Mai 1991 6

CENTRE DE RECHERCHES SEMIOLOGIQUES

TRAVAUX DE LOGIQUE

La négation, une étude logique

Denis Miéville

CdRS

α η δ τ

Université de Neuchâtel

Centre de Recherches Sémiologiques
Travaux de logique
N° 6 — Mai 1991

Denis Miéville

LA NEGATION, UNE ETUDE LOGIQUE

CdRS

α η δ τ

Université de Neuchâtel

Centre de Recherches Sémiologiques
Université de Neuchâtel
Espace Louis-Agassiz 1
CH-2000 Neuchâtel (Switzerland)

SOMMAIRE

«Nous pensons par négation autant que par affirmation.»
(R. Blanché)

AVANT-PROPOS

Ce cahier, consacré à l'étude logique de la négation, se compose de deux parties: la première expose un état de la question par rapport, d'une part, aux différentes manières d'aborder la négation en logique, et, d'autre part, aux problèmes, aux impasses que l'on rencontre parfois lorsque l'on désire représenter dans les théories logiques traditionnelles des négations autres que celles propositionnelles. La deuxième partie est consacrée à la description sommaire d'une théorie formelle d'une nature conceptuelle différente de celle qui caractérise généralement les systèmes traditionnels. Dans cette perspective formelle, contextuelle et développementale, nous définirons de nouvelles négations et montrerons qu'elles sont en accord avec celles que nous utilisons parfois dans nos activités de raisonnement. Nous proposerons enfin des règles de déduction naturelle qui peuvent leur être associées.

Ce cahier constitue le volet logique d'une recherche financée par le FNSRS (Requête no 1.804-0.88). Il est donc complémentaire aux nos 56 et 57 des *Travaux du Centre de Recherches Sémiologiques*.

I. INTRODUCTION

Il n'existe pas de logique intéressante sans négation, et une réflexion à son propos s'impose naturellement lorsqu'on s'intéresse aux activités que la pensée met en oeuvre lorsqu'elle est amenée à réfuter un argument ou une hypothèse, lorsqu'elle s'oppose à un certain point de vue, lorsqu'elle est conduite à construire, ou à mettre en évidence, une situation contradictoire.

Aristote s'est très naturellement intéressé à la négation et, comme nous le verrons, les enseignements qu'il nous offre sont, aujourd'hui encore, dignes du plus grand intérêt. Au XXème siècle, les débats qui ont jalonné le courant intuitionniste sont intimemment associés à la signification que l'on attribue à la négation ainsi qu'à son rôle dans certaines lois logiques. Aujourd'hui encore les problèmes que soulèvent les négations n'ont pas toujours de solutions satisfaisantes. Cette structure est due au fait que généralement seule l'étude des significations propositionnelles de la négation ont été prises en compte. Une étude de ces différentes significations s'impose donc dès lors que l'on désire mieux comprendre, et peut-être dépasser, les lacunes que présentent ces négations-là. C'est ce que nous proposons dans un premier temps.

II. LOGIQUE ET NEGATION, UN PREMIER REGARD

Nous ne saurions envisager une réflexion sur la négation sans mentionner ni utiliser l'exposé remarquable que H.B. Curry propose dans son ouvrage *The Foundations of Mathematics* (1963: 254-310) et, dans le cadre de notre présentation, nous nous en inspirons très largement.

Etudier la représentation et l'action de la négation dans la logique des propositions nous engage tout d'abord à dégager les conséquences de l'absence de cette opération unaire. Il s'agit donc d'aborder une logique des propositions sans négation ou, dit autrement, une logique des propositions syntaxiquement complète au niveau de l'ensemble des théorèmes positifs qu'elle contient. A cet égard, il semblerait qu'une base axiomatique qui fonde les significations des opérateurs de la conditionnelle, de la conjonction et de la disjonction non exclusive devrait suffire à rendre compte de cet objectif. Une autre possibilité est envisageable, il s'agit de caractériser les règles de déduction associées aux opérateurs que nous venons de mentionner. Ces deux approches ne sont évidemment pas exclusives, et c'est en les considérant que nous aborderons tout d'abord une première logique sans négation: la logique absolue, LA.

Avant de nous engager dans cette entreprise, précisons deux choses: i) Toute présentation axiomatique est proposée sous la forme d'une liste finie de schémas d'axiomes contenant des variables syntaxiques (P, Q, M,...) désignant des expressions bien formées de la catégorie des propositions. ii) Toute présentation axiomatique doit être pensée en association avec une règle de substitution ainsi qu'une règle de détachement: la règle du *Modus Ponens*.

1. La logique absolue, LA

La logique absolue: approche axiomatique

Les schémas d'axiomes suivants sont suffisants pour caractériser la logique absolue. Ils sont empruntés à Grize (1967: 208).

