Publié dans Représentations de savoir scolaires 6, 1-24, 1991
qui doit être utilisé pour toute référence à ce travail

UNIVERSITE DE NEUCHATEL
Faculté des Lettres
Séminaire de Psychologie
Espace Louis-Agassiz 1
CH-2000 Neuchâtel

UNIVERSITE DE GENEVE
FAPSE - Sciences de l'éducation
Didactique et Interactions Sociales
Avenue Général Dufour 24
CH-1211 Genève 4

QU'EST-CE QUE L'ALGEBRE?

LE POINT DE VUE D'UN MATHEMATICIEN CHERCHEUR

Michèle Grossen & Francesca Giosué

décembre 1991

Les recherches citées ici ont été rendues possibles grâce au Fonds national suisse de la recherche scientifique que nous tenons à remercier de son soutien.

Dans le programme de recherche "Représentations de savoirs scolaires", nous avons consacré l'essentiel des moyens à constituer et à mettre en forme des registres de données intéressants et systématiques; à élargir nos sources bibliographiques; à mettre au point les démarches d'analyse en les faisant porter sur quelques questions essentielles; à parfaire le cadre théorique et à montrer comment il permet d'articuler entre eux des ordres de phénomènes trop souvent considérés indépendamment les uns des autres. Nous avons ainsi construit d'intéressants corpus et outils. Ces rapports de recherche présentent une série de résultats mais d'autres exploitations de ce matériel sont prévues qui augurent d'autres publications dans cette série ou dans des revues scientifiques.

Anne-Nelly Perret-Clermont
Maria Luisa Schubauer-Leoni

QU'EST-CE QUE L'ALGEBRE?: LE POINT DE VUE D'UN MATHEMATICIEN CHERCHEUR

RAPPORT DE RECHERCHE

Recherche "Algebra-Bologna" - Contrat FNRS 1.372-086

Michèle Grossen et Francesca Giosué

1. Introduction: pourquoi interroger un mathématicien chercheur?

Dans le cadre de la recherche menée à Bologne de novembre 1987 à juin 1988 et portant sur l'introduction de l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques (cf rapport de recherche Grossen, Giosué et Golay, 1989), nous avons effectué une série de 9 entretiens avec des professeurs qui enseignent les mathématiques à des élèves de la Scuola Media (troisième année). Les questions posées lors de ces entretiens portaient sur les points suivants: **l'algèbre en général** (moment d'introduction dans le cursus scolaire, position de l'algèbre par rapport au programme de mathématiques, difficultés rencontrées dans l'enseignement de l'algèbre, intérêts et buts de l'enseignement de l'algèbre), les **activités proposées aux élèves par l'enseignant** dans sa classe (types d'exercices faits en classe, organisation concrète d'une leçon, mode d'évaluation), **le point de vue de l'enseignant sur une tâche construite par un autre enseignant** (ressemblance ou non avec les exercices auxquels les élèves sont habitués en classe, difficultés que, selon l'enseignant, les élèves pourraient rencontrer), et, si l'enseignant était d'accord de faire passer la tâche dans sa classe (selon différentes modalités préétablies), **prédiction par l'enseignant des performances de chaque élève.**

Au cours de ces entretiens, les réponses des enseignants à la question "qu'est-ce que l'algèbre?" ont particulièrement retenu notre attention. En effet, les réponses des enseignants à cette question se regroupaient autour de deux idées principales:

1) L'algèbre commence par l'**introduction des nombres relatifs.** Autrement dit, l'algèbre consiste à offrir une expansion des nombres à partir d'un ensemble numérique initial.

2) L'algèbre, c'est le calcul littéral. De cette expansion des ensembles numériques découle la possibilité de **généraliser** et d'abstraire.

Ces réponses suscitent un certain nombre d'interrogations. En effet, un rapide aperçu des réponses des enseignants suggère que les enseignants ne font pas de distinction entre l'algèbre en tant que savoir mathématique, et l'algèbre en tant qu'objet d'enseignement. Bien que cette observation puisse s'expliquer par le contexte d'interrogation (nos interviewés étaient interpelés en tant qu'enseignants et non en tant que mathématiciens), le caractère relativement univoque de la définition que les enseignants donnaient de l'algèbre reste surprenant. En outre, les enseignants définissaient l'algèbre essentiellement comme la science de la résolution des équations, ce qui, étant donné notre expérience des programmes scolaires suisses, nous a paru limité.

En se basant sur la notion théorique de **transposition didactique** (Chevallard, 1980, 1984; Perret-Clermont et al., 1981) on peut faire l'hypothèse que la définition que les enseignants donnent de l'algèbre est liée aux **finalités** poursuivies par l'enseignement de cette matière dans un certain contexte institutionnel. Les finalités mentionnées par les enseignants interrogés concernaient principalement: la **place de l'algèbre dans le cursus scolaire** (complément au cadre mathématique de base, préparation à l'enseignement dispensé dans les écoles supérieures), le **rôle de l'algèbre dans le développement intellectuel** ("stimulation" des capacités d'abstraction de l'élève), l'**utilisation pratique de l'algèbre** (résolution de petits problèmes quotidiens). Nous nous sommes alors demandé quelle définition un chercheur en mathématiques (qui poursuit des finalités différentes de celles de l'enseignant) donnerait de ce même objet de savoir.

