

**DEFENSE D'UNE SEMANTIQUE DE LA RELATION DE
PARTIE A TOUT EN LOGIQUE.
RESOLUTION DE L'ARGUMENT DE DE MORGAN.**

Thèse présentée à
la Faculté des lettres et sciences humaines
de l'Université de Neuchâtel
pour obtenir le grade de
docteur ès lettres et sciences humaines

par Nadine GESSLER

Sous la direction du professeur
Denis MIEVILLE

Neuchâtel - août 2002

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	1-5
CHAPITRE I: L'ARGUMENT DE DE MORGAN	6-58
1. De Morgan et l'argument	8
1.1 Formulations de l'argument	8
1.2 Validation de l'argument par De Morgan	12
2. L'argument et la logique standard moderne	19
2.1 Traduction et validité formelle de l'argument	19
2.1.1 Morphologie d'un langage du premier ordre	20
2.1.2 Traduction de l'argument	21
2.1.3 Validité formelle de l'argument	30
2.2 Réalisation sémantique de l'argument	31
2.3 Bilan critique	36
3. La solution des <i>Principia Mathematica</i>	49
3.1. La définition contextuelle de la classe	49
3.2. Le calcul des relations et les fonctions descriptives	53
3.3. Le théorème *37.62	56
CHAPITRE II: GENESE DE LA MERELOGIE	59-110
1. L'œuvre logique de Lesniewski	61
2. La formulation courante de l'antinomie de Russell	63
3. Antinomie et intuition chez Lesniewski	70
4. La classe collective	77

4.1 Éléments introductifs	77
4.2 Le présupposé fondamental	80
4.3 La classe vide	82
4.4 Identité d'un objet avec la classe de lui-même	88
4.5 La relation d'appartenance	90
4.6 La classe singulière	93
5. Résolution de l'antinomie	101
6. Une axiomatique de la Méréologie	108
CHAPITRE III: PRELIMINAIRES LOGIQUES	111-144
1. Préambule	113
2. Distributif versus collectif	116
3. L'analyse de la proposition singulière	118
4. L'axiome de l'Ontologie	122
5. Les directives inférentielles	125
5.1 Les directives de définition	125
5.2 Les directives d'extensionnalité	127
5.3 Les autres directives	129
6. Définitions de foncteurs	131
6.1 Foncteurs de catégorie S/N	132
6.2 Foncteurs de catégorie S/NN	134
7. Le nom vide et le nom universel	138
8. Analyse catégorielle de l'antinomie de Russell	142

CHAPITRE IV: RESOLUTION DE L'ARGUMENT DE DE MORGAN	145-195
1. Le système axiomatique	147
2. Thèses caractéristiques de la Méréologie	157
3. Résolution de l'argument de De Morgan	173
3.1 Première résolution	177
3.2 Deuxième résolution	179
3.3 Remarques finales	194
CONCLUSION	196-200
BIBLIOGRAPHIE	201-212
ANNEXES	213-229

INTRODUCTION

L'argument du Bourreau était qu'il n'était pas possible de couper une tête si elle n'est pas rattachée à un corps, qu'il n'avait jamais rien fait de semblable et que ce n'était pas à son âge qu'il allait commencer.

L'argument du Roi était que tout ce qui a une tête peut être décapité et qu'il ne fallait pas raconter de bêtises.

L'argument de la Reine était que si rien n'était fait dans la minute même, elle ferait exécuter tout le monde.

(Lewis Carroll Alice au Pays des Merveilles)

Que les logiciens, à l'époque moderne, se soient peu intéressés à la relation d'ingrédience de partie à tout est un fait que nul ne nous contestera. Le lecteur qui possède quelques familiarités avec la logique, telle qu'elle s'est constituée et à évolué depuis la fin du XIX^{ème} siècle, sait que la relation de partie n'a pas droit de cité dans un champ de l'extensionnel délimité par les relations ensemblistes usuelles d'appartenance et d'inclusion. Cependant, il n'en demeure pas moins vrai que la relation de partie à tout se manifeste dans l'exercice naturel du langage et certains raisonnements qui y sont conduits. C'est d'ailleurs à ce titre qu'elle a contribué à alimenter la discussion relative à certaines énigmes logiques, parmi lesquelles on trouve l'argument de De Morgan, *tout homme est un animal, donc toute tête d'un homme est une tête d'un animal*. Cet argument, dont on a coutume de parler en termes de «célèbre argument de De Morgan», habite la littérature logique pour avoir été l'un des éléments fédérateurs d'une réflexion nouvelle sur les relations et les limites de la syllogistique traditionnelle¹.

1 Augustus De Morgan (1806-1871)

Montrer sa validité formelle dans le cadre de la logique standard moderne ne soulève aucune difficulté majeure. En effet, elle est l'expression d'un pur jeu syntaxique. En revanche, il est impossible d'associer à la procédure de validation syntaxique une représentation sémantique capable de rendre compte de la relation de partie à tout, *en tant que telle*, qu'il mobilise. Car dans le rapport solidaire entre syntaxe et sémantique, l'organisation relationnelle correspondant à la tête d'un homme est restreinte à la reconnaissance d'une corrélation purement extensionnelle entre des entités individuelles et discrètes. Aussi, la même représentation sémantique vaut-elle tout autant pour les têtes des hommes que leurs maisons, leurs ânes ou leurs chats. Mais sans doute le bourreau d'«Alice au pays des merveilles» nous concéderait-il qu'à découper des têtes sur des corps, les corps ne sont plus complets, tandis qu'à brûler une maison ou séparer un âne de son propriétaire, ce dernier n'est pas atteint dans son identité. En des termes moins tranchants, ce qui se trouve pris en défaut est la capacité du modèle extensionnel à restituer une image fidèle de l'ontologie présupposée par l'argument de De Morgan. La démarche formelle est certes conforme aux aspects déductifs de la raison opératoire. Mais elle vide l'argument de son contenu reposant sur la reconnaissance, à côté de la singularité de ses objets, d'une forme d'identité subordonnée à la nature du lien partitif qu'ils entretiennent. Les moyens sémantiques du cadre extensionnel, en contrepartie de leurs avantages purement formels, révèlent donc ici leurs propres faiblesses. C'est dans ces limites descriptives, qui ne sauraient laisser indifférent tout logicien en recherche d'une meilleure adéquation entre la formalisation logique et la réalité visée par le langage, que s'ancre notre thèse.

Aussi l'enjeu de notre travail est-il de parvenir à tester la validité de l'argument à la lumière de sa relation de partie à tout, de manière à accéder à un éclairage sémantique qui ne trahisse pas la perception véhiculée, par la pensée intuitive, de son organisation ontologique. Pour accomplir ce projet, nous avons adopté la Méréologie, théorie formelle de la relation de partie à tout et que l'on doit au logicien polonais S. Lesniewski². Cette théorie fut élaborée à l'aube du XXème siècle, en réponse à l'antinomie de Russell concernant les classes. Fondée sur une théorie de pure logique, elle offre les outils d'analyse nécessaires à une résolution de l'argument de De Morgan conciliant l'exigence formelle d'un langage logique et celle, que nous postulons ici, de la descriptibilité des objets référentiels.

Notre thèse se découpe en quatre chapitres. Le premier, intitulé «L'argument de De Morgan», donne tout d'abord une présentation de l'argument au sein de l'œuvre de De Morgan. Il se consacre ensuite à l'examen du traitement réservé à l'argument dans le cadre de la logique des prédicats du premier ordre. De cet examen découle une réflexion critique liée aux insuffisances descriptives du cadre extensionnel classique. C'est elle qui nous conduit à postuler que, dans le contexte de l'argument, c'est la signification de la relation de partie à tout qui sémantiquement s'impose. C'est le lieu pour nous de développer une argumentation visant à défendre notre thèse d'une solution méréologique de l'argument. On trouve aussi dans ce premier chapitre un exposé de la solution proposée par Whitehead et Russell dans les *Principia Mathematica*.

Le deuxième chapitre, «Genèse de la Méréologie», se consacre à retracer l'émergence de la Méréologie dans son contexte historique. Nous y examinons

2 Stanislaw Lesniewski (1886-1939)

comment l'antinomie de Russell conduisit Lesniewski à concevoir la Méréologie et à rejeter ainsi la définition classique de l'ensemble au profit d'une définition collective des classes. On verra également que la nécessité de fonder logiquement la Méréologie déboucha sur une théorie logique profondément différente des systèmes de référence, tant dans ses modes formels que ses conceptions logiques sous-jacentes, et capable de relever le projet logiciste de fonder les mathématiques.

C'est à cette théorie logique sur laquelle s'ancre la Méréologie que nous avons dédié le troisième chapitre. En raison de ses aspects fondateurs, nous l'avons intitulé «Preliminaires logiques».

Quant au dernier chapitre, «Résolution de l'argument de De Morgan», on entre avec lui dans la phase formelle et démonstrative de notre travail. Il est consacré à la présentation formelle de la Méréologie et, comme son titre l'indique, à la démonstration des thèses supportant la résolution du problème sémantique posé par l'argument, relativement à la nature spécifique de la relation en fondant la dynamique inférentielle.

CHAPITRE I

L'ARGUMENT DE DE MORGAN

L'objectif de ce premier chapitre est d'examiner la procédure de validation de l'argument de De Morgan propre au cadre de la logique standard moderne, c'est-à-dire le calcul des prédicats du premier ordre. Après avoir examiné cette procédure, nous serons conduite à mettre au premier plan la problématique motivant cette thèse, à savoir les limites de la sémantique ensembliste face à la question de la descriptibilité des objets référentiels et de leur complexité ingrédentielle, et l'impossibilité conjointe de la logique des prédicats du premier ordre à fonder l'analyse du mouvement inférentiel de l'argument sur la relation de partie à tout qu'il mobilise. De cette critique découlera la nécessité de recourir à une sémantique de type méréologique. Nous exposerons aussi la solution proposée dans les Principia Mathematica pour valider l'argument. Mais dans un premier temps, nous donnerons la parole à De Morgan lui-même. Ayant fait de son argument le moteur de cette thèse, il nous semblait en effet juste de nous intéresser à la manière par laquelle il rendit lui-même compte de sa validité.

1. De Morgan et l'argument

1.1 Formulations de l'argument

On trouve dans les écrits de De Morgan plusieurs versions de ce que nous avons qualifié d'«argument de De Morgan». Celui-ci apparaît pour la première fois en 1847, dans *Formal Logic*, à titre d'inférence n'entrant pas dans le cadre de la syllogistique aristotélicienne (De Morgan 1847: 114). Il est formulé ainsi:

(1) Man is animal

Therefore, the head of a man is the head of an animal

L'argument est introduit aux côtés de deux autres inférences, qualifiées traditionnellement d'inférences obliques: «Every man is animal, therefore he who kills a man kills an animal» et «Every man is an animal, some one kills a man, therefore some one kills an animal».

Trois ans plus tard, De Morgan revient à l'argument en écrivant:

I gave a challenge in my work on formal logic to deduce syllogistically from "Every man is an animal" that "every head of a man is the head of an animal". From the total absence of attempt to answer this challenge, I conclude that no one has succeeded in whose way it has fallen. (1966: 29)¹

La prémisses et la conclusion étant cette fois universellement quantifiées, l'argument se présente sous la formulation suivante:

¹ Dans «On the syllogism, II», pp. 22-66, réédition des *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. IX, 1850.

(2) Every man is an animal

Therefore, every head of a man is the head of an animal

Concernant leur prémisse respective, ces deux versions ne présentent pas de différence significative. En revanche, la conclusion de la première version peut susciter une lecture englobant deux descriptions définies. Comme on le verra par la suite, Whitehead et Russell ont traité l'argument dans ce sens, en considérant une version trouvée chez Jevons: «Because a horse is an animal, the head of a horse is the head of an animal.»² Par ailleurs, du fait de la présence de l'article défini «la» dans le prédicat «la tête d'un animal», la deuxième version n'est formellement pas valide, même si on peut considérer que l'usage d'une description définie n'est ici qu'un usage apparent, tributaire de l'exemple particulier traité, en l'occurrence celui des têtes des hommes.

On trouve enfin une troisième version de l'argument qui est, elle, formellement valide. Elle correspond à la formulation de l'argument que nous avons adoptée dans la langue française (De Morgan 1966: 216)³.

(3) Every man is an animal

Therefore, every head of a man is a head of an animal

La distinction faite entre ces trois versions, du point de vue de leur validité strictement formelle et à la faveur de la théorie des descriptions définies, n'est nullement significative dans le contexte d'analyse de De Morgan. Celui-ci passe par ailleurs d'une version à l'autre sans faire le moindre commentaire. Nous relèverons cependant que la question de la portée existentielle d'une proposition

² Cf. Jevons 1887: 18.

³ Dans «On the syllogism, IV», pp. 208-242, réédition des *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. X, 1860.

de la forme «le R de X est le R de Y» a été discutée par De Morgan dans son article *Logic*, publié en 1860⁴. Dans cet article, où il aborde le problème de la relation entre forme et contenu, De Morgan répond à une critique adressée deux ans plus tôt par son contemporain Mansel. Ce dernier lui reproche de faire place, en logique formelle, à des considérations matérielles. Selon lui, l'argument est une illustration de ce fait. Mansel considère un argument formellement équivalent à la première version de l'argument de 1847, c'est-à-dire de la forme X est Y donc le R de X est le R de Y, et dont le terme sujet de la conclusion, pour ne référer à aucune entité existante, est un terme vide. Cet argument est:

(4) A guinea-pig is an animal

Therefore, the tail of a guinea pig is the tail of an animal

Il se trouve en effet que les cochons guinéens n'ont pas de queue. C'est donc la raison pour laquelle Mansel juge l'argument non valide. Il écrit:

X is an animal, therefore the tail of X is the tail of an animal is a special inference gained from our material knowledge of the thing thought about, and not a general inference necessitated by the laws of thinking. (Mansel 1858, cité dans De Morgan 1966: 253)

De Morgan récuse la critique de Mansel en avançant la justification suivante: si le sujet de la conclusion ne dénote aucun objet, la conclusion ne peut pas être assertée. Par conséquent, elle n'est ni vraie ni fausse. N'étant ainsi porteuse d'aucune valeur de vérité, la question de la validité de l'argument dans laquelle elle apparaît n'a tout simplement pas à être posée. De Morgan écrit:

Is this consequence formal or material? Formal because this is true whatever a tail may be, so long as there *is* a tail; and it cannot be refused assertion except when X has no tail. A guinea-

4 Cf. De Morgan 1996: 247-270, réédition de *English Cyclopaedia* (Arts & Sciences, vol. V, 1860).

pig, for instance, puts this proposition out of the pale of assertion, and equally out of that of denial; the tail of a non-tailed animal is beyond us.

We answer (to Mansel) that thought the lack of tail in a guinea-pig is not a law of logic, but a material accident of the object, yet we know the *consequence* to be necessitated by the laws of thinking, because we must go to impossible matter, we must take the tail of X a non-existence, because we can refuse to assert it. (1966: 253)

La position de De Morgan repose donc implicitement sur une définition de la validité formelle d'un argument que l'on peut résumer ainsi: si la prémisse est vraie alors la conclusion est vraie, si et seulement si la conclusion possède une valeur de vérité. Peu importe dans le cadre de cette discussion que la proposition soit explicitement quantifiée ou non. Dans un cas comme dans l'autre, si le terme sujet est un terme vide, comme l'est le terme «queue d'un cochon guinéen», la proposition ne sera pas assertée.

1.2 Validation de l'argument par De Morgan

Nous allons ici tenter de répondre à deux questions. Comment De Morgan rendit-il compte de la validité de l'argument? Quel regard critique porter sur la procédure de validation qu'il propose?

En 1847, lorsqu'il expose pour la première fois son argument, De Morgan déclare à son sujet qu'il s'agit d'une inférence, mais pas d'un syllogisme. Il le caractérise comme suit:

There is another process which is often necessary, in the formation of the premisses of a syllogism, involving a transformation which is neither done by syllogism, not immediately reducible to it. It is the substitution, in a compound phrase, of the name of the genus for that of the species, when the use of the name is particular. (1847: 131-132)

La première chose à dire découle de la notion de substitution. En faisant appel à une opération de substitution «in a compound phrase», De Morgan insinue que l'argument est une enthymème, c'est-à-dire un argument incomplet dont l'une des prémisses est implicite. Bien que De Morgan n'énonce pas explicitement quelle est la proposition supplémentaire que requiert l'argument, son analyse laisse entendre qu'il s'agirait de la proposition tautologique «toute tête d'un homme est une tête d'un homme». Par conséquent, sous sa formulation complète, l'argument se présenterait ainsi:

Tout homme est un animal

Toute tête d'un homme est une tête d'un homme

Donc toute tête d'un homme est une tête d'un animal

Suivant la caractérisation donnée dans le passage cité ci-dessus, «animal», le nom du genre, est substitué à la seconde occurrence de «homme» (nom de l'espèce dont l'usage est particulier) dans la seconde prémisses. Quant à la prémisses originale «tout homme est un animal», elle a pour rôle de signifier que dans la paire «homme/animal», «homme» est le terme mineur et «animal» le terme majeur (De Morgan 1847: 166).

L'analyse substitutionnelle opérée ici repose sur le principe du *dictum de majore et minore*⁵, formulé par De Morgan lui-même pour rendre compte de la validité de certaines inférences échappant à la syllogistique traditionnelle. Sous ce principe, les inférences sont vues comme relevant de la substitution de nom du genre par celui de l'espèce et vice-versa, sous certaines conditions. Ce principe s'exprime ainsi:

5 Ce principe est discuté dans Merrill 1990 et Sanchez Valencia 1997.

For every term used universally *less* may be substituted, and for every term used particularly, *more*. The species may take the place of the genus, when all the genus is spoken of; the genus may take the place of the species when some of the species is mentioned, or the genus, used particularly, may take the place of the species used universally. *Not only in syllogisms, but in all the ramifications of the description of a complex terme.* (De Morgan 1847: 132)

C'est nous qui soulignons, dans le passage précité, afin de mettre l'accent sur l'enjeu de ce principe formulé en termes substitutionnels, celui de permettre d'opérer des substitutions sur des parties de termes complexes. La formulation prédicative ne peut répondre à un tel enjeu puisqu'elle n'est applicable qu'à des termes qui apparaissent comme sujet et prédicat des propositions catégoriques standard.

On distingue dans ce principe deux clauses, correspondant chacune à une règle de remplacement d'un terme par un autre. Nous les appelons D_1 et D_2 .

D_1 : pour chaque terme utilisé universellement, *moins* peut être substitué.

D_2 : pour chaque terme utilisé particulièrement, *plus* peut être substitué.

Moins et *plus* renvoient bien entendu à l'espèce et au genre. L'espèce est *moins* que le genre, le genre est *plus* que l'espèce. La première clause correspond à la version substitutionnelle du *dictum de omni et nullo*⁶.

La seconde clause est celle ajoutée par De Morgan dans le but de rendre compte de certaines inférences obliques. C'est donc elle qui caractérise le nouveau *dictum de majore et minore* et c'est elle que De Morgan invoque pour valider

⁶ «A little consideration suggests as a necessary rule of inference, the right to substitute a larger term used particularly for a smaller one, however used, and a smaller, used in either way, for a larger term used universally. [...] The second part of the rule is the *dictum de omni et nullo*; the first part has not, within my reading, been added to it: both might well be incorporated in one under the name of the *dictum de majore et minore*.» (De Morgan 1966: 28-29)

l'argument. Par conséquent, résumant ce qui précède, on peut donner à l'argument la forme déductive suivante:

1.	Tout homme est un animal	Prémisse
2.	Toute tête d'un homme est une tête d'un (homme)	Prémisse

3.	Toute tête d'un homme est une tête d'un (animal)	1, 2, D ₂

Nous n'avons fait, jusque là, que restituer la démarche d'analyse de De Morgan qui se réclame explicitement de la seconde clause caractérisant le *dictum de majore et minore*. Cela dit, il reste à évaluer la procédure de validation de l'argument produite sur la base de ce principe et à nous interroger sur l'utilité d'étendre le *dictum* traditionnel dans le sens de la clause D₂ pour valider l'argument⁷.

Une première question surgit. Sur la base de quel critère linguistique décide-t-on que la quantité de la seconde occurrence de «homme», dans la prémisse tautologique, est particulière? («It is the substitution, in a compound phrase, of the name of the genus for that of the species, when the use of the name is particular»). De Morgan formule son *dictum* en parlant de terme utilisé universellement ou particulièrement, mais il ne donne aucun critère permettant de déterminer quand l'occurrence d'un terme, dans un nom complexe, est utilisé d'une manière ou d'une autre. Dans le cadre de la syllogistique traditionnelle, il n'y a là aucune source de difficulté puisque, dans ce contexte, «particulièrement» et «universellement» sont clairement compris (du moins ne soulèvent-ils pas l'indétermination que nous rencontrons avec les termes complexes). Mais il n'en

⁷ Concernant la syllogistique traditionnelle, nous ne discuterons pas la question de l'utilité d'étendre le *dictum* traditionnel dans le sens où le fait De Morgan. Cette question déborde en effet le

est pas de même pour l'application des règles à des inférences obliques, ce pour quoi elles ont été formulées. Et en l'absence de tout commentaire de De Morgan au sujet de la nécessité de critères de reconnaissance de la quantité d'un terme, on ne peut que spéculer, face aux règles de remplacement du *dictum* invoquées pour rendre compte de la validité de l'argument.

Est-ce la quantité du terme complexe qui détermine celle du terme y apparaissant comme partie? A la lumière de l'analyse proposée par De Morgan et pour laquelle il invoque le nouveau *dictum*, on peut penser que la réponse à cette question est oui. Car, dans ce cas, les quantités des deux occurrences de «tête d'un homme» dans la prémisse tautologique déterminent celles de leur occurrence respective de «homme». Par conséquent, la première occurrence de «homme» est universelle tandis que la seconde est particulière, ce qui autorise à appliquer la clause D_2 .

Toutefois, si c'est bien sur un tel critère que De Morgan s'appuie, alors on remarque que la clause D_2 n'est pas nécessaire. On peut en effet valider l'argument en se contentant d'utiliser la clause D_1 , celle qui correspond à la formulation substitutionnelle du *dictum* traditionnel *de omni et nullo*. Pour ce faire, il suffit de prendre en lieu et place de la prémisse tautologique «toute tête d'un homme est une tête d'un homme» la proposition «toute tête d'un animal est une tête d'un animal». Puisque, suivant le critère supposé, la première occurrence de «animal» (nom du genre) est universelle, on est autorisé à lui substituer le terme «homme» (nom de l'espèce), conformément à la règle de remplacement D_1 . Dans ce cas, on a la déduction suivante:

cadre de notre étude. Nous soulignerons simplement que la clause D_2 est redondante. Elle autorise cependant à traiter de certaines inférences syllogistiques de manière plus rapide et «élégante».

1.	Tout homme est un animal	Prémisse
2.	Toute tête d'un (animal) est une tête d'un animal	Prémisse

3.	Toute tête d'un (homme) est une tête d'un animal	1, 2, D ₁

Ainsi, chacune des deux clauses D₁ et D₂ valide-t-elle l'argument. Force est donc de conclure que l'impact réel du *dictum de majore et minore* sur l'argument réside dans sa formulation en termes de substitution, et non pas dans l'ajout de la clause D₂.

Précédemment, nous avons supposé que le critère admis par De Morgan fait dépendre la quantité d'un terme apparaissant dans un terme complexe de celle de ce dernier. Mais on pourrait également supposer que De Morgan recourt implicitement à un autre critère linguistique et considère que la quantité d'un terme est particulière quand celui-ci est précédé de «un» (ou «quelques») et universel quand il est précédé de «tout» (ou «chaque»). Cependant ce critère se révèle inadéquat. Il convient en effet pour l'inférence suivante, non valide:

1.	Tout homme est un animal	Prémisse
2.	Toute tête d'un (homme) est une tête d'un homme	Prémisse

3.	Toute tête d'un (animal) est une tête d'un homme	1, 2, D ₂

Le critère ne différenciant pas les deux occurrences de «homme» dans la prémisse tautologique, «homme» peut y être substitué dans les deux cas. Par conséquent on est autorisé à générer cette inférence, non valide.

Que faut-il conclure des considérations qui précèdent? Que si l'enjeu du *dictum de majore et minore* est d'autoriser des substitutions dans les noms complexes, afin de valider certaines inférences échappant à la syllogistique traditionnelle telle son argument relationnel, De Morgan a échoué? Oui et non. On

répondra oui si l'on ne retient du principe que ses limites résultant de l'absence de critères de reconnaissance de la quantité d'un terme. Une telle position revient ainsi à faire valoir que sous la forme que lui donne De Morgan et sans directives linguistiques claires, le principe n'est pas directement applicable. Nous sommes contraints de nous appuyer sur nos intuitions logiques pour déterminer la validité d'un argument. Ce n'est que dans un deuxième temps que le *dictum* est invoqué pour décider si l'usage du terme substitué est particulier ou universel. Mais on répondra non à notre question si ce dernier jugement s'accompagne du rejet pur et simple des règles de remplacement comme intrinsèquement inadéquates. Car, bien que De Morgan n'ait pas reconnu la nécessité d'une procédure systématique de reconnaissance de la quantité d'un terme, cela ne signifie pas qu'une telle procédure n'existe pas. Nous pourrions à ce sujet présenter diverses théories qui offrent un cadre d'analyse approprié à fonder les règles de remplacement du *dictum* et à offrir une procédure de validation de l'argument. Nous ne le ferons pas, pour la simple raison que l'exposition de ces procédures, ne serait-ce que de manière très succincte, exigerait une présentation des théories dans lesquelles elles s'inscrivent. Or, vu les limites et l'orientation donnée à notre étude, nous ne pouvons concevoir de telles présentations. Par ailleurs, étant tributaires d'une sémantique de type ensembliste, elles n'ajouteraient pas d'éléments déterminants à notre propos sémantique, dans la mesure où le problème de la relation de partie à tout caractéristique de l'argument de De Morgan leur demeure totalement extérieur⁸. Nous concernant, notre propos se limitait à montrer comment De Morgan, tout en mettant en avant les limites de la syllogistique traditionnelle,

8 Cf. Sommers 1984 ou encore Sanchez Valencia 1995 et 1997.

avait tenté de rattacher l'argument à celle-ci en reformulant et généralisant le *dictum* traditionnel en termes substitutionnels.

2. L'argument et la logique standard moderne

Nous allons maintenant nous intéresser au traitement réservé à l'argument de De Morgan lorsque ce dernier est inséré dans le cadre déductif de la logique moderne standard. Nous aborderons la procédure de validation de l'argument successivement sous ses aspects syntaxique et sémantique. Dans un premier temps, nous nous pencherons sur la traduction de l'argument. Ensuite, après avoir démontré la validité formelle de l'argument, nous investiguerons la procédure sémantique correspondante, à travers le modèle ensembliste qui lui est associé. Cette investigation nous conduira à mettre au premier plan les contraintes et les limites représentatives inhérentes aux notions de base relatives à la théorie des ensembles que nécessite la sémantique du calcul des prédicats du premier ordre et dont la relation de partie à tout est, pour ainsi dire, la victime. Nous en viendrons alors à prendre position en faveur d'une sémantique de type méréologique pour rendre compte de la validité de l'argument de De Morgan.

2.1 Traduction et validité formelle de l'argument

Pour traduire l'argument, nous adopterons dans un premier temps un langage du premier ordre avec identité, et élargi aux symboles de fonction. Nous précisons rapidement la morphologie d'un tel langage avec la donnée de son vocabulaire et celle des règles de formation des formules, ou expressions bien formées.

2.1.1 Morphologie d'un langage du premier ordre

Le vocabulaire, ou ensemble de symboles primitifs, est composé d'un ensemble dénombrable de symboles qui se répartissent en symboles logiques et symboles non logiques. Les symboles logiques comprennent les symboles représentant les variables d'individus: x_1, x_2, \dots, x_n ; les symboles pour les connecteurs logiques: $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$; les symboles de quantification: \forall, \exists ; des signes de ponctuation et, dans un langage avec identité tel celui adopté, figure également le symbole de l'égalité, $=$. Quant aux symboles non logiques, ils comprennent des symboles de prédicats n-aires, pouvant être des propriétés ou des relations, des symboles de constantes d'individus et des symboles de fonctions n-aires.

Concernant les variables syntaxiques utilisées pour parler de ce langage, nous nous en tiendrons aux conventions suivantes: P pour un symbole de prédicat quelconque, f pour un symbole de fonction quelconque, t pour un terme quelconque (*cf. infra* la définition de l'ensemble des termes), A, B pour des formules quelconques (*cf. infra* la définition de l'ensemble des formules) et v pour une variable d'individu quelconque.

Une fois le vocabulaire spécifié, l'ensemble des formules est défini par induction, après qu'ait été préalablement défini l'ensemble des termes.

Définition de l'ensemble des termes:

- (a) Les variables et les constantes sont des termes.
- (b) Si f est un symbole de foncteur et t_1, \dots, t_n sont des termes, alors $f(t_1, \dots, t_n)$ est un terme.

(c) Seules les expressions définies par les clauses (a) ou (b) sont des termes.

Définition de l'ensemble des formules

(a) Si P est un symbole de prédicat à n -aire et $t_1 \dots t_n$ sont des termes, alors $P(t_1 \dots t_n)$ est une formule.

(b) Si t_1 et t_2 sont des termes, alors $t_1 = t_2$ est une formule.

(c) Si A et B sont des formules et v est une variable quelconque, alors $\neg A$, $(A \wedge B)$, $((\forall v) A)$ sont des formules.

(d) Seules les expressions définies par les clauses (a), (b) ou (c) sont des formules¹⁰.

Par convention, on supprimera les parenthèses extérieures.

2.1.2 Traduction de l'argument

Rappelons tout d'abord la formulation adoptée:

Tout homme est un animal.

Toute tête d'un homme est une tête d'un animal.

Si a et b sont des symboles de prédicats monadiques et r est un symbole de prédicat dyadique représentant respectivement les propriétés «être un homme», «être un animal» et la relation «être une tête de», l'argument se traduit comme suit:

9 Ce choix est arbitraire puisqu'il est possible de n'introduire que deux connecteurs primitifs et le seul symbole du quantificateur universel, les autres connecteurs usuels et le quantificateur existentiel pouvant être introduits par des définitions abrégées.

10 Cela suppose que seuls deux connecteurs primitifs, \neg et \wedge , et le quantificateur universel \forall , ont été introduits parmi les symboles primitifs.

[1] $(\exists x)(ax \supset bx)$

[2] $(\exists y)((\exists x)(ax \supset ryx) \supset (\exists x)(bx \supset ryx))$

[2] se lit donc: «Quel que soit y, s'il existe (au moins) un x qui est homme et que y est une tête de x, alors il existe (au moins) un x qui est animal et y est une tête de x»¹¹.

Quant à l'analyse logique débouchant sur cette traduction de la conclusion de l'argument, elle se déroule selon les étapes suivantes.

La proposition

[i] Toute tête d'un homme est une tête d'un animal

est de la forme

[ii] $(\forall y)(y \text{ est une tête d'un homme} \supset y \text{ est une tête d'un animal})$.

Il s'agit donc d'exhiber la forme logique des deux membres de la conditionnelle

[iii] y est une tête d'un homme

et

[iv] y est une tête d'un animal.

A ce stade de l'analyse interviennent des présuppositions d'existence. On considère en effet que les expressions «y est une tête d'un homme» et «y est une tête d'un animal» signifient respectivement qu'il existe un homme dont y est la (une) tête» et qu'il existe un animal dont y est la (une) tête». Par conséquent, à [iii] et [iv] sont associées les expressions symboliques:

¹¹ C'est cette traduction que l'on rencontre dans la littérature (Suppes 1957: 93 entre autres).

$$[v] (\ x)(ax \ \ ryx)$$

et

$$[vi] (\ x)(bx \ \ ryx)$$

En substituant [v]et [vi] dans la conditionnelle initiale [ii] on obtient:

$$[vii] (\ y) ((\ x)(ax \ \ ryx) \ (\ x)(bx \ \ ryx))$$

Avant d'émettre tout commentaire au sujet de cette traduction, nous lui adjoindrons une deuxième traduction faisant usage des symboles de fonction. Si nous avons adopté un langage avec symboles de fonction, c'est en effet pour pouvoir formuler côte à côte les deux traductions que l'on rencontre habituellement de l'argument de De Morgan dans les ouvrages de logique, selon que leurs auteurs considèrent un langage du premier ordre fonctionnel ou non.

La traduction fonctionnelle découle de l'unicité, suggérée par l'expérience, pour tout un chacun, de sa tête. L'analyse logique de la proposition «toute tête d'un homme est une tête d'un animal» reste fondamentalement la même, si ce n'est que le formalisme permet d'exprimer que tout homme ne possède qu'une et une seule tête.

« $(\ x)(ax \ \ ryx)$ » et « $(\ x)(bx \ \ ryx)$ » sont interprétés ainsi: «il existe x tel que x est un homme et y est la tête de x » et «il existe un x tel que x est un animal et y est la tête de x ». La relation « $rx y$ » est alors traitée comme une relation fonctionnelle, sur la première variable x , conformément à la définition suivante d'une relation fonctionnelle, où R représente une relation quelconque.

$$\text{Fonc } (R) = \text{df } (\ x)(\ y)(\ z)((Rxz \ \ Ryz) \ (\ x = y))$$

A partir de la relation binaire R , on peut donc définir une fonction f à un argument telle que:

$$(\forall x)(\forall y)(Rxy \rightarrow x = f(y))$$

Si, dans le contexte de l'argument de De Morgan, on utilise la lettre t pour représenter la relation «être la tête de» en termes de fonction «tête de», la conclusion se formalise comme suit:

$$[3] (\forall y)((\exists x)(ax \rightarrow y = t(x)) \rightarrow (\exists x)(bx \rightarrow y = t(x)))^{12}$$

Il est bien évident que la possibilité de la traduction fonctionnelle relève du caractère unique des têtes des hommes. Que l'on mette «bras de» ou tout simplement «partie de» à la place de «tête de», et il ne sera plus question de relation fonctionnelle puisque, si l'on se rapporte à la définition de $\text{fonc}(R)$, x et y peuvent être chacun en relation avec z sans que x soit y . En outre, il est possible d'expliciter formellement l'unicité de la tête sans faire usage de symboles de fonction. Pour ce faire, on adoptera la traduction:

$$[4] (\forall y)((\exists x)((ax \rightarrow ryx) \rightarrow (\exists z)(rzx \rightarrow y = z)) \rightarrow (\exists x)(bx \rightarrow ryx))$$

Le premier membre de la conditionnelle énonce bien le postulat de l'unicité de toute tête d'un homme.

Faisons observer que la traduction habituellement proposée de la conclusion de l'argument dans un simple calcul des prédicats est toujours la traduction [2].

Cela dit, et dans la droite lignée de ce qui précède, la formalisation logique de la conclusion, qu'elle soit prise dans sa version simplement prédicative ou sous la

12 C'est la traduction que propose par exemple Mendelson (1964: 45-46), qui adopte la formulation de l'argument: «All men are animals, hence the head of a man is the head of an animal.»

forme que nous avons appelé fonctionnelle, suscite un certain nombre de remarques. Nous condenserons celles-ci sur la traduction [2]:

$$(\forall y)((\exists x)(ax \rightarrow ryx) \rightarrow (\exists x)(bx \rightarrow ryx))$$

Nous restreindrons dès lors notre réflexion au cadre morphologique d'un simple calcul des prédicats du premier ordre avec identité.

Nos remarques sont guidées par des considérations d'ordre sémantique. Cependant, certaines d'entre elles, explicitement liées à la question de la nature partitive de la relation «tête de», prendront place plus loin, après qu'ait été examinée la réalisation sémantique de l'argument. Pour l'heure, nous restons sur l'axe syntaxique. Nous voulons *simplement constater*, dans un premier temps, le dépouillement opéré par le calcul des prédicats lors de sa réduction de l'activité rationnelle à la seule validité syntaxique.

Un premier commentaire touche à la présence, dans le champ du quantificateur universel, de deux quantificateurs existentiels, séparés par l'opérateur principal de la conditionnelle. Comme nous l'avons mis en évidence précédemment, la présence de ces deux quantificateurs existentiels découle des présupposés d'existence qui entrent en jeu lors de l'analyse des expressions «x est une tête d'un homme» et «x est une tête d'un animal». Aussi aboutit-on, pour la conclusion de l'argument, à une traduction qui n'explicite pas au niveau du symbolisme logique le présupposé que l'homme (s'il existe) et l'animal dont y est de chacun une tête sont le même individu. Si l'on veut insérer dans la traduction de la conclusion cette relation d'identité, il y a deux solutions.

La première consiste à modifier [2] en ce sens:

$$[5] (\forall y)((\exists x)((ax \rightarrow ryx) \rightarrow (\exists z)((bz \rightarrow ryz) \rightarrow x = z)))$$

La deuxième solution, quant à elle, nécessite d'abandonner les présupposés d'existence. Ce faisant, il est alors possible d'adopter la traduction suivante.

$$[6] (\exists x)(\exists y)((ax \rightarrow ryx) \wedge (bx \rightarrow ryx))$$

Dans ce cas, la quantification opérant un renvoi référentiel sur la variable x dans les deux membres de la conditionnelle, l'animal et l'homme dont y est la tête sont nécessairement le même individu. Mais nous verrons ci-après que si cette dernière formule garantit bien formellement l'unicité de l'animal et l'homme en question, elle est sujette à critique.

Comme nous l'avons déjà dit, la traduction rencontrée de l'argument de De Morgan dans les ouvrages de logique, ou d'un argument formellement équivalent, est toujours la traduction [2] (ou la traduction fonctionnelle [3]¹³). On n'y rencontre par ailleurs pas de commentaire visant à relever la différence entre [2] et [6], pas plus – profitons en pour le souligner au passage – que l'on n'y rencontre la moindre allusion à la nature partitive de la relation «tête de» et au fait que, du point de vue de son fonctionnement sémantique propre, cette relation ne pourra pas être mise à jour. Mais ceci sera la musique des pages à venir. Pour en revenir à la question des deux traductions [2] et [6], nous n'avons connaissance que d'un seul auteur, Wengert, qui dans un très court article intitulé *Schematizing De Morgan's Argument*, les confronte l'une l'autre¹⁴. Wengert soutient fermement que c'est [6], et non pas [2], qui est la traduction correcte de la conclusion de l'argument de De Morgan. La raison qu'il donne est précisément que la formule [2] laisse ouverte la possibilité que l'animal dont y est la tête ne soit pas le même

13 Comme nous venons de le souligner, la traduction fonctionnelle exige pour qu'il y ait équivalence l'unicité, donc $\text{Fonc}(r)$.

14 Cf: Wengert 1974. Cet article a suscité une réponse de Merrill «On De Morgan's Argument» 1974.

individu que l'homme dont y est aussi la tête. Par ailleurs, les formules [2] et [6] n'étant pas équivalentes – [6] implique [2] mais [2] n'implique pas [6] – c'est le choix de la formule la plus «forte» qui, selon Wengert, s'impose.

Pour préciser en quoi [2] se distingue de [6], Wengert s'appuie sur la structure d'interprétation suivante. Le domaine d'objets est l'ensemble des êtres humains et à a, b et r sont respectivement assignées les propriétés «être une femme», «être un homme», et la relation «être l'enfant de». Sous cette interprétation, [2] se lit: «Quiconque a une mère a un père» tandis que [6] se lit: «La mère de quiconque est son père.» Et si [6] est faux, c'est précisément parce que la femme dont y est l'enfant est également l'homme dont y est l'enfant. Wengert renforce également son argumentation en faveur de [6] en exhibant la proposition suivante, de laquelle [2] peut être dérivée, mais pas [6]:

$$[7] (\exists y)((\exists x)ryx \rightarrow ((\exists x)(ax \rightarrow ryx) \rightarrow (\exists x)(bx \rightarrow ryx)))$$

Sous l'interprétation de Wengert, [7] exprime que ce qui a un parent a à la fois un père et une mère, tandis que sous l'interprétation de De Morgan, [7] exprime que toute tête est à la fois la tête d'un homme et la tête d'un animal, ce qui est faux.

L'adoption de [2] comme traduction de la conclusion de l'argument de De Morgan, nous l'avons vu, s'explique aisément à la lumière des présupposés d'existence entrant en jeu dans l'analyse logique de la proposition. Wengert ne dit rien par ailleurs au sujet de ces présupposés et ne suggère pas, comme nous l'avons fait auparavant, de modifier [2] dans le sens de [3]. Mais l'explication du silence général des logiciens à l'égard de la relation d'identité reconnue dans le contexte de l'argument entre deux individus dont le même objet est une tête, doit être cherché ailleurs que dans les présupposés d'existence. En effet, la traduction

[2] apparaît toujours dans le contexte de l'argument, c'est-à-dire en tant que conséquence de la prémisse «Tout homme est un animal», et non pas en tant que traduction de la proposition «toute tête d'un homme est une tête d'un animal» considérée isolément, hors du contexte déductif. Or dans de telles conditions, non seulement il n'y a aucune différence entre [2] et [6] en termes de valeurs de vérité mais, de plus, l'homme et l'animal en question sont nécessairement le même individu.

Toutefois, il y a une objection à l'admission de la formule [6] comme traduction de l'argument. Cette formule s'accompagne en effet d'une trivialisatation de l'argument. Pour s'en convaincre, il suffit de constater que la formule [6] est équivalente à la formule

$$[8] (\exists x)((\exists y)ryx \rightarrow (\forall x) \neg bx).$$

On lit cette dernière formule: «Pour tout x, s'il existe (au moins) une tête de x, alors x ne peut pas être un homme sans être un animal.» Force est d'admettre, avec la mise à jour de cette équivalence, que la démarche syntaxique révèle la pauvreté de son expressivité logique, relativement à la relation en cause dans l'argument. En effet, que montre-t-on? Que de la prémisse «tout homme est un animal», soit $(\forall x)(ax \rightarrow bx)$, on peut conclure que s'il existe (au moins) un objet qui est en relation avec un autre objet, alors ce dernier ne peut pas être un homme sans être un animal.

Face à la dimension triviale de la formule [8], on conclura donc que la formule [6] proposée par Wengert ne peut pas être retenue comme alternative à la formule [2]. Et à choisir, on optera donc finalement pour cette dernière.

Concluons ce point en revenant rapidement à De Morgan lui-même. On peut en effet se demander si l'une des deux traductions [2] et [6] reflète plus adéquatement que l'autre l'interprétation que De Morgan avait à l'esprit en proposant l'argument à titre d'inférence échappant à la syllogistique traditionnelle. Si l'on tient compte du cadre d'analyse logique dans lequel s'inscrit l'argument, on doit conclure que De Morgan ne pouvait en aucune manière concevoir l'interprétation correspondant à la formulation [6]. Comme nous l'avons signalé dans la section précédente, l'argument est analysé de manière conservatrice, dans la droite lignée de la doctrine traditionnelle des propositions catégoriques. Et, en faisant appel aux règles de substitution du *dictum de majore et minore* pour rendre compte de la validité de l'argument, l'intention de De Morgan se limite à montrer que le prédicat «être une tête d'un animal» s'applique à tout objet pour lequel s'applique le prédicat «être une tête d'un homme». Or une telle approche ne requiert pas de passer au crible de l'analyse et de la reconstruction formelle le *présupposé* que l'animal et l'homme dont l'objet en question est la tête sont le même individu, ce pour quoi, par ailleurs, elle ne dispose pas des outils formels nécessaires.

2.1.3 Validité formelle de l'argument

L'argument ainsi traduit dans le symbolisme du calcul des prédicats du premier ordre, montrons qu'il est formellement valide, c'est-à-dire que [2] est une conséquence syntaxique de la proposition $(\forall x)(ax \supset bx)$. Rappelons qu'un énoncé E est une conséquence syntaxique d'un ensemble d'énoncés Γ , si E peut être dérivé via les règles et les axiomes du calcul du premier ordre. On écrit $\Gamma \vdash E$.

Il s'agit donc de démontrer que:

$$(\forall x)(ax \supset bx) \supset (\forall y)((\forall x)(ax \supset ryx) \supset (\forall x)(bx \supset ryx)).$$

Pour ce faire et pour des raisons de commodité, nous n'utiliserons pas la méthode axiomatique de preuve mais une méthode de déduction naturelle. Les règles sont données en annexe.

La démonstration est la suivante:

1.	$(\forall x)(ax \supset bx)$		prémisse
2.	$y \cdot (\forall x)(ax \supset ryx)$		hypothèse
3.	$x \mid ax \supset ryx$		hypothèse
4.	ax		3, e
5.	$(\forall x)(ax \supset bx)$		1, réit
6.	$ax \supset bx$		5, e
7.	bx		4, 6, e
8.	ryx		3, e
9.	$bx \supset ryx$		7, 8, i
10.	$(\forall x)(bx \supset ryx)$		9, i
11.	$(\forall x)(bx \supset ryx)$		2, 3-10, e
12.	$(\forall x)(ax \supset ryx) \supset (\forall x)(bx \supset ryx)$		2-11, i
13.	$(\forall y)((\forall x)(ax \supset ryx) \supset (\forall x)(bx \supset ryx))$		2-12, i

Cette démonstration n'appelant pas à notre avis de commentaire particulier, nous abordons maintenant la question de la réalisation sémantique qui lui est associée, dans le processus interprétatif propre au contexte de l'argument de De Morgan.

2.2 Réalisation sémantique de l'argument

Nous ne nous attarderons pas sur le problème, techniquement simple, consistant à doter un langage du premier ordre de sa caractérisation sémantique. Nous ferons donc l'économie d'une présentation détaillée des notions de structure d'interprétation, de formule vraie dans une interprétation, de formule valide, de modèle et de conséquence sémantique. Nous rappellerons simplement, concernant cette dernière notion de conséquence sémantique, les deux résultats attestant de la fécondité de l'union syntaxe et sémantique dans les théories des modèles du premier ordre, à travers la correspondance parfaite établie de l'une à l'autre. Le premier est le théorème de fiabilité: si un énoncé E est une conséquence syntaxique d'un ensemble d'énoncés Γ , alors E est une conséquence sémantique de Γ , schématiquement si $\Gamma \vdash E$ alors $\Gamma \models E$. Le second est le théorème de complétude forte de Gödel: si $\Gamma \models E$ alors $\Gamma \vdash E$.

