot \nabla_\eta v_i = \sum_{j=1}^3 \eta_j \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_j^2}$$

$$\nabla_\eta = (\eta_1 \partial_1, \eta_2 \partial_2, \eta_3 \partial_3)$$

Le terme $-\Delta_\eta v$ traduit les effets de viscosité. Le terme non linéaire $(v \cdot \nabla)v$ exprime l'advection du fluide. Le champ de force f agissant sur le fluide regroupe la force de Coriolis (due à la rotation de la terre) et le champ de gravitation $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, $g > 0$ étant l'accélération de la pesanteur.

2.3 Tenseur de Cauchy anisotrope

La persistance observée sur plusieurs jours des grandes vagues dans l'atmosphère, au niveau des océans, et dans les zones cotières renforcent l'impression que les forces de friction sont faibles presque partout quand on les compare à l'accélération de Coriolis et au gradient de pression. Elles influencent rarement le mouvement, cependant les forces de pression et la dissipation de l'énergie qu'elles engendrent ne peuvent être ignorées pour des raisons simples et fondamentales. En effet pour la circulation de l'atmosphère et des océans, les mouvements du fluide réagissent à une variété de forces extérieures rigides. Les forces de tractions doivent être elles mêmes frictionnelles comme dans le cas des tractions tangentielles du vent sur la circulation océanique.

Même si la friction est faible, comparée aux autres forces, sa nature dissipative qualitativement distincte de la nature conservative des forces d'inertie impose sa considération s'il est question d'étudier des écoulements entre cours d'eau. A ce jour il n'y a pas de théories de la turbulence qui donne une description pratique et évidente des forces de friction effectives. Néanmoins si on veut formuler un processus mathématique qui décrit le dynamisme des écoulements entre deux bassins tel un couplage fleuve/océan, il nous faut prendre en compte les forces de friction liées aux contraintes à l'interface exprimées par (2.1).

Dans le cas d'une viscosité turbulente $\eta = \text{diag}(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, on introduit l'équivalent anisotrope du tenseur des contraintes de Cauchy (2.6) (voir [41])

$$\sigma^\eta(v, p) = -pI + \nabla v \cdot \eta + \eta \cdot \nabla^t v = -pI + e^\eta(v) \quad (2.13)$$

I étant la matrice unité d'ordre 3. e^η coïncide ici avec le tenseur des contraintes de Reynolds

$$e_{ij}^\eta(v) = \begin{cases} \eta_j \partial_j v_i + \eta_i \partial_i v_j & i, j = 1, 2, 3, \\ e_{ij}^\eta(v) = e_{ji}^\eta(v). \end{cases}$$

On obtient finalement (voir Annexe A)

$$-\nabla \cdot \sigma^\eta(v, p) = \nabla p - \Delta_\eta v$$

et le système (2.10)-(2.12) devient donc

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right) = \nabla \cdot \sigma^\eta(v, p) + \rho f \quad \text{sur } \Omega \times (0, \infty) \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \text{sur } \Omega \times (0, \infty) \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad \text{sur } \Omega \times (0, \infty) \quad (2.16)$$

Remarque 1. Dans les prochains chapitres on observera toute la portée mathématique de ce nouveau tenseur de Cauchy puisqu'il permet de donner plus de régularité aux différents modèles asymptotiques.

2.4 Hypothèses d'approximation

Pour mener à bien l'approximation des équations de Navier-Stokes ci-dessus dans un domaine anisotrope fleuve/océan avec toit rigide ou surface libre, on considérera le potentiel gravitationnel. D'où la nécessité de tenir compte de la force de Coriolis, et de l'approximation de Boussinesq.

2.4.1 Force de Coriolis

La terre et les planètes connues sont en rotation autour d'un axe fixe. Cette rotation a un impact non-négligeable lors de la modélisation de phénomènes qui se produisent sur de vastes étendues telles l'atmosphère et les océans.

Un observateur extérieur à la terre voit celle-ci comme un système de référence inertiel. Les effets de la rotation de la terre s'expliquent simplement par les conditions aux limites : le fluide est entraîné par la rotation.

Coriolis, dans son article *Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps* (1835), décrit mathématiquement la force qui devait porter son nom. Dans cet article, la force de Coriolis apparaît comme une composante supplémentaire à la force centrifuge, ressentie par un corps en mouvement relativement à un référentiel en rotation. L'argumentation de Coriolis était basée sur une analyse du travail et de l'énergie potentielle et cinétique dans les systèmes en rotation. De nos jours, la démonstration la plus utilisée pour enseigner la force de Coriolis utilise les outils de la cinématique. Ce n'est qu'à la fin du XIXe siècle que cette force fit son apparition dans la littérature météorologique et océanographique. Pour la plupart des applications en géophysique, il est naturel de considérer la terre comme fixe.

Considérons le repère fixe $\Sigma = (O', e_1, e_2, e_3)$ avec l'origine O' au centre de la terre et e_3 suivant l'axe de rotation de la terre dirigé vers le nord. Dans ce repère, la vitesse angulaire de la terre est le vecteur $\omega = (0, 0, \omega_3)$, avec $\omega_3 = 2\pi/(24 \cdot 3600)$ (en radian par seconde). Soit α la latitude de l'origine O du système de référence. La force de Coriolis sous une forme pratique est donnée par

$$2\omega \wedge v = -2\omega_3(v_2 \sin \alpha - v_3 \cos \alpha, -v_1 \sin \alpha, v_1 \cos \alpha)$$

Du fait de la faible profondeur des domaines géophysiques, la composante verticale de la vitesse v_3 est très faible

$$v_3 \ll v_1, \quad v_3 \ll v_2,$$

et l'expression ci dessus peut être exprimée par

$$2\omega \wedge v \approx -2\omega_3(v_2 \sin \alpha, -v_1 \sin \alpha, 0).$$

Le système des équations de Navier-Stokes anisotropiques (2.14)-(2.16) s'écrit maintenant par

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v + 2\omega \times v \right) = \nabla \cdot \sigma^\eta(v, p) + \rho \mathbf{g} \quad \text{sur } \Omega \times (0, \infty) \quad (2.17)$$

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \text{sur } \Omega \times (0, \infty) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad \text{sur } \Omega \times (0, \infty) \quad (2.19)$$

$\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ étant le vecteur de gravitation.

2.4.2 Hypothèse de Boussinesq

J. V. Boussinesq bouleversa la mécanique des solides, la thermodynamique et surtout la mécanique des fluides [23] (J. Boussinesq, 1903). Dans ce livre, il formula une hypothèse, l'approximation de Boussinesq, qui s'énonce de la manière suivante : *il faut savoir que dans la plupart des mouvements provoqués par la chaleur sur nos fluides pesants, les volumes ou les densités se conservent très peu, quoique la variation correspondante du poids de l'unité de volume soit justement la cause des phénomènes qu'il s'agit d'analyser. De là résulte la possibilité de négliger les variations de la densité, là où elles ne sont pas multipliées par la gravité g , tout en conservant, dans les calculs, leurs produit par celli-ci.*

Les équations qui régissent l'état de l'atmosphère telles que nous les connaissons aujourd'hui sont notamment dûes à la persévérance de Joseph Valentin Boussinesq. Mais la théorie de Boussinesq n'est pas valable dans tous les mouvements provoqués par la chaleur ; d'où la limite de l'approximation de Boussinesq. Il est approprié de représenter la densité comme la somme d'une valeur de référence constante ρ_0 et d'une petite perturbation en temps et en espace $\tilde{\rho}$. On a :

$$\rho(x, y, z) = \rho_0 + \tilde{\rho}(x, y, z, t).$$

L'approximation de Boussinesq consiste alors à remplacer ρ par ρ_0 partout excepté dans les termes contenant le champ de gravité $\mathbf{g}$. Les équations (2.17)-(2.19) deviennent

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v + 2\omega \times v \right) = \nabla \cdot \sigma^\eta(v, p) + \rho \mathbf{g} \quad \text{sur } \Omega \times (0, \infty) \quad (2.20)$$

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \text{sur } \Omega \times (0, \infty) \quad (2.21)$$

2.5 Jonction anisotrope fleuve/océan

L'anisotropie des fluides incompressibles dans un couplage fleuve/océan s'explique entre autres par les différences de grandeur entre les dimensions caractéristiques i.e.

$$\epsilon_1 = \frac{h_{\text{cr}}^1}{L_{\text{cr}}^1} \ll 1, \quad \delta = \frac{d_{\text{cr}}^1}{L_{\text{cr}}^1} \ll 1, \quad \epsilon_2 = \frac{h_{\text{cr}}^2}{L_{\text{cr}}^2} \ll 1,$$

où $h_{\text{cr}}^1, d_{\text{cr}}^1, L_{\text{cr}}^1$ (resp. $h_{\text{cr}}^2, d_{\text{cr}}^2, L_{\text{cr}}^2$), exprime la profondeur, la largeur, et la longueur caractéristique du fleuve (resp. de l'océan). Pour des raisons de notation on suppose que $\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2$, et $k \in \{1, 2\}$ est un indicateur des sous-domaines.

On considère le système de Navier-Stokes (2.20)-(2.21) dans le domaine avec surface libre $W(\epsilon, \delta)(t)$, $t \in$

$(0, \infty)$, formé par les sous-domaines

$$\begin{aligned} W_1(\epsilon, \delta)(t) &= \left\{ (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3 : 0 < y_1 < 1, -\delta l^1(y_1) < y_2 < \delta l^1(y_1), \right. \\ &\quad \left. -\epsilon b^1(y_1, \frac{y_2}{\delta}) < y_3 < \epsilon s^1(y_1, \frac{y_2}{\delta}, t) \right\} \\ W_2(\epsilon, \delta)(t) &= \left\{ (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3 : -1 < y_1 < 0, -l^2(y_1) < y_2 < l^2(y_1), \right. \\ &\quad \left. -\epsilon b^2(y_1, y_2) < y_3 < \epsilon s^2(y_1, y_2, t) \right\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

représentant respectivement des parties du fleuve et de l'océan séparées par une interface verticale

$$G(t) = \left\{ (0, y_2, y_3); -\delta l_1(0) < y_2 < \delta l_1(0), -\epsilon b(0, \frac{y_2}{\delta}) < y_3 < \epsilon s(0, \frac{y_2}{\delta}, t) \right\}.$$

Les fonctions l^k, b^k, s^k traduisent respectivement les bords latéraux, le fond, et la surface libre de la jonction. Dans le cas où la fonction s est identiquement égale à zéro, on parlera de jonction avec surface rigide $\bar{W}(\epsilon, \delta) = \bar{W}_1(\epsilon, \delta) \cap \bar{W}_2(\epsilon, \delta)$, $G = \partial W_1(\epsilon, \delta) \cap \partial W_2(\epsilon, \delta)$ (fig. 2.1)

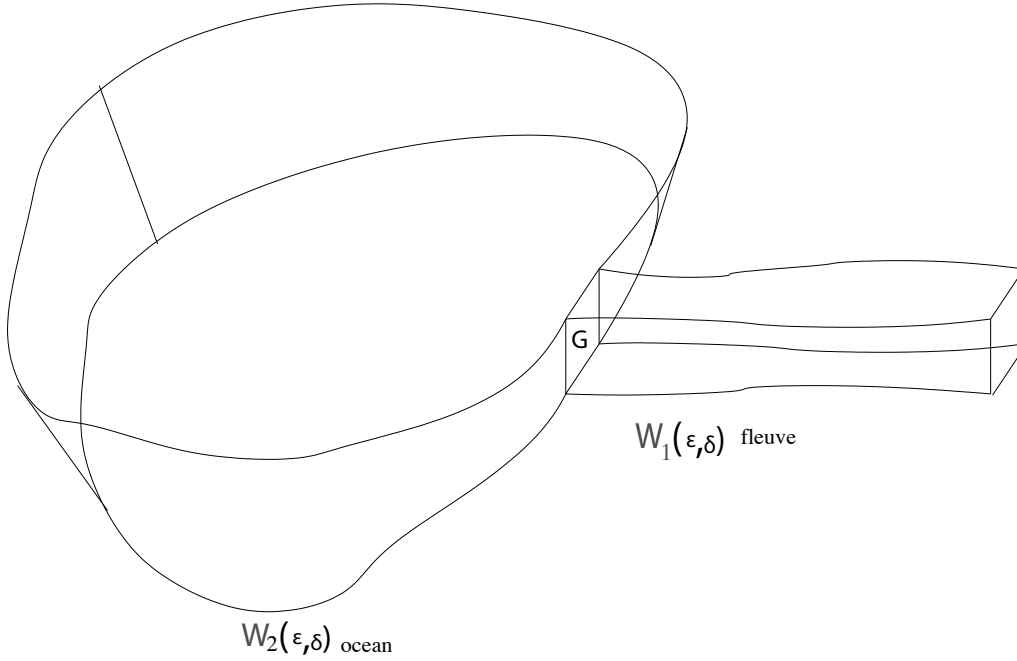


FIGURE 2.1 – Dessin schématique d'une jonction entre deux bassins peu profonds

En posant $v_k = v|_{W_k(\epsilon)(t)}$, $p_k = p|_{W_k(\epsilon)(t)}$, et en notant par $\eta^k = (\eta_1^k, \eta_2^k, \eta_3^k)$ le vecteur de viscosité dynamique associé au sous-domaine $W_k(\epsilon, \delta)(t)$, le système global (2.20)-(2.21) est transcrit sur $W_k(\epsilon, \delta)(t)$ par

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v^k}{\partial t} + (v^k \cdot \nabla) v^k + 2\omega \times v^k \right) - \nabla \cdot \sigma^{\eta^k}(v^k, p^k) = \rho g \quad (2.23)$$

$$\nabla \cdot v^k = 0 \quad (2.24)$$

L'interaction entre deux milieux continus telle une jonction fleuve/océan est traduite par l'équilibre des forces et la continuité de l'écoulement. Ainsi il est naturel de considérer les conditions de transmission

essentielles et naturelles décrites respectivement par la continuité de la vitesse et celle des contraintes normales (exprimées par (2.1)) sur l'interface $G(t)$

$$\begin{cases} v^1 = v^2 \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\begin{cases} \sigma^{\eta^1}(v^1, p^1) \cdot n = \sigma^{\eta^2}(v^2, p^2) \cdot n \end{cases} \quad (2.26)$$

Dans le cas où les termes de diffusion sont exprimés par $-\Delta_\eta$, les conditions de transmission (2.25)-(2.26) deviennent

$$\begin{cases} v^1 = v^2 \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\begin{cases} -p^1 n + \nabla_{\eta^1} v^1 \cdot n = -p^2 n + \nabla_{\eta^2} v^2 \cdot n \end{cases} \quad (2.28)$$

$n = -n_{W_1(\epsilon, \delta)(t)} = n_{W_2(\epsilon, \delta)(t)}$ étant le vecteur unité normal extérieur à $W_2(\epsilon, \delta)(t)$ dirigé vers l'intérieur de $W_1(\epsilon, \delta)(t)$.

Les chapitres suivant sont consacrés à l'analyse asymptotique du modèle (2.23)-(2.26). Pour cela nous adoptons quelques changements sur les variables et les inconnues.

2.5.1 Changements d'échelle

Afin d'écrire le sous-domaine $W_k(\epsilon, \delta)(t)$ indépendamment de ϵ et de δ , considérons les changements d'échelle suivants :

$$(x_1, x_2, x_3) := (y_1, \delta^{k-2} y_2, \epsilon^{-1} y_3). \quad (2.29)$$

Les sous-domaines équivalents sont donnés par :

$$\begin{aligned} \Omega_1(t) &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : 0 < x_1 < 1, -l^1(x_1) < x_2 < l^1(x_1), \right. \\ &\quad \left. -b^1(x_1, x_2) < x_3 < s^1(x_1, x_2, t) \right\} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \Omega_2(t) &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : -1 < x_1 < 0, -l^2(x_1) < x_2 < l^2(x_1), \right. \\ &\quad \left. -b^2(x_1, x_2) < x_3 < s^2(x_1, x_2, t) \right\}. \end{aligned}$$

On définit de même les sous-domaines avec surface rigide en prenant $s \equiv 0$ dans les ensembles ci-dessus. C'est à dire

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : 0 < x_1 < 1, -l^1(x_1) < x_2 < l^1(x_1), \right. \\ &\quad \left. -b^1(x_1, x_2) < x_3 < 0 \right\} \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : -1 < x_1 < 0, -l^2(x_1) < x_2 < l^2(x_1), \right. \\ &\quad \left. -b^2(x_1, x_2) < x_3 < 0 \right\}. \end{aligned}$$

Notons au passage que le vecteur normal extérieur $n_{W_k(\epsilon, \delta)}$ au point (y_1, y_2, y_3) de $\partial W_k(\epsilon, \delta)$, et le vecteur n_{Ω_k} au point correspondant $(x_1, x_2, x_3) = (y_1, \delta^{k-2} y_2, \epsilon^{-1} y_3)$ de $\partial \Omega_k$, via la renormalisation ci-dessus satisfont à la relation :

$$(n_{W_k(\epsilon, \delta)})_i = C_k \beta_i (n_{\Omega_k})_i, \quad i = 1, 2, 3$$

où

$$C_k = \left(\sum_{i=1}^3 \beta_i^2 (n_{\Omega_k})^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1, \delta^{k-2}, \epsilon^{-1}).$$

Enfin on adopte les renormalisations suivantes de la vitesse :

$$(u_1^k, u_2^k, u_3^k) := (v_1^k, \delta^{k-2} v_2^k, \epsilon^{-1} v_3^k). \quad (2.32)$$

2.5.2 Viscosité avec quotient d'aspect

Le tenseur de viscosité cinématique turbulente $\nu^k = \text{diag}(\nu_1^k, \nu_2^k, \nu_3^k)$ se déduit du tenseur de viscosité dynamique turbulente $\eta^k = \text{diag}(\eta_1^k, \eta_2^k, \eta_3^k)$ par la relation $\nu_i^k = \eta_i^k \rho_0^{-1}$ (cette relation introduit une deuxième mesure de la viscosité, la viscosité cinématique mesurée en Stokes, de dimension $m^2 \cdot s^{-1}$). De plus ses différentes composantes sont écrites en fonction des rapports d'aspect voir [18, 14].

En effet, la viscosité étant une grandeur caractéristique de la loi de comportement des fluides reliant les contraintes aux taux de déformation, elle doit être rigoureusement isotrope. Cependant les équations de Navier-Stokes modélisent l'écoulement réel du fluide y compris ses échelles les plus petites. Or les écoulements géophysiques sont par nature turbulents, alors pour mieux les étudier, il est nécessaire de prendre des viscosités plus grosses que la viscosité cinématique de l'eau. Ces viscosités turbulentes étant liées à la taille des tourbillons, ne peuvent donc pas être isotropes puisque les dimensions des tourbillons dans les trois directions sont inégales (rapport d'aspect).

Nous faisons donc les hypothèses supplémentaires suivantes[†]

$$\nu_2^1 / \nu_1^1 = \mathcal{O}(\delta^2), \quad \nu_3^1 / \nu_1^1 = \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

et

$$\nu_3^2 / \nu_1^2 = \nu_3^2 / \nu_2^2 = \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

De manière générale la viscosité cinématique dans la direction i d'un bassin est sensiblement égale au quotient du carré de la dimension caractéristique dans cette direction sur le temps caractéristique. Prenons par exemple, le sous-domaine $W_k(\epsilon, \delta)(t)$: comme $l_{\text{car}}^k \sim \delta^{2-k} L_{\text{car}}^k$, $h_{\text{car}}^k \sim \epsilon L_{\text{car}}^k$, on trouve bien

$$\nu_2^k \sim \delta^{2(2-k)} \nu_1^k, \quad \nu_3^k \sim \epsilon^2 \nu_1^k.$$

Ainsi dans la suite on pose (voir [41])

$$\nu_1^k = \mu_1^k, \quad \nu_2^k = \delta^{2(2-k)} \mu_2^k, \quad \nu_3^k = \epsilon^2 \mu_3^k, \quad (2.33)$$

où μ_i^k , $i = 1, 2, 3$ sont des constantes.

..†. $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \mathcal{O}(\alpha^2)$ signifie que $\frac{1}{\alpha^2} \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ reste borné lorsque α tend vers 0

Approximation des équations avec toit rigide

Dans toute la suite, la jonction avec surface rigide est exprimée par $W(\epsilon, \delta)$, un domaine de $\mathbb{R}^3$ (ouvert connexe), de frontière $\partial W(\epsilon, \delta) = G_s \cup G_d \cup G_b$ continue, lipschitzienne. G_s désigne la surface du bassin, représentée par le plan de référence $y_3 = 0$, G_b est le fond du domaine, et G_d est la partie de la frontière où une condition de Dirichlet est imposée. On y étudie l'analyse asymptotique des équations de Navier-Stokes avec une décomposition de domaine sans recouvrement. Un résultat d'existence et de convergence est prouvé pour le modèle asymptotique lorsqu'on fait tendre (ϵ, δ) vers zéro. Les résultats de ce chapitre sont publiés dans [41].

3.1 Décomposition de domaine homogène des ENS

En supposant la fonction s identiquement nulle dans les ensembles précités dans (2.22), on note que le domaine $W(\epsilon, \delta)$ est recouvert par deux sous-domaines $W_1(\epsilon, \delta)$ et $W_2(\epsilon, \delta)^*$, supposés non vides, disjoints, et de frontières lipschitziennes tels que

$$\begin{aligned} \overline{W}(\epsilon, \delta) &= \overline{W}_1(\epsilon, \delta) \cup \overline{W}_2(\epsilon, \delta), \quad W_1(\epsilon, \delta) \cap W_2(\epsilon, \delta) = \emptyset, \\ \partial W_1(\epsilon, \delta) \cap \partial W_2(\epsilon, \delta) &= G, \quad \partial W_k(\epsilon, \delta) = G_s^k \cup G_d^k \cup G_b^k \cup G \\ G_r^k &= G_r \cap \partial W_k(\epsilon, \delta), \quad r = s, b, d \end{aligned} \tag{3.1}$$

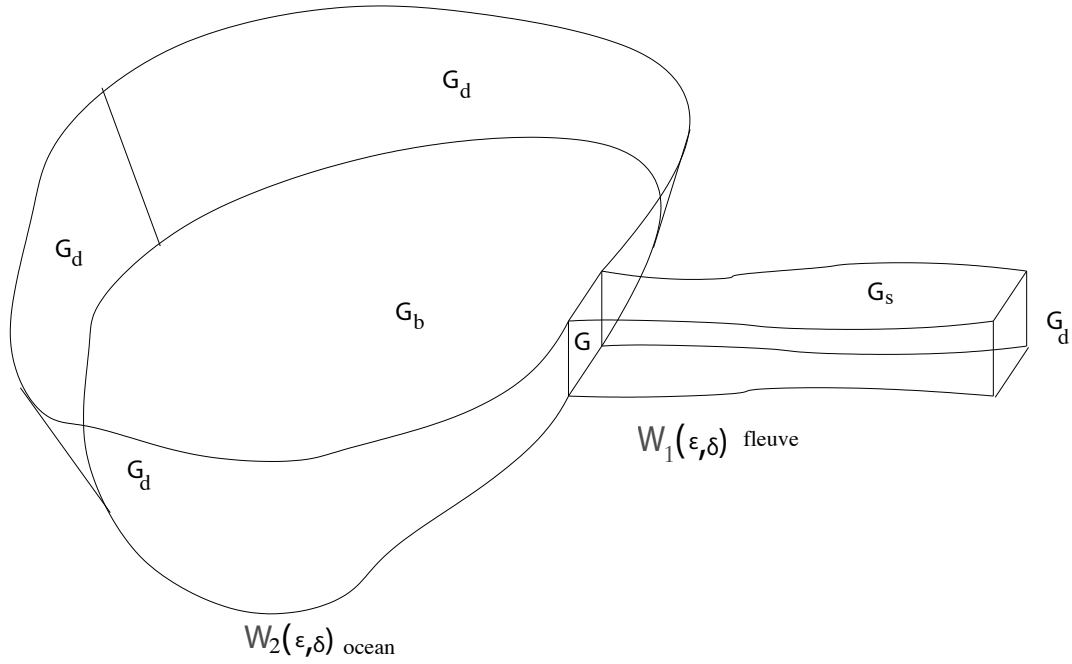
avec

$$\begin{aligned} G_s^1 &= \left\{ (y_1, y_2, 0); 0 < y_1 < 1, -\delta l^1(y_1) < y_2 < \delta l^1(y_1) \right\}, \\ G_s^2 &= \left\{ (y_1, y_2, 0); -1 < y_1 < 0, -l^2(y_1) < y_2 < l^2(y_1) \right\}. \end{aligned}$$

De plus l'interface G séparant les deux sous-régions est supposée verticale et est donnée par

$$G = \left\{ (0, y_2, y_3); -\delta l^1(0) < y_2 < \delta l^1(0), -\epsilon b^1(0, \frac{y_2}{\delta}) < y_3 < 0 \right\}.$$

.*. représentant respectivement les portion fleuve et océan de l'embouchure

FIGURE 3.1 – Jonction $\overline{W}(\epsilon, \delta) = \overline{W}_1(\epsilon, \delta) \cup \overline{W}_2(\epsilon, \delta)$

3.1.1 Equations globales

Pour $\nu = \text{diag}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $\nu_i = \eta_i / \rho_0$, on s'intéresse aux équations de Navier-Stokes anisotropiques suivantes

$$v \cdot \nabla v + 2\omega \times v - \nabla \cdot \sigma^\nu(v, \frac{p}{\rho_0}) = \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} \quad \text{dans } W(\epsilon, \delta) \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \text{dans } W(\epsilon, \delta) \quad (3.3)$$

$$(\sigma^\nu(v, \frac{p}{\rho_0}) \cdot n) \cdot \tau_i = \theta_i, \quad i = 1, 2, \quad v \cdot n = 0 \quad \text{sur } G_s \quad (3.4)$$

$$(\sigma^\nu(v, \frac{p}{\rho_0}) \cdot n) \cdot \tau_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad v \cdot n = 0 \quad \text{sur } G_b \quad (3.5)$$

$$v = 0 \quad \text{sur } G_d \quad (3.6)$$

n est le vecteur unité normal sur $\partial W(\epsilon, \delta)$ extérieur à $W(\epsilon, \delta)$, les deux vecteurs tangents sur $G_b \subset \partial W(\epsilon, \delta)$ sont exprimés par $\tau_1 = (1, 0, -\partial_1 b)$ et $\tau_2 = (0, 1, -\partial_2 b)$. Sur la surface de référence $G_s \subset \partial W(\epsilon, \delta)$, on a $\tau_1 = (1, 0, 0)$ et $\tau_2 = (0, 1, 0)$.

θ_i , $i = 1, 2$ traduisent les tractions surfaciques du vent. Elles sont généralement calculées à partir des vitesses horizontales $\hat{v}_1$, $\hat{v}_2$ des vents en surface par une formule du type

$$\hat{\theta}_i = C_t \cdot (\hat{v}_1^2 + \hat{v}_2^2)^{1/2} \cdot \hat{v}_i, \quad i = 1, 2,$$

et

$$\theta_i = \rho_0^{-1} \hat{\theta}_i.$$

C_t étant un coefficient de trainée estimé expérimentalement [73, 27].

Les conditions limites cinématiques (3.4)-(3.6) portant sur les champs de vitesse et le champ de tenseur sont naturelles car elles se déduisent directement de la formule faible des équations, formulation faible qui traduit le principe variationnel dit "des vitesses virtuelles".

3.1.2 Equations 2–domaines

Le problème global (3.2)-(3.6) peut maintenant s'écrire sous forme 2–domaines en utilisant la décomposition (3.1) du domaine $W(\epsilon, \delta)$. Le problème revient à chercher (v^i, p^i) , $i = 1, 2$ vérifiant les systèmes d'équations de Navier-Stokes suivants

$$v^1 \cdot \nabla v^1 + 2\omega \times v^1 - \nabla \cdot \sigma^{\nu^1}(v^1, \frac{p^1}{\rho_0}) = \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} \text{ dans } W_1(\epsilon, \delta) \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot v^1 = 0 \text{ dans } W_1(\epsilon, \delta) \quad (3.8)$$

$$v_3^1 = 0, \nu_3^1 \frac{\partial v_1^1}{\partial x_3} = \theta_1^1, \nu_3^1 \frac{\partial v_2^1}{\partial x_3} = \theta_2^1 \text{ sur } G_s^1 \quad (3.9)$$

$$(\sigma^{\nu^1}(v^1, \frac{p^1}{\rho_0}) \cdot n) \cdot \tau_i = 0, i = 1, 2, v^1 \cdot n = 0 = 0 \text{ sur } G_b^1 \quad (3.10)$$

$$v^1 = 0 \text{ sur } G_d^1 \quad (3.11)$$

$$v^2 \cdot \nabla v^2 + 2\omega \times v^2 - \nabla \cdot \sigma^{\nu^2}(v^2, \frac{p^2}{\rho_0}) = \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} \text{ dans } W_2(\epsilon, \delta) \quad (3.12)$$

$$\nabla \cdot v^2 = 0 \text{ dans } W_2(\epsilon, \delta) \quad (3.13)$$

$$v_3^2 = 0, \nu_3^2 \frac{\partial v_1^2}{\partial x_3} = \theta_1^2, \nu_3^2 \frac{\partial v_2^2}{\partial x_3} = \theta_2^2 \text{ sur } G_s^2 \quad (3.14)$$

$$(\sigma^{\nu^2}(v^2, \frac{p^2}{\rho_0}) \cdot n) \cdot \tau_i = 0, i = 1, 2, v^2 \cdot n = 0 = 0 \text{ sur } G_b^2 \quad (3.15)$$

$$v^2 = 0 \text{ sur } G_d^2 \quad (3.16)$$

avec les conditions de transmission Dirichlet-Neumann suivantes sur G

$$\begin{cases} [v]_G = 0 \\ \left[\left(\sigma^\nu(v, \frac{p}{\rho_0}) \cdot n \right) \right]_G = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\left[\left(\sigma^\nu(v, \frac{p}{\rho_0}) \cdot n \right) \right]_G = 0 \quad (3.18)$$

$[\varphi]_G = \varphi|_{W_1(\epsilon, \delta)} - \varphi|_{W_2(\epsilon, \delta)}$ est le saut de φ à travers G . Pour simplifier les notations, le vecteur unité sur $\partial W_k(\epsilon, \delta)$ est aussi noté par $n = n_{W_k(\epsilon, \delta)}$, et $n = n_{W_2(\epsilon, \delta)} = -n_{W_1(\epsilon, \delta)} = (1, 0, 0)$ est le vecteur unité normal à G extérieur à $W_2(\epsilon, \delta)$ (dirigé vers l'intérieur de $W_1(\epsilon, \delta)$).

On peut se référer à [76] pour la preuve de l'équivalence entre (3.2)-(3.6) et (3.7)-(3.18).

Dans la suite on s'intéressera à l'approximation d'une solution du modèle (3.7)-(3.18) lorsque (ϵ, δ) tend vers zéro.

3.2 Notations et rappels préliminaires

Dans cette section Θ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, ($d = 2, 3$), et $\Sigma \subset \partial\Theta$ une partie de mesure non nulle (mesure de surface).

Espaces indéfiniment dérivables. $\mathcal{D}(\Theta)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact contenu dans Θ . On note par $\mathcal{D}'(\Theta)$ son dual topologique, appelé aussi espace des distributions sur Θ . On note aussi que :

$\mathcal{D}_\Sigma(\Theta)$ est l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables s'annulant sur Σ ,

$$\mathcal{D}_\Sigma(\Theta) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d), \varphi|_\Sigma = 0\}.$$

$\mathcal{D}(\bar{\Theta})$ est l'ensemble des restrictions à $\bar{\Theta}$ des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathcal{D}(\bar{\Theta}) = \{\varphi|_{\bar{\Theta}} : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\}.$$

Espace L^p . On considère dans Θ la mesure de Lebesgue dx , et l'ensemble des fonctions mesurables φ définies sur Θ avec la relation d'équivalence

$$\varphi \equiv \psi \text{ si et seulement si } \text{mes}(\{x \in \Theta : \varphi(x) \neq \psi(x)\}) = 0.$$

Ainsi pour $1 \leq p < \infty$, on définit $L^p(\Theta)$, comme l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions mesurables vérifiant

$$\int_{\Theta} |\varphi(x)|^p dx < \infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$

C'est un espace de Banach muni de la norme

$$\|\varphi\|_{L^p(\Theta)} = \left(\int_{\Theta} |\varphi(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Si $p = 2$, on a un espace de Hilbert, induit par le produit scalaire

$$(\varphi, \psi)_{L^2(\Theta)} = \int_{\Theta} \varphi(x) \psi(x) dx.$$

Si $p = \infty$, $\varphi \in L^\infty(\Theta)$ si

$$\inf\{M \geq 0 : |\varphi(x)| \leq M \text{ p.p sur } \Theta\} < \infty$$

et sa norme est définie par

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Theta)} = \inf\{M \geq 0 : |\varphi(x)| \leq M \text{ p.p sur } \Theta\} < \infty.$$

Rappelons aussi que, dans l'espace de Hilbert $L^2(\Theta)$, l'inégalité de Cauchy-Schwartz est donnée par

$$|(\varphi, \psi)_{L^2(\Theta)}| \leq \|\varphi\|_{L^2(\Theta)} \|\psi\|_{L^2(\Theta)}.$$

Espace de Sobolev. $W^{k,p}(\Theta)$ est l'ensemble des fonctions $\varphi \in L^p(\Theta)$ telles que les dérivées au sens des distributions jusqu'à l'ordre k sont des fonctions de $L^p(\Theta)$

Nous utiliserons les notations suivantes (voir par exemple [2]).

Si φ est une fonction ou un vecteur défini presque partout sur Θ , nous définissons

$$\|\varphi\|_{W^{k,p}(\Theta)} = \{\varphi \in L^p(\Theta) : D^\alpha \varphi \in L^p(\Theta), \forall \alpha \text{ multi-indice, } \alpha \geq 0, |\alpha| \leq k\}$$

muni de la norme

$$\|\varphi\|_{W^{k,p}(\Theta)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha \varphi\|_{L^p(\Theta)}$$

où

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d = |\alpha|.$$

Par ailleurs on note par $W_0^{1,p}(\Theta)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Theta)$ dans $W^{1,p}(\Theta)$

$$W_0^{1,p}(\Theta) = \overline{\mathcal{D}(\Theta)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Theta)}},$$

et par

$$W^{-1,p'}(\Theta) = [W_0^{1,p}]', \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

le dual topologique de $W_0^{1,p}(\Theta)$ muni de la norme du dual

$$\|\Phi\|_{W^{-1,p'}(\Theta)} = \sup_{\varphi \in W_0^{1,p}(\Theta)} \frac{\langle \Phi, \varphi \rangle_{W^{-1,p'}(\Theta), W^{1,p}(\Theta)}}{\|\varphi\|_{W^{1,p}(\Theta)}}, \quad \forall \Phi \in W^{-1,p'}(\Theta).$$

Dans le cas où $k = 1$, $p = 2$, l'espace de Sobolev est noté par $H^k(\Theta)$,

$$H^k(\Theta) = \{\varphi \in L^2(\Theta) : D^\alpha \varphi \in L^2(\Theta) \forall \alpha \text{ multi-indice, } \alpha \geq 0, |\alpha| < k\}$$

$H^k(\Theta)$ est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|\varphi\|_{H^k(\Theta)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha \varphi\|_{L^2(\Theta)}^2 \right)^{1/2}$$

de la semi-norme

$$|\varphi|_{H^k(\Theta)} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha \varphi\|_{L^2(\Theta)}^2 \right)^{1/2}$$

et du produit scalaire

$$(\varphi, \psi)_{H^k(\Theta)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha \varphi, D^\alpha \psi)_{L^2(\Theta)}.$$

$\mathcal{D}(\Theta)$ et $\mathcal{D}_\Sigma(\Theta)$ étant des sous-espaces de $H^k(\Theta)$ on définit

$$H_0^k(\Theta) = \overline{\mathcal{D}(\Theta)}^{\|\cdot\|_{H^k(\Theta)}}, \quad H_\Sigma^k(\Theta) = \overline{\mathcal{D}_\Sigma(\Theta)}^{\|\cdot\|_{H^k(\Theta)}},$$

i.e $H_0^k(\Theta)$, et $H_\Sigma^k(\Theta)$ sont respectivement les fermetures de $\mathcal{D}(\Theta)$ et $\mathcal{D}_\Sigma(\Theta)$ dans $H^k(\Theta)$.

On note aussi par $H^{-1}(\Theta)$ le dual topologique de l'espace de Sobolev $H_0^1(\Theta)$,

$$H^{-1}(\Theta) = [H_0^1(\Theta)]'.$$

C'est un espace de Hilbert muni de la norme opérateur

$$\|\Phi\|_{H^{-1}(\Theta)} = \sup_{\varphi \in H_0^1(\Theta)} \frac{\langle \Phi, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Theta), H^1(\Theta)}}{\|\varphi\|_{H^1(\Theta)}}, \quad \forall \Phi \in H^{-1}(\Theta).$$

Espaces de Sobolev anisotropes. Dans l'analyse asymptotique qui va suivre tout au long de cette partie, nous utiliserons des espaces de fonctions beaucoup moins régulières. Ainsi nous introduisons l'espace suivant [77] :

$$H(\text{div}, \Theta) = \{\varphi \in (L^2(\Theta))^d : \nabla \cdot \varphi \in L^2(\Theta)\},$$

qui est clairement un espace de Hilbert pour la norme

$$\|\varphi\|_{H(\text{div}, \Theta)} = \left(\|\varphi\|_{(L^2(\Theta))^d}^2 + \|\nabla \cdot \varphi\|_{L^2(\Theta)}^2 \right)^{1/2}$$

induite par le produit scalaire

$$(\varphi, \psi)_{H(\text{div}, \Theta)} = (\varphi, \psi)_{L^2(\Theta)^d} + (\nabla \cdot \varphi, \nabla \cdot \psi)_{L^2(\Theta)}.$$

Par ailleurs $\mathcal{D}(\Theta)$ et $\mathcal{D}_\Sigma(\Theta)$ étant des sous-espaces de $H(\text{div}, \Theta)$, on définit

$$H(\text{div}, \Theta, \partial\Theta) = H_0(\text{div}, \Theta) = \overline{\mathcal{D}(\Theta)^d}^{\|\cdot\|_{H(\text{div}, \Theta)}}, \quad H(\text{div}, \Theta, \Sigma) = \overline{\mathcal{D}_\Sigma(\Theta)^d}^{\|\cdot\|_{H(\text{div}, \Theta)}}.$$

Dans la même logique on introduit aussi un autre espace anisotrope [85]

$$H(\partial_i, \Theta) = \{\varphi \in L^2(\Theta) \mid \partial_i \varphi \in L^2(\Theta)\}.$$

C'est aussi un espace de Hilbert pour la norme

$$\|\varphi\|_{H(\partial_i, \Theta)} = (\|\varphi\|_{L^2(\Theta)}^2 + \|\partial_i \varphi\|_{L^2(\Theta)}^2)^{1/2}.$$

De plus on pose

$$H(\partial_i, \Theta, \partial\Theta) = H_0(\partial_i, \Theta) = \overline{\mathcal{D}(\Theta)}^{\|\cdot\|_{H(\partial_i, \Theta)}}, \quad H(\partial_i, \Theta, \Sigma) = \overline{\mathcal{D}_\Sigma(\Theta)}^{\|\cdot\|_{H(\partial_i, \Theta)}}.$$

Rappelons maintenant quelques propriétés des fonctions appartenant aux espaces de Sobolev.

3.2.1 Trace sur les espaces de Sobolev

En supposant Θ avec une frontière $\partial\Theta$ continue et lipschitzienne, on peut définir une trace $\varphi|_{\partial\Theta}$ pour toute fonction $\varphi \in H^1(\Theta)$. A cet effet, on définit une mesure de surface $d\sigma$ induite par la mesure de Lebesgue dx , et on note par $L^2(\partial\Theta)$ l'espace des fonctions $d\sigma$ -mesurables $\beta : \partial\Theta \rightarrow \mathbb{R}$ de carré intégrable pour la mesure $d\sigma$, induite par la norme :

$$\|\beta\|_{L^2(\partial\Theta)} = \left(\int_{\partial\Theta} \beta^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi puisque $\mathcal{D}(\overline{\Theta})$ est dense dans $H^1(\Theta)$, l'application

$$\varphi \mapsto \varphi|_{\partial\Theta}$$

définit sur $\mathcal{D}(\overline{\Theta})$ peut être prolongée de manière unique en une application linéaire et continue de $H^1(\Theta)$ sur $L^2(\partial\Theta)$. On note par $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Theta)$ l'espace de traces des fonctions de $H^1(\Theta)$:

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Theta) = \{\beta \in L^2(\partial\Theta) : \exists \varphi \in H^1(\Theta) \text{ tel que } \varphi|_{\partial\Theta} = \beta\}.$$

Rappelons que $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Theta)$ est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|\beta\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Theta)} = \inf \{ \|\varphi\|_{H^1(\Theta)} : \varphi \in H^1(\Theta), \beta = \varphi|_{\partial\Theta} \},$$

et qu'il s'injecte continuellement dans $L^2(\partial\Theta)$: il existe $C > 0$ tel que

$$\forall \beta \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Theta), \quad \|\beta\|_{L^2(\partial\Theta)} \leq C \|\beta\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Theta)}.$$

Finalement on a le résultat de trace suivant.

Théorème 1. (Trace sur $H^1(\Theta)$)[36]

Soit Θ un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ de frontière continue, lipschitzienne.

1— Il existe une unique application linéaire, continue, et surjective

$$\gamma : H^1(\Theta) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Theta) / \gamma(\varphi) = \varphi|_{\partial\Theta}, \quad \forall \varphi \in H^1(\Theta) \cap C^0(\overline{\Theta}).$$

2— Il existe un opérateur d'extension linéaire, continu, et injectif

$$\mathcal{R} : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Theta) \rightarrow H^1(\Theta) / \gamma \circ \mathcal{R}(\eta) = \eta, \quad \forall \eta \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Theta).$$

Des résultats analogues sont vérifiés, si on considère la trace sur un sous ensemble Σ de $\partial\Theta$, de mesure non nulle, continue et lipschitzienne, et dans ce cas on notera les applications restreintes par γ_Σ , et $\mathcal{R}_\Sigma$.

Ces opérateurs de trace permettent de caractériser (voir [77, 36]) les espaces $H_0^1(\Theta)$ et $H_\Sigma^1(\Theta)$ par

$$H_0^1(\Theta) = \{\varphi \in H^1(\Theta) : \gamma(\varphi) = 0\}, \quad H_\Sigma^1(\Theta) = \{\varphi \in H^1(\Theta) : \gamma(\varphi)|_\Sigma = 0\}.$$

Ainsi on note par $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ l'espace de traces des fonctions $H_{\partial\Theta \setminus \Sigma}^1$ [36, 63] :

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) = \left\{ g \in L^2(\Sigma) : \exists \varphi \in H_{\partial\Theta \setminus \Sigma}^1(\Theta), \varphi|_\Sigma = g \right\},$$

qui est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|g\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)} = \inf \left\{ \|\varphi\|_{H^1(\Theta)} : \varphi \in H_{\partial\Theta \setminus \Sigma}^1(\Theta), \varphi|_\Sigma = g \right\}.$$

Finalement nous introduisons $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$, le dual de $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ équipé de la norme duale

$$\|\Phi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)} = \sup_{\varphi \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)} \frac{\langle \Phi, \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma), H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}}{\|\varphi\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}}, \quad \forall \Phi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma).$$

Rappelons aussi que $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ est dense dans $L^2(\Sigma)$, et que $L^2(\Sigma)$ peut être identifié à un sous-espace de $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$.

Enfin en utilisant l'inégalité de la trace, alors par définition, toute fonction $\varphi \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ a la propriété que son extension par 0 sur $\partial\Theta \setminus \Sigma$ donne une fonction $\tilde{\varphi} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Theta)$ telle que

$$\|\tilde{\varphi}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Theta)} \leq C \|\varphi\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}.$$

Des propriétés de la trace pour les fonctions $W^{k,p}(\Theta)$ peuvent être consulter par exemple dans [2][†].

Un deuxième résultat de trace concerne les fonctions appartenant aux espaces de Sobolev anisotropes.

Théorème 2. (Trace sur $H(\text{div}; \Theta)$) [77, 51] *Si l'ouvert Θ est suffisamment régulier, $(\mathcal{D}(\overline{\Theta}))^d$ est dense dans $H(\text{div}, \Theta)$ et l'application linéaire $\gamma_n : \mathcal{D}(\overline{\Theta})^d \rightarrow L^2(\partial\Theta)$, $v \mapsto (v \cdot n)|_{\partial\Theta}$ se prolonge par continuité en une application encore notée γ_n de $H(\text{div}, \Theta)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Theta)$.*

En supposant que Θ soit suffisamment régulier, nous avons (voir [51]) une autre caractérisation de l'espace $H_0(\text{div}, \Theta)$ donnée par

$$H_0(\text{div}; \Theta) = \left\{ \varphi \in H(\text{div}; \Theta) : \gamma_n(\varphi) = (\varphi \cdot n)|_{\partial\Theta} = 0 \right\} = \text{Ker} \gamma_n.$$

Théorème 3. (Trace sur $H(\partial_i; \Theta)$) [85] *Si l'ouvert Θ est suffisamment régulier, $\mathcal{D}(\overline{\Theta})$ est dense dans $H(\partial_i, \Theta)$ et l'application linéaire $\gamma_{n_i} : \mathcal{D}(\overline{\Theta}) \rightarrow L^2(\partial\Theta)$, $v \mapsto (vn_i)|_{\partial\Theta}$ se prolonge par continuité en une application encore notée γ_{n_i} de $H(\partial_i, \Theta)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Theta)$. De plus l'image de γ_{n_i} est donnée par $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Theta)$.*

Si Θ est suffisamment régulier, $H_0(\partial_i, \Theta)$ est caractérisé par

$$H_0(\partial_i; \Theta) = \left\{ \varphi \in H(\partial_i; \Theta) : \gamma_{n_i}(\varphi) = (\varphi n_i)|_{\partial\Theta} = 0 \right\} = \text{Ker} \gamma_{n_i}.$$

Un autre résultat important que nous utiliserons dans nos preuves est l'inégalité de Poincaré.

[†]. On y définit l'espace $W_0^{k,p}(\Theta) = \{\varphi \in W^{k,p}(\Theta) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Theta\}$ et $W^{k-\frac{1}{p'}, p', \Sigma}(\Sigma)$ l'espace des traces des fonctions de $W^{k,p}(\Theta)$ muni de la norme

$$\|\beta\|_{W^{k-\frac{1}{p'}, p', \Sigma}(\Sigma)} = \sup_{\{\varphi \in W^{k,p}(\Theta) \text{ tel que } \varphi|_{\partial\Theta} = \beta\}} \|\varphi\|_{W^{k,p}(\Theta)}$$

3.2.2 Inégalité de Poincaré Friedrichs

Théorème 4. (Inégalité de Poincaré sur $H^1(\Theta)$) [77] Soit Θ un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$, et Σ un sous-ensemble non vide, continu, et lipschitzien de la frontière $\partial\Theta$. Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\int_{\Theta} \varphi^2(x) \leq C \int_{\Theta} |\nabla \varphi(x)|^2 dx, \quad \forall \varphi \in H_{\Sigma}^1(\Theta).$$

Ce résultat permet d'établir l'équivalence entre la norme $\|\cdot\|_{H^k(\Theta)}$ et la semi-norme $|\cdot|_{H^k(\Theta)}$. Enfin nous avons le résultat bien connu :

Théorème 5. (Formule de Green) [77, 63] Si l'ouvert Θ est suffisamment régulier, alors pour tout $\varphi, \psi \in H^1(\Theta)$

$$\int_{\Theta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \psi dx = - \int_{\Theta} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Theta} \varphi \psi n_i d\sigma, \quad 1 \leq i \leq d,$$

où n est le vecteur normal unité sortant de Θ , $d\sigma$ est l'élément de surface de $\partial\Theta$ (et $\int_{\partial\Theta} \varphi \psi n_i d\sigma = \int_{\partial\Theta} \gamma(\varphi) \gamma(\psi) n_i d\sigma$).

3.3 Propriétés du tenseur des déformations

Enonçons maintenant deux propriétés du tenseur anisotropique des déformations.

Proposition 1. (Propriété d'additivité) Le tenseur anisotrope des déformations e^{ν^k} vérifie

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^3 \int_{W_k(\epsilon, \delta)} e_{ij}^{\nu^k}(\varphi^k) \partial_j \psi_i^k &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2\nu_j^k} \int_{W_k(\epsilon, \delta)} e_{ij}^{\nu^k}(\varphi^k) e_{ij}^{\nu^k}(\psi^k), \\ \forall (\varphi^k, \psi^k) &\in H^1(W_k(\epsilon, \delta))^3 \times H^1(W_k(\epsilon, \delta))^3 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Démonstration. Soient $\varphi^k, \psi^k \in [H^1(W_k(\epsilon, \delta))]^3$, en désignant par $::$ le produit de contraction, et en utilisant la convention de sommation suivant les indices répétés, et du fait que $e^{\nu^k}(\cdot)$ est symétrique on a

$$\begin{aligned} e^{\nu^k}(\varphi^k) :: \nabla \psi^k &= \nabla \varphi^k \cdot \nu^k :: \nabla \psi^k + \nu^k \cdot \nabla^t \varphi^k :: \nabla \psi^k \\ &= \text{Tr}(\nu^k \nabla^t \varphi^k \nabla \psi^k) + \text{Tr}(\nabla \varphi^k \nu^k \nabla \psi^k) \end{aligned}$$

Donc

$$e_{ij}^{\nu^k}(\varphi^k) \partial_j \psi_i^k = \frac{1}{2\nu_j^k} e_{ij}^{\nu^k}(\varphi^k) e_{ij}^{\nu^k}(\psi^k).$$

□

Ce tenseur vérifie aussi l'inégalité de Korn :

Proposition 2. (Inégalité de Korn) [71] Il existe une constante $C^k = C^k(W_k(\epsilon, \delta)) > 0$ telle que :

$$\|\varphi^k\|_{H^1(W_k(\epsilon, \delta))^3} \leq C^k \|e^{\nu^k}(\varphi^k)\|_{L^2(W_k(\epsilon, \delta))^9} = \left[\sum_{i,j=1}^3 \|e_{ij}^{\nu^k}(\varphi^k)\|_{L^2(W_k(\epsilon, \delta))}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.20)$$

Démonstration. Voir Annexe A

□

3.4 Problème renormalisé

On suppose d'abord que ρ est constante, et que les termes de tractions surfaciques sont proportionnels aux rapports d'aspect ϵ , δ avec

$$\theta_1^k = \epsilon \theta_1^{0,k}, \quad \theta_2^1 = \epsilon \delta \theta_2^{0,1}, \quad \theta_2^2 = \epsilon \theta_2^{0,2}$$

$\theta_i^{0,k}$, $i = 1, 2$ étant des fonctions indépendantes de ϵ et de δ .

Remarque 2. Cette dernière hypothèse peut être motivée par l'analyse dimensionnelle suivante : on dérive que le terme de traction $(\sigma^{\nu^k}(v^k, P^k) \cdot n) \cdot \tau_1 = \nu_3^k \partial_3 v_1^k = \theta_1^k$ a la même dimension que

$$\frac{(h_{cr}^k)^2}{T} \cdot \frac{1}{h_{cr}^k} \cdot \frac{L_{cr}^k}{T} = \frac{h_{cr}^k}{T} \cdot \frac{L_{cr}^k}{T} = \epsilon \frac{(L_{cr}^k)^2}{T^2} = \mathcal{O}(\epsilon)$$

Dans la même logique on a

$$(\sigma^{\nu^1}(v^1, P^1) \cdot n) \cdot \tau_2 = \theta_2^1 = \nu_3^1 \partial_3 v_2^1 \sim \frac{(h_{cr}^1)^2}{T} \cdot \frac{1}{h_{cr}^1} \cdot \frac{l_{cr}^1}{T} = \frac{h_{cr}^1}{T} \cdot \frac{l_{cr}^1}{T} = \epsilon \delta \frac{(L_{cr}^1)^2}{T^2} = \mathcal{O}(\epsilon \delta)$$

$$(\sigma^{\nu^2}(v^2, P^2) \cdot n) \cdot \tau_2 = \theta_2^2 = \nu_3^2 \partial_3 v_2^2 \sim \frac{(h_{cr}^2)^2}{T} \cdot \frac{1}{h_{cr}^2} \cdot \frac{l_{cr}^2}{T} = \frac{h_{cr}^2}{T} \cdot \frac{l_{cr}^2}{T} = \epsilon \frac{L_{cr}^2 l_{cr}^2}{T^2} = \mathcal{O}(\epsilon).$$

On pose

$$P^{\epsilon, \delta}(x, t) = \frac{1}{\rho_0} (p(y, t) + \rho g y_3).$$

En utilisant (2.29), (2.32), (2.33), le modèle 2-domaines (3.7)-(3.18) est transcrit dans Ω_k par

$$u^{k, \epsilon, \delta} \cdot \nabla u_1^{k, \epsilon, \delta} - \nabla \cdot e_1^{\mu^k}(u^{k, \epsilon, \delta}) - \delta^{2-k} f^C u_2^{k, \epsilon, \delta} + \frac{\partial P^{k, \epsilon, \delta}}{\partial x_1} = 0 \text{ dans } \Omega_k \quad (3.21)$$

$$\delta^{2(2-k)} (u^{k, \epsilon, \delta} \cdot \nabla u_2^{k, \epsilon, \delta} - \nabla \cdot e_2^{\mu^k}(u^{k, \epsilon, \delta})) + \delta^{2-k} f^C u_1^{k, \epsilon, \delta} + \frac{\partial P^{k, \epsilon, \delta}}{\partial x_2} = 0 \text{ dans } \Omega_k \quad (3.22)$$

$$\epsilon^2 (u^{k, \epsilon, \delta} \cdot \nabla u_3^{k, \epsilon, \delta} - \nabla \cdot e_3^{\mu^k}(u^{k, \epsilon, \delta})) + \frac{\partial P^{k, \epsilon, \delta}}{\partial x_3} = 0 \text{ dans } \Omega_k \quad (3.23)$$

$$\nabla \cdot u^{k, \epsilon, \delta} = 0 \text{ dans } \Omega_k \quad (3.24)$$

$$u_3^{k, \epsilon, \delta} = 0 \text{ sur } \Gamma_s^k \quad (3.25)$$

$$\mu_3^k \frac{\partial u_1^{k, \epsilon, \delta}}{\partial x_3} = \epsilon^{-1} \theta_1^k, \quad \delta^{2-k} \mu_3^k \frac{\partial u_2^{k, \epsilon, \delta}}{\partial x_3} = \epsilon^{-1} \theta_2^k \text{ sur } \Gamma_s^k \quad (3.26)$$

$$(\sigma^{\mu^k}(u^{k, \epsilon, \delta}, P^{k, \epsilon, \delta}) \cdot n) \cdot \tau_i = 0 \quad i = 1, 2, \quad u^{k, \epsilon, \delta} \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_b^k \quad (3.27)$$

$$u^{k, \epsilon, \delta} = 0 \text{ sur } \Gamma_d^k \quad (3.28)$$

où

$$f^C = 2\omega_3, \text{ et } e_i^{\mu^k}(u^k) = (e_{i1}^{\mu^k}(u^k), e_{i2}^{\mu^k}(u^k), e_{i3}^{\mu^k}(u^k))^t, \quad i = 1, 2, 3$$

$n = n_{\Omega_k}$ est le vecteur unité extérieur sur $\partial\Omega_k$, et $n = (1, 0, 0) = n_{\Omega_2} = -n_{\Omega_1}$ exprime le vecteur unité sur Γ extérieur à Ω_2 (dirigé vers l'intérieur de Ω_1).

Les conditions de transmission (3.17)-(3.18) définies sur G deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} [u_1^{\epsilon, \delta}]_{|\Gamma} = 0, \end{array} \right. \quad (3.29)$$

$$\epsilon [u_3^{\epsilon, \delta}]_{|\Gamma} = 0 \quad (3.30)$$

$$\delta u_2^{1, \epsilon, \delta}|_{\Gamma} = u_2^{2, \epsilon, \delta}|_{\Gamma} \quad (3.31)$$

$$[-P^{\epsilon, \delta} + e_{11}^{\mu}(u^{\epsilon, \delta})]_{|\Gamma} = 0 \quad (3.32)$$

$$\epsilon [e_{31}^{\mu}(u^{\epsilon, \delta})]_{|\Gamma} = 0, \quad (3.33)$$

$$\delta e_{21}^{\mu^1}(u^{1, \epsilon, \delta})_{|\Gamma} = e_{21}^{\mu^2}(u^{2, \epsilon, \delta})_{|\Gamma} \quad (3.34)$$

avec (voir fig. 3.2)

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2, \quad \partial\Omega = \Gamma_s \cup \Gamma_d \cup \Gamma_b, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset,$$

$$\Omega_k = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3; (y_1, y_2, y_3) \in W_k(\epsilon, \delta) \right\}, \quad \partial\Omega_k = \Gamma_s^k \cup \Gamma_d^k \cup \Gamma_b^k \cup \Gamma,$$

$$\Gamma = \left\{ (0, x_2, x_3); -l^1(0) < x_2 < l^1(0), -b^1(0, x_2) < x_3 < 0 \right\} = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$$

$$\Gamma_s^1 = \left\{ (x_1, x_2, 0); 0 < x_1 < 1, -l^1(x_1) < x_2 < l^1(x_1) \right\}$$

$$\Gamma_s^2 = \left\{ (x_1, x_2, 0); -1 < x_1 < 0, -l^2(x_1) < x_2 < l^2(x_1) \right\}.$$

Dans la suite $(u, P) = (u^{\epsilon, \delta}, P^{\epsilon, \delta})$ désigne la solution du problème renormalisé défini sur Ω

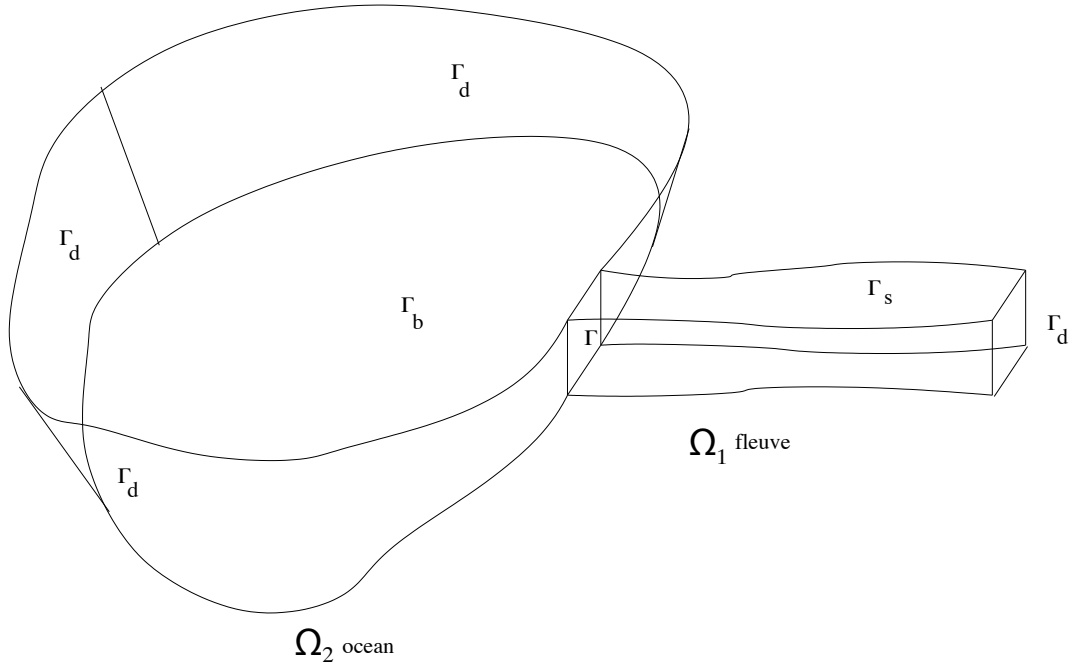


FIGURE 3.2 – Dessin schématique de la jonction $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$

3.5 Problème limite

Faisons tendre les paramètres ϵ, δ en facteur dans (3.21)-(3.28) vers zéro, pour obtenir formellement

$$u^1 \cdot \nabla u_1^1 - \nabla \cdot \sigma_1^{\mu^1}(u^1, P^1) = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial P^1}{\partial x_2} = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial P^1}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (3.37)$$

$$\nabla \cdot u^1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (3.38)$$

$$u_3^1 = 0, \quad (\tilde{\sigma}^1 \cdot n) \cdot \tau_1 = \theta_1^{0,1} \quad \text{sur } \Gamma_s^1 \quad (3.39)$$

$$u^1 \cdot n = (\tilde{\sigma}^1 \cdot n) \cdot \tau_1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_b^1 \quad (3.40)$$

$$u_1^1 = (u_2^1 n_2 + u_3^1 n_3) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d^1 \quad (3.41)$$

$$u^2 \cdot \nabla u_1^2 - \nabla \cdot \sigma_1^{\mu^2}(u^2, P^2) - f^C u_2^2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_2 \quad (3.42)$$

$$u^2 \cdot \nabla u_2^2 - \nabla \cdot \sigma_2^{\mu^2}(u^2, P^2) + f^C u_1^2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_2 \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial P^2}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dans } \Omega_2 \quad (3.44)$$

$$\nabla \cdot u^2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_2 \quad (3.45)$$

$$u_3^2 = 0, \quad (\tilde{\sigma}^2 \cdot n) \cdot \tau_1 = \theta_1^{0,2}, \quad (\tilde{\sigma}^2 \cdot n) \cdot \tau_2 = \theta_2^{0,2} \quad \text{sur } \Gamma_s^2 \quad (3.46)$$

$$u^2 \cdot n = (\tilde{\sigma}^2 \cdot n) \cdot \tau_i, \quad i = 1, 2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_b^2 \quad (3.47)$$

$$u_1^2 = u_2^2 = u_3^2 n_3 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d^2 \quad (3.48)$$

avec

$$\sigma_1^{\mu^k}(u^k, P^k) = \left(-P^k + e_{11}^{\mu^k}(u^k), e_{12}^{\mu^k}(u^k), e_{13}^{\mu^k}(u^k) \right)^t$$

$$(\tilde{\sigma}^1 \cdot n) = \left(\sigma_1^{\mu^1}(u^1, P^1) \cdot n, -P^1 n_2, -P^1 n_3 \right)^t$$

$$\sigma_2^{\mu^2}(u^2, P^2) = \left(e_{21}^{\mu^2}(u^2), -P^2 + e_{22}^{\mu^2}(u^2), e_{23}^{\mu^2}(u^2) \right)^t$$

$$(\tilde{\sigma}^2 \cdot n) = \left(\sigma_1^{\mu^2}(u^2, P^2) \cdot n, \sigma_2^{\mu^2}(u^2, P^2) \cdot n, -P^2 n_3 \right)^t$$

Finalement en passant à la limite dans (3.29)-(3.34), les conditions d'interface pour le problème limite Navier-Stokes/Navier-Stokes (3.35)-(3.48) sont données par

$$\begin{cases} [u_1]_{|\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (3.49)$$

$$\begin{cases} u_2^2|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (3.50)$$

$$\begin{cases} [-P + e_{11}^{\mu}(u)]_{|\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (3.51)$$

3.6 Formulations faibles

Dans toute la suite, les symboles $\rightarrow$, $\rightharpoonup$, et $\overset{*}{\rightharpoonup}$ expriment respectivement la convergence pour la topologie forte, la topologie faible, et celle faible $*$.

3.6.1 Espaces fonctionnels

Considérons les espaces de Hilbert suivants munis de leurs normes produits

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}^1 &= \left(H_{\Gamma_d^1}^1(\Omega_1) \times L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_1) \right) \cap H(\text{div}, \Omega_1, \Gamma_d^1 \cup \Gamma_s^1 \cup \Gamma_b^1) \\
\mathcal{W}^2 &= H_{\Gamma_d^2}^1(\Omega_2) \times H_{\Gamma_d^2}^1(\Omega_2) \times H(\partial_3, \Omega_2, \Gamma_s^2 \cup \Gamma_d^2) \\
\mathcal{V}^k &= \left\{ H_{\Gamma_d^k}^1(\Omega_k) \times H_{\Gamma_d^k}^1(\Omega_k) \times H_{\Gamma_s^k \cup \Gamma_d^k}^1(\Omega_k), (\varphi^k \cdot n)|_{\Gamma_b^k} = 0 \right\} \\
\mathcal{V}_0^k &= \left\{ \varphi^k \in \mathcal{V}^k \mid \varphi_i^k|_{\Gamma} = 0, i = 2, 3 \right\}, \quad \mathcal{V}_{00}^k = \left\{ \varphi^k \in \mathcal{V}_0^k \mid \varphi_1^k|_{\Gamma} = 0 \right\}, \\
\mathcal{V} &= \left\{ \varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in \mathcal{V}^1 \times \mathcal{V}^2 \mid [\varphi_1]_{\Gamma} = [\varphi_3]_{\Gamma} = 0, \delta\varphi_{2|\Gamma}^1 = \varphi_{2|\Gamma}^2 \right\} \\
\mathcal{V}_0 &= \left\{ \varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in \mathcal{V}_0^1 \times \mathcal{V}_0^2 \mid [\varphi_1]_{\Gamma} = 0 \right\} \subset \mathcal{V}
\end{aligned}$$

3.6.2 Formes bilinéaires

On pose

$$\begin{aligned}
m(u^k, v_i^k, \varphi_i^k) &= -(v_i^k, u^k \cdot \nabla \varphi_i^k)_{0, \Omega_k} = - \int_{\Omega_k} v_i^k (u^k \cdot \nabla \varphi_i^k) dx \\
F_i^{cor, k}(q^k, p^k) &= f^C(p^k, q^k)_{0, \Omega_k} = f^C \int_{\Omega_k} p^k q^k dx, \quad i = 1, 2 \\
A_i(v^k, \varphi^k) &= \sum_{j=1}^3 (e_{ij}^{\mu^k}(v^k), \partial_j \varphi_i^k)_{0, \Omega_k} = \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega_k} e_{ij}^{\mu^k}(v^k) \frac{\partial \varphi_i^k}{\partial x_j} dx \\
E_i(v^k, \varphi^k) &= -(u_i^k, \partial_t v_i^k)_{0, \Omega_k} = - \int_{\Omega_k} u_i^k \frac{\partial v_i^k}{\partial t} dx, \quad i = 1, 2, 3 \\
b_i(v_i^k, q^k) &= -(\partial_i v_i^k, q^k)_{0, \Omega_k} = - \int_{\Omega_k} \frac{\partial v_i^k}{\partial x_i} q^k dx, \quad i = 1, 2, 3 \\
l_j(v_j^k) &= (\theta_j^{0, k}, v_j^k)_{0, \Gamma_s^k} = \int_{\Gamma_s^k} \theta_j^{0, k} v_j^k dx, \quad j = 1, 2
\end{aligned}$$

Puis on définit aussi les formes bilinéaires suivantes

$$\begin{aligned}
E(v, \varphi) &= \sum_{k=1}^2 E_1(v^k, \varphi^k) + \delta^2 E_2(v^1, \varphi^1) + E_2(v^2, \varphi^2) + \epsilon^2 \sum_{k=1}^2 E_3(v^k, \varphi^k) \\
A(v, \varphi) &= \sum_{k=1}^2 A_1(v^k, \varphi^k) + \delta^2 A_2(v^1, \varphi^1) + A_2(v^2, \varphi^2) + \epsilon^2 \sum_{k=1}^2 A_3(v^k, \varphi^k) \\
M(u, v, \varphi) &= \sum_{k=1}^2 M^k(u^k, v^k, \varphi^k), \quad B(v, q) = \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^3 b_i(v_i^k, q^k) \\
F^{cor}(v, \varphi) &= \delta F^{cor, 1}(v^1, \varphi^1) + F^{cor, 2}(v^2, \varphi^2) \\
L(v) &= \sum_{k=1}^2 l_1(v_1^k) + \delta(l_2(v_2^1)) + l_2(v_2^2)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} M^k(u^k, v^k, \varphi^k) &= m(u^k, v_1^k, \varphi_1^k) + \delta^{2(2-k)} m(u^k, v_2^k, \varphi_2^k) + \epsilon^2 m(u^k, v_3^k, \varphi_3^k) \\ F^{cor,k}(v^k, \varphi^k) &= -F_1^{cor,k}(v_2^k, \varphi_1^k) + F_2^{cor,k}(v_1^k, \varphi_2^k) \end{aligned}$$

En supposant $\theta_1^{0,k}, \theta_2^{0,k} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s^k)$, et en se référant à [51], le problème renormalisé (3.21)-(3.34) admet au moins une solution $(u^{\epsilon,\delta}, P^{\epsilon,\delta}) \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$ telle que

$$M(u^{\epsilon,\delta}, u^{\epsilon,\delta}, \varphi) + A(u^{\epsilon,\delta}, \varphi) + B(\varphi, P^{\epsilon,\delta}) + F^{cor}(u^{\epsilon,\delta}, \varphi) = L(\varphi) \quad (3.52)$$

$$B(u^{\epsilon,\delta}, q) = 0 \quad (3.53)$$

$\forall \varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in \mathcal{V}, q \in L^2(\Omega)$.

La section suivante est consacrée à l'étude de la convergence d'une solution $(u^{\epsilon,\delta}, P^{\epsilon,\delta}) \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$ de (3.52)-(3.53) lorsque $(\epsilon, \delta) \rightarrow 0$.