Plus précisément, nos interrogations étaient les suivantes:

- Le calcul littéral constitue-t-il un critère suffisant pour déterminer si l'on se trouve dans le champ de l'algèbre? Si tel n'est pas le cas, comment différencier l'arithmétique de l'algèbre?
- Peut-on vraiment dire que l'algèbre commence par l'introduction des nombres relatifs? Peut-on dire que les nombres relatifs font partie de l'algèbre? Où commence l'algèbre?

2. Quelques notes sur l'histoire des mathématiques

L'entretien que nous avons eu avec un mathématicien, chercheur à la Faculté des Sciences Naturelles, Biologiques et Mathématiques de l'Université de Bologne, nous a sensibilisé au fait que la définition même de l'algèbre a évolué au cours du développement des mathématiques. Nous avons, de ce fait, été renvoyées à l'histoire des mathématiques.

Nous allons tout d'abord tenter de retracer les grandes lignes de cette histoire, ce qui nous permettra ensuite de mieux comprendre le contenu de l'entretien. Nous retracerons les grandes étapes du développement des mathématiques en montrant comment la définition de l'algèbre a évolué. Relevons toutefois qu'une véritable compréhension de l'évolution des mathématiques nécessiterait des connaissances mathématiques que nous n'avons pas.

Un mot tout d'abord sur l'origine même du terme "algèbre". Ce terme est d'origine arabe et est tiré du titre d'un ouvrage intitulé "Al-jabr wa'l muqabalah", oeuvre qu'un mathématicien, géographe et astronome musulman Al-Khwarizmi a écrit entre 800 et 825 à Baghdad. Ce livre a été traduit en latin au XIIème siècle par Gherardo de Crémone sous le titre "Algoritmi dicit" (algoritmi étant une déformation du nom de ce mathématicien). Le terme a passé dans les langues occidentales à partir du XVIème siècle. Le titre arabe cité peut se traduire par "reconstruction et équilibre" et se réfère aux équations: celles-ci sont considérées comme "reconstruites" lorsqu'en transportant certains termes d'un membre à l'autre, on obtient des termes positifs et comme "équilibrées" lorsqu'on a éliminé des termes semblables (Campedelli).

L'algèbre a de tout temps été une des branches fondamentales des mathématiques, mais la définition même de l'algèbre a beaucoup évolué au cours des siècles.

Son évolution a été très lente et renvoie à toute l'histoire des mathématiques et au développement de la pensée mathématique. Elle se définit tout d'abord comme la **science de la résolution des équations** et prend ses sources à l'époque des Babyloniens (environ 2000 ans avant J.-C.) qui avaient découvert la formule de résolution des équations du 2ème degré. Elle se poursuit jusqu'à la fin du XVIème siècle qui marque l'introduction d'un symbolisme adéquat. A partir de là, elle se développera dans le sens d'une abstraction de plus en plus grande.

Selon Bekken (1984), l'histoire de l'algèbre peut se résumer en trois grandes périodes: 1°) une période **présymbolique** avant 1600; 2°) une période symbolique numérique, entre 1600 et 1800; 3°) une période symbolique abstraite, après 1800.

Le développement de l'algèbre a été beaucoup plus lent que celui de la géométrie, puisqu'il a fallu environ un siècle pour que la géométrie élémentaire atteigne une forme à peu près définitive, alors que c'est au XVIème siècle seulement que l'algèbre devient celle que nous connaissons.

Une des raisons qui explique la lenteur de ce développement réside dans le **système de notation** adopté par les mathématiciens pour rendre compte des expressions algébriques. Il s'agissait en fait de trouver un système de notation qui permette de passer d'une étude de cas particuliers à un discours de validité plus générale. L'évolution a ainsi été marquée par le passage d'une **algèbre rhétorique** à une **algèbre symbolique**.

Exemples d'algèbre rhétorique (tiré de Dieudonné, 1987 et de Campedelli)

- Résolution d'une équation du second degré (formulation proposée par Al-Khwarizmi au IXème siècle) (en notation moderne: $x^2 + 10x=39$):

"Que doit être le carré qui, lorsqu'on lui ajoute 10 fois son côté, est égal à 39?
Solution: Diviser par 2 le nombre des côtés ajoutés, ce qui donne 5; multiplier ce nombre par lui-même, le produit est 25. Ajouter ceci à 39; la somme est 64. Prendre la racine carrée de ce nombre, c'est 8, et en soustraire la moitié du nombre des côtés, il reste 3; c'est le côté du carré cherché, qui est donc égal à 9". (Cité par Dieudonné, 1987, p. 62).

- Equation $3x^2-7x+2=0$:

"3 census et 2 deptis 7 rebus aequatur zero"
"3 fois l'inconnue au carré plus 2, moins 7 fois l'inconnue égal zéro" (écriture proposée par Hans Müller, mathématicien et astronome allemand, 1436-1476).

Diophante (milieu du IIème siècle après J.-C.) est sans doute le premier mathématicien qui a utilisé des abréviations qui seront réutilisées au cours du Moyen-Age. En reprenant l'exemple ci-dessus, on obtient la notation suivante:

- "3 census p 2 da 7 rebus ae 0" (p: plus; da: moins; rebus: inconnue; ae: égal) (écriture proposée par Luca Pacioli au XVème siècle) (Cité par Campedelli)

En 1591, François Viète (1540-1603), mathématicien français, a amené un progrès important dans le système de notation. Dans ce système, l'inconnue est appelée "A", "A^2" est désigné par "A quad", "A plano" désigne "A^1", "in" désigne le signe "x", les signes "+" et "-" font leur apparition. Ce qui donne, dans l'exemple précité:

3 in A quad - 7 in A plano + 2 aequatur 0.