Revenons à l'argument dont nous venons de démontrer la validité formelle. D'un point de vue sémantique, cela signifie que la forme opératoire objectivée sous laquelle il tombe est celle d'une inférence valide pour toutes les interprétations dans tous les univers possibles, constitués d'éléments absolument quelconques qui peuvent être aussi bien des hommes, des pendules, des têtes, des nombres ou encore des ensembles¹⁵. A strictement parler, étant donné que nous considérons un argument, et non pas le théorème correspondant, la conclusion sera vraie dans toutes les structures d'interprétation dans lesquelles la prémisse

¹⁵ La notion de validité comme de vérité pour toutes les interprétations dans des univers non vides» ou «dans l'univers des entiers naturels» remonte à Hilbert et Ackerman, dans *Grundzüge der theoretischen Logik*, 1928.

est valide. Mais cette nuance n'affectera en rien la réflexion critique que nous allons mener.

Avant d'instruire cette réflexion critique, investiguons le modèle ensembliste que l'on peut fournir de l'argument, en d'autres mots sa réalisation concrète. L'utilisation de la notion de concrétude est bien entendu à entendre au sens qui est le sien dans la perspective sémantique propre à la théorie des modèles. Le trait de concrétude est illustré d'une part par le fait que les symboles logiques y ont leur sens attendu et ne désignent pas uniquement des opérations formelles sur des objets quelconques et, d'autre part, par le fait que les symboles de prédicats se voient interprétés par de véritables propriétés et relations sur un univers d'objets fixé.

Considérons donc la structure d'interprétation, ou le modèle M , c'est-à-dire le domaine d'objets D muni des propriétés et relations définies sur lui par l'assignation prédicative. Celle-ci associe à chaque symbole de prédicat à n -places P^n une propriété ou une relation n -aire, $(P^n)^M$ sur D , c'est-à-dire un ensemble de n -uplets d'éléments de D tels que $(P^n)^M \subseteq D^n$. Ainsi, relativement à la traduction formelle considérée, à a et b sont assignées les propriétés «être un homme» et «être un animal» auxquelles correspondent en extension l'ensemble composé des hommes et celui composé des animaux. Si on utilise les lettres H et A pour représenter ces deux ensembles, ceux-ci se définissent ainsi:

$$H = \text{df } \{x \mid ax\} \text{ et } A = \text{df } \{x \mid bx\}; H \subseteq D \text{ et } A \subseteq D.$$

Au symbole de prédicat binaire r est assignée la relation «être une tête de». Cette relation se définit en extension par l'ensemble des couples vérifiant la relation, c'est-à-dire l'ensemble des paires d'individus dont le premier est une tête du se-

cond. Si on représente cet ensemble par la lettre E, on a, avec ryx pour «y est tête de x»:

$$E = \text{df } \{(y,x) \mid ryx\}; E \subseteq D \times D.$$

Spécifions encore le domaine et le co-domaine de la relation r:

$$\text{Dom}(r) = \text{df } \{y \mid (\exists x)ryx\}; \text{Dom}(r) \subseteq D, \text{ c'est-à-dire les têtes } \subseteq D.$$

$$\text{Co-Dom}(r) = \text{df } \{x \mid (\exists y)ryx\}; \text{Co-Dom}(r) \subseteq D, \text{ c'est-à-dire les objets qui ont une tête } \subseteq D.$$

Quant à l'univers de discours D, domaine fixé pour l'application en vue et qui contient tous les objets que nous avons à considérer dans cette application, il doit nécessairement être pensé comme consistant en l'ensemble des têtes et des animaux (pour autant, bien entendu, que l'on vise une concrétisation de l'argument).

Ici, une première remarque s'impose. Triviale dans le cadre de la sémantique extensionnelle représentée par la théorie des ensembles, elle est tout à fait fondamentale pour la réflexion que nous menons dans cette thèse puisque les limites, par rapport à une problématique de type méréologique, en sont les conséquences immédiates. A la faveur d'une définition de l'ensemble comme une collection d'objets dont on dit qu'ils sont les éléments fondamentaux de l'ensemble, la réalité ou complexité ingrédientielle des objets référentiels échappe à la constitution des éléments de l'univers de discours. Ainsi, si les têtes doivent être comptées parmi les éléments de D, ce sont des entités individuelles, au même titre que les animaux.

En termes ensemblistes, la relation logique sous-jacente aux propositions «tout homme est un animal» et «toute tête d'un homme est une tête d'animal» étant une relation d'inclusion entre classes, on exprime l'argument de la manière suivante:

La classe des hommes est incluse dans la classe des animaux

La classe des têtes des hommes est incluse dans la classe des têtes des animaux.

L'écriture symbolique correspondant à $(\forall x)(ax \supset ryx)$ a valeur de prédicat unaire. Elle permet d'engendrer une classe, c'est-à-dire la classe des y tels que y est une tête d'un homme, soit la classe des têtes des hommes. De même pour $(\forall x)(bx \supset ryx)$ qui permet de générer la classe des têtes des animaux. En extension, ces deux classes se définissent ainsi:

La classe des têtes des hommes = df $\{y / (\forall x)(x \in H \supset ryx)\}$

La classe des têtes des animaux = df $\{y / (\forall x)(x \in A \supset ryx)\}$

On peut ici faire usage des conventions de notation. On écrira alors r^H et r^A pour chacune des classes définies, conformément à la définition suivante des R de β , où le symbole α représente une classe et R une relation binaire quelconque:

$R^\alpha = \text{df } \{x / (\exists y)(y \in \alpha \wedge Rxy)\}$

Les R de β sont les individus qui sont dans la relation R avec au moins un élément de la classe α , autrement dit les R des membres de α .

Dans le symbolisme ensembliste, cela nous donne donc:

$$\frac{H \quad A}{r''H \quad r''A}$$

Remarquons que la définition des R de β n'exige pas de savoir si, pour un y donné, il existe un ou plusieurs x tels que Rxy . Toutefois, dans le contexte interprétatif qu'est celui de De Morgan, la structuration du champ de la relation «tête de», conformément à notre connaissance du monde des humains, permet de restreindre les têtes mises en relation avec un individu homme à une seule tête. On a en effet:

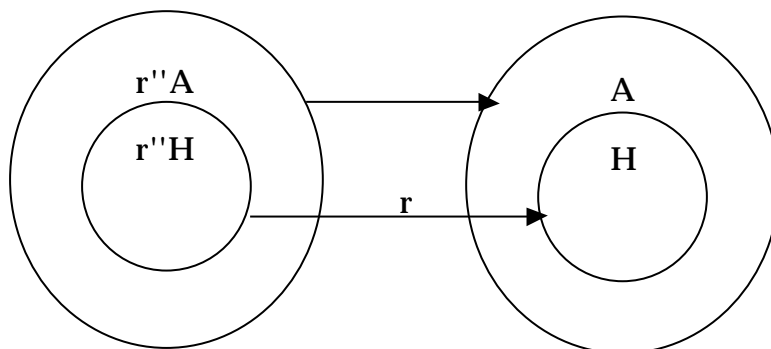
$$(\ x)(\ y)(\ z)((z \ A \ \text{rxz} \ \text{ryz}) \ (x = y)).$$

C'est de cette unicité dont vise à rendre compte la traduction fonctionnelle [3].

De plus, une même tête ne peut pas appartenir à deux individus distincts. On a donc:

$$(\ x)(\ y)(\ z)((y \ A \ z \ A \ \text{rxy} \ \text{rxz}) \ (y = z)).$$

La manipulation ensembliste de l'argument permet donc d'instaurer une correspondance bi-univoque, terme à terme, entre la classe des têtes des hommes et celles des hommes. Schématiquement, on peut représenter le modèle ensembliste ainsi:



2.3 Bilan critique

L'argument est donc validé sans difficulté apparente dans le cadre structurel d'analyse de la logique des prédicats du premier ordre. Cependant, à la lumière de la nature spécifique de la relation de partie à tout qu'il mobilise, on ne peut éviter une question. Dans quelle mesure la procédure de validation que nous venons d'examiner peut-elle prétendre en refléter adéquatement le mécanisme inférentiel sous-jacent? Ou, en termes plus précis, accède-t-on à un éclairage sémantique pleinement satisfaisant de l'argument avec le modèle qui en est donné, *compte tenu de la réalité qu'il est supposé décrire*? Face à cette question, deux attitudes sont possibles. La première est celle dictée par le cadre formel du calcul des prédicats du premier ordre. Déduire, c'est y inférer en conformité avec les normes du calcul, de telle manière que toute inférence conduite selon ces normes est valide. Par conséquent, l'argument étant collecté de par sa forme logique parmi les inférences valides, la légitimité de sa validité n'appelle pas d'autre justification. Dans cette perspective purement syntaxique, la démarche formelle reproduit bien la structure de la démarche déductive, telle qu'elle se manifeste dans le contexte linguistique de l'argument. Pour reprendre les propos de Blanché, «la justesse d'une inférence ou si l'on veut, la correction du raisonnement par lequel on fait cette inférence [...] est indifférente au contenu, et se fonde uniquement sur la forme» (1973: 17). Ainsi l'argument de De Morgan est valide au même titre que n'importe quel argument à la forme analogue comme, par exemple:

Tout homme est un animal

Toute maison d'un homme est une maison d'un animal.

Les deux démarches étant «syntaxiquement équivalentes», elles partagent donc la même formulation logique. Quant à leur réalisation sémantique respective, c'est l'image du symbolisme, c'est-à-dire le domaine d'objets muni d'une certaine configuration relationnelle extensionnelle et venant exemplifier, en la satisfaisant, la forme logico-linguistique. La réalisation concrète est l'incarnation d'une structure abstraite dont les contenus formels sont liés à l'extension des prédicats et à l'individuation des objets. En d'autres mots le jeu combiné entre la représentation syntaxique et la représentation sémantique, celui d'une validité investie dans la preuve et celle investie dans les contenus, est un pur reflet, une analogie formelle. Si l'on revient à nos deux inférences, elles se voient donc attribuer une procédure de validation similaire, à l'adaptation près de la construction de leur modèle, compte tenu des objets peuplant leur univers d'interprétation respectif et de la relation qu'elles mettent en œuvre. Il serait donc vain de penser que la démarche sémantique puisse capturer l'organisation méréologique des têtes et de leurs porteurs, conformément à la représentation intuitive que nous avons en tête – ce n'est pas un jeu de mots – lorsque nous parlons de têtes d'hommes. Nous l'avons déjà souligné, la rationalité mise en scène par le processus interprétatif est celle des opérations linguistiques et elle demeure étrangère, dans son mode de représentation, à toute présupposition concernant les objets référentiels. Tout au plus peut-on reconnaître certaines propriétés logiques à la relation «tête de» qui se matérialisent par une correspondance bi-univoque entre la classe des têtes des hommes et celle des hommes. Mais il va de soi que si l'argument parle bien de têtes d'hommes, le modèle ne représente pas les têtes *en tant que telles*, c'est-à-dire comme des parties constitutives de ces hommes. Un homme, tel qu'il

est modélisé en tant qu'objet logique, est une entité individuelle, rien d'autre et rien de plus. Il en est de même pour les têtes.

A insister sur ce point – dont l'évidence s'impose dans le cadre d'une sémantique purement extensionnelle – nous visons simplement à éviter toute confusion de lecture du modèle ensembliste. On pourrait en effet observer que la modélisation de la tête des hommes suppose que l'on «sépare» les têtes des hommes et que l'on procède, d'une certaine façon, à un clonage de ces têtes. Il serait alors aisé de pointer une difficulté, qui serait celle d'une forme de représentation intrinsèquement fautive. Pour chaque homme, on aurait deux têtes, celle qui aurait été «clonée» et mise en relation avec cet homme *via* la relation «être la tête de» et celle que ce dernier, en tant qu'entité complexe, possède constitutivement. Mais une telle lecture est dévoyée par notre propension naturelle à voir, là où nous parlons d'une tête d'un homme, la tête *réelle* de l'homme. Ce faisant on introduit dans le modèle, qui n'est pas à même de la reconnaître, la signification de la relation de partie à tout par laquelle les individus sont interprétés, au delà de leur statut d'entités individuelles, comme des tous méréologiques.

Ce que nous retiendrons donc est que s'il nous est certes difficile d'imaginer ce que peut être une tête d'un homme indépendamment de cet homme – même au pied de la guillotine – il n'y a, dans ce cadre formel, aucune source de difficulté. Que les conséquences sémantiques, si l'on s'interroge sur la valeur descriptive du modèle, en soient malheureuses, est un autre problème qui sera le nœud de notre réflexion critique à venir. Mais pour le moment, où nous nous tenons à l'intérieur de l'édifice extensionnel, on doit considérer qu'il n'est pas possible de disqualifier ce dernier en l'attaquant du dehors et en lui reprochant de se compromettre avec une reconstruction ensembliste de l'univers de discours. Aussi

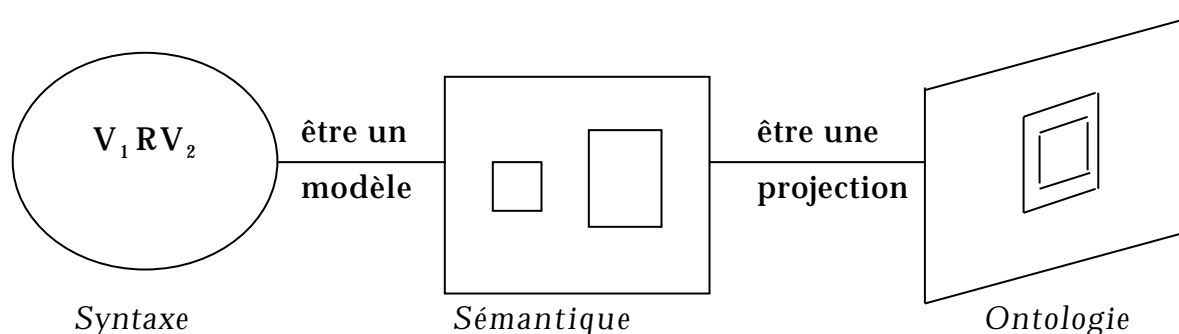
conclura-t-on que, *d'un point de vue purement formel*, le cadre déductif de la logique standard, avec ses caractérisations précises, tant syntaxiques que sémantiques, peut se prétendre hors de portée de toute critique quant à son traitement de l'argument. Dans ce sens formel ce traitement, qui condamne à modéliser les têtes indépendamment des individus qui en sont les porteurs, ne marque en rien une défaillance du système logique. Comme nous y reviendrons, c'est de la seule procédure formelle qu'il signale certaines limites. Par conséquent, à l'objection qui ferait remarquer que la logique des prédicats du premier ordre échoue à pénétrer le ressort logique de l'argument sous l'angle de son aspect méréologique, on répondrait que l'on ne peut pas lui demander ce qui n'est ni dans son pouvoir, ni surtout dans ses objectifs, de réaliser.

Telle est donc, en bref, la première réponse possible à notre question de départ. Mais la question n'est pas réglée pour autant de manière satisfaisante. Loin s'en faut. Et le moment est venu de passer à la seconde réponse possible. L'attitude sera cette fois celle d'une position critique radicale. En effet, si l'on ouvre les yeux sur la relation de partie à tout et que l'on porte franchement sur le terrain d'observation la question de la valeur représentative de la procédure, compte tenu de la réalité sous-jacente au contexte linguistique de l'argument de De Morgan, le cadre d'analyse standard est immédiatement restitué à ses limites. Il est facile de comprendre que d'un tel point de vue, extérieur à la théorie des modèles proprement dite, les précédents éléments d'argumentation positive se retournent en ceux d'une argumentation négative.

Reprenons donc ces arguments, mais cette fois à la faveur de la mise au premier plan de la relation de partie à tout. En premier lieu, confrontons de nouveau l'argument de De Morgan avec l'argument portant sur les maisons des

hommes. Précédemment nous en sommes restés à leur similitude syntaxique. Mais si la préposition «de» assume bien dans les deux cas la même fonction syntaxique, ce qui nous préoccupe maintenant est la différence essentielle entre les entités mises en relation: x est une tête de y est l'expression d'une relation entre deux termes dont l'un dénote un tout et l'autre une partie de ce tout¹⁶.

Dans le but de donner quelque assise visuelle et concrète à notre propos – cette fois au sens naïf – abordons les choses avec un diagramme. Celui-ci confronte les niveaux syntaxique, sémantique (au sens ensembliste) et celui d'une ontologie ordinaire où la tête d'un homme est conçue comme un ingrédient du tout qu'est l'homme. Entre ces niveaux, nous considérons deux relations: d'une part la relation «être un modèle», par laquelle est établie une correspondance l'une à l'autre de la syntaxe et de la sémantique; et d'autre part la relation «être une projection de» qui se place entre le niveau sémantique et le niveau ontologique. C'est cette dernière relation qui est en cause avec l'argument de De Morgan puisque, ce qui est pris en défaut, c'est bien la capacité du modèle ensembliste à se présenter comme un reflet, une projection fidèle des objets concrets peuplant l'univers de discours et de leur organisation partitive.



¹⁶ Il n'entre pas dans notre propos de rendre compte des différentes valeurs sémantiques pouvant prendre place sous la préposition «de».

Au niveau syntaxique, les symboles V_1 et V_2 représentent les deux termes individuels nécessités par une relation binaire R . Les deux carrés se trouvant dans le cadre sémantique représentent les deux objets modélisés entrant dans cette relation. Ainsi, comme nous l'avons dit, la même procédure capture et modélise les deux organisations relationnelles du réel associées à chacun des deux arguments que nous confrontons. Tant l'organisation relationnelle correspondant à une maison d'un homme que celle correspondant à une tête d'un homme se trouvent incarnées par cette structure abstraite, puisque celle-ci est restreinte à la reconnaissance d'une corrélation purement extensionnelle entre des entités individuelles et discrètes. Se trouvent donc nivelées, de par la force contraignante du cadre syntaxique, deux organisations du réel distinctes. Or si l'on reconnaît à la logique la tâche de refléter quelque chose du réel, force est d'admettre que l'échafaudage logique fournit une réalisation sémantique dont un langage voué au calcul s'accommode peut-être mais qui ne retient pas, de la réalité sous-jacente à l'argument de De Morgan, les traits jugés pertinents. Ces traits sont précisément ceux que visent à représenter le troisième schéma schématisant le niveau de l'ontologie ordinaire où un homme est appréhendé comme un continuum spatio-temporel dont la tête est une partie, au sens ingrédiel du terme.

En ce sens il est difficile de se satisfaire du découpage ensembliste du réel, avec lequel le référent qu'est la tête d'un homme se trouve modélisé indépendamment de l'homme en question. Car ce qui fonde en la singularité, *au-delà de son mode d'appréhension structurel par le langage*, est cruciallement rapporté à sa relation d'ingrédience avec cet homme. Et changer une tête pour une autre ayant une origine différente, même si elle a la même qualification (c'est une tête) serait une entorse à l'identité de l'objet en question.

Aussi conclura-t-on cette fois que si la démarche formelle reproduit la démarche opératoire de l'activité rationnelle, elle ne signifie pas comme elle, ne représentant pas de manière adéquate le matériel intuitif. A parler sans détour, si l'on n'isole pas ce que nous venons à l'instant de qualifier de matériel intuitif de l'intention signifiante qui le porte, c'est-à-dire la représentation véhiculée par la pensée intuitive au niveau le plus humble du langage, c'est la stérilité du modèle ensembliste face à la dimension méréologique de l'argument qui le condamne. Stérilité dans la mesure où la relation «être une tête de» est vidée de tout contenu et où les têtes ne possèdent plus comme seule dignité ontologique que celle, résiduelle, d'indice d'une objectivation et d'une individuation purement extensionnelle.

Nous ne disons certes rien de plus, avec ce simple dessin et les commentaires qui l'accompagnent, que ce que nous laissons entendre précédemment entre les lignes, en restreignant notre réflexion aux limites inhérentes au cadre formel. Mais pour le moins a-t-il le mérite de donner corps à notre problème sémantique et de préciser l'attente légitime qu'induit l'argument de De Morgan, celle d'une caractérisation sémantique de type méréologique des objets qu'il met en scène. De plus ce schéma permet également d'éclairer pourquoi, au cours de l'examen de la traduction standard de l'argument, nous avons mis en avant la pauvreté expressive et l'obscur parenté que cette traduction se limitait à établir entre la forme syntaxique et les significations convoquées avec une proposition telle que «toute tête d'un homme est une tête d'un animal». Souvenons-nous par exemple de la question de la clause d'identité. Lorsque notre raisonnement met en œuvre la relation «tête de», c'est bien une intuition directe insufflée par notre connaissance du monde des humains qui nous incite à attendre une clause

d'identité, dans la mesure où une même tête ne saurait appartenir à deux individus à la fois.

Il ne s'agit évidemment pas, à travers cette réflexion critique, de débouter le calcul des prédicats ni sa dépendance à l'égard de la théorie des ensembles, même si la solution méréologique que nous entendons défendre s'accompagne de changements radicaux de ses conceptions de base, tant syntaxiques que sémantiques. Mais pour l'heure, le problème n'est pas là. Le problème, comme nous l'avons largement exprimé, est celui de l'adéquation entre les résultats de validation obtenus et les propriétés sémantiques «réelles» des «êtres» capturés par le symbolisme. Et s'il s'agit d'ouvrir à ce stade de notre réflexion un procès, c'est dans une large mesure à la logique pure, ou purement formelle. Le problème que pose en effet l'argument de De Morgan est celui des limites immanentes au domaine du logique, du formel en tant que tel, cristallisant la notion d'«objet quelconque sans aucune détermination préalable»¹⁷. Car à ne rien préjuger du réel, c'est écarter *a priori* du champ de la logicité la possibilité de construire des représentations du réel conformes à celle que véhicule l'argument de De Morgan.

Le choix auquel nous confronte l'argument de De Morgan est au fond le suivant. Ou on maintient la voie syntaxique dans son statut de paradigme de l'activité rationnelle, à la manière de la logique standard moderne. La logique étant ainsi garante de l'indépendance à l'égard de tout savoir empirique, on se satisfera de la représentation ensembliste de l'argument. Ou, sortant de la tour d'ivoire de la logique formelle, on revendique une primauté de droit pour une sémantique de la relation de partie à tout. Ce faisant, on choisit donc la voie d'un langage logique appliqué, fruit d'une certaine interprétation du réel.

La dynamique est donc inversée. Ce ne sont plus les modèles qui viennent exemplifier la structure abstraite qu'est une théorie formelle, mais c'est le modèle qui doit donner une image intelligible d'une réalité investiguée sous un certain point de vue. Quant à la construction linguistique enrégimentant cette interprétation et contenant, de fait, des constantes extra logiques ou descriptives, elle se présente comme une théorie empirique «intuitive» formalisée. Dès lors, la légitimité de cette théorie n'appellera pas d'autre justification que celle de permettre de décrire, ou représenter, la structure d'un domaine d'objets sous l'angle attendu, en l'occurrence celui de leur complexité ingrédentielle.

Avant de conclure ce bilan critique, nous nous arrêterons quelques instants sur la notion d'objet quelconque que nous avons évoquée ci-dessus, telle qu'on la trouve sous la plume de Gonsseth dans le chapitre «Physique de l'objet quelconque» de son ouvrage *Qu'est-ce que la logique?* La référence peut paraître surannée, tant il y a longtemps que la théorie des modèles a stigmatisée une telle notion au travers de son concept central de «formule valide». Mais il n'en demeure pas moins que le texte de Gonsseth est tout à fait exemplaire de la position prise par la logique moderne quant à la notion de «réel» ou plus exactement, quant à la notion d'«objet». C'est bien en outre de cette position, dont on ne dira jamais assez tout ce qu'elle doit aux mathématiques pour avoir pareillement fructifiée, que dépendait le succès de l'entreprise de formalisation. Gonsseth présente en ces termes l'objet quelconque.

Le terme de notre abstraction par axiomatisation, c'est donc l'idée de *l'objet quelconque* sans aucune détermination préalable, et qui n'est susceptible que des trois attributs de l'être ou du non être purs, et de l'identité existentielle avec soi-même (sans préjudice des "relations exis-

tentielles” dans lesquelles il pourrait entrer avec d’autres objets du même genre). Cette idée éminemment abstraite de l’objet pourrait être appelée simplement l’*objet abstrait* ou l’*objet logique*. (1937: 71)

Plus loin, visant à expliciter les axiomes dans lesquels interviennent deux objets, Gonseth considère deux objets sans aucun lien apparent, soient deux livres sur deux rayons d’une bibliothèque. Il écrit:

Ne nous laissons pas arrêter par la pensée certainement juste qu’une possession plus complète et plus détaillée du réel et de ses multiples aspects finirait par révéler quelque lien existant entre eux. *Une action quelque peu robuste peu fort bien n’en pas tenir compte*. Nos deux livres peuvent être, en fait, présents ou absents indépendamment l’un de l’autre. Le concept abstrait adéquat à cette vue schématique est celui de deux “formes d’objets” indépendantes l’une de l’autre; c’est-à-dire de deux formes qui admettent sans préférence ni distinction les quatre éventualités suivantes:

- a) A est, et B est également: en symbole \underline{A} et \underline{B} ;
- b) A est, mais B n’est pas: en symbole \underline{A} et \bar{B} ;
- c) B est mais A n’est pas: en symbole \bar{A} et \underline{B} ;
- d) A ni B ne sont: \bar{A} et \bar{B} .¹⁸ (1937: 73-74)

C’est nous qui soulignons «une action quelque peu robuste peu fort bien n’en pas tenir compte». Car enfin, si nous revenons à nos têtes et que nous laissions précisément nos intuitions matérielles concernant une *certaine nature* des objets en gouverner leur représentation, on imagine difficilement qu’une tête d’un homme et ce même homme puissent «être présents ou absents indépendamment l’un de l’autre» ni que l’on puisse envisager de les manipuler indépendamment l’un de l’autre. Si, comme l’écrit Gonseth, «le modèle concret d’une “forme

18 Le symbole A correspond à la «forme abstraite» de l’objet, qui peut être remplie par un objet existant ou qui peut rester vide; le symbole \underline{A} à l’objet existant. (Gonseth 1937: 73)

abstraite” peut être aperçu dans tout objet qui peut, à volonté, être amené dans le champ de l’attention ou en être éloigné», on peut concéder que, amenant la tête d’un homme dans ce champ, on amène aussi l’homme ou que, pour le moins, l’objet se détache d’un fond matériel reconnu être un homme, auquel il demeure inextricablement lié. Que l’on ne se méprenne pas sur l’utilisation que nous faisons ici de la réflexion de Gonsseth et qui pourrait passer pour une ignorance délibérée des raisons essentielles qui ressortissent à la réflexion logico-mathématique. Ce que nous constatons en toute simplicité, c’est le prix direct à payer pour la relation de partie à tout par «cette action quelque peu robuste».

Gonsseth conclut sa «Physique de l’objet quelconque» en écrivant que «les règles intuitives de la logique et du bon sens ne sont, pour une part, que l’aboutissement d’une schématisation à partir du monde des objets concrets»¹⁹. Or c’est bien, en ce qui nous concerne, cette autre part que nous voulons atteindre en desserrant les contraintes autour de la notion d’objet de telle manière qu’au delà de son unité distributive, corollaire de son mode d’accessibilité par le langage, l’objet puisse être appréhendé *en tant que tel*, comme l’unité collective des parties ou ingrédients qui le constituent. De là dépend la possibilité d’investiguer la validité de l’argument de De Morgan sous l’angle des rapports sémantiques de type méréologique de ses objets référentiels.

C’est dans le cadre de la Méréologie de Lesniewski, dite aussi théorie des classes collectives, que nous testerons cette validité. A la lumière d’un réexamen de la notion de multiplicité, la classe n’y est plus considérée comme un *contenant*, dans lequel se trouvent insérés des éléments atomiques, ni même comme une pure classe extensionnelle, mais comme un *composé* au sens littéral de ce terme,

c'est-à-dire le résultat d'un agrégat d'éléments constitutifs. La Méréologie s'exprime dans la syntaxe logique de l'Ontologie, un calcul extensionnel des noms. Ce langage est le lieu où se joue la connexion entre le niveau d'une logique pure, gouvernant les manières *générales* de parler et de décrire les objets, et celui d'une théorie sémantique répondant à l'exigence de descriptibilité de ces objets. Non borné par la théorie des ensembles, sa réussite est de parvenir à satisfaire les deux voies formelle et descriptive, inconciliables l'une de l'autre dans les langages logiques standards ou ceux des théories des ensembles.

Comme nous aurons l'occasion de le préciser, c'est l'antinomie de Russell qui conduisit Lesniewski à une critique radicale de la notion de classe ou d'ensemble classique en même temps que son abandon pour une définition collective. Il revendiqua une position philosophique nominaliste – au sens traditionnel – qui eut force de valeur absolue et définitive. C'est elle qui détermina le choix de l'adoption d'une théorie collective des classes au sein de laquelle les classes, pour reprendre une expression chère à Russell, font partie de l'ameublement dernier du monde. A la différence de la perspective sémantique pure de la théorie des modèles, il ne s'agit pas, avec cette théorie sémantique, de dessiner les contours d'une représentation du réel, par une détermination purement abstraite, indépendante d'une connaissance empirique de la réalité. Il s'agit de construire une représentation du réel conforme à notre manière ordinaire de le voir et d'en parler, en l'occurrence celle d'un monde constitué d'entités envisagées sous l'angle de leur constitution partitive. Quant au système de l'Ontologie, qui fonde la Méréologie, il a été élaboré de telle manière à être conforme avec cette position nominaliste, voire même l'exprimer. La logique de Lesniewski n'a aucun reten-

tissement sur le problème ontologique. Nous sommes aux antipodes d'une situation où des contraintes d'ordre logique vont déterminer – pour le moins orienter – le choix de telle ontologie plutôt qu'une autre. Ce sont au contraire des considérations d'ordre ontologique qui ont strictement gouverné les choix logiques, tant au niveau de l'analyse de la proposition atomique que des principes de formalisation des systèmes. Nous reviendrons sur cette question par la suite. Mais nous voulions déjà souligner que la logique formelle qui fonde la Méréologie demande d'être appréciée dans le cadre général du schème conceptuel sous-jacent à un mode d'appréhension du réel qui se trouve ici privilégié.

Nous achevons ici notre bilan critique. Dans le chapitre qui suit, nous raconterons l'histoire de la Méréologie dont la naissance s'inscrit dans le contexte des recherches des fondements des mathématiques, marqué par l'antinomie de Russell.

Mais auparavant, nous consacrerons quelques pages à présenter la solution proposée par Whitehead et Russell dans les *Principia Mathematica* pour rendre compte de la validité de l'argument de De Morgan. La raison de cette présentation est double. Tout d'abord les *Principia* sont le premier ouvrage de logique symbolique dans lequel est traité l'argument de De Morgan. Ensuite, on ne peut pas parler de la Méréologie ni retracer sa genèse sans évoquer l'œuvre de Whitehead et Russell et leur «no-class theory». La présentation de la solution des *Principia* pour valider l'argument de De Morgan nous astreint à esquisser dans ses grandes lignes le calcul des classes et le calcul des relations des *Principia*. Nous faisons donc d'une pierre deux coups. Car l'esquisse du calcul des classes passe par celle du procès de définition de la classe au sein des *Principia*. Et il est nécessaire d'avoir celle-ci à l'esprit pour comprendre tout ce qui sépare la théorie des classes de Lesniewski de celle de l'ouvrage culminant du mouvement logiciste.

3. La solution des *Principia Mathematica*

3.1. La définition contextuelle de la classe

La voie suivie dans les *Principia Mathematica* pour résoudre les paradoxes liés à la notion de classe est celle de la réduction des classes aux fonctions propositionnelles qui les déterminent. Cette réduction, qui est une condition à la théorie des types, est opérée par la «no-class theory» dans laquelle les classes peuvent être traitées comme de simples fictions logiques. Les symboles de classes sont rangés parmi les symboles incomplets, c'est-à-dire les symboles auxquels «on n'attribue pas une signification isolément, mais qui sont seulement définis en certains contextes». (1927: 66; 1989: 309) Si un symbole peut être défini contextuellement, il est éliminable de la théorie et la question du statut ontologique de l'objet qu'il semblait dénoter, manifestement paradoxal en ce qui concerne les classes, n'a tout simplement pas à être posée. Whitehead et Russell écrivent à ce propos:

Les symboles de classes, comme ceux des descriptions, sont dans notre système des symboles incomplets: leurs usages sont définis, mais eux-mêmes sont supposés ne rien vouloir dire du tout. C'est-à-dire que les usages de ces symboles sont définis de telle sorte que, quand le *definiens* est substitué au *definiendum*, il ne reste aucun symbole qui puisse être supposé représenter une classe. Aussi les classes, dans la mesure où elles sont introduites, ne le sont que comme des commodités purement symboliques ou linguistiques, et non comme des objets authentiques tels que le sont leurs membres lorsque ce sont des individus. (1927: 72-73; 1989: 317)

Les *Principia Mathematica* donnent la définition contextuelle suivante de la classe:

$$f\{\hat{z}(z)\} = (\) : !x. x. x : f\{!\hat{z}\}$$

Définition (*20.01)

La définition correspond à une procédure de construction d'une fonction extensionnelle de fonction pour toute fonction de fonction donnée, *y compris intensionnelle*. Nous résumerons succinctement les étapes qui scandent l'élaboration de cette définition.

Toute fonction propositionnelle à un argument détermine une classe, considérée comme la totalité des arguments qui satisfont la fonction en question. Ainsi, si x est la classe composée des objets qui satisfont la fonction propositionnelle $f(x)$, on dira que $f(x)$ est la classe déterminée par \hat{x} . Cette classe sera représentée par \hat{x} (x)²⁰.

Deux fonctions propositionnelles sont dites formellement équivalentes quand «elles sont équivalentes pour chaque argument possible; c'est-à-dire quand n'importe quel argument qui satisfait l'une satisfait l'autre et *vice-versa*.» (1927: 72; 1989: 318) Ainsi, «x est un homme» est formellement équivalent à «x est un animal rationnel». Dans ce cas, il est possible de dire que ces fonctions ont la même extension.

On considérera alors «l'extension comme un objet, appelé classe, que l'on suppose être le sujet de tous les énoncés équivalents portant sur les différentes fonctions formellement équivalentes.» (1927: 74; 1989: 320) Mais ici un problème se pose. La théorie des classes des *Principia* nécessite au préalable la distinction entre les fonctions extensionnelles et les fonctions intensionnelles. En effet, la définition de l'équivalence formelle ne peut prétendre valoir pour les fonctions inten-

20 « x » représente une valeur indéterminée de la fonction, qui dénote de façon ambiguë a , b , c , etc. où a , b , c sont les diverses valeurs de « x ». La fonction en elle-même, abstraite de la totalité de ses valeurs se note « \hat{x} ». Conformément à la hiérarchie des fonctions au sein de la théorie des types, une limitation est apportée au choix des arguments possibles pour x , ce que marque le symbole «!».

sionnelles. Par exemple, la valeur de vérité de la proposition «Je crois que tous les hommes sont mortels» peut être le vrai tandis que celle de la proposition «Je crois que tous les animaux rationnels sont mortels» peut être le faux, si je crois que le Phénix est un animal rationnel immortel. On est donc conduit à distinguer, parmi les fonctions de fonction, celles qui sont extensionnelles et celles qui sont intensionnelles. «Une fonction d'une fonction est dite extensionnelle quand sa valeur de vérité pour un argument quelconque est identique pour n'importe quel argument formellement équivalent.» Sinon, elle est intensionnelle.

Afin d'éliminer du calcul les fonctions de fonction intensionnelles, Whitehead et Russell donnent une méthode permettant de dériver, à partir de toute fonction de fonction, une fonction de fonction nécessairement extensionnelle²¹. La méthode est la suivante. Si la fonction de fonction initiale est $f\{!z\}$, la fonction dérivée, qui s'écrit « $f(\hat{z}(z))$ » répond à la définition suivante: «il y a une fonction prédicative qui est formellement équivalente à \hat{z} et qui satisfait f ». (1989: 320) Cette fonction dérivée de fonction ne peut être qu'extensionnelle, du fait que l'on fournit à la fonction f un argument z formellement équivalent à \hat{z} et rendant vraie la fonction f . Ainsi, si l'on considère la fonction intensionnelle précédente «Je crois que tous les hommes sont mortels», considérée comme une fonction de la fonction « x est humain», la fonction dérivée sera: «il existe une fonction formellement équivalente à la fonction “ x est humain” et telle que je crois que tout terme qui la satisfait est mortel.» La valeur de vérité de cette fonction dérivée

21 «On remarquera qu'en logique mathématique, les seules fonctions de fonctions *déterminées* dont on a besoin, sont extensionnelles. Par exemple, les deux fonctions de fonctions fondamentales sont: « x est toujours vraie» et « x est parfois vraie». Pour l'une comme pour l'autre, la substitution à x de n'importe quelle fonction formellement équivalente n'affecte pas la valeur de vérité.» (Russell 1991: 344-345)

ne sera pas modifiée lors de la substitution de «x est un animal rationnel» à «x est mortel», même si je crois que le Phénix est un animal rationnel et mortel. (Russell 1991: 345-346)

De ce qui précède résulte la définition *20.01 de la classe²². Ce que l'on appelle «classe» est simplement l'extension de la fonction dérivée. On lit:

« $\hat{z}(z)$ » dans l'expression « $f\{\hat{z}(z)\}$ » comme «la classe déterminée par la fonction \hat{z} ». Le symbole « $\hat{z}(z)$ » exprime donc l'extensionnalité de la fonction \hat{z} et, en tant que symbole incomplet défini contextuellement, il est éliminable au profit de la formule complexe développée dans le *definiens* de la définition *20.01.

Une définition annexe permet de simplifier la notation conventionnelle « $\hat{z}(z)$ » et de définir génériquement une classe.

$$\text{Cls} = \zeta\{ (). \quad = \hat{z}(!z) \} \quad *20.03 \text{ (Définition)}$$

Par convention, $\hat{z}(z)$ est substituable à $\hat{z}(z)$.

Ainsi, de par la définition d'usage de la classe, le terme de «classe» appliqué à l'extension d'une fonction à un argument n'introduit dans le calcul aucun élément nouveau. La classe n'est plus qu'une extension pure de fonction et ne possède aucune réalité logique. Pour le logicien, les classes sont devenues simplement des objets fictifs, de «simples façons de parler», à l'égard desquels il est

²² Notons que le procès de définition de la classe applique l'axiome de réductibilité, introduit pour légitimer les jugements dans lesquels on a affaire à des notions telles que «toutes les propriétés de a» ou «toutes les fonctions-a». Cet axiome est la supposition que, pour n'importe quelle fonction x donnée, il existe une fonction prédicative formellement équivalente. En langage symbolique, cet axiome se note comme suit:

$$| - : (f) : x . x . f!z \text{ (*12.1 Axiome des classes).}$$

ainsi dispensé de tout engagement positif ou négatif quant à leur existence²³.
(1927: 72; trad. 1989 : 317)

3.2. Le calcul des relations et les fonctions descriptives

Sur le modèle de la «no-class theory», Whitehead et Russell construisent le calcul des relations par simple extension du calcul fonctionnel à une variable aux fonctions à deux variables. Une relation binaire est définie comme une classe de couples ordonnés déterminée par une fonction à deux variables. La définition, comme pour celle des classes, correspond à la procédure de construction d'une fonction extensionnelle de fonction à deux arguments. Isomorphe à celle des classes, elle introduit la relation à titre d'argument d'une fonction de fonctions à deux variables.

$$f\{\hat{x} \hat{y} (x,y)\} := (\) : !(x,y) \cdot x,y \cdot (x,y):f\{ (\hat{u}, \hat{v})\}^{24} \quad \text{Définition *21.01}^{25}$$

De la même manière que pour les classes, on peut introduire le symbole générique «Rel» qui représente toute relation R telle qu'elle soit l'extension d'une fonction quelconque $f\{\hat{x} \hat{y}\}$. Soit:

$$\text{Rel} = \hat{R}\{ (\) \cdot R = \hat{x} \hat{y} !(x,y)\} \quad \text{Définition *21.03}$$

23 Notons que la quantification sur un symbole de classe se résout à une quantification sur une fonction. On a: $(\)$, $f \cdot = (\)$. $f\{\hat{z} (!z)\}$ *20.07 (Définition) et $(\)$. $f \cdot = (\)$. $f\{\hat{z} (!z)\}$ *20.071 (Définition). On sait que Quine n'acceptait pas la théorie des types et fit valoir que la "no-class theory", si elle élimine les classes n'en est pas moins contrainte de quantifier sur des fonctions propositionnelles.

24 Toute relation a un sens. Celui-ci étant une notion indéfinie dans les *Principia*, il est nécessaire de spécifier l'ordre des termes. Les lettres «u» et «v», à travers leur ordre alphabétique, précise l'ordre dans lequel doivent être substituées les variables. (1927: 200)

25 Cette définition applique également l'axiome de réductibilité exprimé ainsi pour les relations:
|— $(f) : (x,y) \cdot x,y \cdot !(x,y)$ (Proposition *12.11) (1927: 67).

Cela dit, il nous reste à introduire un concept qui joue un rôle déterminant dans la solution proposée pour valider l'argument de De Morgan: celui de *fonction descriptive*. A partir du symbole utilisé pour les descriptions définies, soit «(x) (x)» qui se lit «le x qui satisfait \hat{x} », les auteurs des *Principia* introduisent une autre notation, à savoir «R'y», qui signifie «l'objet ayant la relation R avec y». L'apostrophe «'» peut se lire «de». Ainsi, «R'y» se lit «le R de ».

En appliquant l'opérateur de description au référent de la relation, la définition suivante est alors posée:

$$R'y = (x) (x R y)$$

Définition *30.01

Cette définition donne donc le sens attribué au terme «R'y» dans une description.

R'y et (x) (x R y) sont interchangeables *in use*.

R'y, qui est une fonction de y mais pas une fonction propositionnelle, est qualifiée de fonction descriptive.

Chaque fonction descriptive à un “domaine de définition” ou un “domaine d'existence” qui peut être défini comme suit: si la fonction en question est R'y, son domaine de définition ou d'existence sera la classe de ces arguments y pour lesquels nous avons E!R'y, c'est-à-dire pour lesquels E!(x) (x R y), c'est-à-dire pour lesquels il n'y a qu'un seul x, et pas plus, qui a la relation R' avec y. (1927: 32; 1989: 263)

Le nom de fonction descriptive est le nom donné aux fonctions ordinaires des mathématiques. Par exemple, une expression telle que 5^2 est la valeur de la fonction $f(x) = x^2$ quand $x = 5$. Mais $f(5)$ peut être considérée comme décrivant le nombre 25. De là le nom d'expression descriptive. Pour n'importe quelle relation, on peut parler de R'y comme de la relation descriptive associée.

Il est possible également d'introduire la notion de *fonction descriptive plurielle*, dans le but de dénoter la classe des objets qui sont dans une certaine relation R avec un membre d'une certaine classe A . R'' ou $R|_A$ dénotera la classe des termes x qui ont la relation R avec un membre de la classe A .

La définition correspondante est la suivante:

$$R'' = \hat{x}\{(y) \cdot y \in A \cdot R y\}$$

Les R'' constituent donc la restriction du domaine de R à A . Par exemple, si R représente la relation «habiter» et A la classe des villes, R'' représentera les habitants des villes. Ou encore, un des membres de la classe «pères des grands hommes» sera le père de y où y est un grand homme.

Venons maintenant au traitement proposé par les *Principia Mathematica* pour rendre compte de l'argument de De Morgan.

3.3. Le théorème *37.62

La version de l'argument de De Morgan que considèrent Whitehead et Russell est une version trouvée chez Jevons. Elle est formulée ainsi: «Because a horse is an animal, the head of a horse is the head of an animal». Par conséquent, l'argument se présente sous la formulation suivante:

A horse is an animal

The head of a horse is the head of an animal

On retrouve donc une formulation proche de la formulation originale de De Morgan dans laquelle la conclusion n'est pas universellement quantifiée et qui, comme nous l'avons souligné au début de ce chapitre, peut conduire à une lec-

ture en termes de descriptions définies, ce que font Whitehead et Russell. Selon ces derniers, l'argument n'est pas valide sans l'ajout de la prémisse «E! the head of the horse in question», c'est-à-dire «il existe une et une seule tête du cheval en question». Ils semblent donc considérer «a horse» comme référant à un cheval particulier. Par conséquent, l'argument se présente ainsi:

Ce cheval est un animal.

Il existe une et une seule tête de ce cheval.

Donc, la tête de ce cheval est la tête d'un animal.

Le théorème qui valide un tel argument est le suivant:

$$\vdash : E! R'y . y \quad . \quad . R'y \quad R'' \quad (*37.62)$$

On a R pour la relation «être la tête de». «R'y» se lit: «la tête de y», «y» représentant l'individu possédant la tête en question. « \cdot » est utilisé pour représenter la classe des animaux.

«R'' » se lit, conformément à la définition donnée ci-dessus d'une fonction descriptive plurielle, «la classe des x qui ont la relation R avec les y qui sont membres de \cdot », soit «la classe des x qui ont la relation «tête de» avec les y qui sont membres de la classe des animaux», autrement dit, «la classe des têtes des animaux».

Ainsi, la formulation symbolique de Whitehead et Russell peut être transcrite comme suit:

«S'il existe une et une seule tête d'un cheval et que ce cheval est un animal, alors la tête de ce cheval est un membre de la classe des têtes des animaux (ou la tête d'un animal)».

On remarque que la formulation symbolique conditionnelle de l'inférence utilise la variable «y» pour représenter ce qui a une tête et qu'il n'y a aucun terme de classe pour «cheval» dans «E! R'y».

Le théorème *37.62 appelle plusieurs commentaires, directement liés à la condition d'unicité attachée aux fonctions descriptives et à l'ajout de la clause d'existence. Sans l'ajout de la clause d'existence, selon les auteurs des *Principia*, cette inférence est fallacieuse. Elle ne serait pas correcte pour une huître (existence) ou une hydre (unicité). On constate sans peine que, dans la perspective de rendre compte de la dimension méréologique d'un argument tel celui de De Morgan, la notion de fonction descriptive, telle qu'elle est à l'œuvre dans l'axiomatique des *Principia*, est une impasse. D'après la définition *30.01, $R'y = (\ x) (xRy)$, c'est-à-dire «un seul et un seul x est dans la relation R avec y». Cela exclut donc toute relation dans laquelle plusieurs x vérifieraient la relation R avec y comme, par exemple, «être un bras de» si y est un homme, «être une tête de» si y est une hydre. De par la condition d'unicité qui pèse sur la fonction descriptive R'y, il serait impossible de définir la classe des têtes des hydres, la classe des pieds des hommes ou encore celle des parties des objets d'un univers donné. Si y, par exemple, représente un animal et que R est la relation entre y et n'importe quel x dont il est une partie, la classe $R''(\text{animaux}) =$ la classe des parties des animaux. Mais cette classe, transgressant la définition, ne peut pas être définie. La classe ne pourrait pas être une classe composée des termes de la forme «la partie de y», parce que les animaux n'ont pas chacun une et une seule partie.