3.7 Résultat d'existence et de convergence

3.7.1 Inégalité de Poincaré courbe

Soit Θ un ouvert borné de frontière suffisamment régulière. Soit $\mathbf{a} : \longrightarrow \mathbb{R}^d$ un champ de vecteur $\mathcal{C}^1$.

On définit l'espace fonctionnel

$$H(\mathbf{a}, \Theta) = \{\varphi \in L^2(\Theta) \mid \mathbf{a} \cdot \nabla \varphi \in L^2(\Theta)\}$$

muni de la norme

$$\|\varphi\|_{H(\mathbf{a}, \Theta)} = \left(\|\varphi\|_{L^2(\Theta)}^2 + \|\mathbf{a} \cdot \nabla \varphi\|_{L^2(\Theta)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On définit aussi

$$H(\mathbf{a}, \Theta, \partial\Theta^-) = \{\varphi \in H(\mathbf{a}, \Theta) \mid \varphi|_{\partial\Theta^-} = 0\}$$

avec

$$\partial\Theta^- = \{x \in \partial\Theta \mid \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} < 0\}$$

Si l'écoulement ou flot associé au champ $\mathbf{a}$ est Θ -remplissant (c'est à les trajectoires issues de $\partial\Theta^-$ remplissent $\bar{\Theta}$ en une durée finie), alors l'inégalité de Poincaré courbe

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \forall \varphi \in H(\mathbf{a}, \Theta, \partial\Theta^-), \quad \|\varphi\|_{L^2(\Theta)} \leq C \|\mathbf{a} \cdot \nabla \varphi\|_{L^2(\Theta)}$$

est vérifiée (voir [12]).

En supposant que le flot est Θ -remplissant dans les cas suivants

$$\Theta = \Omega_1, \quad \mathbf{a} = (-1, 0, 0)$$

$$\Theta = \Omega_1, \quad \mathbf{a} = (0, 0, -1)$$

$$\Theta = \Omega_2, \quad \mathbf{a} = (0, 0, -1)$$

on obtient l'inégalité de Poincaré usuelle dans les directions horizontale et verticale.

Proposition 3.

1. (Inégalité de Poincaré horizontale) : $\exists C > 0$ tel que $\forall \varphi^1 \in H(\partial_1, \Omega_1, \Gamma_d^1)$

$$\|\varphi^1\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C \|\partial_1 \varphi^1\|_{L^2(\Omega_1)}$$

2. (Inégalité de Poincaré verticale) : $\exists C > 0$ tel que $\forall \varphi^k \in H(\partial_3, \Omega_k, \Gamma_s^k)$

$$\|\varphi^k\|_{L^2(\Omega_k)} \leq C \|\partial_3 \varphi^k\|_{L^2(\Omega_k)}$$

3.7.2 Estimation des termes de vitesse

Dans toute la suite $\mathbf{C}$ est une constante positive, indépendante de (ϵ, δ) , et est flottante au gré des courants.

Estimations des termes visqueuses

Posons $\varphi = u^{\epsilon, \delta}$ dans la formulation faible (3.52)-(3.53). On obtient

$$A(u^{\epsilon, \delta}, u^{\epsilon, \delta}) = L(u^{\epsilon, \delta})$$

Effectuons successivement les opérations suivantes :

– Sur le premier membre $A(u^{\epsilon, \delta}, u^{\epsilon, \delta})$:

on considère les changements d'échelle et de renormalisation (2.29), (2.32), et (2.33) pour se ramener sur $W_k(\epsilon, \delta)$

$$A(u^{\epsilon, \delta}, u^{\epsilon, \delta}) = \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^3 J_k^{-1} \int_{W_k(\epsilon, \delta)} (e_i^{\nu^k}(v^k) \cdot \nabla v_i^k)$$

J_k étant le jacobien de la transformation $(y_1, y_2, y_3) \in W_k(\epsilon, \delta) \mapsto (y_1, \delta^{k-2}y_2, \epsilon^{-1}y_3) \in \Omega_k$.

Puis on prend en compte la propriété d'additivité (3.19)

$$A(u^{\epsilon, \delta}, u^{\epsilon, \delta}) = \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^3 J_k^{-1} \int_{W_k(\epsilon, \delta)} |e_{ij}^{\nu^k}(v^k)|^2 = \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^3 J_k^{-1} \|e_{ij}^{\nu^k}(v^k)\|_{L^2(W_k(\epsilon, \delta))}^2.$$

En appliquant l'inégalité de Korn (3.20), on obtient

$$A(u^{\epsilon, \delta}, u^{\epsilon, \delta}) \geq \frac{1}{2} \min(\mathbf{C}, 1) \sum_{k=1}^2 J_k^{-1} \left(\sum_{i,j=1}^3 \|e_{ij}^{\nu^k}(v^k)\|_{L^2(W_k(\epsilon, \delta))}^2 + \|v^k\|_{H^1(W_k(\epsilon, \delta))}^3 \right).$$

On se ramène encore sur Ω_k grâce aux changements (2.29), (2.32), et (2.33) sur les variables et les données physiques :

$$\begin{aligned} A(u^{\epsilon, \delta}, u^{\epsilon, \delta}) &\geq \mathbf{C} \sum_{k=1}^2 \left(\|e_{1j}^{\mu^k}(u^{k, \epsilon, \delta})\|_{L^2(\Omega_k)} + \delta^{2-k} \|e_{2j}^{\mu^k}(u^{k, \epsilon, \delta})\|_{L^2(\Omega_k)} \right. \\ &\quad + \epsilon \|e_{3j}^{\mu^k}(u^{k, \epsilon, \delta})\|_{L^2(\Omega_k)} + \|u_1^k\|_{H^1(\Omega_k)} + \delta^{2-k} \|u_2^{k, \epsilon, \delta}\|_{H^1(\Omega_k)} \\ &\quad \left. + \epsilon \|u_3^{k, \epsilon, \delta}\|_{H^1(\Omega_k)} \right) \end{aligned}$$

– Pour le second membre $L(u^{\epsilon, \delta})$, on a d'abord

$$\left| \int_{\Gamma_s^k} \theta_i^{0,k} u_i^{k, \epsilon, \delta} \right| \leq \mathbf{C} \|\theta_i^{0,k}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s^k)} \|u_i^{k, \epsilon, \delta}\|_{H^{-1/2}(\Gamma_s^k)}$$

En appliquant l'inégalité de la trace (théorème 3) et celle de Poincaré verticale (proposition 3) on obtient

$$\left| \int_{\Gamma_s^k} \theta_i^{0,k} u_i^{k, \epsilon, \delta} \right| \leq \mathbf{C} \|\theta_i^{0,k}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s^k)} \|\partial_3 u_i^{k, \epsilon, \delta}\|_{L^2(\Omega_k)}, \quad i = 1, 2.$$

Finalement avec l'inégalité classique de Young

$$a_1 a_2 \leq \frac{1}{2} \left(\alpha^2 a_1^2 + \frac{a_2^2}{\alpha^2} \right), \quad a_1, a_2 \in \mathbf{R}, \quad \alpha > 0,$$

on a

$$\left| \int_{\Gamma_s^k} \theta_i^{0,k} u_i^{k,\epsilon,\delta} \right| \leq \mathbf{C} \left(\frac{1}{2} \|\theta_i^{0,k}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s^k)}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_3 u_i^{k,\epsilon,\delta}\|_{L^2(\Omega_k)}^2 \right), \quad i = 1, 2.$$

On démontre ainsi le résultat d'estimation suivant.

Lemme 1. (*Estimation des termes visqueux*) On a

$$a) \|e_{1j}^{\mu^k}(u^{k,\epsilon,\delta})\|_{L^2(\Omega_k)} + \delta^{2-k} \|e_{2j}^{\mu^k}(u^{k,\epsilon,\delta})\|_{L^2(\Omega_k)} + \epsilon \|e_{3j}^{\mu^k}(u^{k,\epsilon,\delta})\|_{L^2(\Omega_k)} \leq \mathbf{C}, \quad j = 1, 2, 3$$

$$b) \|u_1^{k,\epsilon,\delta}\|_{H^1(\Omega_k)} + \delta^{2-k} \|u_2^{k,\epsilon,\delta}\|_{H^1(\Omega_k)} + \epsilon \|u_3^{k,\epsilon,\delta}\|_{H^1(\Omega_k)} \leq \mathbf{C}.$$

Comme

$$\mu_1^1 \partial_1 u_2^{1,\epsilon,\delta} = e_{12}^{\mu_1^1}(u^{1,\epsilon,\delta}) - \mu_2^1 \partial_2 u_1^{1,\epsilon,\delta}$$

est borné dans $L^2(\Omega_1)$, alors en appliquant l'inégalité de Poincaré horizontale (proposition 3) on a

$$\|u_2^{1,\epsilon,\delta}\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \mathbf{C}$$

De manière similaire on a $\mu_1^k \partial_1 u_3^{k,\epsilon,\delta} = e_{13}^{\mu_1^k}(u^{k,\epsilon,\delta}) - \mu_3^k \partial_3 u_1^{1,\epsilon,\delta}$, d'où $u_3^{k,\epsilon,\delta}$ est borné dans $L^2(\Omega_k)$. Ainsi on a prouvé le résultat suivant.

Lemme 2. (*Estimation dans $L^2(\Omega_k)$*)

$$\|u_2^{1,\epsilon,\delta}\|_{L^2(\Omega_1)} + \|u_3^{1,\epsilon,\delta}\|_{L^2(\Omega_1)} + \|u_3^{2,\epsilon,\delta}\|_{L^2(\Omega_2)} \leq \mathbf{C}.$$

Utilisons maintenant l'inégalité de Gagliardo [72]

$$\|\psi^k\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega_k)}^3 \leq \mathbf{C} \prod_{i=1}^3 \|\partial_i \psi^k\|_{L^1(\Omega_k)}.$$

En y posant $\psi^k = (\varphi^k)^4$, alors par l'inégalité de Cauchy-Schwartz on en déduit que

$$\|\varphi^k\|_{L^6(\Omega_k)} \leq \mathbf{C} \prod_{i=1}^3 \|\partial_i \varphi^k\|_{L^2(\Omega_k)}^{\frac{1}{3}}.$$

En utilisant les estimations des termes visqueux (lemmes 1, et 2) on obtient des estimations de vitesse dans L^6 .

Lemme 3. (*Estimations dans $L^6(\Omega_k)$*)

$$a) \|u_1^{1,\epsilon,\delta}\|_{L^6(\Omega_1)} + \delta^{2/3} \|u_2^{1,\epsilon,\delta}\|_{L^6(\Omega_1)} + \epsilon^{2/3} \|u_3^{1,\epsilon,\delta}\|_{L^6(\Omega_1)} \leq \mathbf{C}$$

$$b) \|u_1^{2,\epsilon,\delta}\|_{L^6(\Omega_2)} + \|u_2^{2,\epsilon,\delta}\|_{L^6(\Omega_2)} + \|u_3^{2,\epsilon,\delta}\|_{L^6(\Omega_2)} \leq \mathbf{C}.$$

En appliquant l'inégalité d'interpolation

$$\|\varphi^k\|_{L^3(\Omega_k)} \leq \|\varphi^k\|_{L^2(\Omega_k)}^{1/2} \|\varphi^k\|_{L^6(\Omega_k)}^{1/2},$$

on déduit des lemmes 1, 2 et 3, les estimations de vitesse dans $L^3(\Omega_k)$.

Lemme 4. (*Estimations dans $L^3(\Omega_k)$*)

$$a) \|u_1^{1,\epsilon,\delta}\|_{L^3(\Omega_1)} + \delta^{2/3}\|u_2^{1,\epsilon,\delta}\|_{L^3(\Omega_1)} + \epsilon^{2/3}\|u_3^{1,\epsilon,\delta}\|_{L^3(\Omega_1)} \leq \mathbf{C}$$

$$b) \|u_1^{2,\epsilon,\delta}\|_{L^3(\Omega_2)} + \|u_2^{2,\epsilon,\delta}\|_{L^3(\Omega_2)} + \|u_3^{2,\epsilon,\delta}\|_{L^3(\Omega_2)} \leq \mathbf{C}.$$

On peut s'intéresser maintenant aux termes non linéaires afin d'obtenir des estimations dans $H^{-1}(\Omega_k)$ et $W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega_k)$.

Estimations des termes de convection dans $H^{-1}(\Omega_k)$

En tenant compte de l'équation de continuité on a

$$\|(u^{1,\epsilon,\delta} \cdot \nabla u_1^{1,\epsilon,\delta})\|_{H^{-1}(\Omega_1)} = \left\| \sum_{j=1}^3 \partial_j (u_j^{1,\epsilon,\delta} u_1^{1,\epsilon,\delta}) \right\|_{H^{-1}(\Omega_1)}$$

L'application dérivée $\partial_j : L^2(\Omega_1) \longrightarrow H^{-1}(\Omega_1)$ vérifiant l'inégalité

$$\|\partial_j \varphi^1\|_{H^{-1}(\Omega_1)} \leq \|\varphi^1\|_{L^2(\Omega_1)},$$

on déduit l'inégalité suivante

$$\sum_{j=1}^3 \|\partial_j (u_j^{1,\epsilon,\delta} u_1^{1,\epsilon,\delta})\|_{H^{-1}(\Omega_1)} \leq \sum_{j=1}^3 \|u_j^{1,\epsilon,\delta} u_1^{1,\epsilon,\delta}\|_{L^2(\Omega_1)}$$

Finalement en utilisant les lemmes 3 et 4 on obtient

$$\sum_{j=1}^3 \|u_j^{1,\epsilon,\delta} u_1^{1,\epsilon,\delta}\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \sum_{j=1}^3 \|u_j^{1,\epsilon,\delta}\|_{L^6(\Omega_1)} \|u_1^{1,\epsilon,\delta}\|_{L^3(\Omega_1)} \leq \mathbf{C}(1 + \delta^{-\frac{2}{3}} + \epsilon^{-\frac{2}{3}}).$$

En procédant de même pour les autres composantes on a le résultat suivant.

Lemme 5. (*Estimations dans $H^{-1}(\Omega_k)$*)

$$a) \|u^{1,\epsilon,\delta} \cdot \nabla u_1^{1,\epsilon,\delta}\|_{H^{-1}(\Omega_1)} + \delta^{\frac{2}{3}} \|u^{1,\epsilon,\delta} \cdot \nabla u_2^{1,\epsilon,\delta}\|_{H^{-1}(\Omega_1)} + \epsilon^{\frac{2}{3}} \|u^{1,\epsilon,\delta} \cdot \nabla u_3^{1,\epsilon,\delta}\|_{H^{-1}(\Omega_1)} \leq \mathbf{C}(1 + \epsilon^{-\frac{2}{3}} + \delta^{-\frac{2}{3}}).$$

$$b) \|u^{2,\epsilon,\delta} \cdot \nabla u_1^{2,\epsilon,\delta}\|_{H^{-1}(\Omega_2)} + \|u^{2,\epsilon,\delta} \cdot \nabla u_2^{2,\epsilon,\delta}\|_{H^{-1}(\Omega_2)} + \|u^{2,\epsilon,\delta} \cdot \nabla u_3^{2,\epsilon,\delta}\|_{H^{-1}(\Omega_2)} \leq \mathbf{C}$$

Estimations des termes de convection dans $W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega_k)$

En appliquant successivement l'inégalité

$$\|\partial_j \varphi^1\|_{W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega_1)} \leq \|\varphi^1\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega_1)}, \quad \forall \varphi^1 \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega_1),$$

et les lemmes 1, 2, 3, on obtient des estimations de $(u^{1,\epsilon,\delta} \cdot \nabla u^{1,\epsilon,\delta})$ dans $(W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega_1))^3$:

$$\|(u^{1,\epsilon,\delta} \cdot \nabla u_1^{1,\epsilon,\delta})\|_{W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega_1)} = \|\nabla \cdot (u^{1,\epsilon,\delta} u_1^{1,\epsilon,\delta})\|_{W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega_1)} \leq \mathbf{C}$$

$$\|(u^{1,\epsilon,\delta} \cdot \nabla u_2^{1,\epsilon,\delta})\|_{W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega_1)} = \|\nabla \cdot (u^{1,\epsilon,\delta} u_2^{1,\epsilon,\delta})\|_{W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega_1)} \leq \mathbf{C}\delta^{-\frac{2}{3}}.$$

$$\|(u^{1,\epsilon,\delta} \cdot \nabla u_3^{1,\epsilon,\delta})\|_{W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega_1)} = \|\nabla \cdot (u^{1,\epsilon,\delta} u_3^{1,\epsilon,\delta})\|_{W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega_1)} \leq \mathbf{C}\epsilon^{-\frac{2}{3}}.$$

D'autre part en utilisant l'injection continue et dense de $H^{-1}(\Omega_2)$ dans $W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_2)$ on a

$$\|(u^{2, \epsilon, \delta} \cdot \nabla u^{2, \epsilon, \delta})\|_{W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_2)^3} \leq \mathbf{C}.$$

Ainsi on prouve le résultat suivant.

Lemme 6. (*Estimations dans $W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_k)$*)

$$\begin{aligned} & \|u^{1, \epsilon, \delta} \cdot \nabla u_1^{1, \epsilon, \delta}\|_{W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_1)} + \delta^{\frac{2}{3}} \|u^{1, \epsilon, \delta} \cdot \nabla u_2^{1, \epsilon, \delta}\|_{W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_1)} + \\ & \quad \epsilon^{\frac{2}{3}} \|u^{1, \epsilon, \delta} \cdot \nabla u_3^{1, \epsilon, \delta}\|_{W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_1)} \|u^{2, \epsilon, \delta} \cdot \nabla u_1^{2, \epsilon, \delta}\|_{W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_2)} + \\ & \quad \|u^{2, \epsilon, \delta} \cdot \nabla u_2^{2, \epsilon, \delta}\|_{W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_2)} + \|u^{2, \epsilon, \delta} \cdot \nabla u_3^{2, \epsilon, \delta}\|_{W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_2)} \leq \mathbf{C} \end{aligned}$$

3.7.3 Estimation des termes de pression

Considérons maintenant les équations renormalisées (3.21)-(3.23) pour déduire des estimations des termes de pression. Soit par exemple l'équation (3.21), pour $k = 1$ on a

$$\begin{aligned} \|\partial_1 P^{1, \epsilon, \delta}\|_{H^{-1}(\Omega_1)} &= \|u^{1, \epsilon, \delta} \cdot \nabla u_1^{1, \epsilon, \delta} - \nabla \cdot e_1^{\mu^1}(u^{1, \epsilon, \delta}) - \delta f^C u_2^{1, \epsilon, \delta}\|_{H^{-1}(\Omega_1)} \\ &\leq \|u^{1, \epsilon, \delta} \cdot \nabla u_1^{1, \epsilon, \delta} + \nabla \cdot e_1^{\mu^1}(u^{1, \epsilon, \delta})\|_{H^{-1}(\Omega_1)} + \delta \|f^C u_2^{1, \epsilon, \delta}\|_{H^{-1}(\Omega_1)} \end{aligned}$$

En utilisant les lemmes 1, 2, et 5, et le fait que $L^2(\Omega_1)$ s'injecte continuellement dans $H^{-1}(\Omega_1)$, on obtient

$$\|\partial_1 P^{1, \epsilon, \delta}\|_{H^{-1}(\Omega_1)} \leq \mathbf{C}(2 + \delta + \delta^{-\frac{2}{3}} + \epsilon^{-\frac{2}{3}})$$

En exploitant de la même manière les équations (3.22)-(3.23), on obtient respectivement

$$\begin{aligned} \|\partial_2 P^{1, \epsilon, \delta}\|_{H^{-1}(\Omega_1)} &\leq \delta^2 \|u^{1, \epsilon, \delta} \cdot \nabla u_2^{1, \epsilon, \delta} + \nabla \cdot e_2^{\mu^1}(u^{1, \epsilon, \delta})\|_{H^{-1}(\Omega_1)} + \delta \|f^C u_2^{1, \epsilon, \delta}\|_{H^{-1}(\Omega_1)} \\ &\leq \mathbf{C}(\delta^{\frac{4}{3}}(1 + \delta^{-\frac{2}{3}} + \epsilon^{-\frac{2}{3}}) + \delta(\delta + 1)) \\ \|\partial_3 P^{1, \epsilon, \delta}\|_{H^{-1}(\Omega_1)} &\leq \epsilon^2 \|u^{1, \epsilon, \delta} \cdot \nabla u_3^{1, \epsilon, \delta}\|_{H^{-1}(\Omega_1)} + \|\nabla \cdot e_3^{\mu^1}(u^{1, \epsilon, \delta})\|_{H^{-1}(\Omega_1)} \\ &\leq \mathbf{C}(\epsilon^{\frac{4}{3}}(1 + \delta^{-\frac{2}{3}} + \epsilon^{-\frac{2}{3}}) + \epsilon^2) \end{aligned}$$

En adoptant la même démarche pour les équations (3.21)-(3.23) avec $k = 2$, on a

$$\|\partial_i P^{2, \epsilon, \delta}\|_{H^{-1}(\Omega_2)} \leq \mathbf{C}, \quad i = 1, 2 \quad \|\partial_3 P^{2, \epsilon, \delta}\|_{H^{-1}(\Omega_2)} \leq \mathbf{C}\epsilon^2.$$

Comme on peut le constater, les estimations dans $H^{-1}(\Omega_1)$ ne nous permettent pas d'obtenir une compacité de la pression $P^{1, \epsilon, \delta}$ lorsque $(\epsilon, \delta) \rightarrow 0$. Pour pallier à ce manquement, on estime les termes de potentiel dans $W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_k)$.

Ainsi pour $k = 1$, (3.21) devient

$$\begin{aligned} \|\partial_1 P^{1, \epsilon, \delta}\|_{W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_1)} &= \|u^{1, \epsilon, \delta} \cdot \nabla u_1^{1, \epsilon, \delta} - \nabla \cdot e_1^{\mu^1}(u^{1, \epsilon, \delta}) - \delta f^C u_2^{1, \epsilon, \delta}\|_{W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_1)} \\ &\leq \|u^{1, \epsilon, \delta} \cdot \nabla u_1^{1, \epsilon, \delta} - \nabla \cdot e_1^{\mu^1}(u^{1, \epsilon, \delta})\|_{W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_1)} + \delta \|f^C u_2^{1, \epsilon, \delta}\|_{W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_1)} \end{aligned}$$

En utilisant les lemmes 1, 2, 6, et l'injection continue de $L^{\frac{3}{2}}(\Omega_1)$ dans $W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_1)$, on déduit l'inégalité suivante

$$\|\partial_1 P^{1, \epsilon, \delta}\|_{W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_1)} \leq \mathbf{C}(1 + \delta).$$

En suivant la même logique, on détermine les estimations des autres composantes de $\nabla P^{1,\epsilon,\delta}$ dans $W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega_1)$

$$\|\partial_2 P^{1,\epsilon,\delta}\|_{W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega_1)} \leq \mathbf{C}(\delta^{\frac{4}{3}} + \delta(1+\delta)), \quad \|\partial_3 P^{1,\epsilon,\delta}\|_{W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega_1)} \leq \mathbf{C}(\epsilon^{\frac{4}{3}} + \epsilon^2)$$

Finalement en se référant à [7] on a le résultat suivant.

Proposition 4. *La pression $P^{\epsilon,\delta} = (P^{1,\epsilon,\delta}, P^{2,\epsilon,\delta})$ est bornée dans $L^{\frac{3}{2}}(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ uniformément en (ϵ, δ) . De plus lorsque $(\epsilon, \delta) \rightarrow 0$ on a*

$$\|\partial_3 P^{2,\epsilon,\delta}\|_{H^{-1}(\Omega_2)} \rightarrow 0, \quad \|\partial_2 P^{1,\epsilon,\delta}\|_{W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega_1)} \rightarrow 0, \quad \|\partial_3 P^{1,\epsilon,\delta}\|_{W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega_1)} \rightarrow 0.$$

3.7.4 Passage à la limite

Considérons les espaces fonctionnels suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^1 &= \left\{ \varphi^1 \in \mathcal{W}^1 \mid e_{1j}^{\mu^1}(\varphi^1) \in L^2(\Omega_1), j = 2, 3 \right\} \\ \mathcal{Y}^2 &= \left\{ \varphi^2 \in \mathcal{W}^2 \mid e_{i3}^{\mu^2}(\varphi^2) \in L^2(\Omega_2), i = 1, 2, (\varphi^2 \cdot n)|_{\Gamma_b^2} = 0 \right\} \\ \mathcal{Y} &= \left\{ \varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in \mathcal{Y}^1 \times \mathcal{Y}^2 \mid [\varphi_1]_{\Gamma} = 0 \right\}, \quad \mathcal{Y}_0 = \left\{ \varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in \mathcal{Y} \mid \varphi_{2|_{\Gamma}}^2 = 0 \right\} \\ \mathcal{X}^1 &= \left\{ \varphi^1 \in H_{\Gamma_d}^1(\Omega_1) \times H(\partial_2, \Omega_1, \Gamma_d^1) \times H(\partial_3, \Omega_1, \Gamma_d^1 \cup \Gamma_s) \mid \right. \\ &\quad \left. (\varphi^1 \cdot n)|_{\Gamma_b^1} = 0, \nabla \cdot \varphi^1 \in L^3(\Omega_1), \partial_2 \varphi_1^1, \partial_3 \varphi_1^1 \in L^3(\Omega_1) \right\} \\ \mathcal{X}^2 &= \left\{ \varphi^2 \in H_{\Gamma_d}^1(\Omega_2) \times H_{\Gamma_d}^1(\Omega_2) \times H(\partial_3, \Omega_2, \Gamma_s^2 \cup \Gamma_d^2) \mid (\varphi^2 \cdot n)|_{\Gamma_b^2} = 0 \right\} \\ \mathcal{X} &= \left\{ \varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in \mathcal{X}^1 \times \mathcal{X}^2 \mid [\varphi_1]_{\Gamma} = 0 \right\} \end{aligned}$$

Le but de cette section est de prouver que le problème limite (3.35)-(3.51) admet au moins une solution donnée par $(u, P) \in \mathcal{Y}_0 \times \left(L^{\frac{3}{2}}(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2) \right)$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \{m(u^k, u_1^k, \varphi_1^k) + A_1(u^k, \varphi^k)\} + m(u_a^2, u_2^2, \varphi_2^2) + A_2(u^2, \varphi^2) + \\ F^{cor,2}(u^2, \varphi^2) + B(\varphi, P) = \left(\sum_{k=1}^2 l_1(\varphi_1^k) + l_2(\varphi_2^2) \right) \quad (3.54) \end{aligned}$$

$$\forall \varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in \mathcal{X}$$

Pour cela on prouve le principal résultat de ce chapitre.

Théorème 6. (Résultat d'existence) *Etant donnée $\theta_i^{0,k} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s^k)$, $i = 1, 2$, le problème limite (3.35)-(3.51) est équivalent à (3.54), et admet une solution faible $(u, P) \in \mathcal{Y}_0 \times (L^{\frac{3}{2}}(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2))$ telle que*

$$[-P + e_{11}^{\mu}(u)] = 0 \text{ dans } H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Démonstration. A partir des estimations obtenues dans les lemmes 1, 2, et la proposition 4, on en déduit que la solution $(u^{\epsilon,\delta}, P^{\epsilon,\delta}) \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$ est bornée dans $(\mathcal{Y}^1 \times \mathcal{Y}^2) \times (L^{\frac{3}{2}}(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2))$. On peut donc en déduire que lorsque (ϵ, δ) tend vers 0 :

$$u^{\epsilon,\delta} \rightharpoonup u \text{ dans } \mathcal{Y}^1 \times \mathcal{Y}^2, \quad P^{\epsilon,\delta} \rightharpoonup P \text{ dans } L^{\frac{3}{2}}(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$$

et on peut supposer que

$$(u_1^{1,\epsilon,\delta}, u_1^{2,\epsilon,\delta}, u_2^{2,\epsilon,\delta}) \rightarrow (u_1^1, u_1^2, u_2^2) \quad \text{dans} \quad L^4(\Omega_1) \times (L^4(\Omega_2))^2.$$

Ces résultats de compacité sont suffisants pour passer la limite dans la formulation faible (3.52)-(3.53) du problème renormalisé (3.21)-(3.34).

Montrons que la limite $((u^1, u^2), (P^1, P^2)) \in \mathcal{V}_0 \times (L^{\frac{3}{2}}(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2))$ vérifie le modèle limite (3.35)-(3.51)

- Conditions d'interface (3.49), (3.50) :

Par la continuité de l'application trace γ (théorème 1) on a

$$[u_1^{\epsilon,\delta}]_{|\Gamma} = 0 \rightharpoonup [u_1]_{|\Gamma} = 0 \quad \text{lorsque} \quad (\epsilon, \delta) \rightarrow 0.$$

D'où la condition (3.49) est vérifiée.

D'autre part, considérons la condition (3.31)

$$\delta u_2^{1,\epsilon,\delta} = u_2^{2,\epsilon,\delta}.$$

En appliquant la continuité de l'application trace γ_{n_1} (théorème 3) on a

$$\|u_2^{2,\epsilon,\delta}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq \delta \|u_2^{2,\epsilon,\delta}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C\delta \|u_2^{2,\epsilon,\delta}\|_{H(\partial_1, \Omega_1)} \leq C\delta,$$

et en passant à la limite on obtient

$$u_2^2|_{\Gamma} = 0.$$

Ainsi (3.50) est obtenue.

En procédant de même on déduit les conditions de Dirichlet sur $\Gamma_b \cup \Gamma_s \cup \Gamma_d$, et donc la limite $(u, P) \in \mathcal{V}_0 \times (L^{\frac{3}{2}}(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2))$.

- Equations du mouvement (3.35)-(3.37), (3.42)-(3.44) :

Soit maintenant $\varphi_1^1 \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, on choisit $\varphi_1 \in \mathcal{V}$ obtenu du prolongement par 0 de φ_1^1 sur Ω . Posons $\varphi = (\varphi_1^1, 0, 0)$ dans (3.52). En passant à la limite, et après application de la formule de Green (théorème 5) on déduit l'équation (3.35) au sens des distributions. Les autres équations (3.42), (3.43) se déduisent de la même façon.

Les équations (3.36), (3.37), (3.44) sont obtenues à partir de la proposition 4

- Condition d'interface (3.51) :

Pour établir la condition d'interface limite $[-P + e_{11}^\mu(u)]_{|\Gamma} = 0$, on considère $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega)$, et on pose $\varphi = (\varphi_1, 0, 0) \in \mathcal{V}_0$ dans (3.52), alors en passant à la limite on obtient

$$\sum_{k=1}^2 [m(u^k, u_1^k, \varphi_1^k) + T_1(u^k, \varphi^k + b_1(\varphi_1^k, P^k))] = \sum_{k=1}^2 l_1(\varphi_1^k).$$

Par la formule de Green on en déduit

$$\int_{\Gamma} (\sigma_1^\mu(u^1, P^1) \cdot n^1) \varphi_1 = \int_{\Gamma} (\sigma_1^\mu(u^2, P^2) \cdot n^2) \varphi_1.$$

Du fait de la densité de $\mathcal{D}_{\partial\Omega_k \setminus \Gamma}(\Omega_k)$ dans $H_{\partial\Omega_k \setminus \Gamma}^1(\Omega_k)$, cette égalité est vérifiée pour tout $\varphi_1 \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, et on en conclut que

$$-P^1 + e_{11}^\mu(u^1) = -P^2 + e_{11}^\mu(u^2) \quad \text{dans} \quad H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

On peut établir de même les autres conditions du type Neumann sur $\Gamma_s^k \cup \Gamma_b^k$ avec

$$(\tilde{\sigma}^1 \cdot n) \cdot \tau_1 = \theta_1^{0,1} \quad \text{dans} \quad H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_s^1).$$

$$(\tilde{\sigma}^2 \cdot n) \cdot \tau_i = \theta_i^{0,2}, \quad i = 1, 2 \quad \text{dans} \quad H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_s^2)$$

$$\tilde{\sigma}^k \cdot n = 0 \quad \text{dans} \quad (H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_b^k))^3$$

Ainsi la limite $(u, P) \in \mathcal{Y}_0 \times (L^{\frac{3}{2}}(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2))$ vérifie le problème asymptotique (3.35)-(3.51), dont une formulation faible est donnée par (3.54). $\square$

Remarque 3. Le passage à la limite dans (3.29)-(3.34) aboutit aux équations suivantes

$$\begin{cases} [u_1]_{|\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (3.55)$$

$$\begin{cases} u_2^2|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (3.56)$$

$$\begin{cases} e_{21}^{\mu^2}(u^2)|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (3.57)$$

$$\begin{cases} [-P + e_{11}^\mu(u)]_{|\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (3.58)$$

Ainsi à la place des conditions (3.49)-(3.51), on pouvait aussi considérer

$$\begin{cases} [u_1]_{|\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (3.59)$$

$$\begin{cases} e_{21}^{\mu^2}(u^2)|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (3.60)$$

$$\begin{cases} [-P + e_{11}^\mu(u)]_{|\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (3.61)$$

et l'analyse mathématique ci-dessus du problème limite reste valable sous réserve d'adapter les espaces fonctionnels utilisés aux nouvelles conditions d'interface.

Approximation des couplages Oseen/Oseen et Oseen/Navier-Stokes

Dans ce chapitre, on considère la méthode de décomposition de domaine hétérogène (c'est à dire que les opérateurs définissant les sous problèmes sont différents) pour l'étude asymptotique des couplages Osen/Oseen et Oseen/Navier-Stokes. Des résultats d'existence et de convergence sont prouvés

4.1 Décomposition de domaine hétérogène des ENS

On cherche $v = v(y, t)$, et $p = p(y, t)$ satisfaisant les équations de Navier-Stokes suivantes

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v + 2\omega \times v - \nabla \cdot \sigma^\nu(v, \frac{p}{\rho_0}) = \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} \text{ dans } W(\epsilon, \delta) \times (0, T) \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot v = 0 \text{ dans } W(\epsilon, \delta) \times (0, T) \quad (4.2)$$

L'idée est de considérer la décomposition sans recouvrement (3.1) de $W(\epsilon, \delta)$, et de coupler les équations de Navier-Stokes (4.1)-(4.2) restreintes au sous-domaine $W_2(\epsilon, \delta)$ avec les équations de Oseen suivantes

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (u_a \cdot \nabla)v + 2\omega \times v - \nabla \cdot \sigma^\nu(v, \frac{p}{\rho_0}) = \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} \text{ dans } W_1(\epsilon, \delta) \times (0, T) \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot v = 0 \text{ dans } W_1(\epsilon, \delta) \times (0, T). \quad (4.4)$$

Cette méthode de couplage a été introduite dans [45, 44]. Comme dans le chapitre 3, le but est d'obtenir des conditions d'interface admissibles pour ce couplage lorsque (ϵ, δ) tend vers 0.

On considère un champ de vecteur $u_b : W(\epsilon, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $u_b^i = u_b|_{W_i(\epsilon, \delta)}$, $i = 1, 2$ tel que

$$u_b^1 = u_a|_{W_1(\epsilon, \delta)}, \quad u_b^2 = v|_{W_2(\epsilon, \delta)}, \quad [(u_b \cdot n)]|_G = 0. \quad (4.5)$$

Ainsi on résout le problème global suivant :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (u_b \cdot \nabla)v + 2\omega \times v - \nabla \cdot \sigma^\nu(v, \frac{p}{\rho_0}) = \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} \quad \text{dans } W(\epsilon, \delta) \times (0, T) \quad (4.6)$$

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \text{dans } W(\epsilon, \delta) \times (0, T) \quad (4.7)$$

$$(\sigma^\nu(v, \frac{p}{\rho_0}) \cdot n) \cdot \tau_i = \theta_i, \quad i = 1, 2, \quad v \cdot n = 0 \quad \text{sur } G_s \times (0, T) \quad (4.8)$$

$$(\sigma^\nu(v, \frac{p}{\rho_0}) \cdot n) \cdot \tau_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad v \cdot n = 0 \quad \text{dans } G_b \times (0, T) \quad (4.9)$$

$$v = 0 \quad \text{dans } G_d \times (0, T) \quad (4.10)$$

$$v(., t = 0) = 0 \quad \text{dans } W(\epsilon, \delta) \quad (4.11)$$

Les conditions d'interface suivantes

$$\begin{cases} v^1 = v^2 & \text{sur } G \times (0, T) \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\begin{cases} \sigma^{\nu^1}(v^1, \frac{p^1}{\rho_0}) \cdot n = \sigma^{\nu^2}(v^2, \frac{p^2}{\rho_0}) \cdot n & \text{sur } G \times (0, T), \end{cases} \quad (4.13)$$

sont requises afin d'écrire ce problème instationnaire sous forme 2-domaines.

Si l'équation (4.1) est linéaire alors ce problème 2-domaines est indiqué par Oseen/Oseen, sinon par Oseen/Navier-Stokes.

4.2 Multi-modèles renormalisés

En procédant de la même manière qu'à la section 3.4, on dérive le modèle renormalisé suivant sur $\Omega_k \times (0, T)$

$$\frac{\partial u_1^{k, \epsilon, \delta}}{\partial t} + (u_b^k \cdot \nabla)u_1^{k, \epsilon, \delta} - \nabla \cdot e_1^{\mu^k}(u^{k, \epsilon, \delta}) - \delta^{2-k} f^C u_2^{k, \epsilon, \delta} + \frac{\partial P^{k, \epsilon, \delta}}{\partial x_1} = 0 \quad (4.14)$$

$$\delta^{2(2-k)} \left(\frac{\partial u_2^{k, \epsilon, \delta}}{\partial t} + (u_b^k \cdot \nabla)u_2^{k, \epsilon, \delta} - \nabla \cdot e_2^{\mu^k}(u^{k, \epsilon, \delta}) \right) + \delta^{2-k} f^C u_1^{k, \epsilon, \delta} + \frac{\partial P^{k, \epsilon, \delta}}{\partial x_2} = 0 \quad (4.15)$$

$$\epsilon^2 \left(\frac{\partial u_3^{k, \epsilon, \delta}}{\partial t} + (u_b^k \cdot \nabla)u_3^{k, \epsilon, \delta} - \nabla \cdot e_3^{\mu^k}(u^{k, \epsilon, \delta}) \right) + \frac{\partial P^{k, \epsilon, \delta}}{\partial x_3} = 0 \quad (4.16)$$

$$\nabla \cdot u^{k, \epsilon, \delta} = 0 \quad (4.17)$$

Avec les conditions initiale et au bord :

$$u_3^{k, \epsilon, \delta} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_s^k \times (0, T) \quad (4.18)$$

$$\mu_3^k \frac{\partial u_1^{k, \epsilon, \delta}}{\partial x_3} = \epsilon^{-1} \theta_1^k, \quad \delta^{2-k} \mu_3^k \frac{\partial u_2^{k, \epsilon, \delta}}{\partial x_3} = \epsilon^{-1} \theta_2^k \quad \text{sur } \Gamma_s^k \times (0, T) \quad (4.19)$$

$$(\sigma^{\mu^k}(u^{k, \epsilon, \delta}, P^{k, \epsilon, \delta}) \cdot n) \cdot \tau_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad u^{k, \epsilon, \delta} \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_b^k \times (0, T) \quad (4.20)$$

$$u^{k, \epsilon, \delta} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d^k \times (0, T) \quad (4.21)$$

$$u_1^{k, \epsilon, \delta}(., t = 0) = \delta^{2-k} u_2^{k, \epsilon, \delta}(., t = 0) = \epsilon u_3^{k, \epsilon, \delta}(., t = 0) = 0 \quad \text{dans } \Omega_k \quad (4.22)$$

Les conditions de transmissions (4.12)-(4.13) sur Γ deviennent

$$\begin{cases} [u_1^{\epsilon, \delta}] = 0, \quad \delta u_2^{1, \epsilon, \delta} = u_2^{2, \epsilon, \delta}, \quad \epsilon [u_3^{\epsilon, \delta}] = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, T) \end{cases} \quad (4.23)$$

$$\begin{cases} [-P^{\epsilon, \delta} + e_{11}^\mu(u^{\epsilon, \delta})] = \epsilon [e_{31}^\mu(u^{\epsilon, \delta})] = 0, & \text{sur } \Gamma \times (0, T) \end{cases} \quad (4.24)$$

$$\begin{cases} \delta e_{21}^{\mu^1}(u^{1, \epsilon, \delta}) = e_{21}^{\mu^2}(u^{2, \epsilon, \delta}) & \text{sur } \Gamma \times (0, T). \end{cases} \quad (4.25)$$

En outre on suppose que le vecteur de vitesse advective vérifie

$$u_b^k \in L^2(0, T; H_{\Gamma_d^k}^1(\Omega_k)^2 \times H_{\Gamma_d^k \cup \Gamma_s^k}^1(\Omega_k)), (u_b^k \cdot n)|_{\Gamma_b^k} = 0, \text{ et } [u_b \cdot n] = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0, T) \quad (4.26)$$

4.3 Multi-modèles asymptotiques

Le problème limite est obtenu en négligeant les poids ϵ , et δ en facteur dans (4.14)-(4.25).

Ainsi sur Ω_1 , on a les équations limites suivantes

$$\frac{\partial u_1^1}{\partial t} + (u_b^1 \cdot \nabla) u_1^1 - \nabla \cdot \sigma_1^{\mu^1}(u^1, P^1) = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \times (0, T) \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial P^1}{\partial x_2} = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \times (0, T) \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial P^1}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \times (0, T) \quad (4.29)$$

$$\nabla \cdot u^1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \times (0, T) \quad (4.30)$$

$$u_3^1 = 0, (\tilde{\sigma}^1 \cdot n) \cdot \tau_1 = \theta_1^{0,1} \quad \text{sur } \Gamma_s^1 \times (0, T) \quad (4.31)$$

$$u^1 \cdot n = 0, (\tilde{\sigma}^1 \cdot n) \cdot \tau_1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_b^1 \times (0, T) \quad (4.32)$$

$$u_1^1 = (u_2^1 n_2 + u_3^1 n_3) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d^1 \times (0, T) \quad (4.33)$$

$$u_1^1(., t = 0) = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \times (0, T) \quad (4.34)$$

Sur Ω_2 , le modèle est réduit au problème limite suivant

$$\frac{\partial u_1^2}{\partial t} + (u_b^2 \cdot \nabla) u_1^2 - \nabla \cdot \sigma_1^{\mu^2}(u^2, P^2) - f^C u_2^2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_2 \times (0, T) \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial u_2^2}{\partial t} + (u_b^2 \cdot \nabla) u_2^2 - \nabla \cdot \sigma_2^{\mu^2}(u^2, P^2) + f^C u_1^2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_2 \times (0, T) \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial P^2}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dans } \Omega_2 \times (0, T) \quad (4.37)$$

$$\nabla \cdot u^2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_2 \times (0, T) \quad (4.38)$$

$$u_3^2 = 0, (\tilde{\sigma}^2 \cdot n) \cdot \tau_1 = \theta_1^{0,2}, (\tilde{\sigma}^2 \cdot n) \cdot \tau_2 = \theta_2^{0,2} \quad \text{sur } \Gamma_s^2 \times (0, T) \quad (4.39)$$

$$u^2 \cdot n = 0, (\tilde{\sigma}^2 \cdot n) \cdot \tau_i, i = 1, 2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_b^2 \times (0, T) \quad (4.40)$$

$$u_1^2 = u_2^2 = u_3^2 n_3 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d^2 \times (0, T) \quad (4.41)$$

$$u_1^2(., t = 0) = u_2^2(., t = 0) = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \times (0, T) \quad (4.42)$$

Enfin les conditions d'interface asymptotiques sont exprimées par

$$\begin{cases} [u_1] = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \end{cases} \quad (4.43)$$

$$\begin{cases} u_2^2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \end{cases} \quad (4.44)$$

$$\begin{cases} [P + e_{11}^\mu(u)] = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \end{cases} \quad (4.45)$$

4.4 L'espace $\hat{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$

Soit Θ une partie de $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, et $\Sigma \subset \partial\Theta$ une partie de mesure non nulle, continue et lipschitzienne. Soit l'espace des fonctions à divergence nulle suivante

$$\mathbf{V}_{div=0} = \left\{ \varphi \in (H_{\partial\Theta \setminus \Sigma}^1(\Theta))^3 : \nabla \cdot v = 0 \right\}.$$

En notant $\mathbf{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) = (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma))^3$, on définit l'espace de trace suivant qui caractérise particulièrement les fonctions à divergence nulle *

$$\hat{\mathbf{H}}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) = \left\{ \beta \in \mathbf{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) : \int_{\Sigma} (\beta \cdot n) d\sigma = 0 \right\}.$$

C'est un espace de Hilbert pour la norme de $\mathbf{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$. On prouve maintenant le résultat suivant.

Théorème 7. *Il existe un opérateur linéaire continu injectif*

$$R^{div} : \hat{\mathbf{H}}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \longrightarrow \mathbf{V}_{div=0}, \quad \beta \mapsto R^{div}(\beta) = R_{\beta}^{div}, \quad R_{\beta}^{div}|_{\Sigma} = \beta.$$

Démonstration. Soit $\beta \in \hat{\mathbf{H}}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$, on note par $(R_{\beta}^{div}, R_{\beta}^p) \in (H_{\partial\Theta \setminus \Sigma}^1(\Theta))^3 \times L^2(\Theta)$ solution du problème de Stokes :

$$\int_{\Theta} \nabla R_{\beta}^{div} \cdot \nabla \varphi - \int_{\Theta} R_{\beta}^p \nabla \cdot \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in (H_0^1(\Theta))^3 \quad (4.46)$$

$$\int_{\Theta} q \nabla \cdot R_{\beta}^{div} = 0 \quad \forall q \in L^2(\Theta) \quad (4.47)$$

$$R_{\beta}^{div} = \beta \quad \text{sur } \Sigma \quad (4.48)$$

$$R_{\beta}^{div} = 0 \quad \text{sur } \partial\Theta \setminus \Sigma \quad (4.49)$$

On introduit aussi l'opérateur harmonique $\mathbf{H} : \hat{\mathbf{H}}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \longrightarrow (H_{\partial\Theta \setminus \Sigma}^1(\Theta))^3$, $\mathbf{H}(\beta) = \mathbf{H}_{\beta}$ tel que

$$\int_{\Theta} \nabla \mathbf{H}_{\beta} \cdot \nabla \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in (H_0^1(\Theta))^3 \quad (4.50)$$

$$\mathbf{H}_{\beta} = \beta \quad \text{sur } \Sigma \quad (4.51)$$

$$\mathbf{H}_{\beta} = 0 \quad \text{sur } \partial\Theta \setminus \Sigma. \quad (4.52)$$

Par comparaison avec l'opérateur R_{β}^{div} introduit dans (4.46)-(4.49), on voit que pour tout $\beta \in \hat{\mathbf{H}}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ la fonction vectorielle

$$\mathbf{Z}(\beta) = R_{\beta}^{div} - \mathbf{H}_{\beta}$$

satisfait $\mathbf{Z}(\beta) = 0$ sur Σ ; ainsi $\mathbf{Z}(\beta) \in (H_0^1(\Theta))^3$. En prenant $\varphi = \mathbf{Z}(\beta)$ dans (4.46), on obtient

$$\left| \int_{\Theta} \nabla R_{\beta}^{div} \cdot \nabla \mathbf{Z}(\beta) \right| = \left| \int_{\Theta} (\nabla \cdot \mathbf{H}_{\beta}) R_{\beta}^p \right| \leq \|R_{\beta}^p\|_{L^2(\Theta)} \|\mathbf{H}_{\beta}\|_{(H^1(\Theta))^3}.$$

On considère maintenant la fonction $R_{\beta}^p \in L^2(\Theta)$. Par la condition inf-sup Brezzi-Babuska [51], il existe $\psi \in (H_0^1(\Theta))^3$, $\psi \neq 0$, tel que

$$K^0 \|R_{\beta}^p\|_{L^2(\Theta)} \|\psi\|_{(H^1(\Theta))^3} \leq - \int_{\Theta} R_{\beta}^p \nabla \cdot \psi,$$

où $K^0 > 0$ est la constante inf-sup indépendante de β . Puisque $\psi \in (H_0^1(\Theta))^3$, on peut utiliser (4.46), et on obtient

$$K^0 \|R_{\beta}^p\|_{L^2(\Theta)} \|\psi\|_{(H^1(\Theta))^3} \leq \left| \int_{\Theta} \nabla R_{\beta}^{div} \cdot \nabla \psi \right| \leq \|R_{\beta}^{div}\|_{H^1(\Theta)^3} \|\psi\|_{H^1(\Theta)^3}$$

Ainsi

$$\|R_{\beta}^p\|_{L^2(\Theta)} \leq \frac{1}{K^0} \|R_{\beta}^{div}\|_{H^1(\Theta)^3}, \quad \forall \beta \in \hat{\mathbf{H}}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma).$$

*. Dans la suite $\hat{\mathbf{H}}_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ dénote le dual topologique de $\hat{\mathbf{H}}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$, Σ étant une partie de mesure non nulle, lipschitzienne de la frontière $\partial\Theta$ d'un domaine $\Theta \subset \mathbb{R}^d$

En utilisant maintenant l'inégalité de Poincaré (théorème 4) et les relations ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}
\|R_\beta^{div}\|_{H^1(\Theta)}^2 &\leq (1 + C_\Theta) \int_\Theta \nabla R_\beta^{div} \cdot \nabla R_\beta^{div} \\
&= (1 + C_\Theta) \left[\int_\Theta \nabla R_\beta^{div} \cdot \nabla \mathbf{Z}(\beta) + \int_\Theta \nabla R_\beta^{div} \cdot \nabla \mathbf{H}_\beta \right] \\
&\leq (1 + C_\Theta) \left[\|R_\beta^p\|_{L^2(\Theta)} \|\mathbf{H}_\beta\|_{(H^1(\Theta))^3} + \|R_\beta^{div}\|_{H^1(\Theta)^3} \|\mathbf{H}_\beta\|_{H^1(\Theta)^3} \right] \\
&\leq (1 + C_\Theta) \left(1 + \frac{1}{K^0}\right) \|R_\beta^{div}\|_{H^1(\Theta)^3} \|\mathbf{H}_\beta\|_{(H^1(\Theta))^3}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\|R_\beta^{div}\| &\leq (1 + C_\Theta) \left(1 + \frac{1}{K^0}\right) \|\mathbf{H}_\beta\|_{(H^1(\Theta))^3} \\
&\leq \alpha^* (1 + C_\Theta) \left(1 + \frac{1}{K^0}\right) \|\beta\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\Sigma))^3}
\end{aligned}$$

La dernière inégalité se déduit du fait que $\mathbf{H}_\beta$ est une extension harmonique de β ; donc il existe une constante positive $\alpha^* > 0$ indépendante de β telle que (voir [63])

$$\|\mathbf{H}_\beta\|_{H_{\partial\Theta\setminus\Sigma}^1(\Theta)^3} \leq \alpha^* \|\mathbf{H}_\beta|_\Sigma\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\Sigma))^3} = \alpha^* \|\beta\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\Sigma))^3}$$

Comme $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ avec injection continue on obtient que

$$\|R_\beta^{div}\| \leq C\alpha^* (1 + C_\Theta) \left(1 + \frac{1}{K^0}\right) \|\beta\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma))^3}$$

□

4.5 Espaces de fonctions à divergence nulle

Introduisons maintenant les espaces de fonctions à divergence nulle que nous utiliserons pour l'analyse asymptotique des multi-modèles.

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{div}^k &= \left\{ \varphi^k \in \mathcal{V}^k \mid \nabla \cdot \varphi^k = 0 \right\} \\
\mathcal{V}_{div,0}^k &= \left\{ \varphi^k \in \mathcal{V}_{div}^k \mid \varphi_i^k|_\Gamma = 0, \quad i = 2, 3 \right\}, \quad \mathcal{V}_{div,00}^k = \left\{ \varphi^k \in \mathcal{V}_{div,0}^k \mid \varphi_1^k|_\Gamma = 0 \right\} \\
\mathcal{V}_{div} &= \left\{ \varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in \mathcal{V}_{div}^1 \times \mathcal{V}_{div}^2 \mid [\varphi_1]_\Gamma = [\varphi_3]_\Gamma = 0, \delta\varphi_2|_\Gamma = \varphi_2^2|_\Gamma \right\} \\
\mathcal{V}_{div,0} &= \left\{ \varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in \mathcal{V}_{div,0}^1 \times \mathcal{V}_{div,0}^2 \mid [\varphi_1]_\Gamma = 0 \right\} \subset \mathcal{V}, \\
\mathcal{Y}_{div}^1 &= \left\{ \varphi^1 \in \mathcal{Y}^1 \mid \nabla \cdot \varphi^1 = 0 \right\}, \quad \mathcal{Y}_{div}^2 = \left\{ \varphi^2 \in \mathcal{Y}^2 \mid \nabla \cdot \varphi^2 = 0 \right\} \\
\mathcal{Y}_{div} &= \left\{ \varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in \mathcal{Y}_{div}^1 \times \mathcal{Y}_{div}^2 \mid [\varphi_1]_\Gamma = 0 \right\} \\
\mathcal{Y}_{div,0} &= \left\{ \varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in \mathcal{Y}_{div} \mid \varphi_2^2|_\Gamma = 0 \right\}
\end{aligned}$$

4.6 Approximation de la solution faible

Dans la suite $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ indique la dualité entre W et son dual topologique W' .

4.6.1 Formulations faibles

Supposons $\theta_1^{0,k}, \theta_2^{0,k} \in L^2(0, T; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s^k))$, alors en utilisant [84], il existe $u^{\epsilon, \delta} \in L^2(0, T; \mathcal{V}_{div}) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$ solution faible de (4.14)-(4.25) donnée par

$$\int_0^T E(u^{\epsilon, \delta}, \varphi) dt + \int_0^T M(u_b, u^{\epsilon, \delta}, \varphi) dt - \int_0^T A(u^{\epsilon, \delta}, \varphi) dt - \int_0^T F^{cor}(u^{\epsilon, \delta}, \varphi) dt = - \int_0^T L(\varphi) dt \quad (4.53)$$

$\forall \varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in H^1(0, T; \mathcal{V}_{div}), \varphi(T) = 0$. Les formes faibles E, M, A et F^{cor} sont définies dans la section 3.6.

Une formulation faible en espace-temps du problème limite (4.27)-(4.45) est : trouver $u \in L^2(0, T; \mathcal{Y}_{div,0})$ tel que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \left[\int_0^T E_1(u_1^k, \varphi_1^k) dt + \int_0^T m(u_b^k, u_1^k, \varphi_1^k) dt - \int_0^T A_1(u^k, \varphi^k) dt \right] + \int_0^T E_2(u_2^k, \varphi_2^k) dt + \int_0^T m(u_b^k, u_2^k, \varphi_2^k) dt - \int_0^T A_2(u^k, \varphi^k) dt - \\ \int_0^T C^2(u^k, \varphi^k) dt = - \sum_{k=1}^2 \left[\int_0^T l_1(\varphi_1^k) dt + \int_0^T l_2(\varphi_2^k) dt \right] \quad (4.54) \end{aligned}$$

$\forall \varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in H^1(0, T; \mathcal{V}_{div,0}), \varphi(T) = 0$.

4.6.2 Estimations à priori

Choisissons des fonctions test du type $\phi(t)\varphi(x)$, $\phi \in \mathcal{D}(0, T)$, $\varphi \in \mathcal{V}_{div}$, alors (4.53) devient : trouver $u^{\epsilon, \delta} \in L^2(0, T; \mathcal{V}_{div})$ tel que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{d}{dt} \left((u_1^{k, \epsilon, \delta}, \varphi_1^k)_{0, \Omega_k} + \delta^{2(2-k)} (u_2^k, \varphi_2^k)_{0, \Omega_k} + \epsilon^2 (u_3^k, \varphi_3^k)_{0, \Omega_k} \right) + \right. \\ \left((u_1^k, u_b^k \cdot \nabla \varphi_1^k)_{0, \Omega_k} + \delta^{2(2-k)} (u_2^k, u_b^k \cdot \nabla \varphi_2^k)_{0, \Omega_k} + \epsilon^2 (u_3^k, u_b^k \cdot \nabla \varphi_3^k)_{0, \Omega_k} \right) - \\ \left((e_1^{\mu^k}(u^k), \nabla \varphi_1^k)_{0, \Omega_k} - \delta^{2(2-k)} (e_2^{\mu^k}(u^k), \nabla \varphi_2^k)_{0, \Omega_k} - \epsilon^2 (e_3^{\mu^k}(u^k), \nabla \varphi_3^k)_{0, \Omega_k} \right) + \\ \left. \delta^{2-k} \left(f^k(u_2^k, \varphi_1^k)_{0, \Omega_k} - f^k(u_1^k, \varphi_2^k)_{0, \Omega_k} \right) \right\} \\ = - \sum_{k=1}^2 \left\{ (\theta_1^{0,k}, \varphi_1^k)_{0, \Gamma_s^k} + \delta^{(2-k)} (\theta_2^{0,k}, \varphi_2^k)_{0, \Omega_k} \right\} \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T) \quad (4.55) \end{aligned}$$

$\forall \varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in \mathcal{V}$.

En posant $\varphi = u^{\epsilon, \delta}$, puis en procédant comme à la section 3.7 pour les termes visqueux, on obtient la relation suivante

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{d}{dt} \left(\|u_1^{k,\epsilon,\delta}\|_{L^2(\Omega_k)}^2 + \delta^{2(2-k)} \|u_2^{k,\epsilon,\delta}\|_{L^2(\Omega_k)}^2 + \epsilon^2 \|u_3^{k,\epsilon,\delta}\|_{L^2(\Omega_k)}^2 \right) + \right. \\
& \quad \left(\|u_1^{k,\epsilon,\delta}\|_{H^1(\Omega_k)}^2 + \delta^{2(2-k)} \|u_2^{k,\epsilon,\delta}\|_{H^1(\Omega_k)}^2 + \epsilon^2 \|u_3^{k,\epsilon,\delta}\|_{H^1(\Omega_k)}^2 \right) + \\
& \quad \left. \left(\|e_{1j}^{\mu^k}(u^{k,\epsilon,\delta})\|_{L^2(\Omega_k)}^2 + \delta^{2(2-k)} \|e_{2j}^{\mu^k}(u^{k,\epsilon,\delta})\|_{L^2(\Omega_k)}^2 + \epsilon^2 \|e_{3j}^{\mu^k}(u^{k,\epsilon,\delta})\|_{L^2(\Omega_k)}^2 \right) \right\} \\
& \leq \sum_{k=1}^2 \left| (\theta_1^{0,k}, u_1^{k,\epsilon,\delta})_{0,\Gamma_s^k} \right| + \delta^{(2-k)} \left| (\theta_2^{0,k}, u_2^{k,\epsilon,\delta})_{0,\Gamma_s^k} \right|, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.56)
\end{aligned}$$

Ce qui donne après application de la continuité de la trace (théorème 3), les inégalités de Poincaré horizontale et verticale (proposition 3), et l'inégalité classique de Young au second membre de (4.56), les estimations suivantes.

Proposition 5. *On a :*

- a) $(u_1^{k,\epsilon,\delta}, \delta^{2-k} u_2^{k,\epsilon,\delta}, \epsilon u_3^{k,\epsilon,\delta})$ est borné dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_k)^3)$, et dans $L^2(0, T; H^1(\Omega_k)^3)$.
- b) $(e_{1j}^{\mu^k}(u^{k,\epsilon,\delta}), \delta^{2-k} e_{2j}^{\mu^k}(u^{k,\epsilon,\delta}), \epsilon e_{3j}^{\mu^k}(u^{k,\epsilon,\delta}))$, $j = 1, 2, 3$ est borné dans $L^2(0, T; L^2(\Omega_k)^3)$
- c) $(u_2^{1,\epsilon,\delta}, u_3^{1,\epsilon,\delta}, u_3^{2,\epsilon,\delta})$ est borné dans $L^2(0, T; L^2(\Omega_1)^2 \times L^2(\Omega_2))$.

4.6.3 Estimations pour les termes non linéaires

Pour prendre la limite du terme de convection non linéaire, on aura besoin d'une convergence au sens fort des vitesses horizontales dans la partie Ω_2 . Pour cela on applique le théorème de *compacité par perturbation* prouvé par P. Azerad et F. Guillén [14].

Considérons les espaces de Hilbert

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^k &= \left\{ \varphi^k \in C_{\Gamma_d^k}^\infty(\Omega_k) \times C_{\Gamma_d^k \cup \Gamma}^\infty(\Omega_k) \times C_{\Gamma_d^k \cup \Gamma_s^k \cup \Gamma}^\infty(\Omega_k) : \nabla \cdot \varphi^k = 0, (\varphi^k \cdot n)|_{\Gamma_b^k} = 0 \right\} \\
\mathcal{Z}_0^k &= \left\{ \varphi^k \in \mathcal{Z}^k : \varphi_1^k|_{\Gamma} = 0, \nabla \cdot \varphi^k = 0, (\varphi^k \cdot n)|_{\Gamma_b^k} = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

$$\mathcal{B}_{\mathcal{H}}^2 = \overline{\mathcal{P}_{\mathcal{H}}^2 \mathcal{Z}_0^2}^{(L^2)^2}, \quad \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^2 = \overline{\mathcal{P}_{\mathcal{H}}^2 \mathcal{Z}_0^2}^{(H^1)^2}, \quad \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}^2 = \overline{\mathcal{P}_{\mathcal{H}}^2 \mathcal{Z}_0^2}^{(H^2)^2}$$

où $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}^2$ est la projection horizontale

$$\mathcal{P}_{\mathcal{H}}^2 : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Par le théorème de plongement de Sobolev-Rellich on déduit

$$\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}^2 \hookrightarrow \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^2 \hookrightarrow \mathcal{B}_{\mathcal{H}}^2 \equiv \mathcal{B}_{\mathcal{H}}^{2'} \hookrightarrow \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^{2'} \hookrightarrow \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}^{2'}. \quad (4.57)$$

où tous les plongements sont d'image dense et compacte. Notons $u^{2,\epsilon,\delta}(t+l)$ par $\tau_l u^{2,\epsilon,\delta}(t)$, on a le résultat suivant dans Ω_2 .

Proposition 6. *On a l'estimation*

$$\|\tau_l u_{\mathcal{H}}^{2,\epsilon,\delta} - u_{\mathcal{H}}^{2,\epsilon,\delta}\|_{L^\infty(0, T-l, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}^{2'})} \leq \mathbf{C}(l^{\frac{1}{4}} + \epsilon + \delta).$$

Démonstration. Considérons la formulation faible (4.53) pour le couplage Oseen/Navier-Stokes donnée

par : $u^{\epsilon, \delta} \in L^2(0, T; \mathcal{V}) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$ tel que

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^2 \left(\frac{d}{dt} \left((u_1^{k, \epsilon, \delta}, \varphi_1^k)_{0, \Omega_k} + \delta^{2(2-k)} (u_2^{k, \epsilon, \delta}, \varphi_2^k)_{0, \Omega_k} + \epsilon^2 (u_3^{k, \epsilon, \delta}, \varphi_3^k)_{0, \Omega_k} \right) \right) \\
& + (u_1^{1, \epsilon, \delta}, u_b^1 \cdot \nabla \varphi_1^1)_{0, \Omega_1} + \delta^2 (u_2^{1, \epsilon, \delta}, u_b^1 \cdot \nabla \varphi_2^1)_{0, \Omega_1} + \epsilon^2 (u_3^{1, \epsilon, \delta}, u_b^1 \cdot \varphi_3^1)_{0, \Omega_1} \\
& + (u_1^{2, \epsilon, \delta}, u^{2, \epsilon, \delta} \cdot \nabla \varphi_1^2)_{0, \Omega_2} + (u_2^{2, \epsilon, \delta}, u^{2, \epsilon, \delta} \cdot \nabla \varphi_2^2)_{0, \Omega_2} + \epsilon^2 (u_3^{2, \epsilon, \delta}, u^{2, \epsilon, \delta} \cdot \nabla \varphi_3^2)_{0, \Omega_2} \\
& \sum_{k=1}^2 \left(- (e_1^{\mu^k} (u^{k, \epsilon, \delta}), \nabla \varphi_1^k)_{0, \Omega_k} - \delta^{2(2-k)} (e_{2j}^{\mu^k} (u^{k, \epsilon, \delta}), \nabla \varphi_2^k)_{0, \Omega_k} \right. \\
& \left. - \epsilon^2 (e_3^{\mu^k} (u^{k, \epsilon, \delta}), \nabla \varphi_3^k)_{0, \Omega_k} - \delta^{2-k} (-f^C (u_2^{k, \epsilon, \delta}, \varphi_1^k)_{0, \Omega_k} + f^C (u_1^{k, \epsilon, \delta}, \varphi_2^k)_{0, \Omega_k}) \right) \\
& = - \sum_{k=1}^2 \left((\theta_1^{0, k}, \varphi_1^k)_{0, \Gamma_s^k} + \delta^{(2-k)} (\theta_2^{0, k}, \varphi_2^k)_{0, \Gamma_s^k} \right) \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T) \quad (4.58)
\end{aligned}$$

$\forall \varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in \mathcal{V}$.

Donc

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left((u_1^{2, \epsilon, \delta}, \varphi_1^2)_{0, \Omega_2} + (u_2^{2, \epsilon, \delta}, \varphi_2^2)_{0, \Omega_2} + \epsilon^2 (u_3^{2, \epsilon, \delta}, \varphi_3^2)_{0, \Omega_2} \right) \\
& + (u_1^{2, \epsilon, \delta}, u^{2, \epsilon, \delta} \cdot \nabla \varphi_1^2)_{0, \Omega_2} + (u_2^{2, \epsilon, \delta}, u^{2, \epsilon, \delta} \cdot \nabla \varphi_2^2)_{0, \Omega_2} + \epsilon^2 (u_3^{2, \epsilon, \delta}, u^{2, \epsilon, \delta} \cdot \nabla \varphi_3^2)_{0, \Omega_2} - \\
& \sum_{j=1}^3 \left\{ (e_{1j}^{\mu^2} (u^{2, \epsilon, \delta}), \partial_j \varphi_1^2)_{0, \Omega_2} + (e_{2j}^{\mu^2} (u^{2, \epsilon, \delta}), \partial_j \varphi_2^2)_{0, \Omega_2} + \epsilon^2 (e_{3j}^{\mu^2} (u^{2, \epsilon, \delta}), \partial_j \varphi_3^2)_{0, \Omega_2} \right\} \\
& + f^C (u_2^{2, \epsilon, \delta}, \varphi_1^2)_{0, \Omega_2} - f^C (u_1^{2, \epsilon, \delta}, \varphi_2^2)_{0, \Omega_2} \\
& = - (\theta_1^{0, 2}, \varphi_1^2)_{0, \Gamma_s^2} - (\theta_2^{0, 2}, \varphi_2^2)_{0, \Gamma_s^2} \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T) \quad (4.59)
\end{aligned}$$

$\forall \varphi^2 \in \mathcal{V}_{00}^2$.

Pour tout $\varphi_{\mathcal{H}}^2 = (\varphi_1^2, \varphi_2^2) \in \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}^2$, il existe une extension à divergence nulle $\varphi^2 = (\varphi_{\mathcal{H}}^2, \varphi_3^2) \in H_{\Gamma_d \cup \Gamma}^2(\Omega_2) \times H_{\Gamma_d \cup \Gamma}^2(\Omega_2) \times H_{\Gamma_d \cup \Gamma_s \cup \Gamma}^1(\partial_3, \Omega_2)$, $\varphi^2 \cdot n|_{\Gamma_b^2} = 0$, $\nabla \cdot \varphi^2$ (voir [14]) telle que

$$\|\varphi_3^2\|_{H^1(\Omega_2)} + \|\partial_3 \varphi_3^2\|_{H^1(\Omega_2)} \leq \mathbf{C} \|\varphi_{\mathcal{H}}^2\|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}^2}. \quad (4.60)$$

Choisissons $\varphi^2 = (\varphi_{\mathcal{H}}^2, \varphi_3^2)$ comme fonction test dans (4.59), et intégrons sur $(t, t+l)$:

$$\begin{aligned}
& (\pi u_{\mathcal{H}}^{2, \epsilon, \delta}(t) - u_{\mathcal{H}}^{2, \epsilon, \delta}(t), \varphi_{\mathcal{H}}^2)_{0, \Omega_2} + \epsilon^2 (\pi u_3^{2, \epsilon, \delta}(t) - u_3^{2, \epsilon, \delta}(t), \varphi_3^2)_{0, \Omega_2} \\
& = \int_t^{t+l} g^{2, \epsilon, \delta}(s) ds
\end{aligned} \quad (4.61)$$

où

$$\begin{aligned}
g^{2, \epsilon, \delta}(s) &= (u_{\mathcal{H}}^{2, \epsilon, \delta}, u^{2, \epsilon, \delta} \cdot \nabla \varphi_{\mathcal{H}}^2)_{0, \Omega_2} + \epsilon^2 (u_3^{2, \epsilon, \delta}, u^{2, \epsilon, \delta} \cdot \nabla \varphi_3^2)_{0, \Omega_2} \\
& - \sum_{j=1}^3 \{ (e_{1j}^{\mu^2} (u^{2, \epsilon, \delta}), \partial_j \varphi_1^2)_{0, \Omega_2} + (e_{2j}^{\mu^2} (u^{2, \epsilon, \delta}), \partial_j \varphi_2^2)_{0, \Omega_2} + \epsilon^2 (e_{3j}^{\mu^2} (u^{2, \epsilon, \delta}), \partial_j \varphi_3^2)_{0, \Omega_2} \} \\
& + f^C (u_2^{2, \epsilon, \delta}, \varphi_1^2)_{0, \Omega_2} - f^C (u_1^{2, \epsilon, \delta}, \varphi_2^2)_{0, \Omega_2} + (\theta_1^{0, 2}, \varphi_1^2)_{0, \Gamma_s^2} + (\theta_2^{0, 2}, \varphi_2^2)_{0, \Gamma_s^2}.
\end{aligned}$$

Estimons maintenant chacun des termes contenus dans $g^{2, \epsilon, \delta}$.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz le terme linéaire vérifie

$$\begin{aligned}
(e_{ij}^{\mu^2}(u^{2,\epsilon,\delta}), \partial_j \varphi_i^2)_{0,\Omega_2} &\leq \|e_{ij}^{\mu^2}(u^{2,\epsilon,\delta})\|_{L^2(\Omega_2)} \|\varphi_i^2\|_{H^1(\Omega_2)}, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3; \\
(\epsilon e_{3j}^{\mu^2}(u^{2,\epsilon,\delta}), \partial_j \varphi_3^2)_{0,\Omega_2} &\leq \epsilon \|e_{3j}^{\mu^2}(u^{2,\epsilon,\delta})\|_{L^2(\Omega_2)} \|\varphi_3^2\|_{H^1(\Omega_2)}, \quad j = 1, 2, 3 \\
f^C(u_2^{2,\epsilon,\delta}, \varphi_1^2)_{0,\Omega_2} &\leq \mathbf{C} \|u_2^{2,\epsilon,\delta}\|_{L^2(\Omega_2)} \|\varphi_1^2\|_{L^2(\Omega_2)} \\
f^C(u_1^{2,\epsilon,\delta}, \varphi_2^2)_{0,\Omega_2} &\leq \mathbf{C} \|u_1^{2,\epsilon,\delta}\|_{L^2(\Omega_2)} \|\varphi_2^2\|_{L^2(\Omega_2)} \\
(\theta_i^{0,2}, \varphi_i^2)_{0,\Gamma_s^2} &\leq \|\theta_i^{0,2}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_s^2)} \|\varphi_i^2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s^2)}, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Par la proposition 5, ces termes sont bornés dans $L^2(0, T)$.

