ISSN 1420-8520 Novembre 2007

TRAVAUX DE LOGIQUE

Université de Neuchâtel

INTRODUCTION À L'ŒUVRE DE S. LESNIEWSKI

FASCICULE V:

LESNIEWSKI, LECTEUR DE FREGE

Nadine Gessler

CdRS

Centre de Recherches Sémiologiques
Travaux de logique
Novembre 2007

INTRODUCTION À L'ŒUVRE DE S. LEŚNIEWSKI

FASCICULE V :

LEŚNIEWSKI, LECTEUR DE FREGE

Nadine Gessler

CdRS

α η δ τ

Université de Neuchâtel

Centre de Recherches Sémiologiques
Université de Neuchâtel
Espace Louis-Agassiz 1
CH-2000 Neuchâtel (Switzerland)

SOMMAIRE

AVANT-PROPOS

C'est une vérité généralement admise que le langage est un instrument de la raison humaine, et non pas simplement un moyen d'expression de la pensée.
G. Boole

Mais penser n'est-ce pas parler ? Comment est-il possible que la pensée entre en conflit avec le langage ?
G. Frege

Le Révérend Père Bochenski était un personnage d'une autorité scientifique d'exception et une personnalité hors du commun. À plusieurs reprises, il m'a accordé quelque attention et, ensemble, nous avons parlé de l'École logique de Varsovie et plus particulièrement de Stanislaw Leśniewski qu'il avait côtoyé à de nombreuses reprises. En homme d'église, il avait été particulièrement clair avec moi, lors de notre première rencontre ; c'était à Salzbourg pendant le congrès international de la société de logique et philosophie des sciences, en 1976. *Très cher*, me disait-il, *Leśniewski, ce n'est pas mon église !* Mais généreux, il m'avait présenté Peter Simons, Hubert Hubien et Toshiaru Waragai, des égarés, tout comme moi, dans le champ d'une œuvre logique remarquable. Nous avions, ensemble, disserté et démontré sur les nappes en papier d'un café de Salzbourg, aiguisant notre appétit pour le rôle des définitions créatives et le problème de l'interprétation dans les systèmes logiques de Leśniewski.

Puis il y eu d'autres rencontres dont celle de Grenoble en 1992, à l'Université Pierre Mendès France, où en collaboration avec mon collègue Denis Vernant nous avions organisé une rencontre internationale sur le thème des logiques de Lesniewski. Ces rencontres m'ont permis d'entrer de manière plus complice dans les souvenirs et les échanges que le Révérend Père Bochenski avait construits avec Leśniewski. Je l'entends encore me dire, *Leśniewski était un être de grand talent, mais quelque peu paresseux ; il a résolu plus de cent antinomies et n'en a publiées que quelques unes !* Puis, un peu plus tard, il ajouta : *dans le fond, Leśniewski avait un niveau d'exigence extraordinaire par rapport à la précision de ses argumentations et de ses démonstrations, comme de ses lectures critiques, du reste. Rien n'était publié qui ne fût parfait, rien n'était accepté qui ne fût compris et examiné avec conscience et un examen critique infiniment scrupuleux et des plus attentifs !*

Madame Nadine Gessler fait la brillante démonstration de cette aptitude critique et sans faille mise en œuvre par Lesniewski lorsqu'il étudiait la réflexion d'un auteur. Elle procède à une véritable enquête, non pas en proposant de comparer deux paradigmes logiques très différents dans leur intention et dans leur réalisation, mais en nous offrant l'itinéraire critique précis que Leśniewski a suivi dans l'œuvre de Frege, pour en comprendre ou pour en refuser les concepts fondamentaux. Telle une scénariste douée, Mme Gessler a conçu une mise en scène toute faite de clarté, d'intrigues, de passion et de drames où l'on voit un logicien de génie quasi cheminer dans la pensée de G. Frege ; l'auditoire observe Lesniewski douter, penser, passer de non-compréhension en rejets, de questions en réponses, de respect en admiration pour l'homme par qui la contradiction arriva. On y suit notamment la critique radicale de Leśniewski à propos de la notion abstraite de classe, on voit l'acteur principal travailler avec un crayon pour nous convaincre et se convaincre du bien-fondé de ses analyses, on sent enfin un scientifique dessiner progressivement les contours des notions fondamentales qui constitueront à termes les concepts et les formes de l'œuvre de maturité qui structureront les trois systèmes logiques que sont la méréologie, l'ontologie et la protothétique.

Madame Gessler n'a pas écrit une pièce pour un seul acteur ! Subtilement, elle joue sur le temps et l'histoire, et fait intervenir d'autres protagonistes et non des moindres : Russell, Schröder, Dedekind, et même Cantor, dans le rôle d'un scientifique trahi. Et quand le rideau tombe, le public reste convaincu d'avoir assisté à la représentation d'une œuvre dans l'œuvre, l'une, une genèse, nourrissant l'autre : une histoire dans laquelle la raison prévaut et s'impose.

Ce fascicule des Travaux de Logique est le cinquième consacré à l'œuvre de Stanislaw Leśniewski et à son histoire scientifique. Il paraît après ceux consacrés à la protothétique (I), à l'ontologie (II), à la méréologie (III) et à l'œuvre de jeunesse (IV). Cette série spéciale s'achèvera par le fascicule (VI) qui portera sur la présentation de la métalangue formalisée des systèmes logiques de Lesniewski.

Denis MIÉVILLE
Directeur de l'Institut de logique de
la Faculté des lettres et des sciences humaines de
l'Université de Neuchâtel

Elle essaya même de s'imaginer à quoi peut ressembler
la flamme d'une chandelle quand la chandelle est fondue.
(Lewis Carroll)

A rien, Alice, à rien...

0. Introduction

Le présent travail vise à replacer le travail de Leśniewski sur les fondements des mathématiques dans le contexte général du début du XX^e siècle, en le confrontant et en le mettant en perspective par rapport à l'œuvre de Frege.

Confronter Leśniewski et Frege peut à première vue surprendre, tant les systèmes qu'ils ont respectivement développés divergent dans leurs conceptions et leur réalisation respective. D'un côté, nous avons Frege, père fondateur de la logique au sens moderne de science de la formalisation déductive, parvenu à ses résultats logiques et fondateurs grâce à une analyse des mathématiques. Ainsi qu'il l'écrit, relativement à sa réflexion sur la notion de nombre :

> Je partis des mathématiques [...] Je réalisai bientôt qu'une attribution de nombre faite sur la base d'une dénombrement comporte une assertion sur un concept. [...] Je fus ainsi amené des mathématiques à la logique. (1979 : 253, trad. de 1919)

De l'autre côté, nous avons Leśniewski dont l'œuvre logique s'ancre dans la volonté de résoudre *stricto sensu* l'antinomie de Russell et le refus de s'en tenir à des amendements *ad hoc* qui, à ses yeux, n'effaçaient d'aucune manière la faiblesse conceptuelle du paradigme incarné par les théories classiques des classes ou des ensembles. L'antinomie, pour Leśniewski, condamnait tout simplement la démarche conquérante des fondements des mathématiques de ses contemporains. Car toute théorie qui s'en tenait au paradigme ensembliste classique n'avait pas reconnu le problème à l'origine de l'antinomie et par lequel passait sa véritable résolution. Ce problème, c'est celui de la définition même de la classe ou de l'ensemble dont Leśniewski fit valoir qu'elle trahissait, de par son caractère abstrait, l'*intuition* du caractère concret des classes et des individus qu'elle représente.

C'est donc cette même intuition de la classe comme un être empirique – un composé de ses éléments –, que Frege n'eut de cesse de combattre dans l'élaboration de son édifice théorique, récusant à travers elle que les expressions « multiplicité », « ensemble », « pluralité » fussent aptes à nous éclairer d'une quelconque manière sur la nature du nombre, que Leśniewski mit au premier plan, en lui accordant la primauté dans l'élaboration d'un langage mathématique appelé « à décrire la réalité hétérogène du monde dans des lois aussi exactes que possible » (1989 : 33 ; 1927 : 166). Ainsi, d'un côté on nie que l'intuition puisse conduire à une logique, de l'autre on fait de cette intuition le caractère incontournable des questions liées aux fondements des mathématiques.

Sans les interdits ni les prohibitions qui furent les conséquences nécessaires du logicisme frégéen, empêché dans son aboutissement ultime de réduction des mathématiques à la logique par l'antinomie de Russell, Leśniewski développa ainsi trois théories : la Protothétique – un calcul propositionnel quantifié et élargi, l'Ontologie – un calcul extensionnel des noms d'ordre supérieur, et la Méréologie – une théorie collective des classes, cet ordre structurel étant à l'inverse de l'ordre d'apparition historique[1]. La Méréologie, conçue la première, se présenta comme le résultat direct de l'analyse de l'antinomie de Russell, effectuée sur la base de l'adoption d'une conception collective des classes dont Leśniewski montra qu'elle n'était soumise à aucune antinomie de type russellienne. Quant à l'Ontologie, et rétrospectivement la Protothétique, elles répondirent au problème des fondements logiques de la Méréologie. Leśniewski construisit avec elles un langage formel caractérisé par une puissance

1 Pour une présentation de ces théories, on consultera Miéville 1984, 2001, 2004 ; Gessler 2005.

d'expression catégorielle et d'expansion illimitée, dans le cadre duquel on peut répondre à la visée logiciste d'une définition logique des nombres. Le cadre formel de l'Ontologie permet en effet de construire l'arithmétique, en ne concédant à la logicité pure qu'un seul axiome de l'infini, et sans que cette construction soit entachée des difficultés immanentes aux démarches logicistes ouvertes par Frege et Russell, ces difficultés s'y trouvant pleinement déliées[2].

Nous retiendrons de ce qui précède que les travaux respectifs de Frege et de Leśniewski nous renvoient à deux paradigmes, divergents dans l'esprit et la conception, mais joints dans l'unité d'une intention, celle de répondre à la question des fondements des mathématiques, tandis que la caractérisation qu'ils ont proposée de la logique est pour chacun une logique entretenant avec les mathématiques un rapport de fondement et se déployant en toute rigueur.

Notre propos n'est toutefois pas de procéder à une confrontation de ces paradigmes ni d'en questionner leurs parts de succès ou d'échecs. Notre ambition, comme l'indique le titre de notre étude, est avant tout de suivre Leśniewski dans ses références à Frege dont il fut un lecteur attentif et critique. Des textes de Leśniewski, il ressort en effet clairement que l'œuvre de Frege constitua une source précieuse de réflexion, tant par son extrême méticulosité que par la profondeur de ses analyses. Leśniewski écrit à son sujet :

> *Grundgesetze der Arithmetik* de Gottlob Frege constitue à mon avis l'incarnation la plus imposante des conquêtes dans le secteur d'une solide méthode déductive, conquêtes acquises au cours de l'histoire des efforts visant le fondement des mathématiques. Cet ouvrage représente aussi pour moi la source la plus précieuse, depuis l'antiquité grecque, de ces conquêtes. Mais le système de Frege est un système contradictoire, ce qu'a prouvé, comme on le sait, Bertrand Russell, en

2 *Cf.* Canty 1967 ; Gessler, Joray, Degrange 2005.

construisant sa célèbre « antinomie » concernant « la classe des classes qui ne sont pas leurs propres éléments ». (1989 : 32 ; 1927 : 166)

Le rapport critique de Leśniewski à Frege peut être caractérisé de deux manières. La première est celle d'une position critique de la notion d'extension de concept et de son caractère paradoxal et, de manière plus générale, de la notion classique de classe ou d'ensemble. L'essentiel de cette critique prend place dans un article de 1927 intitulé « Sur les diverses manières d'entendre les termes 'classe' et 'ensemble' » (1927 : 190-206 ; 1989 : 53-66). Leśniewski s'élève dans cet article contre les conceptions classiques de la notion de classe ou d'ensemble, telles qu'elles ont été développées depuis Cantor jusqu'aux *Principia Mathematica*, en passant par les algébristes, Frege et divers auteurs de théories des ensembles. Aucun ne trouve grâce à ses yeux, si ce n'est Cantor qui, comme nous le verrons par la suite, constitue, avec sa définition « naïve » de l'ensemble, « le fond intuitif historique sur lequel naquirent les 'antinomies' » (1989 : 33 ; 1927 : 166). C'est à cette assise intuitive que Leśniewski prône un retour, sous l'angle d'une lecture pleinement collective dont la Méréologie sera le réceptacle.

Concernant Frege, Leśniewski exprime un âpre constat d'incompréhension totale à l'égard de la notion d'extension et de la priorité théorique du concept sur l'extension, tout comme à l'égard de la révision apportée par Frege à sa fameuse loi V, dans la postface du tome II des *Grundgesetze der Arithmetik* que Frege rédigea en catastrophe suite à la communication par Russell de l'antinomie. Ce premier axe de lecture de l'œuvre de Frege par Leśniewski s'inscrit ainsi dans le cadre d'une position critique radicale à l'égard de la notion classique de classe ou d'ensemble dont l'antinomie a fait surgir au premier plan les faiblesses, celles-ci rendant *de facto* irrecevable tout amendement apporté au sein du schème conceptuel classique pour préserver l'édifice mathématique. Comme l'écrit Leśniewski :

> [...] l'unique méthode de « solution » des « antinomies » est la méthode de mise en question intuitive des raisonnements ou présupposés conduisant à la contradiction. La mathématique extra-intuitive ne contient pas de remèdes contre les insuffisances de l'intuition. (1989 : 33 ; 1927 : 167)

Le deuxième axe d'approche de la pensée critique de Leśniewski à l'égard de Frege n'est plus seulement celui d'un rapport d'opposition ancré dans un refus catégorique de toute conceptualisation de la classe ou de l'ensemble qui ne serait pas de nature collective, mais davantage celui d'une lecture de la pensée critique elle-même de Frege à l'égard d'autres mathématiciens. Parmi ceux-ci, Dedekind et Schröder occupent une place privilégiée. Frege critiqua notamment leurs travaux pour la primauté qui y est accordée à une conception purement extensionnelle de la classe ou de l'ensemble avec laquelle, en acceptant que les classes ou ensembles soient données par l'intermédiaire de leurs éléments, on se voue à les définir comme des collections. Or, il pèse sur cette conception deux points problématiques, mis au premier plan par Frege : le statut de la classe vide que l'on est contraint d'inventer et l'assimilation d'un individu à la classe qui n'est composée que de lui, assimilation de laquelle résulte une confusion entre les relations d'appartenance et d'inclusion. De plus, et c'est bien là le nœud de l'attaque, cette conception souffre pour Frege d'une insuffisance théorique et ne peut se prévaloir d'aucune pertinence logique, les classes devant être fondées sur les concepts.

Le premier point, à savoir qu'il est impossible de parler de classe vide sur la base d'une définition purement extensionnelle des classes, constitue un point de rencontre. Dans ses écrits, on voit Leśniewski s'en remettre à maintes reprises à l'autorité de Frege pour exprimer avec force son rejet de la classe vide. Mais les deux auteurs ne convergent pas vers le même but et la critique en cause ne prend effet que dans le cadre des préoccupations fondatrices de chacun : la primauté du concept sur l'extension chez Frege qui permet de donner à la notion d'extension un sens autre que celui de collection et de parler d'extension nulle ; la conception collective des classes chez Leśniewski au sein de laquelle s'inscrit le rejet de la classe vide comme un « monstre théorique ».

Quant au second point, celui de l'assimilation des individus aux classes unités, il est objet de rupture radicale. La position critique de Frege à son sujet est particulièrement développée dans son article de 1895 dirigé contre l'algèbre de la logique de Schröder, « Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröder's Vorlesungen über die Algebra der Logik ». Visant à justifier dans cette étude sa théorisation logique de la classe comme extension de concept, Frege dénombre un certain nombre de difficultés et d'erreurs propres à la méthode de Schröder qui privilégie une conception collective des classes au détriment de celle les dérivant des concepts. Il écrit :

> La différence complète – ou plutôt l'incompatibilité – qu'il y a entre elles est au premier regard masqué. Ainsi voisinent deux théories des classes et des extensions, l'une grossière et informe, l'autre plus fine et la seule utilisable en logique. (1895 : 445)

Frege montre notamment qu'une contradiction surgit dans l'algèbre de la logique de Schröder par suite de l'assimilation évoquée, prouvant ainsi concrètement la nécessité de distinguer la relation d'appartenance de celle de l'inclusion et la classe unité de son unique élément. Quant à Leśniewski, soutenant l'identité entre un individu et la classe qui ne se compose que de lui, intrinsèque à une conception collective des classes, il s'oppose de fait à la position de Frege. C'est par ailleurs à la faveur d'une telle conception qu'il montre que la démonstration de Frege établissant la présence d'une contradiction dans le système de Schröder est fallacieuse.

Il nous faut souligner à quel point l'article de Frege est précieux dans notre démarche de mise en perspective de sa réflexion avec l'édifice élaboré par Leśniewski. Car, en indiquant ses désaccords et ses distances par rapport à Schröder, Frege a le mérite de procéder à un examen d'une extrême précision quant aux propriétés de la classe collective, déroulant jusqu'à leurs termes les conséquences de l'adoption d'une conception de la classe comme collection d'individus. L'exhibition des difficultés et les critiques formulées par Frege profilent d'une certaine manière ce que sera quelques années plus tard le programme leśniewskien, où les résolutions de ces difficultés – par l'acceptation de leur objet – prendront place de manière pleinement effective dans un paradigme logique se réclamant d'une primauté à accorder à une acception collective des classes et permettant de concilier l'inconciliable pour Frege, à savoir le point de vue de la classe comme collection et celui de la classe comme extension de concept.

Leśniewski va ainsi réaliser ce que Frege refuse : adopter une théorie descriptive des classes, la Méréologie, en rendant celles-ci compatible avec un langage de pure logique, l'Ontologie, dont Leśniewski dira qu'elle est

> une « logique traditionnelle » modernisée, par son contenu et sa « force » s'approchant le plus du « Klassenkalkül » de Schröder, considéré avec la théorie des individus. (1989 : 32 ; 1927 : 166.)

À travers cette confrontation des textes critiques où l'on voit Leśniewski réagir aux analyses de Frege, notre étude vise donc à saisir les divergences et les convergences entre les deux auteurs, tout en évaluant les ressemblances et points de contact que Frege, en s'opposant tout particulièrement à Schröder, trace ou suggère entre l'algèbre de la logique et l'édifice logique conçu par Leśniewski. Quant à ce dernier, c'est en ardent critique tout à son paradigme logique que nous le verrons réagir.

1. Leśniewski et la découverte du paradigme logiciste et ensembliste

1.1. La trahison de Cantor

On ne peut pas comprendre la pensée de Leśniewski sans la déployer sur la toile de fond de l'antinomie de Russell. C'est la raison pour laquelle, avant d'orienter notre propos vers la confrontation Leśniewski/Frege, nous allons examiner la manière dont Leśniewski s'empara du problème de l'antinomie. Ce fut, pour cette manière, l'adoption d'une définition collective des classes dont Leśniewski montre qu'elle échappe à l'antinomie de Russell et avec laquelle il renverse, pour ainsi dire, les théories classiques des classes ou des ensembles.

Ce renversement s'ancre dans le présupposé, implicite à toute la réflexion de Leśniewski, que les expressions de classes sont des expressions dénotantes, c'est-à-dire des noms singuliers visant à référer à un objet individuel. Une telle position est conforme, selon Leśniewski

> à la manière habituelle d'employer les mots 'classe' et 'ensemble' dans le langage courant des hommes qui ne se sont occupés d'aucune 'théorie des classes' ni d'aucune 'théorie des ensembles' et, de l'autre, fondée sur une forte tradition scientifique représentée de façon plus ou moins conséquente par de nombreux savants anciens et contemporains, et en particulier par Georg Cantor. (1927 : 191 ; 1989 : 54)

La première affirmation du passage cité ancre donc l'analyse des expressions telles que « la classe des *a* » ou « l'ensemble des *a* » dans leur usage ordinaire, avec lequel on vise à désigner une collection effective d'objets *a*. Ainsi, considérant de ce point de vue que ce sont les objets qui font la classe, il ne peut pas y avoir de classe vide. Leśniewski écrit qu'au début de ses recherches concernant l'antinomie,

> le problème des 'classes vides' n'a pas constitué [...] le thème de mes préoccupations, car j'ai tenu la conception des 'classes vides', dès ma première rencontre avec elle, comme une conception 'mythologique' parce que j'étais d'avis, sans la moindre hésitation, que, [...] si un objet est la classe des *a*, alors un objet est *a*. (1927 : 186 ; 1989 : 49)

Soit, pour l'expression formelle de cette thèse dans le langage logique de l'Ontologie :

$$\lfloor Aa \rfloor \lceil A\varepsilon \mathrm{Kl}(a) \supset \lfloor \exists B \rfloor \lceil B\varepsilon a \rceil \rceil$$ [3]

Quant à la dimension cantorienne attachée à son appréhension de la notion de classe ou d'ensemble, elle est évaluée par Leśniewski à l'aune de la proposition suivante de Cantor :

> chaque ensemble de choses distinctes peut être *considéré en lui-même comme une seule chose* dont les choses en question sont les parties constituantes ou les éléments constitutifs. (1887, cité dans Leśniewski 1927 : 190 ; Leśniewski 1989 : 53)

La classe est ainsi conçue par Leśniewski comme une unité constituée de parties, tout comme

> chacun des sons, dont une pièce de musique est l'ensemble, est, conformément à la position de Cantor, une partie constitutive de cette musique et la pièce de musique elle-même est composée des sons dont elle est l'ensemble, tout comme le tableau est composé de telles et telles parties dont il constitue l'ensemble ». (1927 : 190 ; 1989 : 53)

Si Leśniewski invoque les propos de Cantor, c'est pour mettre au premier plan « ce fond intuitif historique sur lequel naquirent les 'antinomies' », trahi selon lui dans les théories mathé-

---

3 On lit cette thèse : Pour tout A et tout *a*, si A est la classe des *a*, alors il existe au moins un B tel que B est *a*. Le choix de crochets pour marquer la quantification s'explique par le fait que la quantification dans les systèmes de Leśniewski, de nature catégorielle, joue un rôle différent de celui de la quantification dans les systèmes standards. A ce sujet, on consultera Joray 2005b ; Miéville 1999, 2005 ; Simons 1985.

matiques de ses contemporains qu'il juge déracinées de tout ancrage intuitif les rattachant à la réalité. Mais ce n'est qu'un premier pas. Car la lecture de Leśniewski, *pleinement collective*, s'accompagne d'une appréhension nouvelle de la relation de partie à tout qui n'a, elle, rien de cantorienne et rompt avec toute la tradition ensembliste. En effet, si un objet est un élément de la classe collective des *a*, cet objet n'est pas nécessairement *a* : il peut certes être un *a*, mais il peut être également une partie, un agrégat de parties, un ingrédient quelconque de l'entité collective générée par les objets *a*.

Clé du développement du paradigme leśniewskien, cette lecture est supportée par la définition de la relation d'appartenance d'un objet à une classe collective, définition qui se trouve au cœur de l'analyse de l'antinomie de Russell. Il convient donc d'examiner cette analyse.

1.2. L'analyse de l'antinomie

Avant de nous plonger dans cette analyse pour en dérouler son argumentation, un certain nombre de précisions d'ordre historique et chronologique s'imposent. C'est à partir de 1911, date de sa découverte de l'antinomie de Russell, que Leśniewski entreprend son programme de résolution de l'antinomie[4]. En 1913, il réalise une première analyse de l'antinomie qui sera publiée l'année suivante[5]. Durant la même période, il réalise une deuxième analyse qui sera, elle, publiée en 1927[6]. Enfin, il existe une troisième analyse de l'antinomie de Russell qui ne sera publiée qu'en 1949 et 1950, sous la plume de Sobocinski. Ce dernier la reconstruisit à partir de notes de cours, la version originale ayant été détruite dans l'incendie de Varsovie en

4 Leśniewski prit connaissance de l'antinomie dans l'article de Lukasiewicz sur le principe de contradiction chez Aristote, paru en 1910.

5 Leśniewski 1914a, trad. angl. dans Leśniewski 1992 : 115-128.

6 Leśniewski 1927, p. 182-189 ; trad. dans Leśniewski 1989 : 47-52.

1944[7]. Cette dernière étude se distingue des deux précédentes pour avoir été élaborée une fois achevée la construction des trois théories composant le système de fondements des mathématiques, la Méréologie, l'Ontologie et la Protothétique. Contrairement aux deux précédentes qui sont exprimées de manière informelle, c'est-à-dire dans le langage ordinaire, elle se déroule dans le formalisme propre aux théories leśniewskiennes. Ledit formalisme ne fut introduit qu'après 1920, Leśniewski ayant jusqu'alors résisté à introduire un formalisme dans ses travaux, en réaction à l'égard des théories formelles de ses contemporains qu'il jugeait, comme nous l'avons déjà signalé, dénuées de tout fondement intuitif[8]. Cette hostilité au formalisme fut en outre exacerbée par les développements induits par la présence de l'antinomie qui, selon Leśniewski, n'avaient eu pour conséquence que de nous éloigner encore davantage du primat d'une intuition concrète des classes dans l'élaboration d'un langage mathématique. Ajoutons que l'on trouve aussi dans cette analyse la démonstration de l'insuffisance de la correction apportée par Frege à sa loi V, dans la postface du tome II des *Grundgesetze.*

Concernant la question de l'hostilité de Leśniewski à l'égard du formalisme, on ne manquera pas de souligner la convergence avec Frege. Anti-formaliste notoire, Frege, en inventant la Begriffsschrift, veut que son idéographie, « un langage formulaire de la pensée pure construit d'après celui de l'arithmétique », soit apte *comme langue* à exprimer des contenus de pensée mathématique. La construction de son idéographie répond à une conception *a priori*, ancrée dans son platonisme, de même que le formalisme de Leśniewski n'est rien

7 Sobocinski 1949-50.

8 « […] je me suis décidé à introduire, dans ma pratique scientifique, un langage 'symbolique' s'appuyant sur les exemples créés par les 'logiciens mathématiques' – à la place du langage courant dont je m'étais servi jusqu'alors avec une préméditation obstinée en m'efforçant, comme tant d'autres, de le dompter logiquement et de le plier aux objectifs pour lesquels il n'a pas été créé ». (Leśniewski 1931 : 154 ; 1989 : 101-102).

d'autre qu'un instrument technique et de communication au service de l'intuition qu'il ne peut jamais remplacer ni précéder. Chez l'un comme chez l'autre, on ne peut séparer le point de vue purement formel de la déduction de celui de l'interprétation sémantique, ces deux aspects étant indissociables de la théorie logique. Deux citations sont de nature à illustrer cette convergence.
Pour Frege :

> Sans doute est-il entièrement exact que nous aurions pu tout aussi bien introduire nos règles de déduction et les axiomes de notre langue formalisée à titre de conventions arbitraires, sans mentionner nulle part la dénotation ni le sens des signes. Ceux-ci seraient alors traitées comme des pièces d'échec. (1903 : 99-100)

Et pour Leśniewski, le passage suivant, dont nous avons déjà considéré des extraits :

> Ce phénomène *[les développements induits par l'antinomie de Russell]* favorisait la disparition de sens de la différence entre les sciences mathématiques, tenues pour des théories déductives appelées à capter la réalité hétérogène du monde dans des lois aussi exactes que possibles, et les systèmes déductifs non contradictoires analogues, mais qui, tout en assurant la possibilité d'obtention sur leur terrain d'une quantité toujours croissante de nouveaux théorèmes, se distinguent tout de même par l'absence de toutes valeurs intuitives scientifiques les rattachant à la réalité. (1927 : 167 ; 1989 : 33)

Abordons maintenant les choses avec l'analyse de l'antinomie au principe de laquelle se trouve l'admission d'une version collective de la classe, dont il est montré qu'elle est indemne de tout caractère paradoxal. Nous ancrerons la réflexion dans la première étude de 1914, tout en empruntant des éléments aux deux autres pour compléter notre propos, lorsque nous le jugerons nécessaire. Il convient de préciser que cette première étude critique de l'antinomie fut par la suite reniée par

Leśniewski, jugée pour une « piètre étude exprimant *[ses]* vues sur l'‘antinomie’ de M. Russell »[9]. Ne disposant pas encore à ce stade de fondement théorique précis ni d'axiomatique de sa théorie des classes, Leśniewski y fait appel à des thèses implicites de ces théories, ce qui lui fait dire que son comportement

> était à cet égard tout à fait semblable au comportement de tous ces ‘théoriciens des ensembles’ qui n'édifient pas leurs travaux sur des fondements axiomatiques explicites ». (1927 : 186, note 1 ; 1989 : 50, note 8)

Sans doute Leśniewski fait-il ici allusion, non pas à la théorie axiomatique de Zermelo, mais à d'autres théories des ensembles de son époque dont il ne manqua pas de critiquer le manque de rigueur et les faiblesses théoriques, tout particulièrement celle liée à l'ensemble vide (*cf. infra*).