Viète a aussi eu l'idée de représenter les coefficients des équations par des lettres (comme dans l'équation $ax^2+bx+c=0$).

C'est finalement René Descartes (1560-1650) qui élaborera le système de notation utilisé aujourd'hui encore. Il introduira notamment l'usage des lettres a, b, c, etc., pour désigner les coefficients ainsi que les termes connus, et l'usage des lettres X, Y, Z pour désigner les inconnues.

La mise au point d'un système de notation mathématique capable de rendre compte d'un problème de manière à la fois brève et rationnelle a donc été un travail de longue haleine qui a marqué l'histoire des mathématiques. On peut à ce propos faire un parallèle entre les différents systèmes de notation utilisés dans l'histoire des mathématiques et les systèmes de notation utilisés par des élèves de l'école primaire qui avaient pour tâche de noter à leur manière un problème arithmétique impliquant des opérations d'addition et de soustraction (Schubauer-Leoni et Perret-Clermont, 1980; Schubauer-Leoni et Grossen, 1984). Nous avions à ce propos montré que les élèves ne recourent pas facilement à la notation mathématique utilisée en classe, mais utilisent différents systèmes de notation, dont certains peuvent être assimilés à un système rhétorique.

Un autre problème important auquel l'algèbre ne cessera de se confronter est celui de la définition même d'**objet mathématique** (Dieudonné, 1987, pp 41-88). Ainsi, au IIIème siècle, Diophante cherche, pour chaque problème, une solution où les inconnues sont des valeurs entières ou fractionnaires (nombres rationnels positifs). Il se heurte toutefois à des impossibilités de deux sortes:

1°) celle liée à la nécessité d'utiliser des **nombres négatifs.** Les nombres négatifs apparaissent comme des nombres fictifs puisqu'il semble impossible qu'une quantité représente moins que rien (Bekken, 1984);

2°) celle liée à la nécessité de recourir à des **nombres irrationnels** (par exemple, lorsque la solution d'une équation est [+ ou -]$\sqrt{2}$).

A cela on peut ajouter la difficulté associée à l'utilisation des **nombres complexes** (par exemple, dans l'équation $x^2+4=0$ qui a pour solution + ou - $\sqrt{-4}$), puisqu'il semble impossible que le carré d'un nombre soit plus petit que zéro (ou, comme le dit Bekken, soit moins que rien!) (Bekken 1984). Ces impossibilités ont été surmontées (la première au cours du Moyen Age, la seconde dès l'Antiquité) par la création de **nouveaux objets mathématiques** (Dieudonné, 1987).

Bourbaki (1984, p.30) relève que de l'Antiquité au XIXème siècle, il y a un accord commun sur ce que sont les objets mathématiques: les nombres, les grandeurs et les figures. Il y a unanimité sur le fait que ces objets nous sont donnés et qu'il n'est pas du ressort du mathématicien de leur attribuer des propriétés arbitraires, au même titre qu'un physicien ne peut pas changer un phénomène naturel.

Le XVIIIème siècle est marqué par un saut important dans la définition de l'objet mathématique, notamment grâce à l'oeuvre du mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855) qui renouvelle les mathématiques en introduisant de nouveaux objets mathématiques "qui se distinguent des objets classiques parce qu'ils n'ont plus "d'images" accessibles à nos sens" (Dieudonné, 1987, p.114).

Des travaux de certains mathématiciens comme Bernard Bolzano

(1781-1848), Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Niels Henrik Abel (1802-1829) se dégage peu à peu l'idée de "structure" qui se précisera au cours du XXème siècle. Parmi les découvertes importantes qui sont faites dans cette péridode, on peut notamment citer la démonstration faite par des mathématiciens comme Paolo Ruffini (1765-1822), Niels Henrik Abel et Evariste Galois (1811-1832), de l'impossibilité de résoudre des équations de degré supérieur au degré 4 selon les méthodes traditionnelles et par la démonstration géométrique (Bekken, 1984). Alors qu'à la Renaissance, des mathématiciens comme Niccolo Tartaglia (1500-1557), Girolamo Cardan (1502-1576) et Scipion del Ferro (1465-1526) étaient déjà parvenus à résoudre des équations du degré 3 et 4, il aura donc fallu environ 250 ans pour parvenir à cette démonstration.

La démonstration de cette impossibilité, ainsi que d'autres découvertes mathématiques que nous ne sommes pas en mesure de rapporter ici, ont peu à peu fait émerger la théorie des ensembles. En même temps qu'on découvre que la géométrie euclidienne ne constitue pas une vérité absolue, on se rend compte que l'algèbre (fondée sur les ensembles numériques) est également possible, même si elle n'est pas liée au genre d'éléments sur lesquels s'opèrent certaines lois fondamentales comme la commutativité de la multiplication. Les travaux de Boole (1815-1864) sont à cet égard d'une importance fondamentale. Boole, en 1847, écrivait: "La mathématique traite des opérations considérées en elles-mêmes, indépendamment des matières diverses auxquelles elles peuvent être appliquées" (cité par Bourbaki, 1984, p. 32) et, en 1854: "Il n'est pas dans l'essence de la mathématique de s'occuper des idées de nombre et de quantité." (op. cit., p.33)