A1	$P \supset (Q \supset P)$
A2	$(P \supset (Q \supset M)) \supset ((P \supset Q) \supset (P \supset M))$
A3	$(P \wedge Q) \supset P$
A4	$(P \wedge Q) \supset Q$
A5	$(P \supset Q) \supset ((P \supset M) \supset (P \supset (Q \wedge M)))$
A6	$P \supset (P \vee Q)$
A7	$Q \supset (P \vee Q)$
A8	$(P \supset M) \supset ((Q \supset M) \supset ((P \vee Q) \supset M))$

La logique absolue: approche déduction naturelle

Les règles positives

a) Les règles autorisant à poser des hypothèses, à répéter (ou à réitérer) dans une déduction toute proposition qui la précède:

- Règle hyp

g | P hyp

- <u>Règle rép</u>

$$\begin{array}{l|ll} g & P & \\ & \vdots & \\ & P & \quad g, \text{ rép} \end{array}$$

- <u>Règle réit</u>

$$\begin{array}{l|l} g & P \\ & \begin{array}{|ll} \vdots & \\ P & \quad g, \text{ réit} \end{array} \end{array}$$

b) Les règles associées à la conditionnelle [⊃]:

- <u>Règle d'élimination</u> [⊃e]

$$\begin{array}{l|ll} g & P \supset Q & \\ k & P & \\ & \vdots & \\ & Q & \quad g, k, \supset e \end{array}$$

- <u>Règle d'introduction</u> [⊃i]

$$\begin{array}{l|ll} g & \begin{array}{|l} \underline{P} \\ \vdots \end{array} & \\ k & \begin{array}{|l} Q \end{array} & \\ & P \supset Q & \quad g\text{-}k, \supset i \end{array}$$

c) Les règles associées à la conjonction [$\wedge$]:

- <u>Règle d'élimination</u> [$\wedge$e]

$$\begin{array}{l|ll} g & P \wedge Q & \\ & \vdots & \\ & P & g, \wedge e \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l|ll} g & P \wedge Q & \\ & \vdots & \\ & Q & g, \wedge e \end{array}$$

- <u>Règle d'introduction</u> [$\wedge$i]

$$\begin{array}{l|ll} g & P & \\ k & Q & \\ & \vdots & \\ & P \wedge Q & g, \wedge i \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l|ll} g & P & \\ k & Q & \\ & \vdots & \\ & Q \wedge P & g, k, \wedge i \end{array}$$

d) Les règles associées à la disjonction [$\vee$]:

- <u>Règle d'élimination</u> [$\vee$e]

$$\begin{array}{l|lll} g & P \vee Q & & \\ k & & \underline{P} & \text{hyp} \\ & & \vdots & \\ m & & R & \\ n & & \underline{Q} & \text{hyp} \\ & & \vdots & \\ s & & R & \\ & R & & g, k\text{-}m, n\text{-}s, \vee e \end{array}$$

- Règle d'introduction [vi]

$$\begin{array}{l|l} g & P \\ & \vdots \\ & P \vee Q \quad g, \text{ vi} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l|l} g & P \\ & \vdots \\ & Q \vee P \quad g, \text{ vi} \end{array}$$

Il est intéressant de constater qu'il existe des expressions bien formées, qui ne contiennent pas de négation, et qui, tout en étant des tautologies (au sens où leur table de vérité ne contient que la valeur *vrai*) ne sont pas démontrables dans le cadre de cette logique absolue. Les expressions des deux formes suivantes font partie de cette catégorie:

$$P \vee (P \supset Q)$$
$$((P \supset Q) \supset P) \supset P$$

Il est donc souhaitable de modifier le système de manière à obtenir une logique qui permet de démontrer tous les théorèmes positifs de la logique classique et uniquement ceux-là. Ce que nous ferons de façon à obtenir la logique positive, LP.

2. La logique positive, LP

La logique positive: approche axiomatique

Elle se caractérise par l'ensemble des schémas d'axiomes A1-A8 auxquels on ajoute, en tant que neuvième schéma d'axiomes, la forme propositionnelle suivante indémontrable dans LA:

A9: $P \vee (P \supset Q)$.

La logique positive: approche déduction naturelle

Il suffit d'ajouter la règle de Peirce à l'ensemble des règles de la logique absolue pour obtenir la logique positive.

- Règle Peirce

$$\begin{array}{r|l|l l}
k & & \underline{P \supset Q} & \\
 & & \vdots & \\
l & & P & \\
 & P & & k\text{-}l,\ \text{Peirce}
\end{array}$$

La logique positive contient deux sortes de théorèmes. Il y a d'une part ceux qui n'ont strictement rien à voir avec la négation: il s'agit de l'ensemble des expressions qui sont également démontrables dans la logique absolue. Il y a d'autre part les théorèmes qui ne contiennent aucun signe de négation, qui sont des tautologies et qui ne sont pas démontrables dans la logique absolue. Cette partition n'est paradoxale qu'en apparence. En effet,

> «La logique classique des propositions, en effet, dispose d'une possibilité de raisonnement par l'absurde qui fait intervenir la négation, pour l'éliminer ensuite par application du théorème «$\sim\sim p \supset p$» (Grize 1967: 209).