Si, en dépit de ce reniement, nous avons retenu la première étude de 1914 comme fil directeur, c'est précisément parce que, dans une situation d'« ignorance » de ce que devait être l'assise axiomatique et logique de la Méréologie, c'est elle que nous jugeons la plus explicite.

L'article de 1914 débute ainsi :

> La question de savoir si la classe des classes qui ne sont pas subordonnées à elles-mêmes ne pourra recevoir une réponse positive ou négative que s'il existe un objet qui est la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes. En effet, si un tel objet n'existe pas, toute proposition dans laquelle l'expression « la classe des classes qui ne sont pas subordonnées à elles-mêmes » apparaît comme sujet est fausse. (Leśniewski 1914 a ; 1992 : 115)

9 L'œuvre de Leśniewski se découpe en deux périodes : celle philosophique et celle logique, initiée par sa découverte de l'antinomie. Sur la première période, que Leśniewski renia par la suite, on consultera Peeters 2006.

De là, il n'y aura plus d'antinomie, parce que les deux présuppositions qui apparaissent dans sa formulation, à savoir que la classe des classes qui ne sont pas subordonnées à elles-mêmes est subordonnée à elle-même et la classe des classes qui ne sont pas subordonnées à elles-mêmes n'est pas subordonnée à elle-même, sont fausses. Reste à comprendre le fondement de l'argument ici défendu.

Une telle stratégie trouve son assise dans l'interprétation leśniewskienne de la proposition singulière, dont on trouve un premier aperçu dans un précédent article de 1913[10]. Selon cette interprétation, une proposition vraie a toujours un sujet qui dénote un objet, raison pour laquelle toute proposition qui a un sujet qui ne dénote aucun objet est fausse. Par la suite, l'Ontologie, qui sera élaborée en 1920, rendra compte de l'interprétation précise de la proposition singulière de la manière suivante. Une proposition de la forme « a est b », formellement « a ε b », où *a* et *b* représentent des noms, ceux-ci pouvant être vides, singuliers ou pluriels, est vraie si et seulement si le nom *a* désigne un objet individuel, et que cet objet est un des objets désignés par le nom *b*. Autrement dit, le nom *a* n'est ni un nom vide ni un nom pluriel – il est donc un nom singulier – et l'objet qu'il dénote est aussi un des objets dénotés par le nom *b*. Ce sont ces conditions de vérité que formalise l'unique axiome de l'Ontologie :

$$\lfloor Ab \rfloor \lceil A \varepsilon b \equiv \lfloor \exists C \rfloor \lceil C \varepsilon A \rceil \wedge \lfloor CD \rfloor \lceil C \varepsilon A \wedge D \varepsilon A. \supset C \varepsilon D \rceil \rceil \wedge \lfloor C \rfloor \lceil C \varepsilon A \supset C \varepsilon b \rceil \rceil$$ [11]

10 Leśniewski 1913c ; 1992 : 47-86.

11 Ce qu'on lit : pour tout nom A et *b*, A est parmi les *b* si et seulement si il y a au moins un C qui est A ; et pour tout C et D, si C est A et D est A, alors C est D ; et tout C qui est A est *b*. Notons l'usage de lettres capitales pour représenter des variables de noms individuels. Mais il ne s'agit que d'un usage heuristique puisque si une proposition de la forme « a est b » est vraie, alors le nom *a* est un nom singulier, conformément aux conditions de vérité d'une telle proposition.

Si l'on revient à l'analyse de l'antinomie de Russell, on comprend alors aisément pourquoi la stratégie de l'analyse de l'antinomie est de montrer qu'*il n'existe pas de classe de classes non subordonnée à elle-même*. L'expression « la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes » se révélant être ainsi un nom vide, toute proposition dans laquelle elle apparaîtra comme sujet sera fausse.

Venons-en maintenant à cette démonstration. Son moteur est constitué par la définition de la relation d'appartenance d'un objet à une classe. Cette définition, qui utilise la terminologie d'« être subordonné » pour « être élément », est la suivante[12] :

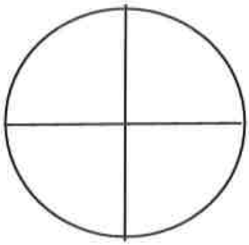
> *Un objet P est subordonné à la classe K* si et seulement si, compte tenu d'une certaine signification du terme *a*, les deux conditions suivantes sont remplies :
> 1) K est la classe des *a*.
> 2) P est *a*.

À première vue, une telle définition semble s'inscrire dans la droite lignée d'une acception distributive de la classe : la classe K est la classe des *a* et l'objet P qui en est élément est *a*, et il ne saurait en être autrement puisque, selon une telle acception, tout objet qui est élément de la classe constituée par les *a* est nécessairement *a*. Mais il n'est est rien, sinon en négligeant le *compte tenu d'une certaine signification du terme a*. C'est là précisément que s'articule la rupture avec l'appartenance ensembliste usuelle. En effet, une classe collective étant conçue comme un objet, l'objet représenté par la classe K, tout en étant la classe des *a*, peut être aussi appréhendé comme la classe d'objets différents des *a*. Autrement dit, la même classe peut être générée par des objets distributivement hétérogènes. Dans la deuxième analyse de l'antinomie, Leśniewski formulera ce dernier présupposé accompagnant sa conceptualisation de la classe en ces termes :

12 Leśniewski 1992 : 116.

> Il arrive fréquemment que tel ou tel objet soit la classe de tels et tels objets et qu'il soit simultanément la classe d'objets tout à fait différents. (1927 : 186 ; 1989 : 49)

Pour éclairer les choses face à une lecture immédiate qui pourrait être facilement dévoyée par nos habitudes ensemblistes, considérons un premier exemple, inspiré de celui proposé par Leśniewski lui-même dans son texte de 1914. Soit la figure géométrique suivante que nous appelons la sphère Q (Imaginons donc une sphère…).



Si l'on appréhende cette sphère comme un tout collectif, cette entité collective peut être vue comme la classe des quarts de la sphère Q, mais aussi comme la classe des moitiés de la sphère Q. Dès lors, si l'on se reporte à la définition proposée pour la relation d'appartenance et que l'on prend pour le terme « a » la signification de « *moitié de la sphère Q* » : *Tout objet P qui est une moitié de la sphère Q est subordonné à la classe des quarts de la sphère Q*. Les deux conditions de la définition sont en effet remplies :

1. K, soit ici Q en tant que la classe des quarts de la sphère Q, est la classe des *moitiés de la sphère Q*.
2. Tout objet P qui est une moitié de Q est une *moitié de la sphère Q*.

Pour prendre un autre exemple, cette fois de notre cru, la classe de mes chaussures et la classe de mes paires de chaussures correspondent au même tout collectif : celui-ci est généré, dans le premier cas, par le nom « mes chaussures » et, dans le second cas, par le nom « mes paires de chaussures ». Il s'ensuit que la chaussure droite que je porte en ce moment est subordonnée à la classe de mes paires de chaussures. En effet, avec pour le terme « a » la signification de « paire de chaussures », les deux conditions relatives à la définition sont remplies :

1. K, soit la classe de mes paires de chaussures est la classe de mes chaussures.
2. La chaussure droite que je porte en ce moment est une chaussure.

Dans son étude de 1914, Leśniewski ne manque pas de souligner que certains lecteurs peuvent être « choqués » par le fait qu'un objet qui n'est pas *a* soit cependant subordonné à la classe des *a*, ce qui est précisément le cas de toute moitié de la sphère Q qui, bien que n'étant pas un quart de la sphère Q, est cependant subordonnée à la classe des quarts de la sphère Q, ou de ma chaussure droite qui, bien que n'étant pas une paire de chaussure, est subordonnée à la classe de mes paires de chaussures.

Il dégage alors deux conséquences majeures de cette définition de la relation de subordination d'un objet à une classe en ces termes :

1. tout objet *n* est subordonné à la classe des objets *n*
2. il n'est pas le cas que tout objet subordonné à la classe des objets *n* soit *n*[13].

Les preuves données – et immédiates– de ces deux propositions sont les suivantes.

13 Ces deux conséquences seront exprimées sous la forme de théorèmes dans la théorie axiomatisée proposée par la suite. On trouve, dans Leśniewski 1928 : Théorème XX : Si P est la classe des *a*, alors *a* est un élément de P ; Théorème XXII : Si P est une partie de Q, alors non (pour tout R et *a*), si R est un élément d'un ensemble de *a*, alors R est un *a* (Leśniewski 1928 : 273 ; 1989 : 86) .

Proposition 1

Assumons qu'un objet P est *n* ; soit alors pour « a » le terme « n ». Compte tenu de cette signification du terme « a » :

1. la classe des objets *n* est la classe des objets *a* ;
2. P est *a*.

Puisque, compte tenu d'une certaine signification du terme « a », les deux conditions sont remplies ensemble, l'objet P est subordonné à la classe des objets *n*.

Proposition 2

Si tout objet subordonné à la classe des quarts de la sphère Q (*cf.* exemple cité *supra*) doit être un quart de la sphère Q alors, étant donné que toute moitié P de la sphère Q est subordonnée à la classe des quarts de la sphère Q, il s'ensuit qu'une moitié de la sphère Q est aussi un quart de la sphère Q, ce qui est évidemment faux. Par conséquent, l'assomption de départ, à savoir que tout objet subordonné à la classe des objets *n* est un *n* est fausse. Donc, il n'est pas le cas que tout objet subordonné à la classe des objets *n* soit *n*[14].

On notera ainsi, à la lumière de ce qui précède, que l'appréhension leśniewskienne de la classe récuse le principe d'extensionalité classique selon lequel, un ensemble ou une classe étant entièrement caractérisée par ses éléments (son extension), deux ensembles ou classes sont égaux si et seulement si ils possèdent les mêmes éléments. Si un objet est à la fois la classe collective des *a* et la classe collective des *b*, il n'en résulte pas nécessairement que les objets *a* sont les mêmes que les objets *b*. Ainsi, dans la perspective collective adoptée ici, la proposition énonçant que si un objet P est subordonné à la classe des *a*, alors P est un *a*, est fausse.

Conscient du caractère provoquant et de l'appréciation mitigée que pouvait susciter son analyse en regard de la rupture

14 Leśniewski 1992 : 122-123, pour ces démonstrations.

qu'elle constituait avec les « habitudes mathématiques », Leśniewski écrira en 1916, dans l'introduction à sa première axiomatique de la théorie des classes collectives :

> J'avoue volontiers que certains de mes théorèmes, tel le théorème XXVII *[cf ci-dessous]*, peuvent choquer les 'intuitions mathématiques' de divers penseurs plus ou moins subtils et qui apprécient l'élégance de certaines constructions théoriques, abstraction faite de savoir si des constructions contribuent dans une mesure quelconque à la saisie scientifique de la réalité ou si elles servent seulement à la justification des habitudes mathématiques régnant à notre époque et que caractérise une impotence avancée. (1916 : 12 ; cité dans Leśniewski 1928 : 261 ; 1989 : 77-78)

Le théorème XXVII en cause est précisément le suivant :

> Le théorème 'si *P* est un élément de l'ensemble d'objets *m*, alors *P* est *m*' est faux[15].

Ce « bouleversement » induit sur la relation d'appartenance d'un objet à une classe ainsi exprimé, poursuivons avec la démonstration visant à établir que toute classe est subordonnée à elle-même. On posera tout d'abord l'analogue négatif de la définition précédente, c'est-à-dire correspondant à « ne pas être subordonné à une classe ». Compte tenu de ce qui a été déjà défini, on dira que[16] :

> *Un objet P' n'est pas subordonné à la classe K* si et seulement si, pour aucune signification du terme *a*, les deux conditions ne sont remplies :
> 1) K est la classe des *a*
> 2) P' est *a*

15 Leśniewski 1916 : 24 ; cité in Leśniewski 1989 : 77 ; 1928 : 261.
16 Leśniewski 1992 : 123.

Par exemple, aucun éléphant S n'est subordonné à la classe des hommes. En effet, on ne trouve aucune signification du terme « a » avec laquelle sont remplies les deux conditions :

1. La classe des hommes est une classe d'objets *a*.
2. Un éléphant est *a*.

De même, aucun homme C n'est subordonné à la classe des têtes des hommes. Aucune signification possible du terme « a » ne répond aux deux conditions :

1. La classe des têtes des hommes est une classe d'objets *a*.
2. Un homme C est *a*.

Ceci posé, Leśniewski définit ensuite, à l'appui de la définition de la relation de subordination d'un objet à une classe, la relation de subordination d'une classe à elle-même:

> *Une classe K est subordonnée à elle-même* si et seulement si, compte tenu d'une certaine signification du terme « a », sont remplies les deux conditions :
> 1)K est la classe des objets *a*.
> 2)K est *a*.

Il donne les exemples suivants :

> – la classe des objets présents en ce moment dans ma chambre est une classe subordonnée à elle-même puisque, si l'on emploie le terme « a » pour signifier « objet présent en ce moment dans ma chambre », on a :
>
> 1) la classe des objets présents en ce moment dans ma chambre est la classe des objets *a*.
> 2) la classe des objets présents en ce moment dans ma chambre est *a* (parce que cette classe est elle-même un objet présent en ce moment dans ma chambre).
>
> – une classe de classes est une classe subordonnée à elle-même puisque, avec le terme « a » pour signifier « une classe », on a :

1) une classe de classes est une classe d'objets *a*.
2) une classe de classes est *a*.

On remarquera que ces exemples jouent sur les propriétés de la classe collective. Le premier exploite le fait qu'une classe d'objets est un objet. En l'occurrence, la notion d'objet étant ici spatio-temporellement rattachée à la chambre, la classe des objets se trouvant dans la chambre constitue une entité elle-même présente dans la chambre. D'où, les conditions étant remplies avec « objet présent dans la chambre » pour « a », cette classe est subordonnée à elle-même. Quant au second exemple, il porte en germe la propriété d'idempotence attachée à la classe collective, en d'autres termes que toute classe collective est identique à la classe d'elle-même.

Sans doute peut-on deviner à ce stade comment va se jouer la *résolution collective* de l'antinomie de Russell. Une classe étant appréhendée comme un objet, elle sera toujours subordonnée à elle-même. Il n'y aura donc pas de classe de classes non subordonnées à elles-mêmes. C'est précisément ce qui est établi dans la suite de l'analyse.

On indique tout d'abord les conditions sous lesquelles une classe n'est pas subordonnée à elle-même. Compte tenu de ce qui a été précédemment posé, on dira que[17] :

> *Une classe K' n'est pas subordonnée à elle-même si et* seulement si, pour aucune signification du terme « a », sont remplies les deux conditions :
>
> 1. K' est la classe des objets *a*.
> 2. K' est *a*[18].

Supposons alors que quelque classe K n'est pas subordonnée à elle-même. Cette classe K dont on assume l'existence est néces-

17 Leśniewski 1992 : 123s.
18 Voir à ce sujet la définition proposée dans la troisième analyse (*cf. infra*)

sairement une classe d'objets *n*. On la représentera avec l'expression Kl(n). Puisqu'elle n'est pas subordonnée à elle-même, cela signifie que :

(A) Il n'y a aucune signification du terme « a » avec lesquelles les deux conditions suivantes sont remplies :
 1) K est une classe d'objets *a*
 2) K est *a*

Par ailleurs, étant donné les propriétés de la somme logique des classes, on a pour K, qui est Kl(n) :

(B) Kl(n) = Kl(n) + Kl(n)

Le pas suivant est légitimé par le fait que l'expression « classe d'objets *n* » réfère au même objet que l'expression « classe de classes d'objets *n* ». Autrement dit, en termes symboliques, l'expression « Kl(n) » est un symbole pour le même objet que l'expression « Kl(Kl(n)) »[19]. On peut dès lors substituer « Kl(Kl(n)) » pour l'une des expressions « Kl(n) » dans la formule (B). Cela donne :

(C) Kl(n) = Kl(Kl(n)) + Kl(n)

Par ailleurs, en vertu des propriétés de la somme logique, on a :

(D) Kl(Kl(n)) + Kl(n) = Kl(Kl(n) ou n)

De (C) et (D), on obtient :

(E) Kl(n) = Kl(Kl(n) ou n)

et puisque K est Kl(n)

(F) K est Kl(Kl(n) ou n)

Leśniewski conclut :

19 Plus haut dans son analyse, Leśniewski a déjà fait remarquer que « [...] les expressions « classe d'objets *a* » et « classe de classes d'objets *a* » sont deux descriptions différentes pour le même objet, à savoir l'objet qui est l'ensemble de tous les *a* ».

(G) K est Kl(n) ou n

Substituant l'expression « a » pour l'expression « Kl(n) ou n » dans (F) et (G), on obtient

(H) K est Kl(*a*)

et

(I) K est *a*

Par conséquent, il est le cas que

(J) Pour quelque signification du terme « a » (c'est-à-dire quand le terme « a » est utilisé avec la signification de l'expression « Kl(n) ou n ») les deux conditions :
   1. K est une classe d'objets *a*
   2. K est *a*

sont remplies.

Les énoncés (A) et (J) étant contradictoires, on peut donc en conclure que l'assomption de départ, à savoir que quelque classe n'est pas subordonnée à elle-même, est fausse. Par conséquent, toute classe est subordonnée à elle-même. Aucun objet n'étant de la sorte une classe non subordonnée à elle-même, on peut en inférer qu'aucun objet n'est la classe des classes qui ne sont pas subordonnées à elles-mêmes. Les deux présuppositions entrant dans la formulation de l'antinomie étant de la sorte toutes deux fausses, il n'y a pas d'antinomie.

Cette démonstration appelle un commentaire majeur à propos de l'assimilation qui y est faite entre une classe d'objets *n* et la classe de classes d'objets *n*. Leśniewski fait un usage implicite d'une des propriétés les plus caractéristiques de la classe collective : la classe collective étant un objet, elle tombe sous la thèse qu'un objet est la classe de lui-même, soit :

> si – un et un seul – objet est P, alors P est la classe des P[20].

Ainsi, par exemple, tout comme Napoléon est identique à la classe de Napoléon, la classe des oiseaux est identique à la classe de la classe des oiseaux. Dans la théorie axiomatisée, cette propriété sera exprimée par la thèse suivante :

> Si P est la classe des objets *a*, alors P est la classe des classes des objets *a*[21].

Au final, la question « la classe des classes qui ne sont pas subordonnées à elles-mêmes est-elle subordonnée à elle-même ? » ne conduit ni à une réponse positive, ni à une réponse négative. Ceci constitue, écrit Leśniewski en 1914, la solution du paradoxe en question.

Nous conclurons sur ce point en considérant quelques éléments empruntés aux deux autres analyses de l'antinomie de Russell conduites par Leśniewski. Nous commençons avec la dernière analyse, celle publiée sous la responsabilité de Sobocinski en 1949 et 1950. L'antinomie y est examinée à la lumière de deux présupposés entrant en jeu dans sa formulation. Ces présupposés, souligne Sobocinski, « ne soulevaient aucune objection au cours de la période qui précéda l'apparition de l'antinomie » (1949 : 100s.). Le premier d'entre eux correspond au principe de compréhension dans sa forme « naturelle » et énonce que pour tout *a*, il existe une classe formée des objets *a*. Sobocinski écrit que ce présupposé « est admis, sous une forme ou sur une autre, par tous les théoriciens de la théorie des ensembles, en quoi il mérite d'être comparé avec l'axiome VII de

---

20 Cette thèse est explicitement formulée dans la deuxième analyse comme l'une des thèses sur lesquelles repose la démonstration (Leśniewski 1928 : 187 ; 1989 : 50).

21 Voir par exemple, le théorème LXXII et le théorème XCVII dans Leśniewski 1929 : 68, 73 ; 1992 : 274, 280.
L'expression formelle de ces deux thèses, exprimée avec l'opérateur de la biconditionnelle, est : $\lfloor Aa \rfloor \lceil A \varepsilon Kl(a) \equiv A \varepsilon Kl(Kl(a)) \rceil$.

Zermelo »[22]. Son expression formelle, dans le formalisme de la Méréologie, est :

$$A_1 : \lfloor a \rfloor \lceil \lfloor \exists A \rfloor \lceil A \varepsilon \, \mathrm{Kl}(a) \rceil \rceil.$$

Le second présupposé touche à la relation d'appartenance d'un objet à une classe. Il postule que pour tout *a* et B, si B est un élément de l'ensemble composé des objets *a*, B est *a*. La traduction proposée est la suivante :

$$A_2 : \lfloor ABab \rfloor \lceil A \ \varepsilon \ \mathrm{Kl}(a) \wedge A \ \varepsilon \ \mathrm{Kl}(b) \wedge B \ \varepsilon \ b. \supset B \ \varepsilon \ a \rceil.$$

Il est ensuite montré que ces présupposés entraînent une contradiction. Dans ce but, on introduit la définition suivante pour « classe qui n'est pas subordonnée à elle-même » :

$$D_1 : \lfloor A \rfloor \lceil A \ \varepsilon \ * \, .\!\equiv : A \ \varepsilon \ A \wedge \lfloor a \rfloor \lceil A \ \varepsilon \ \mathrm{Kl}(a) \supset \sim\!(A \ \varepsilon \ a) \rceil \rceil.$$

On lit le *definiendum* « A ε * » : « A est *une classe qui n'est pas son élément propre* », en d'autres termes « A est *une classe qui n'est pas subordonnée à elle-même* ». Le *definiens* nous dit en effet que pour tout *a*, si A est la classe des *a*, alors A n'est pas *a*. Précisons que la formule « A ε A » est introduite dans le *definiens* de la définition pour garantir que A est un nom singulier, ce qui est explicitement exigé par le *definiendum*.

Cette définition posée, on montre ensuite qu'il n'existe pas de classe des classes non subordonnées à elles-mêmes en procédant ainsi :
De D_1 on déduit :

$$A_3 : \lfloor A \rfloor \lceil A \ \varepsilon \ \mathrm{Kl}(*) \supset \sim\!(A \ \varepsilon \ *) \rceil.$$

De A_2 et A_3 :

$$A_4 : \lfloor Aa \rfloor \lceil A \ \varepsilon \ \mathrm{Kl}(*) \wedge A \ \varepsilon \ \mathrm{Kl}(*) \, .\!\supset \sim\!(A \ \varepsilon \ a) \rceil.$$

22 Il s'agit de l'« axiome de sélection » ou « axiome de séparation », la version affaiblie du principe de compréhension. Voir *infra*.

De A_4 et D_1 :

$$A_5 : \lfloor Aa \rfloor \lceil A \varepsilon Kl(*) \supset A \varepsilon *) \rceil.$$

Et enfin, de A_3 et A_5 :

$$A_6 : \lfloor A \rfloor \lceil \sim\!(A \varepsilon Kl(*) \rceil.$$

Or le présupposé A_1 postule que pour tout *a*, il existe la classe formée des objets *a* : $\lfloor a \rfloor \lceil \lfloor \exists A \rceil \lceil A\varepsilon\ Kl(a) \rceil \rceil$. Par conséquent, en substituant $*$ à *a* dans A_1, on obtient une thèse affirmant qu'il existe une classe des classes non subordonnées à elles-mêmes, c'est-à-dire formellement :

$$\lfloor \exists A \rfloor \lceil A \varepsilon Kl(*) \rceil.$$

Il s'avère donc que A_1 et A_6 sont mutuellement contradictoires. De là, on peut donc conclure que la présence des présupposés A_1 et A_2 est la source d'une contradiction.

Le pas suivant de l'analyse consiste alors à interroger les présupposés A_1 et A_2 à l'aune de la contradiction. Lequel d'entre eux est-il responsable de celle-ci ? Le sont-ils les deux ? Concernant le présupposé A_1, Sobocinski écrit qu'on « est tout de suite frappé par le fait que la vérité de A_1 est douteuse ». En effet, énonçant que pour tout *a* il existe une classe formée de ces objets, « on peut former des classes existant réellement et formées d'éléments contradictoires » (1949 : 104). C'est pourquoi, afin d'examiner son degré de responsabilité dans l'apparition de la contradiction, A_1 est remplacé par un présupposé plus faible, à savoir que la classe composée des objets *a* existe pour autant qu'il existe au moins un objet *a*. Ce dernier présupposé, commente Sobocinski, ne « provoque aucun doute, car tout le monde admettra que s'il existe au moins un objet du genre donné, la classe des objets de ce genre existe elle aussi- même si elle ne contient qu'un seul élément » (*Ibid.*). Formellement, il s'exprime ainsi :

$$C_1 : \lfloor aB \rfloor \lceil B \,\varepsilon\, a \supset \lfloor \exists A \rfloor \lceil A \,\varepsilon\, Kl(a) \rceil \rceil.$$

Mais ce n'est pas le présupposé A_1 qui est le fautif. Sobocinski montre en effet qu'en le remplaçant par C_1 la contradiction demeure, ce qui prouve que la cause de l'antinomie ne réside pas dans l'admission de A_1 ni de la thèse plus faible C_1. La cause, par conséquent, doit résider dans l'admission du présupposé A_2. C'est ce qui est montré dans la suite du texte. Nous ne restituons pas cette démonstration, en raison de sa longueur et des développements formels qu'elle exige. Nous nous tournerons plutôt, au sujet du second présupposé, vers la deuxième analyse de l'antinomie, celle publiée en 1927. Le présupposé en question y est exprimé dans le langage courant de la manière suivante[23] :

> A_2' : si K est la classe des *a* et P est subordonné à la classe K, alors P est *a*.

Pour construire la contradiction, Leśniewski considère une autre thèse, soit – appelons-là B :

> B :Si P est *a*, alors P est P.

Il montre alors que le présupposé A_2' et la thèse B suffisent à engendrer l'antinomie. Celle-ci est générée sur la base des substitutions suivantes :

1) Dans A_2', on substitue « la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes » à K et à P, et on substitue « classe non subordonnée à elle-même » à *a*. Ce qui donne :

   Si *la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes* est *la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes et la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes est subordonnée à la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes,* alors *la classe des classes non subordon-*

23 Leśniewski 1928 : 187-188 ; 1989 : 50-52.

nées à elles-mêmes est *une classe non subordonnée à elle-même.*

2) Dans B, on substitue « la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes » à P et « subordonné à la classe des classes son subordonnées à elles-mêmes » à *a.* Ce qui donne :

   Si *la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes* est *subordonnée à la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes,* alors *la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes* est *la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes.*

De ces deux propositions, on conclut :

> Si la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes est subordonnée à la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes, alors la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes est une classe non subordonnée à elle-même.

Ces deux propositions étant en effet respectivement de la forme $(A \wedge B) \supset C$ et $B \supset A$, on peut inférer $B \supset C$. On a pour A : « la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes est la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes » ; pour B : « la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes est subordonnée à la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes » ; et pour C : « la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes est une classe non subordonnées à elles-mêmes ».

Autrement dit, pour la conclusion précédente :

> Si la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes est subordonnée à elle-même, alors la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes est une classe non subordonnée à elle-même.

Mais, comme cela a été montré plus haut, le présupposé A_2' est faux selon l'acception attribuée, d'un point de vue collectif, à la relation d'appartenance d'une objet à une classe. Il n'est en effet pas le cas que tout objet subordonné à la classe des *a* soit nécessairement *a*. Cela entraîne que la contradiction que l'on pourrait construire à partir de ce présupposé n'est pas recevable. Ainsi, écrit Leśniewski, « cette circonstance a été la raison pour laquelle je ne pouvais pas voir dans la construction de M. Russell une 'antinomie' ». (1927 : 189 ; 1989 : 52)

Voyons maintenant ce qu'il résulte d'une telle analyse concernant l'appréciation par Leśniewski de la voie suivie par ses contemporains face à l'antinomie et, de manière générale, de la notion classique de classe ou d'ensemble.

