C. R. Acad. Sci. Paris, t. 310, Série I, p. 661-665, 1990

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Un modèle asymptotique en océanographie

Olivier BESSON, Mohamed LAYDI et Rachid TOUZANI

Résumé – Nous étudions un écoulement incompressible à viscosité anisotrope dans un milieu de « faible épaisseur ». Ce problème intervient dans la modélisation en océanographie. Les premiers résultats cités dans cette Note concernent le problème de Stokes. Nous justifions la dérivation du problème limite et donnons deux formulations variationnelles du problème obtenu.

An asymptotic model in oceanography

Abstract – *We study an incompressible fluid flow with anisotropic viscosity in a "thin domain". This problem is involved in oceanography modelling. The stated results concern the Stokes problem. We justify the derivation of the limit problem and give two variational formulations of the obtained problem.*

Abridged English Version – Let us consider, in $\mathbb{R}^2$, a "thin domain" Ω_ε as depicted in Figure 1, *i. e.*,

$$\Omega_\varepsilon = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < 1,\ -\varepsilon\varphi(x) < y < 0 \},$$

where φ is a positive Lipschtiz-continuous fonction and such that the boundary Γ_ε of Ω_ε is Lipschitz-continuous and $0 < \varepsilon \ll 1$. A Stokes flow with anisotropic viscocity is given as follows:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial x} = f \quad \text{in } \Omega_\varepsilon,$$

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{in } \Omega_\varepsilon,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{in } \Omega_\varepsilon,$$

$$u = v = 0 \quad \text{on } \Gamma_\varepsilon.$$

We are interested in deriving a limit problem when $\varepsilon \to 0$. Let us introduce the change of variables:

$$x_1 = x, \qquad x_2 = y/\varepsilon, \qquad u_1^\varepsilon = u, \qquad u_2^\varepsilon = v/\varepsilon, \qquad p^\varepsilon = p.$$

We obtain in the domain

$$\Omega = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x_1 < 1,\ -\varphi(x_1) < x_2 < 0 \},$$

the problem

$$-\Delta u_1^\varepsilon + \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial x_1} = f, \qquad -\varepsilon^2 \Delta u_2^\varepsilon + \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial x_2} = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$\frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x_2} = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$u_1^\varepsilon = u_2^\varepsilon = 0 \quad \text{on } \Gamma = \partial\Omega.$$

Note présentée par Haïm BREZIS.

0764-4442/90/03100661 $ 2.00 © Académie des Sciences

Using the variational formulation of this problem and the mass conservation equation we obtain the uniform estimate:

$$|u_1^\varepsilon|_{1,\Omega}+\varepsilon\left\|\frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x_1}\right\|_{0,\Omega}+\left\|\frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x_2}\right\|_{0,\Omega}+\|u_2^\varepsilon\|_{0,\Omega}+\|p^\varepsilon\|_{0,\Omega}\leqq C.$$

The main result of this Note is that the limit problem ($\varepsilon\to 0$) can be stated as the following system of partial differential equations:

$$-\Delta u_1+\frac{\partial p}{\partial x_1}=f,\qquad \frac{\partial p}{\partial x_2}=0\quad\text{in }\Omega,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0\quad\text{in }\Omega,$$

$$u_1=u_2=0\quad\text{on }\Gamma.$$

An interesting variational formulation for such a problem consists in seeking

$$(u_1,p)\in H_0^1(\Omega)\times Q\qquad\text{where}\quad Q=\left\{q\in L_0^2(\Omega);\frac{\partial q}{\partial x_2}=0\right\}$$

such that

$$(\nabla u_1,\nabla v_1)-\left(p,\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)=(f,v_1),\qquad \forall v_1\in H_0^1(\Omega),$$

$$\left(q,\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)=0,\qquad \forall q\in Q.$$