De ce qui précède, on conclura simplement que Whitehead et Russell n'abordent pas l'argument de De Morgan comme un argument de type méréologique, ce qui, dans le cadre théorique des *Principia*, n'est guère surprenant. Mais

sans doute, au-delà de la condition d'unicité qui pèse sur les définitions des fonctions descriptives, le point d'attaque principal est celui de la condition d'existence avec l'ajout d'une clause d'existence sur la tête du cheval comme prémisse pour valider l'inférence.

CHAPITRE II

GENESE DE LA MERELOGIE

La naissance de la Méréologie s'inscrit dans le contexte des recherches des fondements des mathématiques, marqué par la découverte de l'antinomie de Russell de la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes. C'est en effet en cherchant à dévoiler l'origine de l'antinomie que Lesniewski est amené à rejeter la notion classique de classe ou d'ensemble au profit d'une définition méréologique qui n'est elle soumise à aucune contradiction et permet d'éclairer les raisons mêmes de l'antinomie. Dans ce chapitre, c'est dans ce contexte mathématique bien précis que nous retracerons la genèse de la Méréologie. Dans un premier temps, nous évoquerons l'œuvre logique de Lesniewski. Puis il sera question de l'antinomie et de la manière par laquelle Lesniewski l'aborda, rompant radicalement avec la tradition ensembliste au nom d'une philosophie première. Cela nous conduira ensuite à présenter le concept de classe collective et à exposer ses caractéristiques fondamentales en les opposant à celles des théories classiques. Nous disposerons alors des éléments nécessaires pour comprendre l'analyse faite par Lesniewski de l'antinomie De Russell. Pour terminer, nous exposerons une axiomatique de la Méréologie en la commentant brièvement.

1. L'œuvre logique de Lesniewski

L'œuvre logique de Lesniewski est née et s'est développée autour de ce qui fut qualifié d'«apôtre de la sédition au royaume de l'orthodoxie», en d'autres mots *l'antinomie de Russell de la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes*¹. C'est en effet suite à sa découverte en 1911, en lisant l'article de Lukasiewicz sur le principe de contradiction chez Aristote², que Lesniewski initie sa carrière de logicien. Jusque là, il occupait une position de philosophe au sein de l'École polonaise, ignorant l'existence de la logique symbolique et des travaux menés par la communauté scientifique sur les fondements des mathématiques. Il consacra les onze années qui suivirent au problème de l'antinomie, écrivant à son sujet qu'elle devint le thème le plus obsédant de ses recherches (1989: 48). Le résultat de ces onze années de travail se concrétisa dans trois théories, la Prothotétique, l'Ontologie et la Méréologie. Dans leur unité structurelle, ces théories peuvent être tenues pour l'un des fondements possibles du système des mathématiques. La Prothotétique est une théorie propositionnelle quantifiée et élargie relativement aux calculs propositionnels classiques. L'Ontologie est un calcul extensionnel des noms, au sens large, répondant aux mêmes visées que celles des systèmes logiques de référence de tradition frégéo-russellienne. Ces deux théories forment ensemble un système unifié de logique libre, universelle et d'ordre supérieur. Elles ont pour caractéristiques d'être *interprétées* et *développementales*. Elles intègrent également une théorie des catégories sémantiques reflétant une vision *sui generis* des catégories logiques profondément différente de celle que

1 Selon l'expression de Heinz von Foerster.

2 Lukasiewicz 1971; trad. de 1910.

l'on rencontre à la base des langages logiques standards et à la base des langages des théories des ensembles. Cette théorie des catégories sémantiques fut initialement conçue par Lesniewski pour remplacer la théorie des types des *Principia Mathematica*, considérée comme *ad hoc* pour résoudre le problème de l'antinomie. Quant à la Méréologie, dite aussi théorie des classes collectives, elle n'est pas à proprement parler une théorie de pure logique. Elle s'ancre dans l'axiomatique de l'Ontologie, elle-même bâtie sur celle de la Protothétique.

En ce qui concerne l'ordre d'apparition historique de ces théories, il est à l'inverse de leur ordre structurel. La Méréologie fut construite la première. Elle est le résultat direct de l'analyse de l'antinomie de Russell que Lesniewski réalisa durant les années 1913-1914, analyse dans laquelle il rejette la définition classique de la classe ou de l'ensemble au profit d'une définition de nature collective dont il montre qu'elle n'est sujette à aucune contradiction. Quant à la première axiomatique de la Méréologie formalisant les concepts entrant en jeu dans cette analyse, elle fut publiée en 1916. L'Ontologie et la Protothétique, qui sont la réponse au problème des fondements logiques de la Méréologie, furent respectivement développées durant les années 1919-1921 et 1922.

On retiendra de ce bref résumé que les recherches de Lesniewski se sont scandées en deux temps, auxquels était associé un double objectif. Le premier, poursuivi sous l'impulsion de la découverte de l'antinomie et l'insatisfaction profonde de Lesniewski face aux solutions proposées, fut celui de l'élaboration d'un langage mathématique «apte à décrire la réalité hétérogène du monde dans des lois aussi exactes que possible» (1989: 33). Privilégiant un mode de connaissance concret et intuitif de la réalité et contestant qu'un objet tel que la classe vide ou un quelconque objet abstrait existent dans le monde, Lesniewski récusait la notion

classique de classe ou d'ensemble. C'est au nom de ce credo philosophique, dont nous verrons par la suite qu'il correspond à une position nominaliste, que Lesniewski rompit avec la tradition ensembliste et conçut une théorie collective des classes. Quant au second objectif, ce fut celui du langage logique apte à fonder la Méréologie et qui, conforme au nominalisme de Lesniewski, fût libéré de toute antinomie de type russellienne. L'Ontologie, et rétrospectivement la Prothétique sur laquelle elle repose, en sont l'aboutissement. Ce double objectif est résumé en ces termes par Kearns:

The relations whose expressions are formalized in Mereology are relations which hold between objects in the world, the logical systems (Ontology and Protothetic) present only general linguistics forms. (1967: 68)

2. La formulation courante de l'antinomie de Russell

La formulation courante de l'antinomie de Russell étant responsable de l'émergence de la Méréologie, nous la rappellerons brièvement, même si elle fait aujourd'hui partie des connaissances partagées.

L'antinomie fut exposée par Russell en 1902, dans sa fameuse lettre du 16 juin à Frege, puis fut publiée en 1903 dans *The Principles of Mathematics*³. Comme chacun sait, elle eut pour conséquence de frapper d'incertitude l'édifice mathématique et d'ébranler le programme logiciste puisque la notion de classe, mise à

3 Cf. Russell 1956; 1^{ère} éd. 1903: § 100-106. Russell découvre le paradoxe au printemps 1901, en appliquant la démonstration de Cantor qu'il n'existe pas de plus grand nombre cardinal au «nombre de toutes les choses existant dans le monde». C'est ainsi qu'il fut conduit à considérer la classe des classes qui ne sont pas membres d'elles-mêmes. Mentionnons que Zermelo découvrit indépendamment le paradoxe: «J'avais cependant découvert moi-même cette antinomie indépendamment de Russell, et l'avais communiquée au P^r Hilbert entre autres» (1908: 118). Hilbert en parlait par ailleurs comme d'«une contradiction découverte par Zermelo et par Russell» (1925: 169).

contribution dans la définition du nombre, était soumise à une contradiction⁴. Rappelons à ce sujet que la définition frégréenne du nombre publiée en 1884 était:

Le nombre qui appartient au concept F est l'extension du concept «équinumérique au concept F.
(Frege 1969: 194; trad. de 1884: 79)

et qu'elle fut formulée en langage russellien

Le nombre d'une classe est la classe des classes qui lui sont semblables (Russell 1991: 62).

Frege prit connaissance de l'antinomie alors que le deuxième volume des *Grundgesetze der Arithmetik* était sur le point d'être publié. Il rédigea alors rapidement une postface dans laquelle il tentait de sauver la notion de classe en affaiblissant sa fameuse loi V qui, permettant de passer d'un concept à son extension, donnait prise au paradoxe de Russell⁵. Mais comme le montra Lesniewski en 1938, la correction apportée par Frege ne suffit pas pour échapper au paradoxe⁶ (Sobocinski 1950: 220-228).

Dans sa lettre, Russell donne deux versions du paradoxe. L'une met en jeu la notion de classe, l'autre celle de prédicat. Nous donnons la version en termes de classes, celle que l'histoire a retenue sous ce nom.

4 Frege manifesta sa consternation en ces termes: «Votre découverte de la contradiction m'a surpris au plus haut point et, j'allais presque dire, m'a consterné, puisque de ce fait, le fondement sur lequel je pensais voir se construire l'arithmétique se met à vaciller.» (Lettre du 22 juin 1902 de Frege à Russell).

5 L'axiome V exprime l'équivalence logique entre l'égalité de deux extensions et l'équivalence formelle de deux concepts: $(\hat{x} F(x) = \hat{x} G(x)) \iff ((x)(F(x) \iff G(x)))$. Frege affaiblit la première conditionnelle ainsi: $(\hat{x} F(x) = \hat{x} G(x)) \iff ((z)(z \in \hat{x} F(x) \iff (F(z) \iff G(z)))$

6 Russell le crut sur le moment (1956, Appendice A: 552; 1^{ère} éd. 1903). Quine montra également dans son article de 1955 «On Frege's way out» que l'aménagement proposé par Frege se révélait insuffisant.

Le point de départ est la distinction entre les classes qui sont éléments d'elles-mêmes et celles qui ne le sont pas. Parmi les classes qui sont éléments d'elles-mêmes, on trouve par exemple la classe des objets abstraits ou la classe des classes non vides. En effet, la classe des objets abstraits est elle-même un objet abstrait tout comme la classe des classes non vides est une classe non vide. D'autres classes, en revanche, ne sont pas éléments d'elles-mêmes, comme par exemple, la classe des baleines ou la classe des triangles: la première n'est pas une baleine tandis que la seconde n'est pas un triangle. Concevons alors la classe R des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes et demandons-nous si R est élément ou non d'elle-même? Si R est élément d'elle-même, alors elle n'est pas élément d'elle-même puisque R est la classe des classes qui *ne sont pas éléments d'elles-mêmes*. Et si R n'est pas élément d'elle-même, alors elle est élément d'elle-même puisque R est la classe de *toutes* les classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes. On a bien un paradoxe puisque si R est élément d'elle-même, alors elle n'est pas élément d'elle-même et vice-versa.

L'analyse du paradoxe montre qu'il résulte immédiatement de l'application du principe de compréhension, admis en toute confiance au cours de la période qui précéda la découverte de l'antinomie. Le seul qui avait manifesté quelque inquiétude était Frege, au sujet de sa loi V et de la nature quelque peu mystérieuse de la correspondance entre concepts et classes⁷. En vertu de ce principe, on admet qu'à toute propriété $F(x)$ correspond une classe ayant exactement pour éléments les x qui vérifient la propriété en question et que l'on peut toujours, d'une multi-

⁷ Cf. Préface des *Grundgesetze*: «[...] une querelle ne peut naître, pour autant que je puisse le voir, qu'à propos de ma loi fondamentale (V) sur les parcours de valeurs, qui n'a peut-être pas encore été énoncée expressément pas les logiciens, bien qu'on l'ait à l'esprit quand on parle, par exemple, des extensions de concepts. Je la tiens pour purement logique» (Frege 1893; trad. dans Belna 1996: 319)

plicité réunie en un tout, obtenir une entité individuelle, susceptible de devenir à son tour élément d'un autre ensemble.

Symboliquement, le paradoxe peut se formuler de la manière suivante. Soit pour le principe de compréhension la formule:

$$(\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow F(x))$$

Si $F(x)$ représente la propriété x est une classe et x n'est pas élément d'elle-même ou, plus simplement, x n'est pas élément d'elle-même, symboliquement $\sim(x \in x)$, la classe R des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes se définit ainsi:

$$R = \text{df } \hat{x} (\sim(x \in x))$$

Partant du principe de compréhension, on obtient donc:

$$(\forall x)(x \in R \leftrightarrow \sim(x \in x))$$

Et R étant une valeur possible du domaine de valeurs que parcourt la variable x , il en découle, par substitution de R à x :

$$R \in R \leftrightarrow \sim(R \in R)$$

Ce qui, tiers exclu oblige, est bien une contradiction.

Ainsi, face à l'antinomie, sauf à remettre totalement en cause le concept fondamental de classe ou d'ensemble – ce que fit Lesniewski – il n'y avait guère que la voie des thérapies. La première consista à exclure de la théorie un énoncé de la forme « $x \in x$ » comme étant dénué de sens. Pierre angulaire de la théorie des types logiques, le principe de l'illégitimité des énoncés réflexifs est la solution proposée dans les *Principia Mathematica*. Le principe de compréhension n'est pas modifié mais on décide qu'il n'est applicable qu'à certaines formes d'énoncés, de manière à

exclure celles qui donneraient lieu, par le jeu spontané du principe, à une contradiction. La deuxième voie consista à admettre un énoncé tel « $x \in x$ ». Mais par l'introduction d'une condition annexe au principe de compréhension qui en restreint la puissance, cet énoncé se retrouve faire exception au principe. C'est la voie de Zermelo et des adeptes de la théorie des ensembles. Zermelo formule ainsi le principe de compréhension modifié:

$$(\forall z)(\forall y)(\forall x)(x \in y \rightarrow x \in z \rightarrow F(x))$$

L'application du principe est restreinte aux éléments x d'un ensemble z dont l'existence est déjà assurée. Le paradoxe se dissout immédiatement, puisque l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes ne peut pas être un ensemble. Cependant, et nul ne l'ignorait, aucune de ces réponses ne résolvait, *stricto sensu*, l'antinomie. Citons à ce propos Zermelo:

Pourtant actuellement l'existence de cette discipline [*la théorie des ensembles*] semble remise en cause par certaines contradictions ou "antinomies" qui peuvent être dérivées de leurs principes – en apparence essentiels à notre pensée –, et qui jusqu'à présent n'ont pas été résolus de façon satisfaisante. En particulier, en vertu de l'antinomie de Russell concernant l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes comme éléments, il ne semble pas aujourd'hui permis d'attribuer à un concept arbitraire quelconque, logiquement défini, un *ensemble* ou une *classe* correspondant à son extension. Il en résulte que la définition originale de Cantor d'un ensemble comme "une collection d'objets de notre intuition ou de notre pensée, bien définis et distincts, réunis en un tout", requiert assurément certaines limitations, bien que personne jusqu'ici n'ait réussi à la remplacer par une autre définition, tout aussi simple, qui ne serait pas sujette au doute. Dans ces circonstances, nous n'avons pas d'autre alternative que celle de partir de la théorie des ensembles historiquement existante, et de chercher les principes qui sont requis comme base de cette théorie mathématique. (1908: 261-281)

Nous rapportons ce long passage parce que Zermelo y exprime sans détour le doute jeté par l'antinomie sur le bien-fondé de la définition cantorienne de l'ensemble et l'alternative qui en résultait. Soit on acceptait de démonter les données fondamentales de la vision du monde mathématique cantorien pour chercher ailleurs un fondement. Soit on cherchait à éliminer la contradiction en recourant à des expédients divers. Et puisque, moyennant certains aménagements et au prix de quelques certitudes émoussées, la définition cantorienne remplissait toujours la tâche qu'on lui demandait, à savoir fonder les mathématiques, on se contenta des expédients.

Seul Lesniewski choisit la première branche de l'alternative. Son attitude s'explique dans une large mesure par le fait qu'il était nouveau dans la discipline et, de surcroît, forgé à une manière de penser la symbiose entre logique, mathématiques et philosophie autre que celle de la communauté scientifique dominante. Aussi ne lui importait-il pas de préserver un édifice mathématique qu'il découvrait fissuré en ses fondements mêmes. Sa seule préoccupation fut de déceler l'origine de cette fissure afin de parvenir à une véritable résolution de l'antinomie. Soumettant alors à une analyse critique la définition classique de la classe ou de l'ensemble, il parvint à la conclusion que celle-ci devait être abandonnée au profit d'une définition de nature collective. Si l'on se souvient des propos de Zermelo, il s'agit pour Lesniewski de cette «autre définition, tout aussi simple, qui ne serait pas sujette au doute».

Au terme de ses recherches logiques, la conclusion finale de Lesniewski fut que l'antinomie était le résultat d'une confusion, d'un amalgame entre les *intuitions* liées aux conceptions distributive et collective de la classe et que, ne pouvant pas être résolue dans les termes propres aux théories classiques, il était nécessaire de

renouveler les outils logiques. Comme nous le verrons, c'est en séparant ces deux conceptions que, à la faveur d'un réexamen de la notion d'extension et l'adoption d'une théorie collective des classes, dont rendent respectivement compte l'Ontologie et la Méréologie, que Lesniewski surmonta le problème posé par l'antinomie.

Notons que Lesniewski ne fut pas le premier à relever la distinction entre un usage collectif du terme «classe» ou «ensemble», permettant de décrire une collection ou une totalité d'individus comme littéralement constituée de ses éléments, et un usage distributif ou purement extensionnel par lequel peut être prédiquée une propriété définie de chaque élément de la classe distributive correspondante. De telles distinctions sont faites dans divers écrits tels que les critiques de Frege à l'égard de Husserl, Dedekind et Schröder ainsi que dans les analyses qui ont conduit Russell à la «no-class theory of classes»⁸.

Cependant Lesniewski est le premier à tirer parti de cette distinction pour éclairer les raisons mêmes de l'antinomie et donner le jour à des théories avec lesquelles se trouvent conciliées les modes d'appréhension distributif et collectif des classes. Lors de la présentation de la classe collective, nous retrouverons les remarques de Frege et de Russell concernant l'opposition entre les conceptions distributive et collective des classes. Celles de Frege, plus substantielles que celles de Russell, retiendront tout particulièrement notre attention car elles nous permettront de préciser encore davantage la pensée de Lesniewski.

⁸ En 1931, on lit sous la plume de Eaton: «A class is both *one* and *many*; this is where the difficulty of the theory of classes arise. In some cases the class-term is used distributively, the reference being not the whole but to the several members. In other cases the same class-term is used collectively, the class being treated as a single entity». (Eaton 1951)

Mais avant de présenter la classe collective elle-même, nous allons restituer la réflexion menée par Lesniewski autour de l'antinomie. En premier lieu, nous examinerons la relation particulière qu'il désire maintenir entre intuition et antinomie car la notion d'intuition, *telle qu'il s'en réclame*, est la clé de voûte de son traitement de l'antinomie.

3. Antinomie et intuition chez Lesniewski

Le point de départ de l'analyse critique menée par Lesniewski est que l'antinomie n'est pas résolue. Logiciens et mathématiciens ont beau avoir reconnu les insuffisances de leur définition de la classe ou de l'ensemble, les prétendues résolutions ne changent selon lui rien à la situation car on n'a toujours rien énoncé sur les causes de l'antinomie. Or ce n'est qu'en dévoilant l'origine de l'antinomie que l'on pourra prétendre accéder aux conditions de sa disparition. Une telle position est à mettre en relation directe avec le sens précis assigné au terme «antinomie» et auquel est associé la réflexion de Lesniewski. Faisant intervenir un phénomène de croyance, ce sens nécessite de distinguer une simple contradiction d'une véritable antinomie. En effet,

Une contradiction n'est une antinomie que si nous la croyons déduite validement de présupposés à la vérité desquels, *intuitivement*, nous croyons⁹. (Sobocinski 1949: 96)

Une antinomie manifeste donc la présence d'une croyance fautive, soit parmi les présupposés entrant en jeu dans sa formulation, soit dans les règles de raisonnement mises en œuvre pour la formuler. Et ce qui empêche cette fausseté d'apparaître comme telle, c'est l'intuition – illusoire – de sa vérité. Dès lors:

L'unique méthode de "solution" des "antinomies" est la méthode de mise en question intuitive des raisonnements ou des présupposés conduisant à la contradiction. (1989: 33)

Par conséquent, résoudre une antinomie consiste à identifier ce qui est «en fait faux» au sein des croyances fondamentales qu'elle mobilise car, dès lors que sera identifié le présupposé – faux – auquel on adhérerait jusque-là de manière intuitive, on cessera *ipso facto* de voir dans la contradiction une antinomie.

Sous une telle approche, une antinomie se résume alors à une seule question. Quelle erreur a été commise dans les théories classiques des classes ou des ensembles? Notons que c'est une telle question que formule Russell dans son autobiographie, lorsqu'il décrit les conséquences de sa découverte:

J'ai d'abord espéré qu'il me serait très facile de surmonter cette difficulté, qu'une erreur banale avait dû se glisser dans mon raisonnement. Mais il s'avéra, peu à peu, qu'il n'en était rien. [...] On pouvait trouver peu digne d'un homme mûr des passe-temps apparemment aussi futiles, mais comment aller de l'avant? Puisque les prémisses ordinaires entraînaient inévitablement de semblables contradictions, il y avait une erreur – laquelle? (1967 (I): 188-189; trad. de 1951 (I): 221-222).

Mais la question «quelle erreur a été commise ?» doit être comprise ici comme «quelle intuition a été trahie»? Et la réponse, pour Lesniewski, se trouve dans la définition même de la classe ou de l'ensemble qui, de par son caractère abstrait, trahit l'intuition du caractère concret des classes et des individus qu'elles représentent. L'intuition de laquelle Lesniewski se réclame est donc l'intuition empirique ordinaire, concevant les classes comme des collections ou des amas d'objets singuliers, c'est-à-dire des tous concrets littéralement composés de leurs éléments, comme le sont un tas de feuilles ou un mur de pierres.

9 Cette définition est empruntée à Nelson (Grelling & Nelson 1908).

Russell, comme nous l'avons déjà dit, écrivit que l'on ne peut pas considérer «les classes comme partie intégrante de l'ameublement dernier du monde». Pour Lesniewski, en revanche, les classes sont, *a priori*, des totalités possédant une réalité effective. Parler d'ensemble ou de classe possède une signification opérationnelle *évidente* en tant qu'acte de désignation d'un objet individuel. A ce sujet, Lesniewski n'aura de cesse de s'opposer à toute tentative de faire passer les discours portant sur des «ensembles» ou des «classes» pour des discours portant sur des «choses» conceptuelles, objets abstraits ou autres. L'objet dénoté par une expression de classe doit selon lui être compté comme un, au sens de l'agrégat des entités qui tombent sous le concept distinctif.

Face à la question de la nature et de l'existence des classes, Lesniewski adopte donc une position de nominalisme radical aux antipodes du nominalisme instrumentaliste de Whitehead et Russell (examiné dans le chapitre précédent), permettant d'affirmer qu'il n'est pas dans la nature des classes d'être autre chose que des «façons de parler» ou des «fictions logiques» et qu'à ce titre, seuls leur emploi *in use* est légitime.

On comprend alors pourquoi, de ce point de vue reposant sur l'intuition commune et reconnaissant aux classes un statut d'objets concrets, aucun des essais de reconstruction des fondements des mathématiques ne peut être tenu pour satisfaisant aux yeux de Lesniewski. Ses confrères Russell et Zermelo n'ont cherché qu'à éliminer l'antinomie. Mais aussi ingénieux et efficaces que soient leurs stratagèmes pour l'éviter, ils ne la résolvent pas, pour la simple raison que «la mathématique extra-intuitive ne contient pas de remèdes contre les insuffisances de l'intuition» (1989: 33).

Concernant la théorie des types qui, écrit Lesniewski, représente «sur le terrain de la lutte pour les “antinomies” la synthèse la plus représentative et pour laquelle Russell “invoque entre autres des raisons de nature intuitive”», elle n’est pas recevable (1989: 33). Quant à Zermelo, la sentence suivante lui est réservée:

La construction de Zermelo, architectoniquement raffinée, introduit dans la “théorie des ensembles” des prohibitions visant l’élimination des “antinomies” du terrain des mathématiques, prohibitions privées, hélas de fondement intuitif. (1989: 33)

Le ton péremptoire de Lesniewski pourrait heurter le lecteur habitué à travailler dans le cadre de la théorie des ensembles connue aujourd’hui en tant que théorie de Zermelo-Fraenkel. Celui-ci pourrait en effet faire valoir que la notion itérative d’ensemble est à l’abri de toute critique et procède d’une légitimité également intuitive. Boolos écrit à ce propos:

[...] there is another view of sets: the *iterative conception of set*», as it sometimes called, which often strikes people as enterily natural, free from artificiality, not at all ad hoc, and one they might perhaps have formulated themselves. [...] ZF alone (together with its extensions and subsystems) is not only a consistent (apparently) but also an independently motivated theory of sets. There is, so to speak, a “thought behind it” about the nature of sets which have been put forth even if, impossibly, naive set theory had been consistent. (Boolos 1971, repris dans Boolos 1998: 14-15)

Cependant il convient de ne pas oublier le contexte dans lequel s’insère ce débat et, surtout les raisons alléguées en faveur de chacune des théories en présence, eu égard à leurs motivations respectives. Lesniewski, répétons-le, vise une définition réelle des classes. De là, et ceci de manière définitive, la notion d’ensemble, c’est-à-dire d’un objet abstrait et non concret comme le serait un tas, n’est pas acceptable. Toute théorie qui s’en tient au paradigme ensembliste n’est

pour lui qu'un ajustement, n'ayant pas reconnu le problème à l'origine de l'antinomie et par lequel passe sa véritable résolution.

Nous restituons la genèse d'une théorie qui s'est construite en s'opposant de manière polémique aux premiers développements ensemblistes et aux travaux logicistes. Le désaccord et les distances de Lesniewski par rapport aux théories dominantes s'inscrivent dans la conviction absolue qui l'habitait de la priorité de l'intuition sur l'attitude formaliste pure. On comprendra donc mieux le ton des propos suivants où il juge que les solutions à l'antinomie – que ce soient celle de la théorie des types ou celle de la théorie des ensembles – n'ont fait que reléguer encore plus loin ce qu'il qualifie de «fond intuitif historique sur lequel naquirent les “antinomies”».

Le problème des “antinomies” est devenu, sous l'influence prépondérante de M. Russell, le problème central de nombre d'éminents mathématiciens qui ont concentré sur lui leurs efforts, s'éloignant considérablement du fond intuitif historique sur lequel naquirent les “antinomies”. Ce phénomène favorisait la disparition du sens de la différence entre les sciences mathématiques, tenues pour des théories déductives vraies appelées à capter la réalité hétérogène du monde dans des lois aussi exactes que possibles, et les systèmes déductifs non contradictoires analogues, mais qui, tout en assurant la possibilité d'obtention sur leur terrain d'une quantité toujours plus grande de théorèmes se distinguant tout de même par l'absence de toutes valeurs intuitives scientifiques les rattachant à la réalité. (1989: 33)

Ce passage est fondamental dans la compréhension de la réflexion conduite par Lesniewski. D'une part, il éclaire la distinction établie entre une simple contradiction formelle et une véritable antinomie. Cette distinction est en effet le reflet direct de celle que l'on rencontre dans le passage précité entre les théories mathématiques dites «vraies» et les théories formelles dénuées de fondements intuitifs

«les rattachant à la réalité». D'autre part, il met en pleine lumière la définition «naïve» de l'ensemble de Cantor. Car c'est cette définition qu'il faut reconnaître dans le «fond intuitif historique» auquel Lesniewski se réfère et prône un retour.

Aussi la rappelons-nous, sous deux formulations.

Par ensemble, nous entendons n'importe quel rassemblement en un tout M d'objets bien définis et distincts m de notre intuition ou de notre pensée; ces objets étant appelés les "éléments de M ".

(Cantor 1932: 282)

Chaque ensemble de choses distinctes peut être considéré *en lui-même comme une seule chose* dont les choses en question sont les parties constituantes ou les éléments constitutifs. (Cantor

1887: 83; cité in Lesniewski 1989: 53)

Toutefois si Lesniewski reconnaît la définition cantorienne de l'ensemble, soulignons-le, c'est à la seule condition d'une lecture méréologique ou collective. La lecture traditionnelle sur laquelle on a cru pouvoir assurer les bases des mathématiques doit, quant à elle, être abandonnée. Comme nous le verrons par la suite et l'avons déjà mentionné, la classe distributive sera au final rejetée au double profit de l'adoption d'une version collective de la classe et d'une nouvelle conceptualisation de la notion d'extension. De celle-ci ne sera retenue que la dimension purement extensionnelle, sans qu'il soit nécessaire de recourir à des entités qui seraient des «classes distributives».

Que cette voie se révèle destructrice pour l'édifice mathématique orthodoxe est sans importance pour Lesniewski. Il n'y a en effet pour lui qu'une seule leçon à tirer de l'antinomie, celle de la nécessité de se défaire d'un certain nombre de croyances ou de présupposés ancrés dans le modèle cantorien pour en adopter d'autres, conformes à l'intuition dans laquelle il enracine sa réflexion. Il écrit:

Dans ce cas, il n'y aura rien d'étrange ni d'incompréhensible dans le fait que ce présupposé, admis dans un système de postulats cause l'apparition de l'antinomie. Il n'y aura pas non plus besoin de faire des "sacrifices" ni de renoncer à quoi que ce soit, car la simple constatation que nous avons cru antérieurement à la vérité d'une thèse fautive suffira, et cette constatation sera un approfondissement de la connaissance de la réalité. La chose qu'il reste à faire est alors, soit de délaisser la théorie dont les présupposés se sont avérés contenant un élément faux, soit d'introduire de nouveaux présupposés, suffisants pour les fondations de la théorie et de la vérité desquels nous sommes persuadés. (Sobocinski 1949: 96-97)

On comprend sans peine, comme nous l'avons déjà remarqué, que l'adoption d'une telle position était plus facile pour qui se trouvait à l'extérieur du paradigme ensembliste et «prêt» à faire valoir que l'antinomie qui apparaissait sur la toile de fond ensembliste *entraînait* un changement de paradigme.

Pour clore ce paragraphe, ajoutons encore quelques mots au sujet de la notion d'intuition chez Lesniewski. Si elle accompagne en filigrane et dirige la conception de ses systèmes, il est toutefois important d'observer qu'en se réclamant de l'intuition, Lesniewski n'oppose en aucune manière *intuitif* à *formel* ou *formalisé*. Il récuse simplement toute rupture de l'intuition avec le formalisme, de telle sorte que celui-ci ne peut jamais la remplacer ni la précéder. Il n'est qu'un instrument, un simple outil technique et de communication à son service. Lesniewski n'utilisera par ailleurs que très tard un langage symbolique pour ces systèmes. Sa réaction initiale à l'égard de la logique symbolique s'étant exprimée, selon ses propres dires, par une aversion à l'égard du formalisme, ce n'est qu'en 1920, sous l'influence de Léon Chwistek, qu'il accepte d'introduire un symbolisme

dans ses travaux, convenant qu'un instrument scientifique est plus rigoureux et moins susceptible de mauvaises interprétations que le langage naturel¹⁰.

Abordons à présent la présentation de la classe collective. Cela nous donnera les éléments indispensables à la compréhension, par la suite, de l'analyse proposée par Lesniewski de l'antinomie de Russell.

4. La classe collective

4.1 Éléments introductifs

Trois thèses vont nous guider dans la présentation du concept de la classe collective et de ses caractéristiques fondamentales. Ces thèses sont celles que l'on trouve à la base du système méréologique élaboré en 1914 – il ne s'agit pas encore d'une axiomatique –, et à partir duquel Lesniewski construit sa résolution de l'antinomie de Russell¹¹. Elles sont liées aux questions de la classe vide, de la classe singulière et à celle de la nature et de l'existence des classes. Elles sont formulées ainsi:

[1] *Si un objet est la classe des a, alors un objet est a.*

[2] *Il arrive fréquemment que tel ou tel objet soit la classe de tels et tels objets et qu'il soit simultanément la classe d'objets tout à fait différents.*

[3] *Si un – et un seul – objet est P, alors P est la classe des P.*

Dans un article publié en 1927, Lesniewski retrace la genèse de la notion classique de classe et d'ensemble depuis Cantor jusqu'aux *Principia Mathematica*, en

10 «J'ai utilisé la symbolique, basée sur des exemples créés par des "logiciens mathématiques", comme un outil d'énonciation de pensées, techniquement plus simple que le langage courant et en même temps prêtant moins à des malentendus.» (1989: 102)

11 Cf. Lesniewski 1989: 47-52.

passant par les algébristes, Frege et divers auteurs de théories des ensembles¹². Il y formule de vives critiques à l'égard de ses confrères logiciens et mathématiciens. Aucun ne trouve grâce à ses yeux, à l'exception de Cantor et Frege: le premier parce que, comme nous l'avons signalé plus haut, sa définition de l'ensemble est susceptible d'une lecture collective; et le second pour la dimension critique de certaines de ses remarques formulées contre les tenants de l'algèbre de la logique.

Nous incluons dans notre présentation un certain nombre des critiques de Lesniewski, en l'occurrence celles concernant les logicistes, Frege d'une part et Whitehead et Russell de l'autre. A Frege sera également réservé une place particulière, à travers la lecture que nous conduirons de son article de 1895 dirigé contre l'algèbre de la logique de Schröder, *Kritische Beleuchtung Punkte in E. Schröder's Vorlesungen über die Algebra der Logik*¹³. Notre intérêt pour cet article découle de la perspicacité et de la précision exemplaires avec lesquelles Frege y discute la distinction opposant les approches distributive et collective des classes. Visant à justifier sa théorisation logiciste de la classe comme extension de concept, Frege accuse Schröder d'accorder la primauté à une conception purement extensionnelle ou collective des classes au détriment d'une conception les dérivant des concepts. Il écrit:

La différence complète – ou plutôt l'incompatibilité – qu'il y a entre elles est au premier regard masquée. Ainsi voisinent deux théories des classes et des extensions, l'une grossière et informe, l'autre plus fine et la seule utilisable en logique. (1895: 453)

Frege dénombre dans son étude un certain nombre de difficultés et d'erreurs propres à la méthode de Schröder qui privilégie la relation partie tout et cherche à la

12 Cf. Lesniewski 1989: 53-66.

traduire dans un domaine logique où elle n'est plus opératoire. Parmi ces difficultés, on rencontre en particulier celle liée à l'assimilation des individus aux classes unités et celle concernant la classe vide. Nous traiterons ces points à travers la lecture qu'en fit Lesniewski.

Il est intéressant de remarquer que Frege trace dans son article la trame de ce que sera quelques années plus tard le programme lesniewskien: concilier et articuler ensemble les deux théories (des classes au sens collectif et des extensions) qu'il juge lui-même mutuellement exclusives l'une de l'autre. Nous ne parlons pas pour autant d'influence directe. Nous remarquons simplement que Lesniewski va réaliser ce que Frege précisément refuse: adopter une théorie descriptive ou collective des classes en rendant celle-ci compatible avec un langage de pure logique.

Pour initier la présentation du concept de classe collective, revenons sur le présupposé fondamental dans lequel s'ancre la théorie collective des classes de Lesniewski.

4.2 Le présupposé fondamental

Toute la réflexion de Lesniewski est basée sur la présupposition que *les expressions de classe sont des expressions dénotantes*. C'est ce que révèle, écrit-il:

la manière habituelle d'employer les mots "classe" et "ensemble" dans le langage courant des hommes qui ne se sont occupés d'aucune "théories des classes" ni d'aucune "théorie des ensembles". (1989: 53)

Contrairement à Russell qui établit une distinction logique entre la classe plurielle [*class as many*] et la classe une [*class as one*] afin de lever la difficulté gram-

maticale liée à l'usage du mot «collection», Lesniewski ne fait aucune distinction de ce genre. Il considère que les expressions de classes sont des expressions nominales dénotantes qui désignent explicitement des collections, des ensembles d'objets. Ainsi, toute expression telle que, par exemple, «la collection de mes timbres», «la classe des hommes» ou encore «l'ensemble des phrases de cette thèse» est un nom singulier dans lequel les termes «collection», «classe» et «ensemble» ont une fonction agrégative de rassemblement en un tout d'une multiplicité d'objets distincts.

Par conséquent, sous une telle approche, l'objet dénoté par une expression telle que «la classe des *a*» est compris comme étant un objet de même nature que les objets *a* le composant. Cet objet doit être compté comme un, au sens unitaire de l'agrégat ou du tas constitué par les entités singulières possédant la propriété *a*. Il n'y a ainsi aucune dichotomie de nature ni de saut qualitatif dans le passage d'une extension à l'ensemble composé de cette extension, comme cela est le cas, à des degrés divers, dans les théories classiques. La classe ne possède ni un statut d'objet abstrait, ni celui d'un objet d'un niveau ontologique différent de celui des individus qui la composent, et encore moins celui de «symbole incomplet» avec lequel est supprimée la classe une au seul profit de la classe plurale.

Ce présupposé grammatical mis en avant, retournons dans un premier temps vers les logicistes. En signalant en effet certains traits particuliers dont les classes se voient investies, cela nous permettra de saisir avec plus de précision la différenciation véritable entre l'approche lesniewskienne de la classe et la leur. On sait que la conception purement extensionnelle de la classe n'est pour les logicistes pas admissible, ne serait-ce que parce qu'elle oblige à inventer la classe vide et ne

permet pas de distinguer un singleton de son unique élément. Citons à ce propos Russell, qui résume clairement la situation:

Nous ne pouvons pas prendre les classes de manière *purement* extensionnelle comme étant simplement des tas, ou conglomérats [*heaps or conglomerations*]. Si nous voulions essayer de le faire, nous trouverions impossible de comprendre où peut bien se trouver une classe comme la classe vide, laquelle n'a pas d'éléments du tout et ne peut pas être tenue pour un "tas", il nous serait aussi très difficile de comprendre qu'une classe qui n'a qu'un élément ne soit pas identique à celui-ci. Je n'ai pas l'intention d'affirmer ou de nier qu'il y ait des entités telles que les "tas". En tant que logicien mathématique, je ne suis pas appelé à avoir une opinion à ce sujet. Tout ce que je maintiens, c'est que, s'il existe quelque chose comme des tas, alors nous ne pouvons pas les identifier aux classes composées de leurs constituants. (1920: 183; cité in Lesniewski 1989: 65)

Si on considère en effet que ce sont les objets qui font la classe, conformément à la conception «naïve» qu'une classe en tant que collection d'objets est composée de ces objets, on ne peut avoir qu'une conception agrégative des classes. Il est alors impossible de disposer légitimement de la classe vide qui n'a pas d'éléments du tout. De plus, une telle conception incite à assimiler les classes à un seul élément avec leur unique élément. Au sujet de ce dernier point, Frege dévoile dans son article de 1895 qu'il est responsable, dans l'algèbre de la logique de Schröder, d'une contradiction. Nous reviendrons sur cette démonstration car elle fut contestée par Lesniewski. Mais pour l'heure, si nous mettons en avant le problème de la classe vide et des classes unités, c'est pour examiner la manière dont Lesniewski l'aborde, sous l'autorité de sa conception collective des classes. Poursuivons donc notre réflexion avec la question de la classe vide.

4.3 La classe vide

Sous une interprétation collective, la condition nécessaire de l'existence de l'objet «la classe des a » est que le domaine composé des a ne soit pas vide, autrement dit qu'il existe au moins un a . C'est ce qu'énonce la première thèse:

Si un objet est la classe des a , alors un objet est a .

Cette thèse récuse donc la classe vide. Au sujet de la classe vide, qu'il qualifiait de «monstre théorique»¹⁴, Lesniewski écrit:

A aucun moment je n'ai cessé d'être entièrement d'accord avec la remarque lapidaire de Frege à propos de l'algèbre de la théorie des classes d'Ernst Schröder: "Lorsqu'une classe se compose d'objets, lorsqu'un ensemble est l'union collective de ceux-ci, alors elle (il) doit disparaître, quand ces objets disparaissent. Lorsque nous brûlons tous les arbres d'une forêt, alors nous brûlons en même temps la forêt. Il ne peut donc y avoir de classe vide." (Frege 1895: 436-437; cité in Lesniewski 1989: 58)

C'est dans ce passage que l'on rencontre la première référence à l'article de Frege sur l'algèbre de la logique de Schröder. Aussi préciserons-nous quelques éléments du système de Schröder de nature à éclairer les remarques respectives de Frege et de Lesniewski¹⁵.

14 Étant d'avis que si un objet est la classe de tels et tels a (des hommes par exemple, des points, des cercles carrés) alors il se compose de ces a , j'ai toujours rejeté, conformément à la thèse 1 [...], l'existence de monstres théoriques dans le genre de la classe des cercles carrés, comprenant bien que rien ne peut être composé de ce qui n'existe pas. (1989: 58)

15 Le cœur du débat de l'article de Frege est le rejet par Schröder de l'univers de discours de Boole. La conception de cet univers, trop vaste selon Schröder, conduit à une contradiction dont il donne une démonstration. Pour y pallier, il propose avant l'heure une théorie des types et amorce une distinction entre l'inclusion et l'appartenance, même s'il ne dispose toujours que d'un symbole. Cependant sa théorie est prise en défaut par le simple fait qu'il tient pour identique un élément et sa classe unité. Ce que Frege montre, c'est que s'il peut surgir de la classe universelle booléenne une contradiction, c'est parce que Schröder a transgressé les lois de son calcul en mettant implicitement en relation les domaines avec les concepts. Malheureusement, il ne nous est pas possible de restituer ici dans ses détails l'argumentation aiguisée de Frege.

Dans le tome I de ses *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Schröder développe ce qu'il appelle un «calcul identique des domaines d'une multiplicité». Ce calcul est susceptible de recevoir plusieurs interprétations qui vont du calcul des classes au calcul des propositions, en passant par la théorie des groupes (1890: 160). Schröder appelle «multiplicité» une collection de choses quelconques, – objets de pensée en général – considérées comme des «éléments» ou des «individus». Toute agrégation d'éléments est appelée un «domaine». La relation entre deux domaines est la relation d'inclusion (ou *subsumption*). La proposition fondamentale, de la forme « $a \in b$ », se lit «a est b» et exprime le fait que le domaine a (le domaine du sujet) est inclus dans le domaine b (le domaine du prédicat) (1890: 159). Le calcul repose sur deux principes, exprimant les propriétés de réflexivité et de transitivité de cette relation.

Principe I: $a \in a$

Principe II: si $a \in b$ et $b \in c$, alors $a \in c$. (1890: 168-170).

Comme le remarque Frege, il est possible de substituer au terme «domaine» celui de «classe», compris dans le sens de classe collective. Quant à la relation d'inclusion, il s'agit de la relation de partie à tout.

Instead of “domains” we may here always say “classes”, if we take classes to be collective wholes, such as a wood, for example, and do not bring them with concepts. [...] What M. Schröder calls “inclusion” or “subsumption” is here, properly speaking, nothing but the part-whole relation, extended in such a way that every whole is to be treated as a part of itself. (Frege 1895: 434)

A ces principes s'ajoutent les définitions duales des domaines particuliers 0 et 1 par les postulats:

(2x) $0 \notin a$

(2+) $a \notin 1$ (1890: 188)

On trouve ensuite deux opérations, la somme «identique» et la multiplication «identique», notées « $a+b$ » et « ab » (1890: 199). Dans la terminologie courante, ce sont la réunion et l'intersection. La somme identique correspond à l'agrégation ou la collection de deux domaines: les individus de deux domaines sont réunis en un seul domaine. Quant à la multiplication «identique», c'est avec elle que surgit la première difficulté. En effet, si les domaines n'ont pas de partie commune, l'intersection n'est pas définie. Schröder est donc contraint à «inventer» la classe vide, ou à strictement parler le «zéro identique». Mais aucune classe dans un sens collectif ne peut être vide. Frege remarque avec malice que si une figure ovale sur le papier peut magiquement être dotée de la propriété requise, alors cela ne doit pas être trop difficile de fabriquer des diamants.

La «remarque lapidaire» frégéenne reprise à son compte par Lesniewski résulte donc de l'entorse commise par Schröder à sa conception collective des domaines. Observons que Schröder n'est qu'un parmi d'autres à recevoir, pour son entreprise d'«invention», les flèches critiques communes de Frege et de Lesniewski. Dedekind qui écrit que:

pour certaines raisons¹⁶ nous voulons laisser complètement de côté le système vide qui ne contient aucun élément, bien qu'il puisse être commode pour d'autres recherches d'en inventer un. (cité in Lesniewski 1989: 43)

reçoit des critiques analogues à celles dirigées contre Schröder. Il en est de même, par ailleurs, pour les auteurs de théories des ensembles:

Le fait qu'il n'existe pas dans le monde [...] aucun produit ne possédant pas d'éléments communs, n'empêche pas M. Sierpinski d'"inventer" un objet prétendant être le produit de deux ensembles de ce genre. Là où M. Hausdorff se sert de l'"admission", M. Sierpinski applique l'"introduction". L'auteur écrit notamment: "Chaque quantité d'ensembles possède naturellement une somme déterminée. Pour que nous puissions dire la même chose du produit et de la différence, nous devons introduire l'ensemble vide que nous désignerons par 0. Ainsi la formule $AB = 0$, exprime que A et B ne possèdent aucun élément commun". (1989: 56)

Mais revenons à Frege, *via* Lesniewski. Si Lesniewski souscrit à l'interdit qui doit frapper la faculté d'inventer, ce n'est pas pour voler au secours de la classe vide, comme le fait Frege, avec sa théorisation logique de la classe comme extension de concept. La seule chose qu'il retient de la remarque de Frege est sa dimension critique, conforme à sa propre position sur les classes. Ce sera par ailleurs l'unique point de rencontre entre les deux hommes. La suite de l'article n'est que source de divergences dans la mesure où Frege sanctionne radicalement l'approche collective de la classe de Schröder en pointant les difficultés qui surgissent lorsque ce dernier veut interpréter son calcul comme une logique à part entière.