Démonstrations dans LP

Ti : $P \vee (P \supset Q)$

1	$(P \vee (P \supset Q)) \supset P$	hyp
2	$P \supset Q$	hyp
3	$P \vee (P \supset Q)$	2, vi
4	$(P \vee (P \supset Q)) \supset P$	1, réit
5	P	3, 4, ⊃e
6	P	2-5, Peirce
7	$P \vee (P \supset Q)$	6, vi
8	$P \vee (P \supset Q)$	1-7, Peirce

Tj: $((P \supset Q) \supset P) \supset P$

1	$P \vee (P \supset Q)$	Ax.
2	P	hyp
3	$(P \supset Q) \supset P$	hyp
4	P	2, réit
5	$((P \supset Q) \supset P) \supset P$	3-4, ⊃i
6	$P \supset Q$	hyp
7	$(P \supset Q) \supset P$	hyp
8	$P \supset Q$	6, réit
9	P	7, 8, ⊃e
10	$((P \supset Q) \supset P) \supset P$	7-9, ⊃i
11	$((P \supset Q) \supset P) \supset P$	1, 2-5, 6-10, ve

Ce dernier théorème est généralement appelé la *loi de Peirce.* Cette loi est en fait la cinquième icône de son algèbre (Peirce 1885: 3.222). Quant à la règle Peirce utilisée dans la démonstration du théorème I, elle est une simplification de la règle dite de Peirce (Curry, 1963: 193).

III. OU IL EST QUESTION DE SYSTEMES LOGIQUES AVEC NEGATION

Abordons maintenant quelques systèmes logiques qui contiennent des règles ou des schémas d'axiomes relatifs à la négation.

Nous exposerons plusieurs systèmes en proposant des interprétations plus ou moins fortes de la négation jusqu'à la saisie de l'interprétation de la négation dans le cadre de la logique des propositions la plus complète au sens classique du terme.

1. La logique minimale, LM

Nous nous intéresserons tout d'abord à un système de base dans lequel la négation d'une proposition peut être interprétée comme le fait que cette proposition est réfutée. De manière plus formelle, imaginons une théorie dans laquelle nous exhibons la disjonction de toutes les expressions bien formées absolument non valides, c'est-à-dire les expressions dont l'évaluation est le faux quelle que soit l'interprétation; appelons cette disjonction F. Sur la base de cette construction, la négation d'une proposition *p* peut se définir ainsi:

$$\sim p =df\ p \supset F$$

> «Le terme de «réfutabilité» se justifie en ce sens que, si une proposition est de cette nature, les règles du système permettent de montrer en un nombre fini d'étapes qu'elle conduit à une conséquence posée comme inacceptable, à savoir à l'un des anti-théorèmes qui composent la proposition «F»» (Grize, 1967: 207).

La logique minimale: approche axiomatique

Elle se caractérise par l'ensemble des schémas d'axiomes A1-A8, ensemble complété par les deux schémas suivants:

A10 $(P \supset \sim P) \supset \sim P$
A11 $\sim P \supset (P \supset \sim Q)$

La logique minimale: approche déduction naturelle

Cette approche est caractérisée par l'ensemble des règles de la logique absolue complété par une première règle associée à la négation, la règle ~i:

- <u>Règle d'introduction</u> [~i]

$$\begin{array}{r|l|l}
g & & \underline{P} \qquad\qquad \text{hyp} \\
 & & \vdots \\
k & & Q \\
l & & \sim Q \\
 & \multicolumn{2}{l}{\sim P \qquad\qquad \text{g, k, l, \sim i}}
\end{array}$$

Sur la base de cette règle, il est possible d'obtenir la règle dérivée N:

- <u>Règle N</u>

$$\begin{array}{r|l}
g & P \\
k & \sim P \\
 & \vdots \\
 & \sim Q \qquad\qquad \text{g, k, N}
\end{array}$$

Dans ce système, les expressions bien formées suivantes sont des théorèmes:

T1 $\sim(P \vee Q) \equiv (\sim P \wedge \sim Q)$
T2 $(\sim P \vee \sim Q) \supset \sim(P \wedge Q)$
T3 $\sim P \equiv \sim\sim\sim P$
T4 $P \supset \sim\sim P$
T5 $(P \wedge \sim Q) \supset \sim(P \supset Q)$

alors que les suivantes, qui sont des tautologies (et bien sûr des théorèmes de la logique classique des propositions), n'en sont pas:

T6 $\sim\sim P \supset P$
T7 $P \vee \sim P$
T8 $P \vee (P \supset Q)$
T9 $((P \supset Q) \supset P) \supset P$
T10 $\sim(P \supset Q) \supset (P \wedge \sim Q)$
T11 $(P \supset Q) \supset (\sim P \vee Q)$
T12 $(\sim P \vee Q) \supset (P \supset Q)$
T13 $\sim(P \wedge Q) \supset (\sim P \vee \sim Q)$
T14 $(\sim P \supset Q) \supset (\sim Q \supset P)$
T15 $(\sim P \supset \sim Q) \supset (Q \supset P)$

Démonstration dans LM:

1	$\sim P \vee \sim Q$	hyp
2	$P \wedge Q$	hyp
3	$\sim P \vee \sim Q$	1, reit
4	$\sim P$	hyp
5	$P \wedge Q$	2, reit
6	P	5, $\wedge$e
7	$\sim P$	4, rép
8	$\sim(P \wedge Q)$	6, 7, N
9	$\sim Q$	hyp
10	$P \wedge Q$	2, reit
11	Q	10, $\wedge$e
12	$\sim Q$	9, rép
13	$\sim(P \wedge Q)$	11, 12, N
14	$\sim(P \wedge Q)$	3, 4-8, 9-13, $\vee$e
15	$P \wedge Q$	2, rép
16	$\sim(P \wedge Q)$	2, 14, 15, $\sim$i
17	$(\sim P \vee \sim Q) \supset \sim(P \wedge Q)$	1-16, $\supset$i

Ce système de pure (ou simple) réfutabilité (Johansson 1936) dans lequel la négation est minimale, ne permet pas de démontrer la «loi de Peirce», ni le principe du tiers exclu qui exprime le principe essentiel de la logique des propositions selon lequel «toute chose est, ou n'est pas *"Quaelibet res aut est, aut non est"*» (Chenique 1975: 107). Cet état nous engage à enrichir la logique minimale de manière à obtenir une théorie qui contienne au moins le principe du tiers exclu.

2. La logique de la négation stricte, LD

Cette théorie doit son nom à une remarque émise par Johansson qui a réalisé qu'elle pourrait rendre compte d'une théorie de l'implication stricte. «...The term is hardly apt, but no better short name has been proposed». (Curry 1963: 260).

Ce système, dit de stricte réfutabilité, peut être conçu en enrichissant soit la base axiomatique de la logique minimale, soit en lui ajoutant une nouvelle règle d'inférence.

La logique stricte: approche axiomatique

Elle se caractérise par l'ensemble des schémas d'axiomes A1-A8, A10 et A11, ensemble complété par le schéma suivant: A12: $P \vee \sim P$.

La logique stricte: approche déduction naturelle

Cette approche est riche de toutes les règles de déduction de la logique minimale complétée par la règle T:

- <u>Règle T</u>

$$\begin{array}{l|ll} k & \sim P \supset P & \\ & \vdots & \\ & P & k, T \end{array}$$

Dans ce système, les théorèmes suivants sont démontrables.

T1 $\sim(P \vee Q) \equiv (\sim P \wedge \sim Q)$
T2 $(\sim P \vee \sim Q) \supset \sim(P \wedge Q)$
T3 $\sim P \equiv \sim\sim\sim P$
T4 $P \supset \sim\sim P$
T5 $(P \wedge \sim Q) \supset \sim(P \supset Q)$

ce qui n'est pas surprenant puisque la logique de la négation stricte est une expansion de la logique minimale. Mais de plus, on peut notamment démontrer les théorèmes suivants:

T7 $P \vee \sim P$
T11 $(P \supset Q) \supset (\sim P \vee Q)$
T13 $\sim(P \wedge Q) \supset (\sim P \vee \sim Q)$

Les théorèmes T1, T2 et T13 inscrivent les lois de Morgan dans cette théorie qui contient également une des formes du dilemme:

T16 $((P \supset Q) \wedge (\sim P \supset Q)) \equiv Q$

ainsi que l'expression du principe de rétorsion:

T19 $(\sim P \supset P) \supset P$

Par contre les expressions suivantes qui sont toutes des tautologies, et donc des théorèmes de la logique classique des propositions ne sont pas démontrables dans la logique de la négation stricte:

T6 $\sim\sim P \supset P$
T8 $P \vee (P \supset Q)$
T9 $((P \supset Q) \supset P) \supset P$
T10 $\sim(P \supset Q) \supset (P \wedge \sim Q)$
T12 $(\sim P \vee Q) \supset (P \supset Q)$
T14 $(\sim P \supset Q) \supset (\sim Q \supset P)$
T15 $(\sim P \supset \sim Q) \supset (Q \supset P)$
T17 $\sim P \supset (P \supset Q)$
T18 $(P \wedge \sim P) \supset Q$

Ce système ne contient donc ni la loi de la double négation (par T6), ni les théorèmes spécifiques de la logique positive (par T8 et T9), ni certaines formes de la contraposition (par T14 et T15), ni une des formes du EX FALSO QUODLIBET SEQUITUR (par T17) ni le principe dit de l'inconsistance (par T18).

Les limites de ce système rendent souhaitable un autre développement à partir de la logique minimale. Celui-ci inscrira un système dit de réfutabilité classiquement stricte: la logique de la négation c-stricte.

3. La logique de la négation c-stricte, LE

Approche axiomatique

La base axiomatique est déterminée par les schémas d'axiomes A1-A11. Le principe du tiers exclu n'apparaît donc plus explicitement comme un schéma d'axiomes.

Approche déduction naturelle

Aux règles qui déterminent le mécanisme inférentiel de la logique minimale, nous ajouterons la règle de Peirce. On dispose donc dans la logique de la négation c-stricte des règles positives, de la règle [~i] (p. 12) et de la règle Peirce (p. 8).

Avant de mettre en évidence les limites de ce système, nous montrerons que la logique de la négation c-stricte est plus forte que la logique de la négation stricte, et qu'elle contient cette dernière. Pour cela, démontrons que le schéma d'expressions bien formées $P \vee \sim P$ est un schéma de théorème dans LE.