Pour le terme non linéaire on a

$$(u_{\mathcal{H}}^{2,\epsilon,\delta}, u^{2,\epsilon,\delta} \cdot \nabla \varphi_{\mathcal{H}}^2)_{0,\Omega_2} \leq \|u_{\mathcal{H}}^{2,\epsilon,\delta}\|_{L^3(\Omega_2)} \|u^{2,\epsilon,\delta}\|_{L^2(\Omega_2)} \|\varphi_{\mathcal{H}}^2\|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}^2}.$$

En utilisant l'équation d'incompressibilité, on obtient

$$\epsilon^2 (u^{2,\epsilon,\delta} \cdot \nabla \varphi_3^2, u_3^{2,\epsilon,\delta})_{0,\Omega_2} \leq \mathbf{C} \|\epsilon u^{2,\epsilon,\delta}\|_{L^3(\Omega_2)} \|\nabla(\epsilon u_3^{2,\epsilon,\delta})\|_{H^1(\Omega_2)} \|\varphi_{\mathcal{H}}^2\|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}^2}.$$

Par la proposition 5, et par interpolation entre $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_2))$ et $L^2(0, T; L^6(\Omega_2))$ on a $u_{\mathcal{H}}^{2,\epsilon,\delta}$ est borné dans $L^4(0, T; L^3(\Omega_2))$. Par ailleurs comme $u^{2,\epsilon,\delta}$ est borné dans $L^2(0, T; L^2(\Omega_2))$ on obtient les estimations suivantes

$$\begin{aligned}
\|(u_{\mathcal{H}}^{2,\epsilon,\delta}, u^{2,\epsilon,\delta} \cdot \nabla v_{\mathcal{H}}^2)_{0,\Omega_2}\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T)} &\leq \mathbf{C} \\
\|\epsilon^2 (u^{2,\epsilon,\delta} \cdot \nabla \varphi_3^2, u_3^{2,\epsilon,\delta})_{0,\Omega_2}\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T)} &\leq \mathbf{C}
\end{aligned}$$

Ainsi en utilisant (4.60), et les majorations précédentes, on obtient

$$\|g^{2,\epsilon,\delta}\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T)} \leq \mathbf{C} \|\varphi_{\mathcal{H}}^2\|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}^2}, \quad (4.62)$$

Après avoir appliqué l'inégalité de Hölder à (4.62), on a

$$\int_t^{t+l} |g^{\epsilon,\delta}| dt \leq \mathbf{C} l^{1/4} \|\varphi_{\mathcal{H}}^2\|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}^2}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
|\epsilon^2 (\tau_l u_3^{2,\epsilon,\delta}(t) - u_3^{2,\epsilon,\delta}(t), v_3^2)| &\leq \epsilon \{ \|\tau_l(\epsilon u_3^{2,\epsilon,\delta})(t)\|_{L^2} + \|u_3^{2,\epsilon,\delta}(t)\|_{L^2(\Omega_2)} \} \|\varphi_3^2\|_{L^2(\Omega_2)} \\
&\leq \epsilon \mathbf{C} \|\varphi_{\mathcal{H}}^2\|_{\mathcal{Y}_{\mathcal{H}}^2}.
\end{aligned}$$

Finalement la proposition 5 permet de conclure, car

$$\|\tau_l u_{\mathcal{H}}^{2,\epsilon,\delta} - u_{\mathcal{H}}^{2,\epsilon,\delta}\|_{L^\infty(0, T-l, \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}^{2'})} \leq \mathbf{C}(l^{\frac{1}{4}} + \epsilon + \delta).$$

□

4.7 Sens de la condition de Dirichlet à l'interface

Dans cette partie on démontre le résultat d'existence et de convergence suivant qui permet de donner un sens mathématique aux conditions (4.43), (4.43) :

$$[u_1] = u_2^2 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times (0, T)$$

Théorème 8. (Résultat d'existence et de convergence)

Etant donné $\theta_1^{0,k}, \theta_2^{0,k} \in L^2(0, T; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s^k))$, le problème limite (4.27)-(4.45) admet au moins une solution faible $u = (u^1, u^2) \in L^2(0, T; \mathcal{Y}_{div}^1) \times L^2(0, T; \mathcal{Y}_{div}^2)$, avec $[u_1]_{|\Gamma} = u_2^2|_{\Gamma} = 0$ donnée par (4.54); elle est obtenue comme limite lorsque $(\epsilon, \delta) \rightarrow 0$ de la solution $u^{\epsilon,\delta} \in L^2(0, T; \mathcal{V}_{div}) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$ exprimée par (4.53).

4.7.1 Preuve du théorème pour le cas Oseen/Oseen

Par la proposition 5, on peut supposer qu'il existe une sous-suite encore notée $(u^{1,\epsilon,\delta}, u^{2,\epsilon,\delta})$ telle que pour $(\epsilon, \delta) \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} (u_1^{1,\epsilon,\delta}, \delta u_2^{1,\epsilon,\delta}, \epsilon u_3^{1,\epsilon,\delta}) &\xrightarrow{*} (u_1^{1,0}, \tilde{u}_2^{1,0}, \tilde{u}_3^{1,0}) \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1)^3) \\ (u_1^{2,\epsilon,\delta}, u_2^{2,\epsilon,\delta}, \epsilon u_3^{2,\epsilon,\delta}) &\xrightarrow{*} (u_1^{2,0}, u_2^{2,0}, \tilde{u}_3^{2,0}) \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_2)^3) \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} (u_1^{1,\epsilon,\delta}, \delta u_2^{1,\epsilon,\delta}, \epsilon u_3^{1,\epsilon,\delta}) &\rightharpoonup (u_1^1, \tilde{u}_2^1, \tilde{u}_3^1) \text{ dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_d^1}^1(\Omega_1)^2 \times H_{\Gamma_d^1 \cup \Gamma_s^1}^1(\Omega_1)) \\ (u_1^{2,\epsilon,\delta}, u_2^{2,\epsilon,\delta}, \epsilon u_3^{2,\epsilon,\delta}) &\rightharpoonup (u_1^2, u_2^2, \tilde{u}_3^2) \text{ dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_d^2}^1(\Omega_2)^2 \times H_{\Gamma_d^2 \cup \Gamma_s^2}^1(\Omega_2)) \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} u_i^{1,\epsilon,\delta} &\rightharpoonup u_i^1 \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega_1)), \quad i = 2, 3 \\ u_3^{2,\epsilon,\delta} &\rightharpoonup u_3^2 \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega_2)). \end{aligned} \quad (4.65)$$

En utilisant (4.63) et (4.64) :

$$\begin{aligned} e_{1j}^{\mu^1}(u^{1,\epsilon,\delta}) &\rightharpoonup e_{1j}^{\mu^1}(u^1), \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega_1)) \quad j = 2, 3 \\ e_{ij}^{\mu^2}(u^{2,\epsilon,\delta}) &\rightharpoonup e_{ij}^{\mu^2}(u^2), \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega_2)) \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Comme $L^2(0, T; H^1(\Omega_k)) \subset L^2(0, T; L^2(\Omega_k))$ on a

$$\begin{aligned} (u_1^{1,0}, \tilde{u}_2^{1,0}, \tilde{u}_3^{1,0}) &= (u_1^1, \tilde{u}_2^1, \tilde{u}_3^1) \in L^2(0, T; H_{\Gamma_d^1}^1(\Omega_1)^2 \times H_{\Gamma_d^1 \cup \Gamma_s^1}^1(\Omega_1)) \\ (u_1^{2,0}, u_2^{2,0}, \tilde{u}_3^{2,0}) &= (u_1^2, u_2^2, \tilde{u}_3^2) \in L^2(0, T; H_{\Gamma_d^2}^1(\Omega_2)^2 \times H_{\Gamma_d^2 \cup \Gamma_s^2}^1(\Omega_2)). \end{aligned}$$

De plus par (4.63) et (4.64), l'équation de continuité $\nabla \cdot u^{k,\epsilon,\delta} = 0$ devient $\nabla \cdot u^k = 0$.

Pour prendre la limite des conditions $[u_1^{\epsilon,\delta}]_\Gamma = 0$, $u_2^{2,\epsilon,\delta}|_\Gamma = \delta u_2^{1,\epsilon,\delta}|_\Gamma$, et $(u^{k,\epsilon,\delta} \cdot n)|_{\Gamma_s^k \cup \Gamma_b^k \cup \Gamma_d^k} = 0$, il suffit d'appliquer la propriété de continuité de la trace (théorème 1), et de la trace normale (théorème 2). On obtient ainsi $[u_1]_\Gamma = u_2^2|_\Gamma = 0 = (u^k \cdot n)|_{\Gamma_s^k \cup \Gamma_b^k \cup \Gamma_d^k}$. Finalement $u = (u^1, u^2) \in L^2(0, T; \mathcal{Y}_{div,0})$. La proposition 5 donne également $\tilde{u}_2^1 = \tilde{u}_3^1 = \tilde{u}_3^2 = 0$.

Dans (4.53), choisissons maintenant $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in H^1(0, T; \mathcal{V}_{div,0})$ avec $\varphi(T) = 0$ comme fonction test, et faisons tendre (ϵ, δ) vers 0

Par (4.63)

$$\begin{aligned} \int_0^T E(u^{\epsilon,\delta}, \varphi) dt &\longrightarrow \int_0^T \sum_{k=1}^2 E_1(u_1^k, \varphi_1^k) dt + \int_0^T E_2(u_2^2, \varphi_2^2) dt \\ \int_0^T C(u^{\epsilon,\delta}, \varphi) dt &\longrightarrow \int_0^T C^2(u^2, \varphi^2) dt \end{aligned}$$

Par (4.66)

$$\int_0^T A(u^{\epsilon,\delta}, \varphi) dt \longrightarrow \sum_{k=1}^2 \int_0^T A_1(u^k, \varphi^k) dt + \int_0^T A_2(u^2, \varphi^2) dt$$

Pour le terme advectif linéaire, (4.26) montre que $u_a^k \cdot \nabla \varphi_i^k \in L^1(0, T; L^2(\Omega_k))$, et par (4.63) on en déduit que :

$$\int_0^T M(u_a, u^{\epsilon,\delta}, \varphi) dt \longrightarrow \sum_{k=1}^2 \int_0^T m(u_a^k, u_1^k, \varphi_1^k) dt + \int_0^T m(u_a^2, u_2^2, \varphi_2^2) dt$$

Le second membre de (4.53) devient :

$$\int_0^T L(\varphi) dt \longrightarrow \sum_{k=1}^2 \int_0^T l_1(\varphi_1^k) dt + \int_0^T l_2(\varphi_2^2) dt$$

Finalement la limite $u = (u^1, u^2) \in L^2(0, T; \mathcal{Y}_{div,0})$ est solution de (4.54).

4.7.2 Preuve du théorème pour le cas Oseen/Navier-Stokes

Pour ce cas, la preuve du théorème 8 s'inspire de [14]. En effet, la majoration établie dans la proposition 6 permet de mieux contrôler les termes d'advection non linéaires sur Ω_2 en appliquant le critère de compacité par perturbation [14][†].

Comme dans le cas précédent, les propositions 5 et 6 montrent que $u^{\epsilon,\delta} = (u^{1,\epsilon,\delta}, u^{2,\epsilon,\delta})$ est borné dans $L^2(0, T; \mathcal{Y}_0)$, et $u_{\mathcal{H}}^{2,\epsilon,\delta}$ est borné dans $L^\infty(0, T; \mathcal{B}_{\mathcal{H}}^2)$. Donc il existe une sous-suite, encore notée $u^{\epsilon,\delta}$ telle que

$$\begin{aligned} u^{\epsilon,\delta} &= (u^{1,\epsilon,\delta}, u^{2,\epsilon,\delta}) \rightharpoonup u = (u^1, u^2) \quad \text{dans } L^2(0, T, \mathcal{Y}_0) \\ u_{\mathcal{H}}^{2,\epsilon,\delta} &\xrightarrow{*} u_{\mathcal{H}}^2 \quad \text{dans } L^\infty(0, T, \mathcal{B}_{\mathcal{H}}^2) \end{aligned}$$

Cette convergence faible nous permet de prendre la limite dans tous les termes linéaires de

$$\begin{aligned} \int_0^T E(u^{\epsilon,\delta}, \varphi) dt + \int_0^T M_1(u_a^1, u^{1,\epsilon,\delta}, \varphi^1) dt + \int_0^T M_2(u^{2,\epsilon,\delta}, u^{2,\epsilon,\delta}, \varphi^2) dt \\ - \int_0^T A(u^{\epsilon,\delta}, v) dt + \int_0^T F^{cor}(u^{\epsilon,\delta}, \varphi) dt = - \int_0^T L(\varphi) dt \quad (4.67) \end{aligned}$$

$\forall \varphi = (\varphi^1, \varphi^2) \in H^1(0, T; \mathcal{V}_{div,0})$, $\varphi(T) = 0$

Examinons le terme non linéaire de (4.67) : comme $\varphi_i^2 \in H^1(0, T; H^1(\Omega_2)) \subset \mathcal{C}(0, T; H^1(\Omega_2))^\ddagger$, par l'inégalité de Cauchy Schwartz on obtient

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \int_0^T \int_{\Omega_2} u_i^{2,\epsilon,\delta} u_3^{2,\epsilon,\delta} \partial_i \varphi_3^2 dx dt &\leq \mathbf{C}(\epsilon + \delta) \quad i = 1, 2 \\ \epsilon^2 \int_0^T \int_{\Omega_2} u_3^{2,\epsilon,\delta} u_3^{2,\epsilon,\delta} \partial_3 \varphi_3^2 dx dt &\leq \mathbf{C}(\epsilon + \delta) \end{aligned}$$

et tous ces termes tendent vers 0 lorsque (ϵ, δ) tend vers zéro.

Les termes $\int_0^T \int_{\Omega_2} u_i^{2,\epsilon,\delta} u_j^{2,\epsilon,\delta} \partial_j \varphi_i^2 dx dt$, $\int_0^T \int_{\Omega_2} u_i^{2,\epsilon,\delta} u_3^{2,\epsilon,\delta} \partial_3 \varphi_i^2 dx dt$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ sont estimés comme suit : en utilisant les propositions 5 et 6, on peut maintenant appliquer le théorème de compacité par perturbation [14] (theorem 5.1, pour $p = 2$, et les espaces $\mathcal{W}_{\mathcal{H}}^2 \xrightarrow{\text{compact}} \mathcal{B}_{\mathcal{H}}^2 \hookrightarrow \mathcal{Y}_{\mathcal{H}}^{2'}$). Il existe alors une sous-suite, encore notée $u^{2,\epsilon,\delta}$ telle que

$$u_{\mathcal{H}}^{2,\epsilon,\delta} \rightarrow u_{\mathcal{H}}^2 \quad \text{dans } L^2(0, T; L^2(\Omega_2)^2) \equiv L^2((0, T) \times \Omega_2)^2.$$

Par la proposition 5, $u_{\mathcal{H}}^{2,\epsilon,\delta}$ est borné dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_2)^2) \cap L^2(0, T; L^6(\Omega_2)^2)$, et par interpolation $u_{\mathcal{H}}^{2,\epsilon,\delta}$ est borné dans $L^{10/3}(0, T; L^{10/3}(\Omega_2)^2)$.

Encore par interpolation, on a pour tout $q : 2 \leq q \leq 10/3$ il existe $\alpha : 0 < \alpha \leq 1$ tel que

$$\|u_{\mathcal{H}}^{2,\epsilon,\delta} - u_{\mathcal{H}}^2\|_{L^q(\Omega_2)} \leq \|u_{\mathcal{H}}^{2,\epsilon,\delta} - u_{\mathcal{H}}^2\|_{L^2(\Omega_2)}^\alpha \|u_{\mathcal{H}}^{2,\epsilon,\delta} - u_{\mathcal{H}}^2\|_{L^{10/3}(\Omega_2)}^{1-\alpha}.$$

[†]. Ce résultat est une amélioration du critère classique de compacité par translation de Riesz-Fréchet-Kolmogorov [2]

[‡]. D'une manière générale : Soit V un espace de Banach, p un réel, $1 \leq p \leq \infty$, pour tout $f \in L^2(0, T; V)$ tel que $\frac{df}{dt} \in L^2(0, T; V)$, alors f admet un représentant continu sur $[0, T]$ ou encore f appartient à $\mathcal{C}(0, T; V)$.

Pour plus de détails sur cette inclusion on peut consulter l'ouvrage de R. E. Edwards [43].

Ainsi

$$u_{\mathcal{H}}^{2,\epsilon,\delta} \rightarrow u_{\mathcal{H}}^2 \text{ dans } L^q(0, T, L^q(\Omega_2)) \quad \forall q : 2 \leq q \leq 10/3. \quad (4.68)$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et (4.68)

$$u_i^{2,\epsilon,\delta} u_j^{2,\epsilon,\delta} \rightarrow u_i^2 u_j^2 \text{ dans } L^r(0, T, L^r(\Omega_2)) \quad \forall r : 1 \leq r \leq 5/3, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2$$

Par interpolation entre $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_2))$ et $L^2(0, T; L^6(\Omega_2))$, $u_i^{2,\epsilon,\delta}$ et $u_j^{2,\epsilon,\delta}$ sont bornés dans $L^{8/3}(0, T, L^4(\Omega_2))$, et donc $u_i^{2,\epsilon,\delta} u_j^{2,\epsilon,\delta}$ est borné dans $L^{4/3}(0, T, L^2(\Omega_2))$, finalement

$$u_i^{2,\epsilon,\delta} u_j^{2,\epsilon,\delta} \rightharpoonup u_i^2 u_j^2 \text{ dans } L^{4/3}(0, T, L^2(\Omega_2)), \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2$$

Comme $\varphi_i^2 \in \mathcal{C}(0, T; H^1(\Omega_2))$, $i = 1, 2$, on a

$$\partial_j \varphi_i^2 \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega_2)) \subset L^4(0, T, L^2(\Omega_2)) \equiv L^{4/3}(0, T, L^2(\Omega_2))', \quad j = 1, 2$$

et

$$\int_0^T \int_{\Omega_2} u_i^{2,\epsilon,\delta} u_j^{2,\epsilon,\delta} \partial_j \varphi_i^2 \, dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega_2} u_i^2 u_j^2 \partial_j \varphi_i^2 \, dx dt, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2.$$

Pour le dernier terme $\int_0^T \int_{\Omega_2} u_i^{2,\epsilon,\delta} u_3^{2,\epsilon,\delta} \partial_3 \varphi_i^2 \, dx dt$, on a d'une part

$$u_3^{2,\epsilon,\delta} \rightharpoonup u_3^2 \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega_2)).$$

Par l'inégalité de Hölder et (4.68)

$$u_i^{2,\epsilon,\delta} u_3^{2,\epsilon,\delta} \rightharpoonup u_i^2 u_3^2 \text{ dans } L^s(0, T, L^s(\Omega_2)), \quad \forall s : 1 \leq s < 5/4, \quad i = 1, 2$$

D'autre part, $u_i^{2,\epsilon,\delta} u_3^{2,\epsilon,\delta}$ est borné dans $L^{8/7}(0, T, L^{4/3}(\Omega_2))$, donc

$$u_i^{2,\epsilon,\delta} u_3^{2,\epsilon,\delta} \rightharpoonup u_i^2 u_3^2 \text{ dans } L^{8/7}(0, T, L^{4/3}(\Omega_2)), \quad i = 1, 2,$$

et

$$\int_0^T \int_{\Omega_2} u_i^{2,\epsilon,\delta} u_3^{2,\epsilon,\delta} \partial_3 \varphi_i^2 \, dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega_2} u_i^2 u_3^2 \partial_3 \varphi_i^2 \, dx dt, \quad i = 1, 2$$

Ainsi $u = (u^1, u^2) \in L^2(0, T; \mathcal{Y}_{div,0})$ est une solution faible du problème limite Oseen/Navier-Stokes (4.27)-(4.45) exprimée par (4.54).

4.8 Sens de la condition de Neumann à l'interface

Dans cette partie, on s'intéresse à la convergence des termes de pression pour déduire la condition d'interface de type Neumann

$$\left[(\sigma_1^\mu(u, P) \cdot n) \right]_{|\Gamma} = 0.$$

En appliquant le lemme de de Rham [78, 84] à la formulation (4.53), les termes de potentiel définis dans (4.14)-(4.16) sont pris au sens des distributions avec $P^{k,\epsilon,\delta} \in W^{-1,\infty}(0, T; L^2(\Omega_k))$, $\nabla P^{k,\epsilon,\delta} \in W^{-1,\infty}(0, T; H^{-1}(\Omega_k)^3)$, et

$$\begin{pmatrix} \partial_t u_1^{1,\epsilon,\delta} + u_a^1 \cdot \nabla u_1^{1,\epsilon,\delta} - \nabla \cdot e_1^{\mu^1}(u^{1,\epsilon,\delta}) - \delta f^C u_2^{1,\epsilon,\delta} \\ \delta^2 (\partial_t u_2^{1,\epsilon,\delta} + u_a^1 \cdot \nabla u_2^{1,\epsilon,\delta} - \nabla \cdot e_2^{\mu^1}(u^{1,\epsilon,\delta})) + \delta f^C u_1^{1,\epsilon,\delta} \\ \epsilon^2 (\partial_t u_3^{1,\epsilon,\delta} + u_a^1 \cdot \nabla u_3^{1,\epsilon,\delta} - \nabla \cdot e_3^{\mu^1}(u^{1,\epsilon,\delta})) \end{pmatrix} = -\nabla P^{1,\epsilon,\delta} \quad (4.69)$$

dans $H^{-1}(0, T; H^{-1}(\Omega_1)^3)$, et

$$\begin{pmatrix} \partial_t u_1^{2,\epsilon,\delta} + u^{2,\epsilon,\delta} \cdot \nabla u_1^{2,\epsilon,\delta} - \nabla \cdot e_1^{\mu^2}(u^{2,\epsilon,\delta}) - f^C u_2^{2,\epsilon,\delta} \\ \partial_t u_2^{2,\epsilon,\delta} + u^{2,\epsilon,\delta} \cdot \nabla u_2^{2,\epsilon,\delta} - \nabla \cdot e_2^{\mu^2}(u^{2,\epsilon,\delta}) + f^C u_1^{2,\epsilon,\delta} \\ \epsilon^2 (\partial_t u_3^{2,\epsilon,\delta} + u^{2,\epsilon,\delta} \cdot \nabla u_3^{2,\epsilon,\delta} - \nabla \cdot e_3^{\mu^2}(u^{2,\epsilon,\delta})) \end{pmatrix} = -\nabla P^{2,\epsilon,\delta} \quad (4.70)$$

dans $H^{-1}(0, T; H^{-1}(\Omega_2)^3)$.

Soit $(u^1, u^2) \in L^2(0, T; \mathcal{Y}_{div,0})$ une solution du problème limite (4.27)-(4.45) donnée par (4.54), on a le résultat de convergence suivant.

Théorème 9. (Résultat de convergence) *Il existe $(P^1, P^2) \in W^{-1,\infty}(0, T; L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2))$ vérifiant (4.27)-(4.45). De plus $\nabla P^{k,\epsilon,\delta} \rightharpoonup \nabla P^k$ dans $H^{-1}(0, T; H^{-1}(\Omega_k)^3)$ pour le modèle Oseen/Oseen, et $\nabla P^{1,\epsilon,\delta} \rightharpoonup \nabla P^1$ dans $H^{-1}(0, T; H^{-1}(\Omega_1)^3)$, $\nabla P^{2,\epsilon,\delta} \xrightarrow{*} \nabla P^2$ dans $H^{-1}(0, T; W^{-1,\frac{3}{2}}(\Omega_2)^3)$ pour le modèle Oseen/Navier-Stokes.*

Démonstration.

• **Existence de P^k :**

Soit $\varphi^k \in \mathcal{D}(0, T; H_0^1(\Omega_k)^3)$ tel que $\nabla \cdot \varphi^k = 0$, et soit φ l'extension de φ^k par 0 sur Ω . Alors $\varphi \in \mathcal{D}(0, T; \mathcal{V}_{div,0})$, et (4.54) donne respectivement sur Ω_1 et Ω_2 :

$$\int_0^T E_1(u_1^1, \varphi_1^1) dt + \int_0^T d_1(u_a^1, u_1^1, \varphi_1^1) dt - \int_0^T T_1(u^1, \varphi^1) dt = - \int_0^T l_1(\varphi_1^1) dt \quad (4.71)$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^T E_1(u_1^2, \varphi_1^2) dt + \int_0^T d_1(u_a^2, u_1^2, \varphi_1^2) dt - \int_0^T T_1(u^2, \varphi^2) dt \\ + \int_0^T E_2(u_2^2, \varphi_2^2) dt + \int_0^T d_2(u_a^2, u_2^2, \varphi_2^2) dt - \int_0^T T_2(u^2, \varphi^2) dt \\ + \int_0^T C^2(u^2, \varphi^2) dt = - \int_0^T (l_1(\varphi_1^2) dt + \int_0^T l_2(\varphi_2^2) dt) \end{aligned} \quad (4.72)$$

Choisissons maintenant dans (4.71) et (4.72) les fonctions tests $\tilde{\varphi}^k = \phi(t)\varphi^k(x)$, avec $\varphi^k \in (H_0^1(\Omega_k))^3$, $\nabla \cdot \varphi^k = 0$, et $\phi \in \mathcal{D}(0, T)$; on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} ((u_1^1, \varphi_1^1)_{0,\Omega_1}) + (u_1^1, u_a^1 \cdot \nabla \varphi_1^1)_{0,\Omega_1} - \sum_{j=1}^3 (e_{1j}^{\mu^1}(u^1), \partial_j \varphi_1^1)_{0,\Omega_1} \\ = -(\theta_1^{0,1}, \varphi_1^1)_{0,\Gamma_s^1} \text{ dans } \mathcal{D}'([0, T]) \end{aligned} \quad (4.73)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} ((u_1^2, \varphi_1^2)_{0,\Omega_2}) + (u_1^2, u_a^2 \cdot \nabla \varphi_1^2)_{0,\Omega_2} - \sum_{j=1}^3 (e_{1j}^{\mu^2}(u^2), \partial_j \varphi_1^2)_{0,\Omega_2} \\ + \frac{d}{dt} ((u_2^2, \varphi_2^2)_{0,\Omega_2}) + (u_2^2, u_a^2 \cdot \nabla \varphi_2^2)_{0,\Omega_2} - \sum_{j=1}^3 (e_{2j}^{\mu^2}(u^2), \partial_j \varphi_2^2)_{0,\Omega_2} \\ + f^C(u_2^{2,\epsilon,\delta}, \varphi_2^2)_{0,\Omega_2} - f^C(u_1^{2,\epsilon,\delta}, \varphi_2^2)_{0,\Omega_2} \\ = -(\theta_1^{0,2}, \varphi_1^2)_{0,\Gamma_s^2} - (\theta_2^{0,2}, \varphi_2^2)_{0,\Gamma_s^2} \text{ dans } \mathcal{D}'([0, T]) \end{aligned} \quad (4.74)$$

En appliquant maintenant dans (4.73), (4.74), la version du lemme de de Rham [78, 84] prouvée par J. Simon [82], on déduit que les termes de potentiel de $P^k \in \mathcal{D}'([0, T]; L^2(\Omega_k))$ sont donnés par

$$\begin{pmatrix} \partial_t u_1^1 + u_a^1 \cdot \nabla u_1^1 - \nabla \cdot e_1^{\mu^1}(u^1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\nabla P^1, \quad (4.75)$$

$$\begin{pmatrix} \partial_t u_1^2 + u_a^2 \cdot \nabla u_1^2 - \nabla \cdot e_1^{\mu^2}(u^2) - f^C u_2^2 \\ \partial_t u_2^2 + u_a^2 \cdot \nabla u_2^2 - \nabla \cdot e_2^{\mu^2}(u^2) + f^C u_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\nabla P^2 \quad (4.76)$$

• **Régularité de P^k :**

Montrons que $\nabla P^k \in W^{-1,\infty}(0, T; H^{-1}(\Omega_k))$.

* *Estimation des termes d'inertiels*

comme

$$u_1^1 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1)) \subset L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega_1)),$$

et

$$u_i^2 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_2)) \subset L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega_2)) \quad i = 1, 2,$$

on a

$$\begin{aligned} (u_1^1, \partial_t u_1^1) &\in (L^1(0, T; H^{-1}(\Omega_1)))^2 \subset W^{-1,\infty}(0, T; H^{-1}(\Omega_1))^2 \\ (u_i^2, \partial_t u_i^2) &\in (L^1(0, T; H^{-1}(\Omega_2)))^2 \subset W^{-1,\infty}(0, T; H^{-1}(\Omega_2))^2 \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

* *Estimation des termes de visqueux*

Comme

$$\begin{aligned} \|\partial_j e_{1j}^{\mu^1}(u^1)\|_{H^{-1}(\Omega_1)} &\leq \|e_{1j}^{\mu^1}(u^1)\|_{L^2(\Omega_1)} \quad j = 1, 2, 3, \quad u^1 \in L^2(0, T; \mathcal{Y}^1) \\ \|\partial_j e_{ij}^{\mu^2}(u^2)\|_{H^{-1}(\Omega_2)} &\leq \|e_{ij}^{\mu^2}(u^2)\|_{L^2(\Omega_2)} \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3, \quad u^2 \in L^2(0, T; \mathcal{Y}^2), \end{aligned}$$

on obtient donc pour $i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \partial_j e_{1j}^{\mu^1}(u^1) &\in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega_1)), \quad \partial_j e_{ij}^{\mu^2}(u^2) \in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega_2)) \\ \partial_j e_{1j}^{\mu^1}(u^1) &\in W^{-1,\infty}(0, T; H^{-1}(\Omega_1)), \quad \partial_j e_{ij}^{\mu^2}(u^2) \in W^{-1,\infty}(0, T; H^{-1}(\Omega_2)). \end{aligned}$$

Finalement

$$\nabla \cdot e_1^\mu(u^1) \in W^{-1,\infty}(0, T; H^{-1}(\Omega_1)), \quad \nabla \cdot e_i^\mu(u^2) \in W^{-1,\infty}(0, T; H^{-1}(\Omega_2)), \quad i = 1, 2.$$

* *Estimation des termes advectifs*

Examinons maintenant les termes advectifs

$$u_a^1 \cdot \nabla u_1^1 = \nabla \cdot (u_1^1 u_a^1), \quad u_a^2 \cdot \nabla u_i^2 = \nabla \cdot (u_i^2 u_a^2), \quad i = 1, 2.$$

Par les théorèmes d'injection de Sobolev on a

$$u_1^1 \in L^2(0, T; L^6(\Omega_1)), \quad u_i^2 \in L^2(0, T; L^6(\Omega_2)), \quad i = 1, 2$$

En utilisant l'hypothèse (4.26), on a

$$u_1^1 u_{a,j}^1 \in L^1(0, T; L^2(\Omega_1)) \quad j = 1, 2, 3; \quad u_i^2 u_{a,j}^2 \in L^1(0, T; L^2(\Omega_2)), \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3.$$

Finalement

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (u_1^1 u_a^1) &\in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega_1)) \subset W^{-1, \infty}(0, T; H^{-1}(\Omega_1)) \\ \nabla \cdot (u_i^2 u_a^2) &\in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega_2)) \subset W^{-1, \infty}(0, T; H^{-1}(\Omega_2)), \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

En conséquence on obtient

$$\nabla P^k \in W^{-1, \infty}(0, T; H^{-1}(\Omega_k))$$

et donc par [82] on a

$$P^k \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega_k)).$$

• **Convergence de $\nabla P^{k, \epsilon, \delta}$:**

En utilisant les résultats de convergence donnés dans la preuve du théorème 8, nous obtenons les relations de convergence suivantes

* *Pour le modèle Oseen/Oseen :*

$$\partial_1 P^{1, \epsilon, \delta} \rightharpoonup \partial_1 P^1 \text{ dans } H^{-1}(0, T; H^{-1}(\Omega_1)), \quad \partial_i P^{2, \epsilon, \delta} \rightharpoonup \partial_i P^2 \text{ dans } H^{-1}(0, T; H^{-1}(\Omega_2)) \quad i = 1, 2.$$

et

$$\|\partial_2 P^{1, \epsilon, \delta}\|_{H^{-1}(0, T; H^{-1}(\Omega_1))} \leq \mathbf{C}\delta, \quad \|\partial_3 P^{k, \epsilon, \delta}\|_{H^{-1}(0, T; H^{-1}(\Omega_k))} \leq \mathbf{C}\epsilon.$$

Donc

$$\nabla P^{k, \epsilon, \delta} \rightharpoonup \nabla P^k \quad \text{dans } H^{-1}(0, T; H^{-1}(\Omega_k)^3).$$

* *Pour le modèle Oseen/Navier-Stokes :*

De manière similaire, pour le modèle Oseen/Navier-Stokes, on a

$$\partial_1 P^{1, \epsilon, \delta} \rightharpoonup \partial_1 P^1 \text{ dans } H^{-1}(0, T; H^{-1}(\Omega_1)), \quad \partial_i P^{2, \epsilon, \delta} \overset{*}{\rightharpoonup} \partial_i P^2 \text{ dans } H^{-1}(0, T; W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_2)) \quad i = 1, 2$$

et

$$\|\partial_2 P^{1, \epsilon, \delta}\|_{H^{-1}(0, T; H^{-1}(\Omega_1))} \leq \mathbf{C}\delta, \quad \|\partial_3 P^{k, \epsilon, \delta}\|_{H^{-1}(0, T; H^{-1}(\Omega_k))} \leq \mathbf{C}\epsilon.$$

Finalement on conclut que

$$\begin{aligned}\nabla P^{1, \epsilon, \delta} &\rightharpoonup \nabla P^1 \quad \text{dans } H^{-1}(0, T; H^{-1}(\Omega_1)^3) \\ \nabla P^{2, \epsilon, \delta} &\overset{*}{\rightharpoonup} \nabla P^2 \quad \text{dans } H^{-1}(0, T; W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega_2)^3).\end{aligned}$$

□

Nous sommes maintenant en mesure de donner un sens mathématique à la condition d'interface de Neumann. Pour cela si $\beta_1 \in \hat{\Lambda}(\Gamma) = \left\{ \beta_1 \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) : \int_{\Gamma} \beta_1 d\sigma = 0 \right\}$, on a $\beta = (\beta_1, 0, 0) \in \hat{\mathbf{H}}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, et comme dans le théorème 7, il existe une extension à divergence nulle $R_{\beta}^k \in H_{\Gamma_d^k \cup \Gamma_b^k \cup \Gamma_s^k}^1(\Omega_k) \cup H_0^1(\Omega_k)^2$, $R_{\beta|_{\Gamma}}^k = \beta = (\beta_1, 0, 0)$. En posant $(\varphi^1, \varphi^2) = (R_{\beta}^1, R_{\beta}^2)$ dans (4.54), on obtient

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^2 \left(\frac{d}{dt} (u_1^k, R_{1, \beta}^k)_{0, \Omega_k} + (u_1^k, u_a^k \cdot \nabla R_{1, \beta}^k)_{0, \Omega_k} - \sum_{j=1}^3 (e_{1j}^{\mu^k}(u^k), \partial_j R_{1, \beta}^k)_{0, \Omega_k} \right) \\&\quad \frac{d}{dt} (u_2^2, R_{2, \beta}^2)_{0, \Omega_2} + (u_2^2, u_a^2 \cdot \nabla R_{2, \beta}^2)_{0, \Omega_2} - (e_{2j}^{\mu^2}(u^2), \partial_j R_{2, \beta}^2)_{0, \Omega_2} \\&\quad + f^C(u_2^{2, \epsilon, \delta}, \varphi_1^2)_{0, \Omega_2} - f^C(u_1^{2, \epsilon, \delta}, \varphi_2^2)_{0, \Omega_2} \\&\quad = - \left(\sum_{k=1}^2 (\theta_1^{0, k}, R_{1, \beta}^k)_{0, \Omega_k} + (\theta_2^{0, 2}, R_{2, \beta}^2)_{0, \Omega_2} \right) \quad \text{dans } \mathcal{D}'([0, T]).\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green (théorème 5) et les résultats précédents de ∇P^k (4.75),(4.76), on a

$$\left\langle -P^1 n_1 + e_1^{\mu^1}(u^1) \cdot n, \beta_1 \right\rangle_{\hat{\Lambda}} = \left\langle -P^2 n_1 + e_1^{\mu^2}(u^2) \cdot n, \beta_1 \right\rangle_{\hat{\Lambda}} \quad \text{dans } \mathcal{D}'([0, T]), \forall \beta_1 \in \hat{\Lambda}(\Gamma)$$

Donc

$$\left[\sigma_1^\mu(u, P) \cdot n \right] = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'([0, T]; [\hat{\Lambda}(\Gamma)]').$$

Ainsi le résultat suivant est démontré.

Corollaire 1. *La solution limite $((u^1, P^1), (u^2, P^2))$ vérifie la condition d'interface*

$$\left[\sigma_1^\mu(u, P) \cdot n \right] = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'([0, T]; [\hat{\Lambda}(\Gamma)]').$$

Conditions de traction sur Γ_s^k

On pose

$$\hat{\Lambda}(\Gamma_s^k) = \left\{ \beta_3 \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s^k) : \int_{\Gamma_s^k} \beta_3 d\sigma = 0 \right\}$$

Soit $\beta_3 \in \hat{\Lambda}(\Gamma_s^1)$, on a $\beta = (0, 0, \beta_3) \in \hat{\mathbf{H}}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s^1)$. Soit $R_\beta^1 \in H_{\Gamma_d^1 \cup \Gamma_b^1 \cup \Gamma}^1(\Omega_1) \cup H_0^1(\Omega_1)^2$ une extension de β . On considère R_β un prolongement par 0 sur Ω_2 de R_β^1 . Posons $\varphi = R_\beta$ dans (4.54)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \left(\frac{d}{dt} (u_1^k, R_{1,\beta}^k)_{0,\Omega_k} + (u_1^k, u_a^k \cdot \nabla R_{1,\beta}^k)_{0,\Omega_k} - \sum_{j=1}^3 (e_{1j}^{\mu^k}(u^k), \partial_j R_{1,\beta}^k)_{0,\Omega_k} \right) \\ & \quad \frac{d}{dt} (u_2^2, R_{2,\beta}^2)_{0,\Omega_2} + (u_2^2, u_a^2 \cdot \nabla R_{2,\beta}^2)_{0,\Omega_2} - (e_{2j}^{\mu^2}(u^2), \partial_j R_{2,\beta}^2)_{0,\Omega_2} \\ & \quad + f^C(u_2^{2,\epsilon,\delta}, \varphi_1^2)_{0,\Omega_2} - f^C(u_1^{2,\epsilon,\delta}, \varphi_2^2)_{0,\Omega_2} \\ & \quad = - \left(\sum_{k=1}^2 (\theta_1^{0,k}, R_{1,\beta}^k)_{0,\Omega_k} + (\theta_2^{0,2}, R_{2,\beta}^2)_{0,\Omega_2} \right) \quad \text{dans } \mathcal{D}'([0, T]) \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green (théorème 5) on a

$$\left\langle -P^1 n_1 + e_1^{\mu^1}(u^1) \cdot n, \beta_1 \right\rangle_{\hat{\Lambda}(\Gamma_s^1)} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'([0, T]), \forall \beta_1 \in \hat{\Lambda}(\Gamma_s^1)$$

$n = (0, 0, 1)$ étant la normale unité extérieure sur la surface de référence Γ_s^1 , on déduit que

$$\mu_3^1 \frac{\partial u_1^1}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'([0, T]; [\hat{\Lambda}(\Gamma_s^1)]')$$

On procède de la même manière pour établir les égalités suivantes

$$\mu_3^1 \frac{\partial u_2^1}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'([0, T]; [\hat{\Lambda}(\Gamma_s^1)]'),$$

$$\mu_3^2 \frac{\partial u_i^2}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'([0, T]; [\hat{\Lambda}(\Gamma_s^2)]'), \quad i = 1, 2$$

Conditions de traction sur Γ_b^k

Soit $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \hat{\mathbf{H}}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_b^k)$, et $R_\beta^k \in H_{\Gamma_d^k \cup \Gamma_s^k \cup \Gamma}^1(\Omega_i)^3$, $\nabla \cdot R_\beta^k = 0$, $R_\beta^k|_{\Gamma_b^k} = \beta$. On considère R_β un prolongement par 0 sur $\Omega \setminus \Omega_k$ de R_β^k . Ainsi (4.54) devient

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \left(\frac{d}{dt} (u_1^k, R_{1,\beta}^k)_{0,\Omega_k} + (u_1^k, u_a^k \cdot \nabla R_{1,\beta}^k)_{0,\Omega_k} - \sum_{j=1}^3 (e_{1j}^{\mu^k}(u^k), \partial_j R_{1,\beta}^k)_{0,\Omega_k} \right) \\ & \quad \frac{d}{dt} (u_2^2, R_{2,\beta}^2)_{0,\Omega_2} + (u_2^2, u_a^2 \cdot \nabla R_{2,\beta}^2)_{0,\Omega_2} - (e_{2j}^{\mu^2}(u^2), \partial_j R_{2,\beta}^2)_{0,\Omega_2} \\ & \quad + f^C(u_2^{2,\epsilon,\delta}, \varphi_1^2)_{0,\Omega_2} - f^C(u_1^{2,\epsilon,\delta}, \varphi_2^2)_{0,\Omega_2} \\ & \quad = - \left(\sum_{k=1}^2 (\theta_1^{0,k}, R_{1,\beta}^k)_{0,\Omega_k} + (\theta_2^{0,2}, R_{2,\beta}^2)_{0,\Omega_2} \right) \quad \text{dans } \mathcal{D}'([0, T]) \end{aligned}$$

En utilisant la formule d'intégration de Green (théorème 5), on obtient

$$\tilde{\sigma}^k(u^k, P^k) \cdot n = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'([0, T]; \hat{\mathbf{H}}_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_b^k)).$$

Approximation des équations avec surface libre

Dans ce chapitre, nous analysons les équations de Navier-Stokes avec surface libre. Le système limite est intégré entre le fond et la surface libre de la jonction pour obtenir une formulation hauteur-vitesse (équations des eaux peu-profondes). On applique ensuite des méthodes itératives de décomposition de domaine pour une approximation du modèle obtenu.

5.1 Modèle asymptotique

On considère le système des équations de Navier-Stokes (2.23)-(2.24) dans le sous-domaine $W_k(\epsilon, \delta)(t)$ en tenant compte de l'opérateur de diffusion $-\Delta_\eta$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_1^k}{\partial t} + v^k \cdot \nabla v_1^k - f^C v_2^k \right) - \Delta_{\eta^k} v_1^k + \frac{\partial p^k}{\partial y_1} = 0 \quad (5.1)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_2^k}{\partial t} + v^k \cdot \nabla v_2^k + f^C v_1^k \right) - \Delta_{\eta^k} v_2^k + \frac{\partial p^k}{\partial y_2} = 0 \quad (5.2)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_3^k}{\partial t} + v^k \cdot \nabla v_3^k \right) - \Delta_{\eta^k} v_3^k + \frac{\partial p^k}{\partial y_3} = -\rho g \quad (5.3)$$

$$\nabla \cdot v^k = 0. \quad (5.4)$$

Pour cette formulation, les conditions Dirichlet-Neumann (2.27)-(2.28) sont maintenant considérées sur l'interface, et on a

$$\begin{cases} [v]_{|G(t)} = 0 \\ \left[-\frac{1}{\rho_0} p n + \nabla_\nu v \cdot n \right]_{|G(t)} = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\quad (5.6)$$

Par ailleurs on suppose que ρ est constante, et on pose

$$\tilde{g} = g\epsilon, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

Pour simplifier les notations on suppose aussi que $\mu_1^k = \mu_2^k = \mu_3^k = \mu_0^k > 0$.

En utilisant les changements d'échelle (2.29) et de renormalisation (2.32), (2.33), le modèle 2-domaines (5.1)-(5.6) est transcrit sur $\Omega(t)$ par

$$\frac{\partial u_1^{k,\epsilon,\delta}}{\partial t} + u^{k,\epsilon,\delta} \cdot \nabla u_1^{k,\epsilon,\delta} - \mu_0^k \Delta u_1^{k,\epsilon,\delta} - \delta^{2-k} f^C u_2^{k,\epsilon,\delta} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^{k,\epsilon,\delta}}{\partial x_1} = 0 \quad (5.7)$$

$$\delta^{2(2-k)} \left(\frac{\partial u_2^{k,\epsilon,\delta}}{\partial t} + u^{k,\epsilon,\delta} \cdot \nabla u_2^{k,\epsilon,\delta} - \mu_0^k \Delta u_2^{k,\epsilon,\delta} \right) + \delta^{2-k} f^C u_1^k + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^{k,\epsilon,\delta}}{\partial x_2} = 0 \quad (5.8)$$

$$\epsilon^2 \left(\frac{\partial u_3^{k,\epsilon,\delta}}{\partial t} + u^{k,\epsilon,\delta} \cdot \nabla u_3^{k,\epsilon,\delta} - \mu_0^k \Delta u_3^{k,\epsilon,\delta} \right) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^{k,\epsilon,\delta}}{\partial x_3} = -\frac{\rho}{\rho_0} \tilde{g} \quad (5.9)$$

$$\nabla \cdot u^{k,\epsilon,\delta} = 0 \quad (5.10)$$

$$\left[u_1^{\epsilon,\delta} \right]_{|\Gamma(t)} = 0 \quad (5.11)$$

$$\delta u_2^{1,\epsilon,\delta} \big|_{\Gamma(t)} = u_2^{2,\epsilon,\delta} \big|_{\Gamma(t)} \quad (5.12)$$

$$\epsilon \left[u_3^{\epsilon,\delta} \right]_{|\Gamma(t)} = 0 \quad (5.13)$$

$$\left[-\frac{1}{\rho_0} p^{\epsilon,\delta} + \mu_0 \frac{\partial u_1^{\epsilon,\delta}}{\partial x_1} \right]_{|\Gamma(t)} = 0 \quad (5.14)$$

$$\epsilon \left[\mu_0 \frac{\partial u_3^{\epsilon,\delta}}{\partial x_1} \right]_{|\Gamma(t)} = 0 \quad (5.15)$$

$$\delta \mu_0^1 \frac{\partial u_2^{1,\epsilon,\delta}}{\partial x_1} \big|_{\Gamma(t)} = \mu_0^2 \frac{\partial u_2^{2,\epsilon,\delta}}{\partial x_1} \big|_{\Gamma(t)} \quad (5.16)$$

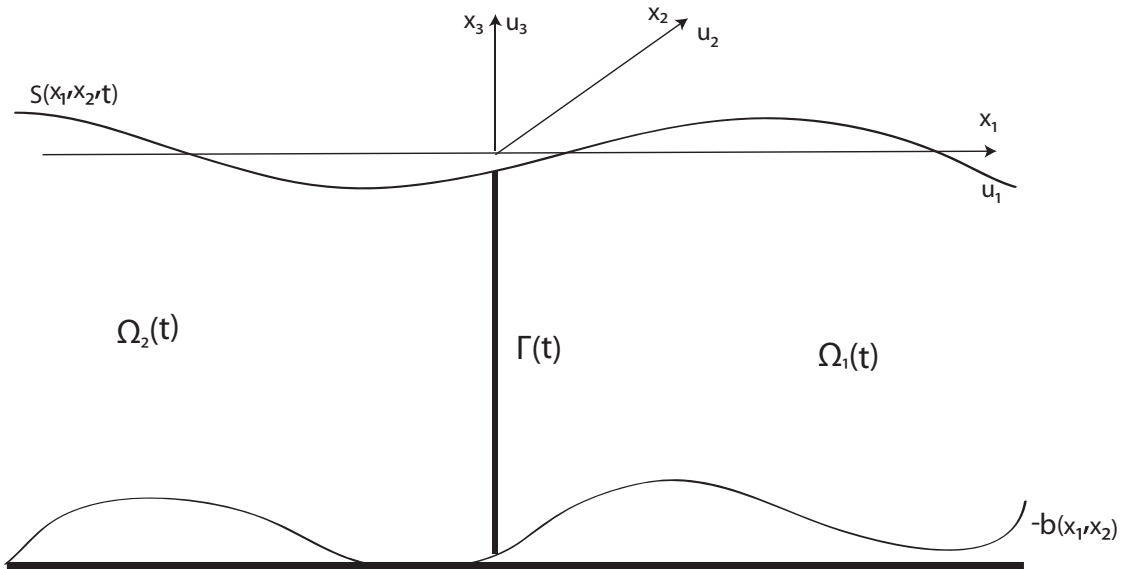


FIGURE 5.1 – Section de la jonction avec surface libre $\Omega(t)$.

En négligeant les rapports d'aspect ϵ , δ dans (5.7)-(5.16), on dérive le modèle asymptotique dans le

domaine avec surface libre $\Omega(t)$

$$\frac{\partial u_1^1}{\partial t} + u^1 \cdot \nabla u_1^1 - \mu_0^1 \Delta u_1^1 + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^1}{\partial x_1} = 0 \quad \text{dans } \Omega_1(t) \quad (5.17)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^1}{\partial x_2} = 0 \quad \text{dans } \Omega_1(t) \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial p^1}{\partial x_3} = -\rho \tilde{g} \quad \text{dans } \Omega_1(t) \quad (5.19)$$

$$\nabla \cdot u^1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_1(t) \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial u_1^2}{\partial t} + u^2 \cdot \nabla u_1^2 - \mu_0^2 \Delta u_1^2 + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^2}{\partial x_1} - f^C u_2^2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_2(t) \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial u_2^2}{\partial t} + u^2 \cdot \nabla u_2^2 - \mu_0^2 \Delta u_2^2 + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^2}{\partial x_2} + f^C u_1^2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_2(t) \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial p^2}{\partial x_3} = -\rho \tilde{g} \quad \text{dans } \Omega_2(t) \quad (5.23)$$

$$\nabla \cdot u^2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_2(t) \quad (5.24)$$

$$[u_1]_{|\Gamma(t)} = 0 \quad (5.25)$$

$$u_2^2|_{\Gamma(t)} = 0 \quad (5.26)$$

$$\left[-\frac{1}{\rho_0} p + \mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right]_{|\Gamma(t)} = 0 \quad (5.27)$$

Remarque 4. Le modèle (5.17)-(5.24) peut aussi être considéré avec les conditions d'interface limites suivantes

$$[u_1]_{|\Gamma(t)} = \left(\mu_0^2 \frac{\partial u_2^2}{\partial x_1} \right)_{|\Gamma(t)} = \left[\frac{1}{\rho_0} p + \mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right]_{|\Gamma(t)} = 0 \quad (5.28)$$

et l'analyse mathématique suivante du problème limite reste valable.

5.2 Moyennes des équations

Les équations asymptotiques (5.17)-(5.27) vont maintenant être moyennées sur la verticale entre le fond d'équation $x_3 = -b(x_1, x_2)$ et la surface libre de côte $x_3 = s(x_1, x_2, t)$ (voir fig. 5.1). Ainsi trois nouvelles variables vont alors apparaître :

$$\zeta^k(x_1, x_2, t) = s^k(x_1, x_2, t) + b^k(x_1, x_2) \quad (5.29)$$

$$U_1^k(x_1, x_2, t) = \frac{1}{\zeta^k} \int_{-b^k(x_1, x_2)}^{s^k(x_1, x_2, t)} u_1^k dx_3 \quad (5.30)$$

$$U_2^k(x_1, x_2, t) = \frac{1}{\zeta^k} \int_{-b^k(x_1, x_2)}^{s^k(x_1, x_2, t)} u_2^k dx_3 \quad (5.31)$$

Dans la suite on suppose que la variable hauteur est continue sur l'interface, i.e

$$[\zeta]_{|\Gamma(t)} = 0 \quad (5.32)$$

5.2.1 Conditions limites

On tiendra compte des conditions suivantes aux frontières de $\Omega_k(t)$.

- A la surface libre $x_3 = s^k(x_1, x_2, t)$:

1. $u_3^k(s^k) = \frac{dx_3}{dt} \Big|_{x_3=s^k(x_1, x_2, t)} = \frac{\partial s^k}{\partial t} + \frac{\partial s^k}{\partial x_1} u_1^k(s^k) + \frac{\partial s^k}{\partial x_2} u_2^k(s^k),$
2. $p = p_a$ (pression atmosphérique),
3. $\mu_0^k \frac{\partial u_1^k}{\partial x_3}(s^k) = F_{1,s}^k, \quad \mu_0^2 \frac{\partial u_2^2}{\partial x_3}(s^2) = F_{2,s}^2$

- Au fond $x_3 = -b^k(x_1, x_2)$:

1. $u_3^k(-b^k) = -\frac{\partial b^k}{\partial x_1} u_1^k(-b^k) - \frac{\partial b^k}{\partial x_2} u_2^k(-b^k)$
2. $\mu_0^k \frac{\partial u_1^k}{\partial x_3}(-b^k) = F_{1,b}^k, \quad \mu_0^2 \frac{\partial u_2^2}{\partial x_3}(-b^2) = F_{2,b}^2$

Remarque 5. Il n'est pas facile de déterminer la force de friction liée au vent à partir des observations de celui-ci. Mise à part la connaissance imparfaite de son influence sur la circulation océanique, la relation entre le vent et la force de friction est une question difficile. Habituellement on a la formule empirique de Chézy

$$F_{i,s}^k = C_F \rho_a u_{i,a} \|U_a\|$$

où ρ_a et $U_a = (u_{1,a}, u_{2,a})$ expriment respectivement la densité et la vitesse de l'air à 10m de la surface libre. C_F est un coefficient empirique de l'ordre de $2 \cdot 10^3$, mais comme tous les coefficients empiriques, il varie avec la vitesse du vent.

De l'autre côté, la friction du fond est modélisée par la formule de Manning-Chézy

$$F_{i,b}^k = \frac{g \rho_0 u_i^k \|u^k\|}{C_c^2}$$

$u^k = (u_1^k, u_2^k)$ étant la vitesse horizontale de l'eau sur le fond du domaine, et C_c exprime le coefficient de Chézy.

5.2.2 Rappel de la règle de Leibnitz

La formule de Leibnitz est alors appliquée pour intervertir les opérateurs différentiels et d'intégration. Cette règle stipule que la dérivée d'une intégrale aux bornes variables fait apparaître une dérivée à l'intérieur de l'intégrale et des termes de flux suivant la formule

$$\int_{\beta_1(\alpha)}^{\beta_2(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx_3 = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{\beta_1(\alpha)}^{\beta_2(\alpha)} f dx_3 + f(\beta_1(\alpha)) \frac{\partial \beta_1(\alpha)}{\partial \alpha} - f(\beta_2(\alpha)) \frac{\partial \beta_2(\alpha)}{\partial \alpha}$$

5.2.3 Moyenne des équations de continuité

L'intégration des équations de continuité (5.20), (5.24) sur la profondeur totale donne :

$$\int_{-b^k(x_1, x_2)}^{s^k(x_1, x_2, t)} \nabla \cdot u^k dx_3 = \int_{-b^k(x_1, x_2)}^{s^k(x_1, x_2, t)} \frac{\partial u_3^k}{\partial x_3} dx_3 + \int_{-b^k(x_1, x_2)}^{s^k(x_1, x_2, t)} \left(\frac{\partial u_1^k}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^k}{\partial x_2} \right) dx_3 = 0 \quad (5.33)$$

En utilisant la règle de Leibnitz dans (5.33), puis en tenant compte des conditions aux frontières, on obtient

$$\int_{-b^k(x_1, x_2)}^{s^k(x_1, x_2, t)} \nabla \cdot u^k dx_3 = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\zeta^k U_i^k) + \frac{\partial s^k}{\partial t} + \frac{\partial b^k}{\partial t} \quad (5.34)$$

Finalement les équations de continuité sont transcrites dans leur formulation hauteur-vitesse

$$\frac{\partial \zeta^k}{\partial t} + \nabla \cdot (\zeta^k U^k) = 0. \quad (5.35)$$

5.2.4 Moyennes des équations de quantité de mouvement

La moyenne suivant la verticale des équations de quantité de mouvement (5.17)-(5.18), (5.21)-(5.22), se fait en appliquant l'hypothèse de pression hydrostatique (5.19), (5.23). Nous ne donnons en exemple qu'un des développements, les autres s'effectuent de la même façon. Donc l'équation (5.17) intégrée sur la profondeur donne

$$\int_{-b^1(x_1, x_2)}^{s^1(x_1, x_2, t)} \left(\frac{\partial u_1^1}{\partial t} + (u^1 \cdot \nabla) u_1^1 \right) dx_3 = \int_{-b^1(x_1, x_2)}^{s^1(x_1, x_2, t)} (\mu_0^1 \Delta u_1^1 - f^C u_2^1 + \frac{\partial p^1}{\partial x_1}) dx_3 \quad (5.36)$$

Comme

$$\frac{\partial p^1}{\partial x_3} = -\rho \tilde{g},$$

on a

$$p^1(x_1, x_2, x_3, t) = p_a + \rho \tilde{g}(\zeta^1(x_1, x_2, t) - x_3).$$

En utilisant la règle de Leibnitz et en tenant compte de conditions aux limites, on évalue chacun des termes de (5.36), et on obtient les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{-b^1(x_1, x_2)}^{s^1(x_1, x_2, t)} \frac{\partial p^1}{\partial x_1} dx_3 &= \frac{\partial p_a}{\partial x_1} \zeta^1 + \rho \tilde{g} \zeta^1 \frac{\partial \zeta^1}{\partial x_1}, & \int_{-b^1(x_1, x_2)}^{s^1(x_1, x_2, t)} \frac{\partial u_1^1}{\partial t} dx_3 &= \frac{\partial}{\partial t} (\zeta^2 U_1^2) \\ \int_{-b^1(x_1, x_2)}^{s^1(x_1, x_2, t)} \mu_0^1 \Delta u_1^1 dx_3 &= \sum_{j=1}^2 \mu_0^1 \frac{\partial^2 (U_1^1 \zeta^1)}{\partial x_j^2} + \underbrace{F_{1,b}^1 + F_{1,s}^1}_{F_1^1} \\ \int_{-b^1(x_1, x_2)}^{s^1(x_1, x_2, t)} (u^1 \cdot \nabla) u_1^1 dx_3 &= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial (\zeta^1 U_j^1 U_1^1)}{\partial x_j}, & \int_{-b^1(x_1, x_2)}^{s^1(x_1, x_2, t)} f^C u_2^1 dx_3 &= f^C \zeta^1 U_2^1 \end{aligned}$$

Ainsi les équations (5.17), (5.18) deviennent

$$\frac{\partial}{\partial t} (\zeta^1 U_1^1) + \nabla \cdot (\zeta^1 U^1 \otimes U_1^1) - \mu_0^1 \Delta (\zeta^1 U_1^1) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial x_1} \zeta^1 + \tilde{\rho} \tilde{g} \zeta^1 \frac{\partial \zeta^1}{\partial x_1} = F_1^1 \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial \zeta^1}{\partial x_2} = 0 \quad (5.38)$$

En procédant de même pour les équations (5.21), (5.22) on arrive aux formulations suivantes

$$\frac{\partial}{\partial t} (\zeta^2 U_1^2) + \nabla \cdot (\zeta^2 U^2 \otimes U_1^2) - \mu_0^2 \Delta (\zeta^2 U_1^2) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial x_1} \zeta^2 + \tilde{\rho} \tilde{g} \zeta^2 \frac{\partial \zeta^2}{\partial x_1} - f^C \zeta^2 U_2^2 = F_1^2 \quad (5.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\zeta^2 U_2^2) + \nabla \cdot (\zeta^2 U^2 \otimes U_2^2) - \mu_0^2 \Delta (\zeta^2 U_2^2) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial x_2} \zeta^2 + \tilde{\rho} \tilde{g} \zeta^2 \frac{\partial \zeta^2}{\partial x_2} + f^C \zeta^2 U_1^2 = F_2^2 \quad (5.40)$$

5.2.5 Moyennes des conditions d'interface

Les conditions d'interface (5.25)-(5.27) du problème limite sont facilement intégrées sur $\Gamma(t)$ en tenant compte de la continuité de la hauteur ζ^k (relation (5.32)), et de la formule d'intégration de Leibnitz. Ainsi on obtient respectivement les approximations suivantes

$$\int_{\Gamma(t)} [u_1] dx_3 = \int_{-b^2(0, x_2)}^{s^2(0, x_2, t)} u_1^2 dx_3 - \int_{-b^1(0, x_2)}^{s^1(0, x_2, t)} u_1^1 dx_3 = 0 = U_1^1 \zeta^1 - U_1^2 \zeta^2$$

$$\int_{\Gamma(t)} u_2^2 dx_3 = \int_{-b^2(0,x_2)}^{s^2(0,x_2,t)} u_2^2 dx_3 = 0 = \zeta^2 U_2^2$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(t)} \left[-\frac{1}{\rho_0} p + \mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] dx_3 &= \int_{\Gamma(t)} \left[-\frac{1}{\rho_0} p + \mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] dx_3 \\ &= 0 = (-\tilde{\rho}\tilde{g}\zeta^2 + \mu_0^2 \frac{\partial(\zeta^2 U_1^2)}{\partial x_1}) - (-\tilde{\rho}\tilde{g}\zeta^1 + \mu_0^1 \frac{\partial(\zeta^1 U_1^1)}{\partial x_1}) \end{aligned}$$

Ainsi en moyenne verticale (en tenant compte de (5.32)), les conditions (5.25)-(5.27) vérifient

$$\begin{cases} \zeta^1 U_1^1 = \zeta^2 U_1^2 & (5.41) \\ \zeta^2 U_2^2 = 0 & (5.42) \\ \mu_0^1 \frac{\partial(\zeta^1 U_1^1)}{\partial x_1} = \mu_0^2 \frac{\partial(\zeta^2 U_1^2)}{\partial x_1} & (5.43) \end{cases}$$

Remarque 6. De même, la moyenne verticale des conditions d'interface limites (5.28) est donnée par les équations suivantes

$$\begin{cases} \zeta^1 U_1^1 = \zeta^2 U_1^2 & (5.44) \\ \frac{\partial(\zeta^2 U_2^2)}{\partial x_1} = 0 & (5.45) \\ \mu_0^1 \frac{\partial(\zeta^1 U_1^1)}{\partial x_1} = \mu_0^2 \frac{\partial(\zeta^2 U_1^2)}{\partial x_1} & (5.46) \end{cases}$$

5.3 Formulation hauteur-vitesse

Au terme de l'intégration verticale du problème limite (5.17)-(5.27), nous considérons maintenant une forme simplifiée de la formulation hauteur-vitesse (5.37)-(5.43) : (la pression atmosphérique est supposée constante, et on néglige les forces de friction surfacique et celles du fond) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\zeta^1 U_1^1) + \nabla \cdot (\zeta^1 U^1 \otimes U_1^1) - \mu_0^1 \Delta(\zeta^1 U_1^1) + \tilde{\rho}\tilde{g}\zeta^1 \frac{\partial \zeta^1}{\partial x_1} = 0 \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial \zeta^1}{\partial x_2} = 0 \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial \zeta^1}{\partial t} + \nabla \cdot (\zeta^1 U^1) = 0 \quad (5.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\zeta^2 U_1^2) + \nabla \cdot (\zeta^2 U^2 \otimes U_1^2) - \mu_0^2 \Delta(\zeta^2 U_1^2) + \tilde{\rho}\tilde{g}\zeta^2 \frac{\partial \zeta^2}{\partial x_1} - f^C \zeta^2 U_2^2 = 0 \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\zeta^2 U_2^2) + \nabla \cdot (\zeta^2 U^2 \otimes U_2^2) - \mu_0^2 \Delta(\zeta^2 U_2^2) + \tilde{\rho}\tilde{g}\zeta^2 \frac{\partial \zeta^2}{\partial x_2} + f^C \zeta^2 U_1^2 = 0 \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial \zeta^2}{\partial t} + \nabla \cdot (\zeta^2 U^2) = 0 \quad (5.52)$$

avec les conditions d'interface suivantes

$$[\zeta] = [\zeta U_1] = 0 \quad (5.53)$$

$$U_2^2 = 0 \quad (5.54)$$

$$\left[\mu_0 \frac{\partial(\zeta U_1)}{\partial x_1} \right] = 0 \quad (5.55)$$

En développant les trois premiers termes des équations (5.47), (5.50), (5.51), et en divisant ces dernières par ζ^k , (5.47)-(5.55) devient

$$\frac{\partial}{\partial t} U_1^1 + (U^1 \cdot \nabla) U_1^1 - \mu_0^1 \Delta U_1^1 + \tilde{\rho} \tilde{g} \frac{\partial \zeta^1}{\partial x_1} = 0 \quad (5.56)$$

$$\frac{\partial \zeta^1}{\partial x_2} = 0 \quad (5.57)$$

$$\frac{\partial \zeta^1}{\partial t} + \nabla \cdot (\zeta^1 U^1) = 0 \quad (5.58)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} U_1^2 + (U^2 \cdot \nabla) U_1^2 - \mu_0^2 \Delta U_1^2 + \tilde{\rho} \tilde{g} \frac{\partial \zeta^2}{\partial x_1} - f^C U_2^2 = 0 \quad (5.59)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} U_2^2 + (U^2 \cdot \nabla) U_2^2 - \mu_0^2 \Delta U_2^2 + \tilde{\rho} \tilde{g} \frac{\partial \zeta^2}{\partial x_2} + f^C U_1^2 = 0 \quad (5.60)$$

$$\frac{\partial \zeta^2}{\partial t} + \nabla \cdot (\zeta^2 U^2) = 0 \quad (5.61)$$

avec les conditions d'interface suivantes

$$[\zeta] = [U_1] = 0 \quad (5.62)$$

$$U_2^2 = 0 \quad (5.63)$$

$$\left[\mu_0 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right] = 0 \quad (5.64)$$

5.4 Discrétisation en temps

Dans cette section, on procède à la discrétisation en temps de la formulation hauteur-vitesse (5.56)-(5.64)

Notons $U_i^k(t) = U_i^k(., t)$ et $\zeta^k(t) = \zeta^k(., t)$. Fixons un pas de temps $\tau > 0$, et posons $t_m = m\tau$ pour $m \geq 0$. Le but est de calculer des approximations $U_i^{k,m}$ de $U_i^k(t)$ et $\zeta^{k,m}$ de $\zeta^k(t)$.

Les dérivées $\frac{\partial U_i^k}{\partial t}$, $\frac{\partial \zeta^k}{\partial t}$ sont approchées par la formule de différentiation rétrograde d'ordre 2. Les autres termes sont évalués implicitement ou en explicite. Les approximations $(U_1^{1,m+1}, U_2^{2,m+1})$ et $(\zeta^{1,m+1}, \zeta^{2,m+1})$ sont ensuite calculées séparément par deux étapes. La première étape est un problème de diffusion définissant les termes de vitesse, et la deuxième est un problème de transport advectif (dont le flot est donné par $((U_1^{1,m+1}, 0), U_2^{2,m+1})$) pour le calcul des termes de hauteur.

5.4.1 Schéma de différentiation rétrograde

Le schéma de différentiation rétrograde d'ordre q consiste à donner d'abord une approximation des termes de dérivée en temps. Pour l'équation (5.56), la dérivée en temps de la vitesse U_1^1 est exprimée par

$$\frac{\partial U_1^1}{\partial t}(t_m) \approx \frac{1}{\tau} (\beta_0 U_1^{1,m} + \sum_{j=1}^q \beta_j U_1^{1,m-j}) \quad (5.65)$$

Avec un choix convenable des β_j l'erreur est d'ordre τ^q , et la formule (5.65) est appelée *formule de différenciation rétrograde (à q pas)* (*backward differentiation formula (with q steps) en anglais*). Ces formules sont données dans [35, 53, 69]. De plus elles sont stables pour $1 \leq q \leq 6$, mais instables pour $q > 6$.