2. Les extensions de concepts et autres ensembles

2.1. Les parades à l'antinomie

La voie des thérapies visant à parer à l'antinomie par des amendements divers ne présente *aucun* intérêt pour Leśniewski. Car dans la perspective où il se place, la seule attitude qui puisse conduire à une réelle résolution de l'antinomie est de remettre en cause le fauteur de trouble lui-même, c'est-à-dire le concept de classe ou d'ensemble et, *de facto*, les cadres théoriques dans lesquels il s'insère. Figurent à l'époque, parmi solutions proposées, celles de Frege, Zermelo et Russell. Leśniewski les évoque dans ses écrits, déniant à chacune d'entre elles toute pertinence dans la résolution du problème soulevé par l'antinomie. De manière à préciser et juger du genre de critiques formulées à leur encontre, nous allons considérer ce qu'il écrit à propos de Frege et de Zermelo. Cet examen nous conduira à dire simultanément quelques mots des dites thérapies, n'en retenant cependant que ce qui touche aux éléments thérapeutiques eux-mêmes, sans entrer dans les détails conceptuels et techniques des théories qu'ils visent à sauvegarder. Ce qui nous intéresse avant tout se rapporte à l'objection dirimante de Leśniewski à leur égard. Commençons par Frege. Leśniewski commente l'amendement apporté à son système en ces termes :

> Frege indique dans la postface du second volume de ses *Grundgesetze der Arithmetik* [...] une manière de transformer son système excluant la reconstruction de l'« antinomie » de M. Russell et due au remplacement de l'un de ses axiomes par un autre dont il pourrait penser –à juger d'après le ton de la dite postface –qu'il est privé de fondement intuitif même chez son auteur. (1927 :167 ; 1989 : 33)

Rappelons que le remplacement d'un axiome par un autre concerne l'axiome V du système de Frege. Cet axiome énonce que deux extensions de concepts sont identiques si et seulement si les concepts prennent la même valeur pour le même argument. On l'exprimera ainsi, en utilisant le symbole usuel de l'abstracteur de classe[24] :

$$(\hat{x}F(x) = \hat{x}G(x) \equiv ((\forall x)\ (F(x) \equiv G(x))\ ^{25}.$$

Permettant de passer d'un concept à son extension, cette loi est capitale aux yeux de Frege. C'est par ailleurs cette même loi sur laquelle, quelque dix ans plus tôt, il avait émis quelques réserves dans l'introduction accompagnant le premier le tome I des *Grundgesetze* :

> Une querelle ne peut naître, pour autant que je puisse le voir, que de ma loi fondamentale (V) sur les parcours de valeurs, qui n'a peut-être pas encore été énoncée expressément par les logiciens, bien qu'on

24 Les « classes » – à strictement parler les extensions de concept- sont notées ici par des abstracts composés à l'aide de l'abstracteur et du symbole fonctionnel. Nous utilisons la notation reçue des *Principia* où l'abstracteur est noté par un accent circonflexe. « $\hat{x}$ F(x) » se lit ainsi : « la classe » des x tels qu'ils tombent sous le concept F.

25 Frege 1893, § 20 : 36.

> l'ait à l'esprit quand on parle, par exemple, des extensions de concepts. Je la tiens pour purement logique. (1893 : VII)

Dans le système de Frege, cette loi fondamentale jouait un rôle analogue à celui d'un axiome de « compréhension » énoncé sans restriction dans une théorie naïve des ensembles, et avec lequel on postulerait que pour toute propriété, il existe un ensemble dont les éléments sont exactement les objets qui possèdent cette propriété. Chez Frege, cela revient à admettre pour tout concept de premier niveau l'existence de la classe des objets qu'il subsume, c'est-à-dire l'extension du concept en question. Mais l'antinomie de Russell devait précisément montrer que l'extension de concept est prise en défaut, si on considère la propriété pour une classe de ne pas s'appartenir, c'est-à-dire, en termes frégéens, la propriété d'être une extension de concept qui ne tombe pas sous le concept qui la détermine. Soit, en termes fonctionnels, la fonction :

$$F(x) = (\exists G)(\ \hat{y}G(y) = x \wedge \sim G(x)).$$

À lire Frege, on peut penser qu'il ait envisagé la possibilité qu'il existe des concepts auxquels ne correspondrait pas de classe. C'est du moins ce que suggère le passage suivant :

> Nous ne pouvons plus en général considérer la phrase « la fonction $\phi(\xi)$ a la même suite de valeurs que la fonction $\Psi(\xi)$ comme équivalente en dénotation à la phrase : les fonctions $\phi(\xi)$ et $\Psi(\xi)$ prennent toujours la même valeur sur leur arguments ». *Nous devons par ailleurs ne pas exclure la possibilité qu'il existe des concepts qui n'auraient pas d'extension, dans l'acception ordinaire du mot.* Le bien fondé de notre fonction du deuxième ordre $\varepsilon\varphi(\varepsilon)$ s'en trouve ébranlé. Et pourtant elle est nécessaire pour fonder l'arithmétique (Frege 1903 : 257 ; c'est nous qui soulignons)

Frege néanmoins ne retient pas cette éventualité, ce que fera par contre Zermelo. Il incrimine la loi V et plus exactement la

« moitié » permettant d'inférer de l'identité entre parcours de valeurs la généralité de l'identité entre valeurs de fonctions, c'est-à-dire :

$$(\hat{x}F(x) = \hat{x}G(x)) \supset ((\forall x)\, (F(x) \equiv G(x)).$$

Il l'affaiblit ainsi :

$$(\hat{x}F(x) = \hat{x}G(x)) \supset (\forall z)\, (z \neq \hat{x}F(x) \supset F(z). \supset G(z))^{26}.$$

Cette modification entraîne que, sous l'hypothèse de fonctions ayant même parcours de valeurs, on ne peut plus conclure à l'identité de leurs valeurs que pour les arguments différents de ce parcours de valeurs.

C'est de cette manière que Frege crut sauver son système de la contradiction. Et de cette solution *ad hoc* – qui au delà de son efficacité thérapeutique présumée ne pouvait recevoir de fondement logique – Frege en exprime le bouleversement sur la notion d'extension de concept en ces termes :

> Au cas où il faudrait parler généralement de l'extension de chaque concept du premier degré, il arriverait que certains concepts eussent la même extension bien que tous les objets tombant sous l'un ne tombent pas sous l'autre. Mais cela supprime l'extension du concept au sens admis du mot. On ne peut pas dire que généralement l'expression 'l'extension du premier concept coïncide avec celle d'un autre' signifie la même chose que l'expression 'tous les objets tombant sous le premier tombent aussi sous le second et réciproquement'. (Frege 1903 : 260-61, cité in Leśniewski 1989 : 62 ; 1927 : 200).

Ce dernier passage est cité par Leśniewski dans la critique qu'il développe contre la notion d'extension de concept mise en œuvre par Frege. Exprimant à son égard une incompréhension totale sur laquelle nous reviendrons par la suite, il ajoute que le trouble est à son comble si l'on espère quelques éclaircissements

26 Frege 1903 : 260.

des commentaires formulés par Frege en rapport avec la révision de la loi V. Il écrit :

> Celui qui espèrerait une aide de l'analyse des idées des 'logiciens traditionnels' sur les 'extensions de concepts', cela afin de lui faciliter la compréhension des idées de Frege en cette matière, risquerait d'être entièrement déçu par les déclarations de notre auteur écrites en rapport avec la révision à laquelle il a soumis son attitude antérieure en matière 'd'extensions de concepts', sous l'influence de l'apparition de l''antinomie' de M. Russell. (1989 : 62 ; 1927 : 201)

Après Frege, venons en à Zermelo. Contrairement à Frege, Zermelo choisit de poser des conditions restrictives sur l'existence des ensembles, telles qu'à tout concept ne correspondra pas forcément un ensemble. Il conclut en effet de la présence des antinomies que :

> [...] il s'ensuit [...] que chaque extension d'un concept ne peut pas être traitée comme un ensemble et que la définition d'usage de l'ensemble est de ce fait trop large. Mais si l'on se limite, dans la théorie des ensembles, à construire des ensembles simples et à en faire dériver de nouveaux, en vertu de certains principes incontestables [...] alors on peut éviter toutes les contradictions de ce genre. (Zermelo 1908 : 124 ; cité in Leśniewski 1989 : 62 ; 1927 : 201)

La parade de Zermelo consiste à modifier le principe de compréhension qui, dans sa forme naïve,

$$(\exists A)(\forall x)(x \in A \equiv P(x))$$

permet la déduction immédiate, si l'on prend pour P(x) la propriété $x \notin x$, de la contradiction :

$$A \in A \equiv A \notin A.$$

Ce principe est affaiblit de la manière suivante :

$$(\forall A)(\exists B)(\forall x)(x \in B \equiv x \in A \wedge P(x)).$$

C'est-à-dire que pour tout ensemble donné A et tout prédicat P(x) défini sur les éléments de A, l'ensemble B, contenant exactement ceux des éléments de A qui vérifient P(x), existe ; soit B = $\hat{x}(x \in A \wedge P(x))$. En d'autres termes, le prédicat P n'a le pouvoir de déterminer un ensemble que si les individus possédant la propriété P sont déjà éléments d'un ensemble. Ainsi, les multiplicités paradoxales, telle la classe de Russell des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes, sont rendues inoffensives, l'aménagement du principe de compréhension nous privant en effet du droit de les considérer comme des ensembles.

Mais cette solution n'est pour Leśniewski pas plus probante que celle de Frege puisqu'elle ne s'accorde pas davantage avec le primat de l'intuition dont il se réclame. Il s'exprime à son sujet en ces termes :

> La construction de M. Zermelo, architectoniquement raffinée, introduit dans la « théorie des ensembles » plusieurs prohibitions visant l'élimination des « antinomies » du terrain des mathématiques, prohibitions privées, hélas ! de fondement intuitif. (1927 : 200 ; 1989 : 33)

On notera au passage que le même verdict est réservé à la théorie des types des *Principia Mathematica* dont Leśniewski révoque les « raisons de nature intuitive » évoquées par Russell à son sujet.

De façon générale, chacune des solutions est jugée inadmissible pour la simple raison que toute solution de l'antinomie qui maintient la conception en usage de la classe ou de l'ensemble dans ses fondements est, pour Leśniewski, *a priori* fausse. Il n'y a au bout du compte qu'une seule morale à tirer de l'antinomie, celle de constater que certains présupposés entrant en jeu dans sa formulation sont faux. Et partant,

> la chose qu'il reste à faire est alors, soit de délaisser la théorie dont les présupposés se sont avérés comme contenant un élément faux, soit d'introduire de nouveaux présupposés, suffisants pour la fondation de

> la théorie et de la vérité desquels nous sommes persuadés. (Sobocinski 1949 : 97 ; Leśniewski 1927 : 167)

Nous l'avons vu, le problème naît pour Leśniewski sur le terrain du sens commun et de l'adéquation des théorisations de la classe ou de l'ensemble avec l'intuition ordinaire. La notion d'ensemble comme un objet abstrait et non concret comme le serait un agrégat, un tas, ne procède pas, selon lui, d'une légitimité intuitive. C'est la raison pour laquelle on ne peut lui accorder aucun rôle fondateur dans l'élaboration d'une théorie des classes ou des ensembles. C'est également la raison pour laquelle la question de l'efficacité des solutions proposées est « une question tout à fait indifférente », comme l'exprime le passage suivant :

> La question de savoir si le système de Frege modifié de la manière indiquée plus haut ou la « théorie des ensembles » de M. Zermelo conduiront un jour à la contradiction est une question tout à fait indifférente du point de vue du tournant intellectuel à propos de la réalité, né d'une nécessité intuitive irrésistible de croire en la « vérité » de certaines suppositions et en la « correction » de certains raisonnements conduisant, en rapport avec ces suppositions, à la contradiction. (Leśniewski 1989 : 33 ; 1927 : 167)

On comprend qu'identifier la notion de classe ou d'ensemble comme la source radicale des paradoxes, loin de tout souci de préserver les acquis mathématiques mais avec uniquement la préoccupation de procéder à une *véritable* résolution de l'antinomie, a donné aux textes de Leśniewski un ton péremptoire et une tension inégalable dans les arguments avancés contre les théories de ses confrères.

2.2. Le monstre théorique et ses inventeurs

Dirigeons-nous maintenant vers le contenu des critiques adressées conjointement à la notion mathématique d'ensemble comme « collection » ou « réunion en un tout » et à la notion logique de classe ou d'extension de concept. Un trait peut caractériser ces critiques, ou plus exactement sceller leur point d'attaque. C'est celui qui touche au statut de l'ensemble ou de la classe vide. Le problème est le suivant : comment peut-on légitimer le statut de l'ensemble ou de la classe vide si on considère qu'un ensemble ou une classe est une collection d'éléments ? Ce point est pour Leśniewski l'objet d'une véritable dénégation. La classe vide est considérée – nous l'avons déjà souligné – comme relevant d'une « conception 'mythologique' » et se retrouve qualifiée de « monstre théorique », comme l'atteste le passage suivant :

> Étant d'avis que si est un objet est la classe de tels et tels *a* (des hommes, pas exemple, des points, des cercles carrés), alors il se compose de ces *a*, j'ai toujours rejeté, conformément à la thèse [...][27], l'existence de monstres théoriques dans le genre de la classe des cercles carrés, comprenant bien que rien ne peut être composé de ce qui n'existe pas. (1989 : 58 ; 1927 : 196)

Au sujet de la classe vide, Leśniewski se fait l'écho dans ses écrits de la position critique de Frege qui n'eut de cesse de s'élever contre « la liberté d'invention » dont usent les mathématiciens, parmi lesquels sont évoqués en particulier Dedekind et Schröder. Il écrit : « Dans ses travaux, Frege a consacré plusieurs remarques intéressantes aux problèmes relatifs à la position d'après laquelle chaque classe en général de tels ou tels objets est 'composée' de ces objets. Je vais citer quelques passages empruntés à cet auteur parce que je voudrais projeter mes propres opinions concernant cette affaire sur son arrière-plan historique. » (1927 : 191 ; 1989 : 54). Parmi les passages cités,

---

27 Il s'agit de la thèse déjà évoquée au début de cette section : Si un objet est la classe des *a*, alors il existe au moins un objet qui est *a*.

se trouve un extrait de l'introduction aux *Grundgesetze* dans laquelle Frege réagit relativement à Dedekind et Schröder.
Frege écrit :

> les concepts dont on a besoin doivent être nettement arrêtés. Cela vaut en particulier pour ce que les mathématiciens souhaitent désigner par le mot 'ensemble' (*Menge*). Dedekind emploie le mot 'système' avec la même intention.

Et plus loin,

> il est particulièrement clair que selon Dedekind les éléments constituent l'effectif du système.

Et encore :

> Schröder aussi regarde, au fond, les éléments comme ce qui fait d'après lui la *classe. Une classe pouvait à proprement parler être aussi peu vide que le système chez Dedekind* (C'est nous qui soulignons).

Profitons à ce stade de rappeler ce qu'il en est respectivement des notions de système et de classe chez Dedekind et Schröder. Dedekind « définit » un système comme la réunion de choses différentes *a, b, c* ; les choses *a, b, c*..., contenues dans le système, sont appelées les éléments du système ; et réciproquement, le système est constitué de ses éléments[28]. Quant au terme de « classe » utilisé pour Schröder, il correspond à celui de « domaine », conformément à la terminologie du « calcul identique des domaines d'une multiplicité » développé par Schröder. Schröder appelle « multiplicité » une collection de choses quelconques, – objets de notre pensée en général – considérées

28 Dedekind 1988, n°1 et n°2 ; Dedekind entend par « chose » (*Ding*) tout objet de notre pensée.

comme des « éléments » ou des « individus ». Toute agrégation d'éléments est appelée un « domaine »[29].

Le texte cité de Frege se poursuit ainsi :

> ...mais le besoin naissant de l'essence de la chose se fait sentir chez ces deux auteurs de manière différente. Dedekind continue ainsi le passage précédemment cité : « Par contre, pour certaines raisons, nous voulons exclure totalement le système vide qui ne contient aucun élément, bien qu'il puisse être commode pour d'autres raisons de l'inventer ». C'est pourquoi une telle invention serait permise ; on l'abandonne seulement pour certaines raisons. Schröder ose inventer la classe vide. Tous deux sont d'accord avec les autres mathématiciens, comme il paraît, sur le fait, qu'on peut inventer n'importe quoi qui n'existe pas, voire qui est impensable, car si les éléments créent le système, alors le système se trouve supprimé en même temps que les éléments. Où passent les frontières de la liberté d'invention et tout d'abord existent-elles ? A ce sujet, on trouvera peu de clarté et d'accord. (Frege 1893 ; cité in Leśniewski 1927 : 192 ; 1989 : 54)

Dedekind ne donne pas les raisons pour lesquelles « nous voulons exclure totalement le système vide qui ne contient aucun élément ». Mais on peut supposer qu'il pense à sa conception extensionnelle d'un système qui ne permet pas, comme le relève précisément avec force Frege, d'admettre l'existence du système vide[30].

A travers ce passage, on comprend pourquoi Leśniewski s'est reconnu dans le ton polémique de Frege et l'interdiction promue de créer des objets dérogeant aux notions fondamentales mêmes des théories, en l'occurrence cet objet vide épinglé comme « monstre théorique ». Il écrit :

29 Schröder 1890, tome I : 157.

30 Notons que lorsque Dedekind définit l'intersection entre des systèmes A, B, C,... il précise qu'il peut arriver que les systèmes en question n'aient aucun élément en commun et dans ce cas « le symbole $A \cap B \cap C\ldots$ » est vide de sens. (Dedekind 1988, n° 17).

> A aucun moment je n'ai cessé d'être entièrement d'accord avec la remarque lapidaire de Frege à propos de la théorie des classes d'Ernst Schröder : « Lorsqu'(...) une classe se compose d'objets, lorsque un ensemble est l'union collective de ceux-ci, alors il (elle) doit disparaître, quans ces objets disparaissent. Lorsque nous brûlons tous les arbres d'une forêt, alors nous brûlons en même temps la forêt. Il ne peut donc pas y avoir de classe vide[31] ». (1927 : 196 ; 1989 : 58)

Toutefois, comme nous l'avons déjà fait remarquer dans l'introduction, s'il est vrai que les deux hommes se rejoignent sur ce point, c'est avec des objectifs et des motivations différentes. L'un veut « sauver » la classe vide en lui donnant ses assises logiques, l'autre la récuse définitivement. Pour l'un, la critique s'accompagne du rejet d'une conception purement extensionnelle ou collective des classes, celle-ci s'opposant au point de vue de la classe comme extension de concept, tandis que pour le second c'est l'adoption d'une telle conception qui s'accompagne du rejet de la classe vide.

Poursuivons avec le monstre. Après s'en être remis à l'autorité de Frege pour faire valoir sa propre position sur les classes, Leśniewski va exercer son œil critique sur les théories des ensembles de l'époque, faisant ainsi pleinement sienne l'actualité des remarques de Frege. Le but de l'exercice consiste à dénoncer l'invention de l'ensemble vide en révélant, dans les termes mêmes des théories, les faiblesses théoriques mises à jour par une telle invention.

Le premier à passer au crible de l'analyse est F. Hausdorff, auteur d'un manuel de la théorie des ensembles, paru en 1927. Leśniewski rapporte que cet auteur écrit, au sujet de l'ensemble :

> Un ensemble naît de la réunion en un tout de choses individuelles. Un ensemble est une pluralité pensée comme un tout. [...] Nous voulons

31 Frege 1895 : 436-7

> [...] admettre comme un fait fondamental qu'une chose *M* détermine d'une manière particulière et indéfinissable certaines autres choses *a*, *b*, *c*,... lesquelles la déterminent réciproquement, relation que nous exprimons en ces termes : l'ensemble *M* se compose des choses *a*, *b*, *c*. (cité in Leśniewski 1927 : 192-3 ; 1989 : 55)

Et plus loin, Hausdorff précise que la relation fondamentale d'une chose *a* à un ensemble *A* auquel elle appartient est désignée ainsi :

> a est un élément de A, soit dans le symbolisme introduit par Peano : $a \in A$.

Ayant explicité la notion d'ensemble, l'auteur introduit l'ensemble vide ainsi :

> Nous admettons aussi, pour des raisons d'opportunité, l'ensemble 0, ensemble *zéro* ou *vide*, qui ne contient aucun élément.

Cette admission, faite sous le couvert de l'opportunité, provoque chez Leśniewski le commentaire suivant :

> Ayant ainsi constaté qu'un ensemble naît de la « réunion » « en un tout », de certains objets nommés éléments de cet ensemble et après avoir donné des exemples d'ensembles *composés* de tels éléments de divers genres [...] M. Hausdorff en vient à « admettre » (nous pourrions dire – selon les termes de Dedekind et Frege – « inventer ») quelque chose qui doit être tout de même un ensemble bien que ce quelque chose ne possède plus d'éléments, et partant n'en soit pas composé et ne naisse pas de leur « réunion » « en un tout ». (cité in Leśniewski 1927 : 192 ; 1989 : 55)

En résumé : il serait bien difficile de faire droit à l'ensemble vide, si l'on considère que ce sont les objets qui font l'ensemble. On ne manquera pas de remarquer combien cette analyse, finement argumentée dans les termes mêmes de l'auteur, ne néglige rien !

Après l'invention en termes d'« admission » de F. Hausdorff, nous trouvons l'« introduction » de W. Sierpinski, autre auteur d'un ouvrage consacré à la théorie des ensembles. L'ensemble vide y est explicitement introduit pour résoudre la difficulté posée notamment par l'intersection : comment définir l'intersection d'ensembles sans partie commune ? L'auteur écrit :

> Chaque quantité d'ensembles possède naturellement une somme déterminée. Pour que nous puissions dire la même chose du produit et de la différence, nous devons introduire l'*ensemble vide* que nous désignerons pas 0. Ainsi la formule $AB = 0$ exprime que A et B ne possède aucun élément commun. (cité in Leśniewski 1927 : 194 ; 1989: 56)

La situation est semblable au cas précédent. Leśniewksi fait ici valoir que l'introduction de l'ensemble vide n'est pas conforme à la définition donnée par Sierpinski pour le produit d'ensembles, soit :

> Nous appelons l'ensemble composé de tous les éléments appartenant simultanément à A et B – et seulement de ces éléments – *produit* des ensembles A et B et nous le désignons pas A x B, $A.B$ ou plus simplement AB. (cité in Leśniewski 1927 : 193 ; 1989: 55)

Mais, selon cette définition, si un ensemble X est AB, alors X est composé des éléments appartenant simultanément à A et à B, ce qui signifie qu'il existe au moins un élément appartenant simultanément à *A et* B. Car, commente Leśniewski, « dans le monde où nous vivons et qui n'est pas un monde mythologique, rien ne peut être 'composé' de quelque chose qui n'existe point ». Mais, ajoute-t-il, « le fait qu'il n'existe dans le monde [...] aucun produit de deux ensembles ne possédant pas d'éléments communs n'empêche pas M. Sierpinski d''inventer' un objet prétendant être le produit de deux ensembles de ce genre ».

Le troisième et dernier théoricien des ensembles et inventeur cité est A. Fraenkel. Cet auteur introduit l'ensemble vide en ces termes :

> Pour des raisons purement formelles, à savoir pour pouvoir exprimer certains faits de manière plus simple et plus commode, introduisons encore à cet endroit un ensemble impropre, le soi-disant ensemble zéro [...]. Celui-ci est défini par le fait qu'il ne possède aucun élément ; aussi n'est-il à proprement parler aucun ensemble, mais doit néanmoins valoir comme tel et être désigné par 0. (cité in Leśniewski 1927 : 193 ; 1989 : 57)

Le problème de l'ensemble vide surgit toujours avec la question de l'intersection. A. Fraenkel écrit :

> l'intersection $\mathfrak{D}$ M = D (N, P, R...) est [...] l'ensemble de tous les éléments qui sont simultanément contenus dans tous les ensembles N, P, R.... [...] Si $M_1 = \{1, 2, 3,...\}$, $M_2 = \{2, 3, 4...\}$, $M_3 = \{3, 4, 5,...\}$, etc. et $M = \{ M_1 , M_2 , M_3 ...\}$, [...] l'intersection $\mathfrak{D}$ M égale l'ensemble zéro ; car il n'existe aucun nombre naturel, aussi grand qu'il soit, qui se trouve simultanément dans *tous* les ensembles M_1, M_2, M_3.... (cité in Leśniewski 1927 : 193 ; 1989 : 56)

Aussi Fraenkel se trouve-t-il dans la situation d'introduire l'ensemble vide en le qualifiant d'« ensemble impropre » (*cf.* premier passage cité) tout en lui assignant un statut d'ensemble véritable (*cf.* deuxième passage).

On peut cependant relever – à décharge de Fraenkel, et des autres – que l'usage de la terminologie d'« ensemble impropre » témoigne clairement de la conscience de l'abus commis en inventant l'ensemble vide et de l'impossibilité d'en disposer « naturellement » sur la base de la théorisation adoptée de l'ensemble. Mais Leśniewski n'a pas souci de l'embarras ainsi exprimé, bien au contraire. Ce qu'il retient, ce sont les faiblesses de la théorisation de l'ensemble que révèlent l'invention de l'ensemble vide et que ne fait, au bout du compte, que confirmer et renforcer l'appellation d'« ensemble impropre » !

Examinons alors comment, en utilisant la terminologie de Fraenkel, Leśniewski met en scène cet ensemble impropre qui n'est pas à proprement parler un ensemble, bien qu'il soit un ensemble. Malgré sa longueur, nous restituons *in extenso* l'argumentation de Leśniewski, car elle a le mérite de donner à voir avec quelle rigueur Leśniewski déplie ses analyses.

De la définition donnée-ci dessus de l'intersection, il s'ensuit que :

> 1. L'intersection *M* [...] est l'ensemble des éléments contenus simultanément dans chacun des ensembles M_1, M_2, M_3 ...
>
> Tenant compte de la manière dont M. Fraenkel se sert des expressions du type '*a*, *b*, *c*...' nous établissons en vertu de la citation ci-dessus que
>
> 2. si *X* est un élément appartenant simultanément à chacun des ensembles M_1, M_2, M_3 ..., alors *X* est un nombre naturel,
>
> Conformément à la fin de la citation en question nous constatons que
>
> 3. il n'y a pas de nombre naturel appartenant simultanément à chacun des ensembles M_1, M_2, M_3 ...
>
> Que nous ayons le droit d'inférer de 1, conformément à l'opinion de l'auteur, que
>
> 4. si *Y* est un élément de l'intersection $\mathfrak{D}$ M, alors *Y* est un élément contenu simultanément dans chacun des ensembles M_1, M_2, M_3 ...
>
> est pour moi hors de doute en vertu de nombreux contextes de l'ouvrage. En raison de 2 et de 3, il résulte que
>
> 5. il n'y a pas d'élément appartenant simultanément à chacun des ensembles M_1, M_2, M_3
>
> 4 et 5 permettent de voir que

6. l'intersection $\mathcal{D}$ M ne contient aucun élément.

Cela étant, considérons pour la suite de la démonstration le passage cité dans lequel est introduit l'ensemble vide.
Il en résulte que

7. si *Z* est 0, alors *Z* est un ensemble impropre.

8. si *Z* ne contient aucun élément, alors *Z* est 0,

et

9. si *Z* est 0, alors *Z* n'est pas à proprement parler un ensemble.

Nous inférons de 8 et 6 que

10. l'intersection $\mathcal{D}$ *M* est 0,

de 7 et de 10 que :

11. l'intersection $\mathcal{D}$ *M* est un ensemble impropre,

de 9 et de 10 que

12. l'intersection $\mathcal{D}$ *M* n'est pas à proprement parler un ensemble.

D'où la conclusion :

> Ainsi l'intersection $\mathcal{D}$ *M* qui est, conformément à 10, l'« ensemble zéro » (« Null Menge »), « introduit » par M. Fraenkel [...] est justement – d'après 11, 12, et 1 – l'ensemble impropre mentionné plus haut qui n'est pas à proprement parler un ensemble. (Démonstration rapportée in Leśniewski 1927 : 194-196 ; 1989 : 56-58)

Il n'y a pas grand chose à ajouter à cette analyse qui « confirme », via une rigueur argumentative sans faille, qu'il y a un problème à vouloir légitimer le sort particulier réservé à l'ensemble vide, par une définition de l'ensemble comme collection de ses éléments.

2.3. Les extensions de concepts et les classes des logicistes

1. La notion d'extension de concept chez Frege

Pour l'heure, nous ne ferons guère plus que restituer les déclarations de Leśniewski touchant à la notion d'extension de concept chez Frege, sans faire apparaître précisément la philosophie sous-jacente à la logique de Frege et sous l'autorité de laquelle Frege affirme la priorité des concepts sur les extensions qui leur correspondent. Nous reconsidèrerons la position de Frege par la suite, lorsque nous aborderons sa recension de l'ouvrage de Schröder *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, pour la mettre en perspective avec les critiques et les objections que formula Leśniewski à son égard.