Cette évolution mène à reconsidérer les fondements mêmes de l'**arithmétique**. En 1861, Hermann Grassmann donne une définition de l'addition et de la multiplication des entiers et démontre leurs propriétés fondamentales (commutativité, associativité, distributivité) et, en 1888, Julius Dedekind énonce un système complet d'axiomes pour l'arithmétique comprenant une formulation précise du principe de récurrence (Bourbaki, 1984, p.38). A la même époque, les travaux de Cantor mènent à la création de la **théorie des ensembles** telle qu'on l'expose généralement aujourd'hui. Dedekind montre alors que la notion d'entiers naturels (sur laquelle reposait toute la mathématique classique) pouvait elle-même être dérivée des notions fondamentales de la théorie des ensembles. Ce changement de définition implique un développement qui va du maniement des nombres entiers au maniement des **relations** entre éléments. On peut encore signaler l'importance de la logique dans le développement des mathématiques (voir Carruccio, 1971). Les travaux de **Frege** (1848-1925) constituent **la première** tentative de fonder logiquement l'arithmétique, et donc la mathématique classique.

Ainsi, à partir de 1920-1930, en raison de l'utilisation systématique de méthodes abstraites et axiomatiques, l'algèbre ne concerne plus les particularités apparentes des objets, mais **les relations que ces objets ont entre eux:**

> "Si l'on veut par exemple énoncer une relation qui peut être définie aussi bien entre des nombres qu'entre des fonctions, cela ne peut se faire qu'en introduisant des objets qui ne sont ni des nombres, ni des fonctions, mais qui peuvent être spécialisés à volonté en nombres, ou en fonctions, ou en bien d'autres sortes d'objets mathématiques. Ce sont ces objets "abstraits" dont on fait l'étude dans ce qu'on a fini par appeler les **structures** mathématiques" (Dieudonné, 1987, p.11)

La "nature" des objets mathématiques apparaît ainsi comme un élément secondaire, puisque ce sont les relations entre ces objets qui comptent et non leurs propriétés spécifiques.

La définition de l'algèbre se modifie donc profondément et devient finalement: **"La science ayant pour objet d'étude des opérations algébriques effectuées sur les éléments de différents ensembles"** (Kostrinski, 1981) ou, selon la définition qu'en donne l'Encyclopaedia Universalis (1985): **"L'étude des structures algébriques indépendamment de leurs réalisations concrètes".** Citons encore la définition du New Encyclopeadia Britannica (Micropaedia, vol.1, 1986), dont la comparaison avec les définitions données par le mathématicien et les enseignants que nous avons interrogés nous a semblé intéressante: **"Algebra is the branch of mathematics in which the procedures of arithmetic are generalized and applied to variables quantities, as well as to specific numbers".** La même encyclopédie (Macropaedia, 1985) indique que: **"Arithmetic becomes algebra when general rules are stated regarding these operations as for example the commutative law of addition".** Ainsi l'algebre élémentaire s'occupe originairement des nombres utilisés en arithmétique, alors que l'idée actuelle de structure algébrique reconnaît l'existence d'un ensemble de règles de base qui constitue une structure axiomatique.

Ainsi, dès le début du XIXème siècle, mais surtout au XXème siècle, les mathématiques ont subi une véritable mutation par la découverte de nouveaux "objets mathématiques" tout à fait différents des "objets classiques" et atteignant un niveau d'abstraction beaucoup plus grand qu'auparavant (Dieudonné, 1987).

Le formidable développement de l'algèbre au début du XXème siècle a eu de nombreuses applications dans les branches des mathématiques tant pures qu'appliquées, ne faisant que renforcer ce qui était déjà vrai auparavant, à savoir que le développement de l'algèbre s'est effectué dans un va-et-vient constant entre la résolution de problèmes concrets et la théorie. Au niveau théorique, elle a contribué à unifier les mathématiques, au point qu'on a pu parler de la mathématique. Au niveau pratique, elle a trouvé de nombreuses applications dans le champ de la physique, des sciences naturelles et de la biologie, par exemple. Pour un panorama du champ couvert par les mathématiques actuelles, nous renvoyons le lecteur à Dieudonné (1987, pp 164 et ss).

3. Compte-rendu de l'entretien avec un mathématicien-chercheur

Avant de présenter ce compte-rendu, une importante remarque méthodologique s'impose: Il est clair que le mathématicien que nous avons interrogé a construit, au cours de cet entretien, un discours qui s'adresse à des non-mathématiciennes. Cela signifie non seulement que nos questions lui ont certainement paru très ingénues (ce qui est un moindre mal!), mais que le discours qu'il nous adresse est par nature différent d'un discours qu'il aurait adressé à des mathématiciens: ce dernier point, même s'il peut sembler évident, constitue en réalité un point crucial, puisqu'il incite notre interlocuteur à simplifier son discours pour nous le rendre compréhensible et, par conséquent, à donner une image plus monolithique des débats mathématiques passés et actuels. Ce dernier point aurait naturellement pu nous amener à renoncer, sinon à l'entretien, du moins à son compte-rendu. En tant que psychologues sociaux de la situation didactique, il nous a toutefois semblé important de faire, dans la mesure de nos possibilités et de nos connaissances, l'effort de resituer l'objet mathématique dans son contexte historique et scientifique plus large. Dans ce sens, notre compte-rendu ne saurait être qu'une approche globale des problèmes en jeu, approche qui pourrait par la suite être approfondie avec l'aide de collègues mathématiciens. Nous sommes donc tout à fait conscientes que de nombreux points soulevés au cours de ce travail mériteraient d'être approfondis et nuancés.