Déterminons les coefficients β_j pour $q = 2$. En supposant U_1^1 suffisamment régulière, nous avons

$$U_1^1(t_{m-2}) = U_1^1(t_m) - 2\tau \frac{\partial U_1^1}{\partial t}(t_m) + \frac{(2\tau)^2}{2} \frac{\partial^2 U_1^1}{\partial t^2}(t_m) + o(\tau^3) \quad (5.66)$$

$$U_1^1(t_{m-1}) = U_1^1(t_m) - \tau \frac{\partial U_1^1}{\partial t}(t_m) + \frac{(\tau)^2}{2} \frac{\partial^2 U_1^1}{\partial t^2}(t_m) + o(\tau^3) \quad (5.67)$$

En multipliant (5.67) par 4 puis en soustrayant (5.66), nous obtenons

$$4U_1^1(t_{m-1}) - U_1^1(t_{m-2}) = 3U_1^1(t_m) - 2\tau \frac{\partial U_1^1}{\partial t} + o(\tau^3)$$

c'est à dire

$$\frac{\partial U_1^1}{\partial t}(t_m) = \frac{1}{\tau} \left(\frac{3}{2} U_1^1(t_m) - 2U_1^1(t_{m-1}) + \frac{1}{2} U_1^1(t_{m-2}) \right) + o(\tau^2) \quad (5.68)$$

et les coefficients de la formule (5.67) avec $q = 2$ sont

$$\beta_0 = \frac{3}{2}, \quad \beta_1 = -2, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}.$$

Nous utilisons le cas d'ordre 2 pour discrétiser en temps le problème (5.56)-(5.64).

Ainsi pour $(U_1^{1,m}, U^{2,m})$, $(\zeta^{1,m}, \zeta^{2,m})$, $m = -1, 0$ fixés, et pour $m \geq 1$ on cherche $(U_1^{1,m}, U^{2,m})$ et $(\zeta^{1,m}, \zeta^{2,m})$ vérifiant les équations suivantes :

$$\frac{3}{2} U_1^{1,m} - \tau \mu_0^1 \Delta U_1^{1,m} = -\tau U_1^{1,m-1} \frac{\partial U_1^{1,m-1}}{\partial x_1} - \tau \tilde{\rho} \tilde{g} \frac{\partial \zeta^{1,m-1}}{\partial x_1} + 2U_1^{1,m-1} - \frac{1}{2} U_1^{1,m-2} \quad (5.69)$$

$$\frac{3}{2} \zeta^{1,m} + \tau \frac{\partial (U_1^{1,m} \zeta^1)}{\partial x_1} = 2\zeta^{1,m-1} - \frac{1}{2} \zeta^{1,m-2} \quad (5.70)$$

$$\frac{3}{2} U^{2,m} - \tau \mu_0^2 \Delta U^{2,m} = -\tau (U^{2,m-1} \cdot \nabla U^{2,m-1}) - \tau \tilde{\rho} \tilde{g} \nabla \zeta^{2,m-1} + 2U^{2,m-1} - \frac{1}{2} U^{2,m-2} \quad (5.71)$$

$$\frac{3}{2} \zeta^{2,m} + \tau \nabla \cdot (U^{2,m} \zeta^1) = 2\zeta^{2,m-1} - \frac{1}{2} \zeta^{2,m-2} \quad (5.72)$$

Les solutions $(U_1^{1,m}, U^{2,m})$ et $(\zeta^{1,m}, \zeta^{2,m})$ peuvent maintenant être calculées en découplant le système (5.69)-(5.72) en deux problèmes stationnaires.

5.4.2 Etapes de résolution

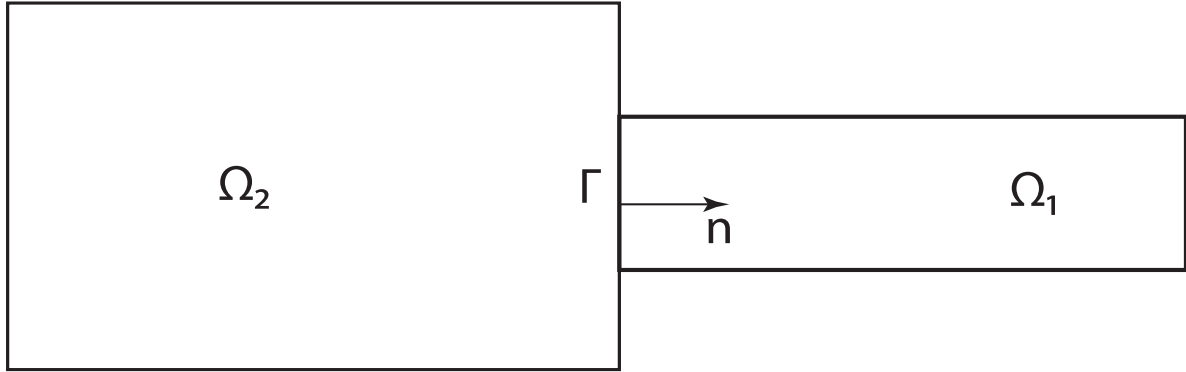
Étant donné $(U_1^{1,m}, U^{2,m})$, $(\zeta^{1,m}, \zeta^{2,m})$, $m = -1, 0$, fixés, et pour $m \geq 1$ on note

$$\mathcal{L}^1 = 2U_1^{1,m-1} - \frac{1}{2} U_1^{1,m-2} - \tau U_1^{1,m-1} \frac{\partial U_1^{1,m-1}}{\partial x_1} - \tau \tilde{\rho} \tilde{g} \frac{\partial \zeta^{1,m-1}}{\partial x_1},$$

$$\mathcal{L}^2 = 2U^{2,m-1} - \frac{1}{2} U^{2,m-2} - \tau (U^{2,m-1} \cdot \nabla) U^{2,m-1} - \tau \tilde{\rho} \tilde{g} \nabla \zeta^{2,m-1},$$

$$\mathcal{N}^1 = 2\zeta^{1,m-1} - \frac{1}{2} \zeta^{1,m-2}, \quad \mathcal{N}^2 = 2\zeta^{2,m-1} - \frac{1}{2} \zeta^{2,m-2},$$

et on résout successivement les équations aux dérivées partielles suivantes dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de frontière continue et lipschitzienne $\partial\Omega$ (voir fig. 5.2)

FIGURE 5.2 – Une décomposition de domaine 2-D, $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \quad \Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2.$$

1. **Etape de diffusion** : trouver $(U_1^1, U_1^2, U_2^2) = (U_1^{1,m}, U_1^{2,m}, U_2^{2,m})$ vérifiant

$$\begin{cases} \frac{3}{2}U_1^1 - \tau\mu_0^1\Delta U_1^1 = \mathcal{L}^1 & \text{dans } \Omega_1 \end{cases} \quad (5.73)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1^1}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma \end{cases} \quad (5.74)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}U^2 - \tau\mu_0^2\Delta U^2 = \mathcal{L}^2 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases} \quad (5.75)$$

$$\begin{cases} U^2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma \end{cases} \quad (5.76)$$

$$\begin{cases} [U_1]_{|\Gamma} = U_2^2|_{|\Gamma} = \left[\mu_0 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right]_{|\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (5.77)$$

2. **Etape de transport** : trouver $(\zeta^1, \zeta^2) = (\zeta^{1,m}, \zeta^{2,m})$ vérifiant

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\zeta^1 + \tau \frac{\partial}{\partial x_1}(U_1^1 \zeta^1) = \mathcal{N}^1 & \text{dans } \Omega_1 \end{cases} \quad (5.78)$$

$$\begin{cases} \zeta^1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1^- \end{cases} \quad (5.79)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\zeta^2 + \tau \nabla \cdot (U^2 \zeta^2) = \mathcal{N}^2 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases} \quad (5.80)$$

$$\begin{cases} \zeta^2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2^- \end{cases} \quad (5.81)$$

$$\begin{cases} [\zeta]_{|\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (5.82)$$

Chacune des deux étapes est résolue par une méthode de décomposition de domaine sans recouvrement. En ce sens, on suppose que U^k est suffisamment régulière de sorte que les notations suivantes pour la résolution de l'étape de transport aient un sens

$$\partial\Omega_k^- = \{x \in \partial\Omega_k \cap \partial\Omega : (U^k \cdot n^k) < 0\}, \quad \partial\Omega_k^+ = \{x \in \partial\Omega_k \cap \partial\Omega : (U^k \cdot n^k) > 0\}$$

$n = n^k$ désigne la normale unité extérieure à $\partial\Omega_k$. On note aussi que (voir fig. 5.2) $n = (1, 0) = n^2 = -n^1$ est le vecteur normal unité sur Γ , dirigé de Ω_2 à Ω_1 . Par ailleurs comme $[U_1]_{|\Gamma} = 0$, on note par

U_1 la valeur commune aux fonctions U_1^1 et U_1^2 sur l'interface. Ainsi les parties entrantes et sortantes sur Γ sont notées par

$$\Gamma^- = \{x \in \Gamma : U_1(x) < 0\} = \Gamma_1^+ = \Gamma_2^-, \quad \Gamma^+ = \{x \in \Gamma : U_1(x) > 0\} = \Gamma_2^+ = \Gamma_1^-$$

Remarque 7. La condition d'adhérence du fluide (5.76) sur les parois de Ω_2 peut être remplacée par une condition de glissement. Dans ce cas l'étape de diffusion est formulée par

$$\begin{cases} \frac{3}{2}U_1^1 - \tau\mu_0^1\Delta U_1^1 = \mathcal{L}^1 & \text{dans } \Omega_1 \end{cases} \quad (5.83)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1^1}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma \end{cases} \quad (5.84)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}U^2 - \tau\mu_0^2\Delta U^2 = \mathcal{L}^2 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases} \quad (5.85)$$

$$\begin{cases} U^2 \cdot n = (\nabla U^2 \cdot n) \cdot \tau = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma \end{cases} \quad (5.86)$$

$$\begin{cases} [U_1]_{|\Gamma} = U_2^2|_{|\Gamma} = \left[\mu_0 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right]_{|\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (5.87)$$

τ étant la tangente sur $\partial\Omega_2$.

5.5 MDD pour l'étape de diffusion

5.5.1 Formulation faible

Considérons les espaces de Sobolev suivants

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1^1 &= H^1(\Omega_1) \\ \mathbf{V}_1^2 &= H_{\partial\Omega_2 \setminus \Gamma}^1(\Omega_2) \\ \mathbf{V}_2^2 &= H_0^1(\Omega_2) \\ \mathbf{V}_0^1 &= H_{\partial\Omega_1 \setminus \Gamma}^1(\Omega_1) \\ \mathbf{V}_0^2 &= [H_0^1(\Omega_2)]^2 \\ \mathbf{V} &= H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

et posons

$$\mathbf{V}^1 = \mathbf{V}_1^1, \quad \mathbf{V}^2 = \mathbf{V}_1^2 \times \mathbf{V}_2^2$$

Considérons les formes bilinéaires suivantes sur $\mathbf{V}^k \times \mathbf{V}^k$:

$$a_{vit}^1(\varphi_1^1, \psi_1^1) = \int_{\Omega_1} \frac{3}{2} \varphi_1^1 \psi_1^1 dx + \tau \mu_0^1 \int_{\Omega_1} \nabla \varphi_1^1 \cdot \nabla \psi_1^1 dx,$$

$$b_{vit}^1(\varphi_1^1) = \int_{\Omega_1} \mathcal{L}^1 \varphi_1^1 dx$$

$$a_{vit}^2(\varphi^2, \psi^2) = \int_{\Omega_2} \frac{3}{2} \varphi^2 \psi^2 dx + \tau \mu_0^2 \int_{\Omega_2} \nabla \varphi^2 \cdot \nabla \psi^2 dx$$

$$b_{vit}^2(\varphi^2) = \int_{\Omega_2} \mathcal{L}^2 \varphi^2 dx$$

En multipliant (5.73) par $\varphi_1^1 \in \mathbf{V}_0^1$, (5.75) par $\varphi^2 \in \mathbf{V}_0^2$, et (5.77) par β^{vit} , et en intégrant par parties, nous obtenons une formulation faible des équations (5.73)-(5.77) donnée par : trouver $(U_1^1, U^2) \in$

$\mathbf{V}^1 \times \mathbf{V}^2$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{vit}^1(U_1^1, \varphi_1^1) = b_{vit}^1(\varphi_1^1) \end{array} \right. \quad (5.88)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1^1|_{\Gamma} = U_1^2|_{\Gamma} \end{array} \right. \quad (5.89)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{vit}^2(U^2, \varphi^2) = b_{vit}^2(\varphi^2) \end{array} \right. \quad (5.90)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \mu_0^1 \frac{\partial U_1^1}{\partial x_1}, \beta^{vit} \right\rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \left\langle \mu_0^2 \frac{\partial U_1^2}{\partial x_1}, \beta^{vit} \right\rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \end{array} \right. \quad (5.91)$$

pour tout $(\varphi_1^1, \varphi^2, \beta^{vit}) \in \mathbf{V}_0^1 \times \mathbf{V}_0^2 \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Pour prouver l'existence et l'unicité de ce problème faible, on établit l'équation d'interface équivalente.

5.5.2 Equation de Steklov-Poincaré

Nous introduisons l'équation d'interface pour la seule variable définie sur Γ . L'existence de la solution de cette équation d'interface permet d'obtenir les fonctions inconnues $(U_1^1, U^2) \in \mathbf{V}^1 \times \mathbf{V}^2$ en résolvant des sous-problèmes indépendants.

Pour $\lambda^{vit} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on introduit les opérateurs d'extension $U_1^{1, \lambda^{vit}}$ et $U^{2, \lambda^{vit}}$ définis par :

- $U_1^{1, \lambda^{vit}} \in \mathbf{V}^1$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{vit}^1(U_1^{1, \lambda^{vit}}, \varphi_1^1) = 0 \text{ pour tout } \varphi_1^1 \in \mathbf{V}_0^1 \end{array} \right. \quad (5.92)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1^{1, \lambda^{vit}}|_{\Gamma} = \lambda^{vit} \end{array} \right. \quad (5.93)$$

- $U^{2, \lambda^{vit}} \in \mathbf{V}^2$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{vit}^2(U^{2, \lambda^{vit}}, \varphi^2) = 0 \text{ pour tout } \varphi^2 \in \mathbf{V}_0^2 \end{array} \right. \quad (5.94)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U^{2, \lambda^{vit}}|_{\Gamma} = \lambda^{vit} \end{array} \right. \quad (5.95)$$

Les extensions Dirichlet-homogènes définies par les données du problème sont exprimées par :

- $U_1^{1, *} \in \mathbf{V}^1$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{vit}^1(U_1^{1, *}, \varphi_1^1) = b_{vit}^1(\varphi_1^1) \text{ pour tout } \varphi_1^1 \in \mathbf{V}_0^1 \end{array} \right. \quad (5.96)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1^{1, *} = 0 \end{array} \right. \quad (5.97)$$

- $U^{2, *} \in \mathbf{V}^2$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{vit}^2(U^{2, *}, \varphi^2) = b_{vit}^2(\varphi^2) \text{ pour tout } \varphi^2 \in \mathbf{V}_0^2 \end{array} \right. \quad (5.98)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U^{2, *} = 0 \end{array} \right. \quad (5.99)$$

Par le lemme de Lax-Milgram, on montre facilement que ces sous-problèmes admettent chacun une unique solution. Par ailleurs, comme $U_1^{k, \lambda^{vit}}|_{\Gamma} = \lambda^{vit}$, alors en utilisant l'inégalité de la trace, et des estimations à priori on obtient la proposition suivante.

Proposition 7. Pour tout $\lambda^{vit} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $\|U_1^{k,\lambda^{vit}}\|_{\mathbf{V}_1^k}$ est équivalent à $\|\lambda^{vit}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$, i.e :

1. Il existe deux constantes $C_{1,1}$, $C_{2,1} > 0$ dépendant des paramètres μ_0^1 et τ telles que

$$C_{1,1}\|\lambda^{vit}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq \|U_1^{1,\lambda^{vit}}\|_{\mathbf{V}_1^1} \leq C_{2,1}\|\lambda^{vit}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

2. De même il existe deux constantes positives $C_{1,2}$, $C_{2,2}$ dépendant de μ_0^2 et τ telles que

$$C_{1,2}\|\lambda^{vit}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq \|U_1^{2,\lambda^{vit}}\|_{\mathbf{V}_1^2} \leq C_{2,2}\|\lambda^{vit}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Démonstration. Notons par $c_{tr,\Gamma}^k$ et $c_{relv,\Gamma}^k$ respectivement les constantes de continuité des applications de la trace et de relèvement restreintes à Γ (théorème 1), c'est à dire

$$\|\gamma_\Gamma(\varphi^k)\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c_{tr,\Gamma}^k \|\varphi^k\|_{\mathbf{V}_1^k}$$

$$\|\mathcal{R}_\Gamma(\varphi^k)\|_{\mathbf{V}_1^k} \leq c_{relv,\Gamma}^k \|\varphi^k\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

pour tout $\varphi^k \in \mathbf{V}_1^k$. Alors par des estimations à priori, on établit les deux relations de la proposition, avec

$$C_{1,k} = (c_{tr,\Gamma}^k)^{-1}, \quad C_{2,k} = c_{relv,\Gamma}^k \frac{\max(\frac{3}{4}, \frac{\tau}{2}(\mu_0^k)^2)}{\min(\frac{3}{4}, \frac{\tau}{2}(\mu_0^k)^2)}.$$

□

Remarque 8. En utilisant la proposition ci-dessus, on obtient qu'il existe $c_{1,k} > 0$, $c_{2,k} > 0$ dépendant des constantes μ_0^k et τ tels que

$$c_{1,1}\|U_1^{1,\lambda^{vit}}\|_{\mathbf{V}_1^1} \leq \|U_1^{1,\lambda^{vit}}\|_{\mathbf{V}_1^1} \leq c_{2,1}\|U_1^{1,\lambda^{vit}}\|_{\mathbf{V}_1^1} \quad (5.100)$$

$$c_{1,2}\|U_1^{2,\lambda^{vit}}\|_{\mathbf{V}_1^2} \leq \|U_1^{2,\lambda^{vit}}\|_{\mathbf{V}_1^2} \leq c_{2,2}\|U_1^{2,\lambda^{vit}}\|_{\mathbf{V}_1^2}. \quad (5.101)$$

Ces inégalités sont utilisées dans la suite pour établir les propriétés des opérateurs d'interface.

Supposons maintenant que $(U_1^1, U^2) \in \mathbf{V}^1 \times \mathbf{V}^2$ est solution de (5.88)-(5.91) alors $U_1^1 = U_1^{1,\lambda^{vit}} + U_1^{1,*}$, $U^2 = U_1^{2,\lambda^{vit}} + U^{2,*}$, où $\lambda^{vit} = U_1^k|_\Gamma$. Réciproquement $(U_1^{1,\lambda^{vit}} + U_1^{1,*}, U_1^{2,\lambda^{vit}} + U^{2,*}) \in \mathbf{V}^1 \times \mathbf{V}^2$ est solution de (5.88)-(5.91) si et seulement si $\lambda^{vit} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ satisfait l'équation de Steklov-Poincaré equation

$$\langle \mathcal{S}^{vit} \lambda^{vit}, \mu^{vit} \rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \langle \chi^{vit}, \mu^{vit} \rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \quad (5.102)$$

L'opérateur d'interface $\mathcal{S}^{vit} : H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow [H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]'$ est tel que $\mathcal{S}^{vit} = \mathcal{S}_1^{vit} + \mathcal{S}_2^{vit}$, et pour tout $(\lambda^{vit}, \beta^{vit}) \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on a

$$\langle \mathcal{S}_1^{vit} \lambda^{vit}, \beta^{vit} \rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = a_{vit}^1(U_1^{1,\lambda^{vit}}, U_1^{1,\beta^{vit}}),$$

$$\langle \mathcal{S}_2^{vit} \lambda^{vit}, \beta^{vit} \rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = a_{vit}^2(U_1^{2,\lambda^{vit}}, U_1^{2,\beta^{vit}})$$

De même la fonctionnelle $\chi^{vit} = \chi_1^{vit} + \chi_2^{vit} \in [H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]'$, avec pour tout $\beta^{vit} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\langle \chi_1^{vit}, \beta^{vit} \rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = b_{vit}^1(U_1^{1,\beta^{vit}}) - a_{vit}^1(U_1^{1,\beta^{vit}}, U_1^{1,*})$$

$$\langle \chi_2^{vit}, \beta^{vit} \rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = b_{vit}^2(U_1^{2,\beta^{vit}}) - a_{vit}^2(U_1^{2,\beta^{vit}}, U_1^{2,*})$$

Proposition 8. *Les opérateurs de Steklov-Poincaré vérifient les propriétés suivantes :*

1. $\mathcal{S}_1^{vit}$, et $\mathcal{S}_2^{vit}$ sont des opérateurs linéaires continus sur $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (i.e., $\mathcal{S}_i^{vit}\beta \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)'$)
2. $\mathcal{S}_1^{vit}$ et $\mathcal{S}_2^{vit}$ sont symétriques et coercitifs.

Démonstration. Les propriétés de symétrie des opérateurs d'interface $\mathcal{S}_i^{vit}$, $i = 1, 2$ découlent directement de celles des formes bilinéaires a_{vit}^i , $i = 1, 2$. En utilisant les inégalités de la proposition 7 et de la remarque 8 on déduit qu'ils sont continus et coercitifs. De plus on a

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{S}_1^{vit} \beta^{vit}, \alpha^{vit} \right\rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\leq \underbrace{C_{2,1} \max\left(\frac{3}{2}, \tau \mu_0^1\right)}_{M_{\mathcal{S}_1^{vit}}} \|\beta^{vit}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\alpha^{vit}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ \left\langle \mathcal{S}_2^{vit} \beta^{vit}, \alpha^{vit} \right\rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\leq \underbrace{C_{2,2} \max\left(\frac{3}{2}, \tau \mu_0^2\right)}_{M_{\mathcal{S}_2^{vit}}} \|\beta^{vit}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\alpha^{vit}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ \left\langle \mathcal{S}_1^{vit} \beta^{vit}, \beta^{vit} \right\rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\geq \underbrace{C_{1,1} \min\left(\frac{3}{2}, \tau \mu_0^1\right)}_{m_{\mathcal{S}_1^{vit}}} \|\beta^{vit}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 \\ \left\langle \mathcal{S}_2^{vit} \beta^{vit}, \beta^{vit} \right\rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\geq \underbrace{C_{1,2} \min\left(\frac{3}{2}, \tau \mu_0^2\right)}_{m_{\mathcal{S}_2^{vit}}} \|\beta^{vit}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 \end{aligned}$$

□

Par conséquent l'opérateur global $\mathcal{S}^{vit}$ est aussi bilinéaire, continu et coercitif avec

$$\left\langle \mathcal{S}^{vit} \beta^{vit}, \alpha^{vit} \right\rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq \underbrace{(M_{\mathcal{S}_1^{vit}} + M_{\mathcal{S}_2^{vit}})}_{M_{\mathcal{S}^{vit}}} \|\beta^{vit}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\alpha^{vit}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

et

$$\left\langle \mathcal{S}_2^{vit} \beta^{vit}, \beta^{vit} \right\rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \geq \underbrace{\min(m_{\mathcal{S}_1^{vit}}, m_{\mathcal{S}_2^{vit}})}_{m_{\mathcal{S}^{vit}}} \|\beta^{vit}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2$$

Finalement par le lemme de Lax-Milgram, on a le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 10. *L'équation variationnelle (5.102) admet une unique solution $\lambda^{vit} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*

La forme différentielle de l'équation de Steklov-Poincaré (5.102) s'écrit par

$$\mathcal{S}^{vit} \lambda^{vit} := \sum_{i=1}^2 \mu_0^i \frac{\partial U_1^{i, \lambda^{vit}}}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^2 \mu_0^i \frac{\partial U_1^{i, *}}{\partial x_1} := \chi^{vit} \text{ dans } H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (5.103)$$

Dans ce cas, en appliquant la proposition 8, on prouve que l'opérateur $\mathcal{S}^{vit} : H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et ses composants $\mathcal{S}_i^{vit} \lambda^{vit} = \mu_0^i \frac{\partial U_1^{i, \lambda^{vit}}}{\partial x_1}$, $i = 1, 2$ sont auto-adjoints, bornés et coercitifs. Ainsi l'équation de Steklov-Poincaré (5.103) admet une unique solution $\lambda^{vit} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, et la solution du problème différentiel (5.73)-(5.77) est construite en posant

$$U_1^1 = U_1^{1, \lambda^{vit}} + U_1^{1, *}, \quad U^2 = U^{2, \lambda^{vit}} + U^{2, *}$$

En tenant compte de ces différentes propriétés des opérateurs de Steklov-Poincaré, on peut appliquer une méthode itérative du type Krylov pour résoudre l'équation d'interface en utilisant soit $\mathcal{S}_1^{vit}$ ou $\mathcal{S}_2^{vit}$

comme préconditionneur. En particulier la méthode de Richardson [76] permettant de résoudre (5.103) est donnée par : soit $\lambda_0^{vit} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ fixé, pour $j \geq 0$,

$$\lambda_{j+1}^{vit} = \lambda_j^{vit} + \theta(S_2^{vit})^{-1}(\chi^{vit} - (S_2^{vit} + S_1^{vit})\lambda_j^{vit}), \quad (5.104)$$

où $\theta > 0$ est un paramètre de relaxation convenable.

La convergence de cette méthode itérative est prouvée en utilisant le résultat abstrait suivant prouvé dans [76].

Théorème 11. *Soit X un espace de Hilbert réel et X' son dual. On considère un opérateur linéaire continu et inversible $\mathcal{Q} : X \rightarrow X'$ tel que $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2$, $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ sont des opérateurs linéaires. Etant donné $\mathcal{Z} \in X'$, soit $x \in X$ la solution de l'équation*

$$\mathcal{Q}x = \mathcal{Z}$$

et pour cette solution, la méthode de Richardson préconditionnée

$$\mathcal{Q}_2(x^{j+1} - x^j) = \theta(\mathcal{Z} - \mathcal{Q}x^j), \quad j \geq 0, \quad \theta > 0$$

On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\mathcal{Q}_2$ est symétrique, continu et coercitif de constantes $\beta_{\mathcal{Q}_2}$ et $\alpha_{\mathcal{Q}_2}$, respectivement ;
2. $\mathcal{Q}_1$ est continu de constante $\beta_{\mathcal{Q}_1}$;
3. $\mathcal{Q}$ est coercitif de constante $\alpha_{\mathcal{Q}}$.

Donc pour tout $x^0 \in X$ et pour tout $0 < \theta < \theta_{max}$, avec

$$\theta_{max} = \frac{2\alpha_{\mathcal{Q}}\alpha_{\mathcal{Q}_2}^2}{\beta_{\mathcal{Q}_2}(\beta_{\mathcal{Q}_1} + \beta_{\mathcal{Q}_2})^2}$$

la suite

$$x^{j+1} = x^j + \theta\mathcal{Q}_2^{-1}(\mathcal{Z} - \mathcal{Q}x^j)$$

converge dans X vers la solution du problème $\mathcal{Q}x = \mathcal{Z}$.

Ainsi en posant $X = H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $\mathcal{Q} = S^{vit}$, $\mathcal{Q}_1 = S_1^{vit}$, $\mathcal{Q}_2 = S_2^{vit}$, et $\theta_{max} = \frac{2m_{S^{vit}}m_{S_2^{vit}}^2}{M_{S_2^{vit}}(M_{S_1^{vit}} + M_{S_2^{vit}})}$, alors pour un choix convenable de θ , la suite λ_j^{vit} générée par (5.104) converge vers l'unique solution λ^{vit} de (5.103).

Dans la partie suivante, on prouve que cette méthode itérative de Richardson correspond au schéma itératif Dirichlet-Neumann consistant à résoudre pour chaque étape le sous-problème posé sur Ω_1 avec la condition de Dirichlet et celui sur Ω_2 avec la condition de Neumann.

5.5.3 Procédure itérative

On propose une procédure itérative Dirichlet-Neumann avec relaxation notée (D_1N_2) pour résoudre le problème faible (5.88)-(5.91) : pour $\lambda_0^{vit} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ fixé, et pour $j \geq 0$:

i) trouver $U_{1,j+1}^1 \in \mathbf{V}^1$:

$$\begin{cases} a_{vit}^1(U_{1,j+1}^1, \varphi_1^1) = b_{vit}^1(\varphi_1^1) \text{ pour tout } \varphi_1^1 \in \mathbf{V}_0^1 \\ U_{1,j+1}^1|_{\Gamma} = \lambda_j^{vit} \end{cases} \quad (5.105)$$

$$\quad (5.106)$$

ii) trouver $U_{j+1}^2 \in \mathbf{V}^2$:

$$\begin{cases} a_{vit}^2(U_{j+1}^2, \varphi^2) = b_{vit}^2(\varphi^2) \text{ pour tout } \varphi^2 \in \mathbf{V}_0^2 \\ \left\langle \mu_0^2 \frac{\partial U_{1,j+1}^2}{\partial x_1}, \beta \right\rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \left\langle \mu_0^1 \frac{\partial U_{1,j+1}^1}{\partial x_1}, \beta \right\rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \text{ pour tout } \beta \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{cases} \quad (5.107)$$

$$\quad (5.108)$$

iii) calculer λ_{j+1}^{vit} :

$$\lambda_{j+1}^{vit} = \theta U_{1,j+1|\Gamma}^2 + (1 - \theta) \lambda_j^{vit}, \quad \theta > 0 \quad (5.109)$$

Proposition 9. *L'algorithme $(D_1 N_2)$ (5.105)-(5.109) est équivalent à la procédure préconditionnée de Richardson (5.104).*

Démonstration. Pour tout $\beta^{vit} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ on a

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{S}_2^{vit} U_{1,j+1|\Gamma}^2, \beta^{vit} \right\rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} &= \left\langle \mathcal{S}_2^{vit} U_{1,j+1|\Gamma}^2 - U_1^{2,*}|_{\Gamma}, \beta^{vit} \right\rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ &= a_{vit}^2(U_{j+1}^2 - U^{2,*}, U^{2,\beta^{vit}}) \\ &= b_{vit}^1(U_1^{1,\beta^{vit}}) + b_{vit}^2(U^{2,\beta^{vit}}) \\ &\quad - a_{vit}^1(U_{1,j+1}^1, U_1^{1,\beta^{vit}}) - a_{vit}^1(U_1^{1,*}, U_1^{1,\beta^{vit}}) \end{aligned}$$

Par ailleurs pour tout $\beta^{vit} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ on a

$$\begin{aligned} a_{vit}^1(U_{1,j+1}^1, U_1^{1,\beta^{vit}}) &= a_{vit}^1(U_1^{1,U_{1,j+1|\Gamma}^1 - U_1^{i,*}}, U_1^{1,\beta^{vit}}) + a_{vit}^1(U_1^{1,*}, U_1^{1,\beta^{vit}}) \\ &= \left\langle \mathcal{S}_1^{vit} \lambda_j^{vit}, \beta^{vit} \right\rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + a_{vit}^1(U_1^{1,*}, U_1^{1,\beta^{vit}}). \end{aligned}$$

D'où

$$\left\langle \mathcal{S}_2^{vit} U_{1,j+1|\Gamma}^2, \beta^{vit} \right\rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \left\langle \chi^{vit}, \beta^{vit} \right\rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} - \left\langle \mathcal{S}_1^{vit} \lambda_j^{vit}, \beta^{vit} \right\rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

C'est à dire

$$\mathcal{S}_2^{vit} U_{1,j+1|\Gamma}^2 = \chi^{vit} - \mathcal{S}_1^{vit} \lambda_j^{vit} \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

et

$$U_{1,j+1|\Gamma}^2 = (\mathcal{S}_2^{vit})^{-1}(\chi^{vit} - \mathcal{S}_1^{vit} \lambda_j^{vit}).$$

Finalement

$$\lambda_{j+1}^{vit} = \theta U_{1,j+1|\Gamma}^2 + (1 - \theta) \lambda_j^{vit} = \theta (\mathcal{S}_2^{vit})^{-1}(\chi^{vit} - \mathcal{S}_1^{vit} \lambda_j^{vit}) + (1 - \theta) \lambda_j^{vit}$$

□

Ainsi on obtient le résultat de convergence de la méthode itérative $(D_1 N_2)$ (5.105)-(5.109) *

Corollaire 2. *Pout tout $0 < \theta < \theta_{\max}$, et pour tout $\lambda_0^{vit} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ fixé, la suite $(U_{1,j}^1, U_j^2) \in \mathbf{V}^1 \times \mathbf{V}^2$ converge vers la solution 2-domaines $(U_1^1, U^2) \in \mathbf{V}^1 \times \mathbf{V}^2$.*

5.6 MDD pour l'étape de transport

5.6.1 Formulation faible

Posons les espaces de Sobolev anisotropes suivants

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^1 &= \left\{ \varphi^1 \in L^2(\Omega_1); \frac{\partial(U_1^1 \varphi^1)}{\partial x_1} \in L^2(\Omega_1), \varphi^1|_{\partial\Omega_1^-} = 0 \right\} \\ \mathbf{Q}^2 &= \left\{ \varphi^2 \in L^2(\Omega_2); \nabla \cdot (U^2 \varphi^2) \in L^2(\Omega_2), \varphi^2|_{\partial\Omega_2^-} = 0 \right\} \end{aligned}$$

*. On peut aussi résoudre le problème faible (5.88)-(5.91) avec l'algorithme $(D_2 N_1)$ consistant à résoudre le sous-problème défini sur Ω_2 avec une condition de Dirichlet et celui sur Ω_1 avec une condition de Neumann. Dans ce cas le schéma de *Richardson* est donnée par

$$\lambda_{j+1}^{vit} = \lambda_j^{vit} + \theta (\mathcal{S}_1^{vit})^{-1}(\chi^{vit} - (\mathcal{S}_2^{vit} + \mathcal{S}_1^{vit}) \lambda_j^{vit}),$$

munis respectivement des normes du graphe

$$\begin{aligned}\|\varphi^1\|_{\mathbf{Q}^1} &= \left[\|\varphi^1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} (U_1^1 \varphi^1) \right\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \right]^{1/2} \\ \|\varphi^2\|_{\mathbf{Q}^2} &= \left[\|\varphi^2\|_{L^2(\Omega_2)}^2 + \|\nabla \cdot (U^2 \varphi^2)\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \right]^{1/2}\end{aligned}$$

On introduit aussi les sous-espaces suivantes

$$\mathbf{Q}_0^1 = \left\{ \varphi^1 \in \mathbf{Q}^1; \varphi^1|_{\Gamma_1^-} = 0 \right\} \subset \mathbf{Q}^1, \quad \mathbf{Q}_0^2 = \left\{ \varphi^2 \in \mathbf{Q}^2; \varphi^2|_{\Gamma_2^-} = 0 \right\} \subset \mathbf{Q}^2$$

Considérons aussi les formes bilinéaires suivantes

$$\begin{aligned}a_{haut}^1(\varphi^1, \psi^1) &= \int_{\Omega_1} \left(\frac{3}{2} \varphi^1 + \frac{\partial}{\partial x_1} (U_1^1 \varphi^1) \right) \psi^1 dx \\ b_{haut}^1(\psi^1) &= \int_{\Omega_1} \mathcal{N}^1 \psi^1 dx \\ a_{haut}^2(\varphi^2, \psi^2) &= \int_{\Omega_2} \left(\frac{3}{2} \varphi^2 + \nabla \cdot (U^2 \varphi^2) \right) \psi^2 dx \\ b_{haut}^2(\psi^2) &= \int_{\Omega_2} \mathcal{N}^2 \psi^2 dx\end{aligned}$$

Une formulation faible du problème (5.78)-(5.82) est de trouver $(\zeta^1, \zeta^2) \in \mathbf{Q}^1 \times \mathbf{Q}^2$ tel que

$$\begin{cases} a_{haut}^1(\zeta^1, \varphi^1) = b_{haut}^1(\varphi^1) \text{ pour tout } \varphi^1 \in \mathbf{Q}_0^1 & (5.110) \\ \zeta^1|_{\Gamma} = \zeta^2|_{\Gamma} & (5.111) \\ a_{haut}^2(\zeta^2, \varphi^2) = b_{haut}^2(\varphi^2) \text{ pour tout } \varphi^2 \in \mathbf{Q}_0^2 & (5.112) \end{cases}$$

5.6.2 Formulation de Steklov-Poincaré

Dans cette partie, on considère une formulation différente pour le problème faible (5.110)-(5.112). Précisément, on introduit encore une équation de la seule variable de l'interface. L'obtention de la solution de cette équation d'interface permet d'obtenir les inconnues ζ^i , $i = 1, 2$.

Soit λ^{haut} une fonction définie sur $\Gamma^- \cup \Gamma^+$, on introduit les opérateurs d'extension $\zeta^{i, \lambda^{haut}}$, $i = 1, 2$ comme suit :

- $\zeta^{i, \lambda^{haut}} \in Q^i$ vérifiant :

$$\begin{cases} a_{haut}^i(\zeta^{i, \lambda^{haut}}, \varphi^i) = 0 \quad \forall \varphi^i \in \mathbf{Q}_0^i & (5.113) \\ \zeta^{i, \lambda^{haut}}|_{\Gamma_i^-} = \lambda^{haut} & (5.114) \end{cases}$$

De même on définit les extensions Dirichlet-homogènes $\zeta^{i,*}$, $i = 1, 2$ comme suit :

- $\zeta^{i,*} \in Q^i$ vérifiant :

$$\begin{cases} a_{haut}^i(\zeta^{i,*}, \varphi^i) = b_{haut}^i(\varphi^i) \quad \forall \varphi^i \in \mathbf{Q}_0^i & (5.115) \\ \zeta^{i,*}|_{\Gamma_i^-} = 0 & (5.116) \end{cases}$$

Posons l'espace de Hilbert suivant [76, 48, 47]

$$L_{U_1}^2(\Gamma^- \cup \Gamma^+) := \left\{ \varphi : \Gamma^- \cup \Gamma^+ \longrightarrow \mathbb{R} \mid \|\varphi\|_{U_1}^2 = \int_{\Gamma^- \cup \Gamma^+} (U_1)^2 v^2 < \infty \right\}$$

et son dual topologique

$$L_{\frac{1}{U_1}}^2(\Gamma^- \cup \Gamma^+) := \left\{ \varphi : \Gamma^- \cup \Gamma^+ \longrightarrow \mathbb{R} \mid \|\varphi\|_{\frac{1}{U_1}}^2 = \int_{\Gamma^- \cup \Gamma^+} \left(\frac{1}{U_1}\right)^2 v^2 < \infty \right\}$$

L'équation de Steklov-Poincaré correspondant au couplage (5.110)-(5.112) s'écrit par

$$S^{haut} \lambda^{haut} := U_1 \zeta^{1, \lambda^{haut}} - U_1 \zeta^{2, \lambda^{haut}} = -U_1 \zeta^{1,*} + U_1 \zeta^{2,*} := \chi^{haut} \quad \text{sur } \Gamma^- \cup \Gamma^+. \quad (5.117)$$

Une analyse théorique de l'opérateur $S^{haut} : L_{U_1}^2 \longrightarrow L_{1/U_1}^2$ est bien détaillé dans [47]. Ainsi suivant les résultats de ce papier on peut voir que l'opérateur S^{haut} est borné, positif, et bijectif de $L_{U_1}^2(\Gamma^- \cup \Gamma^+)$ dans son dual $L_{\frac{1}{U_1}}^2(\Gamma^- \cup \Gamma^+)$. Ce qui prouve que l'équation d'interface (5.117) admet une unique solution, et on déduit ainsi l'unicité de solution du couplage (5.110)-(5.112) donné par

$$\zeta^i = \zeta^{i, \lambda^{haut}} + \zeta^{i,*}, \quad i = 1, 2$$

5.6.3 Schéma itératif entre sous-domaines

Pour résoudre le problème faible (5.110)-(5.112) on propose la procédure itérative suivante (voir aussi dans [48, 47, 50, 76]) : étant donné $\lambda_0^{haut} \in L_{U_1}^2(\Gamma^+)$, pour $j \geq 0$:

i) trouver $\zeta_{j+1}^1 \in \mathbf{Q}^1$ vérifiant :

$$\begin{cases} a_{haut}^1(\zeta_{j+1}^1, \varphi^1) = b_{haut}^1(\varphi^1) \quad \forall \varphi^1 \in \mathbf{Q}_0^1 \\ \zeta_{j+1}^1|_{\Gamma^+} = \lambda_j^{haut} \end{cases} \quad (5.118)$$

$$\zeta_{j+1}^1|_{\Gamma^+} = \lambda_j^{haut} \quad (5.119)$$

ii) trouver $\zeta_{j+1}^2 \in \mathbf{Q}^2$ vérifiant :

$$\begin{cases} a_{haut}^2(\zeta_{j+1}^2, \varphi^2) = b_{haut}^2(\varphi^2) \quad \forall \varphi^2 \in \mathbf{Q}_0^2 \\ \zeta_{j+1}^2|_{\Gamma^-} = \zeta_{j+1}^1 \end{cases} \quad (5.120)$$

$$\zeta_{j+1}^2|_{\Gamma^-} = \zeta_{j+1}^1 \quad (5.121)$$

iii) calculer λ_{j+1}^{haut} :

$$\lambda_{j+1}^{haut} = \zeta_{j+1}^2|_{\Gamma^+} \quad (5.122)$$

Pour chaque $\lambda^{haut} \in L_{U_1}^2(\Gamma^- \cup \Gamma^+)$, on note par $\lambda^{haut,-}$ et $\lambda^{haut,+}$ ses restrictions sur Γ^- et Γ^+ respectivement, et on introduit les opérateurs $J_1^{haut} : L_{U_1}^2(\Gamma^+) \longrightarrow L_{U_1}^2(\Gamma^-)$ et $J_2^{haut} : L_{U_1}^2(\Gamma^-) \longrightarrow L_{U_1}^2(\Gamma^+)$ comme suit

$$J_1^{haut} \lambda^{haut,+} := (\zeta^{1, \lambda^{haut,+}})|_{\Gamma^-}, \quad J_2^{haut} \lambda^{haut,-} := (\zeta^{2, \lambda^{haut,-}})|_{\Gamma^+}.$$

L'opérateur d'itération associé à (5.118)-(5.122) est donnée par $J_2^{haut} J_1^{haut}$, et dans [47, 48] il est prouvé que c'est une contraction dans $L_{U_1}^2(\Gamma^+)$. Ainsi l'itéré λ_j^{haut} du schéma (5.118)-(5.122) est convergent dans $L_{U_1}^2(\Gamma^+)$, et la limite $\lambda^{haut} = \zeta^{1, haut}|_{\Gamma^+} = \zeta^{2, haut}|_{\Gamma^+}$, où $(\zeta^{1, haut}, \zeta^{2, haut}) \in \mathbf{Q}^1 \times \mathbf{Q}^2$ est la solution de (5.110)-(5.112).

Dans [47], l'algorithme (5.119)-(5.122) est interprété en une méthode préconditionnée de Richardson sans relaxation (i.e $\theta = 1$) appliquée à l'opérateur d'interface S^{haut} , avec $Q^{-1} = ((1/U_1)S^{haut}(1/U_1))^{-1}$ comme préconditionneur.

5.7 Approximation de Galerkin

Soit $\{\mathcal{P}_h(\Omega)\}_h$ une triangulation assez régulière et uniforme de Ω , avec

$$h = \max_{\mathcal{T} \in \mathcal{P}_h(\Omega)} h_{\mathcal{T}}$$

$h_{\mathcal{T}}$ étant le diamètre de l'élément $\mathcal{T}$. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $s \geq 0$ restreintes au triangle $\mathcal{T} \in \mathcal{P}_h(\Omega)$ est noté par $\mathbf{P}_s(\mathcal{T})$.

Les triangulations $\mathcal{P}_{1h}(\Omega_1)$ et $\mathcal{P}_{2h}(\Omega_2)$ induisent sur les sous-domaines Ω_1 et Ω_2 sont compatibles sur Γ , c'est à dire qu'elles y admettent les mêmes sommets et côtés. Par ailleurs on suppose que $\Gamma = \bigcup \Sigma_l$, de sortes que Σ_l est un côté d'un triangle $\mathcal{T} \in \mathcal{P}_h$, et on a $\Sigma_l \in \Gamma^-$ ou $\Sigma_l \in \Gamma^+$, ou $\Sigma_l \in \Gamma^0$.

5.7.1 Etape de diffusion

On définit les espaces discrets suivants

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1^{k,h} &= \left\{ \varphi_1^{k,h} \in C^0(\overline{\Omega_k}) \cap \mathbf{V}_1^k; \varphi_1^{k,h}|_{\mathcal{T}} \in \mathbf{P}_2(x_1, x_2), \forall \mathcal{T} \in \mathcal{P}_{kh}(\Omega_k) \right\} \\ \mathbf{V}_2^{2,h} &= \left\{ \varphi_2^{2,h} \in C^0(\overline{\Omega_2}) \cap \mathbf{V}_2^2; \varphi_2^{2,h}|_{\mathcal{T}} \in \mathbf{P}_2(x_1, x_2), \forall \mathcal{T} \in \mathcal{P}_{2h}(\Omega_2) \right\} \end{aligned}$$

puis on pose

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{1,h} &= \mathbf{V}_1^{1,h} \\ \mathbf{V}^{2,h} &= \mathbf{V}_1^{2,h} \times \mathbf{V}_2^{2,h} \\ \mathbf{V}_0^{1,h} &= \mathbf{V}_1^{1,h} \cap \mathbf{V}_0^1 \\ \mathbf{V}_0^{2,h} &= \mathbf{V}_1^{2,h} \cap \mathbf{V}_0^2 \\ \mathbf{V}^h &= (\mathbf{V}_1^{1,h} \times \mathbf{V}_1^{2,h}) \cap \mathbf{V} \\ \wedge_h^{vit} &= \{\beta^{vit,h} = \varphi_1^h|_{\Gamma}; \varphi_1^h \in \mathbf{V}^h\} \end{aligned}$$

L'approximation de Galerkin du schéma (5.105)-(5.109) est donnée par : pour $\lambda_0^{vit,h} \in \wedge_h^{vit}$ fixé, et pour $j \geq 0$

i) trouver $U_{1,j+1}^{1,h} \in \mathbf{V}^{1,h}$ vérifiant :

$$\begin{cases} a_{vit}^1(U_{1,j+1}^{1,h}, \varphi_1^{1,h}) = b_{vit}^1(\varphi_1^{1,h}) \text{ pour tout } \varphi_1^{1,h} \in \mathbf{V}_0^{1,h} \\ U_{1,j+1}^{1,h}|_{\Gamma} = \lambda_j^{vit,h} \end{cases} \quad (5.123)$$

$$(5.124)$$

ii) trouver $U_{j+1}^{2,h} \in \mathbf{V}^{2,h}$ vérifiant :

$$\begin{cases} a_{vit}^2(U_{j+1}^{2,h}, \varphi^{2,h}) = b_{vit}^2(\varphi^{2,h}) \text{ pour tout } \varphi^{2,h} \in \mathbf{V}_0^{2,h} \\ \left\langle \mu_0^2 \frac{\partial U_{1,j+1}^{2,h}}{\partial x_1}, \beta^{vit,h} \right\rangle_{\wedge_h^{vit}} = \left\langle \mu_0^1 \frac{\partial U_{1,j+1}^{1,h}}{\partial x_1}, \beta^{vit,h} \right\rangle_{\wedge_h^{vit}} \text{ pour tout } \beta^{vit,h} \in \wedge_h^{vit} \end{cases} \quad (5.125)$$

$$(5.126)$$

iii) calculer $\lambda_{j+1}^{vit,h}$:

$$\lambda_{j+1}^{vit,h} = (1 - \theta) \lambda_j^{vit,h} + \theta U_{1,j+1}^{2,h}, \quad \theta > 0 \quad (5.127)$$

Comme dans le cas continu, ce schéma peut être interprété par un algorithme du type Richardson

$$\lambda_{j+1}^{vit,h} = \lambda_j^{vit,h} + \theta (S_2^{vit,h})^{-1} (\chi^{vit,h} - (S_2^{vit,h} + S_1^{vit,h}) \lambda_j^{vit,h}) \quad (5.128)$$

définis par les opérateurs d'interface discrets $S_i^{vit,h}$, $i = 1, 2$. En appliquant le résultat de convergence du théorème 11, on a le résultat suivant.

Théorème 12. *Soit*

$$\theta_{\max} = \frac{2m_{\mathcal{S}^{vit}}m_{\mathcal{S}_2^{vit}}}{M_{\mathcal{S}_2^{vit}}(M_{\mathcal{S}_1^{vit}} + M_{\mathcal{S}_2^{vit}})}$$

Etant donné $\lambda_0^{vit,h} \in \Lambda_h^{vit}$ et $0 < \theta < \theta_{\max}$, la suite $(\lambda_j^{vit,h})_{j \geq 0}$ induite par (5.128) converge dans Λ_h^{vit} vers $\lambda^{vit,h}$ solution de l'équation d'interface discrète

$$\mathcal{S}^{vit,h} \lambda^{vit,h} = \chi^{vit,h} \quad (5.129)$$

Autrement dit la suite $(U_{1,j}^{1,h}, U_j^{2,h}) \in \mathbf{V}^{1,h} \times \mathbf{V}^{2,h}$ induite par (5.123)-(5.127) converge faiblement dans $\mathbf{V}^{1,h} \times \mathbf{V}^{2,h}$ vers $(U_1^{1,h}, U^{2,h}) \in \mathbf{V}^{1,h} \times \mathbf{V}^{2,h}$ vérifiant la formulation 2-domaines équivalente à l'équation d'interface (5.129).

5.7.2 Etape de transport

La méthode des éléments finis que nous adoptons pour l'étape de transport est la méthode de Petrov-Galerkin connue sous le nom de Streamline Diffusion ou encore l'abréviation SUPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin). L'idée principale consiste à utiliser des fonctions tests définies par la somme d'un élément arbitraire d'un espace d'éléments finis continus et une dérivation convenable de cette fonction (voir [25] (A. N. Hughes et T. J. Brooks (1982)), [55] (Hughes (1987)), [58] (Johnson (1987)) et leurs différentes références). Cette méthode d'ajout de la diffusion artificielle contribue à réduire les oscillations numériques indésirées jusqu'à les supprimer. Mais plus on ajoute, plus on fausse le problème de base qui est convectif et tout sauf diffusif. Il vaudrait donc bien filtrer la diffusion transversale aux lignes de courant pour éviter de détruire les lignes voisines avec des valeurs incorrectes. On considère les espaces discrets

$$\mathbf{Q}^{k,h} = \{\varphi^{k,h} \in C^0(\overline{\Omega}_k) \cap \mathbf{Q}^k \mid \varphi^{k,h}|_{\mathcal{T}} \in \mathbf{P}_1(x_1, x_2) \quad \forall \mathcal{T} \in \mathcal{P}_{kh}\}.$$

On considère aussi une approximation de $L_{u_1}^2$. Pour Σ une union quelconque de côtés de la triangulation situés sur Γ , on introduit l'espace discret

$$\Lambda_h^{dth}(\Sigma) = \{\varphi^h \in L_{U_1}^2(\Sigma) \mid \varphi|_I \in \mathbf{P}_s(I) \quad \forall I \in \mathcal{P}_h(\Sigma)\}.$$

Ainsi pour $\lambda_0^{haut,h} \in \Lambda_h^{haut}(\Gamma)$ donné, la forme discrète du schéma itératif (5.118)-(5.122) est donnée par :

i) trouver $\zeta_{j+1}^{1,h} \in \mathbf{Q}^{1,h}$:

$$\begin{cases} a_{haut}^1(\zeta_{j+1}^{1,h}, \varphi_1^{1,h} + \vartheta \frac{\partial}{\partial x_1}(U_1^1 \varphi_1^{1,h})) = b_{haut}^1(\varphi_1^{1,h} + \vartheta \frac{\partial}{\partial x_1}(U_1^1 \varphi_1^{1,h})) \\ \zeta_{j+1}^{1,h}|_{\Gamma^+} = \lambda_j^{haut,h} \end{cases} \quad (5.130)$$

$$\zeta_{j+1}^{1,h}|_{\Gamma^+} = \lambda_j^{haut,h} \quad (5.131)$$

ii) trouver $\zeta_{j+1}^{2,h} \in \mathbf{Q}^{2,h}$:

$$\begin{cases} a_{haut}^2(\zeta_{j+1}^{2,h}, \varphi^{2,h} + \vartheta \nabla \cdot (U^2 \varphi^{2,h})) = b_{haut}^2(\varphi^{2,h} + \vartheta \nabla \cdot (U^2 \varphi^{2,h})) \\ \zeta_{j+1}^{2,h}|_{\Gamma^-} = \zeta_{j+1}^{1,h} \end{cases} \quad (5.132)$$

$$\zeta_{j+1}^{2,h}|_{\Gamma^-} = \zeta_{j+1}^{1,h} \quad (5.133)$$

iii) calculer $\lambda_{j+1}^{haut,h}$:

$$\lambda_{j+1}^{haut,h} = \zeta_{j+1}^{2,h}|_{\Gamma^+} \quad (5.134)$$

pour tout $(\varphi_1^{1,h}, \varphi^{2,h}) \in \mathbf{Q}_0^{1,h} \times \mathbf{Q}_0^{2,h}$. La convergence de cet algorithme est prouvée dans [48, 50] suivant le procédé du cas continu.

5.8 Résultats numériques

5.8.1 Choix de la viscosité

Comme il a pu être détaillé tout au long de cette partie, le choix de la viscosité pour traduire l'anisotropie d'un écoulement est purement expérimental car dépendant du domaine d'étude.

Même si la viscosité cinématique de l'eau qui est de l'ordre de $10^{-6} [m^2/s]$ exprime mieux l'aspect moléculaire de l'écoulement de l'eau, elle est moins adaptée pour traduire les effets de turbulence de son mouvement. Expérimentalement, pour prendre en compte cet aspect géophysique, l'idée technique consiste à calibrer cette viscosité cinématique en fonction des dimensions caractéristiques du domaine d'étude afin d'obtenir la viscosité turbulente. Généralement elle est déterminée par le nombre de Reynolds qui modélise le rapport des termes non linéaires sur les termes visqueuses.

Cette méthode est très courante dans les simulations d'équations d'écoulement. Parfois elle est utilisée pour éliminer les oscillations numériques.

On présente dans cette section quelques résultats numériques pour illustrer l'influence de la viscosité et des conditions aux bords sur la stabilité des algorithmes et la qualité de la solution numérique (hauteur).

Une première remarque découle du théorème 12. On observe que les constantes physiques sont déterminantes dans l'estimation théorique de la borne supérieure $\theta_{\max}$ des paramètres de relaxation. En particulier, lorsque les termes de viscosité μ_0^k et τ décroissent, il est nécessaire de considérer de petites valeurs pour θ afin de garantir la convergence. Malheureusement dans certains cas, θ peut être petit mais qu'en pratique la convergence n'est pas assurée. Ainsi, le choix d'une viscosité turbulente reste préférable puisqu'il offre plus de possibilité de convergence du schéma itératif de l'étape de diffusion.

Dans la suite le domaine de calcul Ω tel que

$$\Omega_1 = [0, 3] \times [-1, 1], \quad \Omega_2 = [-3, 0] \times [-3, 3], \quad \Gamma = \{0\} \times [-1, 1]$$

est présenté, et le temps final est fixé à $T = 1s$. Les constantes physiques suivantes sont utilisées :

- $\mu_0^1 = \mu_0^2 = 10^{-1} [m^2/s]$ (cas d'une viscosité turbulente)
- $\mu_0^1 = \mu_0^2 = 10^{-6} [m^2/s]$ (cas d'une viscosité cinématique).
- $\vartheta = 0.53$, $g = 9.81$.
- Les conditions initiales sont données par

$$\zeta(x, 0) = \begin{cases} 0.3 & \text{pour } x \leq -2.75 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} (0.1, 0) & \text{pour } x \leq -2.75 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

- Pour les deux schémas itératifs la tolérance est fixée à $tol = 10^{-7}$.

Cette expérience simule le passage d'une vague océanique sur l'interface avant de s'écraser dans le fleuve.

Les matrices issues des sous-problèmes de diffusion sont symétriques, définies positives, alors que celles des sous-problèmes de transport sont asymétriques. Par ailleurs la plupart des composantes de ces matrices sont nulles. Pour ces raisons, elles sont stockées en format creux, et la résolution se fait par la méthode du gradient conjugué pour les systèmes de l'étape de diffusion, et par la méthode du gradient bi-conjugué pour ceux de l'étape de transport (une description du gradient conjugué et du gradient bi-conjugué avec préconditionnement dans le cadre général des méthodes de projection de Krylov est détaillée dans l'annexe B).

En considérant $h = 10^{-2}$, $\theta = 0.4$, et $\tau = 10^{-3}$, on présente sur la figure (5.3) la hauteur dans la jonction à $t = 1.s$, calculée avec la viscosité cinématique de l'eau.

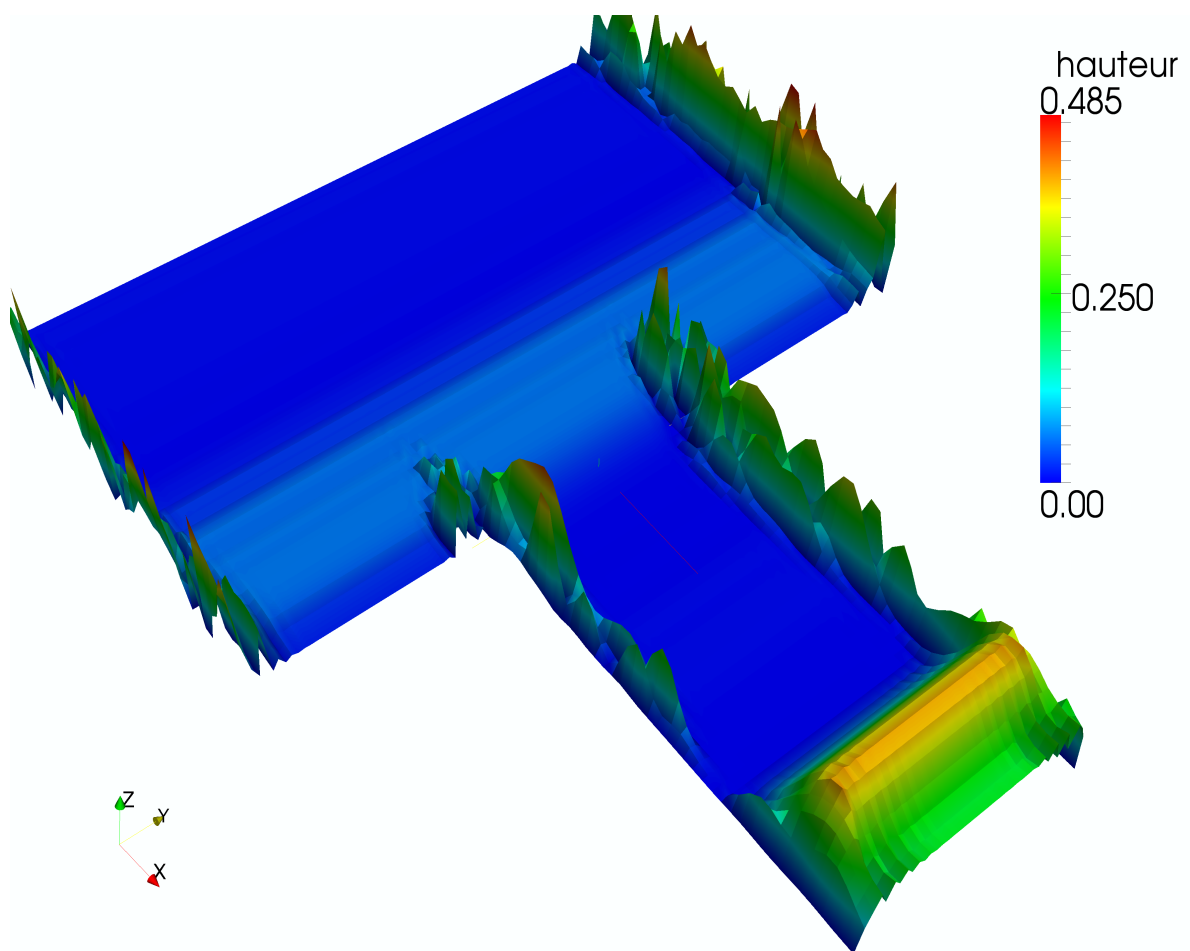


FIGURE 5.3 – Hauteur à $t = 1.s$ avec viscosité cinématique et conditions d'adhérence

On observe une présence d'oscillations numériques sévères causées par l'absence de diffusion numérique[†]. Plus important encore le mouvement de l'écoulement n'est pas bien déterminé par les contours de la hauteur (normalement orienté de Ω_2 vers Ω_1).

Plusieurs constantes physiques peuvent être mis en question, notamment le paramètre de diffusion ϑ défini dans l'étape de transport et la viscosité du problème de diffusion.

Pour avoir une idée, on analyse maintenant le schéma itératif Dirichlet-Neumann avec $\theta = 0.4$ et pour différentes valeurs de h et τ . Puisque les termes de viscosité sont les plus aptes à assurer l'ellipticité du problème de diffusion, on peut s'attendre qu'ils puissent influencer dans la convergence du schéma itératif.

Dans la table 5.1 (resp. table 5.2) nous reportons le nombre maximum d'itérations sur tous les pas

τ	$h = 0.15$	$h = 0.04$	$h = 0.035$	$h = 0.0125$	$h = 0.0087$	$h = 0.0053$
1/40	7	9	6	13	11	5
1/150	9	9	12	19	11	7
1/300	10	9	15	22	16	19
1/500	12	13	17	22	25	21
1/1000	15	18	17	25	27	33
1/2000	16	19	19	30	33	34

TABLE 5.1 – Itération maximale de l'algorithme Dirichlet-Neumann avec la viscosité turbulente

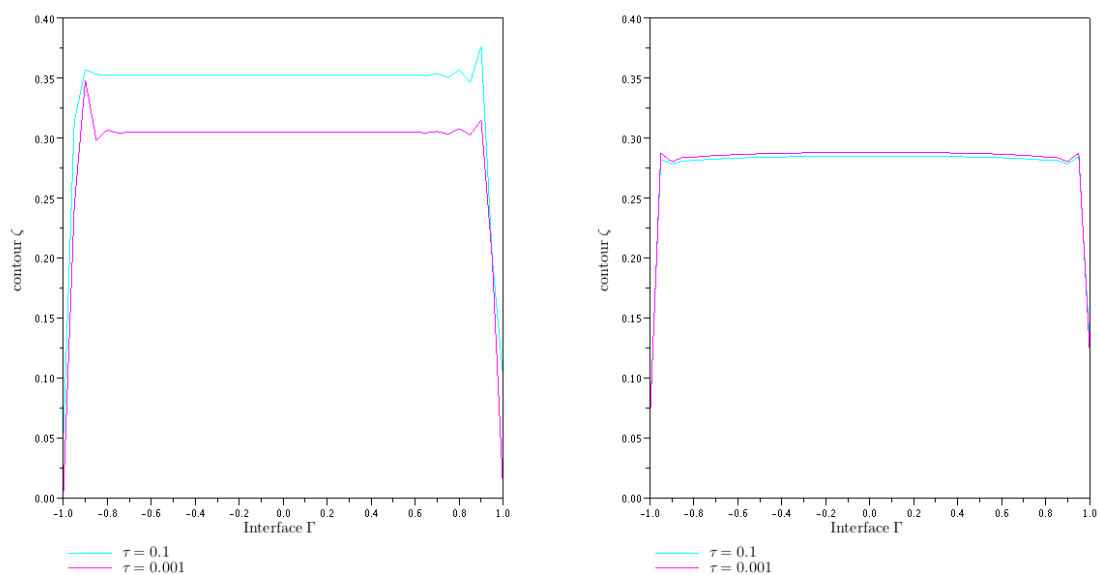
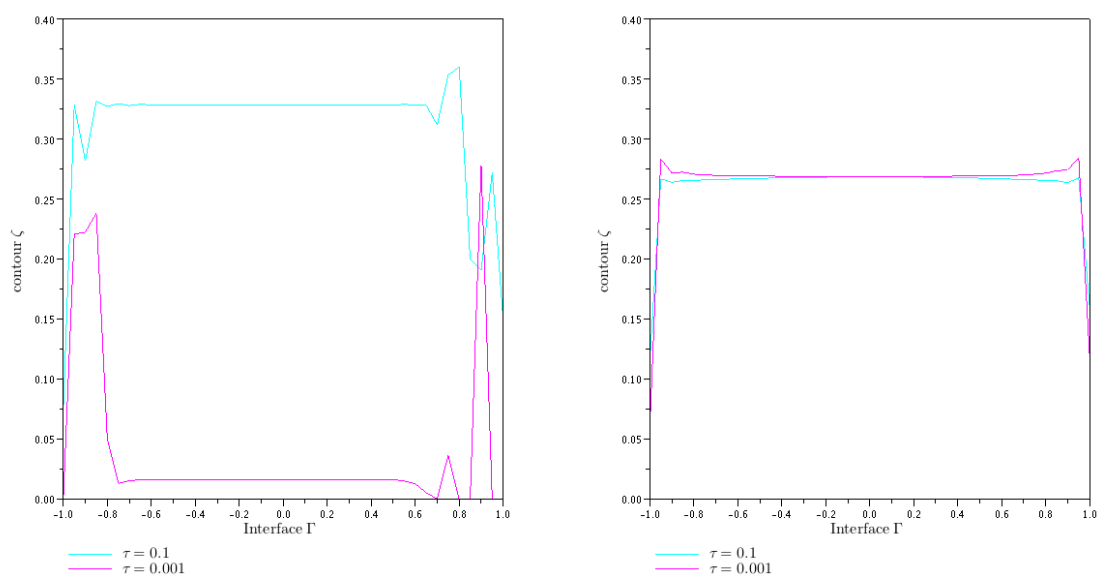
τ	$h = 0.15$	$h = 0.04$	$h = 0.035$	$h = 0.0125$	$h = 0.0087$	$h = 0.0053$
1/40	17	9	9	9	11	27
1/150	31	#	13	159	#	#
1/300	40	5	#	12	16	#
1/500	112	123	117	175	108	#
1/1000	#	18	17	9	11	#
1/2000	#	#	#	#	#	#

TABLE 5.2 – Itération maximale de l'algorithme Dirichlet-Neumann avec la viscosité cinématique

de temps pour obtenir la convergence de l'algorithme Dirichlet-Neumann dans le cas de la viscosité turbulente (resp. cinématique) suivant les constantes de discrétisation τ et h . Le symbole # indique que le schéma ne converge pas avant $maxit = 190$ itérations. On constate que dans le cas cinématique, le schéma rencontre des difficultés de convergence pour certaines valeurs de τ . En fait, dans de tels cas la méthode converge après un nombre important d'itérations dépendant de h . A l'opposé, on remarque une bonne tenue de la viscosité turbulente par rapport à la convergence du schéma itératif Dirichlet-Neumann.

Ces résultats influent en conséquence sur la stabilité du schéma itératif de l'étape de transport, comme le montre les figures 5.4 et 5.5 représentant respectivement les iso-contours de la hauteur sur l'interface pour $\tau = 0.1$ et $\tau = 10^{-3}$.

[†]. On peut définir la diffusion numérique par l'accumulation d'erreurs et l'effet d'approximations au cours des pas de temps qui font ressembler la solution numérique à celle d'une équation ayant un terme de diffusion.