Leśniewski met en avant deux passages de Frege, extraits de son étude consacrée à Schröder. Le premier en constitue la conclusion :

> L'extension d'un concept ne se compose pas des objets qui tombent sous le concept donné, comme la forêt se compose d'arbres, mais il prend appui sur le concept même et seulement sur lui. *[Ce passage est suivi de la phrase suivante, non rapportée par Leśniewski]* Ainsi le concept a-t-il une préséance logique sur son extension. (Frege 1895 : 455 ; cité in Leśniewski 1927 : 199 ; 1989 : 61)

Le second passage est celui-ci :

> Au cours de nos réflexions, nous avons indiqué encore une fois que l'extension d'un concept doit son existence non aux individus mais au concept lui-même : c'est-à-dire à ce qui est exprimé au sujet d'un objet lorsqu'il a été subsumé sous un concept. Dans ce cas il n'y a aucun scrupule à parler de la classe des objets qui sont *b*. Et alors tous les concepts vides ont maintenant la même extension [...]. Nous pouvons prendre pour *b* par exemple un objet qui n'est pas égal à lui-même. (Frege 1895 : 451 ; cité in Leśniewski 1927 : 200 ; 1989 : 61).

De la notion d'extension de concept chez Frege, Leśniewski ne manifeste qu'une incompréhension et un sentiment d'obscurité le plus total, ceux-ci étant conjointement attribués à l'extension de concept en elle-même et à la préséance logique revendiquée du concept sur son extension. Il écrit qu'il lui est impossible d'analyser « la conception de Frege traitant les classes comme des extensions de concepts du point de vue de son contenu » car il n'est pas parvenu à comprendre « de quoi parlent divers auteurs lorsqu'ils emploient l'expression 'extension de concept' ». Il dresse alors le constat suivant :

> Si la classe des *a*, conforme à ma conception des classes et composée de *a,* ne doit pas constituer « l'extension du concept *a* », alors, ne sachant pas répondre à la question de savoir ce que devrait être cette « extension du concept *a* », quand et où on pourrait en prendre connaissance, voire si quelque chose de ce genre existe dans le monde, je suis disposé à supposer timidement qu'il s'agit de quelques objets « inventés » par les logiciens pour le tourment de nombreuses générations. (1927 : 200 ; 1989 : 61)

Quant à l'affirmation de Frege soutenant que l'extension de concept « s'appuie sur le concept et seulement sur lui », il écrit qu'il « ne la comprend pas mieux que les affirmations les plus obscures des représentants de la 'philosophie romantique', autrement dit qu'*il* ne la comprend absolument pas ». À la suite de ces propos, un autre passage du premier tome des *Grundgesetze* est évoqué. Frege y précise de quelle manière l'extension de concept n'est qu'un cas particulier du parcours de valeurs d'une fonction :

> Dans le cas de fonctions dont la valeur est toujours une valeur de vérité, on peut au lieu de « parcours des valeurs de la fonction » dire « extension de concept » et il paraît opportun d'appeler précisément concept la fonction dont la valeur est toujours une valeur de vérité. (1893 : 8 ; cité in Leśniewski 1927 : 200 ; 1989 : 61-62)

C'est ainsi que Frege délimite, relativement à la notion mathématique de parcours de valeurs (Wertverlauf) d'une fonction, le champ de parcours de valeurs d'une fonction logique, c'est-à-dire l'ensemble des objets pour lesquels la fonction prend la valeur vraie. Mais Frege évite de parler d'ensemble ou de classe et s'en tient à la terminologie de « suite des valeurs d'une fonction » ou d'« extension de concept » pour marquer l'antériorité logique des concepts sur leurs extensions et parce que la notion d'ensemble comme collection d'éléments s'oppose à son approche extensionnelle du concept. Notons que c'est cette préséance logique soutenant la distinction entre extension et objets tombant sous un concept qui justifie, à elle seule, de donner à la notion d'extension un sens autre que celui de « collection », « ensemble » ou « multiplicité ». Un concept a toujours une extension, même s'il n'a pas d'objets tombant sous lui. Et, comme l'exprime le passage rapporté plus haut, on peut dès lors parler en toute légitimité d'extension attachée à des concepts vides. Ce faisant, Frege peut alors définir le nombre zéro comme « le nombre cardinal qui appartient au concept 'non identique à soi-même' ».

Pour en revenir à Leśniewski, il se défend de trouver dans les propos de Frege un quelconque éclaircissement sur l'affaire des extensions de concepts car, écrit-il, « l'expression 'parcours des valeurs de la fonction' ne m'est pas plus compréhensible que l'expression 'extension d'un concept' ».

Au-delà des aspects propres à la théorie de Frege, c'est au total l'idée classique d'extension d'un concept, autrement dit d'une multiplicité comprenant tous les objets satisfaisant la propriété définie par le concept, qui se trouve remise profondément en cause. Les objections de Leśniewski ne vont pas plus loin dans leurs développements. La seule chose qu'il fait encore valoir, comme argument négatif, est le surcroît d'obscurité induit par la révision apportée par Frege à sa loi V, suite à la communication de l'antinomie de Russell. Nous avons déjà considéré ce point dans la section 2.1, indiquant que le trouble relatif aux extensions de concepts est, pour Leśniewski, porté à son comble avec la correction de Frege et les propos qui l'accompagnent.

Que retenir de ce qui précède ? Tout d'abord une attitude de critique radicale, imputable au fossé séparant les conceptions propres au cadre logico-mathématique ensembliste de celles qui accompagnent les propres convictions de Leśniewski, bien plus qu'aux difficultés que présentent la notion d'extension de concept chez Frege. Il est indéniable que Leśniewski ignore délibérément le but poursuivi par Frege et ne cherche en aucune manière à discuter la position centrale qu'occupe la notion d'extension de concept dans sa théorie, à savoir celle de permettre d'aller du concept au nombre. Ses commentaires ne sont guidés que par l'opposition irrémédiable qu'il y a entre le point de vue de Frege et le sien *en matière de classes*. C'est la raison pour laquelle Leśniewski n'est pas « sensible » – pour dire les choses ainsi – aux traits de convergence entre la théorie logique de Frege et la sienne *en matière d'extensions*, malgré leurs divergences conceptuelles. Nous discuterons ce point dans la dernière partie de notre étude. On verra alors que si les extensions de concepts et non les classes ou ensembles répondent au requisit logique de Frege, le traitement extensionnel proposé par l'Ontologie réalise aussi, en des termes propres et hors de toute contrainte ontologique, le programme d'un traitement logique des extensions qui ne sont pas assimilées à des classes ou des ensembles.

2. La « no-class theory » des Principia Mathematica

Dans les *Principles* Russell écrit, décrivant le rapport entre l'extension en tant que multiplicité et l'extension en tant qu'unité : « Sans un objet qui soit une unité [a single object] pour représenter une extension, les mathématiques s'écroulent » (1903, § 489). On touche là au cœur du malheur qui frappa les logicistes classiques et se déroula autour de la notion de classe comme une, le *Wertherlauf* de Frege, et conduisit Russell à la théorie des fictions logiques, portée par la technique des définitions contextuelles. C'est avec une telle technique, attestant qu'un certain type d'expression fonctionnant en apparence comme une unité de signification est en fait un symbole incomplet, que Russell fit face au problème crucial de la représentation de la classe comme multiple[32]. Les classes étant traitées comme des commodités linguistiques, des objets fictifs, il n'y a rien qui résiste à la nominalisation, et le problème en cause se trouve effacé.

Dans la pratique, les choses vont s'incarner ainsi. Les symboles de classes sont rangés parmi les symboles incomplets, c'est-à-dire les symboles « auxquels on n'attribue pas une signification isolément, mais qui sont seulement définis en certains contextes »[33]. Les définitions contextuelles permettent de transformer des énoncés contenant certains symboles en énoncés qui ne les contiennent pas, de sorte que l'entité dénotée par le symbole, lorsqu'il est isolé, apparaît comme une fiction. Cela signifie que si un symbole peut être défini contextuellement, il est éliminable de la théorie et que la question du statut ontologique de l'objet qu'il semblait dénoter n'a tout simplement pas à être posée. C'est ainsi que les classes sont réduites à de simples manières de parler ou des fictions logiques. Les *Principia Mathematica* donnent la définition contextuelle suivante de la classe :

$$f\{\hat{z}\,(\Psi z)\} =_{\mathrm{df}} (\exists\Phi)[(\forall x)(\Phi!x \equiv \Psi x) \wedge f(\Phi!\hat{z})]$$

Définition *20.01

32 La classe comme multiple n'est pas un sujet logique possible. Il faut donc la munir d'un représentant, car compter, c'est-à-dire dénombrer des classes de classes, exige que les classes soient des unités, des entités, pour le dire autrement quelque chose dont on puisse parler.

33 Whitehead et Russell 1927, 66 ; Russell 1989 : 309.

Ce qu'on définit n'est pas le symbole de classe « $\hat{z}$ (Ψz) » isolément mais une expression de la forme « f{$\hat{z}$ (Ψz)} » où f indique un contexte possible pour le symbole en question, soit typiquement : « x $\in$ … ». Les auteurs des *Principia* écrivent que « la proposition *[i.e. le contexte à paraphraser]* doit pouvoir être analysée de telle sorte que ce qui était le sujet grammatical ait disparu ». L'idée qui préside ainsi à la définition contextuelle des classes est qu'un contexte extensionnel pour un symbole de fonction permet de faire « comme si » l'extension de la fonction était l'objet du discours.

Résumons les étapes préliminaires nécessaires à l'élaboration de cette définition. Toute fonction propositionnelle a un argument détermine une classe, considérée comme la totalité des arguments qui satisfont la fonction. Deux fonctions propositionnelles sont dites formellement équivalentes quand « elles sont équivalentes pour chaque argument possible, i.e. quand n'importe quel argument qui satisfait l'une satisfait l'autre et *vice-versa* »[34] (formellement, avec pour deux fonctions quelconques $\Phi \hat{x}$ et $\Psi \hat{x}$: $(\forall x)$ $(\Phi x \equiv \Psi x)$. Dans ce cas, il est possible de dire que ces fonctions ont la même extension. On considèrera alors « l'extension comme un objet, appelé classe, que l'on suppose être le sujet de tous les énoncés équivalents portant sur les différentes fonctions propositionnelles équivalentes ».[35] Mais cela suppose que l'on a affaire qu'à des fonctions extensionnelles. En effet, la définition de l'équivalence formelle ne peut prétendre valoir pour les fonctions intensionnelles. Par exemple, la valeur de vérité de la proposition « Je crois que tous les hommes sont mortels » peut être le vrai tandis que celle de la proposition « Je crois que tous les animaux rationnels sont mortels » peut-être le faux, si je crois que le Phénix est un animal rationnel immortel.

34 1927 : 72 ; 1989 : 18.
35 1927 : 74 ; 1989 : 320.

Les auteurs des *Principia* proposent alors une méthode permettant de dériver, à partir de toute fonction de fonction, y compris intensionnelle, une fonction de fonction nécessairement extensionnelle. La méthode est la suivante. Si la fonction de fonction initiale est $f(\Phi!\hat{z})$, la fonction dérivée que l'on écrit « $f\{\hat{z}(\Psi z)\}$ » répond à la définition suivante : « il y a une fonction prédicative qui est formellement équivalente à $\Psi\hat{z}$ et qui satisfait f ». (1989 : 320)

Notons que ce procès de définition de la classe applique l'axiome de réductibilité, introduit pour faire face à la complexification qu'introduit la théorie ramifiée des types avec les jugements dans lesquels on a affaire à des notions telles que « toutes les propriétés de a » ou « toutes les fonctions qui sont vraies pour l'argument a ». Conformément au principe du cercle vicieux, il faut spécifier l'ordre des fonctions, sans quoi elles génèrent des totalités illégitimes. Mais ce qu'on veut, c'est pouvoir parler de « toutes les fonctions », quel que soit leur ordre, pour les attribuer à l'individu *a*. L'axiome de réductibilité vient alors nous assurer que pour n'importe quelle fonction donnée, quel que soit son ordre, il existe une fonction prédicative formellement équivalente, c'est-à-dire coextensive. En langage symbolique, cet axiome se note ainsi :

$$(\exists f)(\forall x)(\Phi x \equiv f!x) \qquad \text{*12.1 Axiome des classes}$$

Autrement dit, si une propriété quelconque vaut pour une collection d'individus, il existe un prédicat déterminé qui vaut pour la même collection. Ainsi, « les a-classes forment une totalité légitime, dérivée de celle des fonctions prédicatives de *a* ». (1927, Introduction, III, § 3)

L'extensionalité de la fonction dérivée étant ainsi assurée, on peut alors considérer cette fonction comme une fonction de l'extension déterminée par la fonction $\Psi\hat{z}$ et garantie par l'équivalence formelle de $\Psi\hat{z}$ avec $\Phi!\hat{z}$. Ainsi, si l'on considère la fonction intensionnelle précédente, « je crois que tous les hommes sont mortels » considérée comme une fonction de la fonction « x est humain », la fonction dérivée sera : « il existe une fonction formellement équivalente à la fonction « x est humain » et telle que je crois que tout terme qui la satisfait est mortel ». La valeur de vérité de cette fonction dérivée ne sera pas modifiée lors de la substitution de « x est un animal rationnel » à « x est mortel », même si je crois que Phénix est un animal rationnel et immortel. (Russell 1991 : 345-346)

Sur la base de ce qui précède, on arrive à la définition * 20.01 de la classe. On lit « $\hat{z}(\Psi z)$ » dans « $f\{\hat{z}(\Psi z)\}$ » comme « la classe déterminée par le fonction $\Psi\hat{z}$ », mais ce que l'on appelle « classe » est simplement l'extension de la fonction dérivée. Quant au symbole de classe, il est éliminable au profit de la formule complexe développée dans le *definiens*. Le terme de « classe » n'introduit donc dans le calcul aucune entité nouvelle, tandis que la classe est réduite à une extension pure de fonction.

Nous n'avons fait que présenter sommairement les choses. Notre intention ne se voulait pas aller au delà d'un examen rapide de l'intention nominaliste des *Principia Mathematica* et de la stratégie par laquelle, en rangeant les symboles de classe parmi les symboles incomplets, c'est-à-dire contextuellement éliminables, la théorie fait l'économie des objets d'ordre supérieur que sont les classes et dispense de tout engagement ontologique à leur égard.

Tournons-nous maintenant vers les critiques formulées par Leśniewski à l'égard de cette théorie des classes. Ces critiques se concentrent autour d'un passage de l'ouvrage de Whitehead et Russell dans lequel est résumé, de manière très explicite. le sort réservé aux classes. Nous le citons dans son intégralité, en dépit de sa relative longueur.

Les symboles de classes, comme ceux des descriptions, sont dans notre système des symboles incomplets : leurs *usages* sont définis, mais eux-mêmes sont supposés ne rien vouloir dire du tout. C'est-à-dire que les usages de ces symboles sont définis de telle sorte que, quand le *definiens* est substitué au *definiendum*, il ne reste aucun symbole qui puisse être supposé représenter une classe. Aussi les classes, dans la mesure où elles sont introduites, ne le sont que comme des commodités purement symboliques ou linguistiques, et non comme des objets authentiques tels que le sont leurs membres lorsque ce sont des individus.

C'est une vieille querelle que celle de savoir si la logique formelle devrait s'intéresser principalement aux intentions ou aux extensions. En général, les logiciens dont la formation fut surtout philosophique ont pris part pour les intensions alors que ceux dont la formation fut surtout mathématique se sont prononcés pour les extensions. Les faits semblent les suivants : alors que la logique mathématique exige les extensions, la logique philosophique refuse d'apporter autre chose que des intensions. Notre théorie des classes reconnaît et réconcilie ces deux faits apparemment opposés en montrant qu'une extension *(laquelle n'est autre chose qu'une classe)* est un symbole incomplet dont l'emploi acquiert toujours sa signification à travers la référence à une intension.

Dans le cas des descriptions il a été possible de prouver qu'elles sont des symboles incomplets. Dans le cas des classes nous ne connaissons aucune preuve aussi bien déterminée, quoique des arguments plus au moins probants peuvent être tirés de l'ancien problème de l'Un et du Multiple*. Cependant il n'est pas nécessaire pour notre propos d'affirmer dogmatiquement que les classes n'existent pas. Il nous est seulement nécessaire de montrer que les symboles incomplets que nous introduisons comme symboles représentant des classes donnent toutes les propositions pour lesquelles les classes pourraient être jugées essentielles. Une fois ceci montré, le pur principe de l'économie des notions primitives conduit à n'introduire ces classes que comme des symboles incomplets.

*Ces arguments se ramènent en peu de mots à ceci : S'il existe un objet tel qu'une classe, alors il doit être, en un certain sens, un objet. Cependant c'est uniquement de classes qu'on peut prédiquer *plusieurs*. C'est pourquoi si nous admettons les classes comme objets, nous de-

> vons supposer que le même objet peut être à la fois un et multiple, ce qui semble impossible. (Whitehead et Russell 1925 : 71s. ; cité in Leśniewski 1989 : 63 ; 1927 : 202-3)

La première partie de cet extrait inscrit donc les symboles de classe parmi les symboles incomplets et justifie l'application à leur égard de la définition d'usage qui, comme nous l'avons explicité, rend compte de manière purement contextuelle de la signification des symboles incomplets en paraphrasant dans le *definiens* le contexte où il semble que l'on fasse référence à des entités, de sorte que toute référence à ces entités ait disparu.

La deuxième partie mentionne le vieux conflit autour de la question de savoir si la logique formelle est extensionnelle ou intensionnelle, les logiciens de l'extension étant plutôt mathématiciens, tandis que les logiciens philosophes restent attachés au point de vue de l'intension. Dans les *Principia Mathematica*, écrivent les auteurs, le traitement des extensions comme des symboles incomplets réconcilient ces deux points de vue – l'intension étant fondamentale.

Dans la troisième partie, les auteurs « avouent » qu'il n'a pas été possible de prouver que les classes sont réellement des fictions symboliques, bien que l'on puisse puiser des arguments dans le vieux problème de l'Un et du Multiple. Et ils précisent que le refus d'affirmer l'existence des classes ne s'assimile pas à l'affirmation dogmatique qu'elles n'existent pas. Comme l'écrira par la suite Russell dans son *Introduction à la philosophie mathématique* : « Nous restons simplement agnostiques à leur égard ; nous disons comme Laplace : 'Je n'ai pas besoin de cette hypothèse'. » (1991 : 341)

Les commentaires de Leśniewski tiennent en trois points dont la conclusion sera celle d'un constat d'inintelligibilité des explications données par Whitehead et Russell. Au sujet du deuxième passage touchant à la vieille querelle du conflit des points de vue de l'extension et de l'intension, Leśniewski relève que si les auteurs font usage d'expressions dans lesquelles apparaissent des symboles de classes, traitées comme des commodités linguistiques ou symboliques, ils ne s'expliquent pas sur ce qu'est une classe au sens admis par eux, c'est à dire comme extension de concept.

Il souligne également que, bien qu'ils n'aient pu prouver l'inexistence des classes,

> les auteurs ne croient tout de même pas qu'un objet soit une classe au sens donné et tiennent tout à fait sérieusement compte de l'argument affirmant dans l'astérisque que [...] si nous admettons les classes comme objets, nous devons supposer que le même objet peut être à la fois un et multiple, ce qui semble impossible. (1989 : 64 ; 1927 : 203)

Enfin, le dernier point fait apparaître que si les auteurs refusent d'admettre l'existence d'objets qui sont des classes – au sens admis plus haut, ils n'ont aucun doute quant à l'existence d'objets qui sont des symboles de classes. Par ailleurs, ajoute Leśniewski, ils abondent en façons de parler qui ont pour seul effet d'obscurcir leur position. L'attaque se cristallise à ce stade autour du fait que l'expression « une extension (laquelle est la même chose qu'une classe) est un symbole incomplet » doit signifier la même chose que « le symbole de l'extension (laquelle est la même chose qu'une classe) est un symbole incomplet ». Il s'ensuit le commentaire qu'une telle chose, prise à la lettre,

> peut éveiller chez le lecteur un soupçon, en désaccord avec la réalité, relatif à la considération par les auteurs, à certains moments, non seulement des 'symbols for classes' mais encore des classes elles-mêmes comme 'incomplete symbols', donc comme 'genuine objects' d'un genre particulier. (*Ibid.*)

C'est donc de ce qui précède que découle le constat d'inintelligibilité posé par Leśniewski. Il écrit ne pas comprendre ce que Whitehead et Russell entendent par « classe » ni par « extension » et ainsi ne pas savoir « de quels objets ils examinent l'existence ou l'inexistence, lorsqu'ils considèrent l'existence ou l'inexistence des objets qui sont 'des classes' ». De là s'ensuivent les propos suivants qui scellent ensemble les critiques dirigées contre Frege et les auteurs des *Principia*. On en appréciera le ton :

> En reconnaissant dans l'odeur caractéristique qui me parvient des classes de MM. Whitehead et Russell comme dans celle que dégagent les 'extensions de concepts' de Frege, l'odeur des spécimens mythiques provenant de la riche galerie des objets 'inventés', j'aurais tendance à épouser les doutes des auteurs sur le fait que des objets qui seraient de telles 'classes' existent dans le monde. (1989 : 65 ; 1927 : 205)

Quel regard porter sur ces critiques ? Elles sont la marque d'une divergence profonde, ancrée tout comme pour Frege dans la conceptualisation de la classe propre à Leśniewski. Les *Principia* font valoir un procédé de définition contextuelle de la classe, celui-ci ayant pour finalité d'exclure les expressions de classe de la catégorie des noms propres en se dispensant de toute hypothèse quant à leur existence, alors que, pour Leśniewski, les expressions de classe sont des noms singuliers désignant des « objets authentiques », au contraire de ce qui est affirmé dans le premier passage de l'extrait rapporté.

Quant aux difficultés relevées et qui ont partie liée avec le traitement des classes comme des symboles incomplets, il faut bien avouer – à la défense des auteurs des *Principia* – qu'elles ne sont guère contournables au vu de l'intention nominaliste qui supporte la théorie des fictions logiques, à savoir effacer l'apparence référentialité de ces symboles. Mais il n'est pas de l'intention de Leśniewski de reconnaître le bien-fondé, ou pour le moins l'efficacité thérapeutique de ce nominalisme instrumental, au vu des problèmes qu'il s'efforce de surmonter, nominalisme dont les auteurs durent s'accommoder, faute de mieux. Les critiques formulées prennent place à l'extérieur de la construction logique des *Principia* et sont *exclusivement* dirigées par les convictions de Leśniewski au sujet du statut et de la nature des classes. Et, tout comme pour Frege, elles ne révèlent aucune trace de velléité d'une confrontation des édifices respectifs pour en discuter la similarité de certains traits, fussent-ils ancrés dans des conceptions logiques profondément différentes, ni d'une caractérisation explicite des difficultés qui se trouvent déliées dans le paradigme leśniewskien.

On ne peut manquer toutefois de reconnaître un point de ressemblance que suggère immédiatement le rapprochement des deux édifices, pour autant que l'on « oublie » le point de vue sur les classes porté par la Méréologie pour se tourner vers le langage logique dont elle est redevable. L'Ontologie est elle aussi une « no-class theory », en ce sens que l'on n'y trouve pas de classes distributives, à la différence majeure que cette éradication ne nécessite aucun stratagème ni ne répond à aucune difficulté, mais réalise naturellement, *via* les modes formels spécifiques à la théorie, le projet d'un traitement purement distributif des extensions.

Pour finir, nous considèrerons un dernier passage cité par Leśniewksi, extrait de l'*Introduction à la philosophie mathématique* de Russell. Ce dernier résume clairement la situation en ce qui concerne le refus par les logicistes d'une conception purement extensionnelle des classes, c'est-à-dire comme des collections d'objets.

> Nous ne pouvons pas prendre les classes de manière purement extensionnelle comme de simples tas ou conglomérats. Si nous voulions essayer de le faire, nous trouverions impossible de comprendre où peut bien se trouver une classe comme la classe vide, laquelle n'a pas d'éléments du tout et ne peut pas être tenue pour un 'tas' ; il nous serait aussi très difficile de comprendre qu'une classe qui n'a qu'un

> élément ne soit pas identique à celui-ci. Je n'ai pas l'intention d'affirmer ou de nier qu'il y ait des entités telles que les 'tas'. En tant que logicien mathématique je ne suis pas appelé à avoir une opinion à ce sujet. Tout ce que je maintiens c'est que, s'il existe des choses comme des tas, alors nous ne pouvons pas les identifier aux classes composées de leurs constituants. (Russell 1919 : 183 ; cité in Leśniewski 1989 : 65 ; 1927 : 205)

Cette variation sur le thème du tas est tout à fait exemplaire des rapports conflictuels qu'entretient Leśniewski avec les théories des classes de ses contemporains logicistes. D'un côté, le problème de la classe vide et celui de l'assimilation d'une classe-unité à son seul élément sont des arguments en faveur du refus d'une conception collective des classes ; de l'autre, ils sont solidaires de cette même conception, à laquelle est accordée une absolue primauté dans l'élaboration d'une théorie des classes.

Ainsi que le souligne Leśniewski, la terminologie de Russell est en désaccord total avec la sienne. Si l'on suit le passage cité, « le fait qu'un objet *P* soit un 'tas' de tels ou tels *a*, composé de tous les *a*, ne serait pas encore pour M. Russell un motif suffisant pour affirmer que l'objet *P* est une 'classe' ». Or,

> [...] conformément à l'emploi que je fais des termes 'ensemble' et 'classe' ainsi que compte tenu de la manière de se servir du terme 'tas' dans le langage courant [...], je peux toujours dire du 'tas' de n'importe quel *a* qu'il est un ensemble de *a* et du 'tas' des *a* composé de tous les *a* qu'il est la classe des *a*. [...] Si je ne me trompais pas en supposant, en raison du passage cité plus haut, que la classe de tels ou tels *a*, au sens de M. Russell, se composerait, si elle existait, des *a* en tant que ses '*constituants*', alors il serait impossible que la classe des a, au sens de Frege, laquelle ne se compose prétendument pas des *a*, fût simultanément la classe des *a*, au sens de M. Russell. La difficulté de comprendre la différence entre le 'tas' des *a* et la 'classe' des *a*, si les deux existaient, et si l'un et l'autre se composait de tous les *a*, est pour moi d'une difficulté insurmontable. (1927 : 205 ; 1989 : 65-66)

Ces commentaires sont étonnants ! Ils le sont pour la lecture dévoyée des propos de Russell par la conception collective dont Leśniewski se réclame et qui ne fait pas cas de la construction logique dont les propos en question sont solidaires. Mais ils le sont aussi pour la lucidité tenace avec laquelle Leśniewski dénonce, toujours à l'aune de sa propre position sur les classes, les confusions et incompréhensions provoquées par la lecture des textes des logicistes et qui, il faut bien le concéder, témoignent d'une défaillance profonde portée par leur paradigme.

3. Regards sur Frege, critique de Schröder

Le cœur de ce chapitre bat au rythme de l'article de 1895 de Frege dirigé contre l'algèbre de la logique de Schröder, « Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröder's Vorlesungen über die Algebra der Logik »[36]. Ce texte est fondamental, tant pour la perspicacité et la précision exemplaires dont Frege y fait preuve que la lecture critique qu'en fit Leśniewski. Comme nous l'avons indiqué au début de notre étude, Frege y reproche à Schröder de placer au premier plan la notion d'extension, de telle sorte que l'on ne peut avoir des classes qu'une conception agrégative. Il dénombre dans la méthode de Schröder un certain nombre de difficultés, parmi lesquelles l'impossibilité de disposer de la classe vide et celle résultant de l'assimilation des classes unités aux individus qui les composent. Finalement, le but de sa critique est de faire valoir sa propre conception des classes, à savoir que, en matière de logique, l'extension ne peut se dire que d'un concept, ce dernier ayant une primauté de droit sur la première. Quant à Leśniewski, c'est

36 Dans ce qui suit, nous nous approprions les propos de Frege sans indiquer leur référence exacte dans l'article. Par contre, nous indiquons celles concernant Schröder dont nous transcrivons en note le texte original correspondant aux traductions en français données dans le texte.

en tant qu'ardent défenseur de sa théorie des classes collectives qu'il apparaît comme lecteur critique du texte Frege, tout à la fois complice et pourfendeur, au gré des convergences et divergences entre sa position et celle de Frege.