Le contenu de l'entretien sera synthétisé en 4 thèmes: - Peut-on définir "objectivement" l'algèbre? - Où se situe la limite entre l'arithmétique et l'algèbre? - L'algèbre commence-t-elle par l'introduction des nombres relatifs? - La recherche "pure" et la recherche "appliquée" dans le champ des mathématiques. Chaque citation de l'entretien sera accompagnée du numéro de la page et du numéro du tour de parole d'où elle a été tirée.

a) Difficultés d'une définition "objective" de l'algèbre

Avant de nous donner une définition de l'algèbre, notre interlocuteur nous a déclaré que, pour un mathématicien, il n'existe pas de définition univoque de l'algèbre:

"Chaque mathématicien a sa propre définition de ce qu'est l'algèbre, mais on peut tout de même se mettre d'accord sur un certain nombre de choses" (p.2; 15).

Plus tard dans l'entretien, à propos de la distinction entre arithmétique et algèbre, il nous dira également:

"On croit communément que la mathématique n'est pas une opinion, mais il est difficile de trouver deux mathématiciens qui soient d'accord sur ces questions, parce qu'en réalité il y a des phénomènes d'histoire personnelle, culturelle et sociale très compliqués qui interviennent, si bien que chacun se fait ses idées" (p. 11; 56).

Du point de vue mathématique, ces remarques renvoient au problème de la **preuve** dans la démonstration mathématique (Crowe, 1988; Gasser, 1989). Ces remarques sont également intéressantes pour la didactique des mathématiques, d'une part parce qu'elles contrastent avec le discours des enseignants, d'autre part parce qu'en montrant que la définition d'un savoir mathématique peut varier d'un mathématicien à l'autre (ou d'un groupe de mathématiciens à l'autre), elle nous renvoie au problème de la transposition didactique: quels sont les savoirs mathématiques que les auteurs de manuels scolaires vont considérer comme importants dans la transmission du savoir et quelle définition vont-ils donner de ce savoir? Comment les enseignants directement impliqués dans la relation didactique vont-ils à leur tour interpréter et transmettre ces savoirs? Et finalement, comment l'élève va-t-il appréhender ces savoirs en fonction de ses connaissances préalables et de ses propres conceptions du savoir mathématique? (Perret-Clermont et al., 1981).

b) Limites entre l'arithmétique et l'algèbre

La première définition que notre interlocuteur nous donne de l'algèbre pose d'emblée le problème des rapports entre l'arithmétique et l'algèbre:

"On commence à parler d'algèbre quand on commence à travailler sur des symboles, c'est-à-dire typiquement des lettres" (p.2; 15).

Il nous rappelle ainsi que jusqu'à la fin du XIXème siècle, l'algèbre était essentiellement la science de la résolution des équations. Au cours de ce siècle surtout, la définition de l'algèbre a toutefois changé:

"Au cours des siècles s'est de plus en plus développé le concept de manipulation de symboles abstraits indépendants de la signification de ces symboles. On a commencé à voir que certaines propriétés formelles, dont les lettres représentant des nombres, concernaient aussi d'autres objets mathématiques, par exemple, des vecteurs, des fonctions, des matrices, des opérateurs, etc. (3;17); C'est ainsi que s'est développée au siècle dernier, mais surtout au cours de ce siècle, une algèbre abstraite fondée sur la théorie des ensembles, c'est-à-dire on prend un ensemble abstrait, composé d'un certain nombre d'éléments, et on définit par exemple une opération d'addition. Et on dit que cette opération satisfait certaines propriétés définies axiomatiquement, la propriété de commutativité, d'associativité, l'existence d'un élément neutre, etc. (...) Au sens moderne l'algèbre est la science, l'étude, des structures algébriques, c'est-à-dire des ensembles, a priori abstraits, dans lesquels sont définies une ou plusieurs opérations. Les structures les plus connues s'appellent monoïdes, groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels, etc." (p. 3; 17).

Les différents ensembles numériques (N, Z, Q, R, etc.), au lieu d'être décrits en termes de contenus, peuvent ainsi être décrits en termes de **structure mathématique.** Chaque ensemble numérique sera ainsi défini en fonction de ses propriétés structurales (commutativité, associativité, distributivité, élément neutre, etc.). On peut décrire une structure simple, comme un monoïde, puis des structures plus complexes comme un groupe, un anneau ou un corps. Il y encore des structures plus complexes telles que les algèbres homologiques et les algèbres topologiques:

"Une structure algébrique est une structure dans laquelle sont définies certaines opérations (...). C'est l'algèbre au sens moderne. Dès le moment où tu étudies la structure d'une algèbre, tu fais de l'algèbre, mais les éléments de cette algèbre peuvent être des matrices, des vecteurs, des fonctions, etc. Quand ce sont des nombres, tu fais de l'arithmétique, tu fais aussi de l'algèbre mais dans un cas extrêmement particulier." (p.8; 40)

Cette définition de l'algèbre l'amène alors à mettre en évidence, ce que nous avons relevé dans le paragraphe concernant l'histoire des mathématiques, à savoir **l'unité** que l'algèbre a apportée dans le champ des mathématiques et de la logique:

"Aujourd'hui la logique (comme calcul des propositions), la théorie des ensembles, (comme calcul des classes) toutes les opérations et les divers théorèmes sur les ensembles, par exemple, et aussi l'arithmétique si on veut, constituent d'un point de vue logique des interprétations de certaines algèbres abstraites" (p. 8; 40)

Par conséquent, le simple fait d'utiliser des lettres ne signifie pas ipso facto qu'on est dans le domaine de l'algèbre. Pour essayer de différencier l'arithmétique de l'algèbre, notre interlocuteur se réfère à la différence entre **identité** et **équation.** Si en écrivant l'expression (a+b)-b=a, on admet que a et b sont des nombres, on est en présence d'une **identité arithmétique**, car on donne une interprétation précise aux symboles utilisés: Dans ce cas, a et b ne sont que des symboles donnés à des nombres et cette notation se distingue de (2+1)-1=2 uniquement par le fait qu'on utilise des lettres au lieu de nombres.

Par contre, si la nature de a et de b n'est pas spécifiée, on est en présence d'une **identité algébrique.** On se demandera alors s'il existe un ensemble de symboles a, b, etc. pour lequel cette identité est valable. Si l'on prend des ensembles de nombres pour lesquels la loi d'associativité est valable, cette identité sera vraie.

De même, l'expression $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ est une identité qui fait partie de l'arithmétique, lorsque, cherchant pour quelles valeurs cette identité est vraie, on déclare que a et b sont des nombres. On ne peut toutefois pas dire qu'elle ne fait pas partie de l'algèbre, car dans certaines structures algébriques, cette identité est vraie et dans d'autres (par exemple pour les matrices), elle est fausse.

Par contre, l'expression $a^2+3x+bx^2=0$ fait clairement partie de l'algèbre (comprise comme science de la résolution des équations) car il s'agit de trouver les valeurs pour lesquelles cette expression est vraie.

Il est donc faux, selon notre interlocuteur, de penser, comme nous l'ont souvent dit les enseignants interrogés, que l'algèbre coïncide avec l'introduction des lettres.

Citons notre interlocuteur lorsqu'il tente une fois encore de répondre à la question concernant la différence entre l'algèbre et l'arithmétique:

"Dans un certain sens, toutes les différentes arithmétiques (on peut parler **d'arithmétique au pluriel**), l'arithmétique des nombres naturels, des nombres entiers, sont toutes des interprétations de théories algébriques. L'arithmétique des nombres naturels est l'interprétation de la théorie des **monoïdes** [semi-groupe], l'arithmétique du calcul des fractions est l'interprétation d'un **corps** numérique, en particulier les nombres rationnels. On fait toujours de l'algèbre quand on fait de l'arithmétique, on fait toujours de l'algèbre dans des cas qui sont particuliers au lieu d'être abstraits." (p. 12; 60)

c) Peut-on dire que l'algèbre commence par l'introduction des nombres relatifs?

Selon notre interlocuteur, cette affirmation est vraie si l'on entend par "algèbre" la science de la résolution des équations. Il cite à ce propos un mathématicien du XIXème siècle, Kronecker, qui disait que les nombres naturels nous ont été donnés par Dieu et que tout le reste est l'oeuvre de l'Homme: Dans ce sens, on peut considérer que l'expansion des ensembles numériques (incluant les nombres naturels) a été effectuée pour permettre de résoudre des équations.

Exemple

$x+2=5$: $x=3$ (3 ne sort pas de l'ensemble des **nombres entiers N**)

$x+3=1$: $x=-2$ (-2 sort de N et appartient à l'ensemble plus large des **nombres relatifs** Z)

$ax+b=0$: $x=-b/a$ (b/a appartient à l'ensemble des **nombres rationnels Q**)

$x^2-2=0$ $x=+$ ou $-\sqrt{2}$ (nécessite l'introduction des **nombres irrationnels**)

$x^2+1=0$ (résolution impossible dans l'ensemble des nombres réels parce qu'aucun nombre élevé au carré ne peut être négatif, d'où l'introduction des **nombres complexes**).

Dans ce sens, les nombres relatifs peuvent effectivement être introduits pour des raisons algébriques.

Cette définition des ensembles numériques correspond toutefois à la conception de l'algèbre du XIXème siècle. La définition actuelle de l'algèbre, basée sur la notion de structure mathématique, consiste à décrire chaque ensemble numérique en fonction de ses propriétés structurales (lois d'associativité, de commutativité, de distributivité, élément neutre, élément symétrique).

Selon notre interlocuteur, il y a encore 50 ans, dans la perspective logiciste, la mathématique pouvait se définir comme un arbre dont les racines seraient constituées par la logique, le tronc par les stratifications successives de l'arithmétique, de l'algèbre, de l'analyse et de la mécanique, les branches par toutes les différentes disciplines de la mathématique pure ou appliquée. Selon lui, cette vision apparaît aujourd'hui extrêmement ingénue, car la logique comprise comme le calcul des propositions, la théorie des ensembles, les opérations sur des nombres (l'arithmétique) sont des interprétations (des particularités ou des spécificités) de différentes structures algébriques abstraites qui, dans l'algèbre moderne, s'étudient dans l'abstrait. Dans cette optique, le calcul des propositions et la théorie des ensembles apparaissent comme isomorphes.

d) L'"abstrait" et le "concret" dans les mathématiques

C'est en parlant de l'enseignement des mathématiques que nous en venons à aborder ce thème: nous nous demandions en particulier si le fait de vouloir rattacher les mathématiques à des exemples concrets, comme c'est souvent le cas dans l'enseignement, n'est pas un peu fallacieux.