Sous une telle interprétation, le terme «classe» se traduit par «extension de concept». L'expression « $a \in b$ » doit maintenant se lire «l'extension du concept sujet a est incluse dans l'extension du concept sujet b». La relation de subsumption est donc traitée comme la relation de subordination entre deux concepts. Frege montre alors que Schröder passe subrepticement d'un calcul des domaines à un calcul des classes sans se rendre compte que la relation de subordination d'un concept à un autre doit être complétée par la relation d'appartenance d'un indi-

16 Dedekind ne précise pas ces raisons, mais sans doute pense-t-il à sa définition extensionnelle

vidu à une classe. Sans cette distinction, affirme-t-il, il est impossible de prétendre élaborer un système logique en s'appuyant sur un pur calcul des domaines où prédomine la relation de partie à tout. En conclusion de son article, Frege pose l'antériorité des concepts sur les classes qui leur correspondent.

L'extension d'un concept ne se compose pas des objets qui tombent sous le concept donné, comme la forêt se compose d'arbres, mais elle prend appui sur le concept même et seulement sur lui.

(1895: 445; cité in Lesniewski 1989: 61)

C'est cette distinction entre extension et objets tombant sous un concept qui justifie à elle seule, chez Frege, la possibilité de donner à la notion d'extension un sens autre que de «collection», d'«agrégat» ou de «tout». Un concept ayant toujours une extension, même s'il n'a pas toujours des objets tombant sous lui, on peut en toute légitimité parler l'extension nulle, c'est-à-dire d'extension attachée à un concept contradictoire donné par un mot conceptuel tel que «cercle-carré». Ce faisant, Frege est en droit de définir le nombre zéro de la manière suivante:

0 est le nombre cardinal qui appartient au concept «non identique à soi-même».

Nous insistons sur cette distinction établie par Frege entre extension logique et multiplicité physique parce que, comme nous l'avons déjà fait remarquer, c'est une distinction d'une telle nature qui est au cœur même des systèmes de l'Ontologie et de la Méréologie.

De la notion d'extension de concept chez Frege, Lesniewski ne souligne que les zones d'ombre. Il écrit:

d'un système qui ne permet pas, tout comme pour Schröder, d'admettre l'existence de l'ensemble vide.

Quant à l'affirmation de Frege soutenant que l'extension du concept s'appuie sur le concept même et seulement sur lui, je ne la comprends pas mieux que les affirmations les plus obscures des représentants de la "philosophie romantique", autrement dit je ne la comprend absolument pas. (1989: 61)

Les familiers de l'œuvre de Frege savent que sa notion d'«extension de concept» présente de grandes difficultés d'appréhension. Toutefois, au delà de ces difficultés, il est probable que si Lesniewski ne la comprend «absolument pas», c'est aussi parce que la direction dans laquelle il déploie ses recherches est aux antipodes de celle de Frege qui, dans l'expression de l'édifice théorique qu'il élabore, tente d'évacuer tout ce qui relève de l'intuition matérielle. Or le propre de la démarche de Lesniewski est d'accorder la primauté à une intuition empirique des objets. C'est elle qui sanctionne la légitimité de la théorie collective des classes et, rétrospectivement, celle des théories logiques qui la fondent. A ce sujet, nous ne pouvons manquer de citer les propos suivants de Frege:

Il [*Schröder*]inventa le calcul des domaines [*Gebietekalkül*]où les classes sont composées d'objets singuliers ou d'individus; et, en effet, quoi d'autre pourrait déterminer l'existence d'une classe, si l'on faisait abstraction du concept, c'est-à-dire des propriétés communes! L'individu est alors également une classe. On obtient donc, d'une manière naturelle, la relation de partie à tout comme relation fondamentale. Voici ce qui est sans doute très intuitif. Domage seulement que ce soit stérile, et qu'on ne puisse parvenir ainsi à une logique.

Mais cela n'était pas stérile! Car c'est bien cette intuition, au cœur de la théorie collective des classes, qui va conduire à l'élaboration d'une théorie logique répondant au problème de l'élaboration d'un langage susceptible de recevoir les propositions se déroulant autour de la notion collective de classe, et reconnues comme intuitivement vraies. Cette logique, soulignons-le, sera par ailleurs in-

vestie de compétence fondatrice au sens du logicisme, puisqu'elle permet une traduction logique de la théorie des nombres.

Cette mise au point faite, nous poursuivons notre portrait de la classe collective en abordant les autres thèses. Pour des raisons de convenance, nous avons choisi de considérer la thèse [3] avant la thèse [2]. Cela nous permettra en effet de caractériser plus précisément l'approche collective des classes en la différenciant de l'approche purement extensionnelle que nous venons d'évoquer ci-dessus, telle que la conteste les logicistes.

4.4 Identité d'un objet avec la classe de lui-même

Sous une approche collective, tout objet est identique à la classe de lui-même. C'est ce qu'exprime la thèse [3]:

Si un – et un seul – objet est P , alors P est la classe des P .

Si on considère en effet qu'une classe n'est rien au-delà des objets qui la composent, en d'autres mots si on considère que ce sont les objets qui font la classe, il n'y a aucune distinction à faire entre un objet et la classe de lui-même. *A fortiori*, tout objet est également identique à la classe de la classe de lui-même. L'objet lune, par exemple, est identique à la classe de la lune et à la classe de la classe de la lune. De la même manière, la classe d'une classe d'objets singuliers est identique à la classe de ces objets. Pour en rester avec des objets dont nous aurons par la suite à considérer les têtes, la classe des hommes est le même objet que la classe de la classe des hommes. Ainsi entendu, on devine de quelle manière la version collective de la classe *dissout* l'antinomie de Russell. Puisque tout objet est identique à la classe de lui-même, cela signifie que toute classe est élément d'elle-même. Par conséquent, aucune classe ne peut être la classe des classes qui ne sont

pas éléments d'elles-mêmes. En d'autres termes, «la classe collective de Russell» n'existe pas.

Il nous reste à aborder la dernière thèse. Si l'on s'en tient aux deux premières (rejet de la classe vide et identité d'un objet avec la classe de lui-même), on pourrait penser que Lesniewski renoue simplement avec la conception purement extensionnelle des classes, celle-là même que combattent ses confrères logicistes. Mais il fait bien plus dans la mesure où, se plaçant dans une perspective d'analyse pleinement collective ou méréologique des classes, il rompt radicalement avec les modalités d'interprétation distributive de la classe. Lorsque Russell, dans sa variation sur la notion de tas, parle de la «classe des *a*» comme du «tas des *a*», il ne voit comme éléments composant la classe des *a* que les *a*, conformément à une lecture distributive de la classe, fidèle à la tradition cantorienne. Lesniewski, en revanche, fait une lecture méréologique de telles expressions. Une classe comme agrégat ou tas est appréhendée comme une unité constituée d'éléments ou de parties, au sens littéral du terme «constituer». L'agrégat ou le tas n'est pas simplement la juxtaposition des *a*, conçus comme des éléments atomiques et insécables. Il en est la totalité effective, conformément à l'usage ordinaire des notions de tas ou d'agrégat. De même qu'un tas de feuilles ou un mur de pierres est un tout (l'agrégat composé des feuilles ou des pierres), une classe collective est l'unité collective des ingrédients qui la composent. D'une telle lecture des expressions de classes découle une conséquence essentielle, celle touchant à l'interprétation de la relation d'appartenance d'un objet à une classe collective.

4.5 La relation d'appartenance

La notion d'élément perd la signification qui est la sienne dans le cadre d'une approche distributive de la classe. Car si un objet est un élément de la classe collective des a , cet objet n'est pas nécessairement a . Il peut certes être un a , mais il peut être également une partie, un ingrédient, un fragment *quelconque* du tout collectif généré par les objets a . Par exemple, si H est la classe collective des hommes et F est un élément de l'entité H , l'objet F n'est pas nécessairement un homme. F peut être ma tête, mes pieds ou encore n'importe quelle collection arbitraire d'ingrédients ou de parties constitutives de la classe, comme celle composée des têtes des hommes ou celle composée de ma tête et des habitants de Paris.

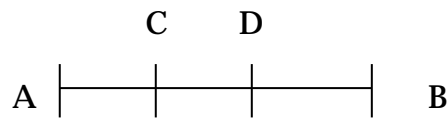
Dans l'introduction des *Grundgesetze*, attaquant la notion de système chez Dedekind, Frege demande: «La constellation d'Orion est-elle un système? Et quels sont ces éléments? Les étoiles, les molécules, les atomes?»¹⁷ Dans une perspective collective des classes, on répondra oui: les étoiles, les molécules et les atomes sont des éléments de la constellation d'Orion, appréhendé comme une entité collective.

C'est cette interprétation de la relation d'appartenance d'un objet à une classe collective qui est portée par la thèse [2]:

Il arrive fréquemment que tel ou tel objet soit la classe de tels et tels objets et qu'il soit simultanément la classe d'objets tout à fait différent

17 Frege 1893, trad. fr. dans Belna J.-P. 1996: 342.

Lesniewski illustre cette thèse avec le dessin suivant:

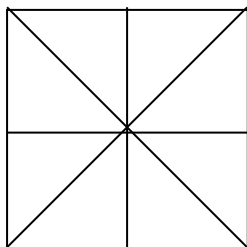


Le segment AB est à la fois la classe des segments AC ou CB et celle des segments AD ou DB.

La thèse [2] a pour conséquence immédiate de récuser le principe d'extensionnalité classique selon lequel, un ensemble étant entièrement caractérisé par ses éléments, deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments. En effet, si un objet est la classe collective des a et également la classe collective des b , la classe des a et la classe des b sont le même objet, mais il n'en résulte pas que les objets a sont nécessairement les mêmes que les objets b . L'exemple proposé ci-dessus avec le segment suffit à s'en convaincre.

Il est intéressant de relever que Frege, dans son étude sur l'algèbre de la logique de Schröder, déroule jusqu'à leur terme les conséquences d'une approche collective des classes. Nous l'avons mentionné précédemment, il observe que si l'on considère une classe comme un tout collectif, comme le sont par exemple une forêt ou une armée, on peut substituer le terme de «classe», pris dans le sens collectif, à celui de «domaine». Mais il ajoute aussi que, par conséquent, la divisibilité d'une classe collective peut être envisagée *ad infinitum*. Il n'est pas donc pas nécessaire de disposer des termes «élément» ou «individu», au sens qui est le leur sous une conception distributive de la classe. Considérons par exemple la figure A suivante.

Figure A



Seuls les cinq carrés de la figure A sont éléments de la classe distributive des carrés. Par contre, non seulement les carrés, mais aussi les triangles ou toute autre partie arbitraire de la figure A est un ingrédient de la totalité collective. Aucun de ces ingrédients ne nécessite par ailleurs d'être indivisible. De la même manière, si l'on considère une armée, seuls les individus soldats sont éléments de la classe distributive composée des soldats de l'armée, alors que les soldats, mais aussi les compagnies, les régiments, les divisions, l'armée elle-même et toute collection arbitraire de soldats ou de leurs parties sont ingrédients de la totalité ou classe collective constituée des soldats d'une armée.

C'est ainsi, à la faveur de cette interprétation collective des classes, que Lesniewski peut affirmer que sa position sur les classes est fidèle à la définition de l'ensemble de Cantor, ce «fond intuitif historique» que nous avons évoqué plus haut et qu'ont trahi, à ses yeux, les théories classiques des classes et des ensembles. Il peut donc écrire que:

chacun des sons, dont une pièce de musique est l'ensemble, est, conformément à la position de Cantor, une partie constitutive de cet ensemble et la pièce de musique elle-même est composée des sons dont elle est l'ensemble, *tout comme le tableau est composé de telles ou telles parties bien choisies dont il constitue l'ensemble.* (1989: 53)

4.6 La classe singulière

Il nous reste à revenir sur la thèse [3] pour aborder la notion de «classe singulière», telle qu'elle est comprise au sein de la Méréologie. A ce titre, nous examinerons la démonstration proposée par Frege de la contradiction qui surgit dans l'algèbre des classes de Schröder où un individu est tenu pour identique à la classe qui ne se compose que de lui.

Nous voulons également considérer un individu comme étant une classe qui ne contient que cet individu. (Schröder 1890: 148)

Nous évoquons cette démonstration parce que Lesniewski la conteste, y relevant une «erreur». Nous soulignons à dessein le terme «erreur» car, à la décharge de Frege et comme nous le montrerons, on ne peut parler d'erreur qu'à la faveur d'une approche collective des classes, *telle celle que revendique Lesniewski*.

Comme l'énonce la thèse [3], tout objet est identique à la classe de lui-même. Mais contrairement aux théories classiques, cela n'implique pas que cet objet en soit l'unique élément. En effet on ne peut parler de classe singulière que dans le cas où l'objet en question est un élément atomique, c'est-à-dire indivisible ou non composé de parties. Car dans une perspective collective, si tout objet singulier vaut comme élément de lui-même en tant que classe, il est également l'ensemble de ses parties ou éléments constitutifs. De ce point de vue, la thèse [3] doit donc s'interpréter ainsi: si une classe est une classe singulière, alors elle est le même objet que son élément, *qui est son seul élément, c'est-à-dire indécomposable*.

Pour fixer sa terminologie au sujet de la classe singulière, Lesniewski démontre la thèse que *si une classe est une classe singulière, alors elle est le même objet que son élément*. La démonstration est la suivante:

De la thèse [3]

Si un – et un seul objet – objet est P, alors P est la classe des P.

Il résulte

(A) Si un – et un seul objet– est élément de la classe K, alors l'élément de la classe K est la classe des éléments de la classe K.

Étant d'avis que

(B) Si X est la classe des éléments de la classe K, alors la classe K est le même objet que X

De (A) et (B) on peut inférer

(C) Si un – et un seul objet – est élément de la classe K, alors la classe K est le même objet que l'élément de la classe K.

et

(D) K est une classe singulière si et seulement si un – et un seul – objet est élément de la classe K.

De (D) et (C) on peut alors conclure

(E) Si une classe est une classe singulière, alors elle est le même objet que son élément. (1989: 58-59)

Quant à la démonstration proposée par Frege de la contradiction qui résulte dans la logique des classes de Schröder de l'assimilation des classes unités avec leur seul élément, c'est la suivante:

(a) Le doute relatif à la question de savoir si *chaque individu peut être tenu pour une classe* sera renforcé par la réflexion suivante. Nous pouvons prendre pour P dans notre considération antérieure également une classe qui contient un ensemble d'individus; car, comme l'auteur le dit à la page 148, une telle classe peut se donner aussi pour un être de raison et en ce sens aussi comme un individu.

(b) Si Q est maintenant, comme plus haut, la classe coïncidant avec les objets P, alors Q est une classe singulière qui ne contient comme individu que P.

(c) S'il était vrai maintenant qu'une classe singulière coïncide avec l'individu qui en est l'unique élément, alors P coïnciderait avec Q. Admettons maintenant que a et b soient des objets différents compris pas P en tant qu'individus, alors ils seraient aussi maintenant compris par Q; cela voudrait dire que a coïncide avec P aussi bien que Q. En conséquence a coïnciderait aussi avec b contrairement à la supposition admise selon laquelle ils seraient différents. (1895: 445; trad. dans Lesniewski 1989: 60)

Soulignons tout d'abord que la supposition selon laquelle *chaque objet peut être tenu pour une classe* ne suscite aucun doute pour Lesniewski. C'est pourquoi toute tentative visant à la rejeter est *a priori* irrecevable et ne modifiera pas sa position au sujet des classes. Mais la question est ailleurs. L'intention de Lesniewski est en effet de montrer que la démonstration de Frege est fallacieuse parce que ce dernier traite de manière interchangeables deux suppositions qui, dans le cadre de la théorie collective des classes, ne sont pas équivalentes.

Les deux suppositions en question sont les suivantes:

- (1) Tout individu peut être tenu pour une classe.
- (2) Une classe singulière coïncide avec l'individu qui en est l'unique élément.

La supposition (1) est conforme à une conception collective des classes, pour autant que l'on ne l'interprète pas, à la manière de Frege, comme signifiant que tout individu peut être tenu pour une classe *qui n'est composée que de lui*, autrement dit une classe singulière dont il est le seul élément. Comme nous l'avons déjà dit, ce n'est que dans le cas où l'individu en question est un objet atomique, au sens méréologique, que l'on peut affirmer qu'il peut être tenu pour une classe dont il est l'unique élément et que, partant, la classe en question est une classe singulière. C'est le sens de la thèse (E) dont l'obtention est conforme à la proposi-

tion suivante avancée par Frege: «Notre supposition selon laquelle [*dans le calcul des domaines de Schröder*] les classes singulières coïncident avec les individus est une conclusion nécessaire de la conception d'après laquelle les classes se composent d'individus». Cependant la thèse (E) est conforme à cette proposition pour autant que l'expression «les classes singulières coïncident avec les individus» – qui pour Frege est un équivalent de la proposition «une classe qui n'est composée que d'un objet coïncide avec celui-ci» – se laisse interpréter à l'aide de la thèse (E).

Quant à la proposition suivante (E'), elle est bien entendu rejetée:

(E') Chaque objet est la classe dont cet objet est précisément l'unique élément.

Les choses ainsi précisées, il est dès lors facile pour Lesniewski de pointer l'«erreur» commise par Frege. En effet la supposition (2)

une classe singulière coïncide avec l'objet qui en est l'unique élément,

interprétée comme (E)

si une classe est une classe singulière, alors elle est le même objet que son élément

ne peut pas être remise en cause par l'argumentation du passage (c), tout simplement parce que (b),

si Q est maintenant, comme plus haut, la classe coïncidant avec les objets P, alors Q est une classe singulière qui ne contient comme individu que P,

qui permet à Frege dans (c) de conclure que a et b coïncideraient à la fois avec P, est maintenant privé de valeur.

Lesniewski conclut que l'affirmation de Frege soutenant que «la conception selon laquelle la classe se compose d'individus, et partant que l'objet singulier coïncide avec la classe singulière, ne peut en aucun cas être maintenue comme exacte», ne peut en aucune manière être justifiée sur la base de la démonstration rapportée ci-dessus. Rien n'autorise, en effet, d'inférer («et partant») que «l'objet singulier coïncide avec la classe singulière» de «la conception selon laquelle la classe se compose d'individus».

Nous concluons ce portrait de la classe collective en citant un commentaire de Lesniewski sur la notion de «tas». Celui-ci n'est autre que la réponse à celui de Russell, rapporté plus haut (4.2).

[...] conformément à l'emploi que je fais des termes "ensemble" et "classe" ainsi que compte tenu de la manière de se servir du terme "tas" dans le langage courant (M. Russell ne détermine pas le sens du terme "heap" de façon explicite, mais il emprunte ce terme au langage courant dans l'état où il se trouve, donc tout "cru"), je peux toujours dire du "tas" de n'importe quel a qu'il est un ensemble de a , et du "tas" des a composé de tous les a , qu'il est la classe des a . (1989: 65-66)

Ce passage ne suggère guère plus de commentaires que ceux déjà formulés. On notera simplement que cet échange sur la notion de «tas» jette toute la lumière sur le conflit des points de vue et des *intuitions* qui les accompagnent, eu égard aux motivations de chacun.

Pour terminer, nous nous pencherons sur les critiques formulées par Lesniewski sur la «no-class theory» des *Principia Mathematica*. Ces critiques se développent autour d'un passage du tome I des *Principia* dont nous avons cité un extrait dans le premier chapitre, lorsque nous avons tracé les grandes lignes de la «no-class theory». Commençons par reporter cet extrait. Nous le compléterons par la suite:

Les symboles de classes, comme ceux des descriptions, sont dans notre système des symboles incomplets: leurs usages sont définis, mais eux-mêmes sont supposés ne rien vouloir dire du tout. C'est-à-dire que les usages de ces symboles sont définis de telle sorte que, quand le *definiens* est substitué au *definiendum*, il ne reste aucun symbole qui puisse être supposé représenter une classe. Aussi les classes, dans la mesure où elles sont introduites, ne le sont que comme des commodités purement symboliques ou linguistiques, et non comme des objets authentiques tels que le sont leurs membres lorsque ce sont des individus.

L'opposition de Lesniewski à Whitehead et Russell est totale. A la lumière de ce qui précède, on devine qu'il ne pouvait que s'opposer au procédé de la définition contextuelle de la classe, celui-ci ayant pour finalité d'exclure les expressions de classe de la catégorie des noms propres et de se dispenser de toute hypothèse au sujet de leur existence. Nous l'avons vu, les expressions de classe sont pour Lesniewski des noms singuliers désignant des «objets authentiques». Le passage se poursuit ainsi:

C'est une vieille querelle que celle de savoir si la logique formelle devrait s'intéresser principalement aux intensions ou aux extensions. [...] Notre théorie des classes reconnaît et réconcilie ces deux faits apparemment opposés en montrant qu'une extension (*laquelle n'est autre chose qu'une classe*) est un symbole incomplet dont l'emploi acquiert toujours sa signification à travers la référence à une intension.

Dans le cas des descriptions il a été possible de prouver qu'elles sont des symboles incomplets. Dans le cas des classes nous ne connaissons aucune preuve aussi bien déterminée, quoique des arguments plus au moins probants peuvent être tirés de l'ancien problème de l'Un et du Multiple*. Cependant il n'est pas nécessaire pour notre propos d'affirmer dogmatiquement que les classes n'existent pas. Il nous est seulement nécessaire de montrer que les symboles incomplets que nous introduisons comme symboles représentant des classes donnent toutes les propositions pour lesquelles les classes pourraient être jugées essentielles. Une fois ceci montré, le pur principe de

l'économie des notions primitives conduit à n'introduire ces classes que comme des symboles incomplets.

*Ces arguments se ramènent en peu de mots à ceci: S'il existe un objet tel qu'une classe, alors il doit être, en un certain sens, un objet. Cependant c'est uniquement de classes qu'on peut prédiquer *plusieurs*. C'est pourquoi si nous admettons les classes comme objets, nous devons supposer que le même objet peut être à la fois un et multiple, ce qui semble impossible. (Whitehead & Russell 1927: 75; cité in Lesniewski 1989: 63)

Concernant ce passage, Lesniewski en retient les explications tortueuses au sujet des notions de classe et d'extension. Il souligne que les auteurs des *Principia* ne s'expliquent pas sur ce qu'est une classe au sens admis par eux, c'est-à-dire comme extension de concept et que, de surcroît, s'ils refusent d'admettre l'existence d'objets qui sont des classes ils ne doutent pas, en revanche, de l'existence d'objets qui sont des symboles incomplets. On notera en passant que la difficulté mentionnée par Lesniewski n'est guère contournable puisque la définition contextuelle de la classe doit précisément permettre de paraphraser des contextes où il semble que l'on fasse référence à des entités de telle sorte que toute référence à ces «entités» ait disparu! Mais l'intention de Lesniewski n'étant pas de conclure au bien fondé du nominalisme instrumental de Whitehead et Russell, il conclut à l'inintelligibilité de leurs explications et à l'impossibilité de savoir «de quels objets ils examinent l'existence ou l'inexistence, lorsqu'ils considèrent l'existence ou l'inexistence des objets qui sont des "classes"». Il mentionne n'avoir pas trouvé un seul passage dans les *Principia* duquel il aurait pu supposer, fût-ce même de manière à peine perceptible, qu'il mette en question l'existence des classes au sens qu'il donne à ce terme. D'où la conclusion suivante:

En reconnaissant dans l'odeur caractéristique qui me parvient des classes de MM. Whitehead et Russell comme dans celle que dégagent les "extensions de concepts" de Frege, l'odeur des spécimens mythiques provenant de la riche galerie des objets "inventés", j'aurais tendance à épouser les doutes des auteurs sur le fait que des objets qui seraient de telles "classes" existent dans le monde. (1989: 65).

C'est sur ces propos que s'achève ce chapitre avec lequel nous avons voulu dessiner les contours de classe collective, en montrant l'opposition irrémédiable à la conceptualisation de la classe par les logicistes. Disposant des outils conceptuels nécessaires, nous allons à présent exposer l'analyse de l'antinomie russellienne conduite par Lesniewski.

5. Résolution de l'antinomie

Souvenons-nous qu'une antinomie révèle la présence d'une croyance fautive dans les présupposés ou dans le raisonnement conduisant à partir de ces présupposés à la contradiction. Les règles de raisonnement n'étant pas sujettes à suspicion, ce sont les présupposés liés à la notion de classe que Lesniewski va questionner, *du point de vue* d'une conception collective de la classe. La stratégie est alors de montrer qu'il n'existe pas de classe collective qui n'est pas élément d'elle-même et que, partant, la classe (collective) de Russell n'existe pas. En effet, la réponse à la question «la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes est-elle élément d'elle-même?»¹⁸ pourra recevoir une réponse positive ou négative à la condition qu'il existe un objet qui soit la classe des classes qui ne sont

18 Lesniewski utilise l'expression «être subordonné à» à la place de «être élément de», comme le fait Lukasiewicz dans son article de 1910.

pas éléments d'elles-mêmes. Si un tel objet n'existe pas, alors l'expression «la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes» ne dénote aucun objet. Par conséquent, puisque toute proposition dans laquelle cette expression apparaîtra comme sujet sera fausse, il n'y aura plus de contradiction.

Pour comprendre cette stratégie, il est nécessaire de préciser l'interprétation de la proposition singulière qui la sous-tend. Une proposition singulière de la forme *tel a est b* est vraie si et seulement si l'objet a existe et s'il possède la propriété b, sinon elle est fausse. Comme nous y reviendrons, c'est cette interprétation de la copule «est» qui sera formalisée par la suite dans l'Ontologie.

L'analyse se déploie à partir des trois thèses qui nous ont servies pour la présentation de la classe collective. Nous les rappelons:

- [1] Si un objet est la classe des a, alors un objet est a.
- [2] Il arrive fréquemment que tel ou tel objet soit la classe de tels et tels objets et qu'il soit simultanément la classe d'objets tout à fait différents.
- [3] Si un – et un seul – objet est P, alors P est la classe des P.

Ensuite vient la définition de la relation «être élément de»:

- [4] P est élément de la classe K si et seulement si, compte tenu d'une certaine signification du terme «a» sont remplies les conditions suivantes:
 - 1) K est la classe des a.
 - 2) P est a¹⁹.

Puis on trouve deux thèses de l'Ontologie²⁰:

19 Par exemple, tout rectangle du carré K de la fig. 1 est élément de la classe des triangles du carré K. En effet, avec «a» pour «rectangle du carré K», on a:

- 1) La classe des triangles du carré K est la classe des a.
- 2) Tout rectangle du carré K est a.

20 Cf. *infra*, chapitre III, l'axiome de l'Ontologie et la thèse T_O15.

[5] Si P est a, alors un et un seul objet est P.

[6] Si P est a, alors P est P.

De 5, 3 et 6 on constate alors que²¹:

[7] Si P est une classe, alors P est la classe des P.

[8] Si P est une classe, alors

1) P est la classe des P.

2) P est P.

Et de 8 on déduit que:

[9] Si P est une classe, alors, compte tenu d'une certaine signification du terme

«a», sont remplies les conditions suivantes:

1) K est la classe des a.

2) P est a.

De 9, d'après la définition 4, il s'ensuit que:

[10] Si P est une classe, alors P est élément de la classe P.

Donc,

[11] Aucun objet n'est une classe qui n'est pas élément d'elle-même.

Par conséquent, en fonction de 1 et de 11:

[12] Aucun objet n'est la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes.

Ainsi, puisque leur sujet ne dénote aucun objet, les deux propositions, «la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes est élément d'elle-même» et «la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes n'est pas élément

²¹ Cette démonstration repose sur les thèses 1 à 6. Ces thèses sont admises en raison de leur vérité intuitive. Ce n'est qu'en 1916, avec la première axiomatique, qu'elles se verront assigner un statut formel.

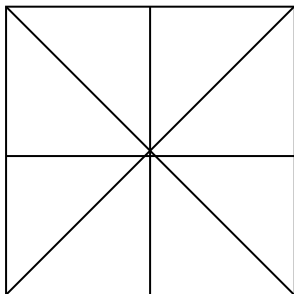
d'elle-même», sont toutes les deux fausses. Il n'y a donc plus l'ombre d'une antinomie.

J'ai donc cessé, écrit Lesniewski, de voir une "antinomie" dans la construction de M. Russell en cessant de croire à l'existence de la classe des classes qui ne sont pas subordonnées à elles-mêmes, donc en rejetant l'une des positions fondamentales de ladite construction (1989: 51)

A la suite de cette démonstration, Lesniewski en propose une autre. Cette dernière fait intervenir le présupposé ensembliste relatif à la relation d'appartenance, à savoir que tout objet appartenant à la classe des objets a est a .

Sous une interprétation méréologique des classes, ce principe est récusé. Son rejet est une conséquence directe de la définition 4 de la relation «être élément de». Considérons à ce titre de nouveau la figure 1 et appelons le carré K .

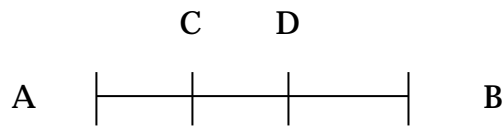
Figure A



Un triangle n'est pas un rectangle. Cependant, *tout triangle est élément de la classe des rectangles du carré K* . En effet, si l'on se reporte à la définition 4, avec « a » pour «triangle du carré K », les deux conditions sont remplies:

- 1) La classe des rectangles du carré K est la classe des a .
- 2) Tout triangle du carré K est a .

Quant à Lesniewski, il utilise le dessin 1 du segment AB.



Dessin 1

Son raisonnement est le suivant. De la thèse 2, et en s'appuyant sur le dessin 1, on peut affirmer ces trois thèses:

[13] AB est la classe des segments AC ou CB.

[14] AB est la classe des segments AD ou DB.

[15] AC est le segment AC ou le segment CB.

De 13 et de 15 on infère que:

[16] Compte tenu d'une certaine signification du mot "a" sont remplies les conditions:

1) AB est la classe des a.

2) AC est a.

Et de 16 et la définition 4 que:

[17] AC est élément de la classe AB.

Par conséquent, en constatant que

[18] AC n'est pas le segment AD ou le segment DB

et sur la base de 14, 17, 18, on peut rejeter le présupposé que

si K est la classe des a et P est élément de la classe K, alors P est a.

Ensuite, Lesniewski montre que ce présupposé et la thèse 6 suffisent à engendrer l'antinomie. Soient:

[6] Si P est a, alors P est P.

[A] Si K est la classe des a et P est élément de la classe K, alors P est a.

Pour ce faire, on opère les substitutions suivantes.

Dans la proposition A, on substitue «la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes» à «K» et à «P», et «classe qui n'est pas élément d'elle-même» à «a». On obtient:

Si la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes est la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes et la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes est élément de la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes, alors la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes est une classe qui n'est pas élément d'elle-même.

Dans la thèse 6 on substitue «la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes» à «P» et «un élément de la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes» à «a». Ce qui donne:

Si la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes est un élément de la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes, alors la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes est la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes.

Des deux propositions obtenues à partir de 6 et de A on conclut²²:

Si la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes est élément de la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes, alors la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes est une classe qui n'est pas élément d'elle-même.

En d'autres termes: =

²² Ces deux propositions étant respectivement de la forme $p \rightarrow q$ et $(p \rightarrow q) \rightarrow m$, on peut inférer $p \rightarrow m$.

Si la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes est élément d'elle-même, alors la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes n'est pas élément d'elle-même.

Mais puisque que le présupposé [A] est faux dans la perspective, la contradiction que l'on pouvait construire à partir de la supposition que «la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes est élément d'elle-même» n'est plus recevable.

Il nous faut préciser que l'analyse de l'antinomie russellienne que nous venons d'exposer est en fait la deuxième que proposa Lesniewski. Il existe en effet trois analyses de l'antinomie russellienne. La première a été réalisée en 1913 et publiée en 1914²³. Durant cette même période Lesniewski formule la deuxième analyse. Quant à la troisième analyse, elle ne fut pas publiée de son vivant. La version originale de Lesniewski ayant été perdue, elle a été reconstruite à partir de notes de cours par Sobocinski²⁴. La première analyse obéit à la même stratégie que la deuxième. Visant aussi à montrer que la classe collective de Russell n'existe pas, Lesniewski y obtient l'équivalent de la thèse formulée dans l'analyse exposée ci-dessus. Il renia par la suite cette première analyse pour son aspect trop informel et l'absence de base axiomatique précise, écrivant à son sujet que «son comportement était à cet égard tout à fait semblable au comportement de tous ces "théoriciens des ensembles" qui n'édifient pas leurs travaux sur des fondements mathématiques explicites». Ce jugement mis à part, il se dessine déjà très précisément dans cette analyse le concept de classe collective ainsi que l'usage du «est» présageant celui de la proposition singulière de l'Ontologie. Quant à la troi-

23 Lesniewski 1992: 115-128. Cf. au sujet de cette première analyse Sinisi 1976.

24 Sobocinski 1949-50.

sième analyse, elle diffère des deux autres dans la mesure où elle a été conçue après que Lesniewski ait achevé la construction de ces trois théories, la Protothétique, l'Ontologie et la Méréologie. Elle est en quelque sorte un dernier retour à l'antinomie, à la lumière du système complet des fondements des mathématiques de Lesniewski. Les deux présupposés que sont le principe de compréhension et celui touchant à la relation d'appartenance ensembliste qui interviennent dans la formulation de l'antinomie sont analysés l'un après l'autre. Dans un premier temps, Lesniewski substitue au principe de compréhension dont il qualifie la vérité de «douteuse» une thèse plus faible, énonçant que s'il existe un objet qui est a , alors il existe un objet qui est la classe des a^{25} . Il montre alors que le remplacement du principe de compréhension par cette thèse n'élimine pas l'antinomie. Il en déduit que le second présupposé est responsable de l'antinomie, ce qu'il montre. Mentionnons que l'on trouve également dans cette troisième analyse une démonstration de l'insuffisance de l'amendement apporté par Frege à sa loi V et que, pour terminer, il est montré que l'antinomie de Russell ne peut pas être formulée dans le langage de l'Ontologie sans en violer les directives formelles. Nous confirmerons ce dernier point dans le chapitre suivant, lorsque l'Ontologie aura été présentée. Pour le reste, nous ne pouvons rien dire de plus, ne disposant pas des systèmes déductifs fondant la Méréologie.

25 Cette thèse constitue un des axiomes de l'axiomatique de la Méréologie que nous avons adoptée (cf. *infra* section 6).

6. Une axiomatique de la Méréologie

En guise de conclusion à ce chapitre, considérons une axiomatique de la Méréologie. Il s'agit de la première axiomatique proposée par Lesniewski. Elle date de 1916²⁶.

Précisons déjà que c'est l'axiomatique que nous adopterons pour établir les thèses validant l'argument de De Morgan. Par ailleurs, n'ayant pas encore présenté la syntaxe logique dans laquelle s'ancre la Méréologie, nous renvoyons les commentaires d'ordre structurel au chapitre IV.

Cette axiomatique comprend quatre axiomes et deux définitions. On y trouve deux relations de nature partitive. La première est la relation de partie à tout, comprise de telle manière que le tout n'est pas une partie de lui-même. C'est la relation primitive de cette axiomatique. Les deux premiers axiomes en fixent la signification, en établissant respectivement les propriétés d'antisymétrie et de transitivité. La seconde relation est celle d'appartenance collective entre deux objets. Elle est introduite par la première définition, de laquelle découle ses propriétés de réflexivité et de transitivité. Une seconde définition définit ensuite la classe collective par la conjonction de trois clauses. Puis viennent les deux derniers axiomes. Le premier exprime l'unicité de la classe collective. Le second énonce que s'il existe au moins un objet qui est a , alors la classe collective des a existe.

Axiome 1:

Quels que soient A et B , si A est partie de B alors B n'est pas partie de A .

²⁶ Lesniewski 1992: 230-232; 1989: 79-80. Cette axiomatique fut revue par Lesniewski en 1918, 1920 et 1921. D'autres axiomatiques furent par la suite proposées par Sobocinski 1949-50; Lejewski 1954, et Clay 1966.

Axiome 2:

Quels que soient A, B et C, si A est partie de B et B est partie de C, alors A est partie de C.

Définition 1:

Quels que soient A et B, A est un élément de B si et seulement si A est le même objet que B ou A est partie de B.

Définition 2:

Quels que soient A et a, A est la classe des a si et seulement si les trois conditions suivantes sont remplies:

1. A est un objet.
2. Chaque a est élément de A.
3. Si B est élément de A, alors il existe un élément de B qui est élément d'un a.

Axiome 3:

Quels que soient A, a et b, si A est la classe des a et B est la classe des a, alors A est identique à B.

Axiome 4:

Quels que soit A et a, si un objet est a, alors il existe B qui est la classe des a.

Nous nous contenterons, à ce stade de notre travail, de quelques commentaires succincts au sujet de la définition 2. Le foncteur «classe de» fonctionne comme un foncteur unificateur en un tout d'une multiplicité d'objets représentée par les objets a. S'il existe des objets a quelconques, par exemple des oiseaux, la classe des oiseaux existe (axiome 4). Cette entité collective est un objet (clause 1 de la définition). Il s'agit du tout composé, au sens littéral du terme, des oiseaux. Parmi les

éléments de cette entité collective, on trouve non seulement chaque oiseau (clause 2) mais également n'importe quel ingrédient constitutif de cette entité (clause 3). A ce propos arrêtons nous quelques instants sur la clause 3. C'est elle en effet qui autorise une visite ingrédientielle de tout objet appréhendé comme une classe collective. Prenons par exemple pour l'objet B l'aile d'un oiseau quelconque. Cet objet est un élément de la classe collective généré par le nom «oiseau». En effet, conformément à la condition dictée par la clause 3, il existe un élément de l'aile en question, par exemple ses plumes, qui est élément d'un oiseau, en l'occurrence l'oiseau auquel appartient l'aile. De même, l'objet collectif composé des ailes des oiseaux est un élément de la classe des oiseaux. Il existe bien un élément de la classe des ailes des oiseaux, par exemple une plume quelconque, qui est élément d'un oiseau, en l'occurrence l'oiseau auquel appartient la plume en question.

Ainsi s'achève ce chapitre. Nous abordons à présent, avec le suivant, la question des systèmes logiques qui fondent la Méréologie.

CHAPITRE III

PRELIMINAIRES LOGIQUES

Dans ce chapitre, nous présenterons les systèmes logiques que présupposent la Méréologie. Ces systèmes sont au nombre de deux: la Protothétique et l'Ontologie. Nous resterons discret en ce qui concerne la Protothétique, une théorie des propositions quantifiée et élargie. Par contre, nous accorderons une attention particulière à l'Ontologie. Fondée sur la Protothétique, l'Ontologie est une théorie générale des relations entre noms, relativement à leur extension. C'est le premier système logique construit par Lesniewski et qui répondait à la nécessité d'une syntaxe logique, libérée de toute antinomie, et susceptible de «recevoir» les propositions de la Méréologie reconnues comme intuitivement vraies, sous une interprétation collective des classes. C'est par elle que passe la conciliation et l'articulation des deux interprétations distributive et collective des classes et, partant, la possibilité d'une résolution méréologique de l'argument de De Morgan. Nous montrerons par ailleurs que l'antinomie de Russell ne peut pas y être formulé sans transgresser les directives inférentielles des systèmes de Lesniewski.

1. Préambule

La Méréologie repose sur l'Ontologie, un calcul extensionnel des noms¹. Il s'agit d'une théorie développementale et interprétée, constituant une logique libre, universelle et d'ordre supérieur. Elle est elle-même ancrée dans la Protothétique, un calcul propositionnel élargi qui recourt à une quantification sur les variables propositionnelles ainsi que sur les variables de foncteurs et dont l'unique foncteur primitif est la biconditionnelle, \leftrightarrow . Le choix de ce foncteur est à mettre en relation avec la dimension développementale des systèmes de Lesniewski². Celle-ci relève en effet d'une procédure inférentielle définitoire grâce à laquelle les définitions sont insérées comme thèses dans le calcul par leur formulation équivalentielle permettant ainsi, partant des significations primitives contenues dans la base axiomatique, l'introduction progressive et contrôlée d'un nombre indéfini de foncteurs nouveaux. Pour la Protothétique, ceux-ci peuvent être d'une quelconque catégorie construite à partir de la catégorie sémantique des propositions, S , tandis que pour l'Ontologie ils peuvent être d'une quelconque catégorie construite à partir des deux catégories sémantiques des propositions et des noms, S et N (*cf. infra* section 5). Ces systèmes ne sont donc pas limités aux foncteurs formateurs de propositions à un ou deux arguments propositionnels, S/S et S/SS , ou à n arguments nominaux, $S/N_1 \dots N_n$, comme cela est le cas pour les calculs standard des propositions et des prédicats.

1 Selon la propre qualification de Lesniewski, l'Ontologie est une logique traditionnelle modernisée qui, par son contenu et sa force, s'approche le plus du «Klassenkalkül» de Schröder. (Lesniewski 1989: 32)

2 Lesniewski critiqua fortement les logiciens, et tout particulièrement Whitehead et Russell, pour avoir traité les définitions comme des abréviations métalinguistiques, négligeant ainsi que l'usage du signe «=df» s'accompagnait d'un double usage puisqu'à toute définition de la forme $E =df F$ correspond l'équivalence $E \leftrightarrow F$.

Il n'entre pas dans notre propos, avec ce chapitre, d'épuiser l'étude des modes formels de l'Ontologie. Nous nous efforcerons seulement d'en esquisser les grandes lignes, étant en premier lieu soucieux d'éclairer ce langage logique sous l'angle de la raison fondamentale qui, pour une large part, en a déterminé le caractère propre, à savoir fonder logiquement la Méréologie. Aussi serons-nous particulièrement attentif au traitement extensionnel qu'il opère, à travers l'analyse de la proposition singulière et du traitement logique des noms qui en est solidaire. Concernant ses directives inférentielles, nous les présenterons de manière synthétique, en mettant l'accent sur les directives de définitions que nous serons conduite à exercer pour définir un certain nombre de foncteurs.

Avant toute chose, il convient de relever avec force que nous sommes en présence d'une théorie logique qui n'établit aucune dichotomie entre formalisation et interprétation, la première n'étant pour ainsi dire qu'un mal nécessaire. Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre précédent, le point de vue de Lesniewski sur ses systèmes formels doit être compris comme un formalisme intuitif, ces systèmes étant conçus dans le but d'exprimer – en un mot de formaliser – ses intuitions logiques.

Je ne connais aucune méthode efficace pour transmettre au lecteur mes "intuitions logiques" sinon la méthode de formalisation de la théorie déductive [...] qui, cependant, sous l'influence de la formalisation, ne cesse de consister en propositions clairement douées de sens et possédant pour moi une vérité intuitive. (Lesniewski 1992: 487)

Cependant quelle est la nature des intuitions logiques qui sous-tendent et fondent le système de l'Ontologie? Pour fournir un élément de réponse à cette question, rappelons-nous que ce sont des considérations d'ordre ontologique qui

ont gouverné la conception de cette théorie logique, celle-ci devant permettre une greffe extra-logique de la Méréologie sans se compromettre avec des entités abstraites d'aucune sorte. L'Ontologie – et partant la Protothétique – a donc été conçue de manière à être conforme à la position philosophique nominaliste première de Lesniewski – voire même l'exprimer. Reprenant les propos de Kearns, ces systèmes permettent de reconnaître (et décrire) ces entités qui sont les constituants ultimes du monde sans céder à la tentation d'admettre des entités irréelles ou fictives³. Sous la plume de Lesniewski, on lit:

[...] je me suis soucié davantage de l'harmonie entre mes théorèmes, dotés d'une forme aussi exacte que possible, et du "bon sens" des représentants de l'esprit laïque se vouant à l'étude de la réalité non "créée" par eux, que de l'accord entre ce que j'affirmais et les "intuitions" des théoriciens professionnels des ensembles, "intuitions" sorties du centrifugeur des esprits mathématiques équipés pour la "création libre", démoralisés par les "spéculations constructives" détachées du réel. (1989: 78)

Aussi comprendra-t-on la nature des intuitions en cause dans l'Ontologie comme relevant des rapports entre ce qui est – reposant sur l'intuition empirique des objets – et les langages utilisés pour en parler. Comme l'écrit Kearns:

Lesniewski's intuition is best described as knowledge of how language must be if it is to adequately and efficiently represent the world. His intuition is knowledge of the way the world is put together but it also knowledge of the appropriate way to represent (describe) the world. (1967: 63)

3 Kearns 1967: 63.

C'est ainsi que l'Ontologie peut se prétendre une théorie de «ce qui est, des principes généraux de l'être»⁴, ce qui explique le nom d'«Ontologie» qui lui a été donné. Lesniewski affirme dans ce sens:

[...]j'employais comme nom de la théorie élaborée le terme "ontologie" parce qu'il ne choquait pas mon "sens de la langue" précisément à cause du fait que je formulais dans cette théorie justement sui generis les "principes généraux de l'être". (1989: 108)

Mais insistons sur le fait que, malgré les apparences terminologiques, l'Ontologie ne répond pas à la question de ce qui est. Elle est par ailleurs ontologiquement neutre, ses thèses étant valides sur un domaine vide et ne débouchant sur aucun indice concernant la population ontologique de l'univers ni l'existence d'un individu quelconque⁵. La logique pour Lesniewski n'a pas pour mission de répondre à la question de ce qui est, mais de fournir les règles générales pour tout langage visant à parler de ce qui, éventuellement, se trouve exister.

2. Distributif versus collectif

On se souvient que dans l'analyse de l'antinomie de Russell et l'axiomatique de la Méréologie, Lesniewski fait usage de propositions telles que «P est un objet», «A est la classe des a», «B est un élément de la classe des a», où «P», «A» et «B» sont des termes singuliers. Or une proposition singulière est reconnue comme vraie si le terme sujet dénote un objet singulier et si cet objet est bien ce que l'on dit qu'il est. On a vu que c'est cette interprétation de la proposition singulière qui dirige la stratégie d'analyse de l'antinomie russellienne (cf. ch. II, section 5). Il

4 Cf. Kotarbinski, cité par Luschei 1962: 149. «[...] according to Kotarbinski, [is] a truly ontological "theory of what there is, or general principles of being"».

5 Sur la question de la neutralité ontologique de l'Ontologie, cf. Simons 1995.

importait donc au premier chef, dans la perspective de l'élaboration d'un langage logique susceptible de recevoir les propositions de la Méréologie, de formaliser les propriétés de la copule «est» sous la lecture présémantique qui en était faite. Pour ce faire, Lesniewski affranchit les critères de distinction entre les niveaux distributif (ou purement extensionnel) et collectif de la manière suivante⁶.