Schröder se trouve ainsi au milieu d'un débat dans lequel les protagonistes – dont chacun n'a rien à envier au ton polémique de l'autre – visent à confirmer, sans contestation possible, la validité de leur théorie. C'est pourquoi il nous est apparu juste, et également nécessaire, de lui donner dans un premier temps la parole, en mettant l'accent sur les éléments clefs et la méthode qui guident la construction de son algèbre de la logique. Sans l'esquisse de cette dernière, il est en effet difficile de mesurer pleinement la portée de l'analyse critique développée par Frege ainsi que celle de Leśniewski à l'égard de cette analyse.

Ce chapitre sera scandé en deux mouvements. Nous commencerons par donner un aperçu de l'algèbre de la logique de Schröder tout en incluant, au fil de la lecture de texte de Frege, les commentaires de ce dernier ainsi que les réactions de Leśniewski à leur sujet. Ensuite, à la lumière de l'appareil critique ci-dessus mentionné, nous procèderons à une confrontation des trois théories, afin d'essayer de saisir et d'évaluer, au-delà des différences de méthode et des positions affichées de chacun, leurs points de coïncidences et d'écarts. Nous confronterons ainsi, non seulement Frege et Leśniewski, mais également Leśniewski et Schröder *via* Frege en insistant sur les affinités que Frege, dans sa recension critique de l'algèbre de la logique de Schröder, rend manifestes entre cette dernière et l'édifice logique élaboré par Leśniewski.

3.1. Le calcul des domaines de Schröder : présentation générale

Dans le tome I de ses *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Schröder développe ce qu'il appelle un « calcul identique des domaines d'une multiplicité » *[Identischer Kalkül mit Gebieten einer Mannigfaltigkeit]*. L'adjectif « identique » a pour but de distinguer ce calcul du calcul arithmétique ordinaire auquel Schröder emprunte les notations usuelles. Ce calcul est susceptible de recevoir plusieurs interprétations, parmi lesquelles on trouve le calcul des classes, le calcul des propositions ou encore la théorie des groupes[37]. C'est l'interprétation logique en termes de classes qui est au cœur de la recension critique de Frege et, partant, de notre étude.

Il faut noter – ce que Frege ne manque pas de faire également– que la démarche de Schröder est « parasitée » dès le départ par des considérations logiques et qu'il n'est pas toujours facile de faire la part exacte des choses, entre calcul et logique. Cela est dû au fait que Schröder développe tout d'abord longuement son intention d'élaborer une algèbre de la logique avant d'en venir à la présentation même du calcul des domaines et, ensuite, à son interprétation en termes de classes.

Schröder entend par « domaine » un ensemble d'individus appartenant à une multiplicité, et par « multiplicité » une collection « de choses quelconques – objets de notre pensée en général – considérées comme des '*éléments*' ou des '*individus*'. Ces derniers peuvent être donnés d'emblée dans leur totalité (ou dans une de leurs parties) mais aussi être simplement précisés conceptuellement (dans une autre partie ou dans leur totalité) d'une manière ou d'une autre ». (1890 : 246) En d'autres termes, toute agrégation d'éléments de la multiplicité est appelé un domaine.

La relation fondamentale entre domaines est la relation d'inclusion. Schröder l'appelle *subsomption* et la représente par le symbole €. Ainsi, la proposition a € b où les lettres *a* et *b*

37 Schröder 1890 : 160. Notons qu'à strictement parler, l'interprétation en termes de calcul des domaines est une interprétation parmi les autres. Mais Schröder ne déroule pas jusqu'à son terme la nature proprement abstraite de son calcul, même s'il s'approche au plus près de l'idée d'un calcul indépendant de ses interprétations.

représentent des domaines, exprime que le domaine *a* (le domaine du sujet) est contenu *[enthalten]* dans le domaine *b* (le domaine du prédicat)[38].

Le signe de l'égalité « = » dans une proposition telle que « a = b » exprime que les termes *a* et *b* sont des noms pour le même objet de pensée[39]. Schröder fait ici explicitement usage du terme de « nom », dans un sens que l'on trouve aussi chez Frege et Leśniewski, et qu'il faut entendre comme chez Leśniewski au sens large : toute expression nominale, simple ou composée, porteuse d'une fonction référentielle singulière est assignée à un nom propre.

Le calcul repose sur deux principes *[Grundsatzen]*, en référence à la relation fondamentale de subsomption. Ils en déterminent les propriétés de réflexivité – tout domaine est inclus dans lui-même – et de transitivité – si un domaine est inclus dans un second, et celui-ci dans un troisième, alors le premier est inclus dans le troisième. Soit :

Principe I : a € a (cette proposition se lisant « a est a »).

Principe II : si a € b et b € c, alors a € c [40].

L'identité entre deux domaines *a* et *b* , symbolisée « a = b », est définie par la conjonction de a € b et b € a[41].

À ces deux principes, s'ajoutent les définitions duales de deux domaines particuliers, 0 et 1 :

Def_0 : 0 € a

Def_1 : a € 1

---

38 Schröder 1890 : 159. « Als erste Beziehung, welche zwischen zwei Gebieten *a* und *b* bestehen kann, fassen wir nun im identischen Kalkül die Beziehung der *Subsumtion* : *a* € *b* in's Auge, die uns ausdrücken wird, *dass das Gebiet a (das « Subjektgebiet ») sich dem Gebiete b (dem « Prädikatgebiet ») einordne, dass a in b enthalten sei.* »

39 *Ibid.* : 128.

40 *Ibid.* : 168 et 170. Schröder parle du principe II en termes de règle syllogistique d'inférence.

41 *Ibid.* : 184.

Schröder parle de zéro identique *[identische Null]* et de un identique *[identische Eins]*[42]. 0 est donc un domaine qui est contenu dans tout domaine de la multiplicité, tandis que 1 est un domaine dans lequel est contenu tout domaine de la multiplicité. Sans en spécifier pour l'heure les difficultés qu'ils recèlent, notons déjà que ces objets sont au cœur du débat à venir.

Ensuite sont introduits le produit identique *[identische Multiplikation]* et la somme identique *[identische Addition]* entre domaines. Notées respectivement « ab » et « a + b », ces opérations correspondent à ce que nous appelons communément l'intersection et la réunion. Elles sont définies ainsi :

Def($_x$) : c € ab signifie que c € a et c € b.

Def($_+$) : a + b € c signifie que a € b et b € c[43].

Ces éléments introductifs exposés sans plus de commentaires, tournons-nous maintenant vers la question du rapport de ce calcul des domaines à son interprétation dans le domaine logique, en tant que calcul des classes. Comme indiqué, nous nous référerons à l'article de Frege de 1895, tout en considérant les réactions qu'il provoque chez Leśniewski.

3.2. Du calcul des domaines à la logique

1. La classe universelle

Il nous faut tout d'abord préciser le point de départ de l'étude critique de Frege, ce que nous n'avons pas encore fait. Il s'agit du refus par Schröder que le domaine 1 soit assimilé, dans son algèbre de la logique, à la classe universelle de Boole, c'est-à-dire « l'Univers [...] la seule classe où l'on trouve tous les indi-

42 *Ibid.* : 188. Il s'agit chez Schröder des définitions Def (2_x) et Def (2_+).

43 *Ibid.* : 196-97. Soit pour Schröder les définitions Def(3_x) et Def(3_+).

vidus qui sont éléments d'une classe *quelconque* »[44]. D'après Schröder, « une classe aussi vaste, et pour ainsi dire ouverte de toutes parts » se révèle être un objet paradoxal, en ce sens qu'elle est source de contradictions et ne saurait donc pas être admise *telle quelle* au sein de l'algèbre de la logique. C'est ce que Schröder prétend démontrer et face à quoi il propose un amendement, avec lequel il restreint les conditions d'interprétation de 1. Mais la démonstration est fallacieuse, même si l'affirmation du caractère paradoxal de la classe universelle est correcte, comme devaient le montrer par la suite Zermelo et Russell en exhibant le paradoxe des ensembles ou classes qui ne sont pas éléments d'eux ou d'elles-mêmes. Quant au remède proposé par Schröder, il s'apparente à une théorie simple des types. Celle-ci est toutefois prise en défaut en raison de l'assimilation que fait Schröder entre les classes unités et les individus qui les composent, comme nous l'examinerons en détail avec Frege.

La tâche que se fixe dès lors Frege, dans l'article, est de montrer que le calcul des domaines ne peut pas prétendre conduire à la logique, comme le pense Schröder. S'il peut surgir de l'univers de discours de Boole une contradiction, c'est parce que Schröder, en cherchant à rejoindre la logique par un calcul des domaines accordant la primauté à une conception extensionnelle, a franchi implicitement les limites de celui-ci sans se rendre compte que, ainsi, « voisinent deux théories des classes et des extensions, l'une grossière et informe, l'autre plus fine et la seule utilisable en logique », selon les propos de Frege que nous avons déjà cités (1895 : 453). Formulée autrement, l'appréciation de Frege est que

44 « the only class in which are found all the individuals that exist in any class .» (Boole 1854 : 47)

> le calcul des domaines, loin d'être d'une quelconque utilité pour la logique, ne peut que détourner de la bonne route. (1895 : 445)

Examinons donc de quelle manière Schröder s'est perdu en chemin[45].

2. Les domaines comme des classes collectives

Restons pour un moment encore dans le calcul des domaines où on a affaire à une conception qui fait de l'extension une collection, un agrégat ou une multiplicité. Il est alors loisible, comme le remarque Frege, de substituer au terme de « domaine » celui de « classe », compris dans le sens de *classe collective*. La relation fondamentale de « subsomption » n'exprime alors que le rapport d'une partie à un tout.

> Nous pourrions dire « classes » à la place de « domaines », si nous prenons les classes comme des touts collectifs, tel une forêt, par exemple, et ne les mettons pas en relation avec les concepts. [...] Ce que M. Schröder appelle « inclusion » ou « subsomption » n'est ici, à proprement parler, rien d'autre que la relation de partie à tout, comprise de telle manière qu'un tout peut être traité comme une partie de lui-même. (1895 : 434)

Cela étant, Frege poursuit son analyse en déroulant jusqu'à leur terme les conséquences de cette approche collective. Il observe que si l'on appréhende une classe comme un tout collectif, à l'image d'une forêt ou d'une armée, « il n'est pas nécessaire de disposer des termes « élément » ou individu » *[c'est-à-dire au sens qui est le leur sous une conception distributive de la classe]*. La divisibilité d'une classe peut être envisagée *ad infinitum*[46] ». Par exemple, si seuls les individus soldats sont membres de la classe distributive des soldats de l'armée, en re-

45 Frege n'a, quant à lui, pas aperçu derrière l'analyse de Schröder l'ombre d'un paradoxe à venir.

46 Frege 1895 : 434.

vanche, soldats, compagnies, régiments et toute collection arbitraire de chacun d'eux ou de leurs parties sont éléments de la classe collective des soldats de l'armée.

Frege souligne à ce stade que l'usage des termes de « classe » ou de « multiplicité » est propice à obscurcir les limites du terrain sur lequel on se situe. Car, de par l'utilisation fréquente de ces termes en liaison avec un mot-concept, comme lorsqu'on parle par exemple de « multiplicité de points » ou « de multiplicité d'arbres », une dimension logique est introduite. Or, la notion d'extension entendue comme une collection, et qui est celle du calcul des domaines, ne nous autorise pas à associer les extensions aux concepts et – ce sera le nœud de la discussion à venir – nous met dans l'impossibilité de parler d'extension nulle. C'est pourquoi Frege juge qu'il serait préférable d'éviter les termes de « multiplicité », « classe », « élément », « subsomption » et d'utiliser en lieu et place de celui de « multiplicité » quelque chose comme « domaine principal ». En marquant ainsi l'axe purement extensionnel, on éviterait de glisser de manière de manière implicite vers une lecture en termes de concept.

La discussion qui précède demande de s'arrêter sur l'interprétation des domaines en termes de classes collectives définies comme des touts composés de parties. Car ce que Frege dessine dans son analyse, c'est le portrait de la classe collective telle qu'elle est mise en œuvre dans la Méréologie de Leśniewski. Considérons à ce titre la définition de la classe collective que l'on trouve dans la première axiomatique de la Méréologie, publiée en 1916.

> Df_{Kl} : Pour tout A et *b*, A est la classe des *b* si et seulement si trois conditions sont remplies :
>
> I. A est un objet.
>
> II. Chaque b est élément de A.

III. Si C est un élément de A, alors il existe un élément de C qui est élément d'un b.

Ainsi que le relève Frege, là où n'a comme éléments, avec la classe distributive des objets *a*, que les *a*, en revanche avec la classe collective des *a,* on a comme éléments n'importe quelle partie, agrégat de parties, pour le dire autrement n'importe quel ingrédient de l'entité collective générée par les objets *a.* Cette divisibilité à l'infini, qui ne saurait se heurter qu'à des éléments atomiques, est portée par la clause III de la définition. Pour reprendre l'exemple d'une armée de soldats proposé par Frege, si A est la classe collective des soldats de l'armée en question, on trouve comme éléments, parmi ce tout collectif, certes les soldats (clause II), mais également n'importe quel élément, au sens méréologique d'ingrédient. Si l'on prend comme élément C la collection de trois soldats du 1er régiment – à supposer qu'il y en ait plusieurs– on trouve bien un élément de C, par exemple la tête d'un des soldats, qui est élément d'un soldat, en l'occurrence celui à qui appartient la tête (clause III).

3. Les individus sont des classes

Schröder assimile tout individu à une classe, celle qui ne contient que cet individu, et toute classe contenant plusieurs individus est également assimilée à un individu.

> Un individu peut être désigné comme une classe qui ne contient que cet individu. Chaque objet de pensée peut être défini comme un tel individu. [...] Mais également tout classe qui contient plusieurs individus peut aussi être représentée comme un objet de pensée, et donc comme un individu (dans un sens où cet individu est « relatif » à des classes d'un niveau supérieur)[47].

47 Schröder 1890 : 148. Und auch *ein* Individuum mögen wir bezeichnen als eine Klasse, welche eben nur dieses Individuum selbst enthält. [...] Auch jene Klasse aber, die selber eine Menge von Individuen umfasst, kann wieder als ein Gedankenking und demgemäss

Ce point de vue est conforme avec une appréhension purement extensionnelle des classes, ce qu'exprimait Russell dans les propos considérés plus haut :

> Nous ne pouvons pas prendre les classes de manière purement extensionnelle comme de simples tas ou conglomérats. Si nous voulions essayer de le faire [...] il nous serait [...] très difficile de comprendre qu'une classe qui n'a qu'un élément ne soit pas identique à celui-ci.

L'identification des classe singulières à leur unique élément n'est pas problématique quand on en reste à un pur calcul des domaines, mais elle le devient avec l'appropriation de ce calcul comme une logique des classes. On verra Frege partir en guerre contre elle tandis que Leśniewski la défendra avec force car, si une telle assimilation ruine de l'intérieur la logique de Schröder, elle est constitutive de la théorie collective des classes.

4. L'interprétation proprement dite en termes de classes

S'agissant de la lecture des domaines en termes de classes collectives, Frege a montré ce qu'il en découlait quant à l'appréhension de la notion d'élément, l'interprétation distributive ne pouvant plus être tenue pour inhérente. Jusqu'à ce stade, les traits constitutifs de ce calcul, ancré dans une conception purement extensionnelle ou agrégative, sont cohérents, à la restriction près cependant de l'introduction du 0, le domaine vide, dont la légitimité est contestable. Il constitue en effet une entorse à un point de vue collectif des domaines puisque, si ce sont les objets qui font le domaine, on ne peut pas disposer de domaine vide. Mais Schröder a besoin du domaine vide. En effet, si deux domaines n'ont pas de partie commune, le produit identique – l'intersection – ne sera pas définie. Suite à l'introduction du produit et de la somme identique, Schröder écrit :

auch als ein « Individuum ». (im weiteren Sinne, z. B. « relativ » in Bezug auf höhere Klassen) hingestellt werden.

> Ici on voit pour la première fois une raison à l'introduction des symboles 0 et 1, telle qu'elle a été faite avec la définition 2. Le fait qu'on ajoute des symboles à la multiplicité des domaines [...] se justifie par le fait qu'on peut maintenant parler toujours de a.b et a+b. Relativement au produit a.b, cela est possible seulement par l'introduction du 0 [...]. Si nous n'avions pas le 0, cela ne serait pas le cas. C'est la mission et le mérite du zéro que de pouvoir produire cela[48].

Comme l'écrit Frege dans son introduction aux *Grundgesetze*, « Schröder invente son zéro et s'empêtre dans de grandes difficultés » (1893 : 3 ; trad. in Belna 1996 : 343). Ce sont ces difficultés que Frege exhibe et qui constituent le fil rouge de son analyse où la traduction du zéro identique du calcul des domaines par la classe vide est l'expression même de l'impasse dans laquelle Schröder s'est engagé, en introduisant une classe au sens d'extension de concept, *dans un calcul des domaines qui ne peut la recevoir.*

Que se passe-t-il avec l'interprétation en termes de classes ? Les lettres *a*, *b*, etc., attribuées pour les domaines, sont maintenant interprétées comme des classes, c'est-à-dire comme des concepts pris en extension. Le signe de l'inclusion qui, dans la proposition a € b, exprimait précédemment une relation de partie à tout entre le domaine *a* et le domaine *b*, correspond maintenant à la copule « est » ou « sont ». La proposition a € b est ainsi lue « a est b » ou « tous les a sont b » et Schröder appelle maintenant *a* le concept-sujet et *b* le concept-prédicat.

Relevons d'emblée la confusion qui peut naître d'une telle lecture. En faisant correspondre le signe « € » à la copule, le danger est grand, en lisant une subsomption a € b comme « a est

48 Schröder 1895 : 197. « Hier tritt zum ersten mal ein *Beweggrund* zutage, der für die Einführung der Symbole 0 und 1 spricht, wie sie mittelst Def(2) vollzogen worden. Die zuziehung dieser Symbole zu der Mannigfaltigkeit der Gebiete hat nämlich [...] dass num von a.b und a+b stets gesprochen werden kann. In Bezug auf das Produkt *ab* wird dies durch die Einführung der 0 [...]. Hätten wir nicht die 0, so wäre es nicht der Fall ; es ist die Mission und das Verdienst der Null, dass sie dies bewirkt .»

b », de confondre la relation d'inclusion entre classes avec celle de l'appartenance d'un objet à une classe, cette dernière relation n'étant pas marquée par Schröder qui ne dispose que du symbole €. Schröder n'a pas échappé à cette confusion, comme nous aurons l'occasion de le vérifier.

Ce que va dès lors montrer Frege, c'est que la démarche de Schröder donne lieu à des méprises. L'entrée en scène du concept suppose des distinctions qui sont superflues dans un pur calcul des domaines qui n'exige que la relation de partie à tout, mais qui deviennent nécessaires dans le champ de la logique. Il faut en effet distinguer entre la relation de subsomption d'un objet à un concept et celle de subordination d'un concept à un autre concept.

> Il devient nécessaire, et possible, de distinguer entre la sub-relation *[relation d'inclusion]* et la subter-relation *[relation d'appartenance]* seulement quand nous quittons le pur calcul des domaines. Sitôt que nous adoptons le mode de traduction mentionné auparavant, et que nous prenons en considération les concepts, nous passons dans le domaine de la logique. (1895 : 442)

Les conséquences de l'absence d'une telle distinction chez Schröder sont flagrantes dans l'analyse avec laquelle il prétend fonder son rejet de l'univers de discours de Boole. Voyons donc cette analyse.

3.3. Conflits

1. Le rejet de la classe universelle de Boole par Schröder

Le propos de Schröder est de montrer

> qu'on ne saurait admettre par 1 une classe aussi vaste, et pour ainsi dire ouverte de toutes parts, que celle qu'on a précédemment présen-

tée comme l'« Univers de discours » de Boole.[49] (trad. in Rivenc, de Rouilhan 1992 : 188)

L'argument présenté, en résumé, est que la classe unité composée de 1 doit contenir aussi 0, ce qui permet de dériver la formule 0=1. Le déroulement de pensée de Schröder est le suivant.

> S'il en est ainsi *[si on entend par 1 l'univers de discours de Boole]* 0 devrait être contenu[50] dans toutes les classes susceptibles de procéder de la multiplicité 1, en sorte que la forme 0 € *a* étant valide, 0 serait sujet de n'importe quel prédicat.
>
> À supposer que nous entendions par *a la classe des classes de multiplicité égales à 1,* [...] alors cette classe n'engloberait effectivement qu'un objet unique, le symbole 1 lui-même[51], c'est-à-dire la multiplicité qui constitue son objet, *mais également aussi « rien » et, par conséquent,* 0. En supposant alors que 1 et 0 constituent la classe des objets tenus pour identiques à 1, il faudrait tenir pour légitime, non seulement 1=1, *mais aussi* 1=0. En effet, un prédicat qui convient à une classe (dans le cas qui nous intéresse le prédicat « identiquement égal à 1 » doit également, conformément au principe II, convenir à chaque individu de cette classe[52]. (*Ibid.* : 189)

---

49 Schröder 1890 : 245. « Am letzten Beispiel, der Subsumtion 0 € 1, lässt sich übrigens schon darthun, dass es in der That unzulassig ist, unter 1 eine so umfassende, sozusagen ganz offene Klasse, wie das oben geschilderte « Universum des Diskussionsfähigen » (von Boole) zu verstehen ».

50 Le verbe « contenir » (« enthalten ») signifie à la fois, de manière ambiguë, « inclure et posséder comme élément ».

51 Frege ne manquera pas de reprocher à Schröder d'identifier la classe et le symbole luimême(*cf. infra*)

52 Schröder : 245. « Wie ausgemacht ist, sollte nämlich 0 in *jeder* Klasse, welche aus der Mannigfaltigkeit 1 herausgehoben werden kann, mitenthalten sein, sodass 0 € *a* gilt, 0 sollte Subjekt zu *jedem* Prädikate sein .
Verstünden wir nun unter *a die Klasse derjenigen Klassen der Mannigfaltigkeit, welche gleich 1 sind,* [und dies wäre ja, wenn wir alles Denkmögliche in die Mannigfaltigkeit 1 hereinziehen dürfen, gewiss erlaubt], so umfasste diese Klasse wesentlich nur *ein* Objekt, nämlich das Symbol 1 selbst, beziehungsweisse das Ganze der Mannigfaltigkeit, die seine Bedeutung ausmacht *–ausserdem aber auch "nichts„ milhin* 0. Da nun also 1 und 0 die Klasse derjenigen Objekte ausmachten, welche gleich 1 zu gelten haben, so müsste nicht

Que se passe-t-il ici précisément ? Schröder rappelle tout d'abord que 0 € *a* est une formule valide, quel que soit le domaine *a*. Si on suppose que *a* correspond à la classe des classes de multiplicité égales à 1, cette classe contient l'objet 1 lui-même, mais elle contient aussi 0, suivant Def_0. D'où Schröder conclut qu'il faut tenir pour valides 1=1 et 1=0. Que conclure ? Schröder confond les relations d'appartenance et d'inclusion : 0, en tant que classe vide correspondant au concept de « rien », est inclus dans la classe *a*, composé du seul objet 1, de la même manière qu'il est inclus dans toute classe ; mais la classe *a* ne contient pas 0 comme élément. La confusion entre ces deux relations ressortit à l'assimilation que Schröder fait, suivant sa conception collective des classes, de la classe-unité composée de l'objet 1 – à strictement parler la classe 1 – à cet objet lui-même.

Si l'on considère la fin du passage, Schröder raisonne ainsi. Il appréhende l'égalité comme un prédicat unaire, soit « identiquement égal à », et pose 1 € *égal à* 1, ce qui traduit 1=1. Comme par ailleurs 0 est un sujet universel, on a aussi 0 € *égal à* 1 (et partant 0=1). Dans la dernière phrase, Schröder se réfère à la transitivité de la relation € exprimée par le principe II. Celle-ci opère ainsi : selon la définition Def_0, on a 0 € 1, soit dans le langage des classes, la classe 0 est contenue dans l'univers de discours de Boole. Disposant alors de 0 € 1 et de 1 € *égal à* 1, Schröder peut conclure à 0 € *égal à* 1, partant 0=1. Si l'on reprend les termes de la phrase évoquée, *un prédicat qui correspond à une classe (dans le cas qui nous intéresse le prédicat « identiquement égal à 1 »)* – soit 1 € *égal à* 1, la classe en question est 1 – *doit également, conformément au principe II,*

nur : 1 = 1, sondern *auch* : 0 = 1 anerkannt werden. Den ein Prädikat, welches einer Klasse zukommt (hier das Prädikat, identisch gleich 1 zu sein), muss auch jedem Individuum dieser Klasse zukommen, gemäss Prinzip II ».

convenir à chaque individu de cette classe – il doit donc convenir à 0, soit 0 € *égal à* 1, puisque 0 € 1.

La confusion entre les relations d'appartenance et d'inclusion est ici parfaitement visible. Schröder fait en effet appel à la relation de transitivité de la relation de subsomption €, qu'il interprète, usant de la terminologie de « convenir », comme à la fois la relation d'inclusion (*un prédicat qui correspond à une classe*) et la relation d'appartenance (*doit également convenir à chaque individu de cette classe*). Sous couvert de la transitivité de la relation d'inclusion, l'inférence correcte serait la suivante : de $0 \subset 1$ et $1 \subset \{1\}$ on conclut à $0 \subset \{1\}$. Mais certainement pas à 0=1, à moins de confondre comme le fait Schröder appartenance et inclusion, suite à son assimilation de la classe 1 à $\{1\}$. Tous les éléments de la classe $\{1\}$ sont égaux à 1, mais ce n'est pas le cas pour les classes qui lui sont subordonnées.

Ce que stipule en fait Schröder ici est que, pour *a*, *b* et *c* quelconques, on a : $a \in b$ et $b \subset c$ impliquent $a \in c$. Cette stipulation est correcte. Toutefois, elle n'est pas correctement mise en œuvre puisqu'il est faux que $0 \in 1$. Or, ce que dit Schröder est précisément que $0 \in 1$ et $1 \subset \{1\}$ impliquent $0 \in \{1\}$.

Schröder montre également qu'en remplaçant le symbole 1 par le nom *b* d'une classe quelconque de la multiplicité, on est tout aussi bien conduit à l'égalité absurde 0=b. Le raisonnement est similaire au précédent.

> Si on entend par *a* la classe des domaines identiques à *b*, celle-ci doit comprendre, en plus de *b* (qui de tous les domaines est le seul qui soit identique à *b*), ceux qui sont identiques à 0, conformément à la subsomption 0 € *a*. Il faut donc aussi que 0 soit un domaine identique à *b*,

> d'où, par conséquent (en contradiction avec ce qui précède), *pour tout b*, $0=b$[53]. (*Ibid.* : 190)

L'argument développé par Schröder a pour effet de le conduire à restreindre l'application des symboles 1 et 0 à des multiplicités *(Mannigfaltigkeit)* répondant à certaines exigences.

> Pour que les symboles 0 et 1, etc., soient applicables, conformément aux règles du calcul, à cette multiplicité, cette dernière doit satisfaire à certaines exigences quant à la manière dont ses éléments doivent être donnés, ou conceptuellement précisés[54].

Les multiplicités sont hiérarchisées en degrés. Le premier degré se réfère à une multiplicité d'individus dans laquelle Schröder forme les domaines formés à partir de ses éléments.