---

1. Introduction. — L'utilisation de problèmes approchés « asymptotiques » en océanographie est assez courante dans la littérature. Ainsi, à cause de la taille des problèmes à résoudre, on tient compte du fait que le domaine considéré (océan, lac, ...) a une faible hauteur. En utilisant des développements asymptotiques en fonction de cette épaisseur, on se ramène à des problèmes « simplifiés » (*cf.* par exemple le modèle des eaux peu profondes [1]). Nous nous intéressons dans ce travail au modèle hydrostatique utilisé en particulier pour le calcul du transport des sédiments marins ([2] à [5]). Les équations au départ sont posées avec une viscosité cinématique anisotrope, ce qui est courant pour ce type de problèmes et correspond à une modélisation de la turbulence. Cette hypothèse est essentielle pour obtenir un problème limite bien posé.

Nous nous limiterons dans l'exposé du problème au cas des équations de Stokes bidimensionnelles, le cas tridimensionnel se traitant d'une manière rigoureusement analogue. Le cas des équations de Navier-Stokes semble plus délicat.

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on se donne un domaine de « faible épaisseur » Ω_ε comme illustré dans la figure 1. En d'autres termes, on se donne un nombre réel $0<\varepsilon\ll 1$ et

$$\Omega_\varepsilon=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0<x<1,\ -\varepsilon\varphi(x)<y<0\},$$

où φ est une fonction positive lipschitzienne. Nous supposons en outre que la fonction φ est telle que la frontière Γ_ε de Ω_ε est lipschitzienne.

On considère les équations de Stokes suivantes :

(1 *a*) $$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial p}{\partial x}=f\quad\text{dans }\Omega_\varepsilon,$$

(1 *b*) $$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial p}{\partial y}=0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon,$$

(1 *c*) $$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon,$$

(1 *d*) $$u=v=0 \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon.$$

Dans les équations ci-dessus, u et v désignent respectivement les composantes selon x et y de la vitesse et p désigne la pression. La fonction f est donnée dans $H^{-1}(\Omega_\varepsilon)$. Cette fonction correspond par exemple à une « vitesse horizontale » imposée entraînant le mouvement dans le fluide. Notons qu'un modèle plus réaliste conduit à imposer une traction tangentielle sur la surface $y=0$. Ce cas sera mentionné plus loin. Enfin, notons que si dans la littérature concernant ce problème, on admet simplement que la viscosité dans la direction y est « plus petite » que celle dans la direction x, le choix d'une viscosité selon y en $O(\varepsilon^2)$ nous a semblé essentiel pour obtenir un problème limite bien posé.

Il est bien connu que le problème (1) admet une solution unique

$$(u, v, p)\in H_0^1(\Omega_\varepsilon)\times H_0^1(\Omega_\varepsilon)\times L_0^2(\Omega_\varepsilon)$$

pour tout $\varepsilon>0$. Afin de simplifier l'exposé, nous introduisons le changement de variables :

(2) $$x_1=x, \qquad x_2=y/\varepsilon, \qquad u_1^\varepsilon=u, \qquad u_2^\varepsilon=v/\varepsilon, \qquad p^\varepsilon=p.$$

Le problème (1) peut être écrit dans le domaine :

$$\Omega=\{(x_1, x_2)\in\mathbb{R}^2;\ 0<x_1<1,\ -\varphi(x_1)<x_2<0\},$$

de frontière Γ sous la forme :

(3 *a*) $$-\Delta u_1^\varepsilon+\frac{\partial p^\varepsilon}{\partial x_1}=f, \qquad -\varepsilon^2\Delta u_2^\varepsilon+\frac{\partial p^\varepsilon}{\partial x_2}=0 \quad \text{dans } \Omega,$$

(3 *b*) $$\frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x_2}=0 \quad \text{dans } \Omega,$$

(3 *c*) $$u_1^\varepsilon=u_2^\varepsilon=0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Une formulation variationnelle de ce problème consistera alors à trouver un triplet $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, p^\varepsilon)\in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\times L_0^2(\Omega)$ tel que :