En réponse à cette question, notre interlocuteur relève que cette manière de faire peut effectivement avoir quelque chose de fourvoyant dans la mesure où depuis le début du siècle, et en particulier depuis la fin de la deuxième guerre mondiale, la mathématique a connu un développement prodigieux (il dit à ce propos qu'on a produit plus de théorèmes mathématiques de 1945 à nos jours que dans tous les siècles précédents). Selon notre interlocuteur, cette énorme expansion s'explique aussi par un certain goût pour l'abstraction. Ce qui est intéressant, dit-il, est que ce développement de la mathématique pure n'a pas le moins du monde freiné le développement de la mathématique appliquée "parce qu'on a vu que ces structures tellement éthérées, tellement abstraites, trouvaient des applications intéressantes" (15;74).

Selon lui, la relation entre la mathématique pure et la mathématique appliquée est semblable au mouvement d'un pendule:

"Il faut arriver à un certain degré d'abstraction, puis une fois qu'on maîtrise l'abstraction, c'est extrêmement intéressant de voir ce qui se passe quand on retourne aux problèmes concrets. Alors d'un côté on comprend la genèse de ces concepts abstraits (...). Ensuite quand le pendule revient aux problèmes concrets, on a un regard plus profond et on réussit à résoudre un problème qu'auparavant, sans l'instrument abstrait, on ne réussissait pas à traiter. Cela s'est vu de façon éclatante au cours de ce siècle avec la géométrie (16;78) (...). C'est surprenant parce que les mathématiciens ont inventé ces structures absolument abstraites et compliquées un peu avant que les physiciens découvrent qu'elles convenaient parfaitement à la description de certains phénomènes physiques, ou même plus récemment, à la description de phénomènes des sciences sociales et économiques. Au début du siècle, personne ne pensait que la théorie des groupes puisse jamais servir à quelque chose" (16;80).

4. Conclusions

Les entretiens menés avec les 9 enseignants impliqués dans notre recherche nous avaient confrontées à une définition de l'algèbre portant sur deux idées centrales: 1°) L'algèbre commence par l'introduction des nombres relatifs; 2°) L'algèbre commence par l'utilisation de lettres au lieu de nombres.

L'entretien que nous avons rapporté a montré que ces deux affirmations constituent un point de vue possible sur l'algèbre, mais non le seul.

Ainsi, si l'on définit l'algèbre comme la science de la résolution des équations, on peut, dans une certaine mesure, dire que l'algèbre commence par l'introduction des nombres relatifs, car la résolution de certaines équations n'est pas possible sans l'expansion de l'ensemble des nombres naturels à d'autres ensembles numériques (nombres relatifs, nombres rationnels, nombres irrationnels, nombres complexes). On peut alors considérer les différents ensembles numériques comme une série d'ensembles contenus les uns dans les autres. Cependant, l'algèbre moderne définit les ensembles numériques non pas en termes de contenus, mais en termes de structures abstraites: ce qui apparaît alors comme déterminant sont les propriétés de ces structures et, dans ce sens, l'ensemble des nombres relatifs serait considéré, comme les autres ensembles, comme une structure algébrique particulière.

En ce qui concerne l'usage des lettres comme définition du champ de l'algèbre, l'entretien a montré que l'usage des lettres ne saurait constituer un critère suffisant pour définir le champ de l'algèbre. Si les lettres sont utilisées pour signifier des nombres, on se situe, du point de vue mathématique, dans l'arithmétique. Cependant, la distinction entre arithmétique et algèbre dépend de la définition donnée au terme "algèbre". Dans une vision ensembliste de l'algèbre, l'arithmétique peut elle-même être interprétée comme une structure algébrique particulière: chaque arithmétique sera alors rapportée à l'ensemble numérique particulier sur lequel elle opère et ce sont les propriétés structurales de ces différentes arithmétiques qui seront examinées.

Il faut finalement préciser que, comme nous l'a d'emblée déclaré, pour le mathématicien que nous avons interrogé, la définition de l'algèbre constitue en soi un objet de discussion entre chercheurs. Contrairement à ce que les entretiens avec les enseignants de notre recherche auraient pu suggérer, il n'y a pas, du point de vue scientifique, pas de définition univoque de l'algèbre. La confrontation entre les définitions qu'un mathématicien et des enseignants donnent de l'algèbre, ainsi que l'analyse des difficultés rencontrées par les élèves soumis à des tâches portant sur la résolution d'équations, suggèrent finalement que seuls les enseignants semblent être aisément en mesure de définir l'algèbre, probablement parce que, interpelés dans leur rôle d'enseignant (et non de mathématicien), ils tendent à ramener leur définition à celle qu'en donnent les manuels scolaires. Par contre, lorsqu'on sort du champ didactique proprement dit pour interroger les acteurs qui construisent le savoir mathématique, ou (à l'autre extrémité de la chaîne de la transposition didactique) les acteurs qui, dans le contexte de la relation maître-élève-savoir, ont pour rôle de s'approprier ce savoir, tout se passe comme si cette définition était sujette à de nombreuses interprétations.