> Nous avons affaire en premier lieu à une multiplicité de « choses » quelconques, objets de pensée en général, considérées comme des « *éléments* » ou des « *individus* ». [...]
>
> Nous avons déjà posé comme première exigence [...] que les éléments de la multiplicité puissent être rassemblés, être mutuellement compatibles. C'est dans ce cas seulement que nous désignerons par 1 la multiplicité.
>
> On peut *en toute liberté* former en son sein des « systèmes », des « domaines » à partir de ces éléments, en d'autres termes dégager aussi, en vue d'une application distributive, des *classes* quelconques d'individus. Et, en particulier, ces individus appartiennent eux-mêmes

53 Schröder : 246. « Versteht man unter *a* die Klasse derjenigen Gebiete, welche gleich *b* sind, so muss diese neben *b* (welches ja von allen Gebieten ganz allein gleich *b* ist) auch die identische 0 enthalten, was eben die Subsumtion $0 \in a$ behauptet. Dann muss also auch 0 ein solches Gebiet sein, welches gleich *b* ist ; es folgt (im Widerspruch mit Obigem) so : 0=b – für *jedes b* ! »

54 Schröder : 246. « Damit die Symbole 0 and 1 etc. nach den Regeln des Kalküls in dieser Mannigfaltigkeit verwendbar seien, wird dieselbe hinsichtlich der Art, wie ihre Elemente gegeben oder auch begrifflich bestimmt sein dürfen, gewisse Anforderungen zu erfüllen haben. »

> aux classes qui, du fait qu'elles se réduisent à un *individu unique*, peuvent être appelées classes « monadiques, ou « singulières »[55]. (*Ibid.* : 190-191)

De cette multiplicité d'éléments, on peut dériver une nouvelle multiplicité, comprenant comme individus les classes d'éléments de la première, et ainsi de suite. Selon Schröder, « grâce à ce processus de libre mise en évidence de classes d'individus appartenant à la multiplicité considérée au départ, surgit alors, se crée (en général) une *nouvelle* multiplicité encore plus vaste, à savoir celle des domaines ou classes de la précédente » (247). C'est ainsi que, partant par exemple de la *multiplicité des points* de la surface d'un tableau noir, qui comprend conne domaines les classes de points de surfaces quelconques, on obtient la *multiplicité des domaines de points*. On peut dès lors considérer « cette nouvelle multiplicité comme la « seconde puissance » de la précédente, ou mieux, comme « la *première multiplicité déduite ou dérivée de la première »*. Et on peut réitérer le processus, en déduisant une nouvelle multiplicité de cette première multiplicité déduite, que l'on qualifiera de « seconde multiplicité dérivée de la multiplicité initiale », et ainsi de suite.

---

55 Schröder : 246-247. « Wir haben es zunächst zu thun mit einer Mannigfaltigkeit von irgend welchen "Dingen„ – Objekten des Denkens überhaupt – als *"Elementen„* oder *"Individuen„*. [...].
Als eine erste Anforderung haben wir [...] dass die Elemente der Mannigfaltigkeit sämtlich *vereinbar*, miteinander *« verträglich »* sein müssen. *Nur in diesem Falle bezeichnen wir die Mannigfaltigkeit mit* 1. [...]
Sind die Elemente der Mannigfaltigkeit vereinbar, so lassen sich in derselben kollektiv *nach Belieben* Systeme, "*Gebiete*„ aus ihren Elementen zusammensetzen, in ihr abgrenzen, es lassen sich m.a W. auch zwecks distributiver Verwendung irgendwie *Klassen* von Individuen aus ihr hervorheben.
Und insbesondre gehören auch ihre Individuen selbst mit zu den Klassen, welche wir dann, wenn sie eben zu nur *einem* Individuum zusammenschrumpfen, als "monadische „ oder "*singuläre*„ Klassen bezeichnen mögen ».

Pour éviter les problèmes précédemment mis à jour avec le 1 et le zéro identiques, Schröder introduit une convention. Celle-ci stipule que, pour maintenir l'assomption *a* € 1 dans la multiplicité initiale, il faut que

> parmi tous les éléments considérés comme individus lui appartenant, ne figure aucune classe qui puisse pour sa part comprendre comme individus des éléments de cette même multiplicité. *Car*, à supposer qu'on ne formât qu'une « classe » singulière de cette dernière, et qu'on l'admît en qualité de nouvel individu au sein d'elle-même, alors le zéro identique s'engouffrerait instantanément en elle, se faufilant, si l'on ose dire, par la porte de la définition (2)[56]. (*Ibid.* :192)

Ce qui est donc stipulé est que la relation d'appartenance ne sera pas transitive. Autrement dit, si A et B représentent des individus quelconques et M la multiplicité, cette convention interdit qu'on puisse avoir à la fois B est élément de la multiplicité, A est élément de B et A est élément de M. Mais on demeure toujours dans la situation fâcheuse où « comprendre » signifie de manière ambiguë « inclure et posséder comme élément », et est rendu formellement par l'unique symbole de relation €.

C'est ainsi que Schröder conçoit avant l'heure une théorie simple des types[57]. Chaque élément de sa hiérarchie est appelé une « multiplicité pure » *(reine Mannigfaltigkeit)*, par opposition à une « multiplicité « bâtarde » *[gemischt]* dans laquelle l'exigence précédente n'est pas satisfaite » (248). Une multipli-

56 Schröder : 248. « *dass unter ihren als "Individuen„ gegebenen Elementen sich keine Klassen befinden, welche ihrerseits Elemente derselben Mannigfaltigkeit als Individuen unter sich begreifen.*
Bildete man auch nur eine singuläre "Klasse„ in ebendieser und liesse solche als ein neues Individuen derselben zu, so drängte augenblicklich wieder die identische Null sich zu ihr hinzu, schlüpfte sozusagen durch die Thür der Def. (2x) in sie ein ».

57 L'anticipation de Schröder de la théorie des types a été discutée par Church. Elle est prise en défaut à cause de l'assimilation qui est faite entre la classe-unité et l'élément unique qui lui appartient.

cité pure constituant un univers, il y a donc un nombre indéfini de classes universelles.

Au total, « pour que le calcul identique puisse s'appliquer à une multiplicité, cette dernière doit être une multiplicité pure d'éléments compatibles »[58].

2. L'analyse frégéenne de la démonstration de Schröder

Frege fait apparaître que s'il résulte de la classe universelle de Boole une contradiction, c'est parce que Schröder, en donnant une interprétation logique de son calcul des domaines, confond les relations d'inclusion et d'appartenance. Or, si la première – relation entre deux entités de même type – est seule fondamentale au calcul des domaines, une logique des classes exige qu'elle soit supplée par la seconde – relation entre deux entités de type différent. Comme écrit Frege :

> Il apparaît clairement [...] que nous ne nous situons plus sur le terrain du calcul des domaines, où nous n'avons affaire qu'à la relation de partie au tout, et cette différenciation entre le cas ou une classe contient quelque chose comme individu et celui où elle contient quelque chose comme classe, n'avait aucune raison d'être. (1895 : 439)

Pour mener son analyse, Frege distingue entre les relations d'appartenance et d'inclusion en les notant de manière différente. Il écrit A *subter* B pour la relation d'appartenance et A *sub* B pour la relation d'inclusion : la première exprime que A renvoie à un individu appartenant à la classe B, la seconde exprime que A est une classe subordonnée à la classe B. En ce qui nous concerne, nous utiliserons les symboles usuels de la théorie naïve des ensembles, soit $A \in B$ pour A *subter* B et $A \subset B$ pour A *sub* B.

58 Schröder 1890. *Damit der identische Kalkül auf eine Mannigfaltigkeit anwendbar sei, muss sie eine reine Mannigfaltigkeit sein von vereinbaren Elementen.*

Si l'on reprend la convention introduite par Schröder, à savoir que parmi les éléments d'une multiplicité ne figure aucune classe comprenant comme individus des éléments de cette multiplicité, on peut dès lors l'exprimer en usant de la relation d'appartenance. Avec A et B pour des classes quelconques et M pour la multiplicité, la convention de Schröder dit que l'on ne peut pas avoir à la fois $B \in A$, $A \in B$ et $A \in M$.

Faisant ainsi la différence entre les deux relations, Frege pose la question de savoir laquelle d'entre elles participe à définition du zéro identique Df_0 : $0 \in a$. Autrement dit, 0 est-il compris comme un individu appartenant à toute classe de la multiplicité, ou 0 est-il inclus, comme classe, dans toute classe de la multiplicité ?

Faisons l'hypothèse dans un premier temps de le première branche de l'alternative, hypothèse qui se révèlera la mauvaise. Soit, avec M pour la multiplicité et A pour une classe quelconque :

$$0 \in A \text{ quand } A \subset M.$$

Considérons alors une classe Q incluse dans la multiplicité, soit $Q \subset M$, définie comme la classe des objets identiques à P. Ainsi, $P \in Q$ tandis que la classe Q ne contient que l'individu P. D'après notre hypothèse, si $Q \subset M$, on a aussi $0 \in Q$; cela signifie que P coïncide avec 0, puisque P est le seul élément de la classe Q. Toutefois une telle possibilité est écartée par la convention de Schröder. En effet, de $P \in Q$ et $Q \subset M$, on peut déduire $P \in M$. Par ailleurs, puisque la classe Q se réduit à l'objet P, P est identique à Q, selon l'assimilation que fait Schröder entre un individu et la classe qui n'est composée que de lui. On a donc à la fois $Q \in M$, $P \in Q$ et $P \in M$, ce qui est en contradiction avec la convention introduite : Q est un élément de la multiplicité M qui contient comme élément P, lui-même élément de M.

Notons avec Frege que cette situation ne se produit pas seulement à propos de 0. Pour toute classe-unité, si les classes qui ne sont composées que d'un objet coïncident avec cet objet, la convention de Schröder ne pourra jamais être satisfaite. Si C est un individu appartenant à la multiplicité, $C \in M$, C est aussi une classe singulière, et on a donc $C \in C$. On transgresse de la sorte la convention exigeant que pour A et B quelconques, on ne puisse avoir simultanément $B \in M$, $A \in B$ et $A \in M$. Avec C à la fois pour A et B, c'est bien ce qui se passe : $C \in M$, $C \in C$ et $C \in M$.

Après avoir énoncé sa convention, nous avons vu que Schröder écrit :

> À supposer qu'on ne formât qu'une « classe » singulière de cette dernière *[la multiplicité initiale]*, et qu'on l'admît en qualité de nouvel individu au sein d'elle-même, alors le zéro identique s'engouffrerait instantanément en elle, se faufilant, si l'on ose dire, par la porte de la Def. (2).

Mais ces propos se heurtent à la position de Schröder en matière de classe singulière. Si *a* est un individu se trouvant dans la multiplicité, c'est aussi une classe. Par conséquent, il n'est nullement nécessaire d'admettre *a* dans la multiplicité comme un nouvel individu, car elle s'y trouve déjà. Par ailleurs, si une classe singulière se contracte en l'individu qui la compose, alors on a à la fois $0 \in a$ et $0 \subset a$. Et si la classe a est différente de 0, elle contient de fait deux individus, 0 et a. Ce n'est donc pas une classe singulière. Comme l'écrit Frege, le zéro identique s'est là aussi glissé dans la classe.

La convention de Schröder est donc prise en défaut pour la simple raison que Schröder tient pour identiques les individus aux classes singulières qui leur correspondent. Cette assimilation rend inopérante la convention en effaçant, dans le cas des classes singulières, la distinction entre les relations d'inclusion et d'appartenance puisque, pour une classe singulière *a*, on a en effet aussi bien a $\in$ M que a $\subset$ M.

Sur la base de cette analyse, la première branche de l'alternative est donc rejetée : ce n'est pas la relation d'appartenance qui est en cause dans la définition du zéro. C'est donc la relation d'inclusion. Soit :

$$0 \subset \mathrm{A} \text{ quand } \mathrm{A} \subset \mathrm{M}.$$

Force est alors de recourir au concept. En effet, pour donner un sens à 0 $\subset$ A, 0 et A doivent être interprétées comme des extensions de concepts. Supposons que 0 est la classe des objets possédant une certaine propriété *b* et A celle des objets vérifiant une certaine propriété *c*. Dès lors, 0 $\subset$ A signifie que tous les *b* sont *c*, c'est-à-dire, dans une notation usuelle avec quantificateur universel :

$$(\forall x)\,(x \in 0 \supset x \in \mathrm{A}).$$

Et ceci doit être vrai *quelle que soit* la classe A considérée. Il est donc nécessaire que l'antécédent de la conditionnelle soit faux, c'est-à-dire qu'aucun objet ne possède la propriété *b*. Dans ce cas, 0 est la classe vide. Néanmoins, dans le cadre de la théorie de Schröder où les classes sont appréhendées comme des collections d'individus, une telle définition de la classe vide est impossible. Ce qui conduit Frege à formuler les propos déjà cités au point 2.3(1), et repris par Leśniewski pour être vilipendés :

> L'extension d'un concept doit son existence non aux individus, mais au concept lui-même ; c'est-à-dire à ce qui est exprimé au sujet d'un objet lorsqu'il a été subsumé sous un concept. Dans ce cas il n'y a aucun scrupule à parler de la classe des objets qui sont *b*. Et alors tous les concepts vides ont maintenant la même extension […]. Nous pouvons prendre pour *b* un objet qui n'est pas égal à lui-même.

Nous laissons pour le moment de côté les considérations et les développements liées à l'analyse précédente. Avant de poursuivre, nous allons nous intéresser à l'objection que formule Leśniewski à l'encontre d'un argument présenté par Frege pour montrer que l'identification des classes unités aux individus est intrinsèquement fautive et doit être abandonnée, dans la visée d'un langage logique. Cet argument prend place immédiatement après l'analyse précédente de la contradiction construite par Schröder.

3. L'« erreur » de Frege dénoncée par Leśniewski

Le passage litigieux est le suivant :

> (a) Le doute relatif à la question de savoir si *chaque individu peut être tenu pour une classe* sera renforcé par la réflexion suivante. Nous pouvons prendre pour P dans notre considération antérieure également une classe qui contient un ensemble d'individus ; car, comme l'auteur *[Schröder]* le dit à la page 148, une telle classe peut se donner aussi pour un être de raison et en ce sens aussi comme un individu.
>
> (b) Si Q est maintenant, comme plus haut, la classe coïncidant avec les objets P, alors Q est une classe singulière qui ne contient comme individu que P.
>
> (c) S'il était vrai maintenant *qu'une classe singulière coïncide avec l'individu qui en est l'unique élément*, alors P coïnciderait avec Q. Admettons maintenant que a et b soient des objets différents compris pas P en tant qu'individus, alors ils seraient aussi maintenant compris par Q ; cela voudrait dire que a coïncide avec P aussi bien que Q. En conséquence a coïnciderait aussi avec b contrairement à la supposition admise selon laquelle ils seraient différents. (1895 : 445 ; trad. dans Leśniewski 1989 : 60)

Pour faciliter la compréhension de ce passage, nous reformulons la démonstration en en explicitant toutes les articulations. La supposition de départ – que Frege vise à réfuter est que chaque individu peut être tenu pour une classe (a). Dit autrement, une classe singulière coïncide avec l'individu qui en est l'unique élément (c). Ces deux propositions sont traitées par Frege de manière équivalente. Le cheminement de pensée est alors scandé par les étapes suivantes:

(1) Soit une classe P dont on suppose qu'elle contient deux individus différents *a* et *b*. En faisant usage du symbolisme ensembliste, on écrira : P = {a,b}.

(2) La classe P peut être tenue pour un individu, ceci conformément à la position de Schröder.

(3) Appelons Q, la classe composée de P. Q est donc une classe singulière qui ne contient que P . On a ainsi Q = {P}.

(4) Selon la supposition de départ, Q coïncide avec P . On a donc Q = P, c'est-à-dire Q = {a,b}. Q comprend donc *a* et *b* parmi ses éléments.

(5) Mais, suivant (3), Q est une classe singulière ne comprenant que l'individu P. Par conséquent, il faut que *a* et *b* coïncident avec P. Cela signifie que a = b, ce qui est contraire à l'hypothèse que la classe P contient deux individus différents (1).

Suite au passage rapporté ci-dessus, Frege fait remarquer que Schröder pourrait contester la présence dans la multiplicité des individus *a* et *b*, étant donné que, selon sa convention, ils ne peuvent pas appartenir à cette multiplicité. Toutefois cela ne modifie en rien la situation puisque, comme nous l'avons vu, cette convention ne peut jamais être satisfaite.

Après ce commentaire, Frege affirme – ce passage a déjà été cité en partie – que

> notre supposition selon laquelle que les classes singulières coïncident avec les individus est une conclusion nécessaire de la conception

> d'après laquelle les classes se composent d'individus – un point de vue qui est conforme, et en découle, avec le calcul des domaines.

Et, quelques lignes plus loin, il écrit, en guise de conclusion à sa démonstration :

> Nous avons vu que la conception selon laquelle la classe se compose d'individus, et partant que l'objet singulier coïncide avec la classe singulière, ne peut en aucun cas être maintenue comme exacte. (1895 : 445)

Frege ayant ainsi montré que la conception extensionnelle des classes, de laquelle découle l'assimilation des classes-unités aux individus qui les composent, donne lieu à des contradictions, venons-en à Leśniewski. Que réfute ce dernier dans l'argumentation de Frege ? Le point de désaccord est fourni par la conception leśniewskienne de la classe singulière, en rupture avec la tradition ensembliste. Dans la conception collective des classes, tout objet est identique à la classe de lui-même. C'est ce qu'exprime la thèse suivante, assertée par Leśniewski :

Si un – et un seul – objet est P, alors P est la classe des P.

Mais contrairement à une analyse ancrée dans une appréhension distributive, cela n'implique pas que cet objet en soit l'unique élément. En effet, dans la perspective collective dont Leśniewski se réclame, si tout objet singulier vaut comme élément de lui-même en tant que classe, il est également le tout collectif des éléments – ingrédients – qui le composent. On ne peut donc parler de classe singulière, en tant que composée d'un unique élément, que dans le cas où l'objet en question est un objet atomique, en ce sens qu'il n'a pas de parties.

Partant, Leśniewski conteste la démonstration de Frege précisément parce que ce dernier traite de manière interchangeable deux suppositions qui, dans la théorie collective des classes dont il se réclame, ne sont pas équivalentes. Ce sont :

(1) Chaque individu peut être considéré comme la classe qui n'est composée que de lui.

(2) Une classe singulière coïncide avec l'individu compris par elle comme son unique élément.

Pour fixer la terminologie au sujet de la classe singulière dans sa théorie des classes collectives, Leśniewski démontre la thèse :

> *Si une classe est une classe singulière, alors elle est le même objet que son élément.*

Nous restituons le cheminement de pensée de cette démonstration en adjoignant une traduction formelle aux thèses qui sont formulées par Leśniewski dans le langage courant. Le point de départ est la thèse énoncée ci-avant :

> (1) *Si un – et un seul – objet est P, alors P est la classe des P.*

Le statut de nom singulier peut être défini dans l'Ontologie ainsi :

(a) $\lfloor a \rfloor \lceil \mathrm{sing}\{a\} \equiv a \ \varepsilon \ a \rceil$

« sing{a} » se lit : « le nom *a* dénote un et un seul objet », autrement dit « *a* est un nom singulier ».

On peut dès lors traduire la thèse (1) ainsi :

(1') $\lfloor P \rfloor \lceil \mathrm{sing}\{P\} \equiv P \ \varepsilon \ \mathrm{Kl}(P) \rceil$.

De (1), Leśniewski infère :

> (A)Si un – et un seul – objet est un élément de la classe K, alors l'élément de la classe K est la classe des éléments de la classe K,

c'est-à-dire, formellement,

(A') $\lfloor K \rfloor \lceil \mathrm{sing}\{\mathrm{el}(\mathrm{Kl}(K))\} \supset \mathrm{el}(\mathrm{Kl}(K)) \ \varepsilon \ \mathrm{Kl}(\mathrm{el}(\mathrm{Kl}(K))) \rceil$.

Ensuite, il pose la thèse :

> (B)Si *X* est la classe des éléments de la classe *K,* alors la classe *K* est le même objet que *X*,

que l'on peut exprimer ainsi :

$$(B') \quad \lfloor XK \rfloor \lceil X \varepsilon \mathrm{Kl}(\mathrm{el}(\mathrm{Kl}(K))) \supset \mathrm{Kl}(K) = X \rceil .$$

De (A) et de (B), il s'ensuit :

> (C) Si un – et un seul – objet est un élément de la classe *K*, alors la classe *K* est le même objet que l'élément de la classe *K*,

c'est-à-dire, formellement :

$$(C') \quad \lfloor K \rfloor \lceil \mathrm{sing}\{\mathrm{el}(\mathrm{Kl}(K))\} \supset \mathrm{Kl}(K) = \mathrm{el}(\mathrm{Kl}(K)) \rceil .$$

Leśniewski introduit alors la notion de classe singulière en la définissant ainsi :

> (D) *K* est une classe singulière si et seulement si un – et un seul – objet est l'élément de la classe *K*

On peut définir une constante nominale pour *classe singulière* en faisant usage du foncteur d'existence « sing » :

$$(D') \quad \lfloor K \rfloor \lceil K \varepsilon \mathrm{Sing}_{\mathrm{Kl}} \equiv . \ K \varepsilon K \wedge \mathrm{sing}\{\mathrm{el}(\mathrm{Kl}(K)\} \rceil .$$

Autrement dit, *K* est une classe singulière si et seulement si *K* est un nom d'objet et le nom *el(Kl(K))* dénote un et un seul objet.
Sur la base de (C) et de (D), Leśniewski asserte :

> (E) Si une classe est une classe singulière, alors elle est le même objet que son élément.

C'est-à-dire :

$$(E') \quad \lfloor K \rfloor \lceil K \varepsilon \mathrm{Sing}_{\mathrm{Kl}} \equiv K \, 1(K) = \mathrm{el}(\mathrm{Kl}(K)) \rceil .$$

Ayant ainsi produit la démonstration de la thèse E, Leśniewski précise à son sujet que la possibilité de l'obtenir, selon sa conception des classes, est entièrement conforme [...] avec la position de Frege représentée par la proposition :

> Notre supposition selon laquelle les classes singulières coïncident avec les individus est maintenant une conclusion nécessaire de la conception selon laquelle les classes se composent d'individus.

Si Leśniewski accepte « avec une totale conviction » la thèse E (si une classe est une classe singulière, alors elle est le même objet que son élément), il rejette par contre « de manière toute à fait catégorique » l'opinion selon laquelle :

(E*) Chaque objet est la classe dont cet objet est précisément l'unique élément.

La première thèse s'accorde avec la conception collective, tandis que la répudiation de la seconde proposition marque la rupture avec une interprétation pleinement méréologique des classes. L'agrégat correspondant à la classe générée par un individu ne se limite pas à comprendre, parmi ces éléments, l'individu en question, mais également ses parties ou ingrédients quelconques. De ce point de vue, la proposition (E*) ne serait donc recevable que pour autant que chaque objet soit indivisible. Leśniewski donne un exemple, celui du segment AB ci-dessous, afin d'illustrer de manière explicite sa position.

Conformément à sa conception des classes, le segment AC est un élément du segment AB. Par ailleurs, le segment AB est la classe des segments AC ou CB. De là et suivant la thèse 1 énonçant que tout objet singulier est la classe de lui-même, il s'avère que le segment AB est la classe de lui-même sans être pour autant la classe dont le segment AB serait précisément l'unique élément.

L'analyse collective des classes qui est menée par Leśniewski exige donc l'abandon de la supposition que tout objet est la classe dont cet objet est précisément l'unique élément.

Ceci est la clé du conflit avec Frege. Dans la terminologie adoptée par Leśniewski, la proposition (1) correspond à B.

> (1') Chaque objet peut être tenu pour la classe dont cet objet est précisément l'unique élément.

Cette proposition n'est rien d'autre qu'une variante de la proposition E*, en désaccord avec la conception de la classe revendiquée par Leśniewski : elle est donc rejetée. Quant à la seconde proposition, elle est pleinement conforme à cette conception puisqu'elle correspond à la thèse E (Si une classe est une classe singulière, alors elle est le même objet que son élément).

Bien entendu, il y a conformité pour autant que l'on ne l'interprète pas, à la manière de Frege, comme signifiant que tout individu peut être tenu pour *une classe qui n'est composée que de lui,* autrement dit *une classe singulière dont il est le seul élément.* Comme nous l'avons déjà dit, ce n'est que dans le cas où l'individu en question est un objet atomique, au sens méréologique, que l'on peut affirmer qu'il peut être tenu pour une classe *dont il est l'unique élément* et que, partant, la classe en question est une classe singulière.

Ces deux suppositions ainsi isolées, voyons maintenant comment leur distinction intervient dans la réfutation par Leśniewski de l'argument de Frege. Leśniewski fait valoir que la supposition (2), c'est-à-dire *une classe singulière coïncide avec l'objet qui en est l'unique élément,* interprétée comme (E), *si une classe est une classe singulière, alors elle est le même* *objet que son élément*, ne peut pas être remise en cause par l'argumentation du passage (c), tout simplement parce que (b),

> *si Q est maintenant, comme plus haut, la classe coïncidant avec les objets P, alors Q est une classe singulière qui ne contient comme individu que P,*

qui permet à Frege dans (c) de conclure que :

> *a coïncide avec P aussi bien que b*

est privé de valeur. Considérons de nouveau le segment AB. C'est le seul objet s'identifiant à l'objet qu'est le segment AB et il est, conformément à la thèse (1) (si un – et un seul – objet est P, alors P est la classe des objets P) la classe du segment AB. Mais il n'est pas une classe singulière puisque aussi bien le segment AC que le segment AB sont des éléments du segment AB.

De là, Leśniewski conclut que l'affirmation de Frege dernièrement citée et soutenant que « la conception selon laquelle la classe se compose d'individus, et *partant* que l'objet singulier coïncide avec la classe singulière, ne peut en aucun cas être maintenue comme exacte », n'est pas justifiable sur la base de la démonstration proposée par Frege. Rien n'autorise, en effet, d'inférer (« et partant ») que « l'objet singulier coïncide avec la classe singulière » de « la conception selon laquelle la classe se compose d'individus ». En effet, considérer qu'une classe se compose d'individus n'entraîne pas, suivant la conception de Leśniewski, qu'un objet singulier coïncide avec une classe singulière.

Nous avons utilisé le terme « erreur » dans notre titre. Mais il est bien évident – et c'est pour cette raison que nous l'avons placé entre guillemets – qu'on ne peut parler d'erreur qu'à la faveur de la sphère de pensée dont Leśniewski se réclame, à travers son approche collective des classes. Du point de vue de la sphère distributive dans laquelle prend place l'argument de Frege, celui-ci n'est nullement fautif.

3.4. Rencontres

1. Le nom

Schröder écrit que « le nom commun peut être désigné comme « à plusieurs sens » ou à « multiple sens » quand on peut lui attribuer plusieurs dénotations, chacune avec le même plein droit. Le nom commun s'oppose en cela au nom propre, qu'il faut qualifier « à un sens » (déterminatif) ainsi qu'au nom « rien » (ou « cercle-carré »), lequel nous aimerions qualifier (après l'avoir déjà qualifié comme « dénué de sens ») comme « dénué de signification ». En note, on trouve une précision terminologique à propos de la distinction entre *une* dénotation et *la* dénotation d'un nom commun : « On pourrait nommer chaque individu de l'espèce, une de ses dénotations, en opposition à toute l'espèce ou classe qui constituerait sa dénotation, purement et simplement[59] ».

Schröder dessine ainsi une tripartition des noms en fonction des références qui leur sont respectivement associées : multiple, singulière ou vide. C'est une même tripartition qui s'inscrit au cœur de l'analyse de la proposition chez Leśniewski. S'écartant de l'analyse frégéenne en fonction/argument pour renouer avec une approche traditionnelle, Leśniewski conçoit la copule comme un relateur propositionnel à deux arguments nominaux. Sujet et prédicat appartiennent dès lors tous deux à la catégorie sémantique des noms, celle-ci incluant les noms singuliers, les noms vides et les noms pluriels. La proposition fondamentale de

---

59 Schröder : 69. « Der Gattungsname kann als ein *„mehrdeutiger"* oder *„vieldeutiger"* bezeichnet werden, indem ihm eben mehrere Bedeutungen mit gleichem (und vollem) Rechte zukommen.*) Er tritt dadurch in Gegensatz zu dem als *„eindeutig"* (determinative) zu bezeichnenden Eigennamen sowie zu dem Namen „Nichts" (oder „rundes Quadrat"), welchen wir (wie schon früher „unsinnig", so nun auch) *„undeutig"* nennen mögen ».

l'Ontologie revêt alors la forme « a est b », une telle proposition étant reconnue comme vraie pour autant que le nom *a* soit un nom singulier et que l'objet qu'il dénote soit également un des objets dénotés par le nom *b*. C'est de cette interprétation de la copule dont rend compte l'axiome de l'Ontologie considéré plus haut.

Ainsi, une proposition comme « Pégase est un cheval ailé » est fausse, puisque son terme sujet est un nom vide. Une proposition comme « L'homme est mortel » sera également fausse si on l'analyse au moyen de l'epsilon, soit « homme ε mortel », considérant que « homme » est un terme général . Cette proposition est en fait une abréviation de la proposition universelle « Tout homme est mortel », et sa signification doit être rendue par un relateur d'inclusion : « homme ⊂ mortel » ; le relateur d'inclusion exprimant une relation d'inclusion entre noms, autrement dit entre les extensions respectives des noms « homme » et « mortel ». Ce relateur est défini ainsi :

$$\lfloor ab \rfloor \lceil a \subset b \equiv \lfloor c \rfloor \lceil c\varepsilon a \supset c\varepsilon b \rceil \rceil.$$

Remarquons une nouvelle fois, dans cette section « rencontres », le lien de convergence entre Leśniewski, Frege[60] et Schröder concernant la terminologie de nom propre ». Celui-ci doit être entendu au sens large, c'est-à-dire incluant, à la différence de Russell, les descriptions définies. Toute expression nominale, simple ou complexe, visant à désigner un individu particulier, a le statut de nom singulier.