Le premier niveau est le corollaire de la prédication distributive. Lorsque l'on dit qu'un objet B est a, on signifie que l'objet désigné par B est également désigné par le terme a, c'est-à-dire qu'il est un élément de l'extension des objets a. Selon Lesniewski, c'est cette interprétation qui doit être reconnue derrière la notion de classe distributive. Par conséquent, la compréhension distributive du terme «classe» ramène la proposition «B appartient à la classe des a», qui signifie la même chose que «B appartient à l'extension des a», à la forme logique «B est a».

Sous une interprétation collective, en revanche, on ne peut pas substituer l'expression «l'extension des objets a» à l'expression «la classe des a». En effet, l'expression nominale «la classe des a» désigne un objet individuel, l'agrégat composé des a, au sens méréologique du terme «composer». On ne peut donc pas éliminer, comme précédemment, les expressions «classe de», «élément de» ou encore «appartient à» en réduisant la proposition «B est un élément de la classe des a» à la formule «B est a». Car B, qui peut être un ingrédient quelconque de l'entité collective, n'est pas nécessairement a.

C'est donc la première interprétation, ressortissant à la prédication distributive, que prend en charge l'Ontologie.

6 Cf. Sobocinski 1949-50: 239-240; 1984: 217.

3. L'analyse de la proposition singulière

L'analyse des mécanismes de la prédication et des éléments mis en jeu prend congé de la tradition frégéenne, qui analyse la proposition en deux constituants irréductibles l'un de l'autre, la fonction et l'argument, renvoyant ainsi à des classes de termes exclusives l'une de l'autre. Elle renoue avec une vision classique plus traditionnelle sujet-copule-prédicat, où le prédicat est un terme au sens étroit du terme, simplement défini par sa position et, en tant que terme, susceptible de figurer à la place du sujet dans la proposition.

La proposition élémentaire de l'Ontologie est de la forme «*a est b*», symboliquement «*a b*». Elle se lit «*a est un des b*». Soit, en termes extensionnels, «*a appartient à l'extension des b*» où «*a est un parmi l'extension des b*». Les termes *a* et *b* représentent des objets formels appartenant à la catégorie sémantique des noms. Mais contrairement à un système classique où seuls les noms singuliers sont retenus au sein de la catégorie logique des noms, les noms dans l'Ontologie peuvent être singuliers, vides et pluriels (ou généraux).

Un nom est sémantiquement *singulier* s'il dénote un objet individuel, sémantiquement *pluriel* s'il dénote plus d'un individu et sémantiquement *vide* s'il ne dénote aucun objet. A titre d'exemple, «la lune», «Orion» sont des noms singuliers, «Pégase», «le cercle-carré» sont des noms vides et «les frères de Montgolfier», «animal» sont des noms pluriels.

Relevons que l'on ne rencontre aucune distinction du genre de celle de Russell, opposant les noms propres au sens logique du terme aux descriptions définies. Par nom singulier, il faut entendre toute expression nominale simple ou complexe, visant à désigner un objet particulier. Le critère linguistique étant le

seul retenu, on trouve parmi les noms singuliers non seulement des noms comme «la lune» ou «Orion» mais également des noms complexes tels que «le verrou de la porte de l'aile Ouest du château», «le mur de pierres», «la collection de mes timbres» ou encore «la classe des hommes».

Les noms pouvant être vides, singuliers ou pluriels, la relation de désignation nominale dans l'Ontologie n'est pas une simple application à l'instar d'une théorie standard où, de par la dépendance entre syntaxe et sémantique, les variables et les constantes d'objets doivent être singulières dans toutes les interprétations. Si dans une telle théorie, on compte pour les noms autant de modes d'interprétation qu'il y a d'objets dans le domaine d'objets considéré, en revanche, dans l'Ontologie, s'il y a k objets dans le domaine référentiel, il y a 2^k moyens de désigner ces objets. Supposons que l'on dispose d'un univers composé de deux objets, soient C_1 et C_2 . Les objets de ce domaine peuvent être désignés de quatre manières différentes:

1. Le nom désigne C_1 mais pas C_2 : C_1
2. Le nom désigne C_2 mais pas C_1 : C_2
3. Le nom ne désigne ni C_1 ni C_2 : – (c'est-à-dire rien)
4. Le nom désigne à la fois C_1 et C_2 : $C_1 C_2$

Dans les deux premiers cas, les noms sont des noms singuliers. Dans le troisième cas, le nom est un nom vide. Et dans le quatrième cas, le nom est un nom pluriel. Mais le nom pluriel n'est pas le nom de son extension. Pour reprendre nos exemples précédents, «les frères de Montgolfier» est un nom pluriel désignant chacun des frères de Montgolfier, tout comme le nom pluriel «l'animal»

désigne chacun des animaux. On n'associera donc pas l'extension d'un nom à l'ensemble des objets qu'il dénote.

C'est l'introduction des noms pluriels et l'effacement conjoint de l'asymétrie entre sujet et prédicat qui désamorce dans l'Ontologie le vieux problème de l'un et du multiple. Si le multiple a d'emblée une allure paradoxale dans les théories classiques, il échappe dans l'Ontologie à ce genre de problème. Les noms pluriels permettent en effet de ne retenir des «classes distributives» que leur dimension multiple, de telle sorte que la question du rapport entre l'extension en tant que multiplicité et l'extension en tant qu'unité n'a tout simplement pas à être posée. Il n'est nullement question dans l'Ontologie d'objets qui seraient des «classes distributives». A partir de toute extension on pourra certes engendrer une classe en tant qu'unité, c'est-à-dire en tant qu'objet singulier et à ce titre nominalisé, mais dans la Méréologie⁷.

Ainsi, puisque toute expression nominale appartient à la catégorie des noms, qu'elle désigne un, aucun ou plusieurs individus, elle peut occuper indifféremment la place de sujet ou de prédicat dans la proposition «a b». La distinction entre noms singuliers, vides et pluriels, ne joue aucun rôle pour déterminer si un énoncé de la forme «a b» est ou non doué de sens. «La lune est un astre céleste», «Pégase est un cheval ailé», «L'homme est un animal» ou «La lune est une constellation» sont tous des énoncés doués de sens. La dénotation des noms n'entre en jeu que lors de la détermination de la valeur de vérité d'une proposition de la forme «a b». En effet, une telle proposition est vraie si et seulement si trois conditions sont remplies: a n'est pas un nom vide, a est un nom singulier et ce que désigne a est également désigné par b. On relève donc que si «a b» est bien

7 Cf. l'axiome 4 de l'axiomatique de la Méréologie sur lequel nous reviendrons.

la proposition élémentaire de l'Ontologie, les conditions de vérité sont celles de la proposition singulière. On appellera donc proposition singulière la proposition du type «*a est b*» où la copule «est» joue le rôle auquel correspondent les conditions de vérité citées. Selon Lesniewski, cette lecture présémantique de l'usage de la copule «est» est conforme à nos intuitions et trouve sa garantie dans l'usage ordinaire du langage.

Nous employons le mot “est” (“ ”) comme on le faisant avant la réforme de G. Peano. En agissant de cette manière nous croyons être conformes non seulement aux intuitions liées au langage courant, mais encore (ce qui ne semble pas avoir été perçu par les historiens de la logique) à la tradition aristotélicienne et scolastique. (Sobocinski 1949: 99)

Si l'on évalue les propositions précédentes, sous une interprétation ordinaire du réel, on obtient les valeurs de vérité suivantes. «La lune un astre céleste» est une proposition vraie: les trois conditions sont remplies. «Pégase un cheval ailé» est une proposition fausse: «Pégase» est un nom vide. «L'homme est un animal» est une proposition fausse: «l'homme» est un nom pluriel. Cette proposition est en fait une abréviation de la proposition affirmative universelle «Tout homme est un animal». Quant à la proposition «La lune est une constellation», elle est fausse: la troisième condition n'est pas remplie, la lune n'appartenant pas à l'extension du terme «constellation».

4. L'axiome de l'Ontologie

Les présupposés relatifs à la copule «est» sont formalisés dans l'axiomatique de l'Ontologie, composée d'un unique axiome. Nous inscrivons cet axiome dans le symbolisme propre aux systèmes de Lesniewski.

$$\begin{aligned} & , Ab_{\llcorner} \text{ ' } A \ b \equiv . , \ C_{\llcorner} \text{ ' } C \ A \ \text{''} \ , \ C D_{\llcorner} \text{ ' } (C \ A \ D \ A) \ C \ D \ \text{''} \\ & \ , \ C_{\llcorner} \text{ ' } C \ A \ C \ b \ \text{''} \end{aligned}$$

L'axiome est une formule quantifiée de la forme $\llcorner \dots \text{ ' } \dots \text{''}$: les symboles \llcorner , ' , ' et '' sont des délimitateurs de quantification. Cette forme est qualifiée de «généralisation», $\llcorner \dots$ de quantificateur et $\text{' } \dots \text{''}$ de sous-quantificateur.

Concernant les modalités de lecture de la quantification, la forme « $\llcorner a$ » peut se lire «quel que soit a » tandis que la forme « $\llcorner a$ » peut se lire «il y a un a » ou «pour quelque a », voire «il existe un a ». Il est important de relever que quantification et existence sont indépendantes dans l'Ontologie⁸. Le domaine de quantification des variables nominales n'est pas un domaine d'objets, au sens objectuel classique, mais un ensemble d'expressions nominales. Nous verrons ci-après, avec les définitions de certains foncteurs, que la notion d'existence est saisie dans une approche fonctorielle, et non pas quantificationnelle (*cf. infra* section 6.1). On lit l'axiome ainsi :

Quels que soient les noms A et b , A est un des b si et seulement si:

- i) Il y a au moins un nom C qui est A et
- ii) quels que soient les noms C et D , si C est A et D est A , alors C est D et
- iii) quel que soit le nom C qui est A , alors C est b .

⁸ Le quantificateur «existential» que Lesniewski choisit d'appeler quantificateur particulier car il n'a aucune portée existentielle est introduit sous forme abrégative: « \sim , $A_{\llcorner} \sim \dots$ » s'écrivant « $\llcorner A_{\llcorner} \dots$ »

La première conjonction correspond à une *condition d'existence* (A n'est pas un nom vide), la deuxième à une *condition d'unicité* (A est un nom singulier, autrement dit A n'est pas un nom pluriel), et la troisième à une *condition d'inclusion*⁹ (tout ce qui est désigné par le nom A est également désigné par le nom b).

La formulation que nous avons donnée de l'axiome fait usage de lettres capitales pour représenter les variables de noms individuels et de lettres minuscules pour représenter les variables de noms pluriels¹⁰. Il ne s'agit cependant que d'un usage informel et purement heuristique. En effet, puisque l'axiome dicte les conditions de vérité de la proposition singulière, si une proposition de la forme «a b» est vraie, alors le terme a est un nom singulier (conditions d'existence et d'unicité réunies). Nous nous en tiendrons néanmoins à cet usage car, dans la Méréologie, il a le mérite de faciliter la lecture des thèses.

Concernant les catégories sémantiques contenues dans l'axiome de l'Ontologie, elles sont au nombre de quatre : S, N, S/SS et S/NN. Les catégories S et S/SS (celles des foncteurs propositionnels à deux arguments propositionnels) sont héritées de la Protothétique. L'axiome ajoute la catégorie N et la catégorie des foncteurs propositionnels à deux arguments nominaux, à laquelle appartient le foncteur primitif de l'épsilon.

Au sujet de la terminologie de catégorie sémantique, faisons observer que nous pourrions lui préférer celle de catégorie syntaxico-sémantique, en faveur de la-

9 Le terme généralement utilisé pour cette condition est celui de «convergence». Mais nous lui préférons celui d'inclusion.

10 Cet axiome est l'axiome original proposé par Lesniewski. En 1929, il proposa une formulation plus simple:

$$, Ab_{\alpha} \text{ ' } A b \equiv , B_{\alpha} \text{ ' } A B B b \text{ ' ' } . \text{ (Cf. Lejewski 1957-58: 63).}$$

Nous avons opté pour la formulation originale parce qu'elle est plus explicite. Par ailleurs, la formulation simplifiée complique les démonstrations des thèses.

quelle nombreux auteurs inclinent. L'usage de cette terminologie a en effet le mérite de rendre manifeste la double dimension sémantique et syntaxique des catégories. Car si les catégories sont sémantiques dans la signification qu'elles portent, elles sont syntaxiques du point de vue de la formalisation. Cependant, comme nous l'avons souligné à plusieurs reprises, les systèmes déductifs de Lesniewski sont interprétés: toute nouvelle constante introduite dans le calcul acquiert sa signification des précédentes, et ceci rétrospectivement jusqu'à la base axiomatique qui fixe les significations primitives. Aussi, dans la mesure où la validité logique des thèses est indissociable de présuppositions et où la signification des symboles coexistent avec les règles formelles qui dirigent ces systèmes, on peut considérer que les catégories sont pleinement sémantiques. C'est pourquoi nous pouvons nous en tenir à la terminologie de catégorie sémantique.

5. Les directives inférentielles

L'Ontologie contient sept directives inférentielles: deux directives de définition, une directive de distribution des quantificateurs, une directive de détachement, une directive de substitution et deux directives d'extensionnalité. Sur la base de ces directives, il est dès lors possible de construire des systèmes dans lesquels n'importe quelle catégorie sémantique conçue à partir des catégories primitives peut être définie. L'ensemble potentiellement infini des catégories susceptibles d'être présentes dans un système de l'Ontologie est généré par la définition inductive suivante:

- i. S et N sont des catégories sémantiques.
- ii. Si $C, c_1, c_2 \dots c_n$ sont des catégories sémantiques, alors $C/c_1, c_2 \dots c_n$ est une catégorie sémantique.
- iii. Rien n'est une catégorie sémantique sinon par les clauses *i* ou *ii*.

Soulignons, en relation avec le caractère développemental des systèmes logiques de Lesniewski, qu'il n'y a à strictement parler que des langages en acte de l'Ontologie. L'axiomatique se présente comme la base à partir de laquelle peut être développé *un* système. A toute étape d'un système développé correspond donc un nombre fini de catégories sémantiques: les catégories contenues dans l'axiomatique et celles introduites par la définition de constantes nouvelles. L'objet logique auquel se réfère le nom «Ontologie» n'est donc pas univoquement déterminé. Il est partagé extensionnellement par tous les systèmes développés conformément aux directives de construction régulière¹¹. Cette remarque faite, venons-en aux directives inférentielles de définition.

5.1 Les directives de définition

Les directives inférentielles de définition sont au nombre de deux: une directive de définition de type propositionnel héritée de la Protothétique et une directive de définition de type nominal, liée à l'ajout de la catégorie des noms dans l'Ontologie. Nous en proposons une représentation schématique sous la forme de deux moules définitoires¹².

11 La même remarque vaut pour la Protothétique.

12 Mentionnons que la dynamique développementale des systèmes de Lesniewski est tributaire d'un mode de détermination contextuelle de l'appartenance catégorielle des symboles que nous passons sous silence dans ce travail. Cette détermination contextuelle, réalisable grâce à la quantification, est réglée par une écriture préfixée. Pour des raisons pragmatiques, nous nous en tiendrons à une écriture hybride car, pour qui n'est pas forgé à ce mode d'écriture contextuelle, la lecture des thèses s'en trouve grandement facilitée. Le lecteur trouvera dans l'annexe 2 un bref aperçu de cette écriture contextuelle.

- *Définition de type propositionnel (Ds)*

$$\langle v_1 v_2 \dots v_n \rangle \left\langle \frac{f(v_1 v_2 \dots v_n)}{\text{definiendum}} \quad \frac{D_{v_1 v_2 \dots v_n}}{\text{definiens}} \right\rangle^{13}$$

Le foncteur défini f est de catégorie sémantique $S/c_1, c_2 \dots c_n$; $c_1, c_2 \dots c_n$ étant les catégories respectives des variables $v_1 v_2 \dots v_n$.

Par exemple, l'expression $\langle v_1 v_2 \rangle \left\langle \frac{v_1 v_2}{\text{definiendum}} \quad \frac{D_{v_1 v_2}}{\text{definiens}} \right\rangle$ définit – avec un *definiens* approprié à la signification visée – le relateur de l'inclusion entre noms, de catégorie S/NN (cf. *infra* section 6.2). Le *definiendum* peut se lire: «l'extension du nom v_1 est incluse dans l'extension du nom v_2 ».

- *Définition de type nominal (Dn)*

$$\langle v_1 v_2 \dots v_n \rangle \left\langle \frac{A}{\text{definiendum}} \quad \frac{g(v_1 v_2 \dots v_n) \quad A \quad A \quad E_{v_1 v_2 \dots v_n}}{\text{definiens}} \right\rangle^{14}$$

Le foncteur défini g est de catégorie sémantique $N/c_1, c_2 \dots c_n$; $c_1, c_2 \dots c_n$ étant les catégories respectives des variables $v_1 v_2 \dots v_n$.

Par exemple l'expression $\langle v_1 \rangle \left\langle \frac{A \quad \sim(v_1) \quad A \quad A \quad E_{v_1}}{\text{definiens}} \right\rangle$ définit un foncteur unaire de catégorie N/N qui pourra être, moyennant un *definiens* adéquat, celui de la négation nominale (cf. *infra* 6.2).

Les *conditions* auxquelles doit répondre une expression pour être ajoutée au système comme thèse définitoire du foncteur constant f ou du foncteur constant g sont les suivantes:

13 Le *definiendum* peut être une expression fermée, dans le cas de définitions de constantes de catégorie S .

14 Le deuxième argument du foncteur dans le *definiendum* peut être une expression fermée, c'est-à-dire une constante nominale. (Cf. *infra* les définitions T_{O20} et T_{O21} : section 7; et les définitions T_{M22} et T_{M23} : chapitre IV, section 2).

- $v_1, v_2 \dots v_n$ sont n variables de catégories préalablement introduites dans le système, soient $c_1, c_2 \dots c_n$.
- Le *definiens* $D_{v_1 v_2 \dots v_n}$ est une fonction propositionnelle dont toutes les constantes sont présentes en l'état actuel du système et qui contient toutes les variables $v_1, v_2 \dots v_n$.
- f est l'unique constante du *definiendum* $f(v_1 v_2 \dots v_n)$; g est l'unique constante du *definiendum* $g(v_1 v_2 \dots v_n)$.
- Les variables du *definiendum* sont les mêmes que celles que contient le *definiens*, et aucune n'est répétée.

5.2 Les directives d'extensionnalité

La définition d'une constante d'une certaine catégorie nécessite le principe d'extensionnalité pour cette catégorie. Ce principe est exprimé sous la forme de deux directives inférentielles: une directive d'extensionnalité propositionnelle et une directive d'extensionnalité nominale.

- *Directive d'extensionnalité propositionnelle (Ext-s)*

Cette directive garantit le principe d'extensionnalité pour toute catégorie conçue à partir de la catégorie S ¹⁵. Nous en proposons le schéma suivant:

$$, f g \text{ " } , v_1 \dots v_n \text{ " } f(v_1 \dots v_n) \quad g(v_1 \dots v_n) \text{ " } , \text{ " } (f) \quad (g) \text{ " }$$

Il est important de préciser que l'on n'est autorisé à quantifier sur des variables d'une certaine catégorie que si cette catégorie est présente dans l'état de développement actuel du système. Par conséquent, une thèse d'extensionnalité proposi-

¹⁵ Excepté pour la catégorie S , pour laquelle le principe d'extensionnalité est présent, en germe dans l'axiomatique de la Protothétique. Il est révélé par la thèse suivante: $, fpq \text{ " } (p \quad q) \text{ " } , f \text{ " } f(p) \quad f(q)$

tionnelle ne peut pas être inscrite pour un terme d'une certaine catégorie avant que ce terme soit apparu comme argument d'un foncteur propositionnel à un argument. Par exemple, si on dispose dans le système de deux foncteurs constants, l'un de catégorie S/S et l'autre de catégorie $S/(S/S)$, on peut inscrire la thèse d'extensionnalité suivante pour la catégorie S/S :

$$, fg \text{ " } , p \text{ " } f(p) \quad g(p) \text{ " } , \text{ " } (f) \quad (g) \text{ " } \text{ " }^{16}$$

- Directive d'extensionnalité nominale (*Ext-n*)

Cette directive permet d'inscrire le principe d'extensionnalité pour toute catégorie sémantique faisant intervenir la catégorie des noms, N . Elle se présente sous deux formulations:

$$, fg \text{ " } , A \text{ " } A \quad f \quad A \quad g \text{ " } , \text{ " } (f) \quad (g) \text{ " } \text{ " }$$

$$, fg \text{ " } , A \quad v_1 \dots v_n \text{ " } A \quad f(v_1 \dots v_n) \quad A \quad g(v_1 \dots v_n) \text{ " } , \text{ " } (f) \quad (g) \text{ " } \text{ " }$$

Précisons que le relateur étant de catégorie S/NN , f et g , dans la première formulation, sont de catégorie N , tout comme $f(v_1 \dots v_n)$ et $g(v_1 \dots v_n)$, dans la seconde formulation.

Nous illustrons chacune de ces formulations avec un exemple.

Si la catégorie S/N est présente dans l'état actuel de développement du système, on peut exprimer le principe d'extensionnalité pour la catégorie N en inscrivant la thèse:

$$, ab \text{ " } , B \text{ " } B \quad a \quad B \quad b \text{ " } , \text{ " } (a) \quad (b) \text{ " } \text{ " }^{17}$$

16 La variable p est de catégorie S , les variables f et g sont de catégorie S/S et la variable est de catégorie $S/(S/S)$. Rappelons que les signes ne sont pas présémantiquement caractérisés par leur appartenance à des ensemble de symboles préalablement donnés et catégoriellement déterminés. Comme nous l'avons mentionné précédemment avec la note 12, la reconnaissance de la catégorie sémantique d'une variable ou d'une constante relève d'une détermination contextuelle.

17 a et b sont de catégorie N , et est de catégorie S/N .

Et si on dispose des catégories N/N et $S/N/N$, on peut inscrire une thèse d’extensionnalité pour la catégorie N/N . Soit:

$$\vdash fg, \vdash B a \text{ “ } B f(a) \ B g(a) \text{ ” } , \text{ “ } (f) \ (g) \text{ ” }^{18}$$

5.3 Les autres directives

- *La Règle de détachement (Dét)*

Elle correspond à une règle classique d’élimination de la biconditionnelle.

Nous la représentons avec un schéma de règle:

$$\begin{array}{l|l} m & E \ F \\ n & E \\ \hline & F \end{array} \quad m, n, \text{ Dét.}$$

- *La directive de distribution des quantificateurs (Dist)*

Cette directive autorise à distribuer les variables du quantificateur principal dans deux quantificateurs, l’un devant chaque argument du foncteur principal du sous-quantificateur, lorsque ce foncteur est la biconditionnelle. Son utilité est de permettre l’utilisation de la règle de détachement à partir de généralisations. Nous le montrons avec un exemple. Supposons que les deux expressions suivantes correspondent à des thèses inscrites dans le système.

$$\vdash v_1 v_2 v_3 v_4 \text{ “ } E(v_1 v_2 v_3) \ F(v_2 v_3 v_4) \text{ ” } \text{ et } \vdash v_1 v_2 v_3 \text{ “ } E(v_1 v_2 v_3) \text{ ”}$$

On peut effectuer la déduction suivante:

18 f et g sont de catégorie N/N et a est de catégorie $S/(N/N)$

1.	, $v_1 v_2 v_3 v_4$ “ $E(v_1 v_2 v_3) \quad F(v_2 v_3 v_4)$ ”	thèse
2.	, $v_1 v_2 v_3$ “ $E(v_1 v_2 v_3)$ ”	thèse
3.	, $v_1 v_2 v_3$ “ $E(v_1 v_2 v_3)$ ” , $v_2 v_3 v_4$ “ $F(v_2 v_3 v_4)$ ”	Dist. (v_1, v_2, v_3, v_4)
4.	, $v_2 v_3 v_4$ “ $F(v_2 v_3 v_4)$ ”	2, 3, Dét.

- *La directive de substitution (Sub)*

Cette directive permet de substituer à une variable liée par le quantificateur principal une autre variable, une constante ou une expression complexe de même catégorie sémantique. Les conditions sont en bref les suivantes: si on substitue une variable ou une expression complexe, les variables doivent rester libres pour la variable substituée dans le sous-quantificateur; dans le cas d'une expression complexe, il faut saturer le quantificateur principal afin que les symboles substitués destinés à être des variables se voient attribuer formellement ce statut¹⁹; si on substitue une constante, la variable est «effacée» dans le quantificateur. Nous aurons l'occasion de voir cette directive à l'œuvre dans la démonstration de certaines thèses de la Méréologie. Pour l'heure, nous n'en donnons pas d'illustration.

6. Définitions de foncteurs

Nous allons à présent nous consacrer à mettre en mouvement les directives de définition en définissant progressivement de nouvelles constantes construites à partir des quatre catégories primitives contenues dans l'axiome, S , N , S/SS ,

¹⁹ C'est-à-dire qu'il faut faire apparaître dans le quantificateur principal les symboles destinés à avoir le statut de variable.

N/NN , et des constantes \cdot , \cap et \cup (de catégorie S/SS) et de la constante \neg (de catégorie S/NN)²⁰.

Dans la perspective qui est la nôtre, celle de l'explicitation formelle du champ de l'extensionnel dans l'Ontologie, nous avons sélectionné deux types de foncteurs: des foncteurs formateurs de propositions à un argument nominal, de catégorie S/N ; et des foncteurs formateurs de propositions à deux arguments nominaux, S/NN . Nous leur avons ajouté également un foncteur de catégorie N/N , celui de la négation nominale.

Les premiers foncteurs de catégorie S/N rendent compte du traitement fonctoriel réservé à la notion d'existence dans l'Ontologie. Les seconds foncteurs de catégorie S/NN sont les pendants des relateurs extensionnels usuels d'un calcul des classes standard. On trouvera parmi eux les relateurs de l'inclusion qui se révéleront, par la suite, des instruments indispensables dans la résolution formelle de l'argument de De Morgan.

Notons l'axiome de l'Ontologie Ax_0 . Soit:

$$Ax_0: \cdot, Ab. \text{ " } A \text{ } b \text{ } \equiv \cdot \cdot \text{ " } , C. \text{ " } C \text{ } A \text{ "}$$

$$\cdot, CD. \text{ " } (C \text{ } A \text{ } D \text{ } A) \text{ } C \text{ } D \text{ "}$$

$$\cdot, C. \text{ " } C \text{ } A \text{ } C \text{ } b \text{ " "}$$

6.1 Foncteurs de catégorie S/N

Avant de proposer toute définition, relevons que les noms dans l'Ontologie perdent toute portée ontologique puisqu'ils peuvent être vides. Cependant, conformément aux conditions de vérité de la proposition singulière dictées par

²⁰ Notons que l'axiome de l'Ontologie requiert comme base propositionnelle les axiomes de la Protothétique ainsi qu'un certain nombre de thèses assertées le précédant. Nous considérons que les opérateurs propositionnels binaires usuels (\cdot , \cap , \cup) ainsi que l'opérateur unaire de la négation (\neg) ont été préalablement définis.

Ax_0 toute proposition atomique vraie contenant le relateur ontologique primitif « » présuppose l'existence d'un individu. C'est ce qu'énonce la première clause de l'axiome, qualifiée de clause d'existence. Il est dès lors possible, partant de Ax_0 et utilisant la directive de définition propositionnelle Ds , de définir des foncteurs de catégorie S/N qui sont, dans le calcul, les paraphrases logiques des trois types de noms: singuliers, vides et pluriels. Considérons dans ce sens les cinq premières thèses :

T_{01} : , a « $ex\{a\}$, B « B a ” Ds

« $ex\{a\}$ » se lit: «le nom a dénote au moins un objet».

La proposition « $ex\{a\}$ » est donc vraie si et seulement si « a » n'est pas un nom vide.

T_{02} : , a « $uni\{a\}$, BC « B a C a . C ”

« $uni\{a\}$ » se lit: «le nom a dénote au plus un objet».

La proposition « $uni\{a\}$ » est donc vraie si et seulement si a est un nom singulier ou a est un nom vide.

T_{03} : , a « $sing\{a\}$. $ex\{a\}$ $uni\{a\}$ ”

« $sing\{a\}$ » se lit: «le nom a dénote un et un seul objet».

La proposition « $sing\{a\}$ » est donc vraie si et seulement si a est un nom singulier²¹.

T_{04} : , a « $vid\{a\}$ $\sim ex\{a\}$ ”

« $vid\{a\}$ » se lit: «le nom a ne dénote aucun objet».

La proposition « $vid\{a\}$ » est donc vraie si et seulement si a est un nom vide.

21 On pourrait également définir ce foncteur par la thèse , a « $sing\{a\}$ a a ”

$T_05: \forall a. \text{pl}\{a\} \leftrightarrow \text{ex}\{a\} \wedge \sim \text{sing}\{a\}$

« $\text{pl}\{a\}$ » se lit: «le nom a dénote plus d'un objet».

La proposition « $\text{pl}\{a\}$ » est donc vraie si et seulement si a est un nom pluriel.

Mentionnons à nouveau que la quantification dans l'Ontologie est libre de tout apport existentiel²². Le quantificateur particulier, ordinairement qualifié de «quantificateur existentiel», n'affirme rien au sujet de l'existence d'objets non linguistiques. Afin de consolider notre propos, examinons la proposition factuellement vraie «Pégase n'existe pas». Dans le formalisme de l'Ontologie, elle se traduit au moyen du foncteur « ex », défini avec la thèse T_01 . Cela donne:

(1) $\sim \text{ex}\{\text{Pégase}\}$

De (1) on peut en toute légitimité inférer la proposition:

(2) $\exists a. \sim \text{ex}\{a\}$

qui est une thèse de l'Ontologie²³. En effet, « $\exists a. \sim \text{ex}\{a\}$ » ne se lit pas «il existe un objet qui n'existe pas» mais «pour quelque a , a n'existe pas», c'est-à-dire «pour quelque nom a , a ne dénote pas»²⁴.

De même, concernant le quantificateur universel, $\forall a. a = a$ est une proposition fautive dans l'Ontologie. Une instantiation fautive de cette proposition est, par

²² Concernant la question de la quantification dans l'Ontologie, on consultera Lejewski 1954, Joray 1999, Miéville 1984, Simons 1995.

²³ Cf. la thèse T_022 .

²⁴ Souvenons-nous à ce propos de l'analyse de l'antinomie russellienne où Lesniewski propose la définition suivante de la relation d'appartenance d'un individu à une classe collective: P est un élément de la classe K si et seulement si, compte tenu d'une certaine signification du mot " a " sont remplies les conditions suivantes: 1) K est la classe des a , 2) P est a .

Il écrit que ne sachant pas encore à cette époque utiliser les quantificateurs, la formule $\forall x (x \in K \rightarrow x = a)$ traduit l'expression informelle «compte tenu d'une certaine signification du mot " a ". L'équivalent en partie symbolique de la définition est donc: P est un élément de la classe K . $\forall x (x \in K \rightarrow x = a)$: K est la classe des a . P est a (1989: 50).

exemple, «Pégase Pégase». En effet, «Pégase» n'étant pas un nom individuel mais un nom vide, la première conjonction de l'axiome Ax_0 est fautive²⁵.

6.2 Foncteurs de catégorie S/NN

Les trois premières thèses que nous inscrirons définissent des relateurs exprimant diverses modalités d'inclusion qui peuvent se présenter, relativement aux extensions respectives de deux noms «a» et «b». On observera à ce sujet que le foncteur « \subseteq » peut être qualifié de foncteur de *l'inclusion singulière*.

T_06 : $\forall a, b, C, D, \langle a \subseteq b \rangle, \langle C \subseteq a \subseteq C \subseteq b \rangle$ Ds

« $a \subseteq b$ » se lit: «tout a est b», autrement dit «l'extension du nom a est faiblement incluse dans l'extension du nom b».

Le symbole « \subseteq » représente *l'inclusion faible* entre noms.

T_07 : $\forall a, b, C, D, \langle a \subseteq b \rangle, \langle C \subseteq a \rangle, \langle D \subseteq a \subseteq D \subseteq b \rangle$ Ds

« $a \subseteq b$ » se lit: «chaque a est b», c'est-à-dire «l'extension du nom a est faiblement incluse dans l'extension du nom b».

Le symbole « \subseteq » représente *l'inclusion forte* entre noms.

On aurait pu choisir de définir l'inclusion forte par la thèse suivante, équivalente à la thèse T_07 , soit: $\forall a, b, \langle a \subseteq b \rangle, \langle \text{ex}\{a\} \subseteq a \subseteq b \rangle$. Dans les théories classiques, on a:

pour l'inclusion propre ou stricte valant entre des classes différentes, et pour l'inclusion large admettant le cas où toute classe s'inclut en elle-même.

T_08 : $\forall a, b, C, D, \langle a \Delta b \rangle, \langle C \subseteq a \subseteq C \subseteq b \rangle$ Ds

« $a \Delta b$ » se lit: «quelque a est b».

Le symbole « Δ » signifie *l'inclusion partielle* entre noms.

²⁵ De même la proposition produite avec la constante $\langle \text{ex}\{a\} \subseteq a \subseteq b \rangle$, est fautive. (Cf. la thèse T_023).

Les deux thèses suivantes définissent des foncteurs liés à la relation d'identité.

T_{09} : $\langle ab \rangle \langle a = b \rangle . \langle a \ b \ b \ a \rangle$ Ds

« $a = b$ » se lit: « a est identique à b ».

Le symbole « $=$ » signifie *l'identité singulière entre individus*²⁶.

T_{010} : $\langle ab \rangle \langle a \approx b \rangle . \langle C \rangle \langle C \ a \ C \ b \rangle$ Ds

« $a \approx b$ » se lit: « a est faiblement identique à b ». Autrement dit, «le nom a dénote les mêmes objets que le nom b ».

Le symbole « \approx » signifie *l'identité faible*.

Ce relateur pourrait être également défini avec une thèse dans laquelle le *definiens* utilise le relateur de l'inclusion faible. Soit:

$\langle ab \rangle \langle a \approx b \rangle . \langle a \ b \ b \ a \rangle$ ²⁷

Bien qu'elle soit d'une catégorie différente, nous ajoutons aux définitions précédentes la définition de *la négation nominale*, de catégorie N/N . Il s'agit de la première définition relevant de la procédure de définition nominale, Dn.

T_{011} : $\langle Ab \rangle \langle A \sim(b) \rangle . \langle A \ A \ \sim(A \ b) \rangle$ Dn

Nous en restons là en ce qui concerne l'inscription de thèses définitoires de foncteurs. Nous terminerons cette section en proposant quelques thèses et la démonstration de certaines d'entre elles.

Nous ferons usage de la méthode de déduction naturelle, déjà mise en œuvre dans notre travail avec la déduction validant l'argument de De Morgan

26 Nous pourrions donc utiliser les lettres majuscules «A» et «B» à la place des lettres minuscules «a» et «b». Notons parallèlement que la réflexivité de cette relation d'identité singulière n'est donc pas totale. $\langle a \rangle \langle a = a \rangle$ n'est pas une thèse, puisque si «a» est un nom pluriel ou un nom vide, la proposition « $a = a$ » est fausse. On a la thèse: $\langle a \rangle \langle \text{sing}\{a\} \ a = a \rangle$. Celle-ci est l'analogue dans l'Ontologie de l'unique relation d'identité dont on dispose dans un système logique classique. où seuls les termes singuliers sont admis au sein de la catégorie logique des noms.

27 La réflexivité du relateur « \approx » est totale: $\langle a \rangle \langle a \approx a \rangle$ est une thèse.

(chapitre I, section 2.1.3.) Mentionnons que Lesniewski lui-même faisait usage de procédures démonstratives relevant des principes d'une telle méthode²⁸.

Inscrivons tout d'abord trois thèses qui découlent directement de l'axiome Ax_0 , chacune étant associée à l'une des trois conjonctions.

T_{012} : $\neg Ab \ulcorner A b \supset, C \urcorner \ulcorner C A \urcorner$ "

T_{013} : $\neg Ab \ulcorner A b \supset, CD \ulcorner C A D A. C D \urcorner$ "

T_{014} : $\neg Ab \ulcorner A b \supset, C \ulcorner C A C b \urcorner$ "

Ensuite, procédons à la démonstration d'une thèse que nous avons rencontrée dans l'analyse de l'antinomie de Russell (chapitre II, section 5.1).

T_{015} : $\neg Aa \ulcorner A a A A \urcorner$ "

Lecture: Si A est un des a, alors A est A. Autrement dit: si A est quelque chose, alors A est un nom individuel.

Démonstration:

1.	Aa	A a		
2.			$\neg Ab \ulcorner A b \supset, C \urcorner \ulcorner C A \urcorner$ "	Hyp. T_{012}
3.			$\neg C \ulcorner C A \urcorner$ "	1, 2, $\neg e, b/a, e$
4.			$\neg Ab \ulcorner A b \supset, CD \ulcorner (C A D A) C D \urcorner$ "	T_{013}
5.			$\neg CD \ulcorner C A D A) C D \urcorner$ "	1, 4, $\neg e, b/a, e$
6.		C	$\neg p \ulcorner p p \urcorner$ "	$T_{\text{protothétique}}$
7.		C	$\neg C A C A$ "	6, $\neg e, p/C A$
8.			$\neg C \ulcorner C A C A \urcorner$ "	5, 7, $\neg i$
9.			$\neg C \ulcorner C A \urcorner, CD \ulcorner C A D A) C D \urcorner, C \ulcorner C A C A \urcorner$ "	3, 5, 8, i
10.		A	$\neg A A$ "	9, $Ax_0, b/A, e$
11.		A	$\neg a A A$ "	1-10, i
12.			$\neg Aa \ulcorner A a A A \urcorner$ "	1-11, $\neg i$

Nous terminons avec des thèses qui expriment les propriétés du foncteur « $\ulcorner \urcorner$ » contenues en germe dans l'axiome Ax_0 . Cela nous permettra de mettre en

²⁸ Des principes apparentés à la méthode de déduction naturelle étaient en usage dans l'École polonaise dès les années 1920. Concernant cette question, on peut consulter Miéville (1984: 231-246).

évidence les différences entre le relateur de l'épsilon « » et le relateur d'appartenance ensembliste « ».

T_O16: , A „ ‘ , b „ ‘ A b ” A A ” ”

Démonstration:

1.	A	,	b „ ‘ A b ”			hyp.
2.			b A b			hyp.
3.			A a „ ‘ A a A A ”			T _O 15
4.			A A		2, 3, , „e, a/b, e	
5.			A A			1, 2-4, i
6.			b „ ‘ A b ” A A			1-5, i
7.			A „ ‘ , b „ ‘ A b ” A A ” ”			1-8, i

La thèse T_O16 exprime la propriété de réflexivité partielle de l'épsilon. Ainsi que nous l'avons déjà fait observer, , a „ ‘ a a ” n'est pas une thèse de l'Ontologie puisqu'une proposition de la forme «a b» est fausse si le nom «a» est un nom vide ou un nom pluriel²⁹.

T_O17: , ABa „ ‘ A B B a . A a ”

La thèse T_O17 exprime la propriété de transitivité de l'épsilon³⁰. Mais on notera le caractère particulier de cette transitivité à la lumière d'une autre thèse. Celle-ci, qui sera la thèse T_O19, est produite sur la base d'une thèse dite «thèse caractéristique de l'Ontologie»:

T_O18: , ABa „ ‘ A B B a . B A ”

De la thèse T18 découle la thèse en question:

29 Notons à ce propos que parmi les relateurs précédemment définis, la réflexivité du relateur de l'identité faible, , est totale: , a „ ‘ a a ” est une thèse.
 30 Pour les démonstrations des thèses 17 et 18, cf. Miéville 1984: 304.

T_O19: , ABa“ ‘ A B B a . A = B ”

Démonstration:

1.	ABa		A B B a	hyp.
2.			, ABa“ ‘ A B B a . B A ”	T _O 18
3.			A B B a . B A	2, , “e
4.			B A	1, 3, e
5.			A B	1, e
6.			A B A B	4, 5, i
7.			, A“ ‘ A = B . A B A B ”	T _O 9
8.			A = B	6, 7, , “e, e
9.			A B B a . A = B	1-8, i
10.	, ABa“ ‘ A B B a . B A ”			1-9, , “i

Avec cette thèse se dégage clairement le sens de la propriété de transitivité de l'épsilon: si A est B et B est a, alors A et B sont identiques.

7. Le nom vide et le nom universel

Il nous reste à mettre en lumière deux constantes nominales que l'on peut définir dans l'Ontologie. Ces constantes sont fondamentales dans la perspective de neutralité ontologique de cette théorie logique ainsi que, parallèlement, dans sa visée fondatrice de la Méréologie. Ce sont celles du *nom universel* et du *nom vide*. Les thèses qui les définissent utilisent la directive de définition de type nominal, Dn. Ce sont les suivantes:

T_O20: , A“ ‘ A V . A A A A ”³¹ Dn

T_O21: , A“ ‘ A Λ . A A ¬(A A) ” Dn

«V» est une constante nominale que l'on peut interpréter comme le *nom universel*. En effet, «V» dénote tout ce qui peut être dénoté par un terme singulier,

31 La directive de définition nominale exige de faire apparaître deux fois A A dans le *definiendum*.

c'est-à-dire tous les objets. La thèse T_{O20} définit donc logiquement le concept d'objet, « $A \in V$ » pouvant se lire «A est un nom d'objet».

Quant à la constante nominale « \emptyset », elle s'interprète comme le *nom contradictoire* ou le *nom vide*, c'est-à-dire le nom qui ne dénote pas quelque chose. Par conséquent, avec la thèse T_{O21} , c'est – pour ainsi dire – le concept de «*non-objet*», c'est-à-dire de *rien*, qui se trouve logiquement défini. La proposition « $A \in \emptyset$ » peut se lire «A est un nom vide», en d'autres termes «A est un nom de quelque chose qui n'existe pas».

Ces symboles jouent un rôle analogue aux symboles correspondants de classe universelle et de classe nulle que l'on rencontre dans les *Principia*, et qui sont respectivement introduits par les définitions *24.01 et *24.02.

*24.01 $V = \hat{x}(x = x)$ (Définition)

*24.03 $\emptyset = -$ (Définition)³²

Mais à la différence des *Principia*, l'Ontologie ne reconnaît aucune classe distributive. Il n'y a donc aucun objet qui *serait* la classe composée de l'ensemble des objets auxquels pourrait s'appliquer le nom universel. Quant au nom vide, ce n'est pas un nom individuel. En d'autres termes, ce n'est pas le nom de quelque chose. Il n'a aucune partie liée au nom d'une entité qui serait le vide ou le rien.

On le démontre en établissant la thèse:

32 «The universal class, denoted by V , is the class of all objects of the type which, in the given context, is being denoted by small Latin letters, *i. e.* of the lowest type concerned. Thus V , like "Cls", is ambiguous as to type. [...] The null-class, denoted by \emptyset like V , is the class which has no members. Like V , \emptyset is ambiguous as to type. We use the same symbol, \emptyset , for null-classes of various types; but these null-classes differ. The type of \emptyset is determined by that of the terms x concerning which " x is \emptyset " is false: whatever x may be, " x is \emptyset " will not represent a *true* proposition, but unless x is of the appropriate type, " x is \emptyset " will be meaningless, not false. Thus \emptyset is of the type next above that of an x concerning which " x is \emptyset " is significant and false.» (Whitehead and Russell, 1927, vol I: 216)

T22: $\vdash A \leftrightarrow \sim(A \rightarrow \quad)$

Démonstration:

1.	A	A	Hyp.
2.		$\vdash A \leftrightarrow A \rightarrow \quad$	19
3.		$A \rightarrow \quad \vdash A \rightarrow \sim(A \rightarrow \quad)$	2, \vdash „e
4.		$A \rightarrow \quad \vdash \sim(A \rightarrow \quad)$	1, 3, e
5.		$A \rightarrow \quad$	4, e
6.		$\sim(A \rightarrow \quad)$	4, e
7.		$\sim(A \rightarrow \quad)$	1, 5, 6, \sim i
8.		$\vdash A \leftrightarrow \sim(A \rightarrow \quad)$	1-7, \vdash „i

De cette thèse, on déduit directement la thèse:

T₀23: $\sim(\quad) \quad (T_{022}, \vdash \text{ „e, A/})$

Ce résultat est corroboré par la thèse suivante, utilisant le foncteur «sing» pour exprimer que le nom vide n'est pas un nom singulier:

T₀24: $\sim(\text{sing}\{\quad\})$

Démonstration:

1.	<u>sing</u> { \quad }	Hyp.
2.	$\vdash a \leftrightarrow \text{sing}\{a\} \rightarrow \text{ex}\{a\} \rightarrow \text{uni}\{a\}$	T ₀ 3
3.	$\text{sing}\{\quad\} \rightarrow \text{ex}\{\quad\} \rightarrow \text{uni}\{\quad\}$	2, \vdash „e, a/
4.	$\text{ex}\{\quad\} \rightarrow \text{uni}\{\quad\}$	1, 3, e
5.	$\text{ex}\{\quad\}$	4, e
6.	$\vdash a \leftrightarrow \text{ex}\{a\} \rightarrow B \leftrightarrow B \rightarrow a$	T ₀ 1
7.	$\vdash B \leftrightarrow B$	5, 6, \vdash „e, a/ , e
8.	$\vdash A \leftrightarrow \sim(A \rightarrow \quad)$	T ₀ 22
9.	$\sim, B \leftrightarrow \sim(B \rightarrow \quad)$	7, Def.
10.	$\sim(\text{sing}\{\quad\})$	1, 8, 9, \sim i

Ainsi se trouve éclairé le caractère fondamental, au sens littéral du terme, des constantes nominales du nom universel et du nom vide. Ce sont elles qui enracinent en quelque sorte le système logique de l'Ontologie dans l'intuition de ce

qui est, conformément à la position nominaliste de Lesniewski. Leur légitimation formelle va de pair avec la possibilité d'ancrer la Méréologie dans le langage logique de l'Ontologie. Car c'est bien du refus de l'existence d'aucun objet abstrait tel qu'une classe distributive et de celui de quelque chose qui désigne «le rien» au profit d'une constante qui ne désigne rien, desquels dépendait le fondement logique d'une théorie collective des classes dans la syntaxe de l'Ontologie.

Terminons dans la lignée de ce qui précède en mettant brièvement en évidence que l'Ontologie est une logique libre et universelle. Pour ce faire, considérons la thèse suivante.