FIGURE 5.4 – Coupes de la hauteur sur Γ à $t = 0.5s$ cas cinématique (gauche), cas turbulent (droite)FIGURE 5.5 – Coupes de la hauteur sur Γ à $t = 1.s$ cas cinématique (gauche), cas turbulent (droite)

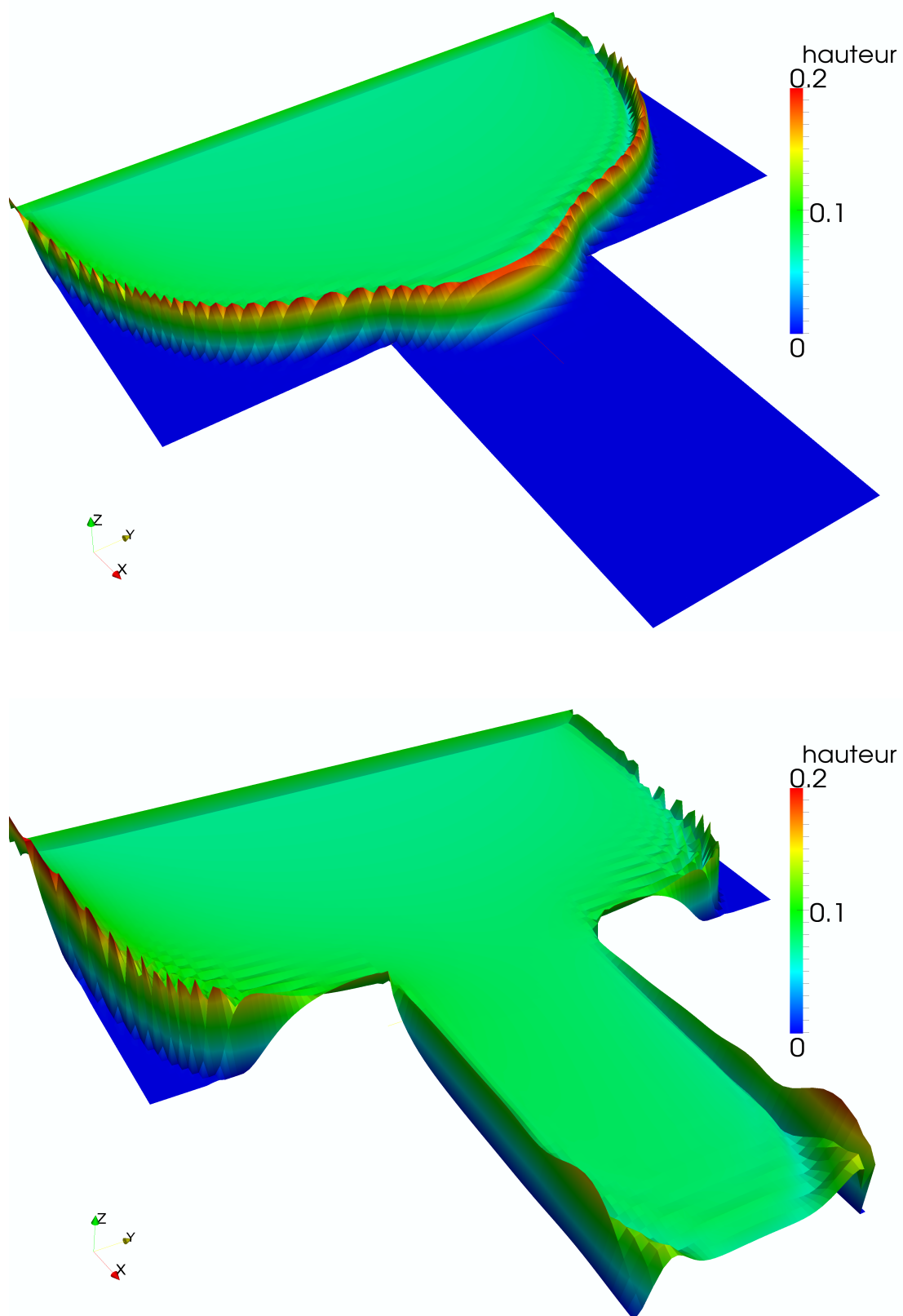
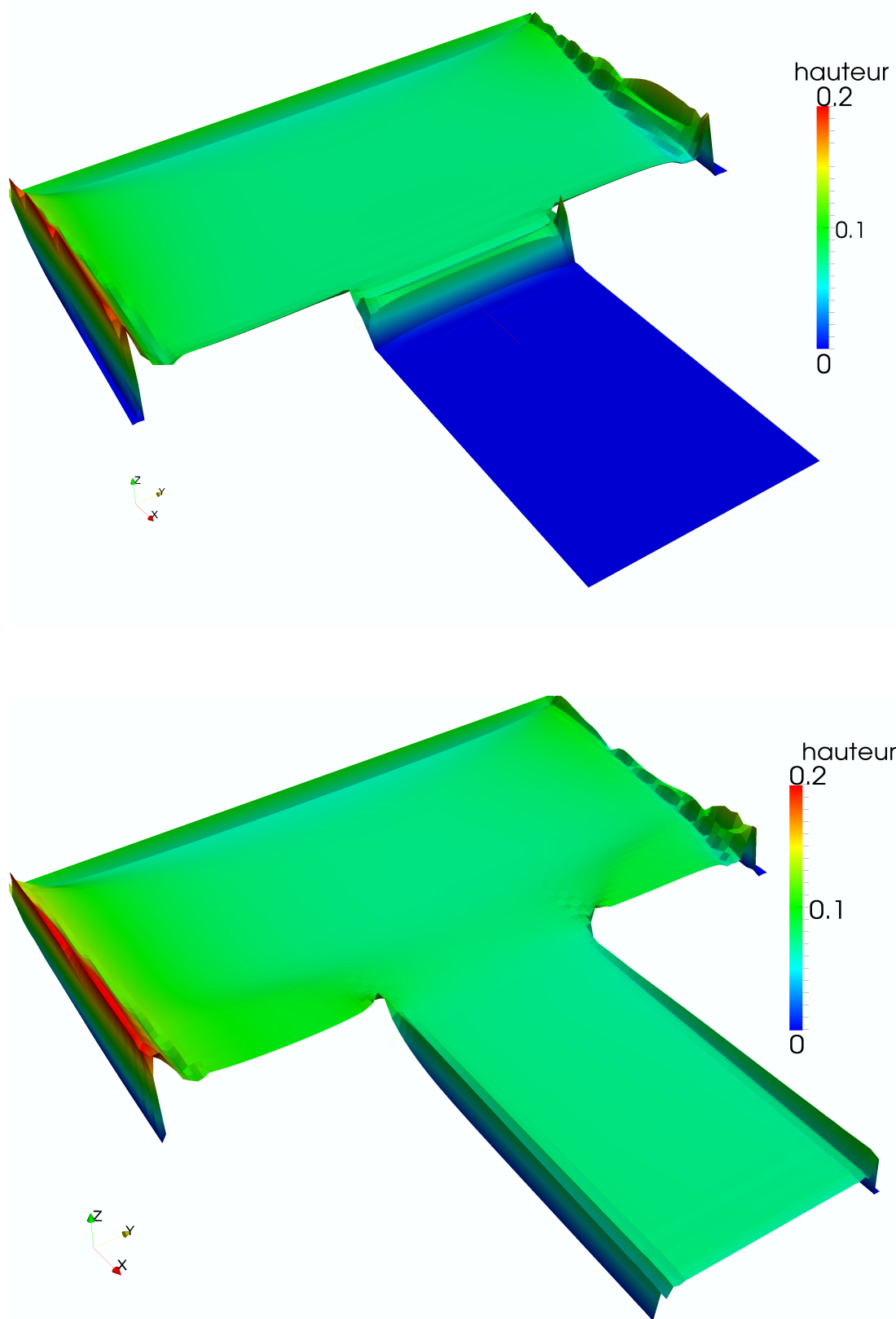


FIGURE 5.6 – Hauteur à $t = .5s, 1s$ avec viscosité turbulente et conditions d'adhérence

FIGURE 5.7 – Hauteur à $t = .5s, 1s$ avec viscosité turbulente et conditions de glissement

On observe que le cas cinématique montre plus d'oscillations, et est instable suivant τ , contrairement au cas turbulent où les formes des deux courbes sont très proches en $t = 0.5s$ et $1s$. Finalement on déduit que le schéma Dirichlet-Neumann proposé n'étant effectif que lorsque le produit $\mu_0^k \tau$ est suffisamment grand (ce qui permet de garantir l'ellipticité des sous-problèmes), est en partie à la base des difficultés de la solution avec viscosité cinématique.

Pour ces raisons le choix de la viscosité turbulente garantit mieux la stabilité des algorithmes de décomposition de domaine, et en conséquence la qualité de la solution numérique est plus représentative comme nous le montrent les figures (5.6) présentant la solution hauteur de l'étape de transport aux temps $t = 0.5, 1s$. On constate que la continuité de l'écoulement sur l'interface se passe remarquablement bien. Mieux encore l'écoulement se dirige vers l'interface de manière convergente. Cependant on peut noter que la direction prise par l'écoulement n'est pas seulement liée au choix de la viscosité. Pour s'en convaincre on simule le problème en considérant l'étape de diffusion avec des conditions de glissement, i.e les équations (5.83)-(5.87).

Les valeurs de la hauteur aux pas de temps $t = 0.5s$ et $t = 1s$ sont présentées respectivement sur les figures (5.7). A l'opposé des conditions d'adhérence, les nouvelles conditions de glissement permettent aux courants de se diriger vers l'interface de manière perpendiculaire sans devier de leurs trajectoires, ce qui induit des effets d'overshootings sur les bords de Ω_2 .

5.8.2 Courants de vitesse

L'évolution des courants de vitesse dans une jonction fleuve/océan comme dans toute zone côtière est largement influencée par les directions prises par les vents qui y soufflent. On étudie une expérience simple permettant d'illustrer cette influence.

Considérons le domaine d'étude Ω définie par

$$\Omega_1 = [0, 3] \times [-1, 1], \quad \Omega_2 = [-3, 0] \times [-3, 3], \quad \Gamma = \{0\} \times [-1, 1]$$

Les constantes physiques suivantes sont utilisées :

- $\mu_0^1 = \mu_0^2 = 10^{-1} [m^2/s]$ (cas d'une viscosité turbulente)
- $\vartheta = 0.53, g = 9.81, \tau = 10^{-3}, h = 10^{-2}$
- On pose

$$\Gamma_e = \{-3\} \times (-3, 3), \quad \Gamma_s = \{1\} \times (-1, 1)$$

avec les conditions limites suivantes

$$u(x, t) = 1.0, \quad \zeta(x, t) = 0.3 \quad \text{pour} \quad x \in \Gamma_e \cup \Gamma_s$$

et

$$u(x, 0) = \zeta(x, 0) = 0.0$$

- Pour les deux schémas itératifs la tolérance est fixée à $tol = 10^{-7}$.

On simule les courants de vitesse sortant de l'océan et entrant dans le fleuve (ou dans la direction Ouest-Est pour la brèche du fleuve sénégal sur l'océan atlantique). On suppose que ces courants rencontrent une perturbation liée au vent, qui souffle dans la direction Nord-Sud i.e

$$F_s^1 = (F_{1,s}^1, F_{2,s}^1) = (0, 0), \quad F_s^2 = (F_{1,s}^2, F_{2,s}^2) = (0, -0.1)$$

Les figures (5.8)-(5.11) présentent les courants de vitesses et le niveau de la hauteur d'eau dans la jonction pour les deux conditions aux bords (adhérence ou glissement du fluide sur les bords).

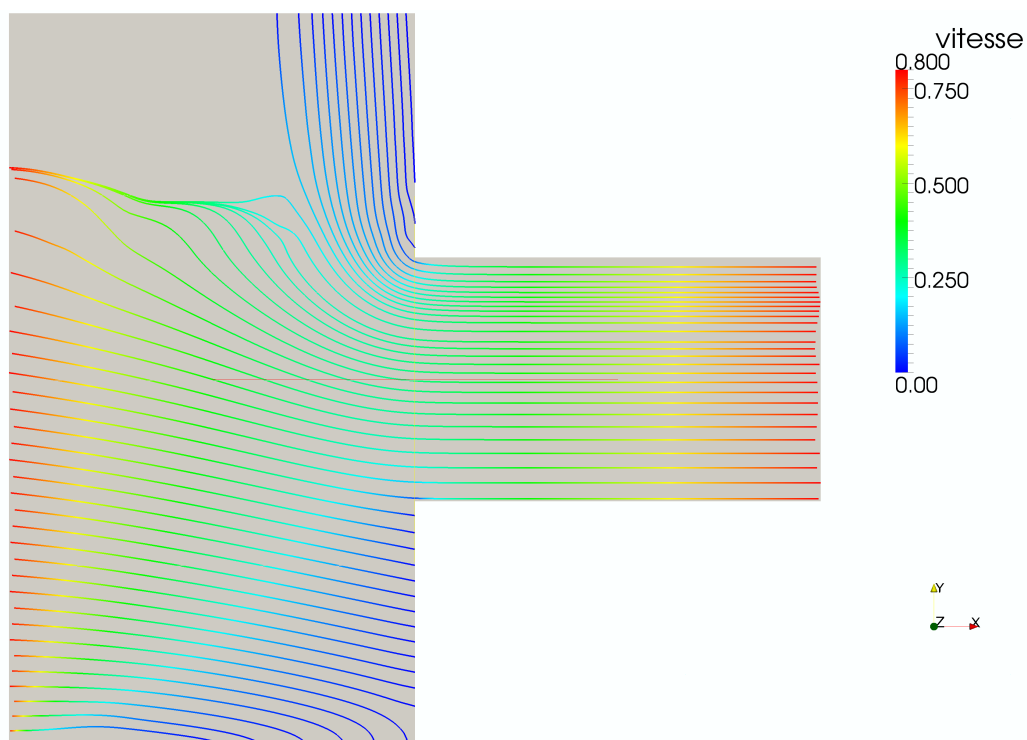


FIGURE 5.8 – Lignes de courant dans la jonction avec des conditions d'adhérence aux bords

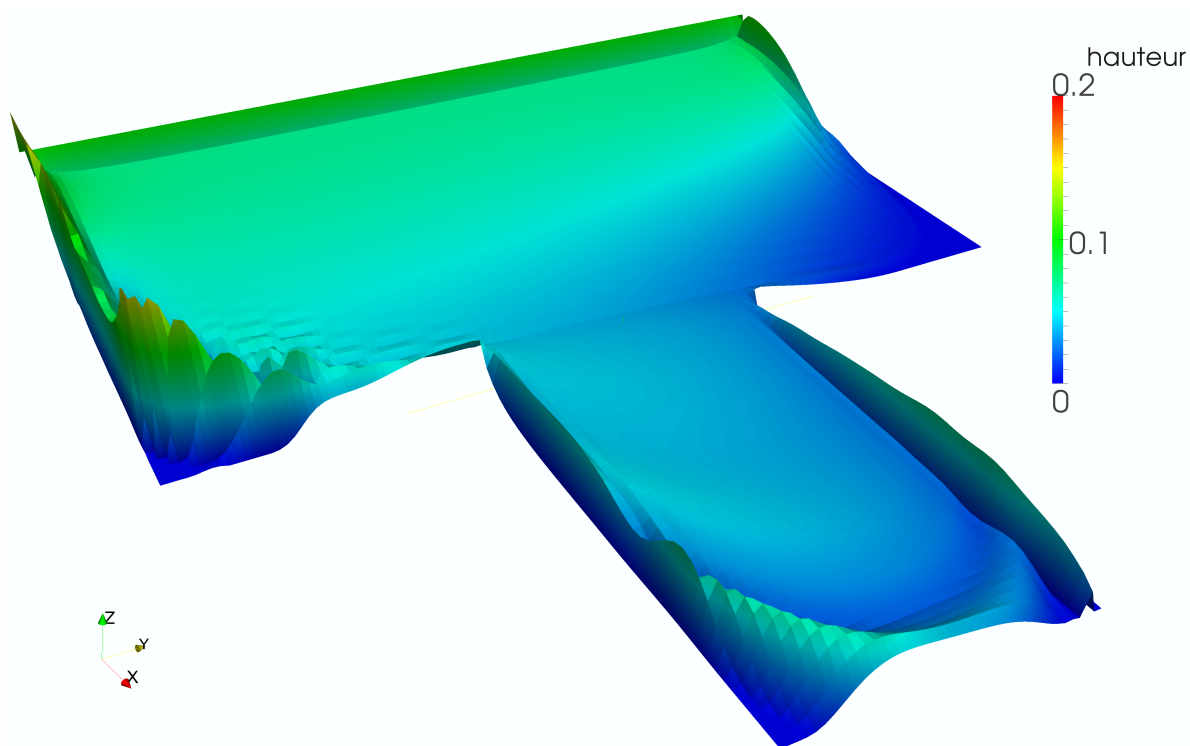


FIGURE 5.9 – Niveau de l'eau dans la jonction avec des conditions d'adhérence aux bords

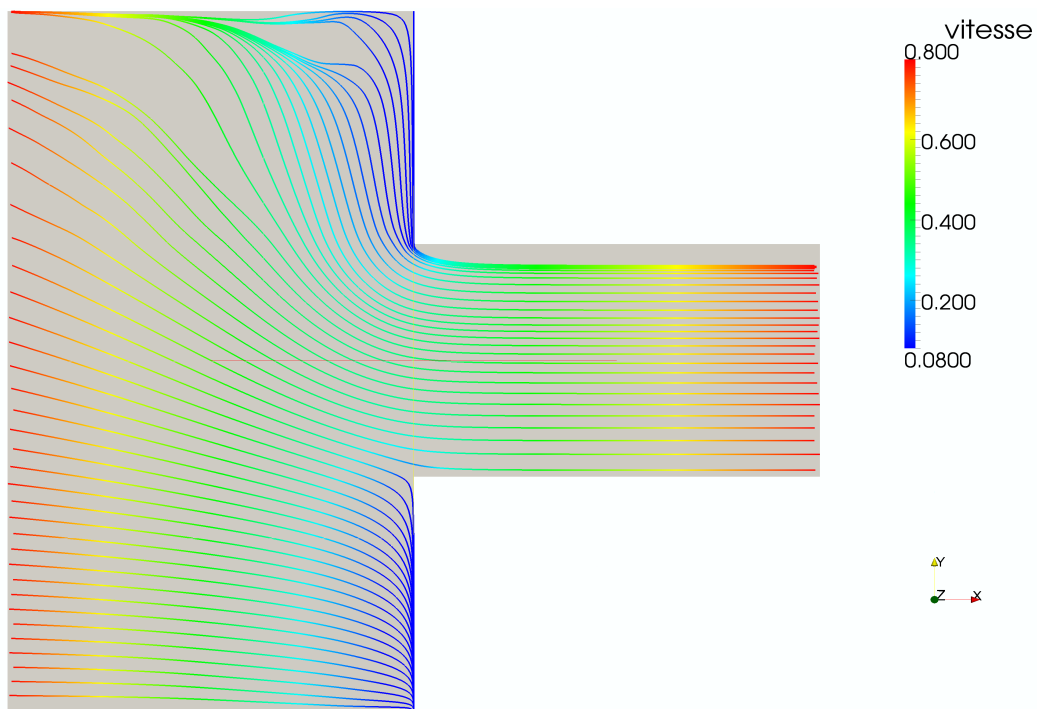


FIGURE 5.10 – Lignes de courant dans la jonction avec des conditions de glissement aux bords

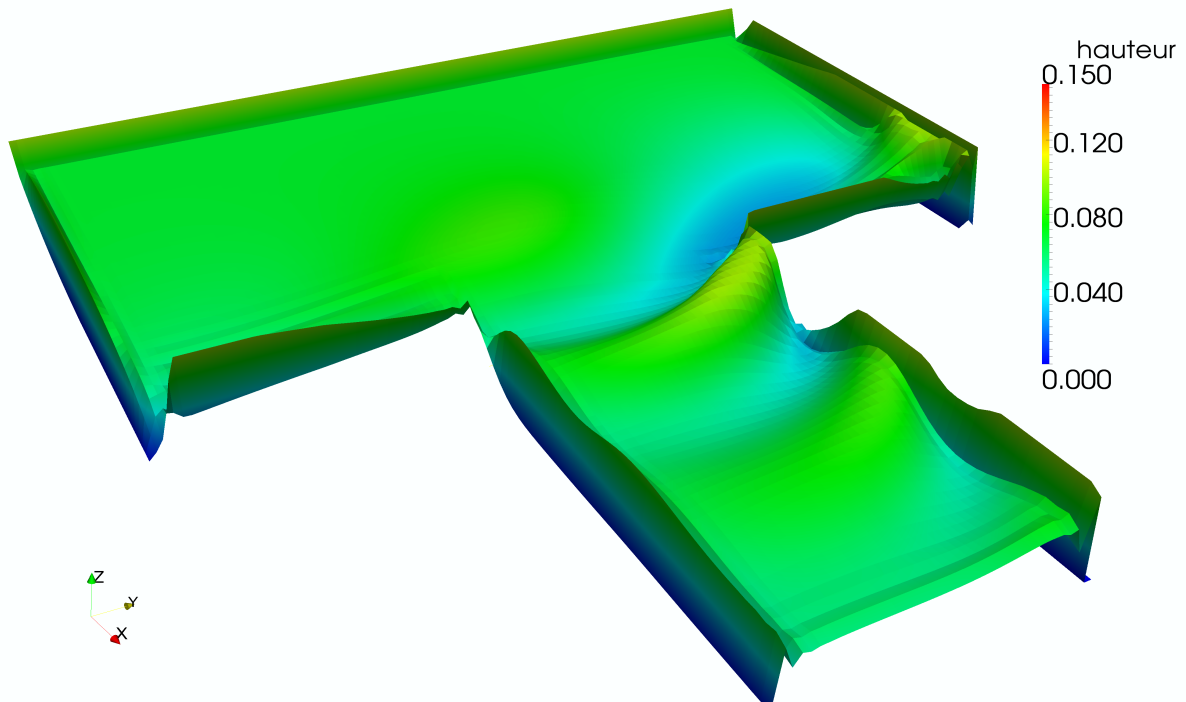


FIGURE 5.11 – Niveau de l'eau dans la jonction avec des conditions de glissement aux bords

On suppose maintenant que le vent est dans la direction opposée (i.e Sud-Nord) dans l'océan, et on

présente sur les figures (5.12)-(5.15) les lignes de courant et la hauteur de l'eau pour chaque cas.

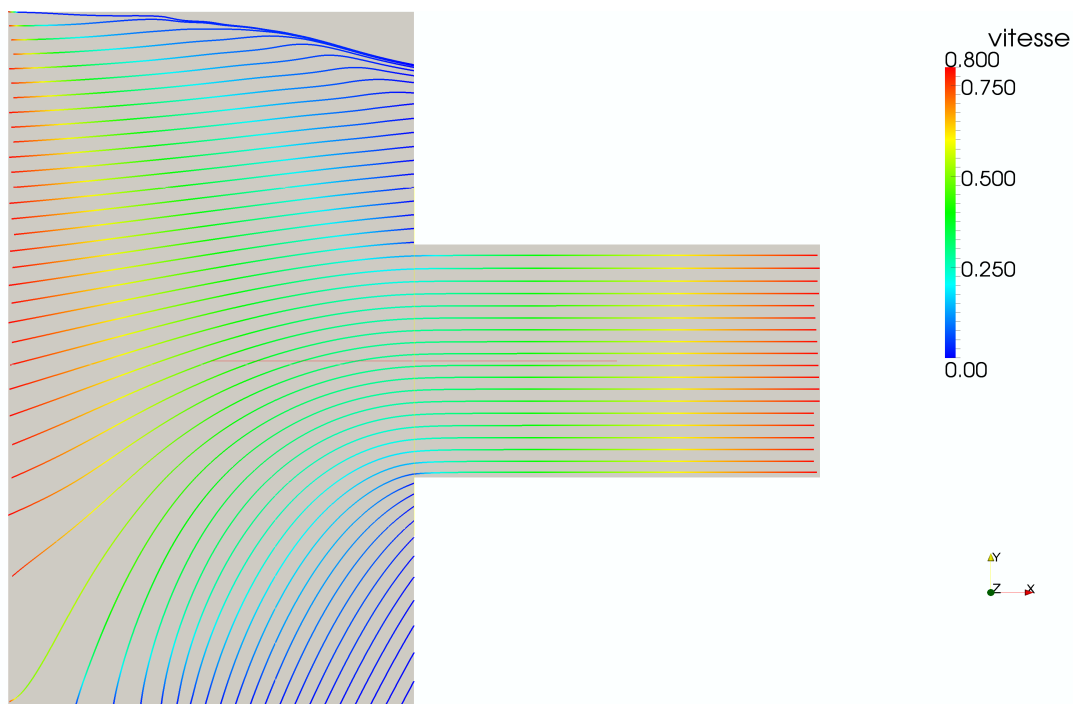


FIGURE 5.12 – Lignes de courant dans la jonction avec des conditions d'adhérence aux bords

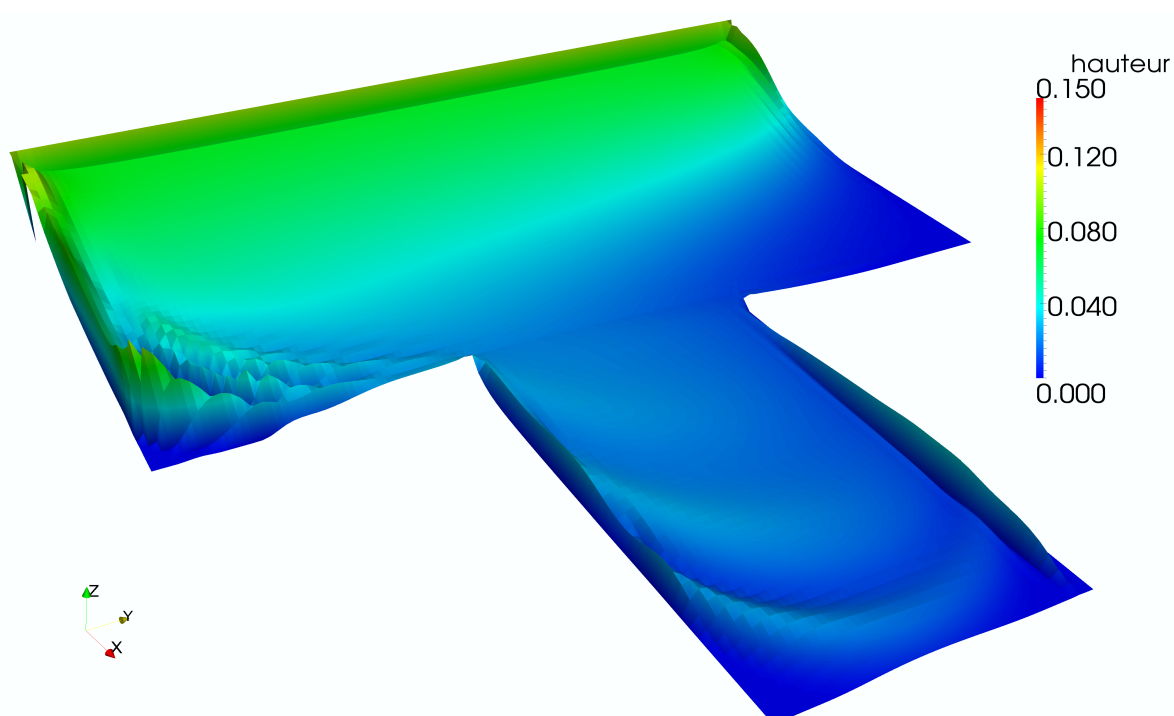


FIGURE 5.13 – Niveau de l'eau dans la jonction avec des conditions d'adhérence aux bords

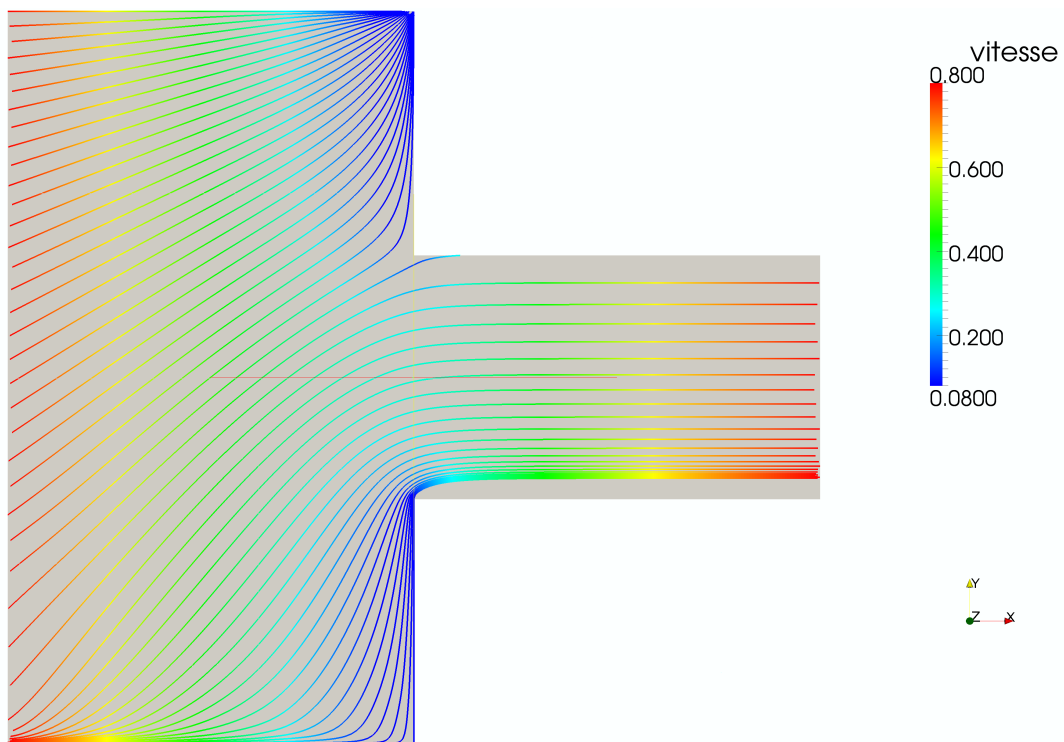


FIGURE 5.14 – Lignes de courant dans la jonction avec des conditions de glissement aux bords

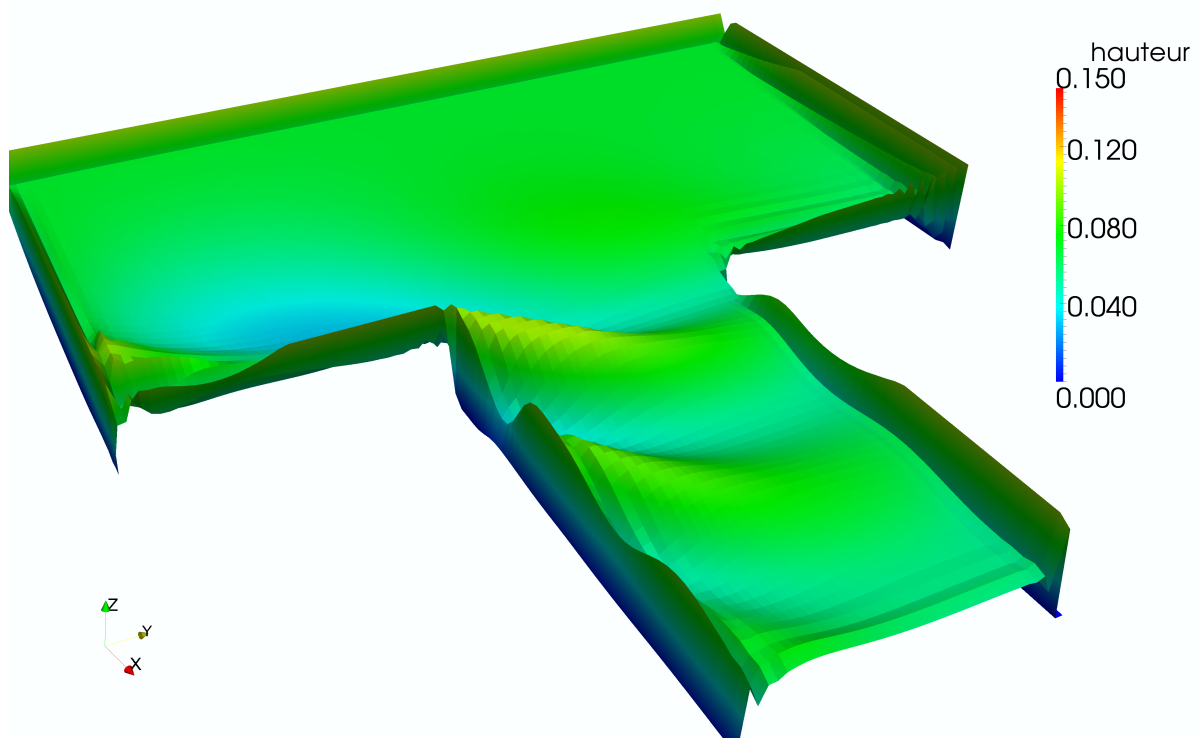


FIGURE 5.15 – Niveau de l'eau dans la jonction avec des conditions de glissement aux bords

Les résultats obtenus montrent bien l'influence du vent sur l'orientation des courants et la génération de seiches de surfaces dans l'embouchure ou l'estuaire. Dans les deux cas de conditions aux bords, on observe que les courants océaniques se dirigent vers le fleuve en se détournant de leurs trajectoires premières avant de passer sur l'interface. Néanmoins l'orientation des lignes diffère selon qu'on impose des conditions d'adhérence ou de glissement sur les bords de Ω_2 . Enfin on remarque que les seiches de surface sont beaucoup plus visibles avec les conditions de glissement (voir fig. (5.11), (5.15)) que dans le cas des conditions d'adhérence (voir fig. (5.9), (5.13)).

Deuxième partie

MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINE EN ESPACE-TEMPS

On introduit une nouvelle méthode de décomposition de domaine des lois de conservation scalaires en appliquant la méthode STILS [13, 12, 20, 21]. Le problème est d'abord formulé en dimension spatio-temporel, puis en une équation pour la seule variable définie sur l'interface. Un schéma itératif entre sous-domaines est ensuite proposé pour la résolution de cette équation d'interface.

6.1 Description du problème

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine de frontière lipschitzienne $\partial\Omega$ vérifiant la propriété du cône [2], et soit $T > 0$. On se donne un champ de vecteur advectif $u : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}^d$, et un terme source $f \in L^2(\Omega \times]0, T[)$. Dans la suite $(\cdot | \cdot)$ est le produit scalaire usuel.

Le problème consiste à trouver une fonction $c : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(cu) = f \quad (6.1)$$

et les conditions initiale et au bord

$$c(x, 0) = c_0(x) \text{ pour } x \text{ dans } \Omega \quad (6.2)$$

$$c(x, t) = c_{00}(x, t) \text{ pour } (x, t) \text{ sur } \partial\Omega^- \times (0, T) \quad (6.3)$$

où $\partial\Omega^- = \{x \in \partial\Omega : (u(x, t) | n(x)) < 0\}$, $n(x)$ est la normale externe sur $\partial\Omega$ au point x . Pour simplifier, on supposera que $\partial\Omega^-$ ne dépend pas de t .

La fonction c peut représenter par exemple une concentration chimique dans un liquide, transportée par le flot u dans Ω . Dans ce cas la vitesse u peut être une solution des équations de Navier-Stokes. Elle peut aussi être dérivée d'un potentiel. Par exemple dans le contexte d'un milieu poreux, elle est définie par la vitesse de Darcy.

On partitionne Ω en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 sans recouvrement, de frontières lipschitziennes $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$. L'interface commune $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ est notée par Γ ; le vecteur normal unité sur Γ pointant vers Ω_2 sera noté n .

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2, \quad \Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2, \quad \partial\Omega_i^- = \partial\Omega^- \cap \partial\Omega_i, \quad i = 1, 2. \quad (6.4)$$

Le problème initial (6.1)-(6.3) est maintenant transcrit dans les deux sous-domaines.

Ainsi pour $i = 1, 2$ on a

$$\frac{\partial c^i}{\partial t} + \operatorname{div}(c^i u) = f \quad (6.5)$$

avec

$$c^i(x, 0) = c_0(x) \quad \text{pour } x \text{ dans } \Omega_i \quad (6.6)$$

$$c^i(x, t) = c_{00}(x, t) \quad \text{pour } (x, t) \text{ sur } \partial\Omega_i^- \times (0, T) \quad (6.7)$$

et la condition d'interface

$$c^1 = c^2 \quad \text{pour } (x, t) \text{ sur } \Gamma \times (0, T). \quad (6.8)$$

L'équivalence entre ces deux problèmes est étudiée notamment dans [48, 47] dans le cas stationnaire.

L'originalité de la méthode STILS est de résoudre l'équation (6.1) en espace-temps et au sens L^2 . Dans ce chapitre nous rappellerons les principes de la méthode STILS [13, 12, 20, 21, 22] pour les équations (6.1)-(6.3), et justifierons sa forme pour le problème (6.5)-(6.8). La nouvelle formulation est ensuite généralisée dans le cadre d'une marche en temps de STILS.

6.2 Cadre spatio-temporel

En espace-temps, le temps est simplement considéré comme la $(d+1)$ -ème dimension spatiale.

Posons

$$Q = \Omega \times]0, T[$$

de frontière

$$(\partial\Omega \times]0, T[) \cup (\Omega \times \{T\}) \cup (\Omega \times \{0\}).$$

La normale externe $\tilde{n}$ est donnée par

$$\tilde{n} = \begin{cases} (n, 0) & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ (0, -1) & \text{sur } \Omega \times \{0\} \\ (0, 1) & \text{sur } \Omega \times \{T\}. \end{cases}$$

La vitesse spatio-temporelle est $\tilde{u} = (u_1, \dots, u_d, 1)^t$. La frontière spatio-temporelle éclairée est

$$\partial Q^- = \{(x, t) \in \partial Q, (\tilde{u} | \tilde{n}) < 0\} = (\partial\Omega^- \times]0, T[) \cup (\Omega \times \{0\}).$$

Avec ces notations, les conditions initiale et au bord deviennent

$$c_b(x, t) = \begin{cases} c_0(x) & \text{si } (x, t) \in \Omega \times \{0\} \\ c_{00}(x, t) & \text{si } (x, t) \in \partial\Omega^- \times (0, T). \end{cases}$$

Pour une fonction φ suffisamment régulière, le gradient spatio-temporel est noté par

$$\tilde{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_d}, \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)$$

et on a

$$\tilde{\nabla} \cdot (\varphi \tilde{u}) = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \varphi).$$

Avec ces notations, le problème (6.1)-(6.3) devient

$$\tilde{\nabla} \cdot (c\tilde{u}) = f \quad (6.9)$$

$$c = c_b \text{ pour } (x, t) \text{ sur } \partial Q^-. \quad (6.10)$$

Pour les deux sous-domaines, le problème (6.5)-(6.8) devient

$$\tilde{\nabla} \cdot (c^1 \tilde{u}) = f \quad (6.11)$$

$$c^1 = c_{b,1} \text{ pour } (x, t) \text{ sur } \partial Q_1^- \quad (6.12)$$

$$c^1 = c^2 \text{ pour } (x, t) \text{ sur } \tilde{\Gamma} \quad (6.13)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot (c^2 \tilde{u}) = f \quad (6.14)$$

$$c^2 = c_{b,2} \text{ pour } (x, t) \text{ sur } \partial Q_2^- \quad (6.15)$$

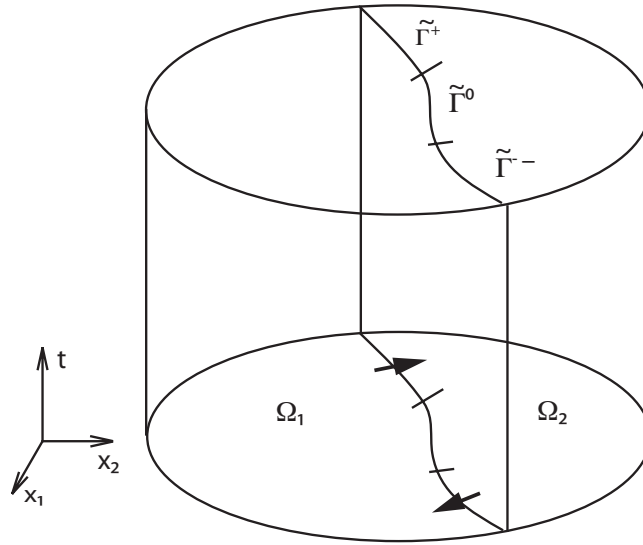


FIGURE 6.1 – Exemple de decomposition de Q en espace-temps

où

$$\overline{Q} = \overline{Q}_1 \cup \overline{Q}_2, \quad \tilde{\Gamma} = \partial Q_1 \cap \partial Q_2 = \tilde{\Gamma}^- \cup \tilde{\Gamma}^+ \cup \tilde{\Gamma}^0, \quad \partial Q_i^- = \partial Q^- \cap \partial Q_i, \quad i = 1, 2.$$

$$\tilde{\Gamma}^- = \left\{ (x, t) \in \tilde{\Gamma} : (\tilde{u}(x, t) | \tilde{n}(x, t)) < 0 \right\} = \tilde{\Gamma}_1^- = \tilde{\Gamma}_2^+$$

$$\tilde{\Gamma}^+ = \left\{ (x, t) \in \tilde{\Gamma} : (\tilde{u}(x, t) | \tilde{n}(x, t)) > 0 \right\} = \tilde{\Gamma}_2^- = \tilde{\Gamma}_1^+$$

$$\tilde{\Gamma}^0 = \left\{ (x, t) \in \tilde{\Gamma} : (\tilde{u}(x, t) | \tilde{n}(x, t)) = 0 \right\}$$

Dans la suite on suppose que la vitesse u vérifie la condition de régularité

$$\tilde{u} \in L^\infty(Q)^{d+1}, \quad \tilde{\nabla} \cdot \tilde{u} \in L^\infty(Q). \quad (6.16)$$

Le théorème suivant est démontré dans [33].

Théorème 13. *Sous les hypothèses (6.16) la trace normale de $\tilde{u}$, $(\tilde{u} | \tilde{n})$ est dans $L^\infty(\partial Q)$.*

6.3 Formulation STILS globale

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{Q})$, considérons la norme

$$\|\varphi\|_{H(u,Q)} = \left(\|\varphi\|_{L^2(Q)}^2 + \|\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi)\|_{L^2(Q)}^2 + \int_{\partial Q^-} |(\tilde{u}|\tilde{n})|\varphi^2 d\tilde{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}}$$

voir [21]. Considérons aussi l'espace de Sobolev anisotrope $H(u, Q)$ qui est l'adhérence de $\mathcal{D}(\overline{Q})$ pour cette norme

$$H(u, Q) = \overline{\mathcal{D}(\overline{Q})}^{H(u,Q)}.$$

Sous les hypothèses (6.16), il existe un opérateur trace, linéaire et continu [21]

$$\begin{aligned} \gamma^- : H(u, Q) &\rightarrow L^2(\partial Q^-, |(\tilde{u}|\tilde{n})| d\tilde{\sigma}) \\ \varphi &\mapsto \gamma^-(\varphi) = \varphi|_{\partial Q^-}. \end{aligned}$$

Finalement considérons l'espace

$$H_0(u, Q; \partial Q^-) = \left\{ \varphi \in H(u, Q), \varphi|_{\partial Q^-} = 0 \right\}$$

et posons

$$\begin{aligned} V^- &= \left\{ \varphi \in H(u, Q), \gamma^-(\varphi) = \varphi|_{\partial Q^-} \in L^2(\partial Q^-, |(\tilde{u}|\tilde{n})| d\tilde{\sigma}) \right\} \\ G^- &= \gamma^-(V^-). \end{aligned}$$

Le théorème suivant est démontré dans [20, 21]

Théorème 14. (*Inégalité de Poincaré courbe*)

Si $\tilde{u} \in L^\infty(Q)^{d+1}$ et $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{u} \in L^\infty(Q)$, la semi-norme sur $H(u, Q)$ définie par

$$|\varphi|_{H(u,Q)} = \left(\int_Q (\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi))^2 dxdt + \int_{\partial Q^-} |(\tilde{u}|\tilde{n})|\varphi^2 d\tilde{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme équivalente à la norme sur $H(u, Q)$.

Une solution de (6.1) dans L^2 est un minimum dans $\{\varphi \in H(u, Q); \gamma^-(\varphi) - c_b = 0\}$ de la fonctionnelle $H(u, Q)$ -coercitive

$$J(c) = \frac{1}{2} \left(\int_Q (\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c) - f)^2 dxdt - \int_{\partial Q^-} c^2 (\tilde{u}|\tilde{n}) d\tilde{\sigma} \right). \quad (6.17)$$

La dérivée au sens de Gâteaux de J est

$$[DJ(c)](\varphi) = \int_Q (\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c) - f) \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi) dxdt - \int_{\partial Q^-} c\varphi (\tilde{u}|\tilde{n}) d\tilde{\sigma}. \quad (6.18)$$

Ainsi une condition suffisante pour avoir une solution au sens des moindres carrés de (6.1)-(6.3) est la formulation faible suivante : si $c_b \in G^-$, trouver $c \in H(u, Q)$ tel que

$$\int_Q \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c) \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi) dxdt = \int_Q f \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi) dxdt \quad \forall \varphi \in H_0(u, Q, \partial Q^-) \quad (6.19)$$

$$\gamma^-(c) = c_b. \quad (6.20)$$

Les résultats suivants sont démontrés dans [21]

Théorème 15. (*Principe du maximum*) On suppose Ω borné et $f = 0$ dans (6.1). Soit $c_b \in G^- \cap L^\infty(\partial Q^-)$, si $\nabla \cdot u = 0$ la solution c de (6.19)-(6.20) vérifie

$$\inf c_b \leq c \leq \sup c_b$$

Théorème 16. (Solution faible) Pour $f \in L^\infty(Q)$ et $u \in L^\infty(Q)^d \cap L^1(0, T; BV(\Omega)^d)$ avec $\nabla \cdot u = 0$, soit $c \in H_0(u, Q; \partial Q^-)$ la solution de

$$\int_Q \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c) \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi) \, dxdt = \int_Q f \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi) \, dxdt \quad \forall \varphi \in H_0(u, Q; \partial Q^-),$$

alors elle est une solution faible, c'est à dire :

$$\int_Q \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c) \varphi \, dxdt = \int_Q f \varphi \, dxdt \quad \forall \varphi \in L^2(Q).$$

Pour $c_b \in G^-$, soit $C_b \in H(u, Q)$ tel que $\gamma^-(C_b) = c_b$. Alors $\rho = c - C_b \in H_0(u, Q; \partial Q^-)$ est l'unique solution (inégalité de Poincaré courbe et lemme de Lax-Milgram) de

$$\int_Q \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\rho) \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi) \, dxdt = \int_Q f \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi) \, dxdt - \int_Q \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}C_b) \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi) \, dxdt \quad (6.21)$$

$\forall \varphi \in H_0(u, Q; \partial Q^-)$.

Posons

$$W(u, Q) = \left\{ \varphi \in L^2(Q), \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi) \in L^2(Q), \varphi|_{\partial Q^-} \in L^2(\partial Q^-, |(\tilde{u}|\tilde{n})|d\tilde{\sigma}) \right\}.$$

Si u est suffisamment régulier, e.g. $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^d)$, on peut voir que [21]

$$H(U, Q) \cap L^\infty(Q) = W(U, Q) \cap L^\infty(Q).$$

Dans la suite on supposera que $c_b \in L^\infty(\partial Q^-) \cap G^-$ tel que $c_b = \gamma^-(C_b)$ avec $C_b \in W^{1,\infty}(Q)$. Donc si $f = 0$ dans (6.1) la solution au sens des moindres carrés $c \in L^\infty(Q)$.

6.4 Formulation STILS 2-domaines (STILS-DDM)

Dans cette partie le problème (6.11)-(6.15) est reformulé au sens des moindres carrés.

6.4.1 Espaces de Sobolev anisotropes

Considérons la norme

$$\|\varphi_i\|_{H(u, Q_i)} = \left(\|\varphi_i\|_{L^2(Q_i)}^2 + \|\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi_i)\|_{L^2(Q_i)}^2 + \int_{\partial Q_i^- \cup \tilde{\Gamma}_i^-} |(\tilde{u}|\tilde{n})| \varphi_i^2 d\tilde{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}},$$

et soit $H(u, Q_i)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\overline{Q}_i)$ pour cette norme

$$H(u, Q_i) = \overline{\mathcal{D}(\overline{Q}_i)}^{H(u, Q_i)}, \quad H_0(u, Q_i; \tilde{\Sigma}) = \left\{ \varphi_i \in H(u, Q_i); \varphi_i|_{\tilde{\Sigma}} = 0 \right\}, \quad \tilde{\Sigma} \subset \partial Q_i^- \cup \tilde{\Gamma}_i^-.$$

De plus si $\tilde{\Sigma}$ est un ouvert de $\partial Q_i^- \cup \tilde{\Gamma}_i^-$ ou $\partial Q_i^+ \cup \tilde{\Gamma}_i^+$, posons

$$L^2(\tilde{\Sigma}, |(\tilde{u}|\tilde{n})|d\tilde{\sigma}) = \left\{ \varphi : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\tilde{\Sigma}} |(\tilde{u}|\tilde{n})| \varphi^2 d\tilde{\sigma} < \infty \right\},$$

c'est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|\varphi\|_{\tilde{\Sigma}, (\tilde{u}|\tilde{n})} = \left(\int_{\tilde{\Sigma}} |(\tilde{u}|\tilde{n})| \varphi^2 d\tilde{\sigma} \right)^{1/2}$$

induite par le produit scalaire

$$(\varphi_i, \psi_i)_{\widetilde{\Sigma}, (\widetilde{u}|\widetilde{n})} = \pm \int_{\widetilde{\Sigma}} (\widetilde{u}|\widetilde{n}) \varphi_i \psi_i d\widetilde{\sigma}, \quad \widetilde{\Sigma} \subset \partial Q_i^\pm \cup \widetilde{\Gamma}_i^\pm.$$

Pour $i = 1, 2$, considérons l'espace de Hilbert

$$H(\widetilde{\text{div}}, Q_i) = \left\{ \varphi_i \in L^2(Q_i)^{d+1} : \widetilde{\nabla} \cdot \varphi_i \in L^2(Q_i) \right\}$$

muni de la norme du graphe

$$\|\varphi_i\|_{H(\widetilde{\text{div}}, Q_i)} = \left[\|\varphi_i\|_{L^2(Q_i)^{d+1}}^2 + \|\widetilde{\nabla} \cdot \varphi_i\|_{L^2(Q_i)}^2 \right]^{1/2}.$$

La définition est identique pour $H(\widetilde{\text{div}}, Q)$.

Le théorème des traces pour $H(u, Q)$ peut maintenant être appliqué à $H(u, Q_i)$ par le résultat suivant $H(u, Q_i)$.

Proposition 10. *Sous l'hypothèse (6.16) il existe un opérateur trace linéaire continu*

$$\begin{array}{ccc} \gamma_i : H(u, Q_i) & \longrightarrow & L^2(\partial Q_i, |(\widetilde{u}|\widetilde{n})| d\widetilde{\sigma}) \\ \varphi_i & \longmapsto & \varphi_i|_{\partial Q_i} \end{array}$$

qui peut être localisé

$$\begin{array}{ccc} \gamma_i^\pm : H(u, Q_i) & \longrightarrow & L^2(\partial Q_i^\pm \cup \widetilde{\Gamma}_i^\pm, |(\widetilde{u}|\widetilde{n})| d\widetilde{\sigma}) \\ \varphi_i & \longmapsto & \varphi_i|_{\partial Q_i^\pm \cup \widetilde{\Gamma}_i^\pm} \end{array}$$

Démonstration. Le détail de la preuve peut être trouvé dans [21] :

On introduit d'abord l'opérateur trace usuel γ_n (théorème 2) défini de $H(\widetilde{\text{div}}, Q_i)$ à valeur dans $H^{-\frac{1}{2}}(\partial Q_i)$ (voir [51, 24])

$$v_i \mapsto (\widetilde{n}|v_i)_{|\partial Q_i}, \quad \text{pour tout } v_i \in H(\widetilde{\text{div}}, Q_i)$$

avec formule de Green associée on a

$$\int_{Q_i} \left(\widetilde{\nabla} \cdot (v_i) \psi_i + (v_i | \widetilde{\nabla} \psi_i) \right) dx dt = \left\langle (v_i | \widetilde{n}), \psi_i \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial Q_i); H^{\frac{1}{2}}(\partial Q_i)}, \quad \forall \psi_i \in H^1(Q_i).$$

Si $v_i = \widetilde{u} \rho_i$ la formule précédente donne

$$\int_{Q_i} \left(\widetilde{\nabla} \cdot (\widetilde{u} \rho_i) \psi_i + (\widetilde{u} | \widetilde{\nabla} \psi_i) \rho_i \right) dx dt = \rho_i \left\langle (\widetilde{u} | \widetilde{n}), \psi_i \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial Q_i); H^{\frac{1}{2}}(\partial Q_i)}, \quad \forall \psi_i \in H^1(Q_i).$$

En considérant la forme bilinéaire $L_i : \mathcal{D}(\overline{Q}_i) \times \mathcal{D}(\overline{Q}_i) \subset H(u, Q_i) \times H(u, Q_i) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $\varphi_i, \psi_i \in \mathcal{D}(\overline{Q}_i)$ par

$$L_i(\varphi_i, \psi_i) = \int_{Q_i} \left(\widetilde{\nabla} \cdot (\widetilde{u} \varphi_i) \psi_i + (\widetilde{u} | \widetilde{\nabla} \psi_i) \varphi_i \right) dx dt + \int_{\partial Q_i^- \cup \widetilde{\Gamma}_i^-} |(\widetilde{u} | \widetilde{n})| \varphi_i \psi_i d\widetilde{\sigma},$$

alors par le théorème 13 on a

$$\begin{aligned} |L_i(\varphi_i, \psi_i)| &\leq \|\widetilde{\nabla} \cdot (\widetilde{u} \varphi_i)\|_{L^2(Q_i)} \|\psi_i\|_{L^2(Q_i)} + \|\widetilde{\nabla} \cdot (\widetilde{u} \psi_i) - \widetilde{\nabla} \cdot (\widetilde{u}) \psi_i\|_{L^2(Q_i)} \|\varphi_i\|_{L^2(Q_i)} \\ &\quad + \|\varphi_i\|_{\partial Q_i^- \cup \widetilde{\Gamma}_i^-, (\widetilde{u}|\widetilde{n})} \|\psi_i\|_{\partial Q_i^- \cup \widetilde{\Gamma}_i^-, (\widetilde{u}|\widetilde{n})}. \end{aligned}$$

Finalement on obtient l'inégalité suivantes

$$|L_i(\varphi_i, \psi_i)| \leq (1 + \|\nabla \cdot u\|_{L^\infty(Q_i)}) \|\varphi_i\|_{H(u, Q_i)} \|\psi_i\|_{H(u, Q_i)}.$$

Comme $L_i(\varphi_i, \varphi_i) = \|\varphi_i\|_{\partial Q_i^+ \cup \widetilde{\Gamma}_i^+, (\widetilde{u}|\widetilde{n})}^2$, le résultat désiré est obtenu par extension continue de la forme bilinéaire L_i à $H(u, Q_i) \times H(u, Q_i)$. $\square$

L'inégalité de Poincaré courbe pour les fonctions de $H(u, Q_i)$ est donné par

Théorème 17. [20, 21] Sous l'hypothèse (6.16) la semi-norme sur $H(u, Q_i)$ définie par

$$|\varphi_i|_{H(u, Q_i)} = \left(\int_{Q_i} (\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi_i))^2 dxdt + \int_{\partial Q_i^- \cup \tilde{\Gamma}_i^-} |(\tilde{u}|\tilde{n})| \varphi_i^2 d\tilde{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme, équivalente à la norme définie sur $H(u, Q_i)$.

La preuve est similaire à celle établie dans [20, 21], et dans le cas d'un flot à divergence nulle, elle est obtenue par l'inégalité $\|\varphi_i\|_{L^2(Q_i)} \leq \mathcal{C}(T)|\varphi_i|_{H(u, Q_i)}$, où $\mathcal{C}(T) = \sqrt{\max(4T^2, 2T)}$.

Considérons maintenant la formulation au sens des moindres carrés du problème (6.11)-(6.15) : trouver $(c^1, c^2) \in H(u, Q_1) \times H(u, Q_2)$ tels que

$$\int_{Q_1} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c^1) \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi^1) dxdt = \int_{Q_1} f \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi^1) dxdt \quad (6.22)$$

$$c^1 = c_{b,1} \quad \text{sur } \partial Q_1^- \quad (6.23)$$

$$\int_{Q_2} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c^2) \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi^2) dxdt = \int_{Q_2} f \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi^2) dxdt \quad (6.24)$$

$$c^2 = c_{b,2} \quad \text{sur } \partial Q_2^- \quad (6.25)$$

$$(c^1|_{\tilde{\Gamma}^-} - c^2|_{\tilde{\Gamma}^-}, \mu)_{\tilde{\Gamma}^-, (\tilde{u}|\tilde{n})} = -(c^2|_{\tilde{\Gamma}^+} - c^1|_{\tilde{\Gamma}^+}, \mu)_{\tilde{\Gamma}^+, (\tilde{u}|\tilde{n})} \quad (6.26)$$

pour tout $(\varphi^1, \varphi^2) \in H_0(u, Q_1; \partial Q_1^- \cup \tilde{\Gamma}_1^-) \times H_0(u, Q_2; \partial Q_2^- \cup \tilde{\Gamma}_2^-)$, et

$$\mu \in \tilde{\Lambda} = \left\{ \mu \in \Lambda, \exists \psi^\mu \in H(u, Q), \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\psi^\mu) \in L^\infty(Q), \psi^\mu|_{\tilde{\Gamma}^+ \cup \tilde{\Gamma}^-} = \mu \right\} \cap L^\infty(\tilde{\Gamma}^- \cup \tilde{\Gamma}^+).$$

où

$$\Lambda = L^2(\tilde{\Gamma}^- \cup \tilde{\Gamma}^+, |(\tilde{u}|\tilde{n})| d\tilde{\sigma})$$

Montrons que (6.22)-(6.26) peut être interprété comme une formulation en deux sous-domaines du problème STILS (6.19)-(6.20).

Si le flot a une direction constante à l'interface des deux sous-domaines, par exemple $(\tilde{u}|\tilde{n})$ est toujours positif ($\tilde{\Gamma}^- = \emptyset$), le problème (6.22)-(6.26) possède une unique solution. En effet, les équations (6.22)-(6.23) peuvent être résolues indépendamment et admettent une solution $c^1 \in H(u, Q_1)$ (théorème 14). Ensuite on résout (6.24)-(6.26) avec $c^2|_{\tilde{\Gamma}^+} = c^1|_{\tilde{\Gamma}^+}$.

Considérons la situation $\tilde{\Gamma}^- \neq \emptyset$, $\tilde{\Gamma}^+ \neq \emptyset$.

En utilisant le théorème 5 sur la formule de Green pour $\varphi_i \in H(\tilde{\text{div}}, Q_i)$ et tout $\psi_i \in H^1(Q_i)$ (voir aussi [63]) on a :

$$\int_{Q_i} \psi_i (\tilde{\nabla} \cdot \varphi_i) dxdt + \int_{Q_i} (\tilde{\nabla} \psi_i | \varphi_i) dxdt = \int_{\partial Q_i} (\varphi_i | \tilde{n}) \psi_i d\tilde{\sigma}$$

Soit ζ_i un élément de $H(\tilde{\text{div}}, Q_i)$, $i = 1, 2$, et soit ζ la fonction sur Q dont la restriction à Q_i coïncide avec ζ_i . Alors ζ appartient à $H(\tilde{\text{div}}, Q)$ si et seulement si

$$(\zeta_1 | \tilde{n}) = (\zeta_2 | \tilde{n}) \quad \text{dans } H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma}).$$

Comme la solution STILS c est dans $H(u, Q)$, on a $\tilde{u}c \in H(\tilde{\text{div}}, Q)$ et $c|_{\tilde{\Gamma}} \in L^2(\tilde{\Gamma})$. De plus

$$(\tilde{u}c | \tilde{n}) \in L^2(\tilde{\Gamma}^- \cup \tilde{\Gamma}^+), \quad (\tilde{u}c^1 | \tilde{n}) = (\tilde{u}c^2 | \tilde{n}) \quad \text{dans } H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma}^- \cup \tilde{\Gamma}^+).$$

Finalement, comme $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma}^- \cup \tilde{\Gamma}^+) \subset L^2(\tilde{\Gamma}^- \cup \tilde{\Gamma}^+)$ avec injection dense et continue, on a

$$(\tilde{u}c^1 - \tilde{u}c^2 | \tilde{n}) = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}^- \cup \tilde{\Gamma}^+$$

et (6.26) est satisfait.

Si $c \in H(u, Q)$ est la solution de (6.19)-(6.20), en utilisant les définitions de $H(u, Q)$ et $H(u, Q_i)$ on a $c|_{Q_i} \in H(u, Q_i)$. Sous les hypothèses du théorème 16, $c \in H(u, Q)$ est aussi une solution faible. Ainsi

$$\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c) - f = 0 \text{ dans } L^2(Q).$$

Soit $\varphi_i \in H_0(u, Q_i; \partial Q_i^- \cup \tilde{\Gamma}_i^-)$, on a

$$\left| \int_{Q_i} (\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c|_{Q_i}) - f) \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi^i) \, dxdt \right| \leq \|\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c) - f\|_{L^2(Q)} \|\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi^i)\|_{L^2(Q_i)} = 0.$$

Finalement $(c|_{Q_1}, c|_{Q_2})$ est une solution de (6.22)-(6.26). On a donc la

Proposition 11. *Si $u \in L^\infty(Q)^d \cap L^1(0, T; BV(\Omega)^d)$ avec $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{u} = 0$ et $f \in L^\infty(Q)$, la formulation STILS (6.19)-(6.20) fournit la formulation STILS pour deux sous-domaines (6.22)-(6.26); i.e si $c \in H(u, Q)$ est la solution de (6.19)-(6.20) alors $(c|_{Q_1}, c|_{Q_2}) \in H(u, Q_1) \times H(u, Q_2)$ vérifie (6.22)-(6.26).*

Pour établir la réciproque, il suffit de démontrer que l'équation d'interface associée à (6.26) admet une unique solution.

6.4.2 Equation d'interface

Soit $\eta \in \tilde{\Lambda}$, et soit $c^{i,\eta} \in H_0(u, Q_i; \partial Q_i^-)$ son extension STILS-homogène dans Q_i , $i = 1, 2$, définie comme la solution du sous problème suivant

$$\int_{Q_i} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c^{i,\eta}) \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi^i) \, dxdt = 0 \quad \forall \varphi_i \in H_0(u, Q_i; \partial Q_i^- \cup \tilde{\Gamma}_i^-) \quad (6.27)$$

$$\gamma_i^-(c^{i,\eta})|_{\tilde{\Gamma}_i^-} = \eta. \quad (6.28)$$

Soit aussi $c^{i,*} \in H_0(u, Q_i; \tilde{\Gamma}_i^-)$ l'extension de Dirichlet homogène vérifiant

$$\int_{Q_i} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c^{i,*}) \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi^i) \, dxdt = \int_{Q_i} f \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi^i) \, dxdt \quad (6.29)$$

$$\gamma_i^-(c^{i,*})|_{\partial Q_i^-} = c_{b,i}. \quad (6.30)$$

pour tout $\varphi^i \in H_0(u, Q_i; \partial Q_i^- \cup \tilde{\Gamma}_i^-)$. Le lemme de Lax-Milgram et l'inégalité de Poincaré courbe fournissent l'existence et l'unicité de ces solutions.

Soit (c^1, c^2) une solution du problème (6.22)-(6.26). Si $\lambda = c^1|_{\tilde{\Gamma}^- \cup \tilde{\Gamma}^+} = c^2|_{\tilde{\Gamma}^- \cup \tilde{\Gamma}^+} \in \tilde{\Lambda}$ alors $c^i = c^{i,\lambda} + c^{i,*}$. Réciproquement, $(c^{1,\lambda} + c^{1,*}, c^{2,\lambda} + c^{2,*}) \in H(u, Q_1) \times H(u, Q_2)$ est une solution de la formulation pour 2-domaines si et seulement si elle vérifie (6.26)

$$(\lambda - c^{2,\lambda} - c^{2,*}, \mu)_{\tilde{\Gamma}^-, (\tilde{u}|\tilde{n})} + (\lambda - c^{1,\lambda} - c^{1,*}, \mu)_{\tilde{\Gamma}^+, (\tilde{u}|\tilde{n})} = 0, \quad \forall \mu \in \tilde{\Lambda}.$$

Ainsi pour obtenir une solution de (6.22)-(6.26) telle que $c^i|_{\tilde{\Gamma}^- \cup \tilde{\Gamma}^+} \in \tilde{\Lambda}$, $i = 1, 2$ il suffit de trouver $\lambda \in \tilde{\Lambda}$ vérifiant l'équation de Steklov-Poincaré

$$\langle \tilde{S}\lambda, \mu \rangle_{\tilde{\Lambda}} = \langle \tilde{\chi}, \mu \rangle_{\tilde{\Lambda}} \quad \forall \mu \in \tilde{\Lambda} \quad (6.31)$$

avec $\tilde{S} = \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2$ et $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + \tilde{\chi}_2$ tels que

$$\begin{aligned}\langle \tilde{S}_i \lambda, \mu \rangle_{\tilde{\chi}} &:= (\lambda, \mu)_{\tilde{\Gamma}_i^-, (\tilde{u}|\tilde{n})} - (c^{i,\lambda}, \mu)_{\tilde{\Gamma}_i^+, (\tilde{u}|\tilde{n})} \\ \langle \tilde{\chi}_i, \mu \rangle_{\tilde{\chi}} &:= (c^{i,*}, \mu)_{\tilde{\Gamma}_i^+, (\tilde{u}|\tilde{n})}.\end{aligned}$$

Soit $\xi^i \in \mathcal{D}(\overline{Q}_i)$ et ζ^i une fonction suffisamment régulière, on a l'égalité suivante

$$\int_{Q_i} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u} \xi^i \zeta^i) \, dx dt = \int_{\partial Q_i} (\tilde{u}|\tilde{n}) \xi^i \zeta^i \, d\tilde{\sigma} = \int_{\partial Q_i^- \cup \tilde{\Gamma}_i^-} (\tilde{u}|\tilde{n}) \xi^i \zeta^i \, d\tilde{\sigma} + \int_{\partial Q_i^+ \cup \tilde{\Gamma}_i^+} (\tilde{u}|\tilde{n}) \xi^i \zeta^i \, d\tilde{\sigma}.$$

En appliquant la formule d'intégration de Green, on a

$$\int_{\partial Q_i^+ \cup \tilde{\Gamma}_i^+} (\tilde{u}|\tilde{n}) \xi^i \zeta^i \, d\tilde{\sigma} = - \int_{\partial Q_i^- \cup \tilde{\Gamma}_i^-} (\tilde{u}|\tilde{n}) \xi^i \zeta^i \, d\tilde{\sigma} + \int_{Q_i} (\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u} \xi^i) \zeta^i + (\tilde{u}|\tilde{\nabla} \zeta^i) \xi^i) \, dx dt$$

et

$$\int_{\partial Q_i^+ \cup \tilde{\Gamma}_i^+} (\tilde{u}|\tilde{n}) \xi^i \zeta^i \, d\tilde{\sigma} = - \int_{\partial Q_i^- \cup \tilde{\Gamma}_i^-} (\tilde{u}|\tilde{n}) \xi^i \zeta^i \, d\tilde{\sigma} + \int_{Q_i} (\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u} \xi^i) \zeta^i + (\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u} \zeta^i) \xi^i - (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{u}) \xi^i \zeta^i)$$

Donc par densité, si $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{u} = 0$ on a la

Proposition 12. Soit $\varphi^i \in H(u, Q_i)$ tel que $\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u} \varphi^i) = 0$ dans $L^2(Q_i)$, alors

$$\int_{\partial Q_i^+ \cup \tilde{\Gamma}_i^+} (\tilde{u}|\tilde{n}) \varphi^{i2} \, d\tilde{\sigma} = - \int_{\partial Q_i^- \cup \tilde{\Gamma}_i^-} (\tilde{u}|\tilde{n}) \varphi^{i2} \, d\tilde{\sigma}.$$

Si $u \in L^\infty(Q)^d \cap L^1(0, T; BV(\Omega)^d)$, $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{u} = 0$, la solution $c^{i,\eta}$ du problème (6.27)-(6.28) est aussi une solution faible (théorème 16). Donc

$$\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u} c^{i,\eta}) = 0 \text{ dans } L^2(Q_i).$$

La proposition ci-dessus montre que $\tilde{S} = \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 : \tilde{\chi} \longrightarrow \tilde{\chi}'$ telle que $\tilde{S}_i \eta = \eta|_{\tilde{\Gamma}_i^-} - c^{i,\eta}|_{\tilde{\Gamma}_i^+}$ est continue (i.e $\tilde{S}_i \eta \in \tilde{\chi}'$).

Soit $\eta \in \tilde{\chi}$, on a

$$\langle \tilde{S}_i \eta, \eta \rangle_{\tilde{\chi}} = (\eta, \eta)_{\tilde{\Gamma}_i^-, (\tilde{u}|\tilde{n})} - (c^{i,\eta}, \eta)_{\tilde{\Gamma}_i^+, (\tilde{u}|\tilde{n})}.$$

De plus

$$\frac{1}{2} \|c^{i,\eta}\|_{\tilde{\Gamma}_i^+, (\tilde{u}|\tilde{n})}^2 - (c^{i,\eta}, \eta)_{\tilde{\Gamma}_i^+, (\tilde{u}|\tilde{n})} = \frac{1}{2} \|\eta - c^{i,\eta}\|_{\tilde{\Gamma}_i^+, (\tilde{u}|\tilde{n})}^2 - \frac{1}{2} \|\eta\|_{\tilde{\Gamma}_i^+, (\tilde{u}|\tilde{n})}^2. \quad (6.32)$$

Finalement en appliquant la relation (6.32) et la proposition 12 à $\langle \tilde{S}_i \eta, \eta \rangle_{\tilde{\chi}}$, on a

Proposition 13. Pour $i = 1, 2$ on a

$$\langle \tilde{S}_i \eta, \eta \rangle_{\tilde{\chi}} \geq \frac{1}{2} (\|c^{i,\eta}\|_{\partial Q_i^+, (\tilde{u}|\tilde{n})}^2 + \|\eta\|_{\tilde{\Gamma}_i^-, (\tilde{u}|\tilde{n})}^2 + \|\eta - c^{i,\eta}\|_{\tilde{\Gamma}_i^+, (\tilde{u}|\tilde{n})}^2 - \|\eta\|_{\tilde{\Gamma}_i^+, (\tilde{u}|\tilde{n})}^2), \quad \forall \eta \in \tilde{\chi}.$$

Ainsi pour tout $\eta \in \tilde{\Lambda}$ on obtient

$$\langle \tilde{S}\eta, \eta \rangle_{\tilde{\Lambda}} \geq \frac{1}{2} (\|c^{1,\eta}\|_{\partial Q_1^+, (\tilde{u}|\tilde{n})}^2 + \|c^{2,\eta}\|_{\partial Q_2^+, (\tilde{u}|\tilde{n})}^2 + \|\eta - c^{1,\eta}\|_{\tilde{\Gamma}_1^+, (\tilde{u}|\tilde{n})}^2 + \|\eta - c^{2,\eta}\|_{\tilde{\Gamma}_2^+, (\tilde{u}|\tilde{n})}^2).$$

Soit maintenant $\eta \in \tilde{\Lambda}$ tel que $\tilde{S}\eta = 0$. Posons c^η sur Q tel que $c^\eta|_{Q_i} = c^{i,\eta}$. Alors $\gamma^-(c^\eta) = 0$ et $\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c^\eta) = 0$ dans $L^2(Q)$. Le théorème 15 appliqué au problème (6.27)-(6.28) avec u suffisamment régulier donne $c^\eta \in H_0(u, Q; \partial Q^-)$, et c'est la solution au sens des moindres carrés de (6.9)-(6.10) avec $f = 0$ et $c_b = 0$. Par le théorème 14 on a $c^\eta = 0$ dans $L^2(Q)$, $\eta = 0 \in L^2(\tilde{\Gamma}^- \cup \tilde{\Gamma}^+, |(\tilde{u}|\tilde{n})|d\tilde{\sigma})$, donc $\tilde{S}$ est définie positive. On a démontré la proposition suivante.