Ce traitement logique des noms, qui introduit les noms pluriels et les noms vides à côté des noms singuliers dans le langage logique, a pour effet d'éradiquer la classe distributive en tant qu'entité au profit de sa seule dimension extensionnelle.

60 « La désignation d'un objet singulier peut consister en plusieurs mots ou autres signes. À fin de brièveté, on appellera nom propre toute désignation de ce type ». Frege 1892, 1971 : 103-104s.

Dans une proposition telle que « a est b », interprétée comme « *a* est un nom d'objet qui se trouve parmi l'extension des objets dénotés par le nom *b* », l'expression « l'extension du nom *a* » n'est pas synonyme de l'expression « la classe des *b* », prise dans le sens distributif usuel. Il n'y a aucune entité qui vient borner l'extension elle-même et que l'on pourrait à ce titre qualifier de « *la* classe des *b* ». La situation est la même pour les noms vides ou singuliers. Dans chaque cas on a affaire à une extension pure, que celle-ci soit vide, singulière ou plurielle.

On peut ainsi constater que Leśniewski s'accorde avec Frege pour considérer que, dans le langage naturel, nous présupposons que les termes singuliers que nous employons ont une dénotation. Frege écrit à ce sujet :

> Quand on énonce une affirmation, on suppose toujours sans le dire que les noms propres y figurant, qu'ils soient simples ou composés, ont une dénotation. (1892b : 109 ; 1971 : 115)

Pour reprendre l'exemple de Frege, en disant « Kepler mourut dans la misère » ou « Celui qui a découvert la forme elliptique des orbites planétaires est mort dans la misère », nous présupposons que « Kepler » dénote un individu et que quelqu'un a effectivement découvert les orbites elliptiques des planètes. Mais si le présupposé est faux, comme c'est le cas dans des énoncés tels que « Ulysse fut déposé sur le sol d'Ithaque dans un profond sommeil », ni l'énoncé ni sa négation ne sont vraies pour Frege. Car, dans la mesure où le terme sujet manque de référence, tout l'énoncé se tient en dehors du champ du vrai et du faux[61]. Un langage logique – parfait – ne doit pas, toujours suivant Frege, introduire de signe sans que lui soit garanti une dénotation.

61 C'est une analyse que refusera Russell, estimant qu'elle implique une violation du principe du tiers-exclu.

> On exigera d'une langue logiquement parfait (une idéographie) que toute expression construite comme un nom propre, au moyen des signes précédemment introduits et de manière grammaticalement correcte, désigne réellement un objet, et qu'aucun signe nouveau ne soit introduit à titre de nom propre sans qu'on se soit assuré de sa dénotation. (1892 : 111 ; 1971 : 117)

A cette exigence de présupposition logique de la référence quand il s'agit des noms propres, Leśniewski oppose donc une analyse légitimant l'usage des noms vides dans le langage logique, en assignant à toute proposition dans laquelle le terme sujet ne dénote aucun objet la valeur du faux. De la sorte, une proposition dont le sujet est un nom vide et la négation de cette proposition sont simultanément fausses. C'est ce que nous avons vu en œuvre avec l'analyse de l'antinomie de Russell où le nom « la classe des classes qui ne sont pas subordonnées à elles-mêmes » se révèle être un nom vide. En rupture avec l'approche frégéenne, les termes fictionnels ne sont donc pas renvoyés à un statut d'imperfection du langage naturel, permettant d'user d'expressions ayant un sens mais pas de référence, pas plus que leur traitement ne met en péril le principe du tiers-exclu.

Pour conclure sur cette question de l'analyse de la proposition singulière, considérons encore les propos suivants, inscrits sous la plume de Sobocinski :

> Nous assumons la proposition d'après laquelle le sujet et le prédicat appartiennent au même type logique (selon la terminologie reçue) ou à la même catégorie sémantique (selon la terminologie de Leśniewski). Nous employons donc le mot « est » (« ε ») comme on le faisait avant la réforme de G. Peano. En agissant de cette manière, nous croyons être conformes non seulement aux intuitions liées au langage courant, mais encore (ce qui ne semble pas encore avoir été aperçu par les historiens de la logique) à la tradition aristotélicienne et scolastique. (1949 : 99)

Quant à Leśniewski lui-même, il signale dans ses écrits que l'axiome de l'Ontologie n'est que le résultat de sa volonté d'ancrer son langage logique sur un usage qu'il faisait alors des propositions singulières, en particulier dans sa théorie des classes collectives.

> Je disposais ainsi d'un nombre considérable de synthèses théoriques, tout à fait valables pour moi, dans ce secteur. Celles-ci furent construites plus ou moins de façon *ad hoc* et n'étaient insérées dans le cadrc d'aucun système déductif, mais elles me facilitaient la tâche d'éclaircissement, pour moi-même et pour d'autres, des subtilités particulières de mon langage scientifique. J'ai désiré alors gravir un degré et appuyer toutes mes considérations menées à l'aide des propositions « singulières » du type « A ε b » sur une axiomatique explicitement formulée et qui s'harmoniserait avec ma pratique scientifique d'alors dans le secteur considéré. J'ai postulé que cette axiomatique ne contiendrait aucun terme « constant » autre que « ε » figurant dans le propositions du type « A ε b » et les termes de la « théorie de la déduction ». (1989 : 103 ; 1931 : 156)

L'axiome de l'Ontologie vient donc formaliser un certain usage de la copule. Nulle imperfection du langage, pour reprendre les mots de Frege, n'est ici à combattre dans l'élaboration du langage logique, pas plus qu'il ne s'agit de conférer au langage naturel ses qualités logiques en l'enfermant dans le cadre logique ainsi délimité par l'axiomatique.

> [...] en employant le mot « ε » dans les propositions du type « A ε b » de manière conséquente dans mon ontologie, en conférant à ce mot le même sens que celui que je donne au mot « est » du langage courant dans la proposition « cet homme est âgé » [...], je ne peux évidemment ni ne désire faire que l'emploi de « ε » soit aussi conforme à toutes les conséquences de l'emploi du mot « est » et des propositions du type « A est b » établi dans le langage courant. (1989 : 111 ; 1931 : 167)

2. *Du* « rien » *de Schröder au* nom vide *de Leśniewski*

Nous allons poursuivre en nous intéressant à certains commentaires de Schröder concernant le zéro identique, repris pour la majorité d'entre eux par Frege et qui nous permettront de tracer une ligne de convergence entre Schröder et Leśniewski. Schröder écrit ce qui suit, relativement au 0 :

> Nous avons vu que 0 signifie « rien » ; le signe € correspond à la copule et doit être traduit par « est » dans le langage ordinaire ; enfin, *a* peut être n'importe quel prédicat*[62], comme par exemple « noir ». La subsomption 0 € *a* est sans aucun doute correcte, parce que la classe de toutes les choses susceptibles d'être qualifiées de noires, ne contient rien sauf celles-ci ; donc je suis autorisé à dire qu'elle contient aussi, en plus, « rien ».[63]

Une évidence saute aux yeux, et qui n'a bien entendu pas échappée à Frege. C'est l'acte de nominalisation du terme « rien » qu'opère Schröder. De l'usage du terme « rien », Schröder conclut à l'existence d'une entité qui serait *le* rien. De là la remarque de Frege : «le langage produit ici le mirage d'un objet ». (1895 : 447) Dire par exemple que la classe *a* (ne) contient rien en plus de la lune, c'est nier la proposition que la classe contient quelque objet de plus que la lune. Mais ce n'est certainement pas asserter que la classe contient, en plus de la lune, un objet dont le nom est « rien ».

Frege souligne avec force la confusion commise par Frege, entre signe et objet signifié. Schröder écrit, après avoir donné les définitions de 0 et de 1 :

---

62 Ici se trouve une note de Schröder dont nous ne tenons pas compte pour notre propos.

63 Schröder 1890 : 241. « Wir sahen : 0 bedeutet „nichts" ; das Zeichen € entspricht der Kopula, und muss mit „ist" in die Wortsprache übertragen werden : endlich *a* mag jedes beliebige*) Prädikat sein – sagen wir beispielsweise „schwarz".
Die Subsumtion 0 € *a* ist unzweifelhaft richtig, weil die Klasse aller der Dinge, welche wir „schwarz" nennen würden, ausser diesen nichts enthält, also wie ich sagen darf, noch obendrein auch „nichts" enthält ».

> Les symboles 0 et 1, auxquels nous attribuons ces propriétés, nous les comptons désormais parmi les éléments de notre multiplicité[64].

Par définition, le symbole 0 se voit attribué la propriété d'être inclus dans tout domaine de la multiplicité. Mais, ainsi que le relève Frege, le signe du zéro n'est qu'une figure ovale sur le papier, tandis que la définition n'a nullement le pouvoir de transformer cette figure en un domaine compris dans tout domaine de la multiplicité. Si cela était possible, ajoute Frege, « il ne serait pas difficile de fabriquer des diamants » (449). Dans sa préface aux *Grundgesetze*, il écrit ces propos remarquables, au sujet de l'acte de définir :

> Je ne peux tenir que pour une superstition scientifique le fait qu'une figure ovale, créée à l'encre sur du papier, devrait acquérir, par une définition, la propriété de donner un pour résultat, quand on l'ajoute à un. On pourrait tout aussi bien, par une simple définition, rendre travailleur un écolier paresseux. La confusion naît ici facilement de la différenciation insuffisante entre concept et objet. [...] On définira, par exemple, le nombre zéro en disant : c'est quelque chose qui, ajouté à un, donne pour résultat un. On a ainsi défini un concept, en ayant indiqué quelle propriété un objet doit avoir pour tomber sous ce concept. Mais cette propriété n'est pas une propriété du concept défini. Il semble qu'on s'imagine souvent maintenant que, par la définition, on a créé quelque chose, qui, ajoutée à un, donne le résultat un. Quelle grande illusion ! Ni le concept défini n'a cette propriété, ni la définition ne garantit que le concept soit satisfait. Une recherche est tout d'abord nécessaire. Si on a tout d'abord démontré qu'un et un seul objet a la propriété requise, on est en position de donner le nom propre « zéro » à cet objet. Créer le zéro est donc impossible. J'ai déjà expliqué cela à maintes reprises, mais, semble-t-il, sans résultat. (Frege 1893 : XIV ; trad. in Belna 1996 : 326-7)

64 Schröder 1890 : 188-9. « Die Symbole 0 et 1, denen wir diese Eigenschaft zuschreiben, zählen wir jedenfalls hinfort mit zu den „Gebieten" unserer Mannigfaltigkeit .»

Pour en revenir au passage précédent de Schröder où l'on voit *le* rien surgir de *rien* et être identifier au 0, il peut apparaître étrange, à première vue, que Schröder ait été victime de ce que Frege a qualifié de mirage. Mais cela l'est moins si l'on tient compte du fait qu'il cherche à retrouver la classe vide par l'intermédiaire du 0 introduit dans le calcul des domaines par la définition 0 € *a* et qui – comme cité plus haut – « est notre nom pour un domaine qui est contenu dans tout domaine ». Ce n'est donc pas tant le langage qui produit le mirage d'un objet que le langage qui vient légitimer la traduction du zéro identique en terme *du* rien, c'est-à-dire la classe vide.

Schröder écrit également :

> *Le « Rien » est [...] sujet de tout prédicat* : le Rien est noir ; le Rien, en même temps, *(n')*est aussi pas noir ; car la classe nulle est comprise dans toute classe. S'il ne se réfère à rien, un énoncé ne peut jamais être faux, et si des énoncés ne se réfèrent à rien du tout, il n'est pas possible qu'il y ait entre eux une contradiction.[65]

Face à cet argument, Frege sursaute. Deux assertions de la forme « *a* est *b* » et « *a* n'est pas *b* » constituent indubitablement à ses yeux une contradiction. Par contre, chez Leśniewski (laissant de côté la question proprement dite du traitement schrödérien du « rien »), si le terme sujet ne dénote aucun objet, c'est-à-dire est un nom vide, les deux énoncés sont tous deux faux, et il n'y a donc pas lieu d'une contradiction. C'est de cette analyse que découle, comme nous l'avons vu et déjà répété, la résolution collective de l'antinomie de Russell où l'expression « la classe

---

65 Schröder 1890 : 238. « *Das „nichts" ist* sogar *Subject zu jedem Prädikate* : das Nichts ist schwarz ; das Nichts ist zugleich auch nicht schwarz ; denn die Nullklasse ist in jeder Klasse mit enthalten. Wenn sie „nichts" betriff, kann eine Aussage niemals falsch sein, und wenn sich Aussagen auf gar nichts beziehen, so ist auch kein Widerspruch zwischen diesen Aussagen möglich ».

de toutes les classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes » est un nom vide.

Revenons à Frege. Sa critique vise à relever que Schröder mélange deux manières d'appréhender la notion d'existence, par suite de la méprise opérée entre la question de savoir si un nom propre désigne ou celle de savoir si un concept a des objets qui tombent sous lui. Un nom propre qui ne désigne rien ne peut être crédité d'aucune justification logique et est renvoyé au champ de la fable ou de la fiction. En revanche, les concepts sous lesquels ne tombent aucun objet sont légitimes. En rassemblant simultanément sous l'appellation « dénué de sens » les termes « rien » et « cercle-carré », Schröder est victime d'une telle méprise. Son « rien » comme dans « Rien est noir » ou « Rien n'est pas noir » est un nom propre vide, et partant illégitime dans le champ de la logique. Mais « cercle-carré » n'est pas un nom vide. C'est un mot conceptuel qui se réfère à un concept vide. Frege met ainsi en relief une confusion fréquemment commise autour du « nom commun », tantôt considéré comme nom propre ou nom conceptuel. Il n'y a aucune désignation directe d'un objet à travers un mot conceptuel. C'est à travers l'expression « il y a… » que l'existence peut être donnée. Ainsi, « cercle-carré » ne pâtit d'aucune absence dénotation dans un énoncé tel que « Il n'y a pas de cercle-carré ». Cet énoncé porte en effet sur un concept, *cercle-carré*, dont il est dit qu'il est vide, et non pas sur un objet. « De la même manière que dans la proposition « il y a au moins une racine carré de 4 », il n'est rien dit du nombre 2 précisément ni de –2, il est dit d'un concept, à savoir *racine carrée de* 4, qu'il n'est pas vide ». (Frege, 1971 : 134)

Frege légitime ainsi son accusation contre Schröder par la distinction entre concept et objet, laquelle assoit celle entre subsomption et subordination et ouvre la possibilité de former des concepts sous lesquels ne tombent aucun objet.

Ayant examiné comment Frege défait la pensée de Schröder en l'infléchissant vers ses propres conceptions logiques, tournons-nous vers le paradigme leśniewskien. Non seulement on y déjoue le problème des noms vides, mais *rien* va s'y trouver également doter de quelque apparence formelle.

Remarquons tout d'abord que, dans la théorie logique de Leśniewski, les noms perdent toute portée ontologique puisqu'ils peuvent être vides. Mais la portée existentielle des noms peut être rendue par l'intermédiaire de foncteurs, définissables dans le langage se présentant comme les paraphrases logiques des statuts dénotationnels des noms. Par exemple, pour exprimer qu'un nom dénote, en d'autres termes n'est pas un nom vide, on définira ainsi un foncteur d'existence :

$$\lfloor a \rfloor \lceil ex\{a\} \equiv \lfloor \exists b \rfloor \lceil b \; \varepsilon \; a \rceil \rceil$$

Cette définition fait fond sur l'axiome de l'Ontologie qui énonce, dans sa première clause, que toute proposition de la forme « a ε b » présuppose l'existence d'au moins un individu qui est *a*. La proposition ex{a}, que nous lisons « le nom *a* dénote », où « ex » est un foncteur propositionnel à un argument nominal, est donc vraie à la condition que *a* ne soit pas un nom vide. De la même manière, on peut introduire des foncteurs exprimant les qualités de nom vide, singulier ou pluriel[66].

On se souvient que Frege écrit que « cercle-carré » n'est pas un nom vide, mais le nom d'un concept vide, à la différence de « rien », un nom propre sans dénotation. Avec l'Ontologie, rien n'est *(pas)* à jeter au panier – sans jeu de mots ! Des énoncés tels que « Il n'y a pas de cercle-carré », « Pégase n'existe pas » ou encore « Rien est noir » sont traités sans difficulté. On obtient : ~ex{cercle-carré} ; ~ex{Pégase} ; rien ε noir . Les deux premières propositions sont vraies, relativement à notre univers référentiel ordinaire, puisque les noms « cercle-carré » et

66 C'est ce que nous avons vu avec le foncteur sing (point 3.3 -3).

« Pégase » n'y dénotent rien, étant des noms vides. Et on peut en toute légitimité en inférer de chacune que $\lfloor \exists a \rfloor \lceil \sim ex\{a\} \rceil$, soit : pour quelque nom *a*, il n'est pas le cas que le nom *a* dénote. Quant à la dernière, analysée par le biais du relateur de l'epsilon et de « rien » comme un terme sujet vide, elle est fausse.

Mais ce n'est pas fini. Rien n'est *(pas)* encore joué ! Cette dernière proposition, « Rien est noir », avec laquelle on sent bien qu'avec « rien » on tourne autour d'autre chose que la possibilité d'un traitement fonctoriel du statut des noms vides, n'est que le prétexte à aborder l'intégration formelle du rien dans le langage de l'Ontologie.

Le pendant ontologie de la classe vide, et donc de ce fameux « rien », est une constante nominale, celle du *nom vide,* introduite à travers la définition suivante :

$$\lfloor a \rfloor \lceil\, a\ \varepsilon\ \Lambda \equiv .\ a\ \varepsilon\ a \wedge \sim(a\ \varepsilon\ a) \rceil$$

Λ s'interprète ainsi comme le nom vide, ou le nom contradictoire, c'est-à-dire le nom qui ne dénote pas quelque chose. C'est ainsi que se trouve logiquement défini le concept du rien et on lira donc « a ε Λ » : « l'extension du nom *a* est parmi l'extension du nom vide », en d'autres termes « *a* est un nom qui ne dénote pas », soit « *a* est un nom vide ».

On a alors, en ce qui concerne le nom vide Λ, la thèse suivante, qui fait usage du foncteur d'existence « ex » défini précédemment : $\sim ex\{\Lambda\}$, c'est-à-dire que le nom vide ne dénote pas. On en tire la thèse $\lfloor \exists a \rfloor \lceil \sim ex\{a\} \rceil$, qui nous dit qu'il existe un nom dans l'Ontologie qui ne dénote pas.

Comme on l'a vu, l'Ontologie ne reconnaît aucune classe distributive. Aussi le nom vide n'a-t-il aucune partie liée avec le nom d'une entité qui serait *le* rien ou *le* vide. Cet état de fait est corroboré par la thèse établissant que le nom vide n'est pas un nom individuel, soit :

$$\lfloor a \rfloor \lceil \sim(a \varepsilon \Lambda) \rceil, \text{ soit } \sim (\Lambda \varepsilon \Lambda) \text{ ou encore } \sim\mathrm{sing}\{\Lambda\}$$

De la même manière que l'on définit formellement le rien, on définit le pendant ontologique de la classe universelle, qualifié de *nom universel*, par la thèse suivante :

$$\lfloor a \rfloor \lceil a \varepsilon V \equiv a \varepsilon a \rceil$$

Ainsi, V, constante nominale, peut être interprétée comme le nom universel, puisqu'elle dénote tout ce qui peut être dénoté par un terme singulier, c'est-à-dire tous les objets. C'est donc cette fois le concept d'objet qui se trouve logiquement défini, « $a \varepsilon V$ » pouvant se lire « a est un nom d'objet ».

Le problème du « rien » de Schröder, affirmé dans le passage rapporté ci-dessus comme étant à la fois noir et pas noir, 0 étant contenu dans toute classe selon la définition posée dans le calcul des domaines 0 € a, se trouve donc ici pleinement délié. Car, le nom vide Λ se trouve inclus dans tout nom, selon la thèse $\lfloor a \rfloor \lceil \Lambda \subset a \rceil$[67], il est le cas que les deux propositions « Rien est noir » et « Rien (n')est pas noir » sont toutes deux vraies, la négation devant s'entendre comme une négation nominale.

Pour conclure sur ce point, considérons encore les propos suivants de Schröder :

> Nous ne sommes en droit d'accepter l'égalité 0 = 1 que pour une multiplicité parfaitement vide, une multiplicité qui ne comprendrait pas le moindre élément ou individu. Or nous écartons de nos recherches une multiplicité de cette sorte[68].

---

67 L'inclusion nominale, c'est-à-dire entre extensions de noms, se définit ainsi : $\lfloor ab \rfloor \lceil a \subset b \equiv \lfloor c \rfloor \lceil c \varepsilon a \supset c \varepsilon b \rceil \rceil$

68 Schröder 1890 : 245-56. « Wir werden die Gleichung : 0 = 1 nur anzuerkennen vermögen für eine *völlig leere* Mannigfaltigkeit 1, eine Mannigfaltigkeit, welche selbst *gar kein* Element oder Individuum enthält – und eine solche schliessen wir von unsern Betrachtungen grundsätzlich aus. »

Or, dans le cadre de l'Ontologie, la possibilité d'un univers vide n'a pas à être écartée. Un énoncé tel celui de Schröder, 0 = 1, où 0 est assimilé au vide et 1 à l'univers est vrai quand l'univers est vide. Ce qu'on exprime alors, c'est une identité extensionnelle entre les deux constantes nominales V et Λ. L'identité extensionnelle entre noms, qu'il faut distinguer de l'identité entre termes singuliers, tombe sous la définition suivante :

$$\lfloor ab \rfloor \lceil a \approx b \equiv \lfloor c \rfloor \lceil c\varepsilon a \equiv c\varepsilon b \rceil \rceil .$$

La proposition « a ≈ b » se trouve donc vérifiée quand les noms *a* et *b* ont la même extension, que celle-ci soit vide, singulière ou plurielle. Ceci est le cas pour le nom vide Λ et le nom universel V quand l'univers est vide. On a en effet : $\Lambda \approx V$.
Libre non seulement de tout engagement existentiel, Leśniewski a développé, avec ce calcul extensionnel des noms, un langage universel.

3. L'attitude extensionnaliste

En dernier lieu, nous voudrions nous pencher sur quelques aspects de cette théorie leśniewskienne, épinglée au début de notre étude sous le nom de calcul extensionnel des noms d'ordre supérieur, et qui se présente comme une logique libre, universelle et ontologiquement neutre. Comme nous l'avons laissé entendre, historiquement sa mission était de fournir un langage fondationnel pour la Méréologie. Ce langage se devait de répondre à deux exigences : être libéré de toute antinomie de type russellienne et éviter ce qui est précisément refusé avec la Méréologie, c'est-à-dire introduire les classes comme des entités abstraites. Pour le dire autrement, ce langage devait offrir un langage de l'extensionnel sans classes. Nous ne développerons pas ici la question des outils formels et des conceptions logiques sous-jacentes sur la base desquels va se réaliser ce programme. Nous nous contentons de dire que les clés de la réussite, pour les résumer, résident dans l'analyse de la proposition singulière et le traitement des noms qui en résulte, les modalités d'interprétation de la quantification (de nature catégorielle), et la dimension constructive de l'Ontologie, donnée par un réglage interne au langage de la procédure de définition[69]. Cette dernière a été vu l'œuvre tout au long de notre réflexion, avec les thèses définitions insérées dans le langage par leur formulation équivalentielle, exprimée avec l'opérateur de la biconditionnelle. Ce sur quoi nous voudrions plus précisément conclure ce travail confrontant Leśniewski et Frege concerne la dimension extensionnelle de leurs travaux, considérée à la lumière de la perspective logiciste. Pour ce faire, nous revenons tout d'abord à Frege à travers sa conception de l'identité, essentielle à sa construction d'une logique extensionnelle. Loin de nous l'idée de refaire la théorie frégéenne, il s'agit simplement de mettre l'accent sur certaines de ses « hésitations » non résolues.

On sait que pour Frege il n'y a d'identité véritable qu'entre les objets, parmi lesquels on trouve les extensions de concepts. On ne peut pas – à strictement parler – concevoir d'identité entre des concepts, qui sont des entités incomplètes, au contraire des objets, qui sont des entités saturées, fermées sur elles-mêmes (tout ceci s'inscrivant au sein de la doctrine fonction/argument). Le système de Frege revendique ainsi une conception absolue de l'identité comme portant exclusivement

69 Deux directives inférentielles sont attachées dans l'Ontologie à la procédure définitoire : une directive de type propositionnel, héritée de la Protothétique, et une directive de type ontologique, due à l'ajout de la catégorie des noms et dépendante du foncteur primitif de l'axiome de l'Ontologie, l'epsilon ε. En voici une présentation schématique, où f et g correspondent aux éléments définis :
• Définition de type propositionnel
$\lfloor v_1 \ldots v_n \rfloor \ulcorner f(v_1 \ldots v_n) \equiv F_{v1 \ldots vn} \urcorner$
• Définition de type nominal
$\lfloor v_1 \ldots v_n a \rfloor \ulcorner a \, \varepsilon \, g(v_1 \ldots v_n) \equiv. \, a\varepsilon a \wedge E_{av1 \ldots vn} \urcorner$
Les arguments du foncteur défini peuvent se répartir en un ou plusieurs contextes. La définition est dite régulière dans le premier cas et paramétrée dans l'autre. Il peut également ne pas y avoir de contexte, la définition est dite dans ce cas absolue : c'est le cas des définitions introduisant les constantes nominales du nom vide et du nom universel.

sur des objets, arguant qu'« il est illusoire de penser que l'on peut faire d'un concept un objet sans l'altérer ». Comment Frege ramène-t-il alors le concept vers une objectivation ? Autrement dit, et pour aller vite, quel est l'analogue de a = b, où a et b sont des termes singuliers, au niveau des concepts, ou fonctions ? C'est précisément à travers l'extension de concept que se joue l'objectivation du concept puisqu'à tout concept, et plus généralement à toute fonction, est associé un objet, l'extension du concept ou le parcours de valeurs de la fonction. Cette objectivation est alors incarnée, non sans quelques scrupules, par la fameuse loi V, laquelle permet d'identifier l'extension de deux concepts si ces concepts ont même valeur pour les mêmes arguments. Et, suivant ladite loi V,

$$(\hat{x}F(x) = \hat{x}G(x) \equiv ((\forall x)\ (F(x) \equiv G(x))),$$

on écrira cette identité, pour deux concepts quelconques F et G, $\hat{x}F(x) = \hat{x}G(x)$. Mais on n'écrira pas F = G. Une telle écriture est refusée par Frege pour ne pas porter trace du caractère de non-saturation des fonctions. Si les mathématiciens peuvent se permettre de l'utiliser, c'est uniquement sous couvert de l'usage implicite de la loi V et de la possibilité de passer de l'affirmation de l'identité entre les valeurs prises par deux fonctions sur les arguments, à l'affirmation de l'identité des suites de valeurs.

Ce que nous cherchons ici simplement à souligner, c'est l'impossibilité à franchir la ligne de démarcation du statut logique de l'extension de concept pour donner une pleine objectivité au concept lui-même, cette impossibilité étant intrinsèque au cadre d'analyse extensionnel frégéen.

Pour rendre compte de l'objectivité des concepts, Frege fait précisément jouer l'analogie avec les objets sur fond de relation d'identité. De même que l'identité entre objets donne une idée de celle entre concepts, de même c'est l'objectivité des objets qui donne une idée de celle des concepts. L'analogie est certes féconde, mais prisonnière du cadre dans lequel Frege se déplace. Car l'objectivité ainsi « approchée » du concept ne peut pas signifier entité puisque si les objets sont saturés, il n'en va pas de même des concepts. Et comme il n'y a pas d'entité sans identité ni identité sans entité, là où il n'y a pas de véritable identité, ce qui est le cas des concepts, il ne peut pas y avoir de véritable entité.