T_{O25} : $\sim, a. 'ex\{a\}'$ ³³

Elle se lit : «tout nom ne dénote pas». C'est bien de cela dont témoigne la constante nominale « ». Cette thèse, que nous avons déjà évoquée (cf. 6.1), montre bien que l'Ontologie est une logique libre de tout engagement existentiel. Et enfin, observons que l'expression suivante n'est pas une thèse (cf. *supra* T_{O10} pour la définition du relateur).

$\sim(V)$

«(V)» est en effet vraie dans un cas particulier, lorsque l'univers est vide. Ce résultat révèle donc le caractère de logique universelle de l'Ontologie.

8. Analyse catégorielle de l'antinomie de Russell

Nous terminerons ce chapitre en montrant que le relateur de l'épsilon ne peut pas engendrer un analogue formel de l'antinomie de Russell³⁴. Pour avoir une

³³ Nous ne donnons pas la démonstration.

³⁴ Cette question est traitée dans Sobocinski 1949: 245-251.

antinomie de type russellienne, il faudrait en effet pouvoir inscrire la thèse suivante:

$$(1) \quad \exists A \text{ « } A \text{ } W \text{ } \sim(A \text{ } A) \text{ »}$$

En éliminant le quantificateur et en substituant W à A , on obtiendrait alors

$$(2) \quad W \text{ } W \text{ } \sim(W \text{ } W),$$

ce qui serait une contradiction.

Mais l'expression (1) ne peut pas être introduite comme thèse dans le calcul par la directive de définition nominale. Rappelons le moule de cette directive:

$$\exists v_1 v_2 \dots v_n \text{ « } A \text{ } g(v_1 v_2 \dots v_n) \text{ } A \text{ } A \text{ } E_{v_1 v_2 \dots v_n} \text{ »}$$

Dans (1), le *definiendum* « $A \text{ } W$ » exprime que A est un nom individuel et que A est W mais le *definiens* ne dit pas que A est un objet. « $\sim(A \text{ } A)$ » nie que A est un nom individuel, ou que si A est un nom individuel alors A est A . Or, compte tenu des conditions de vérité de la proposition singulière, un énoncé de la forme $\sim(a \text{ } b)$ est vrai si a ne désigne pas exactement un objet ou si l'unique objet désigné par a n'est pas b . La définition d'un terme prédicat qui peut être prédiqué d'individus est une définition correcte si et seulement si le *definiens* garantit que les noms qui sont les sujets des propositions dont les prédicats sont les termes définis sont des noms d'individus.

Par conséquent, la seule définition conforme à la directive de définition Dn serait:

$$\exists A \text{ « } A \text{ } W \text{ } . A \text{ } A \text{ } \sim(A \text{ } A) \text{ »}$$

On reconnaît dans cette définition celle du nom contradictoire ou du nom vide (thèse T_021). Ce qui signifie, en d'autres termes, que la contrepartie formelle dans l'Ontologie de l'antinomie de Russell engendre le nom vide.

Relevons également que $\langle A, A \rangle \in W \sim (A \in A)$ est une expression mal formée si l'on interprète « \in » comme l'appartenance ensembliste, soit «est élément de» (au sens de «est membre de»). Sous cette interprétation, $W \in W$ peut être mise sous la forme $W\{W\}$ où le premier « W » est un foncteur prenant pour argument le second « W ».

La formule (1) peut alors s'écrire sous la forme équivalente:

$$(3) \quad \langle A, A \rangle \in W\{A\} \sim (A \in A)$$

Le foncteur « W » serait dans ce cas défini au moyen de la directive de définition de type propositionnel D_s , c'est-à-dire:

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle \in f(v_1, v_2, \dots, v_n) \quad D_{v_1, v_2, \dots, v_n}$$

Mais (3) n'est pas une définition correcte car les deux occurrences de la variable « A » font un double usage illicite de catégories (foncteur et argument) alors que les principes catégoriels exigent qu'elles renvoient à la même catégorie. (3) est donc une expression dénuée de sens *parce qu'elle* comporte une confusion de catégories sémantiques. A la terminologie près, c'est pour la même raison qu'elle est écartée par la théorie des types.

En guise de conclusion, faisons encore observer que si l'approche catégorielle et la théorie des types s'accordent pour rejeter l'expression (3) comme syntaxiquement mal formée, leurs raisons divergent en ce qui concerne leur analyse de l'expression (1). Pour la théorie des types « $A \in A$ » est tout aussi dénué de sens que « $A\{A\}$ » puisque sujet et prédicat doivent appartenir à des types distincts. En revanche, (1) n'est pas une expression dénuée de sens dans l'Ontologie. Simple-ment, comme nous l'avons explicité, elle ne peut pas être inscrite comme thèse

définatoire parce qu'elle transgresse les modes de caractérisation formels d'une définition correcte.

CHAPITRE IV

RESOLUTION DE L'ARGUMENT DE DE MORGAN

Ce chapitre est celui de la résolution dans la Méréologie du problème sémantique soulevé par l'argument de De Morgan. Aussi entrons-nous avec lui dans la phase formelle et démonstrative de cette thèse. Dans un premier temps, nous commenterons les aspects structurels de l'axiomatique adoptée de la Méréologie, à la lumière de ses fondements logiques exposés dans le chapitre précédent. Nous illustrerons également la définition de la classe collective. Ensuite, nous démontrerons un certain nombre de thèses caractéristiques de la Méréologie dont certaines serviront l'établissement de celles validant l'argument de De Morgan, conformément à la nature ingrédentielle de la relation qu'il mobilise. Ces thèses, qui seront au nombre de deux, constitueront l'aboutissement de ce dernier chapitre et, partant, de ce travail lui-même.

1. Le système axiomatique

Comme nous l'avons mentionné à la fin du chapitre II, il existe de nombreuses axiomatiques de la Méréologie. Celle que nous avons adoptée est, d'un point de vue historique, la première en date. Rédigée en 1916, elle est le résultat direct de l'analyse par Lesniewski de l'antinomie de Russell. Nous l'avons préférée à d'autres parce qu'elle demeure la plus explicite dans son rapport immédiat à notre appréhension commune de la réalité et les traits caractéristiques de la classe méréologique esquissés précédemment. On peut toutefois lui reprocher une petite imperfection, celle de faire usage d'une définition dans les axiomes. Il s'agit en l'occurrence de la définition du foncteur collectif «classe de», qui intervient dans les deux derniers axiomes. Ce défaut est toutefois sans conséquences et il est corrigé dans les axiomatiques qui furent par la suite proposées. La première d'entre elles est notamment la version revue de l'axiomatique de 1916. Quant aux suivantes, elles sont construites sur d'autres foncteurs méréologiques primitifs que «partie de», tous susceptibles de caractériser la Méréologie¹.

Nous retrouvons donc le système axiomatique exposé plus haut, traduit dans le symbolisme propre à l'Ontologie.

Ax_M1:

, AB « A pt(B) B ~(pt(A)) »

Si A est une partie de B, alors B n'est pas une partie de A.

1 On trouvera en annexe un aperçu de ce panorama axiomatique.

Ax_M2:

, ABC „ ‘ A pt(B) B pt(C). A pt(C) ’ ”

Si A est une partie de B et B est une partie de C, alors A est une partie de C.

Df_{EL}:

, AB „ ‘ A el(B) . A pt(B) A = B ’ ”

A est un élément de B si et seulement si A est une partie de B ou A est identique à B.

Df_{KL}:

, Aa „ ‘ A Kl(a) . A A , B „ ‘ B a B el(A) ’ ”

, B „ ‘ B el(A) , CD „ ‘ C a D el(C) D el(B) ’ ” ”

A est la classe des objets a si et seulement si les trois conditions suivantes sont remplies:

- i) A est un nom d'objet.
- ii) pour tout B, si B est un des a alors B est un élément de A.
- iii) si B est un élément de A alors il existe C et D tels que C est un des a et D est élément de C et élément de B.

Ax_M3:

, ABa „ ‘ A Kl(a) B Kl(a) . A = B ’ ”

Si A est la classe des a est B est la classe des a, alors A est identique à B.

Ax_M4:

, Aa „ ‘ A a , B „ ‘ B Kl(a) ’ ” ”

Si A est un a, alors il existe B tel que B est la classe des a.

Répetons de nouveau que le terme primitif de cette axiomatique est «partie de», symboliquement «pt». Il caractérise une relation d'ingrédience entre deux

termes dont un dénote un tout et l'autre une partie, en ce sens que le tout n'est pas une partie de lui-même. Le premier axiome fixe la propriété d'asymétrie de cette relation primitive, de laquelle découle précisément son irréflexivité (Cf. *infra* thèse T_M7). Le deuxième axiome en exprime la propriété de transitivité.

La première définition, celle du foncteur «élément de», symboliquement «el» ajoute une seconde relation de nature ingrédientielle «être élément de». A la différence de la première, celle de partie à tout, cette relation est réflexive (Cf. *infra* thèse T_M6). Il est évident – mais le poids d'une longue tradition ensembliste ne peut pas être ignoré – que les termes *relation de partie à tout* et *relation d'appartenance* sont affranchis du sens qui leur est assigné dans une théorie sémantique standard, en tant que l'inclusion entre classes et l'appartenance d'un élément à une classe distributive.

La seconde définition inscrit le foncteur collectif «classe de», symboliquement «Kl». Le troisième axiome garantit l'unicité de la classe collective. Quant au quatrième axiome, il affirme que la classe des objets a existe pour autant qu'il existe au moins un objet a .

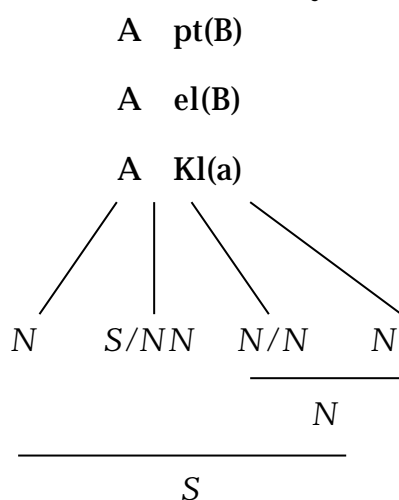
On relèvera que la définition du foncteur «el» et l'axiome 3 renferment le relationneur de l'identité singulière, «=», défini dans l'Ontologie avec la thèse T_O6 . On notera également que l'axiome 4 pourrait être formulé au moyen du foncteur d'existence «ex», défini avec la thèse T_O1 , de la manière suivante:

$$, a \text{ « } \text{ex}(a) \quad \text{ex}(Kl(a)) \text{ »}$$

Avant de mettre en mouvement cette axiomatique, il convient de dire quelques mots de ses aspects structurels et catégoriels ainsi que de procéder à une illustration précise de la définition de la classe collective. En premier lieu, faisons

observer que nous utiliserons indifféremment les expressions «A est un nom individuel», «A est un nom d'objet» ou «A est un objet»². Ensuite, à la lumière du chapitre précédent, notons que la Méréologie s'enracinant dans l'axiome fondateur de l'Ontologie, les propositions «A est une partie de B», «A est un élément de B» et «A est la classe des a» sont vraies sous les mêmes conditions que la proposition singulière «A est b», tout comme elles sont soumises aux contraintes catégorielles du système logique. Les expressions «partie de B», «élément de B» et «classe de a», symboliquement «pt(B)», «el(B)» et «Kl(a)», sont des termes qui appartiennent à la catégorie sémantique des noms tandis que les propositions singulières dans lesquelles elles se trouvent en position de prédicat sont vraies si et seulement si le terme sujet est un nom singulier et si ce qu'il désigne est également désigné par les termes en question.

D'un point de vue catégoriel, les foncteurs «partie de», «élément de» et «classe de», symboliquement «pt», «el» et «Kl», sont des foncteurs formateurs de noms à un argument nominal, c'est-à-dire de catégorie N/N . On a donc, pour les expressions «A pt(B)», «A el(B)» et «A Kl(a)», l'analyse catégorielle suivante³:

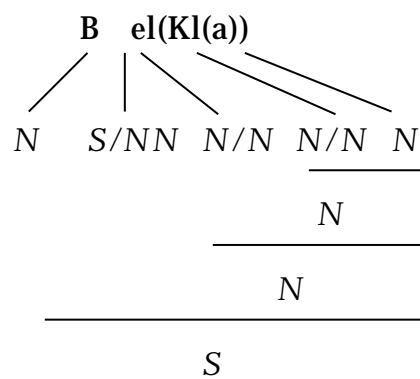


² Cf. Miéville 1984 (363-373) qui propose une formalisation de la sémantique de l'Ontologie.

³ Nous ne développons pas la question des outils catégoriels d'analyse ici utilisés (A ce sujet, cf. Joray 1999).

Les relations «être une partie de» et «être élément de» sont des relations entre deux termes dont chacun est un nom individuel (Cf. *infra* thèses T_M8 et T_M9). Quant au foncteur collectif «classe de», ayant pour tâche de permettre l'unification en une entité individuelle d'une multiplicité donnée d'objets individuels, il peut avoir pour argument un nom pluriel.

Examinons encore, pour terminer, l'analyse catégorielle de la proposition «B est un élément de la classe des a», soit «B el(Kl(a))»:



A la lumière de cette analyse, on ne manquera pas d'opposer une fois de plus les classes distributives aux classes méréologiques en observant que le passage d'une extension à la classe collective générée par cette extension n'est sujet à aucun saut qualitatif. Non seulement les termes «B» et «Kl(a) ont le même «type» sémantique puisqu'ils appartiennent chacun à la catégorie des noms mais, de plus, ce sont des noms singuliers⁴. Pour reprendre encore une fois les propos de Whitehead et Russell, les expressions de classes ont dans la Méréologie le statut de noms singuliers et, à ce titre, dénotent des «objets authentiques, comme le sont leurs éléments lorsqu'ils sont des individus»⁵.

Soyons attentif, à ce stade de notre réflexion, à l'axiome 4. Cet axiome exprime que, partant d'une organisation purement extensionnelle, on peut générer

4 Pour Kl(a), c'est ce que montre la thèse T_M10 (cf. *infra* section 2).
 5 Cf. Whitehead & Russell 1927: 72.

l'entité collective composée de cette extension. Il se présente ainsi comme l'expression formelle du passage entre les modes d'appréhension distributif et collectif des objets. Et comme nous l'avons fait remarqué, cette articulation opérée par l'ancrage de la Méréologie sur l'Ontologie n'est pas entachée par l'aporie de l'un et du multiple. On ne rencontre dans l'Ontologie que des extensions pures tandis que, dans la Méréologie, l'objet dénoté par l'expression nominale «la classe des a », c'est-à-dire généré à partir de l'extension des a , possède la légitimité d'un objet individuel, le tout méréologique composé des objets a .

Venons en à présent à la définition du foncteur collectif «Kl». Dans le chapitre II, où nous ne disposions pas encore des bases logiques présumées par la Méréologie, nous nous sommes bornés à une rapide exemplification. Considérons donc, de manière plus rigoureuse, cette définition:

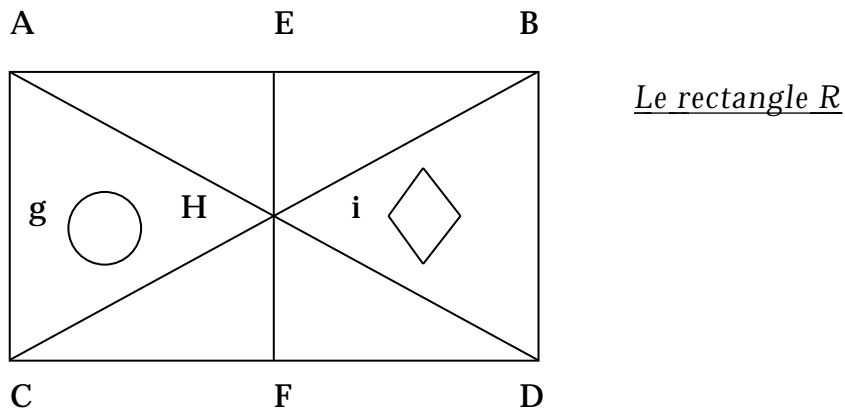
$$\begin{aligned} & , Aa \text{ " } A \text{ Kl}(a) \text{ . } A \text{ } A \\ & , B \text{ " } B \text{ } a \text{ } B \text{ el}(A) \text{ " } \\ & , B \text{ " } B \text{ el}(A) \text{ , } CD \text{ " } C \text{ } a \text{ } D \text{ el}(C) \text{ } D \text{ el}(B) \text{ " " " } \end{aligned}$$

Trois clauses sont associées à la définition de l'objet collectif «la classe des a », où le nom a est un nom d'éléments génériques de l'entité collective. La première clause énonce que si A est la classe des objets a , alors A est un nom individuel, autrement dit que A est un objet. La deuxième clause énonce que tout ce qui est a est élément de l'objet individuel A . Quant à la troisième clause, elle dit que si un objet B est un élément de l'objet A , alors on peut trouver un objet C tel que C est un des objets a et quelque élément de l'objet B en est aussi élément. Si l'on se souvient de la définition du relateur de l'inclusion partielle, « \supset », défini dans

l'Ontologie avec la thèse T_{O7} , on notera que l'on peut abréger cette clause comme suit:

$$, B \text{ « } B \text{ el}(A) \text{ » } , C \text{ « } C \text{ a el}(B) \text{ el}(C) \text{ » } "$$

Pour illustrer la définition Df_{kl} , nous avons choisi une figure géométrique, de nature à concrétiser nos exemples et contre-exemples. Il s'agit d'un rectangle. Nous l'appelons R .



Trois exemples et deux contre-exemples vont être proposés.

Exemple 1

Dans un premier temps, abordons la figure R comme la classe des carrés de R . Le nom générique a est donc «carré de R » et on aura $A \text{ Kl}(\text{carré de } R)$. Dès lors:

- i) A est un objet. Ou, autrement dit, le nom A dénote un objet: c'est le rectangle R .
- ii) Tout carré de R , comme par exemple le carré $AECF$ ou le carré $EBFD$, est un élément de R .
- iii) Pour un élément B quelconque de R , par exemple le triangle BHD , il existe un objet C qui est un carré de R , soit le carré $EBFD$, et un objet D

qui est élément de C et élément de B, par exemple le losange i (ou encore le triangle BHD lui-même).

On pourrait aussi considérer pour B, par exemple, l'objet collectif composé du cercle g et du triangle HBD. Il existe en effet un C qui est un carré de R, par exemple le carré AECF, et un D qui est élément de B et élément de C, par exemple le losange i.

Exemple 2

Appréhendons à présent R comme la classe des triangles de R. Le nom générique «a» est cette fois «triangle de R» et on aura: $A \text{ Kl}(\text{triangle de R})$.

- i) *A est un objet: c'est le rectangle R.*
- ii) *Tout triangle de R est un élément de R.*
- iii) *Pour un élément B quelconque de R, par exemple le carré AECF, il existe un objet C qui est un triangle de R, comme le triangle AHC, et un objet D qui est élément de B et de C, par exemple le cercle g.*

Exemple 3

On peut également aborder le rectangle R comme la classe collective de lui-même. Dans ce cas, le nom générique est le nom singulier « R » et on aura $A \text{ Kl}(R)$.

- i) *A est un objet: c'est le rectangle R.*
- ii) *Le rectangle R est élément de A, c'est-à-dire de la classe collective de lui-même.*

- iii) *Pour un élément B quelconque de A, par exemple le carré AECF, il existe un C qui est un rectangle R, en l'occurrence le rectangle R, et un objet D qui est élément du rectangle R et de B, par exemple le cercle g.*

Les trois exemples que nous venons de considérer mettent en évidence que l'entrée en matière extensionnelle d'une classe collective peut être donnée par différents noms génériques. «carré de R», «triangle de R» et «R», soient deux noms pluriels et un nom singulier, génèrent dans chacun des cas la même entité collective, c'est-à-dire l'objet R.

Considérons maintenant deux contre-exemples.

Contre-exemple 1

Le rectangle R n'est pas la classe générée par le triangle AEH.

Les clauses i) et ii) sont satisfaites:

- i) *A est un objet: c'est le rectangle R.*
- ii) *Le triangle AEH est un élément du rectangle R.*

Mais la troisième clause n'est pas satisfaite:

- iii) *Le carré EBF D est élément de R. Or on ne trouve aucun élément du carré EBF D qui soit élément du triangle AEH.*

Contre-exemple 2

Le triangle AEH n'est pas la classe générée par le rectangle R.

Les conditions i) et iii) sont remplies:

- i) *A est un objet: c'est le triangle AEH.*
- iii) *tout élément du triangle AEH est élément de R.*

Mais la condition ii) n'est pas satisfaite:

ii) Le rectangle R n'est pas élément du triangle AEH.

Nous en restons là en ce qui concerne le foncteur «Kl». L'exemple traité suffit à rendre compte de quelle manière le foncteur «Kl», s'exerçant à partir du mode de singularité extensionnelle, ouvre l'accès à une appréhension des objets comme des tous composés de leurs ingrédients et, ce faisant, à leur analyse ingrédientielle *ad infinitum*.

2. Thèses caractéristiques de la Méréologie

Sur la base du système axiomatique adopté, démontrons à présent un certain nombre de thèses. Certaines d'entre elles sont nécessaires à la démonstration des thèses supportant la résolution de l'argument de De Morgan. Les autres, si elles ne serviront pas directement ce but, sont de nature à expliciter formellement le caractère propre d'une théorie sémantique régie par une définition collective de la classe et la relation d'ingrédience.

Reportons tout d'abord les six thèses composant le système axiomatique:

$$Ax_M1: \quad , AB \text{ " } A \text{ pt}(B) \quad B \quad \sim(\text{pt}(A)) \text{ "}$$

$$Ax_M2: \quad , ABC \text{ " } A \text{ pt}(B) \quad B \text{ pt}(C). \quad A \text{ pt}(C) \text{ "}$$

$$Df_{EL}: \quad , AB \text{ " } A \text{ el}(B) \quad . \quad A \text{ pt}(B) \quad A = B \text{ "}$$

$$Df_{KL}: \quad , Aa \text{ " } A \text{ Kl}(a) \quad . \quad A \quad A \quad , B \text{ " } B \text{ a } B \text{ el}(A) \text{ "}$$

$$, B \text{ " } B \text{ el}(A) \quad , \quad CD \text{ " } C \text{ a } D \text{ el}(C) \quad D \text{ el}(B) \text{ " " "}$$

$$Ax_M3: \quad , ABa \text{ " } A \text{ Kl}(a) \quad B \text{ Kl}(a) \quad . \quad A = B \text{ "}$$

$$Ax_M4: \quad , Aa \text{ " } A \text{ a } \quad , B \text{ " } B \text{ Kl}(a) \text{ " "}$$

Les trois premières thèses nouvelles que nous inscrivons sont des conséquences de la définition Df_{KL} . Chacune d'entre elles relève d'une des trois conjonctions du *definiens*.

$$T_M1: \quad , Aa \text{ " } A \text{ Kl}(a) \quad A \quad A \text{ "}$$

Lecture: Si A est la classe des objets a, alors A est un objet.

$$T_M2: \quad , Aa \text{ " } A \text{ Kl}(a) \quad , B \text{ " } B \text{ a } B \text{ el}(A) \text{ " "}$$

Lecture: Si A est la classe des objets a, alors si B est un a, alors B est un élément de A.

T_{M3} : $\forall A, \forall a \in A, \exists B, \forall B \in el(A), \exists C, D, C \in a, D \in el(C), D \in el(B)$ ” ” ”

Lecture: Si A est la classe des a, alors pour tout B, si B est un élément de A, alors il existe C et D tels que C est un des a et D est un élément de C et D est un élément de B.

Les thèses suivantes rendent compte des propriétés formelles des relations «être un élément de» et «être une partie de», contenues en germe dans l'axiomatique. Pour la relation d'appartenance, nous démontrerons sa réflexivité et sa transitivité, et pour la relation de partie à tout son irreflexivité.

T_{M4} : $\forall A, \forall a \in A, A \in el(A)$ ”

Lecture: Si A est un des a, alors A est élément de lui-même.

Démonstration:

1.	Aa	A a	Hyp.
2.		$\forall A, \forall a \in A, A \in el(A)$ ”	T_{O15}
3.		A A	2, , “e, e
4.		A A	3, rép.
5.		A A A A	3, 4, i
6.		$\forall AB, A = B \rightarrow A \in el(B) \wedge B \in el(A)$ ”	T_{O9}
7.		A = A	5, 6, , “e, B/A, e
8.		A = A A pt(A)	7, i
9.		A el(A)	8, Df _{EL}
10.		$\forall A, \forall a \in A, A \in el(A)$ ”	1-9, i
11.	$\forall A, \forall a \in A, A \in el(A)$ ”		1-10, , “i

De la thèse T_{M4} , on obtient directement la thèse suivante:

T_{M5} : $\forall A, A \in el(A)$ ” $T_{M4}, a/A$

Lecture: Si A est un nom d'objet, alors A est élément de lui-même.

$T_M6: \quad , ABC \text{ „ } A \text{ el}(B) \text{ } B \text{ el}(C). \text{ } A \text{ el}(C) \text{ ”}$

Lecture: Si A est élément de B et B est élément de C, alors A est élément de C.

Démonstration:

1.	ABC	A el(B) B el(C)	Hyp.
2.		A el(B)	1, e
3.		B el(C)	1, e
4.		A = B A pt(B)	2, Df _{EL}
5.		B = C B pt(C)	3, Df _{EL}
6.		~(A = C A pt(C))	Hyp.
7.		A = B	Hyp.
8.		B = C B pt(C)	5, réit.
9.		A = C A pt(C)	7,8, =e
10.		~(A = C A pt(C))	6, réit.
11.		~(A = B)	7,9, 10, ~i
12.		A = B A pt(B)	4, réit.
13.		A pt(B)	11, 12, e
14.		B = C	Hyp.
15.		A = B A pt(B)	4, réit.
16.		A = C A pt(C)	14, 15, =e
17.		~(A = C A pt(C))	6, réit.
18.		~(B = C)	14, 16, 17, i
19.		B = C B pt(C)	5, réit.
20.		B pt(C)	18, 19, e
21.		A pt(B) B pt(C)	13, 20, i
22.		, ABC „ A pt(B) B pt(C). A pt(C) ”	Ax _M 2
23.		A pt(C)	21, 22, , „e, e
24.		A = C A pt(C)	23, i
25.		~(A = C A pt(C))	6, rép.
26.		~~(A = C A pt(C))	6, 24, 25, ~i
27.		A = C A pt(C)	26, ~~e
28.		A el(C)	27, Df _{EL}
29.		A el(B) B el(C). A el(C)	1-28, i
30.		, ABC „ A el(B) B el(C). A el(C) ”	1-29, , „i

Ainsi, dans son acception méréologique, la relation d'appartenance «être élément de» est réflexive, non symétrique et transitive. Elle a donc des propriétés très différentes de la relation d'appartenance ensembliste puisque celle-ci est, rappelons-le, irréflexive, asymétrique et non transitive.

Poursuivons avec l'irréflexivité de la relation de partie à tout, conséquence directe de l'asymétrie de cette relation portée par l'axiome 2.

$T_M7: \quad , A \text{ « } \sim(A \text{ pt}(A)) \text{ »}$

Lecture: Aucun individu n'est une partie de lui-même.

Démonstration:

1.	A	A pt(A)	
2.		, AB « A pt(B) B \sim (pt(A)) »	Hyp. Ax _M 1
3.		A \sim (pt(A))	1, 2, , « e, B/A, e
4.		, Ab « A \sim (b) . A A \sim (A b) »	T _O 11
5.		A A \sim (A pt(A))	3, 4, , « e, b/pt(A), e
6.		\sim (A pt(A))	5, e
7.		A pt(A)	1, rép.
8.		\sim (A pt(A))	1, 6, 7, \sim i
9.		, A « \sim (A pt(A)) »	1-8, , « i

La relation de partie à tout est au total irréflexive, asymétrique et transitive.

Considérons à présent les thèses montrant que si un objet A est un élément ou une partie de quelque chose, alors ce quelque chose est un objet individuel.

$T_M8: \quad , AB \ulcorner A \text{ pt}(B) \text{ B B} \urcorner$

Lecture: Si A est une partie de B, alors B est un nom individuel.

Démonstration:

1.	AB	A pt(B)		
2.			, AB $\ulcorner A \text{ pt}(B) \text{ B } \sim(\text{pt}(A)) \urcorner$	Hyp. Ax _M 1
3.			B $\sim(\text{pt}(A))$	1, 2, , $\ulcorner e, \urcorner e$
4.			, Aa $\ulcorner A \text{ a } A \text{ A} \urcorner$	T _O 15
5.			B B	3, 4, , $\ulcorner e, A/B, a/\text{pt}(B), \urcorner e$
6.			A pt(B) B B	1-5, i
7.			, AB $\ulcorner A \text{ pt}(B) \text{ B B} \urcorner$	1-6, , $\ulcorner i$

$T_M9: \quad , AB \ulcorner A \text{ el}(B) \text{ B B} \urcorner$

Lecture: Si A est un élément de B, alors B est un nom individuel.

Démonstration:

1.	AB	A el(B)		
2.			A pt(B) A = B	Hyp. 1, Df _{EL}
3.			A pt(B)	Hyp.
4.			, AB $\ulcorner A \text{ pt}(B) \text{ B B} \urcorner$	T _M 8
5.			B B	3, 4, , $\ulcorner e, \urcorner e$
6.			A = B	Hyp.
7.			, AB $\ulcorner A = B \text{ . } A \text{ B B } A \urcorner$	T _O 9
8.			A B B A	6, 7, , $\ulcorner e, \urcorner e$
9.			B A	8, e
10.			, Aa $\ulcorner A \text{ a } A \text{ A} \urcorner$	T _O 15
11.			B B	9, 10, , $\ulcorner e, A/B, a/A, \urcorner e$
12.			B B	2, 3-5, 6-11, e
13.			A el(B) B B	1-12, i
14.			, AB $\ulcorner A \text{ el}(B) \text{ B B} \urcorner$	1-13, , $\ulcorner i$

Ces thèses en appellent une autre. En effet, puisqu'un élément ou une partie est un ingrédient de ce qui est à considérer comme un tout, ce dernier étant créé à partir d'éléments qui participent à sa constitutivité ingrédientielle, il faut donc

montrer que la classe collective est un objet individuel. C'est ce résultat qu'établit la thèse suivante:

T_M10 : $\vdash Aa \text{ « } A \text{ a Kl(a) Kl(a) »}$

Lecture Si A est un des a, alors la classe des a est un objet.

En établissant que Kl(a) est un nom individuel, autrement dit que la classe collective est un objet individuel, cette thèse justifie ainsi que l'on interprète l'expression «A Kl(a)» comme «A est la classe des a».

Démonstration:

1.	Aa	A a		
2.		A a	$\vdash Aa \text{ « } A \text{ a } , B \text{ « } B \text{ Kl(a) » »}$	Hyp. Ax_M4
3.			$\vdash B \text{ « } B \text{ Kl(a) »}$	1, 2, \vdash «e, e
4.			$\vdash p \text{ « } p \text{ p »}$	$T_{\text{Protothétique}}$
5.			$\vdash B \text{ « } B \text{ Kl(a) } B \text{ Kl(a) »}$	4, $p/B \text{ Kl(a)}$
6.			$\vdash BC \text{ « } B \text{ Kl(a). } C \text{ Kl(a) } B = C \text{ »}$	Ax_M3
7.			$\vdash BC \text{ « } B \text{ Kl(a). } C \text{ Kl(a) } B \text{ C »}$	6, T_O9
8.			$\vdash B \text{ « } B \text{ Kl(a) » } , B \text{ « } B \text{ Kl(a) } B \text{ Kl(a) »}$ $\vdash BC \text{ « } B \text{ Kl(a) } C \text{ Kl(a) } B \text{ C »}$	3, 5, 8, i
9.			Kl(a) Kl(a)	8, Ax_O
10.			A a Kl(a) Kl(a)	1-9, i
11.			$\vdash Aa \text{ « } A \text{ a Kl(a) Kl(a) »}$	1-10, \vdash «i

Poursuivons avec une thèse que l'on peut considérer comme l'expression formelle du rejet dans la Méréologie de la classe vide:

T_{M11} : $\exists x (Ax \wedge \neg \exists y (By \wedge \neg Axy))$

Lecture: Si A est la classe des a, alors il existe au moins un B tel que B est a.

Démonstration:

1.	Aa	A Kl(a)		Hyp.
2.		$\exists x (Ax \wedge \neg \exists y (By \wedge \neg Axy))$		T_{M1}
3.		A A		1, 2, \exists e, e
4.		$\exists x (Ax \wedge \neg \exists y (By \wedge \neg Axy))$		T_{M5}
5.		A el(A)		3, 4, \exists e, e
6.		$\exists x (Ax \wedge \neg \exists y (By \wedge \neg Axy))$		T_{M3}
7.		$\exists x (Ax \wedge \neg \exists y (By \wedge \neg Axy))$		1, 6, \exists e, e
8.		$\exists x (Ax \wedge \neg \exists y (By \wedge \neg Axy))$		5, 7, \exists e, B/A, e
9.		CD	C a D el(C) D el(A)	Hyp.
10.		C a		9, e
11.		$\exists y (By \wedge \neg Axy)$		10, i
12.		$\exists y (By \wedge \neg Axy)$		8, 9-11, e
13.		A Kl(a)	$\exists y (By \wedge \neg Axy)$	1-12, i
14.		$\exists x (Ax \wedge \neg \exists y (By \wedge \neg Axy))$	$\exists y (By \wedge \neg Axy)$	1-13, \exists i

T_{M12} : $\vdash Aa \ulcorner A \text{ Kl}(a) \text{ } A = Kl(a) \urcorner$

Lecture: Si A est la classe des a, alors A est identique à la classe des a.

Démonstration:

1.	Aa	A Kl(a)		Hyp.
2.		$\ulcorner Aa \ulcorner A \text{ Kl}(a) \text{ } B \ulcorner B \text{ } a \urcorner \urcorner$		T_{M11}
3.		$\ulcorner B \ulcorner B \text{ } a \urcorner \urcorner$		1, 2, $\ulcorner e, e \urcorner$
4.		B		Hyp.
5.		$\ulcorner Aa \ulcorner A \text{ } a \text{ Kl}(a) \text{ Kl}(a) \urcorner \urcorner$		T_{M10}
6.		Kl(a) Kl(a)		4, 5, $\ulcorner e, A/B, e \urcorner$
7.		Kl(a) Kl(a)		3, 4-6, e
8.		A Kl(a) Kl(a) Kl(a)		1, 7, i
9.		$\ulcorner ABa \ulcorner A \text{ } B \text{ } a \text{ } A = B \urcorner \urcorner$		T_{O19}
10.		A = Kl(a)		8, 9, $\ulcorner e, B/Kl(a), a/Kl(a), e \urcorner$
11.		A Kl(a) A = Kl(a)		1-10, i
12.		$\ulcorner Aa \ulcorner A \text{ Kl}(a) \text{ } A = Kl(a) \urcorner \urcorner$		1-11, $\ulcorner i \urcorner$

La thèse T_{M5} a établi que tout objet est élément de lui-même. Démontrons à présent qu'une classe collective, qui est une entité individuelle, est élément d'elle-même. Souvenons-nous que l'analyse par Lesniewski de l'antinomie de Russell est dirigée par cette thèse (chapitre II, section 5).

T_{M13} : $\vdash Aa \ulcorner A \text{ Kl}(a) \text{ } A \text{ el}(A) \urcorner$

Lecture: Si A est la classe des a, alors A est élément d'elle-même.

Démonstration:

1.	Aa	A Kl(a)		Hyp.
2.		$\ulcorner Aa \ulcorner A \text{ Kl}(a) \text{ } A \text{ } A \urcorner \urcorner$		T_{M1}
3.		A A		1, 2, $\ulcorner e, e \urcorner$
4.		$\ulcorner A \ulcorner A \text{ } A \text{ } A \text{ } el(A) \urcorner \urcorner$		T_{M5}
5.		A el(A)		3, 4, $\ulcorner e, e \urcorner$
6.		A Kl(a) A el(A)		1-5, i
7.		$\ulcorner Aa \ulcorner A \text{ Kl}(a) \text{ } A \text{ } el(A) \urcorner \urcorner$		1-6, $\ulcorner i \urcorner$

Les deux thèses suivantes sont particulièrement révélatrices des divergences entre la Méréologie et les théories classiques des classes. Elles expriment en effet qu'aucune distinction n'est faite entre un objet individuel et la classe composée de cet objet. La première établit que tout objet est la classe de lui-même tandis que la seconde montre que tout objet est identique à la classe de lui-même.

T_M14 : , A " A A A Kl(A) "

Lecture: Si A est un objet, alors A est la classe de lui-même.

Démonstration:

1.	A	A A		Hyp.
2.		B	B A	Hyp.
3.			A A	1, reit.
4.			, ABa " A B B a . A = B "	T_O19
5.			B = A	2, 3, i, 4, , "e, B/A, A/B, a/A, e
6.			, A " A A A el(A) "	T_M5
7.			A el(A)	3, 6, , "e, e
8.			B el(A)	5, 7, =e
9.		B A	B el(A)	2-8, i
10.		, B " B A B el(A) "		2-9, , "i
11.		B	B el(A)	Hyp.
12.			, Aa " A a A A "	T_O15
13.			B B	11, 12, , "e, A/B, a/el(A), e
14.			, A " A A A el(A) "	T_M5
15.			B el(B)	13, 14, , "e, A/B, e
16.			A A	1, reit.
17.			A A B el(A) B el(B)	11, 15, 16, i
18.			, CD " C A D el(C) D el(B) "	17, i, A/C, B/D
19.		B el(A) , CD " C A D el(C) D el(B) "		11-18, i
20.		, B " B el(A) , CD " C A D el(C) D el(B) "		11-19, , "i
21.		A Kl(A)		1, 10, 20, i, Df_{KL}
22.	A A A Kl(A)			1-21, i
23.	, A " A A A Kl(A) "			1-22, , "i

T_{M15} : , A “ A A A = Kl(A) ”

Lecture: A est un objet si et seulement si A est identique à la classe de lui-même.

Démonstration:

1.	A	A A		
2.		, Aa “ A A A Kl(A) ”		Hyp. T_{M14}
3.		A Kl(A)		1, 2, , “e, e
4.		, Aa “ A Kl(a) A = Kl(a) ”		T_{M11}
5.		A = Kl(A)		3,4 , “e, a/A, e
6.	A	A A A = Kl(A)		1-5, i
7.		A = Kl(A)		Hyp.
8.		, AB “ A = B . A B B A ”		T_{O9}
9.		A Kl(A) Kl(A) A		7, 8, , “e, B/Kl(A), e
10.		A Kl(A)		9, e
11.		A = Kl(A) A Kl(A) ”		7-10, i
12.		A A A = Kl(A)		6, 11, i
13.		, A “ A A A = Kl(A) ”		1-12, , “i

La thèse suivante est le pendant de la thèse T_{M2} , obtenue à partir de la définition Df_{Kl} , puisqu'elle dit que si un objet est a, alors il est élément de la classe collective composée des objets a.

$T_M16: \quad , Aa \text{ " } A \text{ a } A \text{ el}(Kl(a)) \text{ "}$

Lecture: Si A est un des objets a, alors A est élément de la classe générée par les a.

Démonstration:

1.	Aa	A a		
2.		$\frac{A a}{, Aa \text{ " } A \text{ a } , B \text{ " } B \text{ Kl}(a) \text{ "}}$		Hyp. Ax _M 4
3.		$, B \text{ " } B \text{ Kl}(a) \text{ "}$		1, 2, , "e, e
4.		B	B Kl(a)	Hyp.
5.			B = Kl(a)	4, T _M 12
6.			A a	1, réit.
7.			$, Aa \text{ " } A \text{ Kl}(a) , B \text{ " } B \text{ a } B \text{ el}(A) \text{ "}$	T _M 2
8.			A a A el(B)	4, 7, , "e, A/B, B/A, e
9.			A el(B)	6, 8, e
10.			A el(Kl(a))	5, 9, =e
11.		A	el(Kl(a))	3, 4, 10, e
12.	A a		A el(Kl(a))	1-11, i
13.	$, Aa \text{ " } A \text{ a } A \text{ el}(Kl(a)) \text{ "}$			1-12, , "i

Nous avons démontré avec la thèse T_M13 que tout objet est élément de lui-même. Montrons maintenant que tout objet est la classe des éléments de lui-même.

$T_M17: \quad , A \ulcorner A \ A \ A \ Kl(el(A)) \urcorner$

Lecture: Si A est un objet, alors A est la classe des éléments de lui-même.

Démonstration:

1.	A	A		Hyp.
2.	B	B	el(A)	Hyp.
3.		$\ulcorner A \ a \ A \ A \urcorner$		T_{O15}
4.		B	B	2, 3, , $\ulcorner e, A/B, a/el(A), e$
5.		$\ulcorner A \ A \ A \ A \ el(A) \urcorner$		T_{M5}
6.		B	el(B)	4, 5, , $\ulcorner e, A/B, e$
7.		B	el(B)	6, rép.
8.		B	el(A) B el(B) B el(B)	2, 6, 7 i
9.		$\ulcorner C \ C \ el(A) \ B \ el(C) \ B \ el(B) \urcorner$		8, i, B/C
10.		$\ulcorner CD \ C \ el(A) \ D \ el(C) \ D \ el(B) \urcorner$		9, i, B/D
11.		B	el(A) , $\ulcorner CD \ C \ el(A) \ D \ el(C) \ D \ el(B) \urcorner$	2-10, i
12.		$\ulcorner B \ B \ el(A) \ , \ CD \ C \ el(A) \ D \ el(C) \ D \ el(B) \urcorner$		2-11, , $\ulcorner i$
13.		$\ulcorner B \ B \ el(A) \ B \ el(A) \urcorner$		$T_{\text{protothétique}}$
14.		A	Kl(el(A))	1, 12, 13, i, Df_{KL}
15.		A	A A Kl(el(A))	1-14, i
16.		$\ulcorner A \ A \ A \ A \ Kl(el(A)) \urcorner$		1-15, , $\ulcorner i$

Sur la base de ce dernier résultat, démontrons que si un objet A est un élément d'un objet B, alors B est une classe collective d'objets et que A est un de ces objets.

$T_M18: \quad , AB \ulcorner A \text{ el}(B) \urcorner , a \ulcorner B \text{ Kl}(a) \text{ A } a \urcorner "$

Lecture: A est élément de B si et seulement si il existe a tel que B est la classe des a et A est un des a.

Démonstration:

1.	AB		A el(B)		Hyp.
2.			, AB $\ulcorner A \text{ el}(B) \text{ B } B \urcorner "$		T_M9
3.			B B		1, 2, , "e, e
4.			, A $\ulcorner A \text{ A } A \text{ Kl}(\text{el}(A)) \urcorner "$		T_M17
5.			B Kl(el(B))		3, 4, , "e, A/B, e
6.			B Kl(el(B)) A el(B)		1, 5, i
7.			, a $\ulcorner B \text{ Kl}(a) \text{ A } a \urcorner "$		6, i, el(B)/a
8.			A el(B) , a $\ulcorner B \text{ Kl}(a) \text{ A } a \urcorner "$		1-7, i
9.			, a $\ulcorner B \text{ Kl}(a) \text{ A } a \urcorner "$		Hyp.
10.			a B Kl(a) A a		Hyp.
11.			B Kl(a)		10, e
12.			A a		10, e
13.			, Aa $\ulcorner A \text{ Kl}(a) \urcorner , B \ulcorner B \text{ a } B \text{ el}(A) \urcorner "$		T_M2
14.			A el(B)		11, 12, 13, , "e, A/B, B/A, e
15.			A el(B)		9, 10-14, e
16.			, a $\ulcorner B \text{ Kl}(a) \text{ A } a \urcorner \text{ A el}(B)$		9-15, e
17.			A el(B) , a $\ulcorner B \text{ Kl}(a) \text{ A } a \urcorner "$		8, 16, i
18.			, AB $\ulcorner A \text{ el}(B) \urcorner , a \ulcorner B \text{ Kl}(a) \text{ A } a \urcorner "$		1-17, , "i

Ajoutons à ce résultat une thèse établissant que si A est élément de B, alors tout élément de A est élément de B. Nous l'exprimons avec le relateur de l'inclusion faible, défini dans l'Ontologie avec la thèse T_O6 .

$T_M19: \quad , AB \text{ « } A \text{ el}(B) \text{ el}(A) \text{ el}(B) \text{ »}$

Lecture: Si A est élément de B, alors l'extension des éléments de A est incluse dans l'extension des éléments de B.

Démonstration:

1.	AB	A el(B)		Hyp.
2.		C	C el(A)	Hyp.
3.			A el(B)	1, réit.
4.			C el(A) A el(B)	2, 3, i
5.			, ABC « A el(B) B el(C). A el(C) »	T_M6
6.			C el(B)	4, 5, , « e, A/C, B/A, C/B, e
7.			C el(A) C el(B)	2-6, i
8.			, C « C el(A) C el(B) »	2-7, , «i
9.			, ab « a b , C « C a C b » »	T_O6
10.			el(A) el(B)	8, , « e, a/el(A), b/el(B), e
11.			A el(B) el(A) el(B)	1-10, i
12.			, Aa « A el(B) el(A) el(B) »	1-11, , «i

Nous achèverons cette série de démonstrations avec deux thèses fondamentales.

La première exprime qu'il n'y a pas de classe de classe collective. Ce faisant, elle établit que le foncteur «Kl» est un foncteur idempotent. Quant à la seconde, elle est liée au nom vide et démontre qu'il ne génère aucune classe.

T_M20: , Aa „ A Kl(a) A Kl(Kl(a)) ”

Lecture: A est la classe des a si et seulement si A est la classe de la classe des a.