Démonstration I (utilisation de la règle Peirce)

1	$\mid\ \mid (P \vee \sim P) \supset \sim P$	hyp
2	$\mid\ \mid\ \mid P$	hyp
3	$\mid\ \mid\ \mid P \vee \sim P$	2, vi
4	$\mid\ \mid\ \mid (P \vee \sim P) \supset \sim P$	1, réit
5	$\mid\ \mid\ \mid \sim P$	3, 4, ⊃e
6	$\mid\ \mid\ \mid P$	2, rép
7	$\mid\ \mid \sim P$	2, 5, 6, ~i
8	$\mid\ \mid P \vee \sim P$	7, vi
9	$\mid P \vee \sim P$	1-8, Peirce

Démonstration II (utilisation du schéma d'axiomes A9)

1	$\mid P \vee (P \supset \sim P)$	A9, (Q/~P)
2	$\mid\ \mid P$	hyp
3	$\mid\ \mid P \vee \sim P$	2, vi
4	$\mid\ \mid P \supset \sim P$	hyp
5	$\mid\ \mid\ \mid P$	hyp
6	$\mid\ \mid\ \mid P \supset \sim P$	4, réit
7	$\mid\ \mid\ \mid \sim P$	5, 6, ⊃e
8	$\mid\ \mid\ \mid P$	5, rép.
9	$\mid\ \mid \sim P$	5, 7, 8, ~i
10	$\mid\ \mid P \vee \sim P$	9, vi
11	$\mid P \vee \sim P$	1, 2-3, 4-10, ve

Démonstration III. Elle met en évidence la pertinence de la règle T.

1	$\sim P \supset P$	hyp
2	$P \supset \sim P$	hyp
3	P	hyp
4	$P \supset \sim P$	2, réit
5	$\sim P$	3, 4, $\supset$e
6	P	3, rép
7	$\sim P$	3, 5, 6, $\sim$i
8	$\sim P \supset P$	1, réit
9	P	7, 8, $\supset$e
10	P	2-9, Peirce
11	$(\sim P \supset P) \supset P$	1-11, $\supset$i

Dans cette théorie de la négation c-stricte, les expressions suivantes sont des théorèmes:

T1	$\sim(P \vee Q) \equiv (\sim P \wedge \sim Q)$
T2	$(\sim P \vee \sim Q) \supset \sim(P \wedge Q)$
T3	$\sim P \equiv \sim\sim\sim P$
T4	$P \supset \sim\sim P$
T5	$(P \wedge \sim Q) \supset \sim(P \supset Q)$
T7	$P \vee \sim P$
T8	$P \vee (P \supset Q)$
T9	$((P \supset Q) \supset P) \supset P$
T11	$(P \supset Q) \supset (\sim P \vee Q)$
T13	$\sim(P \wedge Q) \supset (\sim P \vee \sim Q)$
T16	$((P \supset Q) \wedge (\sim P \supset Q)) \equiv Q$
T19	$(\sim P \supset P) \supset P$

alors que les expressions suivantes n'en sont pas dans la mesure où on ne dispose pas encore de la loi de la double négation:

T6	$\sim\sim P \supset P$
T10	$\sim(P \supset Q) \supset (P \wedge \sim Q)$
T12	$(\sim P \vee Q) \supset (P \supset Q)$
T14	$(\sim P \supset Q) \supset (\sim Q \supset P)$
T15	$(\sim P \supset \sim Q) \supset (Q \supset P)$
T17	$\sim P \supset (P \supset Q)$
T18	$(P \wedge \sim P) \supset Q$

La logique de la négation c-stricte doit donc être complétée pour pouvoir rendre compte du calcul classique des propositions.

4. La logique classique des propositions, LK

Approches axiomatiques

1) Les schémas d'axiomes A1-A8, A10, A12 et comme schéma nouveau, le schéma A13:

$$A13: \sim P \supset (P \supset Q)$$

ce système d'axiomes est indépendant, au sens où chaque schéma pris isolément n'est pas déductible des autres.

2) Les schémas d'axiomes A1-A10 auxquels on ajoute le même schéma A13:

$$A13: \sim P \supset (P \supset Q)$$

ce système n'est pas indépendant.

Approche déduction naturelle

L'ensemble des règles suivantes est suffisant pour fonder le calcul classique des propositions:

- règles positives,
- règle ~i,
- soit la règle T,
- soit la règle Peirce.

Ce système, rappelons-le, possède toutes les propriétés de pertinence et de complétude souhaitées.

Remarques

Dans cette construction successive de systèmes logiques, on a passé de la logique minimale à la logique classique en privilégiant avant toute chose une signification de la négation associée à la notion de réfutabilité. Sur la base d'une théorie de simple réfutabilité, dans laquelle la négation est minimale (LM), on a tout d'abord construit une première expansion qui structure une théorie de réfutabilité complète, dans laquelle la négation est stricte, (LD). On a ensuite modifié ce dernier système de manière à obtenir un nouveau système de réfutabilité classique associé à une négation c-stricte, (LE). Une dernière expansion nous a enfin permis d'atteindre la logique classique des propositions, (LK), avec sa négation dite classique, logique dans laquelle le mécanisme déductif est associé à l'absurdité dite complète.