Proposition 14. *Si $u \in L^\infty(Q)^d \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^d)$, $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{u} = 0$ l'opérateur de Steklov-Poincaré $\tilde{S}$ est un isomorphisme entre $\tilde{\Lambda}$ et $\tilde{S}(\tilde{\Lambda})$.*

Pour $f = 0$, on a $c|_{\tilde{\Gamma}^- \cup \tilde{\Gamma}^+} \in \tilde{\Lambda}$ et $\tilde{\chi} \in \tilde{S}(\tilde{\Lambda})$. Donc l'équation d'interface admet une unique solution.

On a donc démontré le

Théorème 18. *Si $u \in L^\infty(Q)^d \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^d)$, $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{u} = 0$ et $f = 0$ dans (6.1), l'équation d'interface (6.31) associée à (6.19)-(6.20) admet une unique solution. Donc si $c \in H(u, Q)$ est la solution de (6.19)-(6.20), alors $(c|_{Q_1}, c|_{Q_2}) \in (H(u, Q_1) \times H(u, Q_2)) \cap L^\infty(Q)$ vérifie (6.22)-(6.26).*

Réciproquement si $(c^1, c^2) \in (H(u, Q_1) \times H(u, Q_2)) \cap L^\infty(Q)$ vérifie (6.22)-(6.26) alors c défini sur Q par $c|_{Q_i} = c^i$ est la solution de (6.19)-(6.20). Ainsi les deux formulations sont équivalentes.

Remarque 9. *L'analyse ci-dessus peut être généralisée au cas d'une décomposition en plusieurs sous-domaines*

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^I \bar{\Omega}_i, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \quad \bar{Q} = \bigcup_{i=1}^I \bar{Q}_i, \quad \partial Q_i \cap \partial Q_j = \tilde{\Gamma}_{ij}, \quad Q_i = \Omega_i \times (0, T).$$

Dans ce cas on prouve que $c \in H(u, Q)$ est la solution de (6.19)-(6.20) si et seulement si $(c|_{Q_1}, c|_{Q_2}, \dots, c|_{Q_I}) = (c^1, c^2, \dots, c^I) \in \prod_{i=1, \dots, I} H(u, Q_i)$ est la solution I -domaines, i.e

$$\begin{aligned} \int_{Q_i} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c^i) \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi^i) \, dxdt &= \int_{Q_i} f \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi^i) \, dxdt \quad i = 1, \dots, I \\ c^i &= c_{b,i} \quad \text{sur } \partial Q_i^- \\ c^i &= c^j \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_{ij} \neq \emptyset, \quad j = 1, \dots, I. \end{aligned}$$

pour tout $\varphi_i \in H_0(u, Q_i; \partial Q_i^- \cup \tilde{\Gamma}_{ij}^-)$.

6.4.3 Schéma itératif entre sous-domaines

Dans cette partie, on propose un algorithme itératif pour résoudre la formulation STILS 2-domaines (6.22)-(6.26). Dans la suite $\mathcal{M}$ est indépendante de j . Pour $i = 1, 2$, soit

$$V_i^- = \left\{ \varphi^i \in H_0(u, Q_i; \partial Q_i^-) : \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\varphi^i) \in L^\infty(Q_i), \gamma_i^-(\varphi^i) \in L^2(\tilde{\Gamma}_i^-, |(\tilde{u}|\tilde{n})|d\tilde{\sigma}) \right\},$$

$$G_i^- = \gamma_i^-(V_i^-).$$

Pour $j \geq 0$, soit $(c^{1,j}|_{\tilde{\Gamma}^+}, c^{2,j}|_{\tilde{\Gamma}^-}) \in G_2^- \times G_1^-$, on cherche $c^{1,j+1}$ et $c^{2,j+1}$ solution au sens des moindres carrés de

$$\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c^{1,j+1}) = f \tag{6.33}$$

$$c^{1,j+1} = c_{b,1} \quad \text{pour } (x, t) \text{ sur } \partial Q_1^- \tag{6.34}$$

$$c^{1,j+1} = c^{2,j} \quad \text{pour } (x, t) \text{ sur } \tilde{\Gamma}^- \tag{6.35}$$

et

$$\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c^{2,j+1}) = f \quad (6.36)$$

$$c^{2,j+1} = c_{b,2} \quad \text{pour } (x, t) \text{ sur } \partial Q_2^- \quad (6.37)$$

$$c^{2,j+1} = c^{1,j} \quad \text{pour } (x, t) \text{ sur } \tilde{\Gamma}^+. \quad (6.38)$$

Au sens des moindres carrés, ces problèmes admettent chacun une unique solution. Pour étudier la convergence de cet algorithme, remarquons que le sous-problème (6.33)-(6.35) se décompose en des parties STILS-homogène et Dirichlet-homogène

$$c^{1,j+1} = c^{1,j+1,\lambda_2^j} + c^{1,*}, \quad \lambda_2^j = c^{2,j}|_{\tilde{\Gamma}^-}$$

où la partie STILS-homogène $c^{1,j+1,\lambda_2^j} \in H_0(u, Q_1; \partial Q_1^-)$ est définie comme la solution au sens des moindres carrés de

$$\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c^{1,j+1,\lambda_2^j}) = 0 \quad (6.39)$$

$$c^{1,j+1,\lambda_2^j} = 0 \quad \text{pour } (x, t) \text{ sur } \partial Q_1^- \quad (6.40)$$

$$c^{1,j+1,\lambda_2^j} = c^{2,j} \quad \text{pour } (x, t) \text{ sur } \tilde{\Gamma}^- \quad (6.41)$$

et la partie Dirichlet-homogène $c^{1,*} \in H_0(u, Q_1; \tilde{\Gamma}^-)$ est la solution au sens des moindres carrés de

$$\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c^{1,*}) = f \quad (6.42)$$

$$c^{1,*} = c_{b,1} \quad \text{pour } (x, t) \text{ sur } \partial Q_1^- \quad (6.43)$$

$$c^{1,*} = 0 \quad \text{pour } (x, t) \text{ sur } \tilde{\Gamma}^-. \quad (6.44)$$

Si $u \in L^1(0, T; BV(\Omega)^d)$, $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{u} = 0$, on a $\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c^{1,j+1,\lambda_2^j}) = 0$ dans $L^2(Q_1)$, et donc

$$\|\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c^{1,j+1,\lambda_2^j})\|_{L^2(Q_1)}^2 + \|c^{1,j+1,\lambda_2^j}\|_{H(u, Q_1)}^2 \leq \|c^{2,j}\|_{\tilde{\Gamma}^-, (\tilde{u}|\tilde{n})}^2.$$

En utilisant l'estimation de la trace (proposition 10), l'inégalité de Poincaré courbe (théorème 17) et la proposition 12, on a

$$\|c^{1,j+1,\lambda_2^j}\|_{\tilde{\Gamma}^-, (\tilde{u}|\tilde{n})}^2 + \|c^{1,j+1,\lambda_2^j}\|_{H(u, Q_1)}^2 \leq \mathcal{M}^{-1} \|c^{2,0}\|_{\tilde{\Gamma}^-, (\tilde{u}|\tilde{n})}^2, \quad \mathcal{M} = \frac{1}{4} \min(\mathcal{C}(T), 1)$$

De la même manière, il existe une unique solution au sens des moindres carrés de (6.36)-(6.38) donnée par

$$c^{2,j+1} = c^{2,j+1,\lambda_1^j} + c_2^* \in H(u, Q_2), \quad \lambda_1^j = c^{1,j}|_{\tilde{\Gamma}^+}$$

telle que

$$\|c^{2,j+1,\lambda_1^j}\|_{\tilde{\Gamma}^-, (\tilde{u}|\tilde{n})}^2 + \|c^{2,j+1,\lambda_1^j}\|_{H(u, Q_2)}^2 \leq \mathcal{M}^{-1} \|c^{1,0}\|_{\tilde{\Gamma}^+, (\tilde{u}|\tilde{n})}^2.$$

On obtient donc l'estimation suivante.

Proposition 15. *Il existe une constante $\mathcal{M} > 0$ dépendante de T telle que*

$$\|c^{i,j+1}\|_{\tilde{\Gamma}_i^+, (\tilde{u}|\tilde{n})}^2 + \|c^{i,j+1}\|_{H(u, Q_i)}^2 \leq \mathcal{M}, \quad i = 1, 2 \text{ pour tout } j \geq 0.$$

Ainsi il existe une sous-suite de $c^{1,j}$ (encore notée par le même symbole) qui converge vers c^1 faiblement dans $H(u, Q_1)$. Le même argument est appliqué à la suite $c^{2,j}$. Ainsi la suite de solutions $(c^{1,j}, c^{2,j})$ converge, lorsque $j \rightarrow \infty$ vers la solution de (6.22)-(6.26).

On a démontré le

Théorème 19. *Sous les hypothèses de la proposition 11, la suite $(c^{1,j}, c^{2,j})$ définie par l'algorithme (6.33)-(6.38) admet une sous-suite qui converge faiblement dans $H(u, Q_1) \times H(u, Q_2)$ vers (c^1, c^2) qui satisfait (6.22)-(6.26).*

Si $\tilde{\Gamma}^- = \emptyset$ ou $\tilde{\Gamma}^+ = \emptyset$, le schéma itératif (6.33)-(6.38) converge en une itération.

6.5 Approche marche en temps pour STILS

Pour simplifier les notations, on suppose que $c_{00} = 0$, le cas général étant obtenu par superposition. Décomposons d'abord l'intervalle $(0, T)$ en M parties

$$t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_M = T$$

et posons

$$\overline{Q} = \bigcup_{k=1}^M \overline{Q}^k, \quad Q^k = \Omega \times (t_{k-1}, t_k)$$

De par sa composante temporelle 1, la vitesse $\tilde{u}$ transporte les valeurs de la concentration vers l'avant. Il est donc raisonnable de résoudre à chaque pas de temps localement les problèmes (6.19)-(6.20) et (6.22)-(6.26), où la condition initiale est l'état au pas de temps courant et l'inconnu est l'état au pas de temps suivant.

6.5.1 STILS globale

Comme le flot en espace-temps a une direction constante sur l'interface $\partial Q^{k-1} \cap \partial Q^k = \Omega \times \{t_{k-1}\}$, sous les hypothèses de la proposition 11, on peut voir que $c \in H(u, Q)$ est la solution de (6.19)-(6.20) si et seulement si pour $k = 1, \dots, M$, $c_k = c|_{Q^k} \in H(u, Q^k)$ est l'unique solution de

$$\int_{Q^k} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u} c_k) \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u} \varphi_k) \, dx dt = \int_{Q^k} f \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u} \varphi_k) \, dx dt \quad (6.45)$$

$$c_k(x, t_{k-1}) = c_{k-1} \quad \text{pour } x \text{ sur } \Omega \quad (6.46)$$

pour $\varphi_k \in H_0(u, Q^k; \partial Q^{k,-})$.

6.5.2 STILS-DDM

De même sous les conditions de la proposition 11, on obtient que $(c^1, c^2) \in H(u, Q^1) \times H(u, Q^2)$ est la solution de (6.22)-(6.26) si et seulement si pour $k = 1, \dots, M$, $(c_k^1, c_k^2) = (c|_{Q_1^k}, c|_{Q_2^k}) \in H(u, Q_1^k) \times H(u, Q_2^k)$ est l'unique solution de

$$\int_{Q_1^k} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u} c_k^1) \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u} \varphi_k^1) \, dx dt = \int_{Q_1^k} f \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u} \varphi_k^1) \, dx dt \quad (6.47)$$

$$c_k^1(x, t_{k-1}) = c_{k-1}^1 \quad \text{pour } x \text{ sur } \Omega_1 \quad (6.48)$$

$$c_k^1|_{\tilde{\Gamma}^k} = c_k^2|_{\tilde{\Gamma}^k} \quad (6.49)$$

$$\int_{Q_2^k} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u} c_k^2) \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u} \varphi_k^2) \, dx dt = \int_{Q_2^k} f \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u} \varphi_k^2) \, dx dt \quad (6.50)$$

$$c_k^2(x, t_{k-1}) = c_{k-1}^2 \quad \text{pour } x \text{ sur } \Omega_2 \quad (6.51)$$

pour tout $(\varphi_k^1, \varphi_k^2) \in H_0(u, Q_1^k; \partial Q_1^{k,-} \cup \tilde{\Gamma}^{k,-}) \times H_0(u, Q_2^k; \partial Q_2^{k,-} \cup \tilde{\Gamma}^{k,+})$, où

$$\overline{Q}^k = \overline{Q}_1^k \cup \overline{Q}_2^k, \quad \overline{Q}_i^k = \Omega_i \times (t_{k-1}, t_k), \quad i = 1, 2, \quad \text{et } \tilde{\Gamma}^k = \partial Q_1^k \cap \partial Q_2^k$$

En appliquant les arguments utilisés dans la preuve du théorème 18 qui exprime l'équivalence entre les deux formes STILS, on déduit bien l'équivalence entre leurs formulations pour l'approche marche en temps. Enfin pour chaque sous-domaines (t_{k-1}, t_k) , $k = 1, \dots, M$ la formulation 2-domaines (6.47)-(6.51) est résolue par le schéma itératif STILS-DDM (6.33)-(6.38).

Discrétisation par éléments finis en espace et en temps

On présente une analyse discrète du problème de décomposition de domaine avec l'approche marche en temps de STILS [22]. Des résultats numériques sont aussi donnés pour illustrer le potentiel de cette méthode de décomposition de domaine.

7.1 Discrétisations spatiale et temporelle

On considère la situation simplifiée $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{u} = \nabla \cdot u = 0$, $f = 0$, et on pose aussi les notations suivantes

$$\mathcal{A}(\phi, \psi) = \int_Q (\tilde{\nabla} \phi | \tilde{u})(\tilde{\nabla} \psi | \tilde{u}) \, dx dt, \quad \forall \phi, \psi \in H(u, Q)$$

$$\mathcal{A}^i(\phi, \psi) = \int_{Q_i} (\tilde{\nabla} \phi | \tilde{u})(\tilde{\nabla} \psi | \tilde{u}) \, dx dt, \quad \forall \phi, \psi \in H(u, Q_i), \quad i = 1, 2$$

Ainsi la formulation STILS globale est donnée par : trouver $c \in H(u, Q)$ solution de

$$\mathcal{A}(c, \varphi) = 0 \tag{7.1}$$

$$c(x, 0) = c_0 \quad \text{pour } x \text{ sur } \Omega \tag{7.2}$$

pour tout $\varphi \in H_0(u, Q; \partial Q^-)$.

De même la formulation STILS 2-domaines devient : trouver $(c^1, c^2) \in H(u, Q_1) \times H(u, Q_2)$

$$\mathcal{A}(c^1, \varphi^1) = 0 \tag{7.3}$$

$$c^1(x, 0) = c_0^1 \quad \text{pour } x \text{ sur } \Omega_1 \tag{7.4}$$

$$c^1|_{\tilde{\Gamma}} = c^2|_{\tilde{\Gamma}} \tag{7.5}$$

$$\mathcal{A}(c^2, \varphi^2) = 0 \tag{7.6}$$

$$c^2(x, 0) = c_0^2 \quad \text{pour } x \text{ sur } \Omega_2 \tag{7.7}$$

pour tout $(\varphi^1, \varphi^2) \in H_0(u, Q_1; \partial Q_1^- \cup \tilde{\Gamma}^-) \times H_0(u, Q_2; \partial Q_2^- \cup \tilde{\Gamma}^+)$.

Une discrétisation complètement en dimension spatio-temporelle peut mener à des matrices de grandes tailles et mal conditionnées. Pour éviter ce problème on utilise une méthode de marche en temps.

Pour la dimension espace, on considère $\{\mathcal{P}_h(\Omega)\}_h$ une triangulation régulière, uniforme, et compatible sur l'interface (c'est à dire les triangulations $\mathcal{P}_{1h}$ et $\mathcal{P}_{2h}$ induites sur les sous-domaines Ω_1 et Ω_2 y

admettent les mêmes sommets et côtés) .

On choisit ensuite $\{\psi_1 \cdots \psi_N\}$ une famille libre de $H(u, Q)$. Notons que la fonction de base ψ_j interpole polynomialement sur chaque élément du maillage, les couples $(x_1, 0), (x_2, 0), \dots, (x_j, 1), \dots, (x_N, 0)$, où $x_1, \dots, x_N$ sont les noeuds du maillage. Soit maintenant $\mathcal{V}_h \subset H(u, Q)$, l'espace de fonctions engendré par $\{\psi_1 \cdots \psi_N\}$.

Pour la dimension temps, on subdivise l'intervalle $[0, T]$ en M sous-intervalles $[t^0, t^1], [t^1, t^2], \dots, [t^{M-1}, t^M]$ comme suit

$$0 = t^0 < t^1 < \dots < t^{M-1} < t^M = T.$$

Sur chaque sous-domaine $[t^{k-1}, t^k]$, on définit les noeuds temporels

$$\left\{ t^{k-1 + \frac{l}{M_0}} \right\}_{l=0}^{M_0}$$

et une famille de fonctions polynomiales de degré $(M_0 + 1)$

$$\left\{ a_{k-1 + \frac{l}{M_0}}(t) \right\}_{l=0}^{M_0}$$

où la fonction $a_{k-1 + \frac{l}{M_0}}(t)$ interpole le noeud temporel $t^{k-1 + \frac{l}{M_0}}$.

On note par C_{M_0} le sous-espace de dimension $(M_0 + 1)$ de $\mathcal{C}[t^{k-1}, t^k]$ engendré par la famille $\{a_{k-1 + \frac{l}{M_0}}(t)\}_{l=0}^{M_0}$. Enfin on pose

$$Q^{I^k} = \Omega \times I^k, \quad Q_i^{I^k} = \Omega_i \times I^k, \quad i = 1, 2.$$

7.1.1 Equations discrètes

Une approximation du problème (7.1)-(7.2) consiste donc à trouver $c_h = c_k \in H^h = (\mathcal{V}^h \otimes C_{M_0}) \cap H(u, Q^{I^k})$ tel que

$$\mathcal{A}(c_h, \varphi_h) = 0 \quad (7.8)$$

$$c_h(x, t^{k-1}) = c_{k-1} \quad \text{pour } x \text{ sur } \Omega \quad (7.9)$$

pour tout $\varphi_h \in H^{h,0} = (\mathcal{V}^h \otimes C_{M_0}) \cap H_0(u, Q; \partial Q^{I^k, -})$.

Soit $\{\psi_1^{(i)}, \dots, \psi_{N_i}^{(i)}\}$ la base canonique associée aux noeuds du maillage $\mathcal{P}_{ih}$ de Ω_i , $i = 1, 2$, et $\mathcal{V}_i^h$ le sous-espace vectoriel de $H(u, Q_i)$ engendré par cette base.

Alors l'approximation du problème (7.3)-(7.7) est : trouver $(c_h^1, c_h^2) = (c_k^1, c_k^2) \in H_1^h \times H_2^h = ((\mathcal{V}_1^h \otimes C_{M_0}) \cap H(u, Q_1^{I^k})) \times ((\mathcal{V}_2^h \otimes C_{M_0}) \cap H(u, Q_2^{I^k}))$ tel que

$$\mathcal{A}^1(c_h^1, \varphi_h^1) = 0 \quad (7.10)$$

$$c_h^1(x, t^{k-1}) = c_{k-1}^1 \quad \text{pour } x \text{ sur } \Omega_1 \quad (7.11)$$

$$c_h^1|_{\tilde{\Gamma}^k} = c_h^2|_{\tilde{\Gamma}^k} \quad (7.12)$$

$$\mathcal{A}^2(c_h^2, \varphi_h^2) = 0 \quad (7.13)$$

$$c_h^2(x, t^{k-1}) = c_{k-1}^2 \quad \text{pour } x \text{ sur } \Omega_2 \quad (7.14)$$

pour tout $(\varphi_h^1, \varphi_h^2) \in H_1^{h,0} \times H_2^{h,0}$, $H_i^{h,0} = ((\mathcal{V}_i^h \otimes C_{M_0}) \cap H_0(u, Q_i^{I^k}; \partial Q_i^{I^k, -} \cup \tilde{\Gamma}_i^{I^k, -}))$.

$\tilde{\Gamma}^{I^k, -}$ et $\tilde{\Gamma}^{I^k, +}$ sont respectivement la frontière entrante et sortante de $\tilde{\Gamma}^{I^k}$

Remarque 10. On note que $\Gamma = \bigcup_l \Sigma_l$, tel que Σ_l est un côté d'un triangle $\mathcal{K} \in \mathcal{P}_h$. Par ailleurs $\tilde{\Sigma}_l^{I^k} = \Sigma_l \times I^k$ est soit égale à sa partie entrante $\tilde{\Sigma}_l^{I^k,-}$ ou sa partie sortante $\tilde{\Sigma}_l^{I^k,+}$, ou encore $\tilde{\Sigma}_l^{I^k,0}$. Ainsi $\tilde{\Gamma}^{I^k,-}$ resp. $\tilde{\Gamma}^{I^k,+}$ coïncide avec la réunion des côtés de l'interface où $(\tilde{u}(x,t)|\tilde{n}(x,t)) < 0$ resp. la réunion des côtés de l'interface où $(\tilde{u}(x,t)|\tilde{n}(x,t)) > 0$.

Posons

$$\begin{aligned} \wedge^{I^k} &= L^2(\tilde{\Gamma}^{I^k,-} \cup \tilde{\Gamma}^{I^k,+}, |(\tilde{u}|\tilde{n})|d\tilde{\sigma}) \\ \tilde{\Lambda}_h &= \left\{ \mu^h \in \wedge^{I^k}, \exists \psi^{\mu^h} \in H^h, \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}\psi^{\mu^h}) \in L^\infty(Q^k), \psi^{\mu^h}_{|\tilde{\Gamma}^{I^k,+} \cup \tilde{\Gamma}^{I^k,-}} = \mu^h \right\} \cap L^\infty(\tilde{\Gamma}^{I^k,-} \cup \tilde{\Gamma}^{I^k,+}). \end{aligned}$$

L'équation discrète de Steklov-Poincaré correspondant à (7.10)-(7.14) s'écrit par

$$\left\langle \tilde{S}^h \lambda^h, \mu^h \right\rangle_{\tilde{\Lambda}_h} = \left\langle \tilde{\chi}^h, \mu^h \right\rangle_{\tilde{\Lambda}_h} \quad \forall \mu^h \in \tilde{\Lambda}_h \quad (7.15)$$

avec $\tilde{S}^h = \tilde{S}_1^h + \tilde{S}_2^h : \tilde{\Lambda}_h \rightarrow \tilde{\Lambda}_h'$ et $\tilde{\chi}^h = \tilde{\chi}_1^h + \tilde{\chi}_2^h \in \tilde{\Lambda}_h'$ tel que

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{S}_i^h \lambda^h, \mu^h \right\rangle_{\tilde{\Lambda}_h} &:= (\lambda^h, \mu^h)_{\tilde{\Gamma}_i^{I^k,-}, (\tilde{u}|\tilde{n})} - (c^{i,\lambda^h}, \mu^h)_{\tilde{\Gamma}_i^{I^k,+}, (\tilde{u}|\tilde{n})} \\ \left\langle \tilde{\chi}_i^h, \mu^h \right\rangle_{\tilde{\Lambda}_h} &:= (c^{i,*}, \mu^h)_{\tilde{\Gamma}_i^{I^k,+}, (\tilde{u}|\tilde{n})}. \end{aligned}$$

c^{i,λ^h} et $c^{i,*}$ étant les extensions discrètes définies par les sous-problèmes STILS-homogènes et Dirichlet-homogènes.

On prouve comme dans le cas continu que cette équation d'interface discrète (7.15) admet une unique solution, et les problèmes discrets (7.8)-(7.9) et (7.10)-(7.14) sont équivalents au sens du résultat suivant.

Théorème 20. Si $c_h \in H^h$ est la solution de (7.8)-(7.9) on a $(c_h|_{Q_1^{I^k}}, c_h|_{Q_2^{I^k}}) \in (H_1^h \times H_2^h)$ vérifie (7.10)-(7.14). Réciproquement si $(c_h^1, c_h^2) \in H_1^h \times H_2^h$ vérifie (7.10)-(7.14) alors c_h défini sur $Q_i^{I^k}$ par $c_h|_{Q_i^{I^k}} = c_h^i$ est la solution de (7.8)-(7.9).

7.1.2 Schéma d'itération entre sous-domaines

Pour résoudre le problème discret (7.10)-(7.14), on applique l'équivalent discret de l'algorithme STILS-DDM (6.33)-(6.38).

Ainsi le problème consiste pour $j \geq 0$ jusqu'à convergence de trouver $c_h^{1,j+1} = c_k^{1,j+1} \in H_1^h$ et $c_h^{2,j+1} = c_k^{2,j+1} \in H_2^h$ tels que

$$\mathcal{A}^1(c_h^{1,j+1}, \varphi_h^1) = 0, \text{ pour tout } \varphi_h^1 \in H_1^{h,0} \quad (7.16)$$

$$c_h^{1,j+1}(x, t^{k-1}) = c_{k-1}^1 \quad (7.17)$$

$$c_h^{1,j+1}|_{\tilde{\Gamma}^{I^k,-}} = c_h^{2,j} \quad (7.18)$$

et

$$\mathcal{A}^2(c_h^{2,j+1}, \varphi_h^2) = 0, \text{ pour tout } \varphi_h^2 \in H_2^{h,0} \quad (7.19)$$

$$c_h^{2,j+1}(x, t^{k-1}) = c_{k-1}^2 \quad (7.20)$$

$$c_h^{2,j+1}|_{\tilde{\Gamma}^{I^k,+}} = c_h^{1,j} \quad (7.21)$$

En utilisant les mêmes idées que pour le cas continu on obtient les estimations

$$\|c_h^{i,j}\|_{\tilde{\Gamma}_i^{I^k,+},(\tilde{u}|\tilde{n})}^2 + \|c_h^{i,j}\|_{H(u,Q_i^{I^k})}^2 \leq \mathcal{M}(\tau), \quad i = 1, 2,$$

avec $\mathcal{M}$ dépendant de $\tau = t^k - t^{k-1}$, et le résultat de convergence discret s'énonce par

Théorème 21. *Sous les hypothèses de la proposition 11, la suite $(c_h^{1,j}, c_h^{2,j})$ définie dans l'algorithme (7.16)-(7.21) admet une sous-suite qui converge faiblement dans $H_1^h \times H_2^h$ vers (c_h^1, c_h^2) qui satisfait (7.10)-(7.14).*

Remarque 11. *Les deux discrétisations en espace et en temps sont bien indépendantes. De plus cette manière de faire donne différentes possibilités de choix des fonctions de base en temps et en espace pour les deux sous-problèmes du schéma itératif.*

Dans la section suivante on donne des résultats numériques pour tester le potentiel du schéma itératif STILS-DDM à résoudre le problème de décomposition de domaine en espace-temps. Pour cela nous comparons les solutions numériques de la méthode STILS-DDM (STILS 2-domaines) à celles obtenues par la méthode STILS sur le domaine global.

7.2 Résultats numériques

En temps nous analysons d'abord le cas des fonctions de base affines puis quadratiques.

7.2.1 Schéma TMQ1

Ce schéma est défini par les fonctions de base affines définies par

$$\begin{aligned} a_{k-1}(t) &= \frac{1}{\tau}(t^k - t), \\ a_k(t) &= \frac{1}{\tau}(t - t^{k-1}) \end{aligned}$$

pour $t \in [t^{k-1}, t^k] \subset [0, T]$, $\tau = t^k - t^{k-1}$, $k \geq 1$

Intégration temporelle [70]

Pour résoudre (7.8)-(7.9) par une méthode de marche en temps, on prend φ_h indépendant de a_{k-1} . Donc φ_h s'annule en $t = t^{k-1}$. Ceci est motivée par la considération du problème local dans le domaine $Q^{I^k} = \Omega \times (t^{k-1}, t^k)$, avec une condition initiale (7.9) sur $\Omega \times \{t^{k-1}\}$. En raison de l'inhomogénéité du problème en temps (le vecteur $c^{k-1} = (c_1^{k-1}, \dots, c_N^{k-1})^t$ contient l'état connu au temps $t = t^{k-1}$), on pose

$$c_k(x, t) = \sum_{l=1}^N \psi_l(x) (c_l^{k-1} a_{k-1}(t) + c_l^k a_k(t)).$$

Ensuite pour les fonctions tests de (7.8), on considère $\varphi_h = \psi_i a_k(t) \in H^{h,0}$, $i = 1, \dots, N$, et $x_i \notin \partial Q^{I^k,-}$. Le système linéaire correspondant au problème (7.8) est écrit par

$$\sum_{l=1}^N \mathcal{A}(\psi_l a_k, \psi_i a_k) \cdot c_l^k = - \sum_{l=1}^N \mathcal{A}(\psi_l a_{k-1}, \psi_i a_k) \cdot c_l^{k-1}.$$

Après intégration en temps [70] on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N c_l^k \int_{\Omega} \left[\frac{\tau}{3} (\nabla \psi_l | u) (\nabla \psi_i | u) + \frac{1}{2} (\nabla \psi_l | u) \psi_i + \frac{1}{2} (\nabla \psi_i | u) \psi_l + \frac{1}{\tau} \psi_l \psi_i \right] dx \\ &= \sum_{l=1}^N c_l^{k-1} \int_{\Omega} \left[\frac{-\tau}{6} (\nabla \psi_l | u) (\nabla \psi_i | u) - \frac{1}{2} (\nabla \psi_l | u) \psi_i + \frac{1}{2} (\nabla \psi_i | u) \psi_l + \frac{1}{\tau} \psi_l \psi_i \right] dx \end{aligned} \quad (7.22)$$

pour tout i dans $\{1, \dots, N\}$.

Le système matriciel correspondant est donné par

$$Ac^k = Bc^{k-1}$$

avec

$$a_{li} = \mathcal{A}(\psi_l a_k, \psi_i a_k), \quad b_{li} = -\mathcal{A}(\psi_l a_{k-1}, \psi_i a_k)$$

Pour l'algorithme (7.16)-(7.21), on choisit φ_h^m , $m = 1, 2$ indépendant de a_{k-1} , et de la même manière on pose

$$c_k^{m,j+1}(x, t) = \sum_{l=1}^{N^m} \psi_l^{(m)}(x) (c_l^{m,j+1,k-1} a_{k-1}(t) + c_l^{m,j+1,k} a_k(t)), \quad m = 1, 2, \quad j \geq 0,$$

et on considère les fonctions tests du type

$$\varphi_h^m = \psi_i^{(m)} a_k(t) \in H_m^{h,0}, \quad i = 1, \dots, N^m, \quad x_i \notin \partial Q_m^{I^k,-} \cup \tilde{\Gamma}^{I^k,-}, \quad m = 1, 2.$$

Alors (7.16)-(7.18) et (7.19)-(7.21) deviennent

$$\sum_{l=1}^{N^m} \mathcal{A}^m(\psi_l^{(m)} a_k, \psi_i^{(m)} a_k) \cdot c_l^k = - \sum_{l=1}^N \mathcal{A}^m(\psi_l^{(m)} a_{k-1}, \psi_i^{(m)} a_k) \cdot c_l^{k-1}.$$

Par intégration en temps on a

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{N^m} c_l^{m,j+1,k} \int_{\Omega_m} \left[\frac{\tau}{3} (\nabla \psi_l^{(m)} |u) (\nabla \psi_i^{(m)} |u) + \frac{1}{2} (\nabla \psi_l^{(m)} |u) \psi_i^{(m)} + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} (\nabla \psi_i^{(m)} |u) \psi_l^{(m)} + \frac{1}{\tau} \psi_l^{(m)} \psi_i^{(m)} \right] dx = \sum_{l=1}^{N^m} c_l^{m,j+1,k-1} \int_{\Omega_m} \left[\frac{-\tau}{6} (\nabla \psi_l^{(m)} |u) (\nabla \psi_i^{(m)} |u) - \right. \\ & \left. \frac{1}{2} (\nabla \psi_l^{(m)} |u) \psi_i^{(m)} + \frac{1}{2} (\nabla \psi_i^{(m)} |u) \psi_l^{(m)} + \frac{1}{\tau} \psi_l^{(m)} \psi_i^{(m)} \right] dx, \quad m = 1, 2, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad j \geq 0. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Matriciellement on obtient

$$A^m c^{m,j+1,k} = B^m c^{m,j+1,k-1}$$

avec

$$a_{li}^m = \mathcal{A}^m(\psi_l^{(m)} a_k, \psi_i^{(m)} a_k), \quad b_{li}^m = -\mathcal{A}^m(\psi_l^{(m)} a_{k-1}, \psi_i^{(m)} a_k)$$

Explorons maintenant les conditions non triviales de Dirichlet sur les frontières $\tilde{\Gamma}^{I^k,-}$, et $\tilde{\Gamma}^{I^k,+}$. Elles sont traitées par superposition des fonctions $C^{m,k}$, $m = 1, 2$ qui s'annulent partout sauf sur les frontières précipitées. Le système s'écrit donc

$$A^m c^{m,j+1,k} = B c^{m,j+1,k-1} - A^m C^{m,k} + B^m C^{m,k}$$

Comme les formes bilinéaires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^m$ sont symétriques continues et coercives, on conclut que les matrices correspondantes A et A^m sont symétriques et définies positives. Par ailleurs, la plupart de leurs composantes étant nulles, ces matrices sont stockées en format creux, et les différents systèmes linéaires sont résolus par une méthode préconditionnée du gradient conjugué. Pour plus de détails sur cette méthode, le lecteur intéressé peut se référer à [9, 26, 15] ou se reporter à l'annexe B.

L'exemple du cylindre fendu

On considère ici l'exemple de Hansbo d'un cylindre fendu [54]. Le domaine est le carré

$$\Omega =]-1, 1[^2$$

La condition initiale est

$$c(x, y, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } (|x| > 0.05 \text{ ou } y > 0.7) \text{ et } R \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $R = \sqrt{x^2 + (y - 0.5)^2}$.

Le champ de vitesse a la forme

$$u(x, y, t) = (-y, x),$$

et le temps final est $T = 2\pi$.

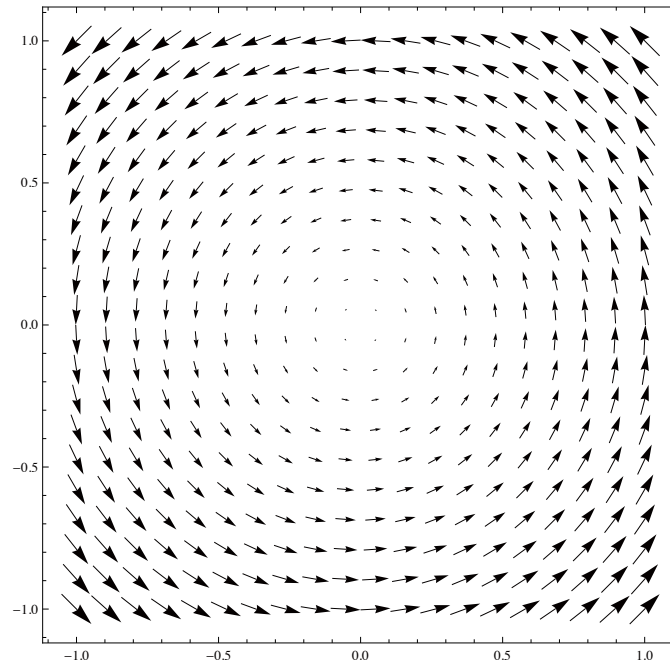


FIGURE 7.1 – Champ de vitesse avec maillage grossier

Au temps final, i.e. après une rotation complète, la solution exacte coïncide avec la condition initiale.

Le domaine est décomposé en deux sous-domaines

$$\Omega_1 =]-1, 0[\times]-1, 1[, \quad \Omega_2 =]0, 1[\times]-1, 1[$$

$$\Gamma = \{0\} \times]-1, 1[$$

On considère un maillage de Ω formé de 100×100 éléments de type Q_1 (les éléments finis du domaine

spatiale peuvent être de type Q_2). Comme dans la remarque 11 les deux sous-domaines peuvent être discrétiser de façon indépendante.

On présente ci-dessous les résultats obtenus pour l'équation (6.1) avec la méthode STILS d'une part et la méthode itérative STILS-DDM d'autre part (avec une tolérance $tol = 10^{-8}$).

Les figures 7.2, 7.3, 7.4 et 7.5 montrent respectivement les deux solutions numériques au pas de temps 150τ , 400τ , 500τ et 800τ ($h = 2 \cdot 10^{-2}$, $\tau = 2\pi/800$). La rotation du cylindre est parfaite. De plus leurs formes sont similaires et sont préservées et comparables à la solution initiale. Ceci justifie que l'approche marche en temps pour la méthode STILS-DDM donne de très bons résultats.

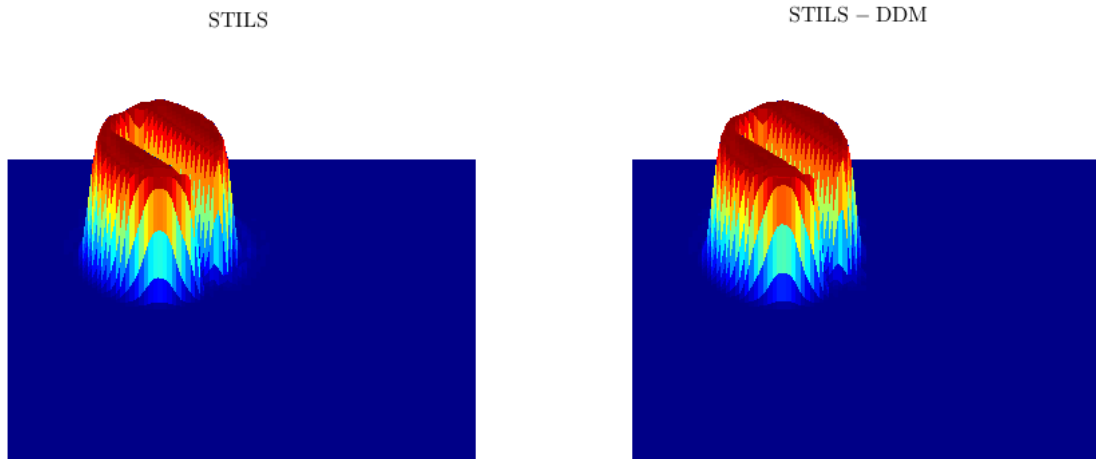


FIGURE 7.2 – Solutions numériques au 150ème pas de temps

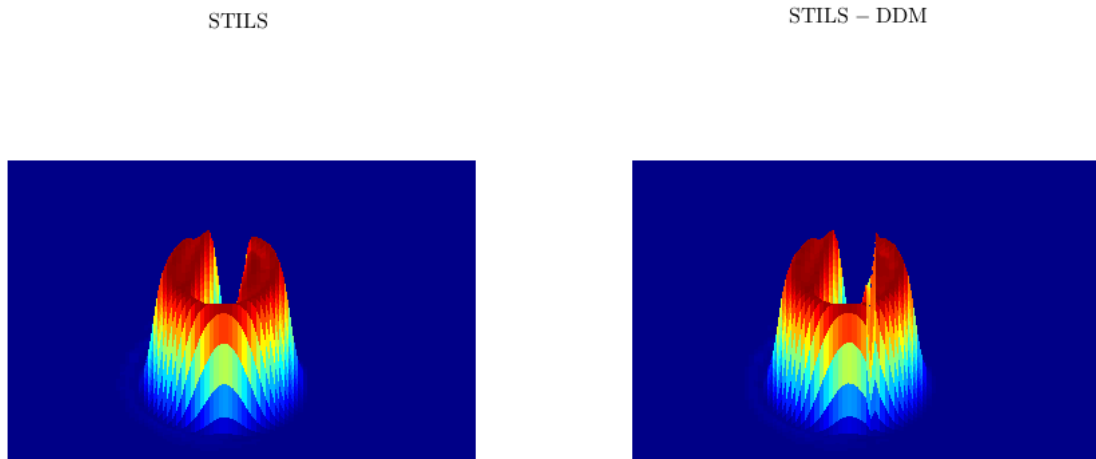


FIGURE 7.3 – Solutions numériques au 400ème pas de temps

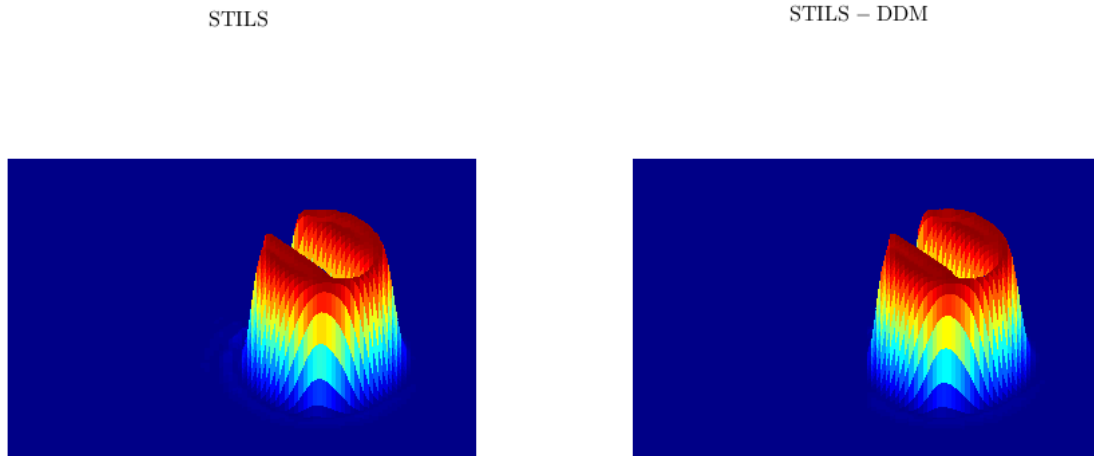


FIGURE 7.4 – Solutions numériques au 600ème pas de temps

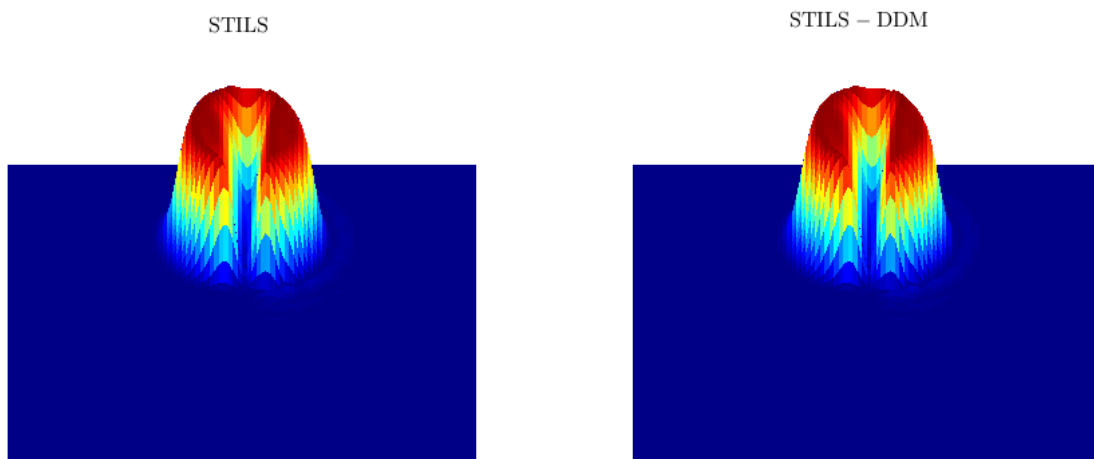


FIGURE 7.5 – Solutions numériques au 800ème pas de temps

Ces petites oscillations sont fortement liées aux différentes discrétisations spatiales et temporelles. Etudions l'évolution de la conservativité en fonction de la taille de la maille (h) et du pas de temps (τ) pour illustrer l'influence des paramètres de discrétisation sur les algorithmes.

- *Influence du paramètre τ :*

τ	Nb. d'iters $\leq$	(min,max) STILS-DDM	(min,max) STILS	variat relat. STILS-DDM	variat relat. STILS
$2\pi/50$	2	(-0.33 , 0.91)	(-0.35 , 0.92)	$3.14 \cdot 10^{-2}$	$2.65 \cdot 10^{-2}$
$2\pi/100$	3	(-0.39 , 1.06)	(-0.41 , 1.07)	$1.60 \cdot 10^{-2}$	$3.98 \cdot 10^{-3}$
$2\pi/200$	3	(-0.28 , 1.25)	(-0.23 , 1.25)	$4.98 \cdot 10^{-3}$	$8.70 \cdot 10^{-4}$
$2\pi/400$	4	(-0.28 , 1.28)	(-0.19 , 1.28)	$1.97 \cdot 10^{-3}$	$3.59 \cdot 10^{-4}$
$2\pi/800$	4	(-0.23 , 1.21)	(-0.19 , 1.20)	$7.44 \cdot 10^{-4}$	$1.44 \cdot 10^{-4}$

TABLE 7.1 – Variations numériques pour différentes valeur de τ avec $h = 2 \cdot 10^{-2}$

La variation relative est la variation maximale de l'intégrale de la concentration entre deux pas de temps, divisée par la valeur minimale de la concentration.

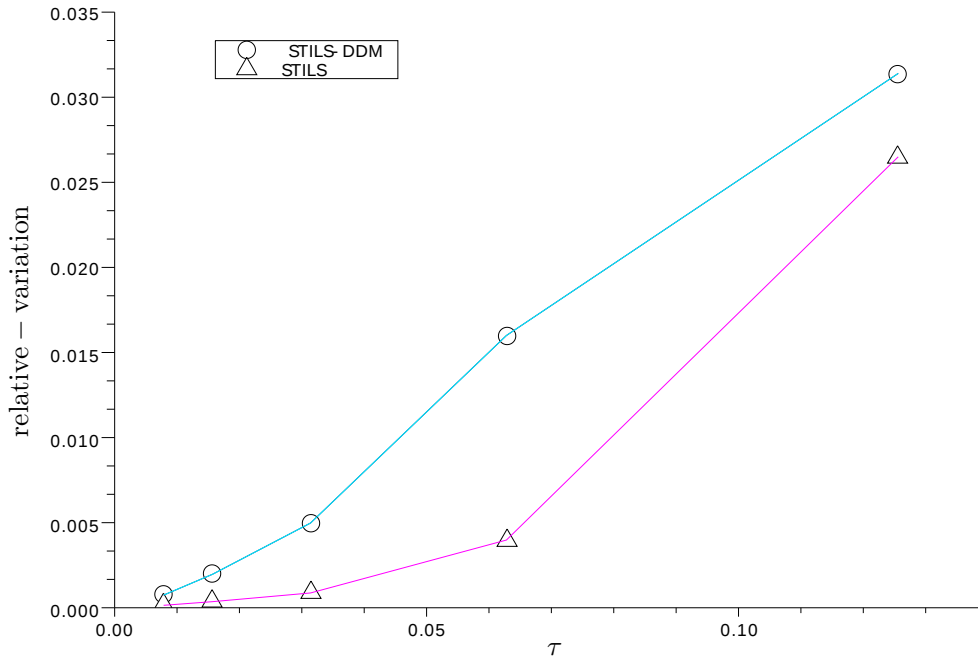


FIGURE 7.6 – Conservativité globale en fonction de τ avec $h = 2 \cdot 10^{-2}$

Idéalement cette grandeur vaut 0*, car la solution ne comporte ni entrée, ni sortie et la solution est simplement une rotation de la condition initiale.

..*. $\frac{\partial}{\partial t} (\int_{\Omega} c \, dx) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} c \, dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(cu) \, dx = - \int_{\partial\Omega} c(u|n) \, d\sigma = 0$

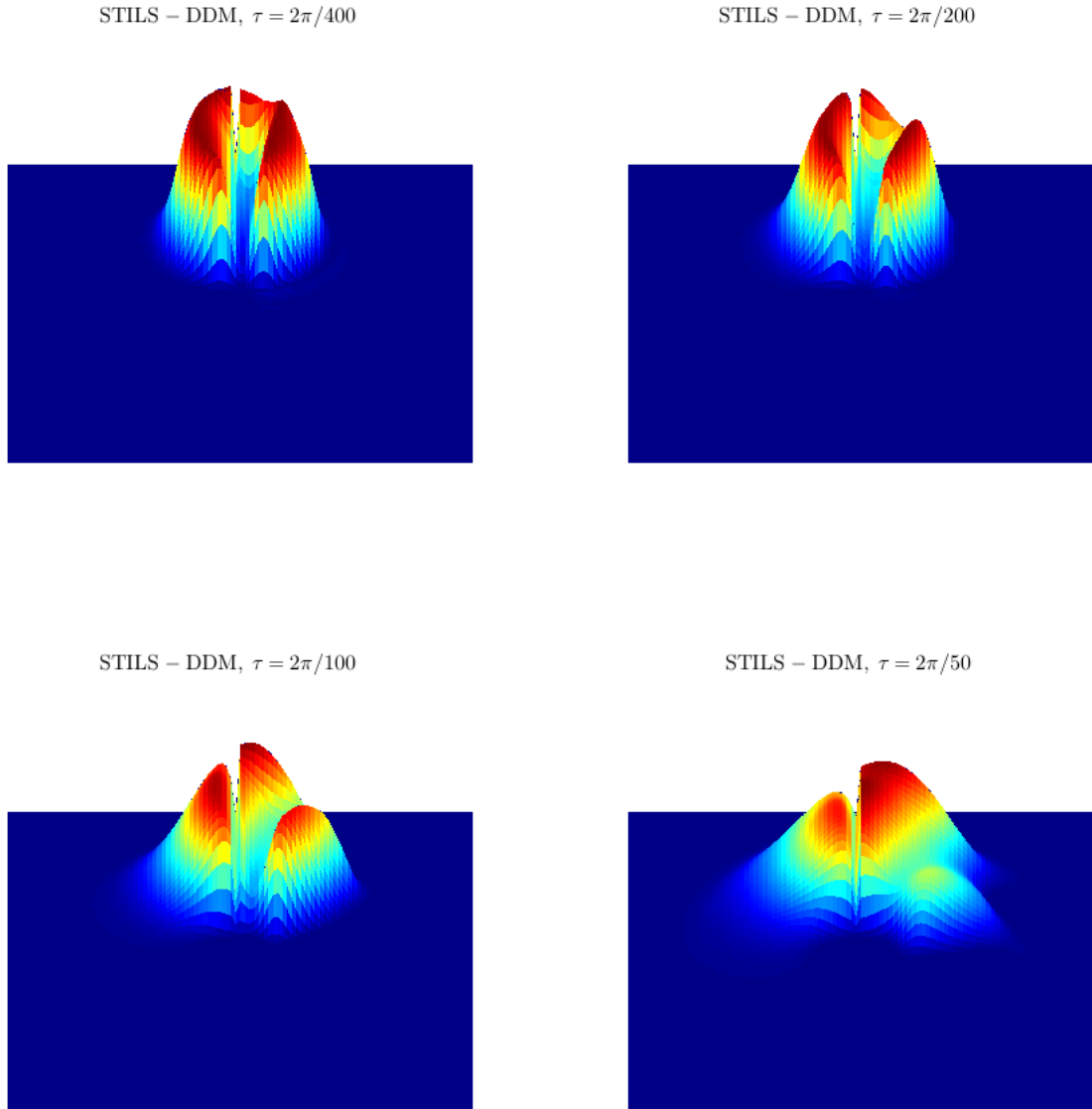


FIGURE 7.7 – Conservativité locale pour STILS-DDM suivant τ avec $h = 2 \cdot 10^{-2}$

Comme le montre la table 7.1 et la figure 7.6, pour une valeur fixée de $h = 2/100$ la conservativité totale pour chaque schéma se dégrade (la variation relative croît) lorsque τ croît, avec un léger avantage pour STILS. Pour le cas STILS-DDM, ceci est illustré localement par une détérioration de la forme du cylindre (voir la figure 7.7).

Notons que pour le cas STILS l'évolution de la conservativité globale en fonction de τ peut avoir une autre allure pour certaines valeurs fixes de h [70]. après vérification on observe exactement le même phénomène pour STILS-DDM : on fixe $h = 2/104$, et on donne les valeurs suivantes à τ , $\tau = 0.00392, 0.00551, 0.00785, 0.0112, 0.0157$, on remarque un effet surprenant de la conservativité globale qui s'améliore quand τ grossit. En revanche la dégradation de la conservativité locale de la forme du cylindre au temps final $T = 1s$ causée par des effets de diffusion numérique est très visible quand τ croît, contrairement à la conservativité globale qui s'améliore. Ce dernier constat s'explique par la diffusion numérique qui peut avoir pour effet de diminuer les fluctuations de la concentration intégrale approchée au cours de la simulation. En effet, celle-ci est calculée par intégration de la solution numérique c_h sur un maillage qui reste fixe alors que la solution effectue une rotation en fonction de t^k .

• *Influence du paramètre h :*

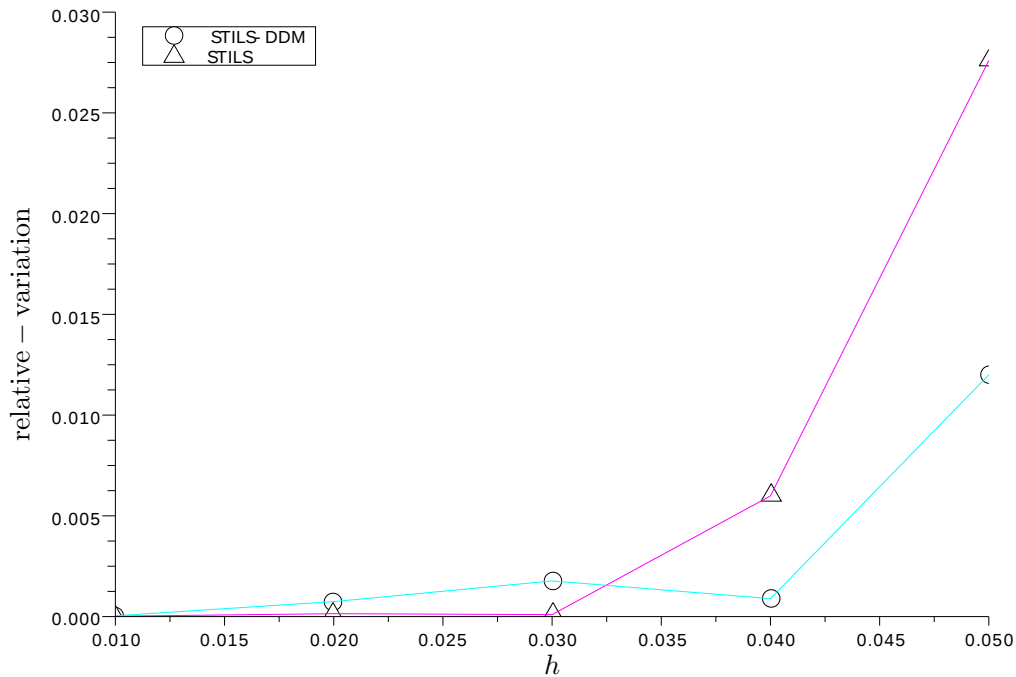
La même remarque s'observe lorsque h prend de grandes valeurs et $\tau = 2\pi/800$, avec une dégradation de la conservativité globale mesurée par la variation relative (voir les tables 7.2, 7.3 et la figure 7.8)

Nombre d'éléments	Nombre de noeuds	Nb. d'itérations $\leq$	(min,max) STILS-DDM	variation relative STILS-DDM
1600	1681	3	$(-0.25, 1.20)$	$1.2 \cdot 10^{-2}$
2500	2601	3	$(-0.20, 1.30)$	$0.89 \cdot 10^{-3}$
3600	3721	4	$(-0.18, 1.26)$	$1.17 \cdot 10^{-3}$
10000	10201	4	$(-0.23, 1.21)$	$7.44 \cdot 10^{-4}$
40000	40401	5	$(-0.19, 1.23)$	$4.06 \cdot 10^{-5}$

TABLE 7.2 – Résultats numériques pour STILS-DDM par rapport à h avec $\tau = 2\pi/800$

Nombre d'éléments	Nombre de noeuds	(min,max) STILS	relative variation STILS
1600	1681	$(-0.33, 1.21)$	$2.76 \cdot 10^{-2}$
2500	2601	$(-0.17, 1.28)$	$5.99 \cdot 10^{-3}$
3600	3721	$(-0.21, 1.27)$	$0.98 \cdot 10^{-4}$
10000	10201	$(-0.19, 1.20)$	$1.44 \cdot 10^{-4}$
40000	40401	$(-0.15, 1.20)$	$1.87 \cdot 10^{-5}$

TABLE 7.3 – Résultats numériques pour STILS par rapport à h avec $\tau = 2\pi/800$

FIGURE 7.8 – Conservativité globale par rapport à h avec $\tau = 2\pi/800$

Finalement sur les tableaux (7.1) et (7.2), on remarque que les deux schémas (STILS et STILS-DDM) produisent des oscillations (*overshooting et undershooting en anglais*) du même ordre. Elles sont dues au fait que le schéma TMQ1 n'est pas conservatif ni même TVD (*Total Variation Diminishing*). On remarque également que le nombre d'itérations de l'algorithme parallèle pour obtenir la convergence varie peu en fonction de τ ou h (voir les tables 7.1 et 7.2).

Les valeurs du paramètre de maille h et du pas de temps τ doivent donc être bien choisies pour diminuer la diffusion artificielle source de la dégradation de la forme du cylindre et en conséquence de certains résultats aberrants de la conservativité globale. Ainsi la condition de stabilité au sens expérimentale observée pour le cas STILS dans [70] est aussi vérifiée dans le cas décomposition de domaine de STILS.

Remarque 12. *Experimentalement il faut que $\frac{\tau}{h} < \frac{1}{2}$ pour avoir une bonne qualité de la solution. Ceci ressemble à une condition de stabilité, alors que le schéma numérique TMQ1 est inconditionnellement stable [70].*

Lorsque $\frac{\tau}{h} > \frac{1}{2}$ il y a un phénomène qui ressemble à une diffusion numérique.

Cône absorbé par 6 tourbillons

Cet exemple introduit dans P. Smolarkiewicz [81] est une expérience classique connue sous le nom "flot déformant". Sa particularité est de déformer la masse de concentration initiale, disposée en un cône, par un champ de vecteurs simple à formuler, qui l'absorbe dans des tourbillons de sens opposés[†].

Le domaine est le rectangle

$$\Omega =]25, 75[\times]12.5, 87.5[,$$

discretisé grossièrement en 50×75 éléments de type Q_1 . La condition initiale forme un cône centré en $(50, 50)$.

[†]. On peut également consulter [83][54]

$$c(x, y, 0) = \begin{cases} 1 - R/15 & \text{si } R \leq 15 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où $R = \sqrt{(x - 50)^2 + (y - 50)^2}$.

Le temps final est $T = 263.76$,

le champ de vitesse u est

$$u(x, y, t) = \frac{8\pi}{25} \left(\sin\left(\frac{\pi x}{25}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{25}\right), \cos\left(\frac{\pi x}{25}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{25}\right) \right)$$

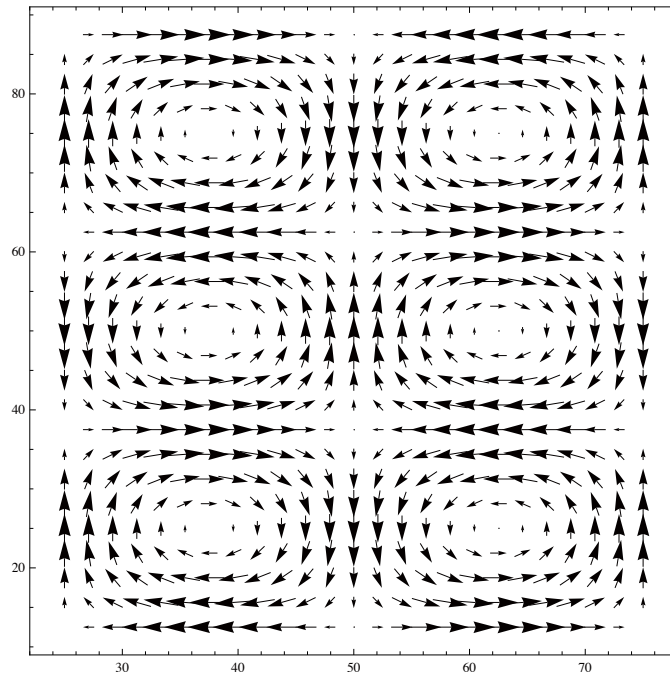


FIGURE 7.9 – Visualisation du champ de vitesse

On peut voir sur la figure ci-dessus que le champ de vitesse qui est à divergence nulle est formé par 6 tourbillons.

Le domaine est décomposé en deux sous-domaines

$$\Omega_1 =]25, 50[\times]12.5, 87.5[, \quad \Omega_2 =]50, 75[\times]12.5, 87.5[,$$

$$\Gamma = \{50\} \times]12.5, 87.5[$$

L'intervalle temps est partitionné en 800 sous-intervalles, donc $\tau = 263.76/800 = 0.3297$.
Les résultats du schéma itératif STILS-DDM sont obtenus avec une tolérance $tol = 10^{-8}$.

Les figures 7.10, 7.11, 7.12, et 7.13 donnent un aperçu des solutions numériques aux pas de temps 20τ , 150τ , 440τ , et 800τ ($\tau = 263.76/800 = 0.3297$). Les deux simulations se manifestent de la même manière à chaque pas de temps : après un certain pas de temps, les bandes issues du cône initial deviennent de plus en plus minces à mesure qu'elles sont enroulées par les tourbillons. Pour les deux cas, la concentration intégrale est très bien conservée. Notons que de petites oscillations illustrent tout de même des différences entre les deux cas, en particulier près de l'interface (pas de temps 20τ). Mais globalement les deux images sont remarquablement semblables.

On note également les mêmes observations quant aux différentes influences des paramètres de discrétisations sur les deux méthodes comme le montre les résultats suivants.

τ	Nb. d'itér $\leq$	(min,max) STILS-DDM	(min,max) STILS	variat relat. STILS-DDM	variat relat. STILS
263.76/50	2	(-0.12 , 1.17)	(-0.13 , 1.12)	$2.30 \cdot 10^{-1}$	$2.65 \cdot 10^{-1}$
263.76/100	2	(-0.23 , 1.21)	(-0.30 , 1.24)	$1.35 \cdot 10^{-2}$	$1.98 \cdot 10^{-1}$
263.76/200	2	(-0.18 , 1.24)	(-0.16 , 1.31)	$1.98 \cdot 10^{-3}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$
263.76/400	2	(-0.33 , 1.13)	(-0.24 , 1.17)	$1.70 \cdot 10^{-5}$	$0.19 \cdot 10^{-6}$
263.76/800	3	(-0.14 , 1.05)	(-0.15 , 1.13)	$1.48 \cdot 10^{-9}$	$1.04 \cdot 10^{-9}$

TABLE 7.4 – Variations numériques suivant τ pour un maillage 50×75 éléments

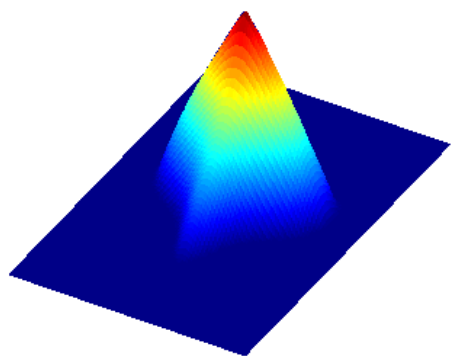
Nombre d'éléments	Nombre de noeuds	Nb. d'itérations $\leq$	(min,max) STILS-DDM	variation relative STILS-DDM
1250	1326	3	(-0.12, 1.17)	$2.40 \cdot 10^{-3}$
3750	3876	3	(-0.14, 1.05)	$1.48 \cdot 10^{-9}$
7500	7696	3	(-0.45, 1.31)	$1.07 \cdot 10^{-10}$
12500	12726	5	(-0.21, 1.17)	$0.14 \cdot 10^{-10}$
45000	45426	5	(-0.39, 1.34)	$3.26 \cdot 10^{-11}$

TABLE 7.5 – Résultats pour STILS-DDM par rapport à h avec $\tau = 263.76/800$

Nombre d'éléments	Nombre de noeuds	(min,max) STILS	variation relative STILS
1250	1326	(-0.13, 1.12)	$2.65 \cdot 10^{-4}$
3750	3876	(-0.15, 1.13)	$1.04 \cdot 10^{-9}$
7500	7696	(-0.24, 1.17)	$0.35 \cdot 10^{-9}$
12500	12726	(-0.90, 1.24)	$1.04 \cdot 10^{-10}$
45000	45426	(-0.22, 1.13)	$0.37 \cdot 10^{-10}$

TABLE 7.6 – Résultats numériques pour STILS par rapport à h avec $\tau = 263.76/800$

STILS – TMQ1



STILS – DDM – TMQ1

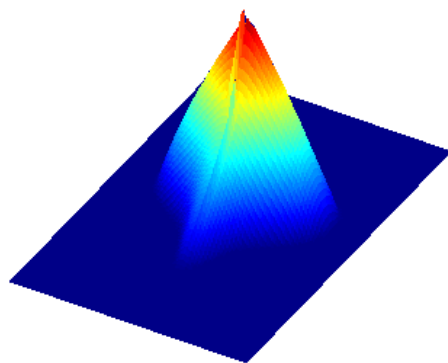
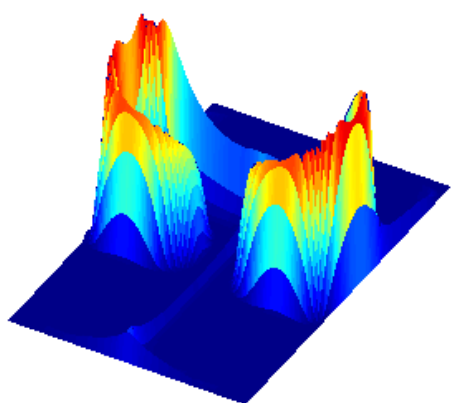


FIGURE 7.10 – Solutions numériques au 20ème pas de temps

STILS – TMQ1



STILS – DDM – TMQ1

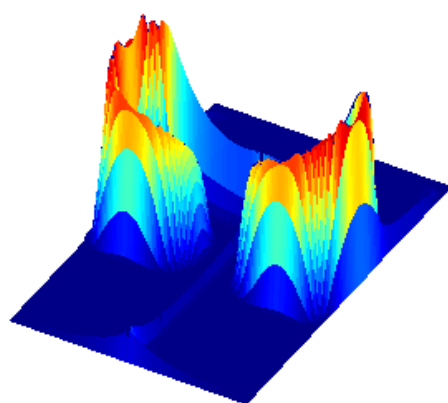
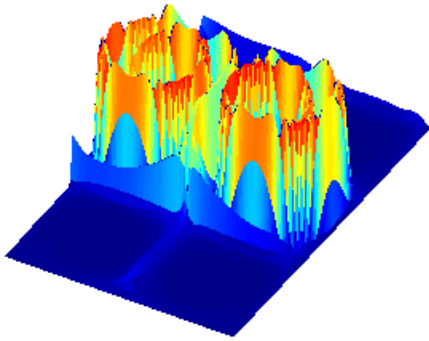


FIGURE 7.11 – Solutions numériques au 150ème pas de temps

STILS – TMQ1



STILS – DDM – TMQ1

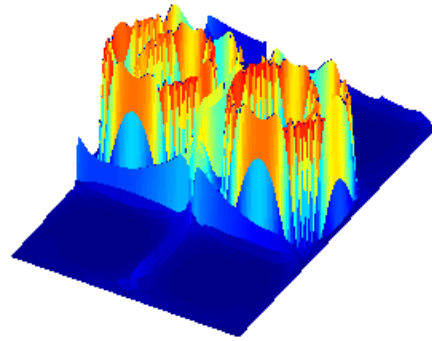
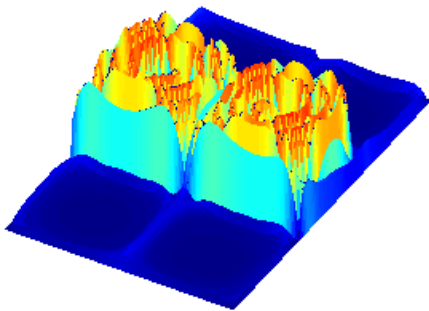


FIGURE 7.12 – Solutions numériques au 440ème pas de temps

STILS – TMQ1



STILS – DDM – TMQ1

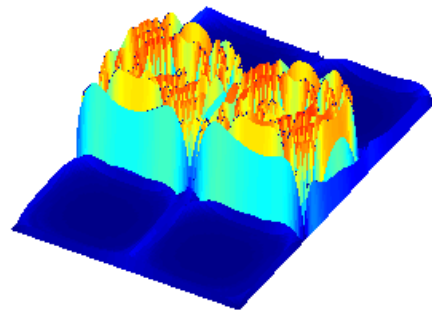


FIGURE 7.13 – Solutions numériques au 800ème pas de temps

Commentaire pour le schéma TMQ1 de STILS : En résumé la version TMQ1 de STILS pour ces deux exemples confirme bien d'une part l'équivalence entre la résolution globale et celle 2-domaines du problème de transport linéaire, et d'autre part la bonne tenue du schéma itératif entre sous-domaines pour résoudre le problème 2-domaines. Mais il faut noter que des imperfections existent bien, c'est le cas des oscillations numériques autour de l'interface, et de l'influence des paramètres de maillage h et τ sur la conservativité des schémas numériques.