Ce qui précède a quelque peu le visage d'une caricature de la position frégéenne. Qu'on nous pardonne. Il s'agissait simplement de prendre la mesure d'une certaine attitude extensionnaliste, propre au monde frégéen, pour la mesurer avec celle de l'univers leśniewskien. Dans ce dernier univers, relevons immédiatement que l'on échappe à l'absolutisme de l'identité ne portant que sur des objets. Ceci a déjà pu être constaté à travers le relateur ci-dessus défini de l'identité extensionnelle, relatif à une quelconque extension nominale, que celle-ci soit singulière, multiple ou inexistante. Mais ce n'est pas tout. Car cette libération identitaire se propage à d'autres entités linguistiques du langage logique que les noms. Les outils formels permettent en effet de définir une identité extensionnelle entre prédicats, par exemple entre prédicats formateurs de proposition à un argument nominal. On la définit ainsi :

$$\lfloor FG \rfloor \lceil F = G \equiv \lfloor a \rfloor \lceil F\{a\} \equiv G\{a\} \rceil \rceil .$$

C'est à ce stade que l'on peut mesurer le pas qui est opéré, relativement au cadre frégéen. Il ne s'agit nullement, avec le relateur = ici défini, d'une identité exprimant un rapport entre des objets abstraits à partir des fonctions F et G, ce qui, en langage frégéen, correspondrait aux extensions de concepts ou parcours de valeurs. De même, tandis que l'on échappe à tout problème de réification, il n'y a aucune impossibilité de nommer les fonctions et d'en faire les sujets logiques d'assertion. F = G se lit : « *le* foncteur F et *le* foncteur G ont la même extension ».

Ceci étant dit, examinons comment se présente, chez Leśniewski, le pendant de la loi V de Frege. Le corollaire ontologique de cette loi fait appel à certains éléments que voici :

i) le relateur de l'identité extensionnelle entre noms, déjà défini :

$$\lfloor ab \rfloor \lceil a \approx b \equiv \lfloor c \rfloor \lceil c\varepsilon a \equiv c\varepsilon b \rceil \rceil$$

ii) le relateur suivant, qui est la version paramétrée du précédent :

$$\lfloor ab \rfloor \lceil \approx(a)\{b\} \equiv a \approx b \rceil$$

On lit $\approx(a)\{b\}$: les *b* forment l'extension des *a*, c'est-à-dire que, conformément à la signification portée par le *définiens*, les noms *a* et *b* ont la même extension. L'élément linguistique $\approx(a)$ est ainsi de la catégorie formatrice de proposition à un argument nominal et peut s'assimiler à *être l'extension du nom a*.

iii) le relateur d'identité extensionnelle entre prédicats de catégorie formatrice de proposition à un argument nominal, déjà défini :

$$\lfloor FG \rfloor \lceil F = G \equiv \lfloor a \rfloor \lceil F\{a\} \equiv G\{a\} \rceil \rceil$$

La thèse en question a alors la forme suivante :

$$\lfloor ab \rfloor \lceil \approx(a) = \approx(b) \;.\!\equiv\!.\; a \approx b \rceil$$

On la lit : deux noms déterminent des *expressions d'extensions* identiques si et seulement si ils ont la même extension. Le foncteur paramétré $\approx(a)$ se présente ainsi comme une *façon de parler* l'extension d'un nom, en venant pourvoir à sa nominalisation. C'est ce qui justifie l'usage de l'expression « expression d'extension » pour en rendre compte.

Voyons maintenant comment on en vient à la définition du nombre ? On approche celle-ci en suivant un chemin similaire au précédent, mais cette fois en partant de la relation d'équinuméricité. On obtient alors une thèse qui se présente comme l'expression ontologique du principe de Hume, traduisant le critère d'identité pour les nombres[70]. Soit, pour ce principe :

$$(\forall FG)\,(\text{ Nombre }(F) = \text{Nombre }(G) .\!\equiv\!.\ F \infty G).$$

Autrement dit : le nombre du concept F est identique au nombre du concept G si et seulement si les concepts F et G sont équinumériques.

Quant à l'analogue dans l'Ontologie de ce principe, il nécessite d'introduire un certain nombre d'éléments liés à la relation d'équinuméricité. Soit :

i) Un relateur d'équinuméricité entre noms. On définit une telle relation de manière similaire à ce qui se fait dans un cadre classique, entre classes ou ensembles : deux noms *a* et *b* sont équinumériques si et seulement s'il existe une relation biunivoque entre eux et *a* représente le domaine de la relation et *b* le co-domaine. Dans le langage de l'Ontologie et avec le symbole ∞ pour l'équinuméricité, cela donne :

$$\lfloor ab \rfloor \lceil a \infty b \equiv \lfloor \exists R \rfloor \lceil \mathit{OneOne}(R) \wedge \mathit{Dom}(R)\{a\} \wedge \mathit{Cdom}(R)\{b\} \rceil \rceil \text{ [71]}.$$

ii) *Une* version paramétrée du relateur ∞. On l'introduit avec cette définition :

70 C'est avec ce principe que les néo-frégéens ont montré que l'essentiel de la construction e Frege pouvait être repris, sans la fameuse loi V, sur l'unique base d'une logique du $2^{\text{ème}}$ ordre augmenté de ce principe. Voir à ce sujet Boolos 1987, 1998 ; Wright 1983.

71 Compte tenu des définitions suivantes :
– être une relation bi-univoque entre noms singuliers :
$\lfloor R \rfloor \lceil \mathit{OneOne}(R) \equiv \lfloor abc \rfloor \lceil R\{ac\} \wedge R\{bc\} .\vee. R\{ca\} \wedge R\{cb\} :\supset a\ \varepsilon\ b \rceil \rceil$
– être le domaine d'une relation de catégorie propositionnelle à deux arguments nominaux :

$$\lfloor Ra \rfloor \lceil \mathit{Dom}(R)\{a\} \equiv \lfloor b \rfloor \lceil \lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{bc\} \equiv b\ \varepsilon\ a \rceil \rceil$$

– être le co-domaine d'une relation de catégorie propositionnelle à deux arguments nominaux :

$$\lfloor Ra \rfloor \lceil \mathit{Cdom}(R)\{a\} \equiv \lfloor b \rfloor \lceil \lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{cb\} \equiv b\ \varepsilon\ a \rceil \rceil .$$

$$\llcorner ab \lrcorner \ulcorner \infty\langle a\rangle\{b\}. \equiv. a \infty b \urcorner.$$

Selon une lecture catégorielle similaire à celle faite sur la version paramétrée de l'identité extensionnelle, $\infty\langle a\rangle$ exprime le nombre cardinal de *a*, au sens catégoriel de *être le nombre cardinal de a*.

Disposant de ces éléments et par ailleurs du relateur de l'identité extensionnelle entre éléments de catégorie propositionnelle à un argument nominal, précédemment défini, on peut établir la thèse suivante :

$$\llcorner ab \lrcorner \ulcorner \infty(a) = \infty(b) .\equiv. a \infty b \urcorner.$$

Sous couvert des explications qui précèdent, on la lit : le nombre cardinal de *a* est identique au nombre cardinal de *b* si et seulement si *a* est équinumérique à *b*.

Remarquons que la thèse en question ne dit pas la même chose que le principe de Hume, celui-ci étant une définition implicite. L'abstraction opérée par le foncteur paramétré $\infty\langle\text{-}\rangle$ ne définit pas. Elle nominalise, à travers la procédure de paramétrage, celle-ci permettant de détacher un certain élément linguistique, en l'occurrence $\infty\langle\text{-}\rangle$, catégoriellement autonome.

De ce qui précède découle la définition même du nombre cardinal, qui prend la forme suivante :

$$\llcorner \alpha \lrcorner \ulcorner Cn[F] \equiv \llcorner \exists a \lrcorner \ulcorner F = \infty\langle a\rangle \urcorner.$$

Cette définition définit le foncteur Cn, *être un nombre cardinal*, de catégorie formatrice de proposition à un argument de catégorie formatrice de proposition à un argument nominal, un nombre cardinal étant de catégorie formatrice de proposition à un argument nominal. On lit cette définition : F est un nombre cardinal si et seulement si il existe un nom *a* tel que F exprime *être le nombre cardinal de a*.

On peut inscrire une thèse similaire pour définir *être une extension*. Soit :

$$\lfloor F \rfloor \lceil \mathrm{Ext}[F] \equiv \lfloor \exists a \rfloor \lceil F = \approx\langle a \rangle \rceil \rceil .$$

On lit cette définition : F est une extension si et seulement si il existe un nom *a* tel que F exprime *être l'extension de a.*

Il faut souligner que ce processus de nominalisation est partie intégrante des modes formels du langage logique. En effet, en définissant des epsilons d'ordre supérieur, qualifiés ainsi pour être des foncteurs de catégorie formatrice de proposition à arguments autre que nominaux, on peut dériver l'axiome de l'Ontologie pour leur catégorie. Par exemple, l'introduction dans le langage de la définition d'un epsilon de catégorie formatrice de proposition à un argument nominal, qui est celle des éléments entrant en jeu dans la définition du nombre, permet de disposer de l'équivalent structurel de l'axiome fondamental pour cette catégorie. C'est pour cette raison que cet epsilon, ou tout autre défini, est paraphrasable par « est » tandis que le processus de nominalisation des entités supérieures est pleinement légitimé. Chaque strate du langage gérée par un epsilon supérieur vient ainsi, pour ainsi dire, mimer la strate nominale gérée par l'epsilon primitif, en accordant aux entités d'ordre supérieur une représentation pseudo-nominale[72].

En guise de derniers mots, revenons au zéro, classe vide chez Schröder et défini chez Frege par l'intermédiaire de concepts contradictoires. Qu'en est-il dans notre construction arithmétique ? Si l'on se souvient de la définition du nom vide, cela donne :

$$\lfloor a \rfloor \lceil 0\{a\} \equiv a \infty \Lambda \rceil .$$

C'est-à-dire que 0 est le nombre d'un nom *a* si et seulement si ce nom est équinumérique au nom vide.

72 On consultera à ce sujet Canty 1969, Gessler 2005b, Hiz 1977, Lejewski 1985.

4. En guise de conclusion

Nous conclurons avec presque rien… La rencontre effective entre Frege et Leśniewski n'eut jamais lieu. Frege mourut en ayant fait le deuil de son programme logiciste, renonçant à « colmater » les fissures ou à recommencer. Leśniewski, quant à lui, recommença, sans que Frege ne sût jamais le regard à la fois immensément respectueux et critique que Leśniewski porta sur son œuvre, au cours de ce travail d'analyse et de résolution de l'antinomie. Puisqu'il y avait une antinomie, c'était donc pour Leśniewski qu'une erreur s'était glissée quelque part, sur laquelle il fallait ouvrir les yeux pour recommencer sur des bases nouvelles. Ce fut ainsi que vit le jour un nouveau paradigme logico-mathématique où se côtoyaient et s'articulaient ensemble les dimensions collective et distributive de la notion de classe, qui cessaient ainsi d'être des sœurs ennemies. La terminologie de classe sera désormais associée à l'axe collectif, conformément à sa signification liminaire. De classe distributive, il ne sera plus *jamais* question, mais seulement d'extension pure, parmi lesquelles les noms vides – et toute entité linguistique du langage- recevront une pleine légitimité logique. L'histoire, on le sait, est écrite par les vainqueurs –selon la formule consacrée. La pensée contemporaine s'est frayée un passage à travers la voix ouverte par Frege, Russell, et d'autres, pour se cristalliser dans le paradigme dominant, et monolithique, des mathématiques orthodoxes. Donner la parole à Leśniewski, via ses critiques à l'égard des travaux de Frege, c'était ainsi refaire vivre une pensée qui a trouvé son envol sur la faille de l'antinomie des classes ou des ensembles, et qui a su montré, en toute rigueur et efficacité, que l'on pouvait penser autrement le rapport entre logique et mathématique et parvenir ainsi à une dissolution réelle des malheurs frégéo-russelliens.

Nous n'avons pas voulu, avec cette étude, procéder à la construction précise des théories frégéenne, leśniewskienne ou schrödérienne. Nous avons voulu davantage déroulé le fil du regard critique posé par Leśniewski sur Frege et éveiller l'intérêt sur les divergences et convergences alors mises à jour entre trois hommes, engagés chacun dans l'élaboration d'une logique extensionnelle. C'était aussi donner pleinement sa place à la pensée de Frege, pour la lucidité qui fut la sienne dans ses actes d'oppositions aux théories de ses contemporains et à travers laquelle on devine l'amorce des développements futurs de Leśniewski. Tant à travers la matière des difficultés affichées par Frege qu'à travers son combat contre Schröder se dessine le programme que réalisa Leśniewski : la construction d'un langage scientifique qui ne demanda d'engager aucune guerre avec le langage naturel et qui, en établissant dans ses droits la classe collective, ouvrit *ainsi* la route au plein développement d'une logique extensionnelle. Et de ce rien que l'on abandonna en chemin, il ne reste vraiment *rien*.

5. Bibliographie

AJDUKIEWICZ K. (1935). Die syntaktische Konnexität. *Studia Philosophica* 1, 1-27. [Trad. angl. in McCall S. *Polish Logic 1920-1939*. Oxford : OUP 1967, 207-231].

BELNA J.-P. (1996). *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege*. Paris : Vrin.

BOOLE G. (1854). *An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the mathematical theories of Logic and Probabilities*. Londres : Walton and Maberley.

BOOLOS G. (1987). The consistency of Frege's *Foundations of Arithmetic*. In Thomson J. (ed.). *On Being and Saying : Essays in Honour of Richard Cartwright*. Cambridge Mass. : MIT Press, 3-20.

BOOLOS G. (1998). *Logic, Logic and Logic*. Cambridge Mass. : Harvard Univ. Press.

CANTOR G. (1887). Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten, *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* 91, 81-125 ; 92, 240-265.

CANTOR G. (1895). Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehr, *Mathematische Annalen* 46, 481-512.

CANTY J.T. (1967). *Leśniewski's Ontology and Gödel Incompleteness Theorem*. PhD. Thesis. Univ. of Notre Dame. [Publiée partiellement dans (1969a) et 1969b)].

CANTY J.T. (1969a). The Numerical Epsilon. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 10.1, 47-63.

CANTY J.T. (1969b). Leśniewski's Terminological Explanations as Recursive Concepts. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 10.4, 337-369.

CHURCH A. (1956). *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton : Princeton University Press, vol 1.

CHURCH A. (1976). Schröder's anticipation of the simple theory of types, *Erkenntnis*, vol. 10,3: 407-411.

DEDEKIND R. (1888). *Was sind und was sollen die Zahlen ?* Braunschweig : Vieweg. (Trad. franç. [1979]).

DEDEKIND R. (1979). *Les nombres. Que sont-ils et à quoi servent-ils ?* Analytica 12-13. Paris : Bibliothèque d Ornicar.

FREGE G. (1879). *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebilte Formalsprache des reinen Denkens*. Halle : L. Nebert. (Trad. franç. 1999).

FREGE G. (1893). *Grundgesetze der Arithmetik*, Jena, 2 vol. (Réimpression *Verlagsbuchhandlung*, Olms : Hildesheim (1962).

FREGE G. (1894). *Die Grundlagen der Arithmetik : eine logisch-mathematische Untersuchung*. Breslau : Marcus. (Trad. française 1969, trad. anglaise 1953).

FREGE G. (1895). Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröder's Vorlesungen über die Algebra der Logik, *Archiv für systematische Philosophie* 1, 433-456. (Edité dans *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, ed. P. Geach & M. Black, 2nd ed. (1960), Oxford, 86-106).

FREGE G. (1919). *Notes for Ludwig Darmstaedter*. In Frege (1979), 252-257

FREGE G. (1953). *The Foundations of Arithmetic : A Logico-mathematical Enquiry into the Concept of Number*, New York : Philosophical Library. (Trad. par J.L. Austin).

FREGE G. (1962). *Grundgesetze der Arithmetik*, Hilldesheim : Olms, (1ère éd. : vol. 1 1893 ; vol. 2 1903).

FREGE G. (1969). *Les fondements de l'arithmétique*, Paris : Seuil. (Trad. et introd. C. Imbert).

FREGE G. (1971). *Écrits logiques et philosophiques,* Paris : Seuil. (Trad. et introd. C. Imbert).

FREGE G. (1979). *Posthumous writings.* Oxford : Basil Blackwell.

FREGE G. (1994). *Correspondance juin 1902-décembre 1904, mars-juin 1912.* Traduction, notes et introduction par C. Werbern. Paris : L'Unebêvue.

FREGE G. (1999). *Idéographie, un langage formulaire de la pensée pure construit d'après celui de l'arithmétique.* Paris : Vrin. (Trad. par C. Bresson de (1879)).

FREGE G., HUSSERL E. (1987). *Correspondance.* Ed. bilingue all.-franç. Trad. de G. Granel. Ed. originale all. : Hambourg : F. Meiner (1980). Paris : T.E.R.

FREGE G., RUSSELL B. (1994). *Correspondance.* Ed. bilingue all.-franç. Trad. de C. Werben. Ed. originale all. : Hambourg : F. Meiner (1980). Paris : E.P.E.L.

GESSLER N. (2005a). *Introduction à l'œuvre logique de S. Leśniewski.* III. *La Méréologie.* Université de Neuchâtel : Travaux de logique (hors série). [Fasc. I et II. *La Protothéti-que L'Ontologie,* Miéville (2001-2004)].

GESSLER N., JORAY P., DEGRANGE C. (2005b). *Le logicisme catégoriel,* Université de Neuchâtel : Travaux de logique 16.

GESSLER N. (2007). *Abstraction and Nominalization in Leśniewski's Ontology.* In Joray (ed.) (2007). Contemporary Perspectives on Logicism and the Foundation of Mathematics. Université de Neuchâtel : Travaux de logique 18, 63-83.

HALE B., WRIGHT C. (2001). *The Reason's Proper Study. Essays towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics.* Oxford : Clarendon.

HIZ H. (1977). Descriptions in Russell's Theory and in Ontology. *Studia Logica* 36.4, 271-283.

HUSSERL E. (1891). Recension de E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik),* (1890), vol. I, 243-273 (trad. franç. in Husserl (1975), 9-90).

HUSSERL E. (1975). *Articles sur la logique.* Paris : Presses Universitaires de France.

JORAY P. (2001). *La subordination logique. Une étude du nom complexe dans l'Ontologie de S. Leśniewski.* Berne : Peter Lang.

JORAY P. (2002). Logicism in Leśniewski's Ontology. *Logica Trianguli* (Łódź, Nantes, Santiago de Compostela) 6, 3-20.

JORAY P. (2005a). La *no-class theory* de Stanisław Leśniewski. In Heinzmann G., Rebuschi M. (éds). *Aperçus philosophiques en logique et en mathématiques. Philosophia Scientiae* (Nancy), cahier spécial 6.

JORAY P. (2005b). La quantification catégorielle. In Joray P. (éd.). *La quantification dans la logique moderne.* Paris : L'Harmattan, 233-260.

JORAY P. (ed.) (2007). Contemporary Perspectives on Logicism and the Foundation of Mathematics. Université de Neuchâtel : Travaux de logique 18.

LARGEAULT J. (1970). Logique et philosophie chez Frege. Paris/Louvain : Nauwelaerts.

LEJEWSKI C. (1954). Logic and Existence. *British Journal for the Philosophy of Science* 5, 104-119.

LEJEWSKI C. (1969). Consistency of Leśniewski's Mereology. *The Journal of Symbolic Logic* 34.3, 321-328.

LEJEWSKI C. (1985). Accommodating the Informal Notion of Class within the Framework of Leśniewski's Ontology. *Dialectica* 39, 217-241.

LEŚNIEWSKI S. (1911). Przyczynek do analizy zdan egzystencjalnych (Contribution à l'analyse des propositions existen-tielles), *Przeglad Filozoficzny* 14, 329-345.

LEŚNIEWSKI S. (1912). Proba dowodu ontologicznej zasady sprzecznosci (Essai de preuve du principe ontologique de contradiction), *Przeglad Filozoficzny* 15, 202-226.

LEŚNIEWSKI S. (1913a). *Logiceskia razsuzdenia* (en russe), St. Petersburg, 87p.

LEŚNIEWSKI S. (1913b). Czy prawda jest tylko wieczna czy tez wieczna i odwieczna ? (La vérité est-elle vraie seulement éternellement ou aussi sans commencement ?), *Nowe Tory* 18. Trad. angl. (1963).

LEŚNIEWSKI S. (1913c). Krytyka logicznej zasady wylaczonego srodku (Critique du principe logique du tiers exclu), *Przeglad Filozoficzny* 16, 315-352.

LEŚNIEWSKI S. (1914a). Czy klasa klas, nie podporzadkowanych sobie, jest podporzacdkowana sobie ? (La classe des classes qui ne se contiennent pas elles-mêmes se contient-elle elle-même ?), *Przeglad Filozoficzny* 17, 63-75.

LEŚNIEWSKI S. (1914b). Teoria mnogosci na 'podstawach filozoficznych Benedykta Bornsteina', *Przeglad Filozoficzny* 17, 488-507.

LEŚNIEWSKI S. (1916). *Podstawy ogolnej teoryi mnogosci. 1* (Fondements de la théorie générale des ensembles), Prace Polskiego Kola Naukowego w Moskwie. Sekcya matematyczno-przyrodnicza, no. 2, 42p., Moscow.

LEŚNIEWSKI S. (1927-1931). O podstawach matematyki (Sur les fondements des mathématiques), *Przeglad Filozoficzny* 30 (1927), 164-206 ; 31 (1928), 261-291 ; 32 (1929), 60-101 ; 33 (1930), 77-105 ; 34 (1931), 142-170.

LEŚNIEWSKI S. (1929a). Über Funktionen, deren Felder Gruppen mit Rück-sicht auf diese Funktionen sind, *Fundamenta Mathematicae* 13, 319-332.

LEŚNIEWSKI S. (1929b). Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik, *Fundamenta Mathematicae* 14, 1-81.

LEŚNIEWSKI S. (1929c). Über Funktionen, deren Felder Abelsche Gruppen in bezug auf diese Funktionen sind, *Fundamenta Mathematicae* 14, 242-251.

LEŚNIEWSKI S. (1930a). Über die Grundlagen der Ontologie, *Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Classe III, 23, 111-132.

LEŚNIEWSKI S. (1930b). Über Definitionen in der sogenannten Theorie der Deduktion, *Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Classe III, 23, 289-309.

LEŚNIEWSKI S. (1938a). Einleitende Bemerkungen zur Fortsetzung meiner Mitteilung u. d. T. "Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik", *Collectanea Logica* 1, 1-60. Trad. angl. (1967b).

LEŚNIEWSKI S. (1938b). Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik, §12, *Collectanea Logica* 1, 61-144.

LEŚNIEWSKI S. (1967a). *Stanislaw Leśniewski : Collected Papers.* Canty has collected Leśniewski's papers, with the exception of (1913a), (1913b), (1916), which could not be located, and the bound photostats have been deposited in the University of Notre Dame Library. BC/135/L637, vi + 297 pages.

LEŚNIEWSKI S. (1967b). Introductory Remarks to the Continuation of my Article : Grundzüge eines neuen Systems der Grund-lagen der Mathematik, in : McCall (1967), 116-169. Trad. angl. de (1938a).

LEŚNIEWSKI S. (1967c). On Definitions in the So-Called Theory of Deduction, in : McCall (1967), 170-187. Trad. angl. de [1930b].

LEŚNIEWSKI S. (1983b). On the Foundations of Mathematics, chapitres I-X, *Topoi* 2, 7-52. Traduction V. Sinisi.

LEŚNIEWSKI S. (1989). *Sur les fondements de la mathématique. Fragments (discussions préalables, méréologie, ontologie).* Paris : Hermès [Trad. de Kalinowski G., préf. de Miéville D.].

LEŚNIEWSKI S. (1992). *Collected Works* (2 vol.). Surma S.J., Srzednicki J.T., Barnett D.I. (eds). Warszawa : PWN / Dordrecht : Kluwer.

LUKASIEWICZ J. (1910). O *zasadzie sprzecznosci u Arystotelesa. Studyum krytyczne* (Sur le principe de contradiction chez Aristote : une étude critique), Krakow : Akademia Umiejetnosci.

LUSCHEI E. C. (1962). *The Logical System of Leśniewski.* Amsterdam : North Holland.

MIÉVILLE D. (1984). *Un développement des systèmes logiques de Stanisław Leśniewski. Protothétique, Ontologie, Méréologie.* Berne : Peter Lang.

MIÉVILLE D. (1985).Un aperçu des caractéristiques des systèmes logiques de S. Leśniewski, *Dialectica* 39.3, 165-179.

MIÉVILLE D. (1989)Préface à l'ouvrage de S. Leśniewski : *Sur les fondements de la mathématique. Fragments.* Paris : Hermès, 10-16. (Traduction G. Kalinowksi).

MIÉVILLE, D. & VERNANT D. (éds) (1995). *Stanislaw Leśniewski aujourd'hui,* Grenoble / Neuchâtel : Groupe de Recherches sur la philosophie et le langage / Centre de Recherches Sémiologiques.

MIEVILLE D. (1999). Expansion catégorielle et logique, in : D. Miéville (éd.), *Rôle et enjeux de la notion de catégorie en* *logique*, Université de Neuchâtel : Travaux de logique 13, 1-41.

MIEVILLE D. (2001-2004). *Introduction à l'œuvre logique de S. Leśniewski. I. La Protothétique, II. L'Ontologie.* Neuchâtel : Université : Travaux de logique (hors série). [Fasc. III. *La Méréologie*, Gessler (2005a)].

MIEVILLE D. (2005). Quantification et significations primitives, in : Joray (sous la dir.), 139-152.

PEETERS M. (2006). *Introduction à l'œuvre logique de S. Leśniewski. IV.* Neuchâtel : Travaux de logique (hors série).

POUIVET R., REBUSCHI M. (éds). *La philosophie en Pologne 1918-1939*. Paris : Vrin.

RIVENC F., DE ROUILHAN P. (sous la direction) (1992). *Logique et fondements des mathématiques. Anthologie 1850-1914).* Paris : Payot.

RUSSELL B. (1903). *The Principles of Mathematics*. London : Allen & Unwin.

RUSSELL B. (1908). Mathematical Logic as Based on the Theory of Types. *American Journal of Mathematics* 30.

RUSSELL B. (1919). *Introduction to Mathematical Philosophy*. London : Allen & Unwin. [Trad. fr. par Rivenc F., Paris : Payot (1991)].

SCHRÖDER, R. (1890). Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik), Leipzig : Teubner.

SCHRÖDER, R. (1992). Leçons sur l'algèbre de la logique (1890). In RIVENC F., DE ROUILHAN P. (sous la direction). *Logique et fondements des mathématiques. Anthologie 1850-1914).* Paris : Payot, 180-195. (Introduction et commentaires de Heinzmann G.).

SIMONS P.M. (1985). A semantic for Ontology. *Dialectica* 39-3.193-216.

SIMONS P.M. (1995). Leśniewski and Ontological Commitment. In Miéville D., Vernant D. (éds). *Stanisław Leśniewski*

Aujourd'hui. Grenoble : Groupe de recherche sur la philosophie du langage / Neuchâtel : Centre de Recherches Sémiologiques, 103-119.

SINISI V.-F. (1969). Leśniewski and Frege on Collective Classes, *NDJFL* 10, 239-246.

SINISI V.-F. (1976). Leśniewski's Analysis of Russell's Antinomy. *NDJFL* 17, 19-34.

SŁUPECKI J. (1955). S. Leśniewski's Calculus of Names. *Studia Logica* 3, 7-70.

SOBOCIŃSKI B. (1949). L'analyse de l'antinomie russellienne par Leśniewski. *Methodos* 1, 94-107, 220-228, 308-316 et *Methodos* 2 (1950), 237-257.

SRZEDNICKI J.T.J., RICKEY V.F. (eds). (1984). *Leśniewski's Systems : Ontology and Mereology*. Boston, The Hague : Nijhoff / Wrocław : Ossolineum.

SRZEDNICKI J.T.J., STACHNIAK Z. (eds). (1988). *Leśniewski's Systems : Protothetic*. Dordrecht : Kluwer.

VERNANT D. (1993). *La philosophie mathématique de Bertrand Russell*. Paris : Vrin.

WHITEHEAD A.N., RUSSELL B. (1927). *Principia Mathematica*. 2e éd.. Cambridge : CUP. [1ère éd., 1910].

WRIGHT C. (1983). *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Aberdeen : Univ. Press.

ZERMELO, E. (1908). Über die Grundlagen der Mengenlehre, *Mathematische Annalen* 55.