Démonstration:

1.	Aa	A Kl(a)	Hyp.
2.		, Aa „ A a , B „ B Kl(a) ”	Ax _M 4
3.		, B „ B Kl(Kl(a))	1, 2, „e, a/Kl(a), e
4.	B	B Kl(Kl(a))	Hyp.
5.		A Kl(a)	1, reit.
6.		, Aa „ A Kl(a) A = Kl(a) ”	T _M 11
7.		A = Kl(a)	5, 6, „e, e
8.		B Kl(A)	4, 7, =e
9.		A A	5, T _M 1
10.		, A „ A A A Kl(A) ”	T _M 14
11.		A Kl(A)	9, 10, „e, e
12.		A Kl(A) B Kl(A)	8, 11, i
13.		, ABa „ A Kl(a) B Kl(a) . A = B ”	Ax _M 3
14.		A = B	12, „e, a/A, e
15.		A Kl(Kl(a))	4, 14, =e
16.		A Kl(Kl(a))	3, 4-15, e
17.	A	Kl(a) A Kl(Kl(a))	1-16, i
18.		A Kl(Kl(a))	Hyp.
19.		, Aa „ A Kl(a) , B „ B el(A) , CD „ C a D el(C) D el(B) ”	T _M 3
20.		, B „ B el(A) , CD „ C Kl(a) D el(C) D el(B)	18, 19, „e, e
21.		, Aa „ A Kl(a) A A	T _M 1
22.		A A	18, 21, „e, a/Kl(a), e
23.		, A „ A A A el(A) ”	T _M 5
24.		A el(A)	22, 23, „e, e
25.		, CD „ C Kl(a) D el(C) D el(B) ”	20, 24, „e, B/A, e
26.	CD	C Kl(a) D el(C) D el(B)	Hyp.
27.		C Kl(a)	26, e
28.		, Aa „ A Kl(a) A = Kl(a) ”	T _M 11
29.		C = Kl(a)	27, 28, „e, A/C, e
30.		A Kl(Kl(a))	16, reit.
31.		A Kl(C)	29, 30, =e
32.		, Aa „ A Kl(a) A A ”	T _M 1
33.		C C	27, 32, „e, A/C, e
34.		, A „ A A A el(A) ”	T _M 13
35.		C Kl(C)	33, 34, „e, A/C, e
36.		A Kl(C) C Kl(C)	31, 35, i
37.		, ABa „ A Kl(a) B Kl(a) . A = B ”	Ax _M 3
38.		A = C	36, 37, „e, B/C, e
39.		A Kl(a)	27, 38, =e
40.		A Kl(a)	26, 27-39, e
41.	A	Kl(Kl(a) A Kl(a))	18-40, i
42.	A	Kl(a) A Kl(Kl(a)) ”	17, 41, i
43.	, Aa	„ A Kl(a) A Kl(Kl(a)) ”	1-42, „i

T_{M21} : $\vdash A \text{ " } \sim(A \text{ Kl}()) \text{ "}$

Lecture: Quel que soit le nom A, il n'est pas le nom d'une classe engendrée par le nom vide.

Démonstration:

1.	A	A Kl()			
2.		, Aa " A Kl(a) "	, B " B a " "		Hyp. T_{M11}
3.		, B " B "			1, 2, "e, a/ , e
4.		B	B		Hyp.
5.		, " $\sim(A$ "			T_{O22}
6.		$\sim(B$ "			5, "e, A/
7.		\sim , B " B "			4, 6, $\sim e$
8.		\sim , B " B "			3, 4-7, e
9.		$\sim(A \text{ Kl}())$			1, 3, 8, $\sim i$
10.		, A " $\sim(A \text{ Kl}())$			1-9, "i

En guise de conclusion à cette première partie démonstrative, nous inscrirons les définitions de deux nouvelles constantes nominales, de catégorie *N*. La première de ces définitions est celle de la classe singulière. Son *definiens* fait apparaître le foncteur d'existence «sing», défini dans l'Ontologie avec la thèse T_{O3} .

T_{M22} : $\vdash A \text{ " } A \text{ SING}_{KL} \cdot A \text{ A sing}(\text{el}(\text{Kl}(a))) \text{ "}$

Lecture: A est une classe singulière si et seulement si A est un objet et le nom $\text{el}(\text{Kl}(A))$ dénote un et un seul objet.

Cette définition est l'expression formelle de l'interprétation assignée à la classe singulière dans la Méréologie. Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre II, une classe est une classe singulière pour autant qu'elle n'est composée que d'un seul élément. Dans la perspective de la Méréologie, cela signifie que cet élément n'est pas composé de parties, au sens attribué au terme «partie» par les axiomes 1 et 2.

Quant à la seconde définition, elle définit une constante nominale définissant logiquement le concept d'univers. Son *définiens* est construit avec la constante nominale du nom universel, défini dans l'Ontologie avec la thèse T_o20 .

$T_M23: \quad , A. ' A U . A A A KI(V)''$

Lecture: A est l'univers si et seulement si A est un nom d'objet et A est la classe des noms individuels.

3. Résolution de l'argument de De Morgan

Le moment est venu de retourner vers l'argument problématique qui a motivé notre travail et de lui apporter une solution formelle. Commençons par en rappeler sa formulation:

Tout homme est un animal.

Toute tête d'un homme est une tête d'un animal.

Nous avons vu dans le premier chapitre que la traduction de l'argument dans le langage symbolique du calcul des prédicats du premier ordre est:

[1] $(\forall x)(ax \supset bx)$

[2] $(\forall y)((\exists x)(ax \wedge ryx) \supset (\exists x)(bx \wedge ryx))$

En termes ensemblistes, il correspond la formulation suivante:

La classe des hommes est incluse dans la classe des animaux.

La classe des têtes des hommes est incluse dans la classe des têtes des animaux.

Comme nous nous sommes largement exprimé à ce sujet au début de notre travail, l'inclusion entre la classe des hommes et la classe des animaux exclut les

liens méréologiques qu'ils entretiennent avec leurs parties. En d'autres termes, l'appartenance d'un objet à la classe des hommes étant univoquement déterminée par le concept «homme», les têtes des hommes n'appartiennent pas à la classe des hommes. De là il est impossible de former, à partir de l'extension composant la classe des hommes, une classe qui serait celle des têtes des hommes et incluse dans la classe des hommes. Toute interprétation distributive est contrainte de traiter une propriété telle que «être une tête d'un homme» comme une relation entre deux classes, la classe des têtes et celle des hommes. Nous ne revenons pas sur l'analyse que nous avons faite. Nous ne faisons que rappeler le problème à résoudre, à savoir fournir à la procédure de validation syntaxique une réalisation sémantique rendant compte de la relation de partie à tout, *en tant que telle*, qui est en cause dans l'argument.

Disposant du foncteur «Kl» qui permet de briser la singularité des objets pour les aborder comme les unités collectives de leurs ingrédients, et disposant par ailleurs de la définition d'une relation d'ingrédience, la résolution de ce problème est dès lors possible.

Comme nous allons le montrer, la résolution de l'argument de De Morgan se joue sur l'articulation et la conciliation opérée par l'Ontologie et la Méréologie entre le niveau distributif, ou purement extensionnel, et le niveau collectif.

En premier lieu, il s'agit de traduire la prémisse «tout homme est un animal» dans la syntaxe de l'Ontologie, de manière à rendre compte de la relation d'inclusion renfermée dans cette proposition. Celle-ci est une proposition affirmative universelle. En termes de l'Ontologie, elle exprime un rapport d'inclusion entre les noms pluriels «homme» et «animal», soit, en termes exten-

sionnels, un rapport d'inclusion entre les extensions des noms «homme» et «animal».

On se souvient que dans le précédent chapitre, certains relateurs inclusifs ont été définis, dont parmi eux ceux de l'inclusion forte et de l'inclusion faible. Rappelons en les définitions:

$$T_{O6}: \text{, ab. ' a b , D. ' D a D b ' '}$$

$$T_{O7}: \text{, ab. ' a b . , C. ' C a ' , D. ' D a D b ' '}$$

Ces thèses se lisent:

T_{O6} : le nom a est faiblement inclus dans le nom b si et seulement si pour tout D , si D est un des a alors D est un des b .

T_{O7} : le nom a est fortement inclus dans le nom b si et seulement si il existe un objet qui est a et pour tout D , si D est un des a alors D est un des b .

Notons que, traditionnellement, on parle de quantification forte, présupposant l'existence du sujet, et de quantification faible, n'imposant aucun engagement existentiel. On rend compte de la quantification forte par la forme verbale «chaque a est b » tandis que la quantification faible, valant pour des termes sujets qui sont des noms vides, est traduite par la forme verbale «tout a est b ». Dans le cas de l'argument de De Morgan, nous considérons –non sans raison– que nous avons affaire à une quantification forte et que, par conséquent, le relateur extensionnel adéquat est celui de l'inclusion forte. Ainsi, avec a pour le nom «homme» et b pour le nom «animal», la prémisse «tout homme est un animal», comprise au sens défini ci-dessus comme «chaque homme est un animal», se traduit par la proposition « $a \text{ } b$ ».

Partant du mode de désignation de l'extensionnel, on peut accéder dans la Méréologie à l'analyse collective des entités générées par les extensions. Le foncteur «Kl» permet alors de décrire la totalité générée par l'extension du nom «homme» et la totalité générée par l'extension du nom «animal» comme des tous collectifs, constitués de tous les ingrédients qui composent les hommes et les animaux. Par conséquent, partant de la prémisse exprimant que les hommes sont contenus dans les animaux, on doit pouvoir montrer que tout ingrédient d'un homme est un ingrédient d'un animal. Il nous reste donc à expliciter formellement cette articulation.

Deux solutions vont être proposées. La première se présente sous la formulation suivante:

- [I] *Si l'extension des objets a est fortement incluse dans l'extension des objets b, alors tout élément d'un objet qui est un des a est élément de la classe collective générée par les objets b.*

Son expression formelle est:

$$, ab. ' a b , C. ' C a , D. ' D \text{ el}(C) \quad D \text{ el}(Kl(b)) ' ' ' "$$

Relevons que cette formule peut s'abrégier au moyen du relateur de l'inclusion faible (thèse T₀₆), comme suit:

$$, ab. ' a b , C. ' C a \text{ el}(C) \quad \text{el}(Kl(b)) ' ' ' "$$

La seconde solution se formule ainsi:

- [II] *Si l'extension des objets a est fortement incluse dans l'extension des objets b, alors l'extension des éléments de la classe collective générée par*

les objets a est fortement incluse dans l'extension des éléments de la classe collective générée par les objets b .

Son expression formelle est:

$$\forall a, b. (a \in \text{el}(\text{Kl}(a)) \rightarrow b \in \text{el}(\text{Kl}(b)))$$

La démonstration formelle de la première thèse sera produite sur la base des quatre axiomes et des deux définitions de l'axiomatique, ainsi que dans le prolongement des thèses déjà démontrées. Pour la seconde, nous ajouterons la définition d'un foncteur nouveau que nous donnerons en temps voulu.

3.1 Première résolution

Commençons par établir la thèse [I]. Pour ce faire, démontrons en premier lieu la thèse suivante:

$$T_{M24}: \forall a, A. (A \in a \rightarrow \forall B. (B \in A \rightarrow B \in \text{el}(\text{Kl}(a))))$$

Lecture: Si A est un des a , alors pour tout B , si B est un élément de A alors B est un élément de la classe des objets a .

La démonstration de la thèse T_{M24} utilise deux thèses de la méréologie précédemment démontrées: les thèses T_{M15} et T_{M6} . La première exprime que tout objet qui est a est élément de la classe collective des a . La seconde exprime la propriété de transitivité de la relation «être élément de». Soient:

$$T_{M15}: \forall a, A. (A \in a \rightarrow A \in \text{el}(\text{Kl}(a)))$$

$$T_{M6}: \forall A, B, C. (A \in B \wedge B \in C \rightarrow A \in C)$$

Démonstration:

1.	Aa	A a		Hyp.
2.		B	B el(A)	Hyp.
3.			A a	1, reit.
4.			, Aa “ A a A el (Kl(a)) ”	T _M 15
5.			A a A el (Kl(a))	4, , “e
6.			A el (Kl(a))	3, 5, e
7.			B el(A) A el (Kl(a))	2, 5, i
8.			, ABC “ A el(B) B el(C). A el(C) ”	T _M 6
9.			B el(A) A el(Kl(A)). B el(Kl(a))	8, , “e, A/B, B/A, C/Kl(a)
10.			B el(Kl(a))	7, 9, e
11.			B el(A) B el(Kl(a))	2-10, i
12.			B “ B el(A) B el(Kl(a)) ”	2-11, , “i
13.			A a , B “ B el(A) B el(Kl(a)) ”	1-12, i
14.			, Aa “ A a , B “ B el(A) B el (Kl(a)) ” ”	1-13, , “i

Avant de poursuivre, notons que cette thèse valide un argument tel que, par exemple, *Socrate est un homme, donc la tête de Socrate est la tête d'un homme*. Dans la sémantique distributive standard, Socrate est le seul élément de la classe singulière composée de Socrate. Dans la Méréologie où tout objet peut être conçu comme la totalité de ses ingrédients, Socrate appartient bien à la classe de Socrate, mais il n'est pas le seul élément de la classe de Socrate. Si en tant qu'entité individuelle, il vaut comme élément de lui-même, il est également le tout composé de ses éléments constitutifs.

Ayant – pour ainsi dire – rétabli Socrate dans sa dignité ontologique d'agrégat, démontrons maintenant la première thèse annoncée, celle exprimant que si l'extension du nom *a* est fortement incluse dans l'extension du nom *b*, alors tout élément d'un objet *a* est élément de la classe collective générée par les *b*.

T_M25: , Aa " a ⊆ b ⊃ , C " C ε a ⊃ , D " D ε el(C) ⊃ D ε el(Kl(b)) " " "

Démonstration:

1.	ab	a	b		
2.		, ab	" a b . , C " C a " , C " C a C b " "		Hyp. T _O 7
3.		, C " c a " , C " C a C b "			1, 2, , "e, e
4.		, C " C a C b "			3, e
5.	C		, C " C a C b "		4, reit.
6.		C a C b			5, , "e
7.		, Aa " A a , B " B el(A) B el(Kl(a)) " "			T _M 24
8.		C b , D " D el(C) D el(Kl(b)) " "			7, , "e, A/C, a/b, B/D
9.		C a , D " D el(C) D el(Kl(b)) " "			6, 8, transitivité de
10.		, C " C a , D " D el(C) D el(Kl(b)) " "			5-9, , "i
11.	a b	, C " C a , D " D el(C) D el(Kl(b)) " "			1-10, i
12.	, ab	" a b , C " C a , D " D el(C) D el(Kl(b)) " " "			1-11, , "i

Nous sommes donc parvenus, avec cette thèse, à une résolution formelle de l'argument de De Morgan sous l'angle attendu. La tête d'un objet C qui est un homme étant un élément de l'objet C, la tête en question est également un élément de la classe collective composée des animaux.

Venons en à l'établissement de la seconde thèse. C'est à elle que nous accordons notre préférence, pour des raisons que nous expliciterons une fois démontrée cette thèse.

3.2 Deuxième résolution

La démonstration de la thèse [II] se fera sur la base d'un foncteur nouveau, celui d'ensemble collectif, symboliquement «st». La définition de ce foncteur peut s'inscrire à la suite des six thèses composant l'axiomatique. Nous aurions pu l'introduire lors de la présentation de cette dernière. Mais nous ne l'avons pas fait pour ne pas surcharger la première partie de ce chapitre.

Ce foncteur est, comme les précédents foncteurs méréologiques, un foncteur nominal à un argument nominal, de catégorie N/N . Sa définition est la suivante:

Df_{ST}:

, Aa. ' A st(a) . A A , B. ' B el(A) , CD. ' C a C el(A) D el(B) D el(C) " " "

Lecture: A est un ensemble collectif si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies:

- i) A est un objet.
- ii) Si B est un élément de A alors il existe C et D tels que C est un des a et est un élément de A et D est un élément de B et élément de C.

On constate que la définition de la classe collective est affaiblie en ce sens que l'on n'exige pas que tout ce qui est a soit élément d'un ensemble collectif. L'ensemble collectif s'apparente d'une certaine manière avec la notion de sous-ensemble ou de partie, au sens ensembliste usuel. Cependant la différence essentielle est qu'un ensemble collectif d'objet a et le nom a appartiennent à la même catégorie sémantique. Par ailleurs, comme on pourra le vérifier avec les thèses suivantes, il conserve les propriétés attachées à la classe collective.

Illustrons cette définition avec un exemple. Considérons trois objets C_1 , C_2 et C_3 , désignés par le nom pluriel «a». On a dès lors sept ensembles collectifs, composés des objets suivants:

C_1 ;

C_2 ;

C_3 ;

$C_1 C_2$;

$C_1 \ C_3;$

$C_2 \ C_3;$

$C_1 \ C_2 \ C_3.$

De manière générale, pour un domaine composé de k objets, on dénombre $2^k - 1$ ensembles collectifs.

Cela dit concernant ce nouveau foncteur, il nous faut établir un certain nombre de thèses préliminaires à la démonstration de la seconde thèse.

• *Thèses préliminaires:*

Nous inscrivons tout d'abord les deux thèses découlant des deux conjonctions composant le *definiens* de la définition du foncteur «st»:

$T_{M26}: \ , Aa \text{ " } A \text{ st}(a) \ A \ A \text{ "}$

$T_{M27}: \ , Aa \text{ " } A \text{ st}(a) \ , B \text{ " } B \text{ el}(A) \ , \ CD \text{ " } C \ a \ C \text{ el}(A) \ D \text{ el}(B) \ D \text{ el}(C) \text{ " " "}$

Poursuivons avec trois thèses, démontrables à partir de la définition Df_{ST} et de thèses dont nous disposons déjà. La première montre que la classe collective des a est un ensemble collectif de a . La seconde établit qu'un objet A est un ensemble collectif de a pour autant qu'il existe au moins un objet qui est a . Quant à la troisième, elle montre que si un objet est a , alors cet objet est un ensemble collectif de a .

$T_M28: \text{ , AB} \text{ " A Kl(a) A st(a) "}$

Lecture: Si A est la classe des objets a, alors A est un ensemble collectifs d'objets a.

Démonstration:

1.	Aa	A Kl(a)	Hyp.
2.		B B el(A)	Hyp.
3.		A Kl(a)	1, réit.
4.		, Aa " A Kl(a) , B " B el(A)	
		, CD " C a D el(C) D el(B) " " "	T_M3
5.		, CD " C a D el(C) D el(B) "	2, 3, 4, , "e, e
6.		CD C a D el(C) D el(B)	Hyp.
7.		C a	6, e
8.		, Aa " A Kl(a) , B " B a B el(A) " "	T_M2
9.		C el(A)	1, 7, 8, , "e, B/C, e
10.		C a C el(A) D el(B) D el(C)	6, 9, i
11.		, CD " C a C el(A) D el(B) D el(C) "	10, i
12.		, CD " C a C el(C) D el(B) D el(C) "	5, 6-11, e
13.		B el(A) , CD " C a D el(C) D el(B) D el(C) "	2-12, i
14.		, B " B el(A) , CD " C a C el(C) D el(B) D el(C) " "	2-14, "i
15.		, Aa " A Kl(a) A A "	T_M1
16.		A A	1, 15, , "e, e
17.		A st(a)	14, 16, i, Df_{ST}
18.		A Kl(a) A st(a)	1-17, i
19.		, Aa " A Kl(a) A st(a) "	1-18, , "i

$T_M29: \quad , Aa \ulcorner A \text{ st}(a) \urcorner , B \ulcorner B \text{ a} \urcorner$

Lecture: Si A est un ensemble collectif de a, alors il y a au moins un objet qui est a.

Démonstration

1.	Aa	A st(a)		Hyp.
2.		$\ulcorner A \text{ st}(a) \urcorner$	$\ulcorner A \text{ st}(a) \urcorner$	T_M26
3.		A A		1, 2, , "e, e
4.		$\ulcorner A \text{ st}(a) \urcorner$	$\ulcorner A \text{ st}(a) \urcorner$	T_M5
5.		A el(A)		3, 4, , "e, e
6.		$\ulcorner A \text{ st}(a) \urcorner$	$\ulcorner B \text{ el}(A) \urcorner$	T_M27
7.		$\ulcorner CD \ulcorner C \text{ a} \urcorner \urcorner$	$\ulcorner CD \ulcorner C \text{ a} \urcorner \urcorner$	1, 5, 6, , "e, B/A, e
8.		CD	$\ulcorner C \text{ a} \urcorner$	Hyp.
9.		$\ulcorner C \text{ a} \urcorner$	$\ulcorner C \text{ a} \urcorner$	8, i
10.		$\ulcorner B \ulcorner B \text{ a} \urcorner \urcorner$	$\ulcorner B \ulcorner B \text{ a} \urcorner \urcorner$	9, i, C/B
11.		$\ulcorner B \ulcorner B \text{ a} \urcorner \urcorner$	$\ulcorner B \ulcorner B \text{ a} \urcorner \urcorner$	7, 8-10, e
12.		A st(a)	$\ulcorner B \ulcorner B \text{ a} \urcorner \urcorner$	1-11, i
13.		$\ulcorner A \text{ st}(a) \urcorner$	$\ulcorner B \ulcorner B \text{ a} \urcorner \urcorner$	1-12, , "i

$T_M30: \quad , Aa \text{ " } A \text{ a } A \text{ st}(a) \text{ "}$

Lecture: Si A est un des objets a, alors A est un ensemble collectif d'objets a.

Démonstration:

1.	Aa	A a		Hyp.
2.		, Aa " A a A A "		T_{O15}
3.		A A		1, 2, , "e, e
4.		B B el(A)		Hyp.
5.		A a		1, réit.
6.		, Aa " A a A el(A) "		T_M4
7.		A el(A)		5, 6, , "e, e
8.		B el(B)		4, 6, , "e, A/B, a/el(A), e
9.		A a A el(A) B el(B) B el(A)		5, 4, 7, 8, i
10.		, CD " C a C el(A) D el(B) D el(C) "		9, i, A/C, B/D
11.		B el(A) , CD " C a C el(A) D el(B) D el(C) "		4-10, i
12.		, B " B el(A) , CD " C a C el(A) D el(B) D el(C) "		4-11, , "i
13.		A st(a)		3, 12, i, Df_{ST}
14.		A a A st(a)		1-13, i
15.	, Aa	" A a A st(a) "		1-14, , "i

Poursuivons avec deux thèses établissant respectivement que si A est la classe des ensembles collectifs d'objets a, alors A est la classe des objets a, et vice-versa. La première nécessite une thèse intermédiaire, soit:

$T_M 31: , Aa \ulcorner A \text{ Kl}(st(a)) \urcorner , B \ulcorner B \text{ el}(A) \urcorner , CD \ulcorner C \text{ a } D \text{ el}(C) \text{ } D \text{ el}(B) \urcorner \urcorner \urcorner$

Lecture: Si A est la classe des ensembles collectifs de a, alors si B est élément de A, alors pour quelque C et D, C est a et D est élément de C et D est élément de B.

Démonstration:

1.	Aa	A Kl(st(a))	Hyp.
2.		B B el(A)	Hyp.
3.		, Aa $\ulcorner A \text{ Kl}(a) \urcorner , B \ulcorner B \text{ el}(A) \urcorner$ $\ulcorner CD \ulcorner C \text{ a } D \text{ el}(C) \text{ } D \text{ el}(B) \urcorner \urcorner \urcorner$	$T_M 3$
4.		A Kl(st(a))	1, réit.
5.		, CD $\ulcorner C \text{ st}(a) \text{ } D \text{ el}(C) \text{ } D \text{ el}(B) \urcorner$	2, 3, 4, $\ulcorner e, a/st(a), e$
6.		CD C st(a) D el(C) D el(B)	Hyp.
7.		C st(a)	6, e
8.		D el(C)	6, e
9.		D el(B)	6, e
10.		, Aa $\ulcorner A \text{ st}(a) \urcorner , B \ulcorner B \text{ el}(A) \urcorner$ $\ulcorner EF \ulcorner E \text{ a } E \text{ el}(A) \text{ } F \text{ el}(B) \text{ } F \text{ el}(E) \urcorner \urcorner \urcorner$	$T_M 27$
11.		, EF $\ulcorner E \text{ a } E \text{ el}(C) \text{ } F \text{ el}(D) \text{ } F \text{ el}(E) \urcorner \urcorner \urcorner$	7, 8, 10, $\ulcorner e, A/C, B/D, e$
12.		EF E a E el(C) F el(D) F el(E)	Hyp.
13.		E a	12, e
14.		F el(D)	12, e
15.		D el(B)	9, réit.
16.		, C $\ulcorner A \text{ al}(B) \text{ } B \text{ el}(C) \urcorner . A \text{ el}(C) \urcorner$	$T_M 6$
17.		F el(B)	14, 15, i, 16, $\ulcorner e, A/F, B/D, C/B, e$
18.		F el(E)	12, e
19.		E a F el(E) F el(B)	13, 17, 18, i
20.		, CD $\ulcorner C \text{ a } D \text{ el}(C) \text{ } D \text{ el}(B) \urcorner$	19, i, E/C, F/D
21.		, CD $\ulcorner C \text{ a } D \text{ el}(C) \text{ } D \text{ el}(B) \urcorner$	11, 12-20, e
22.		, CD $\ulcorner C \text{ a } D \text{ el}(C) \text{ } D \text{ el}(B) \urcorner$	5, 6-21, e
23.		B el(A) , CD $\ulcorner C \text{ a } D \text{ el}(C) \text{ } D \text{ el}(B) \urcorner$	2-22, i
24.		, B $\ulcorner B \text{ el}(A) \urcorner , CD \ulcorner C \text{ a } D \text{ el}(C) \text{ } D \text{ el}(B) \urcorner$	2-23, $\ulcorner i$
25.		A Kl(st(a)) , B $\ulcorner B \text{ el}(A) \urcorner , CD \ulcorner C \text{ a } D \text{ el}(C) \text{ } D \text{ el}(B) \urcorner$	1-24, i
26.	Aa	$\ulcorner A \text{ Kl}(st(a)) \urcorner , B \ulcorner B \text{ el}(A) \urcorner$ $\ulcorner CD \ulcorner C \text{ a } D \text{ el}(C) \text{ } D \text{ el}(B) \urcorner \urcorner \urcorner$	1-25, $\ulcorner i$

$T_M32: \text{ , Aa} \ulcorner \text{ A Kl(st(a)) A Kl(a)} \urcorner$

Lecture: Si A est la classe des ensembles collectifs d'objets a, alors A est la classe des objets a.

Démonstration:

1.	Aa	A Kl(st(a))	Hyp.
2.		, Aa \ulcorner A Kl(a) A A \urcorner	T_M1
3.		A A	1, 2, , \ulcorner e, a/st(a), e
4.	B	B a	Hyp.
5.		, Aa \ulcorner A a A st(a) \urcorner	T_M30
6.		B st(a)	4, 5, , \ulcorner e, A/B, e
7.		, Aa \ulcorner A Kl(a) , B \ulcorner B st(a) B el(A) \urcorner	T_M2
8.		A Kl(st(a))	1, réit.
9.		B el(A)	6, 7, 8, , \ulcorner e, a/st(a), e
10.		B a B el(A)	4-9, i
11.		, B \ulcorner B a B el(A) \urcorner	4-10, , \ulcorner i
12.	B	B el(A)	Hyp.
13.		A Kl(st(a))	1, réit.
14.		, Aa \ulcorner A Kl(st(a)) , B \ulcorner B el(A)	
		, CD \ulcorner C a D el(C) D el(B) \urcorner \urcorner	T_M31
15.		, CD \ulcorner C a D el(C) D el(B) \urcorner	12, 13, 14, , \ulcorner e, e
16.		B el(A) , CD \ulcorner C a D el(C) D el(B) \urcorner	12-15, i
17.		, B \ulcorner B el(A) , CD \ulcorner C a D el(C) D el(B) \urcorner \urcorner	12-16, , \ulcorner i
18.		A Kl(a)	3, 11, 17, i, Df_{KL}
19.		, Aa \ulcorner A Kl(st(a)) A Kl(a) \urcorner	1-18, , \ulcorner i

Démontrons maintenant la converse de cette thèse.

$T_M33: \vdash Aa \leftrightarrow (A \text{ Kl}(a) \rightarrow A \text{ Kl}(st(a)))$

Lecture: Si A est la classe des objets a, alors A est la classe des ensembles collectifs d'objets a.

Démonstration:

1.	Aa	A Kl(a)	Hyp.
2.		$\vdash Aa \leftrightarrow (A \text{ Kl}(a) \rightarrow A \text{ Kl}(st(a)))$	T_M28
3.		A Kl(st(a))	1, 2, \vdash "e, e
4.		$\vdash Aa \leftrightarrow (A \text{ a} \rightarrow B \text{ Kl}(a))$	Ax_M4
5.		$\vdash B \text{ Kl}(st(a))$	3, 4, \vdash "e, a/st(a), e
6.		B Kl(st(a))	Hyp.
7.		$\vdash Aa \leftrightarrow (A \text{ Kl}(st(a)) \rightarrow A \text{ Kl}(a))$	T_M32
8.		B Kl(a)	6, 7, \vdash "e, A/B, e
9.		A Kl(a)	1, réit.
10.		A Kl(a) B Kl(a)	8, 9, i
11.		$\vdash AB \leftrightarrow (A \text{ Kl}(a) \rightarrow B \text{ Kl}(a) \cdot A = B)$	Ax_M3
12.		A =	10, 11, \vdash "e, e
13.		A Kl(st(a))	6, 12, =e
14.		A Kl(st(a))	5, 6-13, e
15.		A Kl(a) A Kl(st(a))	1-14, i
16.		$\vdash Aa \leftrightarrow (A \text{ Kl}(a) \rightarrow A \text{ Kl}(st(a)))$	1-15, \vdash "i

La dernière des thèses préliminaires à la démonstration de la thèse [II] exprime que tout ensemble collectif d'objets a est élément de la classe collective des a :

$$T_{M34}: \quad , Aa \text{ " } A \text{ st}(a) \text{ } A \text{ el}(Kl(a)) \text{ "}$$

Lecture: Si A est un ensemble collectif d'objets a , alors A est un élément de la classe collective des objets a .

Démonstration:

1.	Aa	A st(a)	Hyp.
2.		, Aa " A st(a) , B " B a " "	T _M 29
3.		, B " B a " "	1, 2, , "e, e
4.	B	B a	Hyp.
5.		, Aa " A a , C " C Kl(a) " "	Ax _M 4
6.		, C " C Kl(a) "	4, 6, , "e, A/B, e
7.	C	C Kl(a)	Hyp.
8.		, Aa " A Kl(a) A Kl(st(a)) " "	T _M 33
9.		C Kl(st(a))	7, 8, , "e, A/C, e
10.		A st(a)	1, réit.
11.		, Aa " A Kl(a) , B " B a B el(A) " "	T _M 2
12.		A el(C)	9, 10, 11, , "e, A/C, a/st(a), B/A, e
13.		, Aa " A Kl(a) A = Kl(a) "	T _M 12
14.		C = Kl(a)	7, 13, , "e, A/C, e
15.		A el(Kl(a))	12, 14, =e
16.		A el(Kl(a))	6, 7-15, e
17.		A el(Kl(a))	3, 4-16, e
18.		A st(a) A el(Kl(a))	1-17, i
19.		, Aa " A st(a) A el(Kl(a)) "	1-18, , "i

- *La seconde thèse*

Sa démonstration exige encore deux thèses. Celles-ci se démontrent sur la base des résultats qui viennent d'être établis. Abordons tout d'abord la première. Celle-ci exprime que si le nom a est faiblement inclus dans le nom b et A est la classe des a , alors la classe des objets a est un ensemble collectif d'objets b . Pour des raisons d'économie démonstrative, nous avons préféré cette thèse à la thèse énonçant que si le nom a et le nom b sont dans une relation d'inclusion forte alors la classe des objets a est un ensemble collectif d'objets b .

T_M35 : , ab. ' a b A Kl(a) . A st(b) "

Lecture: Si l'extension des objets a est faiblement incluse dans l'extension des objets b et A est la classe des objets a , alors A est un ensemble collectif d'objets b .

Démonstration:

1.	abA	a b A Kl(a)	Hyp.
2.		a b	1, e
3.		A Kl(a)	1, e
4.		B B el(A)	Hyp.
5.		A Kl(a)	3, réit.
6.		, Aa. ' A Kl(a) , B. ' B el(A)	
		, CD. ' C a D el(C) D el(B) " " "	T_M3
7.		, CD. ' C a D el(C) D el(B) " " "	4, 5, 6, , "e, e
8.		C a D el(C) D el(B)	Hyp.
9.		C a	8, e
10.		D el(C)	8, e
11.		D el(B)	8, e
12.		a b	2, réit.
13.		, ab. ' a b . , C. ' C a C b " " "	T_O6
14.		C b	9, 12, 13, , "e, e
15.		A kl(a)	5, réit.
16.		, a. ' A Kl(a) , B. ' B a B el(A) "	T_M2
17.		C el(A)	9, 16, , "e, B/C, e
18.		C b C el(A) D el(B) D el(C)	14, 17, 11, 10, i
19.		, CD. ' C b C el(A) D el(B) D el(C) " " "	1 18, i
20.		, CD. ' C b C el(A) D el(B) D el(C) " " "	7, 8-19, e
21.		B el(A) , CD. ' C b C el(A) D el(B) D el(C) " " "	4-20, i
22.		, B. ' B el(A) , CD. ' C b C el(A) D el(B) D el(C) " " "	4-21, , "i
23.		, Aa. ' A Kl(a) A A	T_M1
24.		A A	3, 23, , "e, e
25.		A A , B. ' B el(A)	
		, CD. ' C a C el(A) D el(B) D el(C) " " "	22, 24, i,
26.		A st(a)	25, Df_{ST}
27.		a b A Kl(a) . A st(a)	1-26, i
28.		, abA. ' a b A Kl(a) . A st(a) "	1-27, , "i

Quant à l'ultime étape avant l'établissement de la thèse annoncée, c'est la démonstration d'une thèse exprimant que si le nom a et le nom b sont dans un rapport d'inclusion forte, alors la classe collective générée par les objets a est élément de la classe collective générée par les objets b .

Il s'agit donc d'une thèse qui exprime un rapport d'inclusion singulière entre l'entité collective $Kl(a)$ et l'extension des éléments de la classe collective de la classe générée par les b .

$T_M36: \quad , ab. \langle a \ b \ Kl(a) \ el(Kl(b)) \rangle$

Lecture: Si l'extension du nom a est fortement incluse dans l'extension du nom b , alors la classe des objets a est élément de la classe des objets b .

Démonstration:

1.	ab	a b	Hyp.
2.		, C. C a" a b	1, T _O 7
3.		, C. C a"	2, e
4.		a b	2, e
5.		C C a	Hyp.
6.		, A. A a , B. B Kl(a)""	Ax _M 4
7.		, B. B Kl(a)""	5, 6, , "e, A/C, e
8.		B B Kl(a)	Hyp.
9.		a b	4, réit.
10.		a b B Kl(a)	8, 9, i
11.		, abA. a b A Kl(a). A st(b)""	T _M 35
12.		B st(b)	10, 11, , "e, A/B, e
13.		, Aa. A st(a) A el(Kl(a))""	T _M 34
14.		B el(Kl(b))	12, 13, , "e, A/B, a/b, e
15.		, Aa. A Kl(a) A = Kl(a)""	T _M 12
16.		B = Kl(a)	8, 15, , "e, A/B, e
17.		Kl(a) el(Kl(b))	14, 16, =e
18.		Kl(a) el(Kl(b))	7, 8-17, e
19.		Kl(a) el(Kl(b))	3, 5-18, e
20.		a b Kl(a) el(Kl(b))	1-19, i
21.		, ab. a b Kl(a) el(Kl(b))""	1-20, , "i

Démontrons enfin la seconde thèse:

T_M37: , ab. ' a ⊆ b ⊃ el(Kl(a)) ⊆ el(Kl(b)) "

Démonstration:

1.	ab	a	b	Hyp.	
2.		C	C	el(Kl(a)) Hyp.	
3.			a	b	1, réit.
4.					, ab. ' a b Kl(a) el(Kl(b)) "
5.					Kl(a) el(Kl(b)) 3, 4, , "e, e
6.					, ABC. ' A el(B) B el(C). A el(C) "
7.					C el(Kl(a)) Kl(a) el(Kl(b)) 2, 5, i
8.					C el(Kl(b)) 6, 7, , "e, A/C, B/Kl(a), C/Kl(b), e
9.					C el(Kl(a)) C el(Kl(b)) 2-8, i
10.					, C. ' C el(Kl(a)) C el(Kl(b)) "
11.					, ab. ' a b . , C. ' C a " , C. ' C a C b " "
12.					, C. ' C a " " 1, 11, , "e, e, e
13.		C	C	a Hyp.	
14.					, Aa. ' A a A el(Kl(a)) "
15.					C el(Kl(a)) 13, 14, , "e, A/C, e
16.					, C. ' C el(Kl(a)) "
17.					, C. ' C el(Kl(a)) "
18.					, C. ' C el(Kl(a)) " , C. ' C el(Kl(a)) C el(Kl(b)) "
19.					el(Kl(a)) el(Kl(b)) . , C. ' C el(Kl(a)) "
20.					C. ' C el(Kl(a)) C el(Kl(b)) " " 11, , "e, a/el(Kl(a)), b/el(Kl(b))
21.					el(Kl(a)) el(Kl(b)) 18, 19, e
22.					a b el(Kl(a)) el(Kl(b)) 1-20, i
					, ab. ' a b el(Kl(a)) el(Kl(b)) "
					1-21, , "i

L'argument de De Morgan est donc également validé par cette dernière thèse.

Une tête d'homme étant un élément de la classe collective conçue à partir des objets a, elle est aussi un élément de la classe collective conçue à partir des objets b.

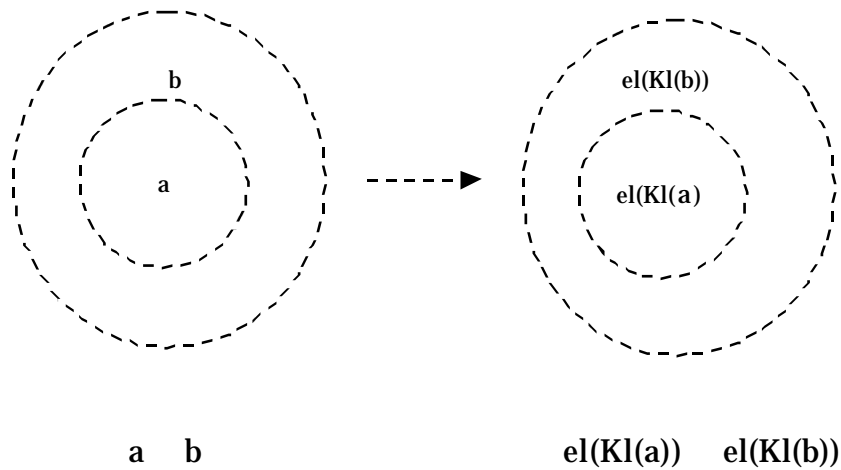
3.3 Remarques finales

Deux thèses de la Méréologie sont ainsi en présence qui ne diffèrent l'une de l'autre, dira-t-on, que par une nuance expressive. La première dit en substance que si les objets a sont contenus dans les objets b , alors tout élément d'un objet a est élément de la classe collective générée par les objets a . La seconde dit que si les objets a sont contenus dans les objets b , alors les éléments de la classe collective générée par les objets a sont contenus dans les éléments de la classe collective générée par les b . Cependant cette nuance est à notre avis essentielle, ou pour le moins révélatrice du pas accompli. Car si chacune des thèses valide l'argument de De Morgan, la seconde est l'expression formelle parfaite du passage opéré entre le mode d'appréhension distributif des objets et leur organisation collective. En validant le passage d'une relation d'inclusion entre les noms pluriels a et b à une relation d'inclusion entre les noms pluriels $el(Kl(a))$ et $el(Kl(b))$, elle témoigne de la réussite de l'élargissement du champ de l'extensionnel à la relation d'ingrédience de partie à tout¹.

L'enjeu de notre travail était d'offrir à l'argument de De Morgan un modèle sémantique qui capture et donne une image fidèle de ses objets référentiels, relativement à leur liens méréologiques. C'est chose faite. Si l'on se souvient de notre dessin dans le premier chapitre (section 3) confrontant les niveaux syntaxique, sémantique et de l'ontologie ordinaire, ce pas réalisé d'une extensionnalité pure vers une pluri-extensionnalité référentielle marque l'adéquation entre un modèle sémantique et l'organisation relationnelle du réel véhiculé par l'argument.

1 Le problème de l'unicité des têtes pourrait être soulevé. Il est possible de préciser cette unicité, mais nous n'avons pas jugé utile de l'intégrer dans ces pages.

Au schéma concluant l'analyse de la réalisation sémantique de l'argument dans le cadre de la logique standard du premier ordre (chapitre I, section 2.2), on peut dès lors lui substituer le suivant:



Les pointillés signifient que l'on n'a pas affaire à des classes distributives mais à des extensions pures, celles que désignent les noms pluriels a , b , $el(Kl(a))$ et $el(Kl(b))$.

CONCLUSION

Donc si j'ai bien compris, dis-je, les barbicelles sont des composants des barbules, les barbules des composants des barbes, les barbes des composants des plumes, et les plumes des composants des oiseaux?

(Patricia Cornwell)

Comme nous l'avons dit dans notre introduction, l'argument de De Morgan occupe une place significative dans l'histoire de la logique. Révélateur de l'étroitesse des outils syllogistiques traditionnels, il se trouve en effet à la base de l'impulsion donnée par De Morgan à la théorie des relations. Cependant, la logique standard moderne n'ayant pas inscrit la relation de partie à tout à son programme, cet argument n'a jamais été abordé sous l'angle des rapports collectifs qu'entretiennent ses objets référentiels. Il est inutile de revenir sur les raisons de cette absence. Nous ne reviendrons pas non plus sur les observations faites dans le premier chapitre où nous avons examiné la procédure de validation associée à l'argument au sein de la logique des prédicats du premier ordre.

C'est donc cette absence que nous avons voulu combler en faisant valoir que, dans le contexte de l'argument de De Morgan, c'est la relation d'ingrédience de partie à tout qui sémantiquement s'impose et que, à cet égard, la simple corrélation extensionnelle reconnue entre des entités individuelles par le cadre formel n'est pas satisfaisante. La question fut donc pour nous celle d'ouvrir, en logique, la perspective sémantique à cette relation et à une appréhension collective de nos objets de connaissance, afin de parvenir à pénétrer le ressort logique de l'argument à la lumière d'un tel éclairage.

Nous avons montré que les théories de Lesniewski, qui se présentent comme de véritables alternatives aux systèmes de référence standard, permettaient de répondre à un tel enjeu. Les thèses que nous avons produites dans le cadre de la Méréologie témoignent de cette réussite, respectant à la fois les enjeux syntaxique, sémantique et celui de l'adéquation du modèle aux présupposés ontologiques véhiculés par les concepts descriptifs mis en œuvre par le langage. C'est ainsi que nous avons pu – pour ainsi dire – casser l'unique représentation sémantique porteuse de la représentation de deux organisations ontologiques distinctes.

La force logique et philosophique des théories que nous venons d'examiner est de satisfaire les deux orientations, formelle et descriptive, inconciliables dans le cadre propre aux systèmes classiques. La Méréologie, qui porte la dimension collective, ne vient pas se greffer comme une construction *ad hoc*, risquant de léser ou pour le moins nécessitant des aménagements de la théorie logique, mais rencontre *naturellement* celle-ci. L'histoire que nous avons retracée de son émergence a montré comment le paradoxe de Russell fut à la source de cette conciliation. C'est en séparant les modes d'appréhension distributif et collectif des classes, rétablissant pour ainsi dire chacun en son ordre avec d'une part l'Ontologie et, d'autre part, la Méréologie, qu'il s'avéra possible de concilier les niveaux de singularité et de complexité des objets.

Au delà de la nouvelle lumière qui fut jeté sur l'antinomie et sa résolution, c'est cette caractéristique essentielle associée à ces théories sur laquelle nous voulions insister. Nous voulions également souligner qu'elles constituent un réceptacle et l'expression formelle d'une position ontologique première sur les constituants ultimes du réel.

Sans doute les conditions historiques et le poids d'une longue tradition formelle, renforcée par la réflexion logico-mathématique, explique que ce soit si facilement accréditée l'idée d'une opposition fondamentale entre les logiques que nous qualifions ici de formelle et d'appliquée. A la faveur des théories que nous venons de considérer, cette frontière s'estompe et perd son caractère d'opposition frontale. Si la séparation demeure, elle est relative. Car l'opposition n'est justifiable que dans la mesure où l'Ontologie fournit les directives générales pour tout langage visant à décrire ou parler des objets, tandis que la Méréologie ne se laisse pas détacher d'une interprétation concrète de ces objets. En satisfaisant simultanément les modes distributif et collectif, L'Ontologie et la Méréologie témoignent davantage d'une certaine unité essentielle plus qu'elles ne reflètent deux espèces de logique. A ce sujet, jetons un dernier regard à la seconde des thèses supportant la résolution de l'argument de De Morgan:

„ ab. ' a b el(Kl(a)) el(Kl(b)) ”

Face à cette thèse, témoignant de l'élargissement de la notion d'objet que nous préconisons au début de notre travail, de telle sorte qu'une place fût ménagée à sa complexité partitive, il nous est difficile de concéder que le champ de la logicité pure ait été entaché. Bien au contraire, nous pensons que l'argument de De Morgan sort de cette aventure intellectuelle revêtue d'une validité nouvelle et permet de justifier les qualités d'une logique libre, universelle et d'ordre supérieur, sur laquelle s'ancre la théorie des classes collectives.

Il est coutume de s'expliquer sur les faiblesses et les aspects les moins développés de son travail. Aussi, pour terminer, ferons-nous quelques commentaires dans ce sens. Concernant tout d'abord la question des systèmes

logiques fondant la Méréologie, nous nous sommes limitée à une présentation succincte de l'Ontologie, taisant certains aspects fondamentaux liés au caractère développemental des systèmes de Lesniewski. Étant donné l'enjeu de notre thèse et soucieuse d'une certaine concision, il nous importait avant toute chose d'insister sur l'analyse de la proposition singulière et le traitement logique des noms qui lui en est solidaire. Car c'est par cette analyse que se joue, en partie, la possibilité d'ancrer la Méréologie dans la syntaxe de l'Ontologie. Quant à la Méréologie elle-même, nous l'avons considérée dans le but de remédier au «mauvais tour» joué à la relation de partie à tout par la logique moderne standard, et dont l'argument de De Morgan fut le porte-parole. Ses développements ou aménagements particuliers, relatifs à d'autres problématiques que la nôtre, n'entraient pas dans notre propos. Mais tout lecteur intéressé trouvera dans la bibliographie de quoi nourrir sa curiosité. De notre point de vue, il nous semblait avant tout indispensable d'exposer les éléments essentiels d'une théorie peu connue et permettant l'établissement d'une solution nouvelle de l'argument de De Morgan.