Pour réduire les effets d'oscillations induites par la méthode STILS-DDM, une manière convenante est de considérer des procédures marche en temps de degrés élevés (TMQ2, TMQ3, etc...). Mais on notera que la convergence est beaucoup plus lente et le temps de calcul plus long.

7.2.2 Schéma TMQ2

Ce schéma est donné par les fonctions de base quadratiques en temps définies sur $(0, \tau)$ par

$$\begin{aligned} a_{k-1}(t) &= \frac{(t - \frac{\tau}{2})(t - \tau)}{(0 - \frac{\tau}{2})(0 - \tau)}, \\ a_{k-\frac{1}{2}}(t) &= \frac{(t - 0)(t - \tau)}{(\frac{\tau}{2} - 0)(\frac{\tau}{2} - \tau)}, \\ a_k(t) &= \frac{(t - 0)(t - \frac{\tau}{2})}{(\tau - \frac{\tau}{2})(\tau - \frac{\tau}{2})}. \end{aligned}$$

Ces trois fonctions engendrent un sous-espace C_2 de $\mathcal{C}([t^{k-1}, t^k])$. L'espace discret H^h (resp. H_i^h , $i = 1, 2$) est engendré par les produits de a_{k-1} , $a_{k-\frac{1}{2}}$ ou a_k avec les fonctions de base spatiales ψ_l (resp. $\psi_l^{(i)}$, $i = 1, 2$).

Les approximations de STILS et STILS-DDM sont ainsi déterminées par (7.8)-(7.9) et (7.10)-(7.14).

La solution STILS approchée s'écrit

$$c_k(x, t) = \sum_{l=1}^N \psi_l(x) \left(c_l^{k-1} a_{k-1}(t) + c_l^{k-\frac{1}{2}} a_{k-\frac{1}{2}}(t) + c_l^k a_k(t) \right).$$

Selon le même principe que dans le cas TMQ1, les fonctions φ_h doivent s'annuler en t^{k-1} . En tenant compte du critère d'indépendance et de génération de la base spatio-temporelle, il suffit de vérifier l'équation (7.8) avec des fonctions de bases aux N noeuds du maillage et aux pas de temps $t^{k-\frac{1}{2}}$ et t^k .

Ainsi on obtient un système linéaire de $2N$ équations à $2N$ inconnues que sont $\{c_l^{k-\frac{1}{2}}, c_l^k\}_{l=1}^N$.

Dans le cas où $\varphi_h = \psi_i \cdot a_{k-\frac{1}{2}}(t)$ dans (7.8), alors après intégration en temps [70] on a

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l=1}^N c_l^{k-1} \int_{\Omega} \left[\frac{\tau}{15} (\nabla \psi_l | u) (\nabla \psi_i | u) + \frac{2}{3} (\nabla \psi_l | u) \psi_i - \frac{2}{3} (\nabla \psi_i | u) \psi_l - \frac{8}{3\tau} \psi_l \psi_i \right] dx \\ &+ \sum_{l=1}^N c_l^{k-\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \left[\frac{8\tau}{15} (\nabla \psi_l | u) (\nabla \psi_i | u) + \frac{16}{3\tau} \psi_l \psi_i \right] dx + \sum_{l=1}^N c_l^k \int_{\Omega} \left[\frac{\tau}{15} (\nabla \psi_l | u) (\nabla \psi_i | u) \right. \\ &\left. - \frac{2}{3} (\nabla \psi_l | u) \psi_i + \frac{2}{3} (\nabla \psi_i | u) \psi_l - \frac{8}{3\tau} \psi_l \psi_i \right] dx \end{aligned} \quad (7.24)$$

et pour $\varphi_h = \psi_i a_k(t)$, on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{l=1}^N c_l^{k-1} \int_{\Omega} \left[\frac{-\tau}{30} (\nabla \psi_l | u) (\nabla \psi_i | u) + \frac{-1}{6} (\nabla \psi_l | u) \psi_i + \frac{1}{6} (\nabla \psi_i | u) \psi_l + \frac{1}{3\tau} \psi_l \psi_i \right] dx \\
&+ \sum_{l=1}^N c_l^{k-\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \left[\frac{\tau}{15} (\nabla \psi_l | u) (\nabla \psi_i | u) + \frac{2}{3} (\nabla \psi_l | u) \psi_i + \frac{-2}{3} (\nabla \psi_i | u) \psi_l + \frac{-8}{3\tau} \psi_l \psi_i \right] dx \\
&+ \sum_{l=1}^N c_l^k \int_{\Omega} \left[\frac{2\tau}{15} (\nabla \psi_l | u) (\nabla \psi_i | u) + \frac{1}{2} (\nabla \psi_l | u) \psi_i + \frac{1}{2} (\nabla \psi_i | u) \psi_l + \frac{7}{3\tau} \psi_l \psi_i \right] dx
\end{aligned} \quad (7.25)$$

De la même manière, l'approximation TMQ2 de l'algorithme STILS-DDM est exprimée par les fonctions tests qui sont indépendantes de a_{k-1} . De plus la solution approchée s'inscrivant par

$$c_k^{m,j+1}(x, t) = \sum_{l=1}^N \psi_l^{(m)}(x) \left(c_l^{m,j+1,k-1} a_{k-1}(t) + c_l^{m,j+1,k-\frac{1}{2}} a_{k-\frac{1}{2}}(t) + c_l^{m,j+1,k} a_k(t) \right)$$

$m = 1, 2, j \geq 0$, alors si $\varphi_h^m = \psi_i^{(m)} a_{k-\frac{1}{2}}(t)$, on obtient le système linéaire suivant

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{l=1}^N c_l^{m,j+1,k-1} \int_{\Omega} \left[\frac{\tau}{15} (\nabla \psi_l^{(m)} | u) (\nabla \psi_i^{(m)} | u) + \frac{2}{3} (\nabla \psi_l^{(m)} | u) \psi_i \right. \\
&- \frac{2}{3} (\nabla \psi_i^{(m)} | u) \psi_l - \frac{8}{3\tau} \psi_l^{(m)} \psi_i^{(m)} \left. \right] dx + \sum_{l=1}^N c_l^{m,j+1,k-\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \left[\frac{8\tau}{15} (\nabla \psi_l^{(m)} | u) (\nabla \psi_i^{(m)} | u) \right. \\
&+ \frac{16}{3\tau} \psi_l^{(m)} \psi_i^{(m)} \left. \right] dx + \sum_{l=1}^N c_l^{m,j+1,k} \int_{\Omega} \left[\frac{\tau}{15} (\nabla \psi_l^{(m)} | u) (\nabla \psi_i^{(m)} | u) - \frac{2}{3} (\nabla \psi_l^{(m)} | u) \psi_i^{(m)} + \right. \\
&+ \frac{2}{3} (\nabla \psi_i^{(m)} | u) \psi_l^{(m)} - \frac{8}{3\tau} \psi_l^{(m)} \psi_i^{(m)} \left. \right] dx,
\end{aligned} \quad (7.26)$$

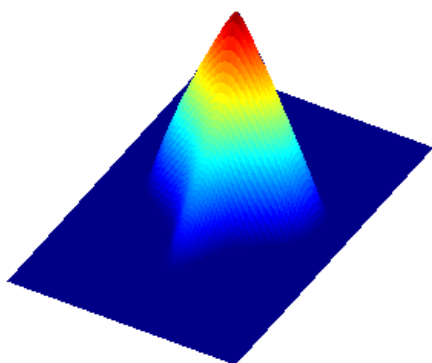
et pour $\varphi_h^{(m)} = \psi_i^{(m)} a_k(t)$ on a

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{l=1}^N c_l^{m,j+1,k-1} \int_{\Omega} \left[\frac{-\tau}{30} (\nabla \psi_l^{(m)} | u) (\nabla \psi_i^{(m)} | u) + \frac{-1}{6} (\nabla \psi_l^{(m)} | u) \psi_i^{(m)} \right. \\
&+ \frac{1}{6} (\nabla \psi_i^{(m)} | u) \psi_l^{(m)} + \frac{1}{3\tau} \psi_l^{(m)} \psi_i^{(m)} \left. \right] dx + \sum_{l=1}^N c_l^{m,j+1,k-\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \left[\frac{\tau}{15} (\nabla \psi_l^{(m)} | u) (\nabla \psi_i^{(m)} | u) \right. \\
&+ \frac{2}{3} (\nabla \psi_l^{(m)} | u) \psi_i^{(m)} + \frac{-2}{3} (\nabla \psi_i^{(m)} | u) \psi_l^{(m)} + \frac{-8}{3\tau} \psi_l^{(m)} \psi_i^{(m)} \left. \right] dx \\
&+ \sum_{l=1}^N c_l^{m,j+1,k} \int_{\Omega} \left[\frac{2\tau}{15} (\nabla \psi_l^{(m)} | u) (\nabla \psi_i^{(m)} | u) + \frac{1}{2} (\nabla \psi_l^{(m)} | u) \psi_i^{(m)} + \frac{1}{2} (\nabla \psi_i^{(m)} | u) \psi_l^{(m)} \right. \\
&+ \frac{7}{3\tau} \psi_l^{(m)} \psi_i^{(m)} \left. \right] dx
\end{aligned} \quad (7.27)$$

Les conditions nonhomogènes de Dirichlet sur les frontières $\tilde{\Gamma}^{k,\pm}$ sont exploitées par superposition comme dans le cas TMQ1.

On teste la convergence du schéma itératif STILS-DDM avec une tolérance $tol = 10^{-8}$.

STILS – TMQ2



STILS – DDM – TMQ2

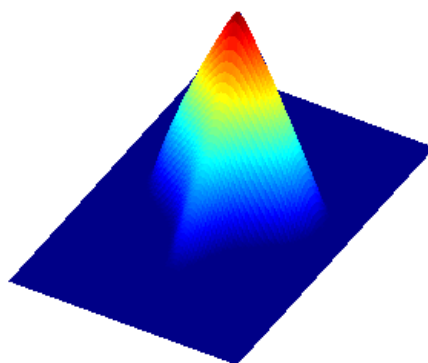
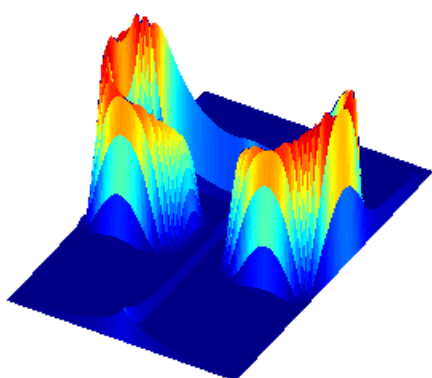


FIGURE 7.14 – Solutions numériques au 20ème pas de temps

STILS – TMQ2



STILS – DDM – TMQ2

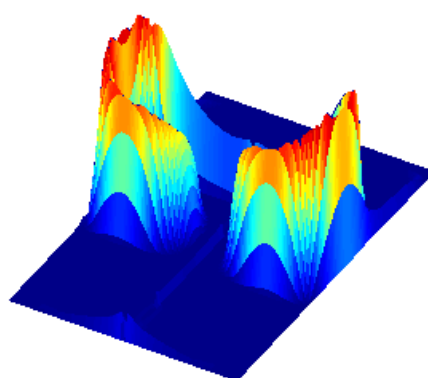
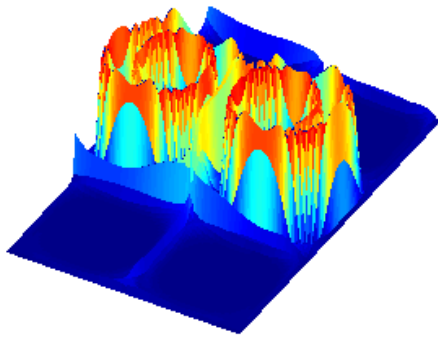


FIGURE 7.15 – Solutions numériques au 150ème pas de temps

STILS – TMQ2



STILS – DDM – TMQ2

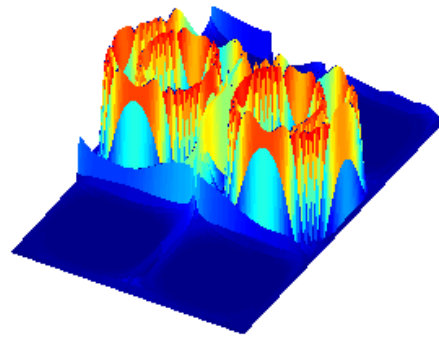
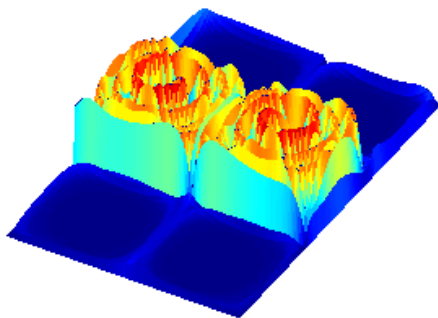


FIGURE 7.16 – Solutions numériques au 400ème pas de temps

STILS – TMQ2



STILS – DDM – TMQ2

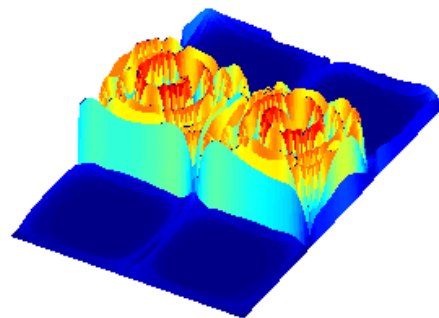


FIGURE 7.17 – Solutions numériques au 800ème pas de temps

Les figures 7.14, 7.15, 7.16, 7.17 montrent les solutions numériques données par les formes STILS et STILS-DDM aux 20ème, 150ème, 400ème, 800ème pas de temps. Pour chaque étape la similitude entre les deux images est remarquable.

Enfin Les tableaux ci-dessous illustrent l'influence des maillages sur la conservativité (mesurée par la variation relative), et les effets d'*overshooting* et *undershooting*.

τ	Nb. d'iters $\leq$	(min,max) STILS-DDM	(min,max) STILS	variat relat. STILS-DDM	variat relat. STILS
263.76/50	4	(-0.15 , 1.73)	(-0.35 , 0.92)	$3.04 \cdot 10^{-1}$	$1.15 \cdot 10^{-1}$
263.76/100	5	(-0.11 , 1.13)	(-0.41 , 1.07)	$1.10 \cdot 10^{-3}$	$1.18 \cdot 10^{-2}$
263.76/200	5	(-0.18 , 1.15)	(-0.28 , 1.25)	$1.98 \cdot 10^{-3}$	$0.75 \cdot 10^{-3}$
263.76/400	7	(-0.22 , 1.08)	(-0.19 , 1.28)	$1.17 \cdot 10^{-5}$	$3.09 \cdot 10^{-5}$
263.76/800	7	(-0.14 , 1.31)	(-0.19 , 1.20)	$0.74 \cdot 10^{-7}$	$1.03 \cdot 10^{-6}$

TABLE 7.7 – Variations numériques suivant τ avec un maillage 50×75 éléments

Nombre d'éléments	Nombre de noeuds	Nb. d'itérations $\leq$	(min,max) STILS-DDM	variation relative STILS-DDM
1250	1326	5	(-0.05, 1.13)	$1.2 \cdot 10^{-2}$
3750	3876	7	(-0.14, 1.31)	$0.74 \cdot 10^{-7}$
7500	7696	7	(-0.11, 1.10)	$1.17 \cdot 10^{-7}$
12500	12726	7	(-0.15, 1.21)	$7.44 \cdot 10^{-9}$
45000	45426	8	(-0.09, 1.31)	$4.06 \cdot 10^{-9}$

TABLE 7.8 – Résultats numériques pour STILS-DDM par rapport à h avec $\tau = 263.76/800$

Nombre d'éléments	Nombre de noeuds	(min,max) STILS	relative variation STILS
1250	1326	(-0.25, 1.21)	$2.76 \cdot 10^{-2}$
3750	3876	(-0.19, 1.20)	$1.03 \cdot 10^{-6}$
7500	7696	(-0.18, 1.27)	$0.98 \cdot 10^{-6}$
12500	12726	(-0.13, 1.10)	$1.44 \cdot 10^{-7}$
45000	45426	(-0.10, 1.03)	$1.87 \cdot 10^{-9}$

TABLE 7.9 – Résultats numériques pour STILS par rapport à h avec $\tau = 263.76/800$

Commentaire pour le schéma TMQ2 de STILS : Dans ce cas les solutions obtenues soit la méthode STILS usuelle soit par la méthode STILS avec 2 domaines sont très proches. On note l'influence des paramètres de mailles τ et h sur la conservativité globale du schéma. Enfin en comparaison au schéma TMQ1, on observe que le schéma itératif entre sous-domaines converge plus lentement avec la version TMQ2 de STILS, mais les oscillations numériques autour de l'interface sont moins visibles, bref la qualité de la solution est meilleure (comparer fig. 7.13 et fig. 7.17).

Conclusion sur la méthode STILS-DDM

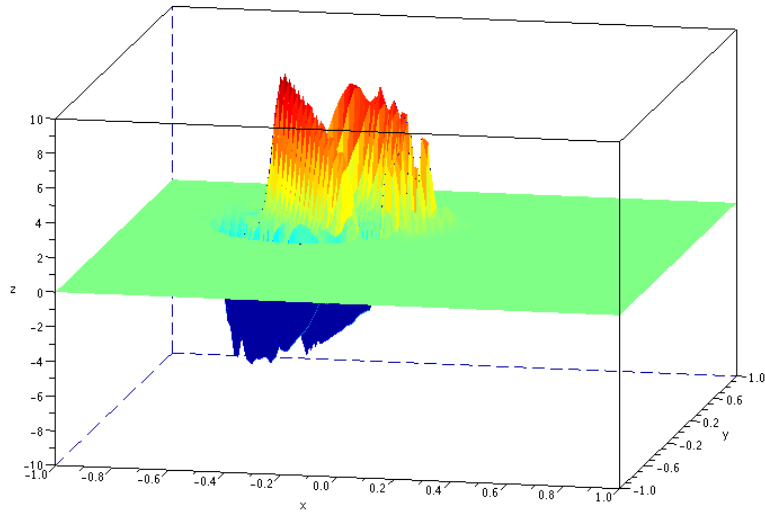


FIGURE 7.18 – Erreur entre STILS et STILS-DDM au 150ème pas de temps (exemple de Hansbo)

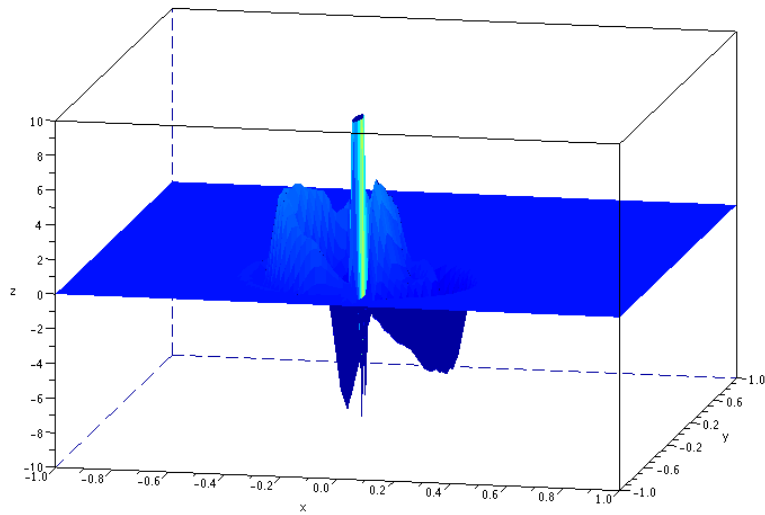


FIGURE 7.19 – Erreur entre STILS et STILS-DDM au 400ème pas de temps (exemple de Hansbo)

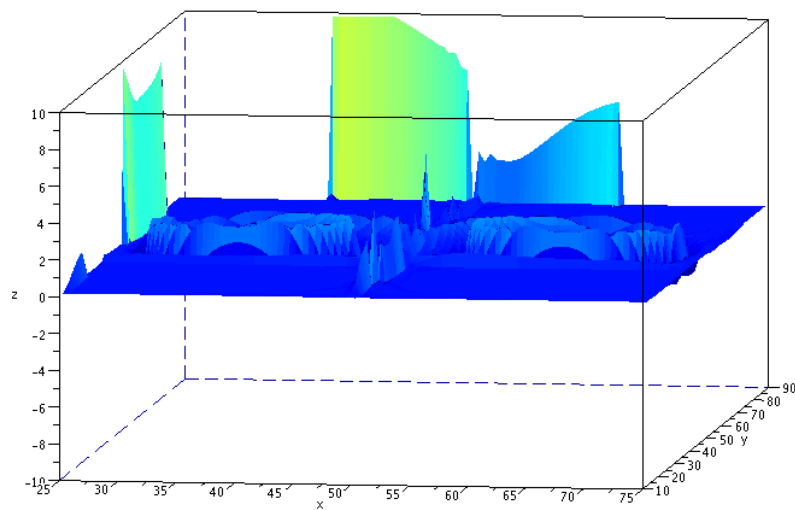


FIGURE 7.20 – Erreur entre STILS et STILS-DDM au 150ème pas de temps (exemple de Smolarkiewicz)

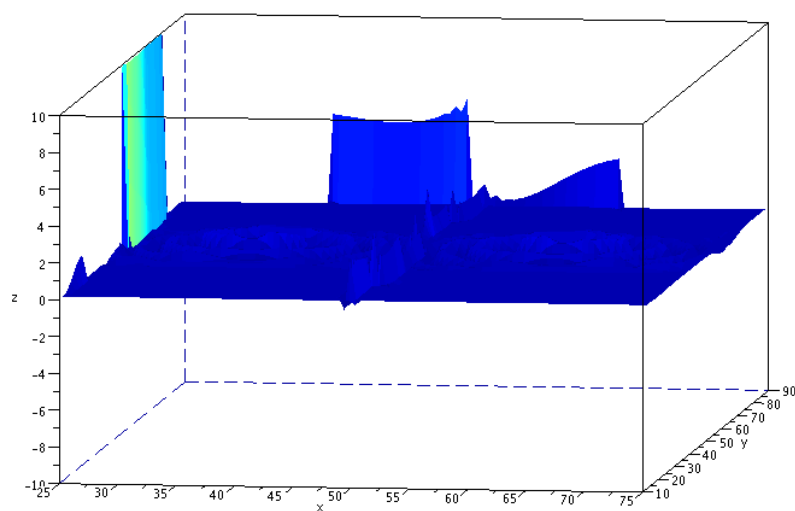


FIGURE 7.21 – Erreur entre STILS et STILS-DDM au 400ème pas de temps (exemple de Smolarkiewicz)

Les résultats numériques établis dans ce chapitre montrent que la version marche en temps de STILS-DDM est une bonne approximation de la méthode STILS. Pour chacune des deux simulations (l'exemple de Hansbo et l'exemple de Smolarkiewicz), on constate que les deux solutions sont très proches. Néanmoins on peut noter quelques oscillations qui n'apparaissent pas sur la solution STILS (voir fig. 7.3). Ces oscillations numériques sont induites d'une part par les différentes itérations entre les sous-problèmes avant de pouvoir vérifier la condition d'interface synonyme de convergence, et d'autre part par l'influence des paramètres de discrétisation. Mais, elles ne sont pas très représentatives pour illustrer une différence réelle entre les deux méthodes. Les figures (7.18)-(7.19) resp. (7.20)-(7.21) (pour mieux représenter l'erreur, on l'a multipliée par 100 sur les figures) affichent cette différence pour l'exemple de Hansbo resp. l'expérience du flux déformant. On observe que la trace existe bien, mais elle est presque nulle, ce qui traduit la ressemblance des deux solutions numériques.

Dans [12, 74], il est établi que sous certaines conditions la formulation STILS de l'équation d'advection est équivalente à un problème de diffusion dégénéré. Nous développons une nouvelle méthode de décomposition de domaine du problème STILS en tenant compte de cette interprétation. Dans cette situation, deux conditions d'interface sont à considérer.

8.1 De l'advection à la diffusion

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné ayant un bord $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et $T > 0$. Le problème consiste à trouver une fonction $c : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait l'équation aux dérivées partielles suivante dite d'**advection** introduite au chapitre 6 :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(cu) = f \quad (8.1)$$

et les conditions initiale et au bord

$$c(x, 0) = c_0(x) \text{ pour } x \text{ dans } \Omega \quad (8.2)$$

$$c(x, t) = c_{00}(x, t) \text{ pour } (x, t) \text{ sur } \partial\Omega^- \times (0, T) \quad (8.3)$$

$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ est un champ de vecteur de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ de carré intégrable.

En partant d'une situation simplifiée d'un flot à divergence nulle ($\nabla \cdot u = 0$), et en utilisant les notations du chapitre 6, on a la formulation spatio-temporelle suivante

$$(\tilde{\nabla}c|\tilde{u}) = f \quad \text{sur } Q \quad (8.4)$$

$$c = c_b \quad \text{sur } \partial Q^- \quad (8.5)$$

Au sens STILS (chapitre 6), une solution de (8.4)-(8.5) correspond au minimum de la fonctionnelle

$$J(c) = \frac{1}{2} \left(\int_Q \left((\tilde{\nabla}c|\tilde{u}) - f \right)^2 dxdt - \int_{\partial Q^-} c^2(\tilde{u}|\tilde{n})d\tilde{\sigma} \right). \quad (8.6)$$

La dérivée au sens de Gâteaux de J est

$$[DJ(c)](\varphi) = \int_Q \left((\tilde{u}|\tilde{\nabla}c) - f \right) (\tilde{u}|\tilde{\nabla}\varphi) dxdt - \int_{\partial Q^-} c\varphi(\tilde{u}|\tilde{n})d\tilde{\sigma}. \quad (8.7)$$

En appliquant l'identité algébrique

$$(a|b)(a|c) = (([a \otimes a]b)|c), \quad a, b, c \in \mathbb{R}^{d+1}$$

à (8.7), on a

$$\begin{aligned} [DJ(c)](\varphi) &= \int_Q ((\tilde{u}|\tilde{\nabla}c) - f)(\tilde{u}|\tilde{\nabla}\varphi) \, dxdt \\ &= \int_Q ((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla}c - f\tilde{u} | \tilde{\nabla}\varphi) \, dxdt \quad \forall \varphi \in H_0(u, Q; \partial Q^-) \end{aligned} \quad (8.8)$$

Par la formule d'intégration de Green (théorème 5), on a

$$[DJ(c)](\varphi) = 0 = \int_{\partial Q} ((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla}c - f\tilde{u} | \tilde{n})\varphi \, d\tilde{\sigma} - \int_Q \tilde{\nabla} \cdot ((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla}c - f\tilde{u})\varphi \, dxdt$$

$\forall \varphi \in H_0(u, Q; \partial Q^-)$. Un minimum de (8.8) est donc obtenu si

$$\tilde{\nabla} \cdot ((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla}c) = \tilde{\nabla} \cdot (f\tilde{u}) \quad \text{dans } Q \quad (8.9)$$

$$c = c_b \quad \text{sur } \partial Q^- \quad (8.10)$$

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla}c - f\tilde{u} | \tilde{n}) = 0 \quad \text{sur } \partial Q^+ \quad (8.11)$$

Remarque 13. [12, 74] En supposant $f = 0$, la condition (8.11) peut être exprimée par

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla}c | \tilde{n}) = (\tilde{u}|\tilde{n})(\tilde{u}|\tilde{\nabla}c) = 0$$

En particulier $(\tilde{\nabla}c|\tilde{u}) = 0$ sur ∂Q^+ et aussi sur ∂Q^- .

La formulation STILS n'est autre qu'une formulation faible d'un problème de diffusion dégénéré exprimée en espace-temps, avec $(\tilde{u} \otimes \tilde{u})$ comme tenseur de diffusion dégénéré.

Soit φ_i une fonction assez régulière à support compact dans Q_i , et φ le prolongement par 0 de φ_i sur Q . Alors en appliquant l'intégration de Green, (8.9)-(8.11) donne

$$\tilde{\nabla} \cdot ((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla}c|_{Q_i}) = \tilde{\nabla} \cdot (f\tilde{u}) \quad \text{dans } Q_i \quad (8.12)$$

$$c|_{Q_i} = c_{b,i} \quad \text{sur } \partial Q_i^- \quad (8.13)$$

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla}c|_{Q_i} - f\tilde{u} | \tilde{n}) = 0 \quad \text{sur } \partial Q_i^+ \quad (8.14)$$

où (8.12) et (8.14) sont respectivement obtenus dans $\mathcal{D}'(Q_i)$ et $H^{-\frac{1}{2}}(\partial Q_i^+)$.

8.2 Condition d'interface Dirichlet-Neumann

Le but de ce paragraphe est de reformuler (8.9)-(8.11) pour une méthode de décomposition de domaine à 2 domaines, et d'obtenir des conditions d'interface.

Commençons par établir la continuité de la dérivée conormale de c sur $\tilde{\Gamma}$. Pour $i = 1, 2$, on a

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla}c|_{Q_i} - f\tilde{u}|\tilde{n})|_{\tilde{\Gamma}} \in H^{-\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma}).$$

En effet pour tout $\eta \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma})$, il existe $R_i^\eta \in H_{\partial Q_i \setminus \tilde{\Gamma}}^1(Q_i)$ tel que $R_i^\eta|_{\tilde{\Gamma}} = \eta$ et $\|R_i^\eta\|_{H^1(Q_i)} \leq \|\eta\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma})}$.

Soit l_i la forme linéaire définie sur $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma})$ par

$$l_i(\eta) = \int_{Q_i} (\tilde{u}|\tilde{\nabla}c|_{Q_i})(\tilde{u}|\tilde{\nabla}R_i^\eta) \, dxdt + \int_{Q_i} f(\tilde{u}|\tilde{\nabla}R_i^\eta) \, dxdt,$$

alors $l_i \in H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma})$ et $l_i = ((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla} c|_{Q_i} - f\tilde{u}|\tilde{n})|_{\tilde{\Gamma}}$.

Soit $R^\eta \in H_0(u, Q; \partial Q^-)$ tel que $R|_{Q_i}^\eta = R_i^\eta$. Multiplions (8.9) par R^η , et intégrons par parties. On a

$$\int_{Q_1} (\tilde{u}|\tilde{\nabla} c_1)(\tilde{u}|\tilde{\nabla} R_1^\eta) dxdt + \int_{Q_2} (\tilde{u}|\tilde{\nabla} c_2)(\tilde{u}|\tilde{\nabla} R_2^\eta) dxdt = \int_{Q_1} f(\tilde{u}|\tilde{\nabla} R_1^\eta) dxdt + \int_{Q_2} f(\tilde{u}|\tilde{\nabla} R_2^\eta) dxdt.$$

En utilisant la formule d'intégration de Green, on a

$$[(\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla} c - f\tilde{u}|\tilde{n}] = 0 \quad \text{dans} \quad H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma}) \quad (8.15)$$

Ainsi en posant $c^i = c|_{Q_i}$, le problème global (8.9)-(8.11) est reformulé comme suit

$$\tilde{\nabla} \cdot ((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla} c^1) = \tilde{\nabla} \cdot (f\tilde{u}) \quad \text{dans } Q_1 \quad (8.16)$$

$$c^1 = c_{b,1} \quad \text{sur } \partial Q_1^- \quad (8.17)$$

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla} c^1 - f\tilde{u}|\tilde{n}) = 0 \quad \text{sur } \partial Q_1^+ \quad (8.18)$$

$$c^1 = c^2 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma} \quad (8.19)$$

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla} c^1 - f\tilde{u}|\tilde{n}) = ((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla} c^2 - f\tilde{u}|\tilde{n}) \quad \text{sur } \tilde{\Gamma} \quad (8.20)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot ((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla} c^2) = \tilde{\nabla} \cdot (f\tilde{u}) \quad \text{dans } Q_2 \quad (8.21)$$

$$c^2 = c_{b,2} \quad \text{sur } \partial Q_2^- \quad (8.22)$$

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla} c^2 - f\tilde{u}|\tilde{n}) = 0 \quad \text{sur } \partial Q_2^+ \quad (8.23)$$

C'est la formulation Dirichlet-Neumann (DN).

8.3 Formulation faible 2-domaines

Dans cette section, on démontre l'équivalence au sens faible entre les deux problèmes (8.9)-(8.11) et (8.16)-(8.23).

Posons

$$\hat{\Lambda} = \left\{ \eta \in L^2(\tilde{\Gamma}, |(\tilde{u}|\tilde{n})|d\tilde{\sigma}); \exists \psi^\eta \in H_0(u, Q; \partial Q^-), \eta = \psi^\eta|_{\tilde{\Gamma}} \right\}$$

un espace de trace inclus dans $L^2(\tilde{\Gamma})$ et contenant $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma})$.

Une formulation faible de (8.9)-(8.11) est : trouver

$$\int_Q (\tilde{u}|\tilde{\nabla} c)(\tilde{u}|\tilde{\nabla} \varphi) dxdt = \int_Q f(\tilde{u}|\tilde{\nabla} \varphi) dxdt \quad \forall \varphi \in H_0(u, Q; \partial Q^-) \quad (8.24)$$

$$\gamma^-(c) = c_b \quad (8.25)$$

Une formulation faible de (8.16)-(8.23) est : trouver $(c^1, c^2) \in H(u, Q_1) \times H(u, Q_2)$, $[c]_{\tilde{\Gamma}} = 0$, $c^i|_{\partial Q_i^-} = c_{b,i}$ tel que

$$\int_{Q_1} (\tilde{u}|\tilde{\nabla} c^1)(\tilde{u}|\tilde{\nabla} \varphi^1) dxdt = \int_{Q_1} f(\tilde{u}|\tilde{\nabla} \varphi^1) dxdt \quad (8.26)$$

$$\int_{Q_2} (\tilde{u}|\tilde{\nabla} c^2)(\tilde{u}|\tilde{\nabla} \varphi^2) dxdt = \int_{Q_2} f(\tilde{u}|\tilde{\nabla} \varphi^2) dxdt \quad (8.27)$$

$$\begin{aligned} \int_{Q_1} (\tilde{u}|\tilde{\nabla} c^1)(\tilde{u}|\tilde{\nabla} \psi_1^\eta) dxdt &= \int_{Q_1} f(\tilde{u}|\tilde{\nabla} \psi_1^\eta) dxdt + \int_{Q_2} f(\tilde{u}|\tilde{\nabla} \psi_2^\eta) dxdt - \\ &\quad \int_{Q_2} (\tilde{u}|\tilde{\nabla} c^2)(\tilde{u}|\tilde{\nabla} \psi_2^\eta) dxdt \end{aligned} \quad (8.28)$$

pour tout $\varphi^i \in H_0(u, Q_i; \partial Q_i^- \cup \tilde{\Gamma})$, $i = 1, 2$ et $\eta \in \hat{\Lambda}$

Théorème 22. *Les formulations (8.24)-(8.25) et (8.26)-(8.28) sont équivalentes au sens suivant. Si $c \in H(u, Q)$ est la solution de (8.24)-(8.25) alors $(c|_{Q_1}, c|_{Q_2}) \in H(u, Q_1) \times H(u, Q_2)$ satisfait (8.26)-(8.28). Réciproquement si $(c^1, c^2) \in H(u, Q_1) \times H(u, Q_2)$, $[c]_{\tilde{\Gamma}} = 0$, $c^i|_{\partial Q_i^-} = c_{b,i}$ satisfait (8.26)-(8.28) alors l'extension c définie sur Q telle que $c|_{Q_i} = c_i$ est dans $W(u, Q)$ et est solution (8.24)-(8.25).*

Démonstration. Si $c \in H(u, Q)$ satisfait (8.24)-(8.25) alors sa restriction $c^i = c|_{Q_i} \in H(u, Q_i)$. Dans l'équation (8.24), en posant φ comme la prolongée sur Q d'une fonction $\varphi_i \in H_0(u, Q_i; \partial Q_i^- \cup \tilde{\Gamma})$ par 0, on obtient les équations (8.26) et (8.27). Pour (8.21) il suffit de prendre ψ^η comme fonction test dans (8.24) où $\psi|_{Q_i}^\eta = \psi_i^\eta$.

Réciproquement si $(c^1, c^2) \in H(u, Q_1) \times H(u, Q_2)$ tel que $[c]_{\tilde{\Gamma}} = 0$ satisfait (8.26)-(8.28) et si c est défini sur Q tel que $c|_{Q_i} = c^i$ alors $c \in W(u, Q)$. Soit $\varphi \in H_0(u, Q; \partial Q^-)$, on a $\eta = \varphi|_{\tilde{\Gamma}} \in \hat{\Lambda}$ et $\varphi|_{Q_i} - \psi_i^\eta \in H_0(u, Q_i; \partial Q_i^- \cup \tilde{\Gamma})$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_Q (\tilde{u}|\tilde{\nabla} c)(\tilde{u}|\tilde{\nabla} \varphi) \, dxdt &= \sum_{i=1}^2 \left[\int_{Q_i} \left((\tilde{u}|\tilde{\nabla} c^i)(\tilde{u}|\tilde{\nabla}(\varphi|_{Q_i} - \psi_i^\eta)) + (\tilde{u}|\tilde{\nabla} c^i)(\tilde{u}|\tilde{\nabla} \psi_i^\eta) \right) dxdt \right] \\ &= \sum_{i=1}^2 \left[\int_{Q_i} f(\tilde{u}|\tilde{\nabla}(\varphi|_{Q_i} - \psi_i^\eta)) \, dxdt + \int_{Q_i} f(\tilde{u}|\tilde{\nabla} \psi_i^\eta) \, dxdt \right] \\ &= \int_Q f(\tilde{u}|\tilde{\nabla} \varphi) \, dxdt \end{aligned}$$

□

Comme conséquence on a

Corollaire 3. *Si $f = 0$ dans (8.1) et si $u \in L^\infty(Q)^d \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^d)$, la formulation pour 2-domaines (8.26)-(8.28) admet une unique solution $(c^1, c^2) \in (H(u, Q_1) \times H(u, Q_2)) \cap L^\infty(Q)$.*

La condition d'interface Dirichlet-Neumann (8.19)-(8.20) introduite dans (8.16)-(8.23) peut être remplacée par d'autres conditions de transmission au sens de la proposition suivante

Proposition 16. *Soit V un espace normé tel que $V \subset L^2(\tilde{\Gamma})$ avec injection continue et dense. Soit $\omega_1, \omega_2, \psi_1, \psi_2, \tilde{\gamma}$ des fonctions données, avec $\omega_1, \omega_2 \in L^2(\tilde{\Gamma})$, $\psi_1, \psi_2 \in V'$, $\tilde{\gamma} \in L^\infty(\tilde{\Gamma})$. Si l'ensemble $\{x \in \tilde{\Gamma} : \tilde{\gamma}(x) = 0\}$ est négligeable, alors toute paire parmi les trois conditions*

$$\psi_1 - \tilde{\gamma}\omega_1 = \psi_2 - \tilde{\gamma}\omega_2 \text{ sur } V' \quad (8.29)$$

$$\psi_1 = \psi_2 \text{ sur } V' \quad (8.30)$$

$$\omega_1 = \omega_2 \text{ p.p sur } \tilde{\Gamma} \quad (8.31)$$

implique la troisième.

Démonstration. Si (8.31) est vérifié, alors $\tilde{\gamma}\omega_2 = \tilde{\gamma}\omega_1$ sur $L^2(\tilde{\Gamma})$. Par hypothèse sur V , cette relation peut être restreinte à V , ainsi $\tilde{\gamma}\omega_2 = \tilde{\gamma}\omega_1$ dans V' , et donc (8.29) et (8.30) sont équivalentes. D'autre part si (8.29) et (8.30) sont satisfaites, alors $\tilde{\gamma}\omega_2 = \tilde{\gamma}\omega_1$ dans V' et par hypothèse sur V , ces fonctionnelles s'étendent de manière unique à $L^2(\tilde{\Gamma})$, ainsi $\tilde{\gamma}\omega_2 = \tilde{\gamma}\omega_1$ p.p sur $\tilde{\Gamma}$, et (8.31) est une conséquence des hypothèses. □

Choisissons $V = H_{00}^{\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma})$, $\omega_i = c^i$ et $\psi_i = ((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla} c^i - f\tilde{u}|\tilde{n})$ et $\tilde{\gamma} = (\tilde{u}|\tilde{n})$. Les conditions de couplage suivantes sont équivalentes

la condition Robin-Dirichlet :

$$\left[((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla} c - f\tilde{u}|\tilde{n}) - (\tilde{u}c|\tilde{n}) \right]_{|\tilde{\Gamma}} = [c]_{|\tilde{\Gamma}} = 0$$

la condition $\tilde{\gamma}$ -Robin-Neumann :

$$\left[((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \nabla c - f \tilde{u} | \tilde{n}) - \tilde{\gamma} c \right]_{|\tilde{\Gamma}} = \left[((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \nabla c - f \tilde{u} | \tilde{n}) \right]_{|\tilde{\Gamma}} = 0$$

$\tilde{\gamma} \in L^\infty(\tilde{\Gamma})$ est une fonction donnée non nulle presque partout. Du fait que $\tilde{\Gamma}^0$ est négligeable nous pouvons choisir $\tilde{\gamma} = (\tilde{u} | \tilde{n})$ et on obtient la condition Robin-Neumann équivalente :

$$\left[((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c - f \tilde{u} | \tilde{n}) - (\tilde{u} c | \tilde{n}) \right]_{|\tilde{\Gamma}} = \left[((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c - f \tilde{u} | \tilde{n}) \right]_{|\tilde{\Gamma}} = 0$$

Les conditions d'interface ci-dessus ont été introduites et discutées dans [49, 76] pour l'équation d'advection-diffusion. Bien qu'elles soient équivalentes au sens de la proposition 16, il est important de remarquer qu'elles impliquent des formes différentes de schémas d'itération entre les sous-domaines Q_1 et Q_2 . La raison de choisir un ensemble spécifique de conditions parmi les autres dépend principalement des données sur l'interface $\tilde{\Gamma}$. Dans le cas du problème d'advection-diffusion, il est prouvé dans [49, 76] que quand la diffusion domine l'advection, le choix de la condition Robin-Dirichlet ou Dirichlet-Neumann est plus adapté. Dans le cas contraire (l'advection dominant la diffusion) la condition $\tilde{\gamma}$ -Robin-Neumann ou Robin-Neumann reste préférable.

8.4 Conditions d'interface adaptatives

Dans cette section, les conditions d'interface Dirichlet-Neumann (8.19), (8.20) sont adaptées au flot sur l'interface. Pour chaque sous-domaine, le saut de la solution c et celui de sa dérivée conormale sont nuls sur $\tilde{\Gamma}$

$$[c]_{|\tilde{\Gamma}_i^-} = 0 \quad [(\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c - f \tilde{u} | \tilde{n}]_{|\tilde{\Gamma}_i^+} = 0$$

Comme pour le problème global, la condition sur la dérivée conormale $\tilde{\Gamma}_i^+$ peut être réduite à

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^i - f \tilde{u} | \tilde{n}) = 0 \quad \text{sur} \quad \tilde{\Gamma}_i^+$$

Le problème Dirichlet-Neumann (8.16)-(8.23) est maintenant formulé par :

$$\tilde{\nabla} \cdot ((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^1) = \tilde{\nabla} \cdot (f \tilde{u}) \quad \text{dans } Q_1 \quad (8.32)$$

$$c^1 = c_{b,1} \quad \text{sur } \partial Q_1^- \quad (8.33)$$

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^1 - f \tilde{u} | \tilde{n}) = 0 \quad \text{sur } \partial Q_1^+ \cup \tilde{\Gamma}_1^+ \quad (8.34)$$

$$c^1 = c^2 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma} \quad (8.35)$$

$$\nabla \cdot ((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^2) = \tilde{\nabla} \cdot (f \tilde{u}) \quad \text{dans } Q_2 \quad (8.36)$$

$$c^2 = c_{b,2} \quad \text{sur } \partial Q_2^- \quad (8.37)$$

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^2 - f \tilde{u} | \tilde{n}) = 0 \quad \text{sur } \partial Q_2^+ \cup \tilde{\Gamma}_2^+ \quad (8.38)$$

Cette formulation est connue sous le nom de problème d-ADN (*damped and adaptative Dirichlet-Neumann*) [49].

Multiplions (8.32) par $\varphi_1 \in H_0(u, Q_1; \partial Q_1^-)$, et (8.36) par $\varphi_2 \in H_0(u, Q_2; \partial Q_2^-)$. En intégrant, on obtient une formulation faible du problème d-ADN (8.32)-(8.38) : trouver $(c^1, c^2) \in H(u, Q_1) \times H(u, Q_2)$, $c^i|_{\partial Q_i^-} = c_{b,i}$

$$\int_{Q_1} (\tilde{u} | \tilde{\nabla} c^1) (\tilde{u} | \tilde{\nabla} \varphi^1) dx dt = \int_{Q_1} f (\tilde{u} | \tilde{\nabla} \varphi^1) dx dt \quad (8.39)$$

$$\int_{Q_2} (\tilde{u} | \tilde{\nabla} c^2) (\tilde{u} | \tilde{\nabla} \varphi^2) dx dt = \int_{Q_2} f (\tilde{u} | \tilde{\nabla} \varphi^2) dx dt \quad (8.40)$$

$$(c^1|_{\tilde{\Gamma}^-} - c^2|_{\tilde{\Gamma}^-}, \mu)_{\tilde{\Gamma}^-, (\tilde{u} | \tilde{n})} = -(c^2|_{\tilde{\Gamma}^+} - c^1|_{\tilde{\Gamma}^+}, \mu)_{\tilde{\Gamma}^+, (\tilde{u} | \tilde{n})} \quad (8.41)$$

pour tout $(\varphi^1, \varphi^2) \in H_0(u, Q_1; \partial Q_1^- \cup \tilde{\Gamma}_1^-) \times H_0(u, Q_2; \partial Q_2^- \cup \tilde{\Gamma}_2^-)$, et pour tout $\mu \in \tilde{\Lambda}$.

On retrouve ainsi la formulation STILS pour 2 domaines (6.22)-(6.26)

8.5 Algorithme itératif

Etant donné $c^{1,j} \in G_2^-$, $c^{2,j} \in G_1^-$, pour $j \geq 0$, on résout successivement

$$\tilde{\nabla} \cdot ((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{1,j+1}) = \tilde{\nabla} \cdot (f\tilde{u}) \quad \text{dans } Q_1 \quad (8.42)$$

$$c^{1,j+1} = c_{b,1} \quad \text{sur } \partial Q_1^- \quad (8.43)$$

$$(((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{1,j+1} - f\tilde{u})|_{\tilde{n}}) = 0 \quad \text{sur } \partial Q_1^+ \quad (8.44)$$

$$c^{1,j+1} = c^{2,j} \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}^- \quad (8.45)$$

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{1,j+1} - f\tilde{u})|_{\tilde{n}} = ((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{2,j} - f\tilde{u})|_{\tilde{n}} \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}^+ \quad (8.46)$$

et

$$\tilde{\nabla} \cdot ((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{2,j+1}) = \tilde{\nabla} \cdot (f\tilde{u}) \quad \text{dans } Q_2 \quad (8.47)$$

$$c^{2,j+1} = c_{b,2} \quad \text{sur } \partial Q_2^- \quad (8.48)$$

$$(((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{2,j+1} - f\tilde{u})|_{\tilde{n}}) = 0 \quad \text{sur } \partial Q_2^+ \quad (8.49)$$

$$c^{2,j+1} = c^{1,j} \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}^+ \quad (8.50)$$

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{2,j+1} - f\tilde{u})|_{\tilde{n}} = ((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{1,j} - f\tilde{u})|_{\tilde{n}} \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}^- \quad (8.51)$$

Les conditions (8.46) et (8.51) peuvent être respectivement réduites à

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{1,j+1} - f\tilde{u})|_{\tilde{n}} = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}^+$$

et

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{2,j+1} - f\tilde{u})|_{\tilde{n}} = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}^-$$

On obtient ainsi l'algorithme d-ADN :

trouver $c^{1,j+1}$ vérifiant

$$\tilde{\nabla} \cdot ((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{1,j+1}) = \tilde{\nabla} \cdot (f\tilde{u}) \quad \text{dans } Q_1 \quad (8.52)$$

$$c^{1,j+1} = c_{b,1} \quad \text{sur } \partial Q_1^- \quad (8.53)$$

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{1,j+1} - f\tilde{u})|_{\tilde{n}} = 0 \quad \text{sur } \partial Q_1^+ \quad (8.54)$$

$$c^{1,j+1} = c^{2,j} \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}^- \quad (8.55)$$

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{1,j+1} - f\tilde{u})|_{\tilde{n}} = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}^+ \quad (8.56)$$

et trouver $c^{2,j+1}$ vérifiant

$$\tilde{\nabla} \cdot ((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{2,j+1}) = \tilde{\nabla} \cdot (f\tilde{u}) \quad \text{dans } Q_2 \quad (8.57)$$

$$c^{2,j+1} = c_{b,2} \quad \text{sur } \partial Q_2^- \quad (8.58)$$

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{2,j+1} - f\tilde{u})|_{\tilde{n}} = 0 \quad \text{sur } \partial Q_2^+ \quad (8.59)$$

$$c^{2,j+1} = c^{1,j} \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}^+ \quad (8.60)$$

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{2,j+1} - f\tilde{u})|_{\tilde{n}} = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}^- \quad (8.61)$$

La raison principale de l'introduction de la forme d-ADN est que cette nouvelle procédure affaiblit le couplage entre $c^{1,j}$ et $c^{2,j}$ sur l'interface pour traduire la dominance de l'advection sur la diffusion. Par

ailleurs il permet d'étudier des cas particuliers. Ains si $(\tilde{u}(x, t)|\tilde{n}(x, t)) > 0$ pour tout $(x, t) \in \tilde{\Gamma}$ donc $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}^+$, et l'algorithme d-ADN produit

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \cdot ((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{1,j+1}) &= \tilde{\nabla} \cdot (f\tilde{u}) && \text{dans } Q_1 \\ c^{1,j+1} &= c_{b,1} && \text{sur } \partial Q_1^- \\ ((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{1,j+1} - f\tilde{u}|\tilde{n}) &= 0 && \text{sur } \partial Q_1^+ \\ ((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{1,j+1} - f\tilde{u}|\tilde{n}) &= 0 && \text{sur } \tilde{\Gamma} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \cdot ((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{2,j+1}) &= \tilde{\nabla} \cdot (f\tilde{u}) && \text{dans } Q_2 \\ c^{2,j+1} &= c_{b,2} && \text{sur } \partial Q_2^- \\ ((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{2,j+1} - f\tilde{u}|\tilde{n}) &= 0 && \text{sur } \partial Q_2^+ \\ c^{2,j+1} &= c^{1,j+1} && \text{sur } \tilde{\Gamma} \end{aligned}$$

Rappelons que des résultats de convergence de l'algorithme d-ADN pour l'équation d'advection-diffusion sont établis dans [49, 76]

8.5.1 Etude des sous-problèmes

On suppose que les trois ensembles $\tilde{\Gamma}^-$, $\tilde{\Gamma}^+$, $\tilde{\Gamma}^0$ sont connectés.

Les structures des deux EDPs (8.52)-(8.56) et (8.57)-(8.61) sont symétriques. Pour cette raison nous considérons la formulation commune suivante :

$$\tilde{\nabla} \cdot ((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^0) = \tilde{\nabla} \cdot (f\tilde{u}) \quad \text{dans } Q_0 \quad (8.62)$$

$$c^0 = c_{b,0} \quad \text{sur } \partial Q_0^- \quad (8.63)$$

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^0 - f\tilde{u}|\tilde{n}_0) = 0 \quad \text{sur } \partial Q_0^+ \quad (8.64)$$

$$c^0 = g \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_0^- \quad (8.65)$$

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^0 - f\tilde{u}|\tilde{n}_0) = h \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_0^+ \quad (8.66)$$

où

$$\partial Q_0^\pm = \partial Q^\pm \cap \partial Q_0, \quad \partial Q_0 = \partial Q_0^+ \cup \partial Q_0^- \cup \tilde{\Gamma}, \quad \tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_0^- \cup \tilde{\Gamma}_0^+ \cup \tilde{\Gamma}_0^0$$

On suppose que $g \in L^2(\tilde{\Gamma}_0^-, |\tilde{u}|\tilde{n}_0|d\tilde{\sigma})$ tel qu'il existe $\psi^0 \in H_0(u, Q_0, \partial Q_0^-)$, $\psi^0|_{\tilde{\Gamma}_0^-} = g$, et $h \in L^2(\tilde{\Gamma}_0^+, |\tilde{u}|\tilde{n}_0|^{-1}d\tilde{\sigma})$. $L^2(\tilde{\Sigma}, |\tilde{u}|\tilde{n}_0|^{-1}d\tilde{\sigma})$ est le dual de $L^2(\tilde{\Sigma}, |\tilde{u}|\tilde{n}_0|d\tilde{\sigma})$, et traduit l'espace des classes de fonctions $\omega : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $|\tilde{u}|\tilde{n}_0|^{-\frac{1}{2}}\omega$ est dans $L^2(\tilde{\Sigma})$ muni de la norme

$$\|\omega\|_{\tilde{\Sigma}, (|\tilde{u}|\tilde{n}_0|)^{-1}} = \left[\int_{\tilde{\Sigma}} |\tilde{u}|\tilde{n}_0|^{-1} \omega^2 d\tilde{\sigma} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Notons que $L^2(\tilde{\Sigma}, |\tilde{u}|\tilde{n}_0|^{-1}d\tilde{\sigma}) \subset L^2(\tilde{\Sigma})$ avec injection continue [49, 76].

Proposition 17. *L'équation variationnelle : trouver $c^0 \in H_0(u, Q_0)$, $c^0|_{\tilde{\Gamma}_0^-} = g$, $c^0|_{\partial Q_0^-} = c_{b,0}$ tel que pour tout $v \in H_0(u, Q_0; \partial Q_0^- \cup \tilde{\Gamma}_0^-)$*

$$\int_{Q_0} (\tilde{u}|\tilde{\nabla} c^0)(\tilde{u}|\tilde{\nabla} v) dxdt = \int_{Q_0} f(\tilde{u}|\tilde{\nabla} v) dxdt + \int_{\tilde{\Gamma}_0^+} h v d\tilde{\sigma} \quad (8.67)$$

admet une unique solution. Cette solution résout aussi le problème aux limites (8.62) – (8.66) où les égalités (8.64) et (8.66) sont prises dans $\left[H_{00}^{\frac{1}{2}}(\partial Q_0^+ \cup \tilde{\Gamma}_0^+) \right]'$. Dans ce sens, (8.67) et (8.62)-(8.66) sont équivalents. Finalement la dérivée conormale de c^0 sur $\partial Q_0^+ \cup \tilde{\Gamma}_0^0$ est un élément de $L^2(\partial Q_0^+ \cup \tilde{\Gamma}_0^+, |\tilde{u}|\tilde{n}|^{-1}d\sigma)$.

Démonstration. Par l'inégalité de Poincaré courbe et le lemme de Lax-Milgram, le problème variationnel (8.67) admet une unique solution c^0 .

Il est clair que c^0 vérifie (8.62)-(8.66). En effet l'équation différentielle (8.62) est obtenue en choisissant toute fonction assez régulière φ à support compact dans (8.67). Ainsi il s'en suit que $((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla} c^0 - f\tilde{u}|\tilde{n}_0)$ a un sens dans $\partial Q_0^+ \cup \tilde{\Gamma}_0^+$ comme un élément de $H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\partial Q_0^+ \cup \tilde{\Gamma}_0^+)$. Soit $\varphi \in H_0(u, Q_0; \partial Q_0^- \cup \tilde{\Gamma}_0^-)$ une fonction arbitraire, on a :

$$\left\langle (\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla} c^0 - f\tilde{u}|\tilde{n}_0, \varphi \right\rangle_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\partial Q_0^+ \cup \tilde{\Gamma}_0^+)} = \left\langle h, \varphi \right\rangle_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma}_0^+)}$$

Choisissons φ tel que $\varphi|_{\partial Q_0^+} = 0, \varphi|_{\tilde{\Gamma}_0^+} = 0$, alors (8.67) donne (8.64) et (8.66) au sens de l'espace dual $H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\partial Q_0^+)$ [resp., $H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma}_0^+)$]. La dérivée conormale de c^0 sur $\partial Q_0^+ \cup \tilde{\Gamma}_0^+$ est un élément de $H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\partial Q_0^+ \cup \tilde{\Gamma}_0^+)$ dont la restriction à ∂Q_0^+ [resp., $\tilde{\Gamma}_0^+$] coïncide dans le sens de $H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\partial Q_0^+)$ (resp., $H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma}_0^+)$), avec une fonction appartenant à $L^2(\partial Q_0^+, |\tilde{u}|\tilde{n}_0|^{-1}d\tilde{\sigma})$ [resp., $L^2(\tilde{\Gamma}_0^+, |\tilde{u}|\tilde{n}_0|^{-1}d\tilde{\sigma})$]. Ainsi la dérivée conormale de c^0 , $((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla} c^0 - f\tilde{u}|\tilde{n}_0)$ coïncide dans $H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\partial Q_0^+ \cup \tilde{\Gamma}_0^+)$ avec une fonction appartenant à $L^2(\partial Q_0^+ \cup \tilde{\Gamma}_0^+, |\tilde{u}|\tilde{n}_0|^{-1}d\tilde{\sigma})$ et (8.64), (8.66) sont satisfaits presque partout.

Réciproquement, soit $c^0 \in H_0(u, Q_0)$ résolvant (8.62)-(8.66). Comme avant, la dérivée conormale c^0 sur $\partial Q_0^+ \cup \tilde{\Gamma}_0^+$ est un élément de $H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\partial Q_0^+ \cup \tilde{\Gamma}_0^+)$: Si (8.64) et (8.66) sont considérées dans le sens spécifié, donc on montre facilement (8.67). En effet soit $\varphi \in H_0(u, Q_0; \partial Q_0^- \cup \tilde{\Gamma}_0^-)$. On multiplie (8.62) par φ : en utilisant la formule de Green on obtient

$$\int_{Q_0} (\tilde{u}|\tilde{\nabla} c^0)(\tilde{u}|\tilde{\nabla} v) dxdt - \int_{\partial Q_0^+ \cup \tilde{\Gamma}_0^+} ((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla} c^0 - f\tilde{u}|\tilde{n}_0)v d\tilde{\sigma} = \int_{Q_0} f(\tilde{u}|\tilde{\nabla} v) dxdt$$

Dans la seconde intégrale la dérivée conormale $((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla} c^0 - f\tilde{u}|\tilde{n}_0)$ est définie dans le sens de la dualité de $H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\partial Q_0^+ \cup \tilde{\Gamma}_0^+)$, mais l'argument ci-dessus montre que la dérivée conormale de $(\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla} c^0 - f\tilde{u}|\tilde{n}_0$ est égale à une fonction de $L^2(\partial Q_0^+ \cup \tilde{\Gamma}_0^+, |\tilde{u}|\tilde{n}_0|^{-1}d\tilde{\sigma})$. Pour cela elle est exprimée comme une intégrale sur $\partial Q_0^+ \cup \tilde{\Gamma}_0^+$. Cette intégrale peut être écrite en deux parties (deux intégrales sur ∂Q_0^+ et $\tilde{\Gamma}_0^+$ respectivement) et en rappelant (8.64) et (8.66) (qui sont vérifiés presque partout) (8.67) s'en suit facilement. $\square$

8.5.2 Résultat de convergence

La proposition précédente établit l'existence et l'unicité de solution des sous-problèmes (8.52)-(8.56) et (8.57)-(8.61). Par ailleurs la solution $c^{i,j+1}$ peut être écrite par

$$c^{1,j+1} = c^{1,*} + c^{1,\lambda_2^j}, \quad c^{2,j+1} = c^{2,*} + c^{2,\lambda_1^j}, \quad \lambda_2^j = c_{|\tilde{\Gamma}^-}^{2,j}, \quad \lambda_1^j = c_{|\tilde{\Gamma}^+}^{1,j}$$

où $c^{i,*}$ satisfait

$$\tilde{\nabla} \cdot ((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla} c^{i,*}) = \tilde{\nabla} \cdot (f\tilde{u}) \quad \text{dans } Q_i \quad (8.68)$$

$$c^{i,*} = c_{b,i} \quad \text{sur } \partial Q_i^- \quad (8.69)$$

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla} c^{i,*} - f\tilde{u}|\tilde{n}) = 0 \quad \text{sur } \partial Q_i^+ \quad (8.70)$$

$$c^{i,*} = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_i^- \quad (8.71)$$

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u})\tilde{\nabla} c^{i,*} - f\tilde{u}|\tilde{n}) = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_i^+ \quad (8.72)$$

et $c^{1,j+1,\lambda_2^j}$, $c^{2,j+1,\lambda_1^j}$ sont respectivement les solutions faibles de

$$\tilde{\nabla} \cdot ((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{1,j+1,\lambda_2^j}) = 0 \quad \text{dans } Q_1 \quad (8.73)$$

$$c^{1,j+1,\lambda_2^j} = 0 \quad \text{sur } \partial Q_1^- \quad (8.74)$$

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{1,j+1,\lambda_2^j} - f\tilde{u}|\tilde{n}) = 0 \quad \text{sur } \partial Q_1^+ \quad (8.75)$$

$$c^{1,j+1,\lambda_2^j} = \lambda_2^j \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}^- \quad (8.76)$$

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \nabla c^{1,j+1,\lambda_2^j} - f\tilde{u}|\tilde{n}) = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}^+ \quad (8.77)$$

et

$$\tilde{\nabla} \cdot ((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{2,j+1,\lambda_1^j}) = 0 \quad \text{dans } Q_2 \quad (8.78)$$

$$c^{2,j+1,\lambda_1^j} = 0 \quad \text{sur } \partial Q_2^- \quad (8.79)$$

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{2,j+1,\lambda_1^j} - f\tilde{u}|\tilde{n}) = 0 \quad \text{sur } \partial Q_2^+ \quad (8.80)$$

$$c^{2,j+1,\lambda_1^j} = c^{1,j} \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}^+ \quad (8.81)$$

$$((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{2,j+1,\lambda_1^j} - f\tilde{u}|\tilde{n}) = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}^- \quad (8.82)$$

Comme dans la sous-section 6.4.3, on établit les estimations suivantes :

$$\|c^{1,j+1,\lambda_2^j}\|_{\tilde{\Gamma}^+, (\tilde{u}|\tilde{n})}^2 + \|c^{1,j+1,\lambda_2^j}\|_{H(u,Q_1)}^2 + \|((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{1,j+1,\lambda_2^j} - f\tilde{u}|\tilde{n})\|_{\partial Q_1^+ \cup \tilde{\Gamma}^+, (\tilde{u}|\tilde{n})^{-1}}^2 \leq \mathcal{K}^1$$

$$\|c^{2,j+1,\lambda_1^j}\|_{\tilde{\Gamma}^-, (\tilde{u}|\tilde{n})}^2 + \|c^{2,j+1,\lambda_1^j}\|_{H(u,Q_2)}^2 + \|((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{2,j+1,\lambda_1^j} - f\tilde{u}|\tilde{n})\|_{\partial Q_2^+ \cup \tilde{\Gamma}^-, (\tilde{u}|\tilde{n})^{-1}}^2 \leq \mathcal{K}^2$$

avec

$$\mathcal{K}^1 = \mathcal{M}^{-1} \|c^{2,0}\|_{\tilde{\Gamma}^-, (\tilde{u}|\tilde{n})}^2, \quad \mathcal{K}^2 = \mathcal{M}^{-1} \|c^{1,0}\|_{\tilde{\Gamma}^+, (\tilde{u}|\tilde{n})}^2, \quad \mathcal{M} = \frac{1}{4} \min(C(T), 1)$$

On obtient donc la proposition suivante

Proposition 18. *Il existe une constante $\mathcal{M} > 0$ dépendant de T telle que pour tout $j > 0$,*

$$\|c^{i,j}\|_{\tilde{\Gamma}_i^+, (\tilde{u}|\tilde{n})}^2 + \|c^{i,j}\|_{H(u,Q_i)}^2 + \|((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{i,j} - f\tilde{u}|\tilde{n})\|_{\partial Q_i^+ \cup \tilde{\Gamma}_i^+, (\tilde{u}|\tilde{n})^{-1}}^2 \leq \mathcal{M} \quad i = 1, 2.$$

Ainsi il existe une sous-suite de $(c^{1,j}, c^{2,j})$ (encore notée par ce symbole) convergeante vers (c^1, c^2) faiblement dans $H(u, Q_1) \times H(u, Q_2)$ et telle que $((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{i,j} - f\tilde{u}|\tilde{n})$, $i = 1, 2$ converge vers 0 faiblement dans $L^2(\partial Q_i^+ \cup \tilde{\Gamma}_i^+, |(\tilde{u}|\tilde{n})|^{-1} d\tilde{\sigma})$. Puisque $((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^{i,j} - f\tilde{u}|\tilde{n})$, $i = 1, 2$ converge vers $((\tilde{u} \otimes \tilde{u}) \tilde{\nabla} c^i - f\tilde{u}|\tilde{n})$, $i = 1, 2$ dans $H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\partial Q_i^+ \cup \tilde{\Gamma}_i^+)$.

Ainsi le résultat de convergence suivant est démontré.

Théorème 23. *Les itérés $(c^{1,j}, c^{2,j})$ donnés par le schéma d-ADN (8.52)-(8.61) convergent faiblement dans $H(u, Q_1) \times H(u, Q_2)$ vers (c_1, c_2) qui vérifie la formulation d-ADN $\equiv$ STILS pour 2 domaines (8.39)-(8.41).*

Conclusion générale

Les résultats obtenus dans ce travail nous laissent entrevoir quelques pistes de recherche. De nombreuses questions peuvent être posées.

MDD pour l'approximation des ENS dans une jonction fleuve/océan

Tout d'abord au sujet du modèle asymptotique 3D fleuve/océan et des résultats d'existence et de convergence obtenus. Peut-on étendre ces résultats à des situations plus générales ?

Si l'existence de solution a pu être prouvée pour le modèle stationnaire Navier-Stokes/Navier-Stokes et les multi-modèles Oseen/Oseen et Oseen/Navier-Stokes, nous n'avons pas pu prouver celle du cas instationnaire Navier-Stokes/Navier-Stokes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1^1}{\partial t} + (u^1 \cdot \nabla) u_1^1 - \nabla \cdot \sigma_1^{\mu^1}(u^1, P^1) = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \times (0, T) \\ \frac{\partial P^1}{\partial x_2} = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \times (0, T) \\ \frac{\partial P^1}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \times (0, T) \\ \nabla \cdot u^1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \times (0, T) \\ u_3^1 = 0, (\tilde{\sigma}^1 \cdot n) \cdot \tau_1 = \theta_1^{0,1} \quad \text{sur } \Gamma_s^1 \times (0, T) \\ u^1 \cdot n = 0, (\tilde{\sigma}^1 \cdot n) \cdot \tau_1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_b^1 \times (0, T) \\ u_1^1 = (u_2^1 n_2 + u_3^1 n_3) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d^1 \times (0, T) \\ u_1^1(., t = 0) = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \times (0, T) \\ [u_1] = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \\ u_2^2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \\ [-P + e_{11}^\mu(u)] = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1^2}{\partial t} + (u^2 \cdot \nabla) u_1^2 - \nabla \cdot \sigma_1^{\mu^2}(u^2, P^2) - f^C u_2^2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_2 \times (0, T) \\ \frac{\partial u_2^2}{\partial t} + (u_b^2 \cdot \nabla) u_2^2 - \nabla \cdot \sigma_2^{\mu^2}(u^2, P^2) + f^C u_1^2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_2 \times (0, T) \\ \frac{\partial P^2}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dans } \Omega_2 \times (0, T) \\ \nabla \cdot u^2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_2 \times (0, T) \\ u_3^2 = 0, (\tilde{\sigma}^2 \cdot n) \cdot \tau_1 = \theta_1^{0,2}, (\tilde{\sigma}^2 \cdot n) \cdot \tau_2 = \theta_2^{0,2} \quad \text{sur } \Gamma_s^2 \times (0, T) \\ u^2 \cdot n = 0, (\tilde{\sigma}^2 \cdot n) \cdot \tau_1 = (\tilde{\sigma}^2 \cdot n) \cdot \tau_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_b^2 \times (0, T) \\ u_1^2 = u_2^2 = u_3^2 n_3 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d^2 \times (0, T) \\ u_1^2(., t = 0) = u_2^2(., t = 0) = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \times (0, T) \end{array} \right.$$

Ni le lemme d'Aubin-Lions [2], ni le critère de compacité par translation Riesz-Fréchet-Kolmogorov [2], ni même le critère de compacité par perturbation [14] ne nous a permis de contrôler les termes non linéaires du côté fleuve. Donc l'amélioration de ces résultats d'existence et de convergence peuvent être des projets de travaux ultérieurs.