Nous aurions pu procéder d'une autre manière en modifiant quelque peu la logique minimale de manière à pouvoir interpréter *~P* non plus comme «P est réfutable», mais comme «P est absurde» en ce sens que si une proposition est de cette nature, elle conduit à n'importe quelle proposition. Dans cette perspective, la négation de *P* peut se définir ainsi:

$$\sim P =_{df} P \supset Q$$

> «Il faut remarquer que cette façon de définir la négation conserve encore un caractère constructif. Sans doute, pour s'assurer qu'une proposition est absurde, n'est-il plus nécessaire de montrer qu'elle conduit à telle proposition préalablement posée comme irrecevable. Néanmoins il faut encore fournir une déduction, celle par exemple de $m \wedge {\sim} m$ en partant de p comme prémisse» (Grize 1967: 208).

En agissant de cette manière, nous nous engageons dans une perception intuitionniste de la logique (Heyting 1930, 1956 et 1980), et quelques remarques concernant cette voie sont de nature à mieux faire comprendre cette perspective, (LJ), ainsi que la signification de la négation qui lui est associée.

L'intuitionnisme s'inscrit de manière marginale dans les courants de recherches sur les fondements des mathématiques qui ont marqué la réflexion métamathématique à l'aube de notre siècle. L. Brouwer (1881-1966) en fut la figure la plus marquante. Cette école n'accepte pas sans réserve la théorie des ensembles de Zermelo, et quant à la logistique, elle la juge de manière particulièrement sévère:

> «...Brouwer est d'avis qu'elle ne peut rien nous apprendre au sujet des mathématiques puisqu'elle est condamnée à rester séparée des mathématiques; elle devra se borner à n'être qu'une copie fidèle, machinale, sténographique, du langage mathématique; en effet, ce langage n'appartient pas lui-même, aux mathématiques, il n'est qu'un outil imparfait qui permet aux hommes de s'entendre à l'égard des mathématiques et de les retenir plus facilement. La logique et la logistique sont des sciences empiriques appartenant à l'ethnographie plutôt qu'à la psychologie». (Beth 1950: 136)

Pour Brouwer, il y a de bonnes raisons de se méfier, en mathématiques, des principes soi-disant reconnus de la logique. Ainsi, baser l'existence d'un système mathématique sur la non-contradiction du système des postulats qui le fonde n'est pas justifié. L'existence mathématique est une construction effective, et une absence de contradiction ne saurait suffire à la fonder; on ne doit donc pas inférer le vrai du non-contradictoire. Tout théorème mathématique est une vérité synthétique à priori, et toute preuve doit être constructive. Il y a donc une distinction à opérer entre deux négations, la fausseté qui est associée à la non-existence, et l'absurdité qui est associée à l'impossibilité d'existence. Dans cette perspective, le principe du tiers exclu ne saurait être accepté sans condition. De plus le principe de double négation n'est pas admis, dans la mesure où on ne saurait conclure nécessairement à la vérité à partir de la négation d'une absurdité.

5. La logique intuitionniste, LJ

La logique intuitionniste: approche axiomatique

La base axiomatique suivante permet de caractériser la logique intuitionniste:

A1 $P \supset (Q \supset P)$
A2 $(P \supset (Q \supset M)) \supset ((P \supset Q) \supset (P \supset M))$
A3 $(P \wedge Q) \supset P$
A4 $(P \wedge Q) \supset Q$
A5 $(P \supset Q) \supset ((P \supset M) \supset (P \supset (Q \wedge M)))$
A6 $P \supset (P \vee Q)$
A8 $(P \supset M) \supset ((Q \supset M) \supset ((P \vee Q) \supset M))$
A10 $(P \supset {\sim}P) \supset {\sim}P$
A13 ${\sim}P \supset (P \supset Q)$

La logique intuitionniste: approche déduction naturelle

Cette approche peut se caractériser en ajoutant aux règles positives la règle ~i et la règle ~e.

- Règle d'élimination [~e]

$$
\begin{array}{l|ll}
k & P & \\
l & {\sim}P & \\
 & \vdots & \\
 & Q & \quad k,\ l,\ {\sim}e
\end{array}
$$

Dans ce système, il est possible de démontrer les théorèmes suivants:

T1 $\sim(P \vee Q) \equiv (\sim P \wedge \sim Q)$
T2 $(\sim P \vee \sim Q) \supset \sim(P \wedge Q)$ mais pas l'inverse
T3 $\sim P \equiv \sim\sim\sim P$
T4 $P \supset \sim\sim P$
T5 $(P \wedge \sim Q) \supset \sim(P \supset Q)$
T12 $(\sim P \vee Q) \supset (P \supset Q)$
T21 $(P \supset Q) \supset (\sim Q \supset \sim P)$

alors que les expressions suivantes, qui sont des tautologies (et donc des théorèmes de la logique classique), n'en sont pas:

T6 $\sim\sim P \supset P$
T7 $P \vee \sim P$
T8 $P \vee (P \supset Q)$
T9 $((P \supset Q) \supset P) \supset P$
T10 $\sim(P \supset Q) \supset (P \wedge \sim Q)$
T11 $(P \supset Q) \supset (\sim P \vee Q)$
T13 $\sim(P \wedge Q) \supset (\sim P \vee \sim Q)$
T14 $(\sim P \supset Q) \supset (\sim Q \supset P)$
T15 $(\sim P \supset \sim Q) \supset (Q \supset P)$
T16 $((P \supset Q) \wedge (\sim P \supset Q)) \equiv Q$
T17 $\sim P \supset (P \supset Q)$
T18 $(P \wedge \sim P) \supset Q$
T19 $(\sim P \supset P) \supset P$
T20 $(\sim Q \supset \sim P) \supset (P \supset Q)$

Dans ce système, *~P* signifie que «P est (simplement) absurde» et non pas «complètement absurde (ou faux)» comme dans la logique classique.

Il est possible de construire une expansion de la logique intuitionniste de manière à disposer de la logique classique des propositions. On peut le faire en proposant la base axiomatique suivante:

A1 $P \supset (Q \supset P)$
A2 $(P \supset (Q \supset M)) \supset ((P \supset Q) \supset (P \supset M))$
A3 $(P \wedge Q) \supset P$
A4 $(P \wedge Q) \supset Q$
A5 $(P \supset Q) \supset ((P \supset M) \supset (P \supset (Q \wedge M)))$
A6 $P \supset (P \vee Q)$
A7 $Q \supset (P \vee Q)$
A8 $(P \supset M) \supset ((Q \supset M) \supset ((P \vee Q) \supset M))$
A10 $(P \supset \sim P) \supset \sim P$
A14 $\sim\sim P \supset P$

ou, en disposant des règles positives, de la règle ~i et de la nouvelle règle suivante:

- Règle neg [~e]

$$
\begin{array}{l|ll}
k & \sim\sim P & \\
 & \vdots & \\
 & P & \quad k, \text{neg} \sim e
\end{array}
$$

Les systèmes que nous avons présentés ne constituent pas une liste exhaustive des théories logiques associées à une négation propositionnelle. Il est en effet possible de construire de nombreux systèmes entre la logique minimale et la logique classique. En fait, il en existe une infinité (Gödel 1932; Umezawa 1959). Ceux-ci n'ont cependant pas l'intérêt de ceux qui viennent d'être présentés dans la mesure où ils ne répondent pas à un réel souci épistémologique associé à la négation.

6. Remarques

L'opérateur propositionnel que nous venons d'étudier est fort complexe, et il n'est pas inintéressant d'examiner les conséquences de certaines de ses interprétations.

La réfutation, -P

Nous avons posé qu'une proposition *P* est réfutée, *-P*, si cette proposition conduit à une proposition fausse:

$$-P =_{df} P \supset F$$

Il s'ensuit que de $P \wedge -P$, on ne peut inférer n'importe quelle proposition, mais uniquement une proposition qu'on ne saurait admettre.

$$P \wedge -P \vdash -Q$$

De plus, «P et -P ne sont pas contradictoires, mais seulement contraires. Cela veut dire qu'elles ne peuvent jamais être vraies ensemble, mais qu'elles peuvent fort bien être toutes les deux fausses» (Grize 1989: 107).

L'absurdité, ¬P

Si l'on veut disposer d'une négation qui permette d'inscrire le principe de EX FALSO QUODLIBET SEQUITUR, il faut l'interpréter comme l'absurdité. Il s'ensuit alors que de $P \wedge \neg P$, on peut inférer n'importe quelle proposition

$$P \wedge \sim P \vdash Q$$

Dans cette perspective, «si le couple (P, ¬P) n'est pas encore contradictoire mais seulement contraire, la signification de ¬P [absurdité] est toutefois plus riche que celle de -P [réfutation]» (Grize 1989: 108).

L'exclusion, ~P

Pour disposer d'un système dans lequel tout couple de propositions (*P*, *~P*) est effectivement contradictoire et non pas seulement contraire, il est nécessaire de jouir d'un principe d'exclusion tel que:

d'une part l'exclusion implique l'exhaustivité

$$\sim(P \wedge \sim P) \rightarrow P \vee \sim P$$

et d'autre part, l'exhaustivité mutuelle implique l'exclusion

$$P \vee \sim P \rightarrow \sim(P \wedge \sim P)$$

> «Nier que les propositions sont contraires équivaut à affirmer qu'elles s'excluent l'une l'autre» (Grize 1989: 108).

La négation opère donc comme une exclusion, il s'agit de la négation classique.

IV. OU L'ON RENCONTRE LES PREMIERES LIMITES ASSOCIEES A LA NEGATION PROPOSITIONNELLE

1. Négation et principe de convenance

Les premières faiblesses de la négation propositionnelle apparaissent lorsqu'on l'associe à la représentation prédicative des énoncés logiques. Une de ces difficultés provient d'une propriété quelque peu embarrassante de la logique classique des prédicats du premier ordre qui impose l'applicabilité universelle de tout prédicat. L'exemple suivant est de nature à rendre compte de cette difficulté:

> «...The predicate "prime" is true of two, false of four and not applicable to pi. This means that such predicate has a range of applicability within which it holds true or false and outside of which it does not hold at all. Thus a sentence can fail to be true without being false and it can fail to be false without being true... Yet the following is logically true on standard logic:
>
> $$(\forall X)(PX \;\vee \sim PX).$$
>
> This reflects the fact that standard semantic presupposes universal ranges of applicability for all predicates». (Corcoran 1973: 43).