(4 *a*) $$(\nabla u_1^\varepsilon, \nabla v_1)+\varepsilon^2(\nabla u_2^\varepsilon, \nabla v_2)-\left(p^\varepsilon, \frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)=(f, v_1), \qquad \forall (v_1, v_2)\in H_0^1(\Omega)^2,$$

(4 *b*) $$\left(q, \frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x_2}\right)=0, \qquad \forall q\in L_0^2(\Omega).$$

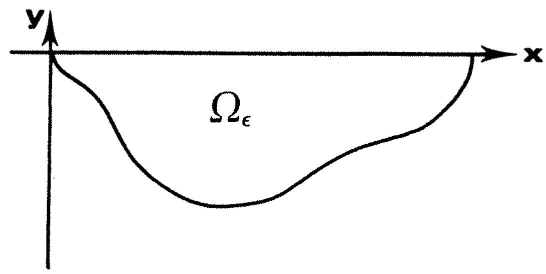
Nous nous intéressons maintenant au comportement de la solution du problème (4) lorsque ε tend vers zéro.

2. Dérivation du problème limite.

LEMME 1. — *Il existe une constante* $C>0$ *indépendante de* ε *telle que*

$$|u_1^\varepsilon|_{1,\Omega}+\varepsilon\left\|\frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x_1}\right\|_{0,\Omega}+\left\|\frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x_2}\right\|_{0,\Omega}+\|u_2^\varepsilon\|_{0,\Omega}+\|p^\varepsilon\|_{0,\Omega}\leqq C.$$

Idée de la démonstration. — La première et la deuxième estimation s'obtiennent à partir de la formulation variationnelle du problème (4). L'estimation de $\partial u_2^\varepsilon/\partial x_2$ utilise l'équation (4 *c*) alors que la norme L^2 de u_2^ε est directement majorée en utilisant l'inégalité de Poincaré. Enfin l'estimation de la pression utilise la condition inf-sup (*cf.* [7]). □



Le domaine Ω_ε.
The domain Ω_ε.

Ce résultat permet d'effectuer le passage à la limite. Ainsi, on a :

$$(\nabla u_1^\varepsilon, \nabla v_1) + \varepsilon(\varepsilon \nabla u_2^\varepsilon, \nabla v_2) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} (\nabla u_1, \nabla v_1), \qquad \forall v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega),$$

$$\left(p^\varepsilon, \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \left(p, \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right), \qquad \forall v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega),$$

$$\left(q, \frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x_2}\right) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \left(q, \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right), \qquad \forall q \in L_0^2(\Omega).$$

Notons par $H_0(\partial_2; \Omega)$ l'espace (*cf.* Temam [6])

$$H_0(\partial_2; \Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega); \frac{\partial v}{\partial x_2} \in L^2(\Omega), v n_2 = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}.$$

Le problème limite consiste à chercher $(u_1, u_2, p) \in H_0^1(\Omega) \times H_0(\partial_2; \Omega) \times L_0^2(\Omega)$ tel que :

$$(5a) \qquad (\nabla u_1, \nabla v_1) - \left(p, \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) = (f, v_1), \qquad \forall (v_1, v_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0(\partial_2; \Omega),$$

$$(5b) \qquad \left(q, \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) = 0, \qquad \forall q \in L_0^2(\Omega).$$

L'unicité des solutions du problème (5) se montre aisément.