Dans le cas avec surface libre, le modèle asymptotique 3-D ci-dessus est réduit à un problème asymptotique 2-D du type Saint-Venant en formulation hauteur-vitesse

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\zeta^1 U_1^1) + \nabla \cdot (\zeta^1 U^1 \otimes U_1^1) - \mu_0^1 \Delta(\zeta^1 U_1^1) + g \zeta^1 \frac{\partial \zeta^1}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \zeta^1}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \zeta^1}{\partial t} + \nabla \cdot (\zeta^1 U^1) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\zeta^2 U_1^2) + \nabla \cdot (\zeta^2 U^2 \otimes U_1^2) - \mu_0^2 \Delta(\zeta^2 U_1^2) + g \zeta^2 \frac{\partial \zeta^2}{\partial x_1} - f^C \zeta^2 U_2^2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\zeta^2 U_2^2) + \nabla \cdot (\zeta^2 U^2 \otimes U_2^2) - \mu_0^2 \Delta(\zeta^2 U_2^2) + g \zeta^2 \frac{\partial \zeta^2}{\partial x_2} + f^C \zeta^2 U_1^2 = 0 \\ \frac{\partial \zeta^2}{\partial t} + \nabla \cdot (\zeta^2 U^2) = 0 \\ [\zeta] = [\zeta U_1] = 0 \\ U_2^2 = 0 \\ \left[\mu_0 \frac{\partial(\zeta U_1)}{\partial x_1} \right] = 0 \end{array} \right.$$

étudié par des algorithmes de décomposition de domaines. Il est possible de réduire encore ce modèle en un problème multi-physiques du type Saint-Venant 1D/2D suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{\partial Q_1^1}{\partial x} = 0 \quad x \in (a_0, b_0), t > 0 \\ \frac{\partial Q_1^1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(Q_1^1)^2}{A_1} \right) + g A_1 \frac{\partial \zeta^1}{\partial x} - \mu_0^1 \frac{\partial^2 Q_1^1}{\partial x^2} = 0 \quad x \in (a_0, b_0), t > 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\zeta^2 U^2) + \nabla \cdot (\zeta^2 U^2 \otimes U^2) - \Delta_{\mu_0^2}(\zeta^2 U^2) + \frac{1}{\rho_0} \zeta^2 \nabla p_a + g \zeta^2 \nabla \zeta^2 = 0 \quad x \in \Omega_2, t > 0 \\ \frac{\partial \zeta^2}{\partial t} + \nabla \cdot (\zeta^2 U^2) = 0 \quad x \in \Omega_2, t > 0 \end{array} \right.$$

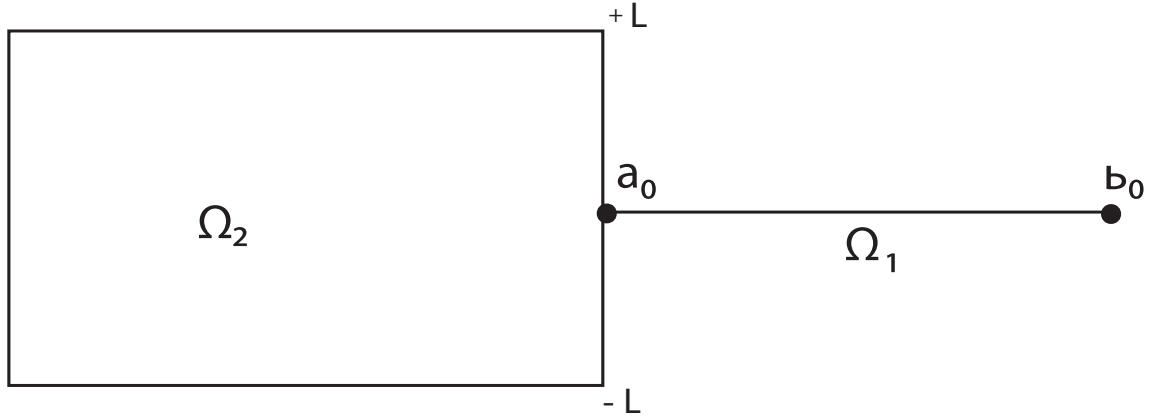


FIGURE 9.1 – Un domaine multi-physiques 1D/2D

où A_1 est l'aire de la section (supposée rectangulaire) défini en un point x et au temps t , $Q_1^1(x, t)$ est le débit de l'écoulement à travers cette section, $\zeta^1(x, t)$ est la hauteur de l'eau à partir du point le plus bas.

Les conditions d'interface résultantes de cette intégration sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1^1(a_0) = \bar{U}_1^2(a_0) \\ \zeta^1(a_0) = \bar{\zeta}^2(a_0) \iff A_2(a_0) = A_1(a_0) = 2L\bar{\zeta}^2(a_0) \\ Q_1^1(a_0) = \bar{Q}_1^2(a_0) = \bar{U}_1^2(a_0)\bar{\zeta}^2(a_0) \\ \mu_0^1 \frac{\partial U_1^1}{\partial x_1}(a_0) = \mu_0^2 \frac{\partial \bar{U}_1^2}{\partial x_1}(a_0) \end{array} \right.$$

$$\bar{U}^2(a_0) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} U^2(a_0, y) dy, \quad \bar{\zeta}^2(a_0) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} \zeta^2(a_0, y) dy = \frac{A_2}{2L}, \quad \bar{Q}^2(a_0) = A_2 \bar{U}^2(a_0)$$

Lorsque $\mu_0^i = 0$, $i = 1, 2$, on dérive le modèle multi-physiques non visqueux suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{\partial Q^1}{\partial x} = 0 \quad x \in (a_0, b_0), \quad t > 0 \\ \frac{\partial Q_1^1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(Q_1^1)^2}{A_1} \right) + g A_1 \frac{\partial \zeta^1}{\partial x} = 0 \quad x \in (a_0, b_0), \quad t > 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\zeta^2 U^2) + \nabla \cdot (\zeta^2 U^2 \otimes U^2) + \frac{1}{\rho_0} \zeta^2 \nabla p_a + g \zeta^2 \nabla \zeta^2 = 0 \quad x \in \Omega_2, \quad t > 0 \\ \frac{\partial \zeta^2}{\partial t} + \nabla \cdot (\zeta^2 U^2) = 0 \quad x \in \Omega_2, \quad t > 0 \end{array} \right.$$

sous les conditions d'interface

$$\begin{cases} U_1^1(a_0) = \bar{U}_1^2(a_0) \\ \zeta^1(a_0) = \bar{\zeta}^2(a_0) \Leftrightarrow A_2(a_0) = A_1(a_0) = 2L\bar{\zeta}^2(a_0) \\ Q_1^1(a_0) = \bar{Q}_1^2(a_0) \end{cases}$$

Une méthode itérative entre sous-domaines pour ce modèle non visqueux est détaillé dans [68] (E. Miglio, S. Perorro, F. Saleri, 2005). Mais le cas visqueux reste un problème ouvert.

MDD pour les lois de conservations scalaires en espace temps

Les résultats obtenus dans la deuxième partie de cette thèse peuvent s'étendre à l'étude des *équations de Navier-Stokes à densité variable* par une décomposition de domaine sans recouvrement

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) - \mu \Delta u + \nabla p = \rho f & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \rho(., 0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u(., 0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u(x, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2, \quad \Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$$

Pour cela on se donne $u^0 \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^3) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$ et pour $j \geq 0$

a) Si $(u^{1,j}, u^{2,j})$ est donné, on détermine $(\rho^{1,j+1}, \rho^{2,j+1}) \in L^\infty(Q_1) \times L^\infty(Q_2)$ solution au sens des moindres carrés du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho^{1,j+1}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^{1,j+1} u^{1,j}) = 0 & \text{dans } Q_1 \\ \rho^{1,j+1}(., 0) = 0 & \text{dans } \Omega_1 \\ \frac{\partial \rho^{2,j+1}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^{2,j+1} u^{2,j}) = 0 & \text{dans } Q_2 \\ \rho^{2,j+1}(., 0) = 0 & \text{dans } \Omega_2 \\ [\rho^{j+1}] = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, T) \end{cases}$$

en appliquant le schéma STILS-DDM.

b) Pour $(\rho^{1,j+1}, \rho^{2,j+1})$ ainsi déterminé, on peut chercher $(u^{1,j+1}, p^{1,j+1})$ et $(u^{2,j+1}, p^{2,j+1})$ solution faible du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\rho^{1,j+1}u^{1,j+1})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^{1,j+1}u^{1,j} \otimes u^{1,j+1}) - \mu\Delta u^{1,j+1} + \nabla p^{1,j+1} = 0 \text{ dans } Q_1 \\ \nabla \cdot u^{1,j+1} = 0 \text{ dans } Q_1 \\ u^{1,j+1}(x, t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial(\rho^{2,j+1}u^{2,j+1})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^{2,j+1}u^{2,j} \otimes u^{2,j+1}) - \mu\Delta u^{2,j+1} + \nabla p^{2,j+1} = 0 \text{ dans } Q_2 \\ \operatorname{div}(u^{2,j+1}) = 0 \text{ dans } Q_2 \\ u^{2,j+1}(x, t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ [u^{j+1}] = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0, T) \\ \mu\left[\frac{\partial u^{j+1}}{\partial n} + p^{j+1}n\right] = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0, T) \end{array} \right.$$

i.e

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^{1,j+1}\left(\frac{\partial u^{1,j+1}}{\partial t} + u^{1,j} \cdot \nabla u^{1,j+1}\right) - \mu\Delta u^{1,j+1} + \nabla p^{1,j+1} = 0 \text{ dans } Q_1 \\ \operatorname{div}(u^{1,j+1}) = 0 \text{ dans } Q_1 \\ u^{1,j+1}(x, t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ \rho^{2,j+1}\left(\frac{\partial u^{2,j+1}}{\partial t} + u^{2,j} \cdot \nabla u^{2,j+1}\right) - \mu\Delta u^{2,j+1} + \nabla p^{2,j+1} = 0 \text{ dans } Q_2 \\ \nabla \cdot u^{2,j+1} = 0 \text{ dans } Q_2 \\ u^{2,j+1}(x, t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ [u^{j+1}] = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0, T) \\ \mu\left[\frac{\partial u^{j+1}}{\partial n} + p^{j+1}n\right] = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0, T) \end{array} \right.$$

par une méthode de Krylov (e.g le schéma préconditionné de Richardson) [76].

L'algorithme proposé pour la résolution de la formulation STILS est une méthode du point fixe. Il est donc important d'étudier le problème avec les méthodes de Krylov ou du type Robin-Robin [8, 1]. D'autre part des restrictions ont été faites sur la vitesse d'advection pour obtenir la convergence de l'algorithme. Ainsi il est important d'analyser le cas où $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{u} \neq 0$, et éventuellement étendre la méthode pour l'étude de problèmes non-linéaires comme l'équation de Burgers.

Notations et rappels mathématiques

Sont rappelées ci-dessous quelques notations concernant des champs définis dans l'espace Euclidien $E = \mathbb{R}^3$, ayant plus particulièrement trait aux opérateurs différentiels classiques agissant sur eux. On donne également le développement de quelques identités et résultats utilisés dans ce travail.

A.1 Définitions des opérateurs différentiels

Les champs étudiés sont supposés être suffisamment différentiables pour qu'un sens puisse être donné aux quantités définies. Ils sont exprimés dans un système de coordonnées Cartésien $(O, x, y, z) = (O, x_1, x_2, x_3)$. Il convient de rappeler que les définitions données ici ne sont d'ailleurs valables que dans le cas de coordonnées Cartésiennes : dans le cas de systèmes de coordonnées plus complexes, tel le système curviligne, les définitions des opérateurs sont plus compliquées.

Gradient Étant donné un champ scalaire $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, l'opérateur gradient ∇ est défini comme

$$\nabla f = [\nabla f]_{i=1,2,3} = [\partial_i f]_{i=1,2,3} = \begin{bmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{bmatrix}$$

Le gradient d'un champ scalaire est donc un champ vectoriel.

Étant donné un champ de vectoriel $u = [u_i]_{i=1,2,3} : E \longrightarrow \mathbb{R}^3$, on définit également un opérateur de gradient comme le gradient de chaque composante :

$$\begin{bmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_1 u_2 & \partial_1 u_3 \\ \partial_2 u_1 & \partial_2 u_2 & \partial_2 u_3 \\ \partial_3 u_1 & \partial_3 u_2 & \partial_3 u_3 \end{bmatrix}$$

On définit également l'opérateur ∇^t par :

$$\nabla^t u = [\nabla u]^t = [\partial_j u_i]_{i,j=1,2,3}$$

Divergence Étant donné un champ vectoriel $u = [u_1, u_2, u_3]^t : E \longrightarrow \mathbb{R}^3$, l'opérateur de divergence $\nabla \cdot$ est défini comme :

$$\nabla \cdot u = \sum_{i=1}^3 \partial_i u_i$$

Un champ u dont la divergence est nulle $\nabla \cdot u = 0$ est appelé un champ solénoïdal.

Étant donné un champ de tenseurs du second ordre $\tau = [\tau_{ij}]_{i,j=1,2,3} : E \longrightarrow \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$, l'opérateur de divergence $\nabla \cdot$ est défini comme :

$$\nabla \cdot \tau = \left[\sum_i \partial_j \tau_{ij} \right]_{j=1,2,3} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot [\tau_{i1}]_{i=1,2,3} \\ \nabla \cdot [\tau_{i2}]_{i=1,2,3} \\ \nabla \cdot [\tau_{i3}]_{i=1,2,3} \end{bmatrix}$$

la divergence d'un champ de tenseurs du second ordre est donc un champ de vecteurs.

Laplacien Pour finir, l'opérateur Laplacien Δ d'un champ scalaire $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est défini comme :

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 f$$

De même il est possible de définir un Laplacien pour un champ vectoriel $u = [u_1, u_2, u_3]^t : E \longrightarrow \mathbb{R}^3$ comme :

$$\Delta u = [\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3]^t$$

A.2 Interprétation des opérateurs

On va maintenant chercher à donner une interprétation physique, plus intuitive, des différents opérateurs précédemment définis.

Pour un champ scalaire f , le gradient ∇f représente le champ des variations de f . La direction engendrée par ∇f est celle de plus grande variation du champ, toujours perpendiculaire aux isocontours de f , la norme $|\nabla f|$ indiquant l'intensité de cette variation.

Pour un champ vectoriel u , la divergence $\nabla \cdot u$ est une mesure de l'expansion ou de la contraction locale du champ. La divergence peut en effet être également définie comme l'intégrale du flux traversant la frontière d'un volume infinitésimal Ω :

$$\nabla \cdot u = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega|} \oint_{\partial\Omega} u \cdot n ds$$

De ces deux interprétations il est possible d'appréhender le Laplacien Δf d'un champ scalaire f comme un indicateur de la variation de $|\nabla f|$, sans tenir compte de son orientation. Cette liaison est matérialisée dans une formule exprimant la courbure

$$k = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right)$$

Dans le cas où f représente une fonction de distance, la courbure est donc égale au Laplacien.

A.3 Identités et propriétés utiles

On présente maintenant quelques identités employées dans la dérivation des équations de la mécanique continue pour un système Cartésien.

Soit u un champ vectoriel, p et ρ des champs scalaires, I le tenseur identité de rang deux, et δ le symbole

de Kroneker, et $\otimes$ le produit tensoriel.

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\rho u) &= \sum_i [\rho \partial_i u_i + u_i \partial_i \rho] \\
 &= \rho \sum_i \partial_i u_i + \sum_i u_i \partial_i \rho \\
 &= \rho \nabla \cdot u + (u \cdot \nabla) \rho
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \nabla^t u &= \left[\sum_i \partial_i [\partial_j u_i] \right]_{j=1,2,3} \\
 &= \left[\partial_j \sum_i \partial_j u_i \right]_{j=1,2,3} \\
 &= \left[\partial_j \nabla \cdot u \right]_{j=1,2,3} \\
 &= \nabla \nabla \cdot u
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\rho u \otimes u) &= \nabla \cdot [\rho u_i u_j] \\
 &= \left[\sum_i \partial_i ((\rho u_i) u_j) \right]_{j=1,2,3} \\
 &= \left[\sum_i \partial_i (\rho u_i) u_j + (\rho u_i) \partial_i u_j \right]_{j=1,2,3} \\
 &= \left[u_j \sum_i \partial_i (\rho u_i) + \rho \sum_i u_i \partial_i u_j \right]_{j=1,2,3} \\
 &= u \nabla \cdot (\rho u) + \rho (u \cdot \nabla) u
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (pI) &= \left[\sum_i \partial_i [pI] \right] \\
 &= \left[\partial_j (p \delta_{ij}) + \sum_{j \neq i} \partial_i (p \delta_{ij}) \right]_{j=1,2,3} \\
 &= \left[\partial_j p \right]_{j=1,2,3} \\
 &= \nabla p.
 \end{aligned}$$

A.4 Formulation en terme du tenseur anisotrope

On considère le cas simple de l'équation de Stokes anisotrope

$$-\Delta_\mu u + \nabla p = f \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{A.2})$$

Par hypothèse

$$\nabla_\mu = \sum_i \mu_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$$\nabla p = [\nabla p]_{i=1,2,3} = [\partial_i p]_{i=1,2,3} = \begin{bmatrix} \partial_1 p \\ \partial_2 p \\ \partial_3 p \end{bmatrix}$$

Posons

$$\sigma^\mu(u, p) = -pI + (\nabla u \cdot \mu + \mu \cdot \nabla^t u), \quad \mu = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3),$$

avec

$$(\nabla u \cdot \mu)_{ij} = \mu_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \text{et} \quad (\mu \cdot \nabla^t u)_{ij} = \mu_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

alors on a

$$\begin{aligned} (\text{div } \sigma^\mu(u, p))_i &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^\mu(u, p) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mu_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_j \mu_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \underbrace{\mu_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}}_{= 0 \text{ car } \text{div } u = 0} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \Delta_\mu u_i \end{aligned}$$

Ainsi l'équation de Stokes anisotrope s'écrit

$$-\text{div } \sigma^\mu(u, p) = f \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{A.4})$$

A.5 Inégalité de Korn pour le tenseur anisotrope

Dans cette partie on établit l'inégalité de Korn pour le tenseur de Cauchy avec viscosité anisotrope :

$$\sigma^\nu(v, p) = -pI + \nu \cdot \nabla v + \nabla^t v \cdot \nu, \quad \nu = \text{diag}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$$

$$\sigma_{ij}^\nu(v, p) = -p\delta_{ij} + e_{ij}^\nu(v, p), \quad e_{ij}^\nu(v, p) = \nu_j \partial_j v_i + \nu_i \partial_i v_j$$

On établit d'abord le résultat suivant

Lemme 7. Soit $v \in H^1(\Omega)^3$ vérifiant $e_{ij}^\nu(v) = 0$, $i, j = 1, 2, 3$.

Si Ω est connexe alors ils existent $c, b, w \in \mathbb{R}^3$ tels que $w(x) = c + b \wedge x$, avec $w_i(x) = v_i(x)/\nu_i$.

Démonstration.

Comme $v \in H^1(\Omega)^3 \subset (\mathcal{D}'(\Omega))^3$, on a la relation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Par un simple calcul de dérivation, on peut voir que

$$\nu_j \nu_k \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = \nu_j \frac{\partial e_{ik}^\nu(v)}{\partial x_j} + \nu_k \frac{\partial e_{ij}^\nu(v)}{\partial x_k} - \nu_i \frac{\partial e_{jk}^\nu(v)}{\partial x_i} = 0$$

et donc $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \quad \forall i, j, k$. Ainsi v_i est un polynôme de degré 1 :

$$\exists c_i \text{ et } B_{ij} \text{ tel que } v_i(x) = c_i + \sum_{j=1}^3 B_{ij} x_j$$

Comme $\nu_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \nu_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0$, on a donc $\nu_i B_{ij} = -\nu_j B_{ji}$ et $B_{ii} = 0$. Ainsi on peut choisir

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\nu_1 & \beta\nu_1 \\ \alpha\nu_2 & 0 & \gamma\nu_2 \\ -\beta\nu_3 & -\gamma\nu_3 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où on en posant $b = \begin{pmatrix} -\gamma \\ \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{\nu_1} \\ \frac{c_2}{\nu_2} \\ \frac{c_3}{\nu_3} \end{pmatrix}$, et $w_i = \begin{pmatrix} \frac{v_1}{\nu_1} \\ \frac{v_2}{\nu_2} \\ \frac{v_3}{\nu_3} \end{pmatrix}$ on en déduit le résultat. $\square$

Corollaire 4. Soit Γ_0 une partie de mesure non nulle de $\partial\Omega$, on a

$$\{v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)^3 : e^\nu(v) = 0\} = \{0\}$$

Lemme 8. Soit Ω un ouvert borné, il existe une constante $C > 0$ dépendant de Ω telle que

$$\int_{\Omega} e^\nu(\Omega)(v) :: e^\nu(\Omega)(v) + \int_{\Omega} v^2 \geq C \|v\|_{(H^1(\Omega))^3}^2$$

Démonstration. on pose $E = \{v \in (L^2(\Omega))^3 : e_{ij}^\nu(v) \in L^2(\Omega), i, j \in \{1, 2, 3\}\}$ muni de la norme

$$\|v\|_E = \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i,j=1}^3 \|e_{ij}^\nu(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

E est un espace de Banach. En effet :

Soit $(v_n) \subset E$ une suite de Cauchy. Alors $(v_n, e_{ij}^\nu(v_n))$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)$. Donc il existe $(v, \alpha_{ij}) \in L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)$ tel que $(v_n, e_{ij}^\nu(v_n)) \rightarrow (v, \alpha_{ij})$ et $\alpha_{ij} = e_{ij}^\nu(v)$. Ainsi $v_n \rightarrow v$ dans E .

Voyons aussi que $E \subset (H^1(\Omega))^3$: soit $v \in E$, on a

$$\nu_j \nu_k \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = \nu_j \frac{\partial e_{ik}^\nu(v)}{\partial x_j} + \nu_k \frac{\partial e_{ij}^\nu(v)}{\partial x_k} - \nu_i \frac{\partial e_{jk}^\nu(v)}{\partial x_i} = 0$$

Donc $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ (voir [84], proposition 1.2, pp 14), et $E \subset (H^1(\Omega))^3$.

On considère l'injection $i : (H^1(\Omega))^3 \longrightarrow (E, \|\cdot\|_E)$, $v \mapsto v$

$$\|i(v)\|_E = \|v\|_E \leq C \|v\|_{(H^1(\Omega))^3}$$

Par application du théorème de Banach on a $i^{-1} : (E, \|\cdot\|_E) \longrightarrow (H^1(\Omega))^3$ est continue. Donc

$$\|i^{-1}(v)\|_{(H^1(\Omega))^3} = \|v\|_{(H^1(\Omega))^3} \leq C \|v\|_E$$

$\square$

Théorème 24. (Inégalité de Korn) Pour tout $v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ on a

$$\|e^\nu(v)\|_{L^2(\Omega)^9} \geq C \|v\|_{(H^1(\Omega))^3}$$

Démonstration. Par l'absurde, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $v_n \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ tel que

$$\|e^\nu(v_n)\|_{L^2(\Omega)^9} < \frac{1}{n} \|v_n\|_{(H^1(\Omega))^3}.$$

Posons $V_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_{(H^1(\Omega))^3}}$, on a

$$\|V_n\|_{(H^1(\Omega))^3} = 1 \tag{A.5}$$

et

$$\|e^\nu(V_n)\|_{(L^2(\Omega))^9} < \frac{1}{n} \quad (\text{A.6})$$

Par (A.5) il existe une sous suite $V_{n_k} \in (H^1(\Omega))^3$ et $V \in (H^1(\Omega))^3$:

$$V_{n_k} \rightharpoonup V \text{ } (H^1(\Omega))^3, \text{ et } V_{n_k} \rightarrow V \text{ } (L^2(\Omega))^3$$

Par (A.6) on en déduit que $e^\nu(V) = 0$, et en utilisant le corollaire 4, on obtient $V = 0$. Finalement on a

$$V_{n_k} \rightarrow 0 \text{ } (L^2(\Omega))^3, \text{ et } e^\nu(V_{n_k}) \rightarrow 0 \text{ } (L^2(\Omega))^9.$$

Ainsi par le lemme 8 on a

$$\|V_{n_k}\|_{(H^1(\Omega))^3} \rightarrow 0$$

ceci contredit le fait que

$$\|V_{n_k}\|_{(H^1(\Omega))^3} = 1.$$

Ainsi on prouve l'inégalité de Korn. □

A.6 Dérivée directionnelle

Si la variation d'un champ f , selon les axes du système de coordonnées dans lequel il est exprimé, est directement déductible des composantes de ∇f , on peut chercher à exprimer cette variation selon une direction n unitaire quelconque.

Par définition :

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hn) - f(x)}{h}$$

ce qui en posant $F(h) = f(x + hn)$ se réduit à

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial n} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(o)}{h} = \frac{dF}{dh} \\ &= \frac{d}{dh} f(x + n_x h, y + n_y h, z + n_z h) \\ &= \partial_x f \cdot \partial_h(x + n_x h) + \partial_y f \cdot \partial_h(y + n_y h) + \partial_z f \cdot \partial_h(z + n_z h) \\ &= \partial_x \cdot n_x + \partial_y \cdot n_y + \partial_z \cdot n_z \\ &= n \cdot \nabla f \end{aligned}$$

Par conséquent, $n \cdot \nabla f$ représente la dérivée de f dans la direction n , que l'on trouve parfois notée $\frac{\partial f}{\partial n}$. Le gradient est ainsi une description complète de la tangence au champ dans n'importe quelle direction.

Exemple : application à la formulation STILS

La solution STILS de l'équation

$$\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c) = f \quad \text{dans } Q \quad (\text{A.7})$$

$$c = c_b \quad \text{sur } \partial Q^- \quad (\text{A.8})$$

correspond à un zéro de la fonctionnelle convexe

$$J(c) = \frac{1}{2} \left(\int_Q \left(\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c) - f \right)^2 dxdt - \int_{\partial Q^-} c^2(\tilde{u}|\tilde{n})d\tilde{\sigma} \right)$$

L'approche STILS revient à chercher un minimum de J . Notons $[DJ(c)] : H(u, Q) \rightarrow \mathbb{R}$ la dérivée directionnelle de la fonctionnelle J en la fonction c , définie par

$$[DJ(c)](v) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{J(c + hv) - J(c)\}$$

la fonction v est vue comme une direction de dérivation. On a

$$\begin{aligned} [DJ(c)](v) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{2} \left(\int_Q (\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}(c + hv)) - f)^2 \, dxdt - \int_{\partial Q^-} (c + hv)^2 (\tilde{u}|\tilde{n}) d\tilde{\sigma} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\int_Q (\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c) - f)^2 \, dxdt + \int_{\partial Q^-} c^2 (\tilde{u}|\tilde{n}) d\tilde{\sigma} \right) \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{2} \left(\int_Q h^2 (\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}v))^2 + 2h \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c) \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}v) - 2fh \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}v) \right) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial Q^-} h^2 v^2 (\tilde{u}|\tilde{n}) d\tilde{\sigma} + \int_{\partial Q^-} 2hcv (\tilde{u}|\tilde{n}) d\tilde{\sigma} \right\} \\ &= \int_Q \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c) \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}v) \, dxdt - \int_Q f \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}v) \, dxdt + \int_{\partial Q^-} cv (\tilde{u}|\tilde{n}) d\tilde{\sigma} \end{aligned}$$

Donc $[DJ(c)](v) = 0$ si et seulement si

$$\int_Q \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}c) \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}v) \, dxdt - \int_{\partial Q^-} cv (\tilde{u}|\tilde{n}) d\tilde{\sigma} = \int_Q f \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{u}v) \, dxdt$$

Méthodes de projection de Krylov, Matrices creuses

On cherche à résoudre le système

$$Ax = b$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^n$ est le second membre.

Le lecteur peut aussi consulter [9, 15]

B.1 Méthode de projection

B.1.1 Définition d'une méthode de projection

Le résultat suivant donne une première raison fondamentale de rechercher des approximations polynomiales pour la résolution d'un système.

Proposition 19. *Il existe un polynôme p de degré au plus $n - 1$ tel que $A^{-1} = p(A)$.*

Démonstration. D'après le théorème de Caley-Hamilton, le polynôme caractéristique q est de degré n et vérifie $q(A) = 0$, $q(0) = \det(A)$ est le déterminant de A . Soit $q(x) = \det(A) + xq_1(x)$ alors $Aq_1(A) = -\det(A)I$. Puisque A est inversible, $\det(A) \neq 0$ et $-\frac{1}{\det(A)}Aq_1(A) = I$. Soit p le polynôme définie par $p(x) = -\frac{1}{\det(A)}q_1(x)$, alors $A^{-1} = p(A)$. $\square$

Soit x_0 une approximation initiale et $r_0 = b - Ax_0$. Alors la solution x^* vérifie

$$x^* = x_0 + A^{-1}r_0 = x_0 + p(A)r_0$$

L'objectif des méthodes polynomiales est d'approcher ce polynôme $p(x)$.

Définition 1. *Les méthodes polynomiales sont définies par des itérations*

$$x_k = x_0 + s_{k-1}(A)r_0, \tag{B.1}$$

où s_{k-1} est un polynôme de degré au plus $k - 1$.

Le sous espace $\mathcal{K}_k(A, r_0) = \text{Vect}\{r_0, Ar_0, A^2r_0, \dots, A^{k-1}r_0\}$ est appelé espace de Krylov associé à A et r_0 . Une méthode itérative est polynomiale si et seulement si elle vérifie la condition de sous-espace

$$x_k \in x_0 + \mathcal{K}_k(A, r_0),$$

ou, de façon équivalente

$$x_{k+1} \in x_k + \mathcal{K}_{k+1}(A, r_0). \quad (\text{B.2})$$

C'est une méthode de sous-espace liée aux espaces de Krylov.

Proposition 20. Dans une méthode polynomiale, le résidu r_k et l'erreur e_k vérifient

$$r_k = q_k(A)r_0, \quad e_k = q_k(A)e_0, \quad (\text{B.3})$$

où $q_k(x) = 1 - xs_{k-1}(x)$ est un polynôme de degré au plus k qui vérifie $q_k(0) = 1$.

Définition 2. L'ensemble des polynômes résiduels de degré k est défini par

$$\mathcal{P}_k^0 = \{q \text{ est un polynôme de degré } k \text{ et } q(0) = 1\}.$$

On aboutit donc à deux directions pour définir une méthode polynomiale :

- La première, la moins courante, consiste à définir explicitement le polynôme, et s'applique au cas où la matrice est symétrique est définie positive.

- La deuxième manière de considérer une méthode polynomiale est de travailler avec les espaces de Krylov. Dans ce cas, le polynôme résiduel n'est pas explicitement connu. C'est cette approche que suivent les méthodes actuelles du gradient conjugué et du gradient bi-conjugué.

Proposition 21. La suite des sous-espaces de Krylov $\mathcal{K}_k(A, r_0)$ est une suite croissante de sous-espaces, et donc stationnaire à partir d'un rang p ; pour $k \leq p$, la dimension de $\mathcal{K}_k(A, r_0)$ est égale à k , et le système $\{r_0, Ar_0, \dots, A^{k-1}r_0\}$ est une base de $\mathcal{K}_k(A, r_0)$.

Le sous-espace $\mathcal{K}_p(A, r_0)$ est un sous-espace invariant de A ; l'équation $Ay = r_0$ a une solution dans cet espace.

B.1.2 Méthode polynomiale de projection

Définition 3. Une méthode de projection de Krylov est une méthode polynomiale définie par une matrice B et deux conditions : la condition de sous-espace et la condition dite de Petrov-Galerkin :

$$(Be_k)^t u = 0, \quad \forall u \in \mathcal{K}_k(A, r_0). \quad (\text{B.4})$$

le choix de B dicte la construction de la méthode de projection. Lorsque la matrice B définit un produit scalaire, on obtient la propriété de minimisation souhaitée :

Proposition 22. Si la matrice B est une matrice symétrique définie positive alors, pour x_k satisfaisant la condition de sous-espace, la condition de Petrov-Galerkin est équivalente à minimiser l'erreur :

$$\|e_k\|_B = \min_{y \in \mathcal{K}_k(A, r_0)} \|e_0 - y\|_B \quad (\text{B.5})$$

où $e_k = x - x_k = x - (x_0 + y) = e_0 - y$. Dans ce cas x_k est déterminé de manière unique

B.1.3 Préconditionnement d'une méthode polynomiale

La vitesse de convergence des méthodes itératives polynomiales dépend de certaines propriétés de la matrice A . Une façon d'accélérer la convergence est de transformer le problème en le preconditionnant à l'aide d'une matrice connue. Le nouveau système à résoudre est équivalent mais l'objectif est que la méthode polynomiale converge plus rapidement.

Définition 4. Un preconditionnement est défini par une matrice inversible $C \in \mathbb{R}^{n,n}$. Un preconditionnement à gauche résout le système équivalent

$$CAx = Cb$$

tandis qu'un preconditionnement à droite résout le système équivalent

$$AC(C^{-1}x) = Cb$$

Dans un système préconditionné à gauche, la matrice est donc CA , de sorte que le produit $v = Au$ est remplacé par la séquence des deux produits $w = Au$, $v = Cw$.

Si $C = A^{-1}$, alors $CA = I$ de sorte que le système préconditionné est trivial. Le préconditionnement C est souvent choisi pour approcher A^{-1} .

Proposition 23. *Une méthode polynomiale préconditionnée à gauche est caractérisée par*

$$x_k \in x_0 + \mathcal{K}_k(CA, Cr_0)$$

et une méthode polynomiale préconditionnée à droite est caractérisée par

$$x_k \in x_0 + C\mathcal{K}_k(AC, r_0)$$

B.2 Méthode du Gradient Conjugué (GC)

La méthode du gradient conjugué (GC) est la méthode polynomiale de choix dans le cas où A est symétrique définie positive. On peut citer [15] pour description détaillée de cette méthode. Nous abordons cette méthode dans le cadre des méthodes de projection de Krylov.

Définition 5. *La méthode du gradient conjugué (GC) est la méthode de projection de Krylov dans laquelle $B = A$ et A est symétrique définie positive.*

La proposition 22 se traduit immédiatement par

Proposition 24. *Les itérés x_k du gradient conjugué sont bien définis pour tout $k \geq 0$ à partir des conditions d'espace et de Petrov-Galerkin. Ils sont tels qu'ils minimisent l'erreur $\|x - x_k\|_A$ en norme A , quantité égale au résidu $\|b - Ax_k\|_{A^{-1}}$ en norme A^{-1} . En au plus n étapes, la solution exacte est trouvée (c.a.d $x = x_k$).*

Définition 6. *D'après la condition d'espace, il existe $\alpha_k \in \mathbb{R}$ et $p_k \in \mathcal{K}_{k+1}(A, r_0)$ tels que*

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \quad (\text{B.6})$$

Le vecteur p_k est appelé direction descente.

Proposition 25. *La condition de Galerkin est équivalente à*

$$r_k \perp \mathcal{K}_k(A, r_0) \quad (\text{B.7})$$

Démonstration. Evidente □

Théorème 25. *Tant que les résidus r_k sont non nuls, la méthode GC vérifie*

$$\begin{aligned} r_0 &= b - Ax_0, \\ x_{k+1} &= x_k + \alpha_k p_k, \\ r_{k+1} &= r_k - \alpha_k A p_k, \\ \text{Vect}\{r_0, r_1, \dots, r_k\} &= \text{Vect}\{p_0, p_1, \dots, p_k\} \subset \mathcal{K}_{k+1}(A, r_0), \\ r_k^T r_j &= 0, \quad j \neq k, \\ p_k^T p_j &= 0, \quad j \neq k, \end{aligned}$$

et les conditions de descente peuvent être choisies pour vérifier la récurrence (à une constante près)

$$p_0 = r_0, \quad p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k. \quad (\text{B.8})$$

Remarque 14. *L'hypothèse que A est symétrique permet de montrer la récurrence courte sur les directions de descente qui relie p_{k+1} à seulement p_k et non aux p_j .*

Il reste à caractériser α_k et β_k pour définir complètement la méthode.

Théorème 26. *On considère le système $Ax = b$, où A est une matrice symétrique définie positive. La méthode du gradient conjugué est définie par l'algorithme B.1*

Algorithm B.1 GC**Initialisation :**

Choisir x_0 ;
 $r_0 = b - Ax_0$, $p_0 = r_0$

Iteration :

pour $k = 0, 1 \dots$ jusqu'à convergence

$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}$;
 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$;
 $r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k$;
 $\beta_{k+1} = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$;
 $p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k$;

fin k

B.2.1 Convergence de GC

Nous avons vu la construction de la méthode du gradient conjugué. Nous allons maintenant étudier les propriétés de convergence.

Proposition 26. *Les coefficients β_k et α_k existent et sont uniques tant que $r_k \neq 0$.*

Remarque 15. *L'hypothèse que A est définie positive garantit l'existence et l'unicité de α_k*

B.2.2 Gradient Conjugué préconditionné (GCP)

Soit A une matrice sdp et $C = LL^T$ sa factorisation de Cholesky. Un moyen de préserver la symétrie est de considérer le système préconditionné

$$L^T A L (L^{-1}x) = L^T b,$$

qui s'écrit

$$By = c,$$

avec $B = L^T A L$ et $y = L^{-1}x$, $c = L^T b$. La matrice B est sdp donc il est possible d'appliquer la méthode GC au système $By = c$.

Maintenant, par un changement de variable, il est facile d'écrire l'algorithme du GC appliqué à $By = c$ sous la forme suivante La méthode du GC est définie par la condition de Galerkin liée au produit

Algorithm B.2 GCP**Initialisation :**

Choisir x_0 ;
 $r_0 = b - Ax_0$, $z_0 = Cr_0$, $p_0 = z_0$

Iteration :

pour $k = 0, 1 \dots$ jusqu'à convergence

$\alpha_k = \frac{r_k^T z_k}{p_k^T A p_k}$;
 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$;
 $r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k$;
 $z_{k+1} = C r_k$;
 $\beta_k = \frac{r_{k+1}^T z_{k+1}}{r_k^T z_k}$;
 $p_{k+1} = z_{k+1} + \beta_k p_k$;

fin k

scalaire euclidien. Mais il est également possible de définir la même condition en utilisant un autre

produit scalaire.

Puisque la matrice C est sdp, elle définit le produit scalaire

$$\langle x, y \rangle_C = x^T C y \quad (\text{B.9})$$

Maintenant, la matrice AC est auto-adjointe, définie positive pour le produit scalaire . Donc il est possible d'appliquer l'algorithme du GC avec le produit scalaire au système $AC(C^{-1}x) = b$.

Des hypothèses plus générales sur le préconditionnement C sont étudiées dans [9, 26]

B.3 Méthode du gradient bi-Conjugué (GBIC)

La méthode du gradient bi-conjugué (GBIC) est une des méthodes de projection de Krylov utilisées pour les systèmes linéaires dont la matrice est non symétrique

B.3.1 Construction de GBIC

La méthode du gradient bi-conjugué résout le système augmenté

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \tilde{b} \end{pmatrix}$$

par la méthode de projection de Krylov où la matrice B est choisie égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & A^t \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme GBIC est construit de la façon suivante.

Algorithm B.3 GBIC

Initialisation :

$$x_0, \tilde{b} \text{ et } \tilde{x}_0;$$

$$r_0 = b - Ax_0, \quad \tilde{r}_0 = \tilde{b} - A\tilde{x}_0, \quad p_0 = r_0, \quad \tilde{p}_0 = \tilde{r}_0$$

Iteration :

for $k = 0, 1 \dots$ jusqu'à convergence

$$\alpha_k = \frac{\tilde{r}_k^T r_k}{\tilde{p}_k^T A p_k};$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k;$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k;$$

$$\tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k - \alpha_k A^T \tilde{p}_k;$$

$$\beta_{k+1} = \frac{\tilde{r}_{k+1}^T r_{k+1}}{\tilde{r}_k^T r_k};$$

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_{k+1} p_k;$$

$$\tilde{p}_{k+1} = \tilde{r}_{k+1} + \beta_{k+1} \tilde{p}_k;$$

fin k

Les résidus et les directions de descente vérifient les conditions d'orthogonalité suivantes :

$$r_{k+1}^T \tilde{r}_k = 0, \quad A p_{k+1}^T \tilde{p}_k = p_{k+1}^T A^T \tilde{p}_k = 0.$$

B.3.2 Convergence de GBIC

La méthode GBIC présente l'avantage de posséder une récurrence courte. Par contre, elle requiert à chaque itération deux produits matrice-vecteur, par A et A^T . La preuve de cette algorithme est détaillée dans [15]

B.4 Matrices creuses

Dans de nombreuses simulations numériques, la discrétisation du problème aboutit à manipuler une matrice de très grande taille (d'ordre pouvant aller jusqu'à 10^8) mais dont la plupart des coefficients sont nuls. Dans ce cas, on considère un stockage creux (par abus, on parle d'une matrice creuse) qui permet de ne pas stocker une grande partie des coefficients nuls et de réduire considérablement la complexité des résolutions de systèmes.

B.4.1 Stockage des matrices creuses

Les codes développés dans ce travail utilisent le **stockage compact par lignes (CSR)** : dans un tableau à une dimension on range tous les éléments non nuls par ligne, une ligne après l'autre. Les indices de colonnes et les limites de lignes sont retenus dans deux tableaux d'entiers.

Il existe encore d'autres stockages tels que le stockage bande, le stockage profil, le stockage par coordonnées (**COO**), le stockage compact par colonnes (**CSC**).

La bibliothèque LAPACK permet le stockage bande. Beaucoup de solveurs directs ou itératifs utilisent un stockage compact par ligne ou par colonnes.

B.4.2 Produit matrice-vecteur

Dans les méthodes itératives de résolution, les deux opérations les plus coûteuses sont le produit matrice-vecteur et le préconditionnement. Les stockages creux permettent de réduire la complexité du produit matrice-vecteur. Dans ce qui suit, on considère un stockage compact par lignes.

On suppose que la matrice A d'ordre n a $nz(A)$ éléments non nuls que l'on a rangés dans le tableau $a(1 : nz)$ en les numérant par lignes. Dans le tableau $ja(1 : nz)$ on range les indices de colonnes de ces éléments dans le même ordre et dans le tableau $ia(1 : n + 1)$ on indique la liste des indices des démarrages de lignes de la matrice A stockée dans a avec par convention la valeur $nz + 1$ dans $ia(n + 1)$. Etant donné deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$, l'opération

$$y := y + Ax$$

s'exprime par l'algorithme suivant :

```

pour i = 1, n
  pour k = ia(i), ia(i + 1) - 1
    y(i) = y(i) + a(k) * x(ja(k))
  fin k
fin i

```

B.5 Fichiers de modules des codes numériques

Les différents codes numériques développés dans ce travail sont composés en modules contenant différents fichiers pour le maillage des domaines de calcul, la résolution des problèmes, et la résolution des systèmes linéaires.

Maillage des sous domaines

$nmac$: nombre de macro-éléments
 a, b : borne des variables des courbes
 (rex, rey) : coordonnées des sommets des macro-éléments
 $icode$: vecteur de conditions aux bords
 nx, ny : nombre d'intervalles "horizontaux/verticaux", = 3 au minimum

genre : définit les types de macro-éléments
res : résolution pour une bonne définition du domaine
nom : nom du fichier de sortie
icode : codes au bord des arêtes
ir : numero du fichier des données
r : indice comptant quel macro-élément est en construction
nnmax : nombre maximum de noeuds
nnoeud : nombre de noeuds
xnoeud(k), ynoeud(k) : coordonnées du noeud *k*
neubor : vecteur indiquant le code des noeuds au bord
nemax : nombre maximum d'éléments
nbelem : nombre d'éléments
ielem : matrice de définition des éléments
nomnoeu : nom du fichier contenant les noeuds
nombcond : nom du fichier des conditions au bord
x, y : coordonnées des noeuds
u : fonction définissant la condition initiale

- *DefDom* : sousroutines de définition du domaine à mailler
 - DEFDOM1(*nmac*) : détermination du nombre de macro-éléments
 - DEFDOM2(*nmac, a, b, rex, rey, icode, nx, ny, genre*) :
définit les macro-éléments du domaine (triangle, rectangle, rectangle avec face courbe, etc...)
- *MaillageDomaine* : sousroutines pour le maillage du domaine
 - DOM(*res, nom*) : procédure d'écriture du fichier de définition du domaine
 - LEC(*icode, rex, rey, nx, ny, ir, r, string*) : procédure de lecture des données du domaine
 - NOEUD(*icode, rex, rey, nx, ny, res, nnmax, nnoeud, xnoeud, ynoeud, neubor*) :
procédure de construction des noeuds
 - ELEM(*icode, rex, rey, nx, ny, res, nnmax, nnoeud, xnoeud, ynoeud, neubor, nemax, nbelem, ielem*) : procédure de construction des macro-éléments
 - FINDNN(*x, y, nn, nnoeud, xnoeud, ynoeud, res*) :
recherche d'un noeud *nn* de coordonnées (*x, y*)
 - BCOND(*nomnoeu, nombcond*) : écriture d'un fichier contenant les conditions au bord.
- *FctInitiales* : fonction source et condition initiale
 - SOURCE(*x, y*) : fonction source définissant le second membre de l'EDP
 - UNIT(*coor, u, nneu*) : fonction définissant la condition initiale

Résolution des problèmes locaux

shae : fonctions de forme
dl : dérivées locales
stiff : matrice de rigidité élémentaire
gauss : points d'interpolation
dg : dérivées globales
be : second membre élémentaire
lm : noeuds fixes sur la frontière
ndf : nombre de degré de liberté par élément
x, y : coordonnées des noeuds de l'élément
fl : force aux noeuds
dt : pas de temps

t : temps
 a : matrice de rigidité globale
 b : second membre global
 na : nombre de coefficients non nuls dans la matrice a
 idj : indice de colonne pour la matrice a
 idi : indice de ligne pour la matrice a
 neq : nombre d'équations
 nn, nb : nombre de noeuds, de noeuds fixes
 $nbel$: nombre d'éléments
 $nofix$: numéro des noeuds fixes
 $bcond$: vecteur des valeurs des cond. aux limites
 ia : vecteur des conditions aux limites

- *Fekform* : procédures de définition des fonctions de forme
 - T3SHAPE($x, y, gauss(i1), gauss(i2), ndf, shae, dl, dg, det, -3, eps, ierr$) :
fonctions de forme linéaires sur un triangle
 - T6SHAPE($x, y, gauss(i1), gauss(i2), ndf, shae, dl, dg, det, -3, eps, ierr$) :
fonctions de forme quadratiques sur un triangle
 - Q4SHAPE($x, y, gauss(i1), gauss(i2), ndf, shae, dl, dg, det, -3, eps, ierr$) :
fonctions de forme linéaires sur un rectangle
- *MatRigid* : sousroutines pour le calcul de la matrice de rigidité
 - EMATR($key, stiff, be, lm, ndf, x, y, fl, dt, t$) :
construction de la matrice élémentaire et du second membre élémentaire
 - ASSMA($na, idj, idi, neq, a, stiff, lm, ndf, ierr$) : assemble la matrice de rigidité locale dans la matrice globale
 - ASSSM(neq, b, be, lm, iel) : assemble le second membre d'un élément dans le vecteur global
- *SolSousPbles* : calcul de la solution du sous-problème
 - DONNEEPARA($nn, nbfix, nbel$) :
lecture des nombres de noeuds, de noeuds fixes, et d'éléments du maillage.
 - DONNEES($nn, nofix, bcond, nbel, ielem, f, dt, tmax$) :
lecture des numéros des noeuds fixes et des noeuds libres, de la topologie des éléments
 - VECCLI($nn, nbfix, nofix, bcond, ia, neq$) :
vecteur des conditions aux limites et numérotation des équations.
 - STRMAT($nneu, neq, nel, ndf, ielem, ia, na, namax, idj, idi$) :
détermination de la structure de la matrice
 - RIGID($x, nn, neq, ielem, nel, a, sm, na, idi, idj, ia, dt$) : calcul de la matrice de rigidité
 - SECMEM($nel, neq, nneu, x, ielem, f, sm, idi, idj, na, nbfix, nofix, bcond, ia, b, dt, t$) :
mise à jour du second membre et prise en compte des conditions aux limites fixes

Résolution des systèmes linéaires

a : matrice du système mémorisée sous forme creuse
 b : second membre du système
 na : nombre de coefficients non nuls dans la matrice a
 idj : indice de colonne pour la matrice a
 idi : indice de ligne pour la matrice a
 neq : nombre d'équations
 $nneu$: nombre de noeuds
 u : solution du problème

prec, idjp, idip : matrice de préconditionnement
iprec : type de préconditionneur
ite : nombre d'itérations
npr : nombre de coefficients non nuls de la matrice *prec*
itmax : nombre maximum d'itérations
nite : nombre d'itérations effectuées

- *GradSystMatcr* : Méthodes GC et GBIC pour le système linéaire $ax = b$ avec matrice creuse.
 - *MAVE*(*na, idj, idi, a, u, v, w, nn*) : calcul du produit d'une matrice creuse et d'un vecteur
 - *GC*(*na, idj, idi, a, prec, idjp, idip, np, b, u, neq, iprec, ite*) :
méthode du gradient conjugué préconditionné pour le système linéaire $ax = b$
 - *BICGSTAB*(*na, jndx, ipnt, a, npr, jndxpr, ipntpr, precl, b, u, neq, iprec, itmax, nite*) :
méthode du gradient bi-conjugué préconditionné pour le système linéaire $ax = b$.
- *ResolSystMatcr* : résolution du système linéaire $ax = b$ avec matrice creuse *a*
 - *SOLVE*(*na, idj, idi, a, neq, b, nneu, u, bcond, nbor, ia, iprec, prec, idjp, idip, np, ite*) :

résolution du système $ax = b$ par la méthode GC avec préconditionnement
puis prise en compte des conditions aux limites.

$$a = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 14 & 15 \\ 0 & 22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 33 & 0 & 0 \\ 41 & 0 & 0 & 44 & 45 \\ 51 & 0 & 0 & 54 & 55 \end{pmatrix}$$

est représentée sous forme symétrique

$a(*) = [11, 14, 15, 22, 33, 44, 45, 55]$
 $idj(*) = [1, 4, 5, 2, 3, 4, 5, 5]$
 $idi(*) = [1, 4, 5, 6, 8, 9]$

```
implicit none
integer i, int, neq, nneu, nbor
real*8 tt
integer iprec
real*8 a(na)
real*8 b(neq), u(nneu), bcond(nbor)
integer ia(nneu), idj(na), idi(neq + 1)
real*8 prec(na)
integer idjp(na), idip(neq + 1)
real*8 work(neq)

do i = 1, nneu
  if (ia(i).gt.0) then
    work(ia(i)) = u(i)
  end if
```

```

end do

call GC(na, idj, idi, a, na, idi, a, na, idjp, idip, prec, b, work, neq, iprec, nq, ite)
if ite.le.0 then
    print*, 'erreur dans bicgstab', ite
end if

do i = 1, neq (Pour éviter les oscillations (overshooting et undershooting))
    tt = work(i)
    tt = min(1.d0, tt)
    tt = max(0.d0, tt)
    work(i) = tt
end do

do i = 1, neq
    b(i) = work(i)
end do

do i = 1, nneu
    int = ia(i)
    if (int.gt.0) then
        u(i) = work(int)
    else if (int.eq.0) then
        u(i) = 0.0
    else if (int.lt.0) then
        u(i) = bcond(-int)
    end if
end do
end

```

– SOLVE(*na, idj, idi, a, neq, b, nneu, u, bcond, nbor, ia, iprec, prec, idjp, idip, np, ite*) :

résolution du système $ax = b$ par la méthode GBIC avec préconditionnement
puis prise en compte des conditions aux limites.

$$a = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 14 & 15 \\ 0 & 22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 33 & 0 & 0 \\ 41 & 0 & 0 & 44 & 45 \\ 51 & 0 & 0 & 54 & 55 \end{pmatrix}$$

est représentée sous forme non symétrique par

$$\begin{aligned}
 a(*) &= [11, 14, 15, 22, 33, 41, 44, 45, 51, 54, 55] \\
 idj(*) &= [1, 4, 5, 2, 3, 1, 4, 5, 1, 4, 5] \\
 idi(*) &= [1, 4, 5, 6, 9, 12]
 \end{aligned}$$

```

implicit none
integer i, int, neq, nneu, nbor
real*8 tt

```

```

integer iprec
real*8 a(na)
real*8 b(neq), u(nneu), bcond(nbor)
integer ia(nneu), idj(na), idi(neq + 1)
real*8 prec(na)
integer idjp(na), idip(neq + 1)
real*8 work(neq)

do i = 1, nneu
    if (ia(i).gt.0) then
        work(ia(i)) = u(i)
    end if
end do

call BICGSTAB(na, idj, idi, a, na, idi, a, na, idjp, idip, prec, b, work, neq, iprec, nq, ite)
if ite.le.0 then
    print*, 'erreur dans bicgstab', ite
end if

do i = 1, neq (Pour éviter les oscillations (overshooting et undershooting))
    tt = work(i)
    tt = min(1.d0, tt)
    tt = max(0.d0, tt)
    work(i) = tt
end do

do i = 1, neq
    b(i) = work(i)
end do

do i = 1, nneu
    int = ia(i)
    if (int.gt.0) then
        u(i) = work(int)
    else if (int.eq.0) then
        u(i) = 0.0
    else if (int.lt.0) then
        u(i) = bcond(-int)
    end if
end do
end

```


- [1] Y. ACHDOU, P. LE TALLEC, F. NATAF, M. VIDRASCU, A domain decomposition preconditioner for an advection-diffusion problem. *Vista in domain decomposition and parallel processing in computational mechanics. Comput Methods Appl. Mech. Engrg* 184, (2000), 2-4, 145–170.
- [2] R.A. ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York (1975)
- [3] V.I. AGOSHKOV, V.I. LEBEDEV, Poincaré-Steklov operators and methods of partition of the domain in variational problems, *Computational process and systems*, No. 2, pages 173 – 227 Nauka, Moscow, (1985).
- [4] V.I. AGOSHKOV, Poincaré-Steklov operators and domain decomposition in finite dimensional spaces. In *First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Paris 1987, pages 73 – 112 SIAM, Philadelphia, (1988).
- [5] V.I. AGOSHKOV, V.I. LEBEDEV, Generalized Schwarz algorithm with parameters. *Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 5(1) : 1 – 26, (1990). Originally published in Russian as Preprint No. 19, Dept. Numer. Math. URSS Acad. Sci. Moscow, (1981).
- [6] V.I. AGOSHKOV, V.I. LEBEDEV, Variational algorithms of the domain decomposition method. *Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 5(1) : 27 – 46, (1990). Originally published in Russian as Preprint No. 54, Dept. Numer. Math. URSS Acad. Sci. Moscow, (1983).
- [7] C. AMROUCHE, V. GRAULT, Propriétés fonctionnelles d’opérateurs. Applications au problèmes de Stokes en dimension quelconque, *Publications du Laboratoire d’Analyse Numérique*, no 90025 Université P. , M. Curie (1990).
- [8] A. ANDREA, FETI domain decomposition methods for scalar advection-diffusion problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190 (2001), 43-44, 5759–5776.
- [9] S.F. ASSHBY, T.A. MANTEUFFEL, P. E. SAYLOR, A taxonomy for Conjuguate Gradient Methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 26 : 1542 – 1568, 1990.
- [10] A. ASSEMIEN, Comportement asymptotique des équations de Navier-Stokes pour des écoulements de faible épaisseur, phd thesis, Université Claude Bernard Lyon 1, (1993).
- [11] P. AZERAD, Analyse et approximation du problème de Stokes dans un bassin peu profond, *C.R. Acad. Sci. paris*, 318, pp.53 – 58 (1994).
- [12] P. AZERAD, Analyse des équations de Navier-Stokes en bassin peu profond et de l’équation de transport. Thèse de doctorat, Université de Neuchâtel (1996).
- [13] P. AZERAD, J. POUSIN, Inégalité de Poincaré courbe pour le traitement variationnel de l’équation de transport. *Comptes Rendus de L’Academie des Sciences ; Paris ; Series I* , 322(8) 721-727 (1996).
- [14] P. AZERAD, F. GUILLÈN, Mathematical justification of the hydrostatic approximation in the primitive equations of geophysical fluid dynamics, *SIAM J.Math Anal*, Vol 33, No 4 pp 847-859, (2001)
- [15] R. BARRET, M. BERRY, T. CHAN, J. DEMMEL, J. DONATO, J. DONGARA, V. ELJKHOUT, R. POZO, C. ROMINE, H.VAN DER VORST, *Templates for the solution of linear systems : building blocks for iterative methods - 2nd edition*. SIAM / netlib, Philadelphia, PA, 1994

- [16] P.B. BOCHEV, M.D. GUNZBURGER, Least squares finite element methods, Springer, Berlin, (2009).
- [17] O. BESSON, M.R. LAYDI, R. TOUZANI, Un modèle asymptotique en océanographie ; C. R. Acad. Sci. Paris, t. 310 Série I, p 661-665 (1990).
- [18] O. BESSON, M.R. LAYDI, Some estimates for anisotropic Navier-Stokes equations and for the hydrostatic approximation, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér., 26(7) : 855 – 865, (1992).
- [19] O. BESSON, Finite element solution of Navier-Stokes equations in shallow domains, Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 9, n^o2, p. 161 – 180, (2002).
- [20] O. BESSON, J. POUSIN, Hele-Shaw approximation for resin transfer molding ZAMM, vol. 85, n^o4, pp. 227 – 241, (2005)
- [21] O. BESSON, J. POUSIN, Solution for linear conservation laws, with velocity fields in L^∞ . Arch. Ration. Mech. Anal, 186, pp.159 – 175, (2007).
- [22] O. BESSON, G. DE MONTMOLLIN, Space-time integrated least square : a time-marching version, internat. J. Numer. Methods fluids 44, 525-543,(2004).
- [23] J. BOUSSINESQ, Théorie analytique de la chaleur, Paris, Gauthier-Villars (1901-03).
- [24] F. BREZZI, M. FORTIN, Mixed and hybrid finite element methods. Springer-Verlag, (1991)
- [25] A. N. BROOKS, T. J. HUGHES, Streamline upwind/ petrov galerkin formulations for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes, Comput. Maths appl. Mech. Engrg., 32, pp. 199-259 (1982).
- [26] A. M. BRUASET, A survey of preconditioned iteratives methods. Pitman Research Notes in Mathematics Series. Longman Scientific and Technical, 1995.
- [27] P. G. J. T. BRUMMELHUIS, A. W. HEEMINK, H. F. P. VAN DEN BOOGAARD, Identification of shallow sea models. Internat. J. for Numer. Methods Fluids, 17 : 637 – 665, (1991).
- [28] C. CAO, E. S. TITI Global well-posedness and finite-dimensional global attractor for a 3-D planetary geostrophic viscous model, Comm, Pure Appl, math. 56 (2003).
- [29] C. CAO, E. S. TITI, M. ZIANE, A horizontal hyper-diffusion three-dimensional thermocline planetary geostrophic model : well-posedness and long time behaviour, Nonlinearity 17 (2004), 1749-1776.
- [30] C. CAO, E. S. TITI Global well-posedness of the three-dimensional viscous primitive equations of large scale ocean and atmosphere dynamics, Annaly of mathematics, 166, (2007), 245-267.
- [31] C. CARLEZONI, A. QUARTERONI Adaptive domain decomposition methods for advection-diffusion problems, The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol. 75, Springer Verlag, (1995).
- [32] P. CHARTON, F. NATAF, F. ROGIER, Méthode de décomposition de domaine pour l'équation d'advection-diffusion, C. R. Acad. Sci. Paris,t. 313, serie I, pp. 623 – 626(1991).
- [33] G. Q. CHEN, G. FRID, Divergence-measure fields and hyperbolic conservation laws. Arch. Ration. mech. Anal. 147, 89-118(1999).
- [34] A. J. CHORIN, J. E. MARSDEN, A Mathematical Introduction to fluid Mechanics. Springer-Verlag, (1979).
- [35] C. F. CURTISS, J. O. HIRSCHFELDER, Integration of stiff equations, Proc. of the National Academy of Sciences of US., vol.38, p.235-243, 1952.
- [36] R. DAUTRAY, J. L. LIONS, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et techniques. Masson, 1988
- [37] B. DESPRES, Domain decomposition methods and the Helmholtz problem, Mathematical and Numerical aspects of wave propagation phenomena, SIAM, pp. 44 – 52(1991).
- [38] M. DISCACCIATI, E. MIGLIO, A. QUARTERONI, Mathematical and numerical models for coupling surface and groundwater flows. Appl. Numer. Math., 43 : 57 – 74, 2002.

- [39] M. DISCACCIATI, A. QUATERONI, Analysis of a domain decomposition method for the coupling of Stokes and Darcy equations. In F. Brezzi, A. Buffa, S. Corsaro, and A. Murlu, editors, Numerical Mathematics and Advanced Applications, ENUMATH, pp 3 – 20. Springer. Milan, (2003).
- [40] M. DISCACCIATI, A. QUATERONI, Convergence analysis of a subdomain iterative method for the finite element approximation of the coupling of Stokes and Darcy equations. *Comput. Visual. Sci.*, 6 : 93 – 103, (2004).
- [41] S. DOUCOURÉ, O. BESSON, Modèle asymptotique pour une jonction fleuve-océan, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 347, (2009).
- [42] G. DUVAUT, Mécanique des milieux continus. Masson, Paris, (1990).
- [43] R. E. EDWARDS Functional Analysis, Theory and Applications. Holt, Rinehardt and Winston, New York, 1965.
- [44] L. FANTONE, P. GERVASIO, A. QUATERONI., Multimodels for incompressible flows, *journal of mathematical fluid mechanics*, vol 2, num. 2, p. 126-150. Vol.2 no. 2., (200)
- [45] M. FEISTAUER, C. SCHWAB, Coupling of an interior Navier-Stokes problem with an exterior Oseen problem. *J. Math. Fluid Mech.* 3, 1 – 17 (2001).
- [46] M. J. GANDER, C. ROHDE, Overlapping Schwarz Waveform Relaxation for Convection Dominated Dissipative Conservation Laws, *SIAM journal on Scientific Computing*, Vol. 27, Num. 2, pp. 415 – 439, (2005).
- [47] F. GASTALDI, L. GASTALDI, Convergence of subdomain iterations for the transport equation. *Boll. U.M.I* 9-B(1995) 175-202.
- [48] F. GASTALDI, L. GASTALDI, On the domain decomposition for the transport equation : theory and finite element approximation, *IMA journal of Numerical Analysis* (1993) 14, 111-135.
- [49] F. GASTALDI, L. GASTALDI, A. QUATERONI Adaptive domain decomposition methods for advection dominated equations. *East-West J. Numer. Math.* 4 (1996) 165-206.
- [50] L. GASTALDI, A Domain decomposition method associated with Streamline Diffusion FEM for linear hyperbolic systems, *Applied Numerical Mathematics* 10, pp 357 – 380, (1992)
- [51] V. GIRAULT, P. A. RAVIART, Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Springer-Verlag, 1986.
- [52] R. GLOWINSKI, Numerical methods for nonlinear variational problems, Springer-Verlag, (1984).
- [53] E. HAIRER, S. P. NØRSETT, G. WANNER, Solving Ordinary Differential Equations I. Springer-Verlag, 1987.
- [54] P. HANSBO, The characteristic streamline diffusion method for convection-diffusion problems, *Comput. Maths Appl. Mech. Engrg.*, 96 (1992), pp. 239-253.
- [55] T. J. R. HUGHES, Recent progress in the developpement and understanding of SUPG methods with special reference to the compressible euler and Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Methods fluids* 7, 1261 – 1275 (1987).
- [56] T. J. R. HUGHES, L. P. FRANCA, G. M. HULBERT, A new finite element formulation for computational fluid dynamics : viii. the galerkin/least square method for advection diffusive equations, *comput. Mech. Appl. Mech*, Cambridge University Press, (1987).
- [57] T. J. R. HUGHES, J. E. MARSDEN, A short course in Fluid Mechanics. Publish or Perish, Inc., (1976).
- [58] C. JOHNSON, Numerical solution of partial differential equations by finite element method. Cambridge : Cambridge University press.
- [59] C. JOHNSON, A new approach to algorithms for convection problems wich are based on exact transport + projection, *Comput. Mech Appl. Mech. Engrg.*, 100(1992), pp. 45-62.

- [60] O. A. LADYZHENSKAYA, The mathematical theory of viscous incompressible flow, Gordon Breach, 2nd ed, (1969).
- [61] L. LANDAU, E. LIFCHITZ, Mécanique des fluides. Editions Mir, Moscou, (1971).
- [62] R. LEWANDOWSKI, Analyse Mathématiques et océanographie, Masson, Paris (1997).
- [63] J. L. LIONS, E. MAGENES, Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Vol. I. Berlin Springer.
- [64] P. L. LIONS, On the Schwarz Alternating Method I, First Int. Symp on Domain Decomposition Methods (R. Glowinski, G. H Golub, G. A. Meurant and J. Periaux), SIAM (Philadelphia, PA), (1988).
- [65] P. LIONS, On the Schwarz Alternating Method III, A variant for Nonoverlapping subdomains, Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, SIAM, 1989, pp. 202-223.
- [66] R. LUCE, C. POUTOUS, J. M. THOMAS Weakened conditions of admissibility of surface forces applied to linearly elastic membrane shells, C. R. Acad. Sci. ser I (344) 721-726, 2007.
- [67] R. LUCE, C. POUTOUS, J. M. THOMAS Asymptotic modelling of a fluid-structure coupling in the case of a prestressed inflated orthotropic membrane shell C. R. Acad. Sci. ser I (346) 1207-1212, 2008.
- [68] E. MIGLIO, S. PEROTTO, F. SALERI A multiphysic strategy for free surface flows, In Domain Decomposition methods in Science and Engineering. Series : lect. Notes Comput. Sci. Eng., Vol 40, Springer, Berlin, R. Kornhuber, R. Hoppe, J. Périaux, O. Pironneau, O. Widlund, J. Xu Eds. (2005), 395 – 402. Proceedings of the 15th International Conference on Domain Decomposition methods.
- [69] A. R. MITCHELL, J. W. CRAGGS, Stability of difference relations in the solution of ordinary differential equations , Math. Tables Aids Comput ., vol.7, p.127-129, 1953
- [70] G. DE MONTMOLLIN, Méthode STILS pour l'équation de transport : comparaisons et analyses. Etude d'un modèle de fermeture pour la loi de Darcy. Thèse, Université de Neuchâtel, 2001.
- [71] J. NEČAS, J. HLAVACEK, Mathematical theory of Elastic and Elasto-plastic Bodies : an introduction, Elsevier, Amsterdam-Oxford-New York, (1981).
- [72] J. NEČAS, Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Masson, Paris (1967).
- [73] J. PEDLOSKY, Geophysical fluid dynamics Springer-Verlag. New York (1997).
- [74] O. PERROCHET, P. AZERAD, Space-time integrated least-squares : Solving a pure advection equation with a pure diffusion operator, J. Comput. Phys., 117, pp 183 – 193 (1995).
- [75] C. POUTOUS Modélisation asymptotique d'un problème de couplage fluide-structure, thèse de doctorat, Université de Pau des Pays de l'Adour, 2006.
- [76] A. QUARTERONI, A. VALLI, Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, Oxford Science Publications, Oxford, (1999).
- [77] P. A. RAVIART, J. A. THOMAS, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Dunod, Paris, (1998).
- [78] G. DE RHAM, Variétés différentiables, formes, courants, formes harmoniques, Hermann, (1960).
- [79] H. A. SCHWARZ, Uber ein Grenzübergang durch alternierendes Verfahren, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich, 15 (May 1870), pp, 272 – 286.
- [80] J. SERRIN, Mathematical principles of classical fluid mechanics, Handbuch der physik, 8/1 : 125 – 263, 1959.
- [81] P. K. SMOLARKIEWICZ, The multi-dimensional Crowley advection scheme, Monthly Weather Review, 110 (1982).

-
- [82] J. SIMON, Sur les fluides visqueux incompressibles et non homogènes, C.R. Acad. Sci. Paris, 309, pp. 447-452, (1989).
- [83] A. STANFORTH, J. CÔTÉ, J. PUDYKIEWICZ, Comment on Smolarkiewicz's deformational flow, Monthly Weather Review, 115 (1987), pp. 894 – 900.
- [84] R. TEMAM, Navier-Stokes Equations, North-Holland, Elsevier, Amsterdam, (1985).
- [85] R. TEMAM, Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires, Ann. Math. Pura. Appl, (4), 79, 1968 pp. 191 – 379.
- [86] R. A. WALTERS, R. T. CHENG, Accuracy of an Estuarine Hydrodynamic model Using Smooth Elements. Water Resources Research, 16(1) : 187 – 195, (1980).
- [87] R. K. ZEYTOUNIAN, Modélisation asymptotique en mécanique des fluides newtoniens, Springer-Verlag, New-York, (1994).

La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne.
La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi.
Ici, nous avons réuni théorie et pratique : rien ne fonctionne et personne ne sait pourquoi. !
ALBERT EINSTEIN