Enfin, un travail de recherche n'est pas une fin en soi. Il ouvre, au contraire, sur des projets et perspectives d'avenir. Nous nous emploierons tout à la fois à développer et préciser les propriétés métalogiques associées aux systèmes de Lesniewski et, de manière plus singulière, nous nous intéresserons à la construction d'entités d'ordre supérieur, à en préciser leurs propriétés et à les inscrire dans le champ d'une théorie de la preuve.

BIBLIOGRAPHIE

AGAZZI, Evandro (ed.)

[1981] *Modern Logic. A Survey: Historical, Philosophical and Mathematical Aspects of Modern Logic*. Dordrecht/Boston: Reidel.

AJDUKIEWICZ, Kazimierz

[1935] Die syntaktische Konnexität, *Studia Philosophica* 1, 1-27. Trad. angl. in McCall [1967].

[1967] Syntactic Connexion, in: McCall [1967], 207-231. Trad. angl. de [1935b].

ASENJO, Florencio G.

[1965] Theory of Multiplicities, *Logique et Analyse* 8.30, 105-110.

[1977] Lesniewski's Work and Nonclassical Set Theories, *Studia Logica* 36.4, 249-255.

BAR-HILLEL, Yehoshua

[1950] On Syntactical Categories, *JSL* 15, 1-16. Réimpression [1964].

[1953] A Quasi-Arithmetical Notation for Syntactic Description, *Language* 29, 47-58. Réimpression [1964].

BELNA, Jean-Pierre

[1996] *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege, théories, conceptions et philosophie*. Paris: Vrin.

BETTI, Adriana

[1994] *Logica ed esistenza in Stanisłwa Lesniewski*, Testi di laurea presentata all'Univ. di Firenze, rel. il prof. Ettore Casari.

[1975] Lesniewski, Stanislaw, *Encyclopedia Britannica*, Micropedia VI, 166 and Macropedia X, 832-834.

BOCHENSKI, Inocenty M.

[1947] *La philosophie en Pologne 1919-1939*, Vol. III, *Vie Intellectuelle et Artistique*, Neuchâtel: Éditions de la Baconnière, 229-260.

[1949] On the Syntactical Categories, *The New Scholasticism* 23, 257-280.

BOURQUIN, Daniel

[1996] Les catégories syntaxico-sémantiques: petite histoire d'un grand problème, in: D. Miéville (éd.), *Analyse catégorielle et logique*, Université de Neuchâtel: Travaux de logique 10, 1-34.

CANTOR, Georg

[1895] Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, *Mathematische Annalen* 46, 481-512.

CHISHOLM, Roderick

[1975] Mereological Essentialism: Some Further Considerations, *The Review of Metaphysics* 28, 477-484.

CLAY, Robert E.

[1961] *Contributions to Mereology*, Ph.D. Dissertation, University of Notre Dame, under the direction of Sobocinski.

[1965] The Relation of Weakly Discrete to Set and Equinumerosity in Mereology, *NDJFL* 6.4, 325-340.

[1966] On the Definition of Mereological Class, *NDJFL* 7.4, 359-360.

[1968] The Consistency of Lesniewski's Mereology Relative to the Real Number System, *JSL* 33.2, 251-257.

[1970] The Dependence of a Mereological Axiom, *NDJFL* 11.4, 471-472.

[1974a] Relation of Lesniewski's Mereology to Boolean Algebra, *JSL* 39.4, 638-648.

[1974b] Some Mereological Models, *NDJFL* 15, 141-146.

[1975] Single Axioms for Atomistic and Atomless Mereology, *NDJFL* 16.3, 345-351.

DE MORGAN, Augustus

[1847] *Formal Logic or the Calculus of Inference, Necessary and Probable*, London: Taylor & Walton.

[1966] *On the Syllogism and other Logical Writings*, London: Routledge & Kegan Paul.

EATON, Ralph M.

[1959] *General Logic. An Introductory Survey*, New York; C. Soubner's Sons. (1^{ère} éd. [1931]).

FRAENKEL, Abraham A., BAR-HILLEL, Yehoshua & LEVY, Azriel

[1973] *Foundations of Set Theory*, Amsterdam: North Holland. (Seconde édition revue de Fraenkel et Bar-Hillel [1958]).

FREGE Gottlob

[1893] *Grundgesetze der Arithmetik*, Jena, 2 vol. (Réimpression Verlagsbuchhandlung, Olms: Hildesheim [1962]).

[1895] Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröder's Vorlesungen über die Algebra der Logik, *Archiv für systematische Philosophie* 1, 433-456. (Edité dans *Translations from the Philosophical Writing's of Gottlob Frege*, ed. P. Geach & M. Black, 2nd ed. [1960], Oxford, 86-106).

[1969] *Les fondements de l'arithmétique*, Paris: Seuil. (Trad. et introd. C. Imbert).

[1971] *Écrits logiques et philosophiques*, Paris: Seuil. (Trad. et introd. C. Imbert).

FREGE, Gottlob & RUSSELL, Bertrand

[1994] *Correspondance juin 1902 - décembre 1904, mars-juin 1912*. Traduction, notes et introduction par C. Webern, Paris: L'Unebêvue.

GESSLER, Nadine

[1996] De la catégorie sémantique du nom à la définition collective de la classe, in: D. Miéville (éd.), *Analyse catégorielle et logique*, Université de Neuchâtel: Travaux de logique 10, 79-108.

[2001] Des têtes et des hommes, in: *Méréologie et modalités. Aspects critiques et développements*, Université de Neuchâtel: Travaux de logique 14, 95-113.

GIARETTA, Pierdaniele

[2001] Individuation and Mereological Universalism, in: *Méréologie et modalités. Aspects critiques et développements*, Université de Neuchâtel: Travaux de logique 14, 55-74.

GILES-PETERS, Andrew Robert

[1972] *Nominalistic Philosophy of Logic, with Particular Reference to the Systems of Stanislaw Lesniewski*, Master of Arts thesis, Philosophy Department, La Trobe University, Bundoora, Victoria.

GLIBOWSKI, Edmund

[1969] The Application of Mereology to Grounding of Elementary Geometry, *Studia Logica* 24, 109-129.

GLIBOWSKI, Edmund & SLUPECKI, Jan

[1956] Geometria szescianow (Géométrie cubique), *Zeszyty Naukowe-Matematyka*, Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Opole, 38-47.

GOBBER, Giovanni

[1985] Alle origini della grammatica categorial: Husserl, Lesniewski, Ajdukiewicz, *Revista di filosofia neoscolastica* LXXVI.2, 258-295.

GOCHET, Paul

[1972] *Esquisse d'une théorie nominaliste de la proposition*, Paris: A. Colin.

GOCHET, Paul; GRIBOMONT, Pascal & THAYSE, André

[2000] *Logique. Vol. 3 Méthodes pour l'intelligence artificielle*, Paris: Hermès.

CONSETH, Ferdinand

[1937] *Qu'est-ce que la logique?* Paris: Hermann.

GOODMAN, Nelson

[1951] *The Structure of Appearance*, Harvard: Harvard University Press. (2nd edition, [1966], Indianapolis: Bobbs-Merrill).

GRATTAN-GUINNESS, Ivor

[1981] On the Development of Logics between the two World Wars, *American Mathematical Monthly* 88, 495-509.

GRIZE, Jean-Blaise

[1972] *Notes sur l'ontologie et la méréologie de Lesniewski*, Université de Neuchâtel: Travaux du Centre de Recherches Sémiologiques 12, 35p.

GRZEGORCZYK, Andrzej

[1955] The Systems of Lesniewski in Relation to Contemporary Logical Research, *Studia Logica* 3, 77-97.

HENRY, Desmond Paul

[1969] Lesniewski's Ontology and some Medieval Logicians, *NDJFL* 10.3, 324-326.

[1972] *Medieval Logic and Metaphysics: A Modern Introduction*, London: Hutchinson Library.

HILBERT, David

[1926] Über das Unendliche, *Mathematische Annalen* 95, 161-190. (Trad. fr. dans Largeault, [1972], 220-245).

HIZ, Henry

[1977] Descriptions in Russell's Theory and in Ontology, *Studia Logica* 36.4, 271-283.

HUSSERL, Edmund

[1891] *Philosophie der Arithmetik*, Halle: C.E.M. Pfeffer (Robert Stricker).

[1900] *Logische Untersuchungen*. Halle: Max Niemeyer. (Trad. angl. de la 2e éd. par J.N. Findlay, *Logical Investigations*, Humanities Press [1970], 2 vols).

JEVONS , William Stanley

[1887] *Principles of Sciences*, New York: Macmillan.

JORAY, Pierre

[1999] *Domaine de quantification et catégories syntaxico-sémantiques*, in: D. Miéville (éd.), *Rôle et enjeux de la notion de catégorie en logique*, Université de Neuchâtel: *Travaux de logique* 13, 43-62.

[2001] *La subordination logique. Une étude du nom complexe dans l'Ontologie de S. Lesniewski*, Berne: P. Lang.

KALINOWSKI, Georges

[1977] *La grammaire pure et les catégories sémantiques*, *Archives de Philosophie* 40, 467-475.

[1989] *Sur les fondements de la mathématique: fragments (discussions préalables, méréologie, ontologie) / Stanislaw Lesniewski*; Paris: Hermès. (Trad. du polonais par G. Kalinowski; préf. de D. Miéville).

[1995] *Les démonstrations de la non-existence des objets généraux chez Lesniewski*, in: D. Miéville & D. Vernant (éds), *Stanislaw Lesniewski aujourd'hui*, Grenoble / Neuchâtel, Groupe de Recherches sur la philosophie et le langage / Centre de Recherches Sémiologiques, 121-146.

KEARNS, John Thomas

[1966] *Quantifiers and Universal Validity*, *Logique et Analyse* 9.35-36, 298-309.

[1967] *The Contributions of Lesniewski*, *NDJFL* 8.1-2, 61-93.

KLEENE, Stephen C.

[1977] *Introduction to Metamathematics*. New York: Van Nostrand.

KLIBANSKY, Raymond, (ed.)

[1968] *Contemporary Philosophy, a Survey, Vol. I: Logic and Foundations of Mathematics*, Firenze: La Nuova Italia.

KNEALE, William & KNEALE, Martha

[1962] *The Development of Logic*. Oxford: Clarendon Press.

KOTARBINSKI, Tadeusz

[1956] *Sprawnosc i blad. Z mysla o dobrej robocie nauczyciela (Intelligerce et erreurs. Lukasiewicz)*, Warszawa: Panstwowe Zaklady Wydawnictw Szkolnych, 102p.

[1957] *La philosophie dans la Pologne contemporaine*, *Synthese* 12.137, 29-38.

[1964] *Leçons sur l'histoire de la logique*, Paris: PUF. (Trad. fr. de [1957c]).

LAFORGE, Jean-Marc

[1974] *Fondements pour une méréologie ensembliste*, *Logique et Analyse* 17.65-66, 165-174.

LARGEAULT, Jean

[1970] *Logique et philosophie chez Frege*, Paris/Louvain: Nauwelaerts

[1972] *Logique mathématique. Textes*, Paris: A. Colin.

LE BLANC, Audoenus

[1985] *New Axioms for Mereology*, *NDJFL* 26.4, 437-444.

LEJEWSKI, Czeslaw

[1954] *Logic and Existence*, *British Journal for the Philosophy of Science* 5, 104-119.

[1963] *Aristotle's Syllogistic and its Extensions*, *Synthese* 15, 125-154.

[1967] *A Single Axiom for the Mereological Notion of Proper Part*, *NDJFL* 7, 279-285.

[1969] *Consistency of Lesniewski's Mereology*, *JSL* 34, 321-328.

[1973] *A Contribution to the Study of Extended Mereologies*, *NDJFL* 14, 53-61.

[1975a] *Logic, History of*, *Encyclopedia Britannica, Macropedia XI*, 56-72.

[1975b] *Syntax and Semantics of Ordinary Language*, *The Aristotelian Society*, Sup. vol. 49, 127-146.

[1976a] *On Prosleptic Premises*, *NDJFL* 17, 1-18.

[1976b] *Systems of Lesniewski's Ontology with the Functor of Weak Inclusion as the Only Primitive Term*, *XXIInd Conference on the History of Logic*, 5-9 July, 1976, Krakow, 38p.

[1976c] *Ontology and Logic, Philosophy of Logic (Proceedings of the Third Bristol Conf. in Critical Phil.)*, Berkeley: Univ. Calif. Press, 1-63.

[1977a] *A Note concerning the Notion of Mereological Class*, *NDJFL* 19.2, 251-263.

[1977b] *Systems of Lesniewski's Ontology with the Functor of Weak Inclusion as the Only Primitive Term*, *Studia Logica* 36.4, 323-349.

[1980] *A Note concerning the Notion of Mereological Class. Postscript*, *NDJFL* 21.4, 679-682.

[1981] *Logic and Ontology*, in: E. Agazzi (ed.), [1981], 379-398.

- [1983] A Note on Lesniewski's Axiom System for the Mereological Notion of Ingredient or Element, *Topoi* 2, 63-71.
- [1985] Accommoding the Informal Notion of Mereological Class within the Framework of Lesniewski's Ontology, *Dialectica* 39, 217-241.
- [1995] Remembering Stanislaw Lesniewski, in: D. Miéville & D. Vernant (éds), [1995], 25-66.
- LEONARD, Henry S. & GOODMAN, Nelson
- [1936] A Calculus of Individuals, *JSL* 2, 63.
- [1940] The Calculus of Individuals and its Uses, *JSL* 5, 45-55.
- LESNIEWSKI, Stanislaw (1886—1939)
- [1967] On Definitions in the So-Called Theory of Deduction, in: McCall [1967], 170-187. (Trad. angl. de [1930b]).
- [1983] On the Foundations of Mathematics, chapitres I-X, *Topoi* 2, 7-52. (Traduction V. Sinisi).
- [1989] *Sur les fondements de la mathématique. Fragments (Discussions préalables, méréologie, ontologie)*, Paris: Hermès. (Trad. G. Kalinowski).
- [1992] *Collected Works I, II*, S.J. Surma, J.T. Szrednicki, D.I. Barnett (eds). Varsovie: Polish Scientific Pub. / Dordrecht/Boston: Kluwer.
- LEWIS, David
- [1991] *Parts of Classes*, Oxford: Blackwell, 1991.
- LINSKY, Leonard & SCHUMM, George
- [1971] Frege's Way out: A Footnote, *Analysis* 32, 5-7.
- LUKASIEWICZ, Jan
- [1910] *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa. Studium krytyczne (Sur le principe de contradiction chez Aristote: une étude critique)*, Krakow: Akademia Umiejetnosci.
- [1971] On the Principle of Contradiction in Aristotle, *The Review of Metaphysics* 24, 485-509. (Trad. de [1910a]).
- LUSCHEI, Eugene C.
- [1962] *The Logical Systems of Lesniewski*, Amsterdam: North-Holland.
- MANSEL, Henry Longueville
- [1851] Recent Extensions of Formal Logic, *North British Review*, 90-121.

MCCALL, Storrs

[1967] *Polish Logic, 1920-1939*, Oxford: Oxford University Press.

MENDELSON, Elliott

[1979] *Introduction to Mathematical Logic*, New York: D. Van Nostrand.

MERILL, D.

[1977] On Morgan's argument, *NDJFL XVIII*, 133-138.

[1990] *Augustus De Morgan and the Logic of Relations*, Dordrecht: Kluwer.

MIÉVILLE, Denis

[1984] *Un développement des systèmes logiques de S. Lesniewski. Protothétique-Ontologie-Méréologie*. Berne, Francfort/M., New York: P. Lang.

[1985] Un aperçu des caractéristiques des systèmes logiques de S. Lesniewski, *Dialectica* 39.3, 165-179.

[1989] Préface à l'ouvrage de S. Lesniewski: Sur les fondements de la mathématique. *Fragments*, Paris: Hermès, 10-16. (Traduction G. Kalinowski).

[1993] L'autre des relations, in: *Relations formelles et non formelles*, Université de Neuchâtel: Travaux du Centre de Recherches Sémiologiques 61, 53-96.

[1996] A la recherche des catégories syntaxico-sémantiques oubliées, in: *Analyse catégorielle et logique*, Université de Neuchâtel: Travaux de logique 10, 35-41.

[1999] Associative Anaphora: an Attempt at Formalization, *Journal of Pragmatics* 31, 327-337.

[2001] *Méréologie et modalités. Aspects critiques et développements*, (sous la direction de D. Miéville), Université de Neuchâtel: Travaux de logique 14.

MIÉVILLE, Denis & VERNANT Denis (éds)

[1995] *Stanislaw Lesniewski aujourd'hui*, Grenoble / Neuchâtel, Groupe de Recherches sur la philosophie et le langage / Centre de Recherches Sémiologiques.

MULLIGAN, Kevin & SMITH, Barry

[1982] Piece of Theory, in: B. Smith (ed.), *Parts and Moments. Studies in Logic and Formal Ontology*, Munich: *Philosophia*, 15-109.

NEF, Frédéric

[1995] Sémantique et ontologie: réflexions sur la théorie des objets et les propriétés, in: D. Miéville & D. Vernant (éds), [1995], 147-178.

NELSON, H. & GRELLING, K.

[1908] Bemerkungen zu den Paradoxen von Russell und Burali-Forti. *Abhandlungen der Fries'schen Schule*, vol. 2, 301-324.

QUINE, Willard von Orman

[1955] On Frege's Way out, *Mind* 64, 145-159.

[1969] *Ontological Relativity and Other Essays*. New York/London: Columbia University Press.

[1976] *Mathematical Logic*. Cambridge: CUP. (ed. revised)

RICKEY, V. Frederick

[1977] A Survey of Lesniewski's Logic, *Studia Logica* 36, 407-426.

ROUAULT, Jacques

[1995] Représentations centrées objets, formalisation en linguistique et système de Lesniewski, in: D. Miéville & D. Vernant (éds), [1995], 257-276.

RUSSELL, Bertrand

[1956] *The Principles of Mathematics*, London: Allen & Unwin, (1^{ère} éd. [1903]).

[1989] *Écrits de logique philosophique*, Paris: PUF. (éd. Roy J.-M.).

[1991] *Introduction à la philosophie mathématique*, Paris: Payot (1^{ère} éd. [1919]).

SANCHEZ VALENCIA, A.

[1995] Parsing-Driven Inference: Natural Logic, *Linguistic Analysis* 25, 258-285.

[1997] Head or Tail? De Morgan on the Bounds of Traditional Logic, *History and Philosophy of Logic* 18, 123-138.

SCHRÖDER, R.

[1890] *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik)*, T. 1, Leipzig: Teubner.

SIMONS, Peter M.

[1981] A Note on Lesniewski and Free Logic, *Logique et Analyse* 24.95-96, 415-420.

[1982] On Understanding Lesniewski, *History and Philosophy of Logic* 3, 165-191.

[1987] *Parts. A Study in Ontology*, Oxford: Clarendon Press.

- [1995] Lesniewski and Ontological Commitment, in: D. Miéville & D. Vernant (éds), [1995], 103-119.
- [2001] Are all Existential Parts Analytically Essential, in: *Méréologie et modalités. Aspects critiques et développements*, Université de Neuchâtel: Travaux de logique 14, 129-149.
- SINISI, Vito F.
- [1969] Lesniewski and Frege on Collective Classes, *NDJFL* 10, 239-246.
- [1976] Lesniewski's Analysis of Russell's Antinomy, *NDJFL* 17, 19-34.
- SLUPECKI, Jerzy
- [1955] S. Lesniewski's Calculus of Names, *Studia Logica* 3, 7-70.
- [1958] Towards a Generalized Mereology of Lesniewski, *Studia Logica* 8, 131-154.
- SOBOCINSKI, Boleslaw
- [1949] L'analyse de l'antinomie russellienne par Lesniewski, *Methodos* 1, 94-107, 220-228, 308-316; and 2 [1950], 237-257.
- [1954] Studies in Lesniewski's Mereology, *Polskie Towarzystwo Naukowe Na Obczyźnie'*, *Rocznik* 5 [1954-55, in 1954], 34-43.
- [1971a] Atomistic Mereology I, II, *NDJFL* 12, 89-103 and 203-213.
- [1971b] A Note on an Axiom-System of Atomistic Mereology, *NDJFL* 12, 249-251.
- SOMMERS, Fred
- [1984] *The Logic of Natural Language*. Oxford: Clarendon Press.
- SRZEDNICKI, Jan T.J. & RICKEY, V. Frederick (eds)
- [1984] *Lesniewski's Systems: Ontology and Mereology*, Boston/The Hague: Nijhoff/ Wrocław: Ossolineum.
- SRZEDNICKI, Jan T.J. & STACHNIAK, Zbigniew (eds)
- [1988] *S. Lesniweski's: Lecture Notes in Logic*, Dordrecht/ Boston: Kluwer.
- [1998] *Lesniewski's Systems: Protothetic*, Dordrecht/ Boston: Kluwer.
- SUPPES, Patrick
- [1957] *Introduction to Logic*, New York: van Nostrand.
- TARSKI, Alfred
- [1956] *Logic, Semantics, Metamathematics: Paper from 1923-1938 by Alfred Tarski*, Oxford: Clarendon Press. Avec, entre autres, des trad. de [1923], [1929], [1933] et [1935].

[1972] *Logique, sémantique, métamathématique 1923-1944*, Paris: A. Colin, vol. 1. (Trad. de [1956]).

[1974] *Logique, sémantique, métamathématique 1923-1944*, Paris: A. Colin, vol. 2. Trad. G. Granger.

THOM, Paul

[1986] A Lesniewskian Reading of Ancient Ontology, Parmenides to Democritus, *History and Philosophy of Logic* 7.2, 155-166.

VARZI, Achille

[2001] Parts, Counterparts and Modal Occurents, in: *Méréologie et modalités. Aspects critiques et développements*, Université de Neuchâtel: Travaux de logique 14, 151-171.

VERNANT, Denis

[1995] Logique et pragmatique: la genèse du concept d'assertion, in: D. Miéville & D. Vernant (éds), [1995], 179-206.

[2000] Sur les fondements de la mathématique de Stanislaw Lesniewski, in: F. Beets & E. Gillet (sous la dir.), *Logique en perspective. Mélanges offerts à Paul Gochet*, Bruxelles: Ousia, 313-363.

[2001] *Introduction à la logique standard. Calcul des propositions, des prédicats et des relations*, Paris: Flammarion.

WENGERT, R.G.

[1974] Schematizing De Morgan's argument, *NDJFL* XV.1, 165-166.

WHITEHEAD, Alfred North & RUSSELL, Bertrand

[1927] *Principia Mathematica*, Cambridge: CUP, 3 vol. (seconde édition).

WOLENSKI, Jan

[1987] Reism and Lesniewski's Ontology, *History and Philosophy of Logic* 7, 165-176.

[1994] *Philosophical Logic in Poland*, Dordrecht: Kluwer.

[1995] Lesniewski's Logic and the Concept of Being, in: D. Miéville & D. Vernant (éds), [1995], 93-102.

ZERMELO, Ernst

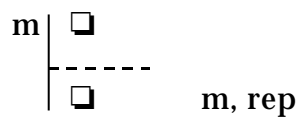
[1908] Über die Grundlagen der Mengenlehre, *Mathematische Annalen* 55.

ANNEXES

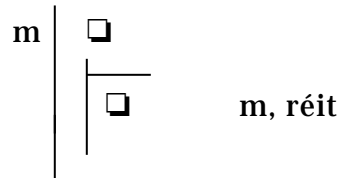
I. LISTE DES RÈGLES EN DÉDUCTION NATURELLE

1. Règles générales

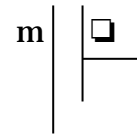
Règle rep



Règle réit

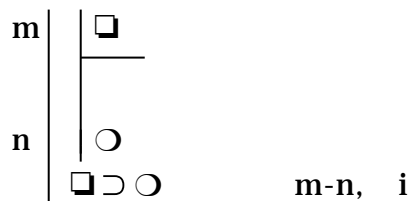


Règle hyp



2. Règles pour les opérateurs propositionnels \supset , \sim , \wedge , \vee , \equiv

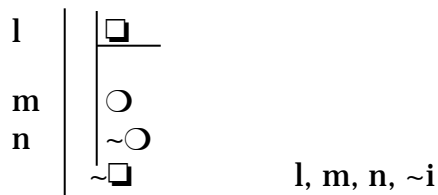
Règle \supset i



Règle \supset e



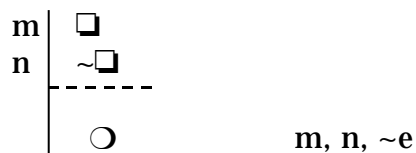
Règle \sim i



Règle $\sim\sim$ e



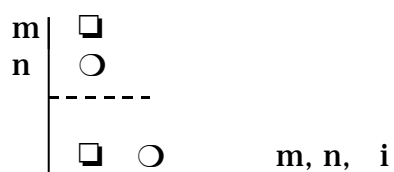
Règle \sim e



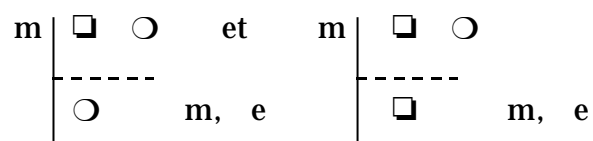
Règle $\sim\sim$ i



Règle \wedge i



Règle \wedge e



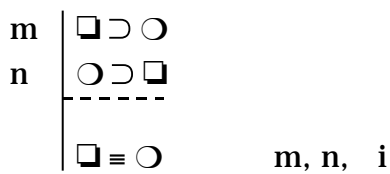
Règle $\forall i$



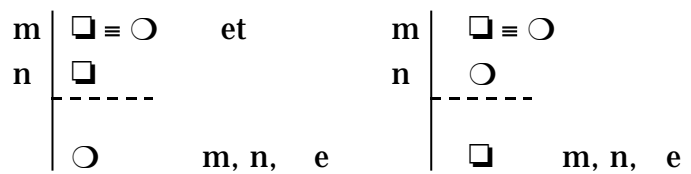
Règle $\forall e$



Règle $= i$

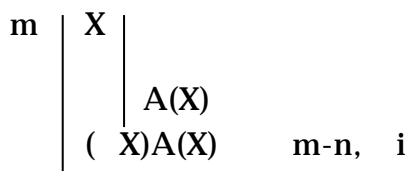


Règle $= e$



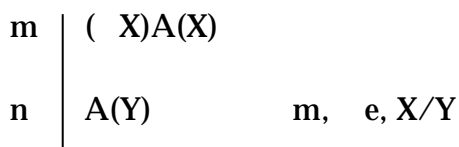
3. Règles pour les quantificateurs

Règle $\forall i$



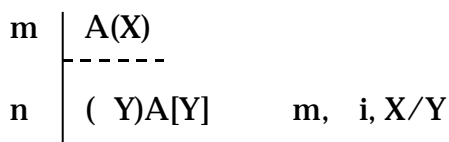
- sous-déduction stricte:
 - sans hypothèse
 - interdiction de réitérer une expression contenant X libre

Règle $\forall e$



- Substitution totale
- Y doit être libre pour X dans A(X)

Règle $\exists i$



- substitution partielle ou totale
- Y doit être libre pour X dans A(X)

Règle $\exists e$

$$\begin{array}{l|l}
 l & (\exists X)A(X) \\
 m & X \mid \overline{A(X)} \\
 n & \quad \mid B \\
 & B
 \end{array}
 \quad l, m-n, e$$

- interdiction de réitérer une expression avec X libre
- B doit être une expression sans variable X libre

4. Règle pour l'identité

Règle =e

$$\begin{array}{l|l}
 l & A(X) \\
 m & X = Y \\
 & \hline
 & A[Y]
 \end{array}
 \quad l, m, =e$$

II. AUTRES AXIOMATIQUES DE LA MÉRÉOLOGIE

•L'axiomatique de 1918

C'est la version corrigée de l'axiomatique de 1916, en ce sens que les foncteurs définis n'apparaissent plus dans les axiomes. Son foncteur primitif est toujours «partie de», soit «pt». Elle comprend quatre axiomes sur la base desquelles sont ensuite introduites les définitions des foncteurs «élément de» et «classe de», soient «el» et «Kl». Les deux premiers axiomes sont identiques à ceux de l'axiomatique précédente.

Axiome 1:

$$, AB \text{ " } ' A \text{ pt}(B) \quad B \sim \text{pt}(A) \text{ "}$$

Axiome 2:

$$, ABC \text{ " } ' A \text{ pt}(B) \quad B \text{ pt}(C) . \quad A \text{ pt}(C) \text{ "}$$

Axiome 3:

$$, a \text{ " } ' \text{ex}(a) \quad , C \text{ " } ' C \text{ a} . \quad C = A \quad C \text{ pt}(A) : . \quad C = B \quad C \text{ pt}(B) \text{ "}$$

$$, D \text{ " } ' D \text{ pt}(A) \quad D \text{ pt}(B) \quad , \quad E \text{ " } ' E = D \quad E \text{ pt}(D) . \quad a :$$

$$, F \text{ " } ' F \text{ a} \quad E \text{ pt}(F) \text{ " " " } A \text{ B} \text{ "}$$

Lecture: Si chaque a est le même objet que A ou est une partie de A et chaque a est le même objet que B ou une partie de B , et pour tout D – si D est une partie de A ou est une partie de B , alors quelque objet qui est le même objet que D ou est une partie de D est a ou est une partie de quelque a , ALORS A est B .

Axiome 4:

$$\begin{aligned} & , a \text{ " ex(a) , A " , " B a . B = A B pt(A) " , B " B pt(A) } \\ & , C \text{ " C = B C pt(B) . C a : , D " D a C pt(D) " " " " } \end{aligned}$$

Lecture: Si quelque objet est a, ALORS il y a quelque A tel que – pour tout B, si B est a alors B est le même objet que A ou est une partie de A et pour tout B, si B est une partie de A, alors quelque objet qui est le même objet que B ou une partie de B est a ou est une partie de quelque a.

Sur la base de ces quatre axiomes sont inscrites la définition du foncteur «classe de» et celle du foncteur «élément de». Celles-ci étant identiques à celles composant la première axiomatique, nous ne les inscrivons pas.

•L'axiomatique de 1920

Le foncteur primitif de cette axiomatique est «élément de», soit «el». Elle comprend quatre axiomes, à la suite desquels est inscrite la définition du foncteur «classe de».

Axiome 1:

$$, AB \text{ " A el(B) } \sim (B A) . \quad \sim (el(A)) \text{ " }$$

Lecture: Si A est un élément de B et B n'est pas A, alors B n'est pas un élément de A.

Axiome 2:

$$, ABC \text{ " A el(B) B el(C) . A el(C) \text{ " }$$

Lecture: Si A est un élément de B et B est un élément de C, alors A est un élément de C.

Axiome 3:

$$\forall a, C, C \text{ a} \cdot C \text{ el}(A) \rightarrow C \text{ el}(B) \quad , \quad \forall D, D \text{ el}(A) \rightarrow D \text{ el}(B) .$$

$$\forall E, F, E \text{ a} \rightarrow F \text{ el}(E) \rightarrow F \text{ el}(D) \quad \text{''''} \quad A \text{ B} \quad \text{''''}$$

Lecture: Si tout a est un élément de A et un élément de B et pour tout D , – si D est un élément de A ou est un élément de B , alors quelque élément de D est un élément de quelque a , ALORS A est B .

Axiome 4:

$$\forall a, a \quad , \quad \forall B, C, C \text{ a} \rightarrow C \text{ el}(B) \quad , \quad \forall C, C \text{ el}(B)$$

$$\forall D, D \text{ a} \rightarrow E \text{ el}(C) \rightarrow E \text{ el}(D) \quad \text{''''''''}$$

Lecture: Si quelque objet est a , ALORS il y a quelque B tel que – pour tout C , si C est a alors C est un élément de B et – pour tout C , si C est un élément de B , alors quelque élément de C est élément de quelque a .

La définition du foncteur «classe de» inscrite sur la base de ces axiomes est identique à celle des deux axiomatiques précédentes.

•L'axiomatique de 1921

Son terme primitif est «extérieur à», symboliquement «ext». Elle comprend deux axiomes sur la base desquels sont inscrites les définitions des foncteurs «partie de», «élément de» et «partie de».

Axiome 1:

$$\forall B, \text{ext}(B) \quad , \quad \forall C, D, D \text{ ext}(A) \rightarrow D \text{ ext}(B) \quad \text{''''} \quad D \sim (\text{ext}(C)) \quad \text{''''''''}$$

Lecture: A est extérieur à B si et seulement si, pour tout C , – quelque objet extérieur à A ou extérieur à B n'est pas extérieur à C .

Axiome 2:

$$\forall A, C, D \text{ (objets)} \quad (A \in C \iff \forall D \text{ (objet)} \quad (A \in D \implies C \in D)) \implies A \in C$$

(a) (a)

Lecture: SI pour tout $C - C$ est (a) si et seulement si C est un objet et pour tout $D - C$ est extérieur si et seulement si tout objet qui est a est extérieur à D et quelque objet est a , ALORS (a) est un objet.

Les définitions inscrites sur la base de ce système axiomatique sont les suivantes:

Définition 1:

$$\forall a \text{ (objet)} \quad \text{Kl}(a) = \{ A \text{ (objet)} \mid \forall B \text{ (objet)} \quad (A \in B \implies a \in B) \}$$

Lecture: A est la classe des objets a SI ET SEULEMENT SI A est un objet et pour tout $B - A$ est extérieur à B si et seulement si pour tout $C -$ si C est un a alors C est extérieur à B .

Définition 2:

$$\forall B \text{ (objet)} \quad \text{el}(B) = \{ a \text{ (objet)} \mid a \in B \}$$

Lecture: A est un élément de l'objet B si et seulement si, pour quelque $a - B$ est la classe des objets a et A est un a .

Définition 3:

$$\forall B \text{ (objet)} \quad \text{pt}(B) = \{ A \text{ (objet)} \mid \text{el}(B) \in A \}$$

Lecture: A est une partie de l'objet B si et seulement si A est un élément de l'objet B et A n'est pas le même objet que B .

• **Axiomatiques à un seul axiome**

Nous en proposons deux. La première présente le foncteur primitif «élément de». Elle date de 1948 et est due à Sobocinski et Grzegorzcyk. La deuxième contient le foncteur primitif «classe de». Elle a été formulée en 1954 par Lejewski.

Foncteur primitif «el»:

$$\begin{aligned}
 & , AB_{\alpha} \text{ ' } A \text{ el}(B) \text{ . } B \text{ B } , fa_{\alpha} \text{ ' } , C_{\alpha} \text{ ' } C \text{ f}(a) \text{ , } D_{\alpha} \text{ ' } D \text{ a } D \text{ el}(C) \text{ ' ' } \\
 & , D_{\alpha} \text{ ' } D \text{ el}(C) \text{ , } EF_{\alpha} \text{ ' } E \text{ a } F \text{ el}(D) \text{ F el}(E) \text{ ' ' ' } B \text{ el}(B) \text{ B a } \\
 & A \text{ el}(f(a)) \text{ ' ' ' }
 \end{aligned}$$

Foncteur primitif «Kl»

$$\begin{aligned}
 & , a_{\alpha} \text{ ' } Kl(a) \text{ . } A \text{ A } , f_{\alpha} \text{ ' } , BC_{\alpha} \text{ ' } B \text{ f}(C) \text{ . } , d_{\alpha} \text{ ' } B \text{ d } C \text{ Kl}(d) \text{ ' ' } \\
 & B \text{ f}(Kl(b)) \text{ ' ' ' } , B_{\alpha} \text{ ' } B \text{ f}(a) \text{ , } CD_{\alpha} \text{ ' } C \text{ a } D \text{ f}(B) \text{ D f}(C) \text{ ' ' ' ' ' }
 \end{aligned}$$

III. L'AXIOMATIQUE DE LA PROTOTHETIQUE

Elle est composée de trois axiomes qui fixent la signification de son foncteur primitif, la biconditionnelle . Les deux premiers axiomes expriment les propriétés constitutives liées à la signification de ce foncteur, le troisième comprend le principe de bivalence et le principe d'extensionnalité pour les propositions.

Axiome 1:

$$, pqr \text{ " } ((p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (r \rightarrow q) \text{ " }$$

Axiome 2:

$$, pqr \text{ " } (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow r) \text{ " }$$

Axiome 3:

$$, pg \text{ " } , f \text{ " } g(pp) \rightarrow (r \text{ " } f(rr) \rightarrow (pp)) \text{ " } , r \text{ " } f(rr) \rightarrow ((p \rightarrow , q \text{ " } q \rightarrow p \text{ " }) \text{ " } , q \text{ " } g(qp) \text{ " } \text{ " }$$

Détermination catégorielle contextuelle

1) Variables et constantes sont caractérisées formellement. La discrimination d'une variable d'une constante est opérée par la quantification. Tout signe présent à la fois dans le quantificateur et le sous quantificateur a le statut de *variable* et tout signe (à l'exception des parenthèses) n'apparaissant que dans le sous quantificateur a le statut de *constante* (il n'y a pas de variable libre dans les systèmes de Lesniewski).

Ainsi, dans les axiomes de la Protothétique, le symbole de la biconditionnelle est une constante tandis que tous les autres symboles (à l'exception des délimiteurs de quantification et des parenthèses) sont des variables. Les deux premiers axiomes renferment les variables p, q et r . Le troisième axiome ajoute les variables f et g . Quant à la reconnaissance de la catégorie sémantique d'une variable ou d'une constante, elle relève d'une détermination contextuelle dont les modalités sont les suivantes.

2) La détermination contextuelle est réglée par une écriture préfixée. Conformément à ce mode d'écriture contextuel, les axiomes se présentent sous la formulation suivante:

Axiome 1:

$$, pqr \text{ " } (((pr) (qp)) (rq)) \text{ "}$$

Axiome 2:

$$, pqr \text{ " } ((p (qr)) ((pq) r)) \text{ "}$$

Axiome 3:

$$, pg \text{ " } , f \text{ " } (g(pp) (, r \text{ " } (f(rr) g(pp)) \text{ " } , r \text{ " } (f(rr) g((p \cdot q \text{ " } q \text{ " }) p))) \text{ " }) \text{ "}$$

$$, q \text{ " } g(qp) \text{ " }) \text{ "}$$

Un contexte est caractérisé par la forme de ses parenthèses *et* le nombre de ses arguments. L'axiomatique pose le premier contexte (--). Celui-ci est destiné à contenir deux arguments de la catégorie S . Le foncteur de la biconditionnelle, \cdot , associé à ce contexte, est de catégorie S/SS . Par la suite, si une nouvelle constante de cette même catégorie, S/SS , est introduite dans le système *via* la règle de

définition, elle devra être associée à ce même contexte. Ainsi, tout autre opérateur propositionnel à deux arguments propositionnels qui serait défini devrait être associé au contexte (--). Par contre, si une constante d'une catégorie n'appartenant pas encore au système est définie, il est nécessaire de choisir un contexte nouveau.

Observons donc que c'est l'écriture contextuelle qui nous permet de savoir que les variables g et f qui apparaissent dans le troisième axiome sont de catégorie S/SS .

Quant à l'axiome de l'Ontologie:

$$, ab \llbracket a \ b \equiv . , \ c \llbracket c \ a \rrbracket , cd \llbracket (c \ a \ d \ a) \ c \ d \rrbracket , c \llbracket c \ a \ c \ b \rrbracket ,$$

sa formulation contextuelle est la suivante:

$$, ab \llbracket \equiv (\{ ab \} \ (, \ c \llbracket \{ ca \} \rrbracket) \ (, cd \llbracket (\{ ca \} \ \{ da \} \ \{ cd \} \rrbracket , c \llbracket \{ ca \} \ \{ cb \} \rrbracket) \rrbracket \rrbracket$$

L'axiome pose le contexte {--}. Celui-ci est associé aux foncteurs propositionnels à deux arguments nominaux, de catégorie S/NN . Cette catégorie est celle du foncteur primitif \llbracket . Quant aux objets formels «a», «b», «c» et «d», ils ont le statut de variables et appartiennent à la catégorie sémantique des noms.

Des raisons pragmatiques nous ont conduit à préférer un mode d'écriture traditionnel. La présentation contextuelle des axiomes de la Protothétique suffit à ce convaincre que, pour qui n'est pas forgé à ce mode d'écriture, la lecture et la compréhension des thèses s'en trouve facilitée.

IV. LISTE DES THESES

Thèses de l'Ontologie:

Ax_0 : , Ab“ ‘ A b \equiv . , C“ ‘ C A ”

, CD“ ‘ (C A D A) C D ”

, C“ ‘ C A C b ” ”

T_{O1} : , a“ ‘ ex{a} , B“ ‘ B a ” ”

T_{O2} : , a“ ‘ uni{a} , BC“ ‘ B a C a. C ” ”

T_{O3} : , a“ ‘ sing{a} . ex{a} uni{a} ”

T_{O4} : , a“ ‘ vid{a} \sim ex{a} ”

T_{O5} : , a“ ‘ pl{a} ex{a} \sim sing{a} ”

T_{O6} : , ab“ ‘ a b , C“ ‘ C a C b ” ”

T_{O7} : , ab“ ‘ a b . , C“ ‘ C a ” , D“ ‘ D a D b ” ”

T_{O8} : , ab“ ‘ a b , C“ ‘ C a C b ” ”

T_{O9} : , ab“ ‘ a = b . a b b a ”

T_{O10} : , ab“ ‘ a b . , C“ ‘ C a C b ” ”

T_{O11} : , Ab“ ‘ A \sim (b) . A A \sim (A b) ”

T_O12: , Ab“ ‘ A b , C“ ‘ C A ” ”

T_O13: , Ab“ ‘ A b , CD“ ‘ C A D A. C D ” ”

T_O14: , Ab“ ‘ A b ⊃ , C“ ‘ C A C b ” ”

T_O15: , Aa“ ‘ A a A A ”

T_O16: , A“ ‘ , b“ ‘ A b ” A A ” ”

T_O17: , ABa“ ‘ A B B a . A a ”

T_O18: , ABa“ ‘ A B B a . B A ”

T_O19: , ABa“ ‘ A B B a . A = B ”

T_O20: , A“ ‘ A V . A A A A ”

T_O21: , A“ ‘ A . A A ¬ (A A) ”

T_O22: , A“ ‘ ¬ (A) ”

T_O23: ¬ ()

T_O24: ¬ (sing{ })

T_O25: ~, a“ ‘ ex{a} ”

Thèses de la Méréologie

Ax_M1: , AB“ ‘ A pt(B) B ¬ (pt(A)) ”

Ax_M2: , ABC“ ‘ A pt(B) B pt(C). A pt(C) ”

Df_{EL} : , AB " A el(B) . A pt(B) A = B "

Df_{KL} : , Aa " A Kl(a) . A A , B " B a B el(A) "

, B " B el(A) , CD " C a D el(C) D el(B) " " "

Ax_M3 : , ABa " A Kl(a) B Kl(a) . A = B "

Ax_M4 : , Aa " A a , B " B Kl(a) " "

T_M1 : , Aa " A Kl(a) A A "

T_M2 : , Aa " A Kl(a) , B " B a B el(A) " "

T_M3 : , Aa " A Kl(a) , B " B el(A) , CD " C a D el(C) D el(B) " " "

T_M4 : , Aa " A a A el(A) "

T_M5 : , A " A A A el(A) "

T_M6 : , ABC " A el(B) B el(C) . A el(C) "

T_M7 : , A " ~(A pt(A)) "

T_M8 : , AB " A pt(B) B B "

T_M9 : , AB " A el(B) B B "

T_M10 : , Aa " A a Kl(a) Kl(a) "

T_M11 : , Aa " A Kl(a) , B " B a " "

T_{M12} : , Aa “ ‘ A Kl(a) A = Kl(a) ”

T_{M13} : , Aa “ ‘ A Kl(a) A el(A) ”

T_{M14} : , A “ ‘ A A A Kl(A) ”

T_{M15} : , A “ ‘ A A A = Kl(A) ”

T_{M16} : , Aa “ ‘ A a A el(Kl(a)) ”

T_{M17} : , A “ ‘ A A A Kl(el(A)) ”

T_{M18} : , AB “ ‘ A el(B) , a “ ‘ B Kl(a) A a ” ”

T_{M19} : , AB “ ‘ A el(B) el(A) el(B) ”

T_{M20} : , Aa “ ‘ A Kl(a) A Kl(Kl(a)) ”

T_{M21} : , A “ ‘ $\sim(A Kl())$ ”

T_{M22} : , A “ ‘ A $SING_{KL}$. A A $sing(el(Kl(a)))$ ”

T_{M23} : , A “ ‘ A U . A A A Kl(V) ”

T_{M24} : , Aa “ ‘ A a , B “ ‘ B el(A) B el(Kl(a)) ” ”

T_{M25} : , Aa “ ‘ a b , C “ ‘ C a , D “ ‘ D el(C) D el(Kl(b)) ” ” ”

Df_{ST} : , Aa “ ‘ A $st(a)$. A A , B “ ‘ B el(A) , CD “ ‘ C a C el(A)

D el(B) D el(C) ” ” ”

T_{M26} : , Aa“ ‘ A st(a) A A ”

T_{M27} : , Aa“ ‘ A st(a) , B“ ‘ B el(A) , CD“ ‘ C a C el(A) D el(B)
D el(C) ” ” ”

T_{M28} : , AB“ ‘ A Kl(a) A st(a) ”

T_{M29} : , Aa“ ‘ A st(a) , B“ ‘ B a ” ”

T_{M30} : , Aa“ ‘ A a A st(a) ”

T_{M31} : , Aa“ ‘ A Kl(st(a)) , B“ ‘ B el(A) , CD“ ‘ C a D el(C)
D el(B) ” ” ”

T_{M32} : , Aa“ ‘ A Kl(st(a)) A Kl(a) ”

T_{M33} : , Aa“ ‘ A Kl(a) A Kl(st(a)) ”

T_{M34} : , Aa“ ‘ A st(a) A el(Kl(a)) ”

T_{M35} : , ab“ ‘ a b A Kl(a) . A st(b) ”

T_{M36} : , ab“ ‘ a b Kl(a) el(Kl(b)) ”

T_{M37} : , ab“ ‘ a b el(Kl(a)) el(Kl(b)) ”