A ce titre, l'analyse de notre entretien constitue sans doute un exemple de la modification qu'un savoir peut subir en fonction du contexte institutionnel dans lequel il est activé, des buts qui lui sont assignés et des acteurs qui y sont confrontés.

Remerciements: Nous remercions le mathématicien Michele Benzi qui a bien voulu s'entretenir avec nous, ainsi que Monsieur Denis Miéville, professeur de logique à l'Université de Neuchâtel, dont les suggestions nous ont été fort utiles.

BIBLIOGRAPHIE

a) Sur l'histoire et l'épistémologie des mathématiques

Aspray, W., Kitcher, P. (Eds) - **History and Philosophy of Modern Mathematics**, Minnesota Studies in the Philosophy of Science, volume XI, University of Minnesota Press, Minnneapolis, 1988.

Bekken, O.B. - Themes from the history of algebra, **Fagseksjon for matematikk**, Skrifter 1984, 4, Agder Distrikthogskole.

Bekken, O.B. - Readings from the Hindu arithmetic and algebra, **Fagseksjon for matematikk**, Skrifter 1984, 5, Agder Distrikthogskole.

Bourbaki, N. - **Eléments d'histoire des mathématiques**, Masson, Paris, 1960, nouvelle édition 1984.

Boyer, C.- **Storia della matematica**, Mondadori, Milano, 1980 (édition originale: John Wiley & Sons, 1968), pp 716-721.

Carruccio, E. - **Mondi della logica**, Zanichelli, Bologna, 1971. Cf chapitre 4: "Logica matematica ed algebra astratta", pp 87-95.

Crowe, M.J. - Ten misconceptions about mathematics and his history. In: Aspray, W., Kitcher, P. (Eds) - **History and Philosophy of Modern Mathematics**, Minnesota Studies in the Philosophy of Science, volume XI, University of Minnesota Press, Minnneapolis, 1988, pp 260-277.

Dieudonné, J. (et al.) - **Abrégé d'histoire des mathématiques**, volume I, Herman, Paris, 1978.

Dieudonné, J. - **Pour l'honneur de l'esprit humain**, Hachette, Collection Histoire et Philosophie des Sciences, Paris, 1987.

Encyclopaedia Universalis, Paris, 1985. Cf notation "algèbre".

Gasser, J. - **La preuve et ses concepts fondateurs. La problématique des critères logiques**. Thèse de doctorat présentée à la Faculté des Lettres de l'Université de Neuchâtel, Editions Delval (Fribourg, Suisse), 1989.

Kostrikin, A. - **Introduction à l'algèbre**, Editions Mir, Moscou, 1981 (édition originale: Nauka, Moscou, 1977). Cf chapitre premier "La genèse de l'algèbre", pp 17-25.

MacLane, S., Birkhoff, G.- **Algebra**, Mursia, Milano, 1978 (édition originale: Mac Millan, New york, 1965). Cf Prefazione pp 5-8.

The New Encyclopaedia Britannica - Micropaedia, vol.1, notation "Algebra". et "History of mathematics". Chicago, 1986, 15ème édition.

The New Encyclopaedia Britannica - Macropaedia, notation "Algebra". Chicago, 1986, 15ème édition.

b) Sur la psychologie sociale de la didactique des mathématiques

Chevallard, Y. - **Cours.** 1ère école d'été en didactique des mathématiques, Chamrousse, 1980.

Chevallard, Y. - Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, **Petit x: Journal pour les enseignants de mathématique et des sciences physiques du premier cycle de l'enseignement** secondaire, 1984, 5, 51-94.

Grossen, M, Giosué F, Golay, D. - **L'introduction de l'algèbre au premier cycle de l'école secondaire: Compte-rendu d'une recherche menée à Bologne et à Neuchâtel**, Séminaire de Psychologie, Université de Neuchâtel, juin 1989.

Perret-Clermont, A.-N., Brun, J., Conne, F., Schubauer-Leoni, M.L - Décontextualisation, recontextualisation du savoir dans l'enseignement des mathématiques à de jeunes élèves, **Interactions Didactiques**, Universités de Neuchâtel et de Genève, 1981, 1.

Schubauer-Leoni, M.L., Perret-Clermont, A.-N. - Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs, **Recherches en didactique des mathématiques**, 1980, 1, 3, 297-343.

Schubauer-Leoni, M.L., Grossen, M. - Formulations écrites de problèmes additifs et interactions sociales. Etablissement d'une typologie d'écriture et analyse de "contenu" des formulations, **Interactions Didactiques**, 1984, 5, 1-70.

Liste des publications

Rapports et documents de recherche du projet

"Représentations de savoirs scolaires"

1991	N° 1	L'introduction de l'algèbre au premier cycle de l'école secondaire.	Michèle Grossen Francesca Giosué Danièle Golay
	N° 2	Analyse des modes de questionnement dans deux entretiens avec des enseignants de mathématiques	Danièle Golay
	N° 3	Bibliographie annotée autour du thème représentations de savoirs scolaires	Nancy Bell
	N° 4	Les comportements non verbaux des maîtres et des élèves: quelles représentations?	Alain Brossard Marie-J. Liengme
	N° 5	Approche de l'univers scolaire à travers les représentations d'élèves de la "Scuola media unica" du Canton du Tessin	Percarlo Bocchi
	N° 6	Qu'est-ce que l'algèbre? Le point de vue d'un mathématicien chercheur	Michèle Grossen Francesca Giosué