3. Une deuxième formulation variationnelle du problème limite. — En interprétant le problème (5) au sens des distributions on obtient le système d'équations aux dérivées partielles :

$$-\Delta u_1 + \frac{\partial p}{\partial x_1} = f, \qquad \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Une deuxième formulation variationnelle de ce problème peut être donnée. Pour ce faire on définit l'espace des pressions :

$$Q = \left\{ q \in L_0^2(\Omega); \frac{\partial q}{\partial x_2} = 0 \right\}.$$

Le problème variationnel consistera à chercher $(u_1, p) \in H_0^1(\Omega) \times Q$ tel que :

$$(6a) \qquad (\nabla u_1, \nabla v_1) - \left(p, \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right) = (f, v_1), \qquad \forall v_1 \in H_0^1(\Omega),$$

(6 b) $$\left(q, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)=0, \qquad \forall q \in \mathrm{Q}.$$

THÉORÈME 1. — *Le problème* (6) *admet une solution unique* $(u_1, p) \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \times \mathrm{Q}$.

Il est immédiat de voir que si $(u_1, u_2, p) \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \times \mathrm{H}_0(\partial_2; \Omega) \times \mathrm{L}_0^2(\Omega)$ est solution de (5), alors $p \in \mathrm{Q}$ et (u_1, p) est solution de (6). Réciproquement, on utilise le résultat suivant :

LEMME 2. — *Soit* $\varphi \in \mathrm{L}_0^2(\Omega)$ *vérifiant :*

$$(\varphi, q)=0, \qquad \forall q \in \mathrm{Q}.$$

Alors, il existe une unique fonction $v \in \mathrm{H}_0(\partial_2; \Omega)$ *telle que*

$$(\varphi, q)=\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}, q\right), \qquad \forall q \in \mathrm{L}_0^2(\Omega).$$

Ceci permet de conclure par l'équivalence des problèmes (5) et (6).

4. QUELQUES REMARQUES. — *a*. Il est clair que tous les résultats énoncés précédemment peuvent être étendus sans peine au cas tridimensionnel.

b. Un cas intéressant dans la pratique est celui d'une condition de Neumann sur le morceau de frontière

$$\Gamma_0=\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0<x<1,\ y=0\}.$$

On remplace donc la condition (1 *d*) par

$$\varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial y}=g, \qquad v=0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \qquad u=v=0 \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon \setminus \Gamma_0$$

où g est une fonction donnée dans $\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ avec $\|g\|_{-1/2, \Gamma_0} \leqq \mathrm{C}\,\varepsilon$.

En utilisant le changement de variables (2), l'équation (3 *c*) est remplacée par

$$\varepsilon \frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial x_2}=g, \qquad u_2^\varepsilon=0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \qquad u_1^\varepsilon=u_2^\varepsilon=0 \quad \text{sur } \Gamma \setminus \Gamma_0.$$

On peut alors vérifier que tous les résultats énoncés sont encore valables.

Note remise le 10 janvier 1990, acceptée le 6 mars 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] O. PIRONNEAU, *Méthodes d'éléments finis pour les fluides*, Masson, Paris, 1989.

[2] D. E. DIETRICH, M. G. MARIETTA et P. J. ROACHE, An ocean modelling system with turbulent boundary layers and topography, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 7, 1987, p. 833-855.

[3] *Schweizerische Zeitschrift für Hydrologie*, 50, n° 1, Birkhäuser Verlag, 1983.

[4] E. A. H. ZUUR et D. E. DIETRICH, The SOMS model and its application to lake Neuchâtel, *Aquatic Sciences* (à paraître), 1990.

[5] M. R. LAYDI, Sur l'influence de l'hypothèse hydrostatique dans la modélisation du lac de Neuchâtel, Rapport interne, Université de Neuchâtel, 1989.

[6] R. TEMAM, Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires, *Ann. Math. Pura ed Applicata*, LXXIX, 1968, p. 191-379.

[7] V. GIRAULT et P. A. RAVIART, *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Springer Series in Computational Mathematics, n° 5, Springer Verlag, 1986.

O. B. et M. L. : *Institut de Mathématiques, Université de Neuchâtel, Chantemerle* 20, 2000 *Neuchâtel, Suisse;*
R. T. : *Département de Mathématiques, École Polytechnique fédérale*, 1015 *Lausanne, Suisse.*