Dans la perspective de la sémantique classique, le fait de ne pas appartenir à l'extension d'une propriété entraîne nécessairement l'appartenance à l'extension complémentaire de cette propriété. Il n'est donc pas possible d'exprimer, dans le langage de cette logique, que tout objet est associé, dans un univers de référence déterminé, à un champ particulier de déterminations qui lui sont propres, et qu'il n'est en aucune manière concerné

pourraient être dans un rapport de convenance ou de non-convenance avec un sujet.

Dans le même ordre de difficulté, analysons quelques propositions que nous évaluerons par rapport aux connaissances arithmétiques naïves que nous partageons. Dans ce contexte, les deux propositions suivantes sont tenues pour vraies:

a) treize est un nombre premier
b) deux est un nombre pair

alors que celles-ci sont fausses:

c) huit est un nombre premier
d) huit est stupide.

De par la loi du tiers exclu, il s'ensuit que la négation de ces deux dernières propositions a pour valeur le vrai:

e) huit n'est pas un nombre premier
f) huit n'est pas stupide.

Il est nécessaire de relever ici que, si la négation est la déclaration qu'une chose est séparée d'une autre chose, comme le dit Aristote (DI, 6.17a, 26-27), les deux propositions e) et f) révèlent des différences quant à la nature de cette séparation.

«Huit n'est pas un nombre premier» est une proposition vraie parce que le nombre «huit» n'appartient pas à l'extension des objets associés à la propriété «être premier». Cependant, il est convenable de lui associer cette propriété. Celle-ci lui convient parce qu'elle appartient au champ des déterminations de l'objet «huit» au même titre que les propriétés «être pair» ou «être impair» par exemple. Dans un tel contexte, nous dirons que «huit» est séparé de la propriété «être premier», mais que celle-ci lui convient dans le sens où elle appartient à la classe des propriétés qui, dans le cadre de l'arithmétique élémentaire sont associables aux nombres entiers positifs.

«Huit n'est pas stupide» est une proposition vraie parce que le nombre «huit» n'appartient pas à l'extension des objets associés à la propriété «être stupide». Mais de plus cette propriété ne lui convient pas. «Huit» est séparé de la propriété «être stupide», et de plus celle-ci ne saurait lui convenir dans le sens où elle n'appartient pas à la classe des propriétés qui, dans le contexte de l'arithmétique élémentaire, sont associables aux entiers positifs.

On pourrait admettre que cette nuance n'est que de peu d'importance. Cependant, nous ne pouvons pas négliger le fait que la pensée opère cette distinction. En effet, dans un contexte donné, tout objet est associé à un ensemble de propriétés qui lui conviennent maintenant, et cet ensemble ne contient que celles-ci. Cela nous incite à penser une loi logique qui tout à la fois tiendrait compte du principe du tiers exclu et du principe de convenance, et qui pourrait se paraphraser de la manière suivante:

quel que soit l'objet de pensée considéré,
soit,
il est associé soit à la propriété p, soit à la propriété duale de p,
soit,
il n'est ni associé à la propriété p, ni à la propriété duale de p.

Certains logiciens se sont préoccupés d'introduire cette relation de convenance dans une théorie logique. Strawson aborde le problème en proposant un domaine de valeurs admissibles ou possibles d'une variable de manière à n'offrir que des propositions sensées. La proposition «huit est stupide» serait ainsi éliminée, et donc inévaluable. Mais «pi est un nombre premier» le serait également bien que cette dernière proposition paraisse plus sensée que la précédente. Cette manière d'envisager les choses n'est pas très satisfaisante, et Strawson est conscient de la difficulté d'ériger une règle relative à ce qui est admissible ou concevable. «There are no precise rules determining, for ordinary language, what is nonsense and what is not» (Strawson 1952: 32).

Des travaux plus récents abordent cette difficulté en proposant une valeur d'indétermination aux propositions dont l'association sujet/prédicat ne serait pas admissible ou convenable. Ainsi, pour Blamey (1986) les deux propositions suivantes sont traitées comme des propositions indéterminées dans le domaine de la cosmologie traditionnelle:

La lune est saine
La lune est malsaine

Je vois trois raisons pour refuser cette manière de résoudre le problème.

1. Elle introduit une troisième valeur et échappe ainsi à la logique bivalente.
2. Le principe du tiers exclu perd son statut de loi fondamentale.
3. A l'écolier qui asserte que *pi est un nombre premier*, nous répondons que c'est faux, et non que c'est indéterminé.

2. Où l'on revient à la perspective intuitionniste

Une des idées de base de l'Ecole de Brouwer est que toute notion mathématique est fondée de manière essentielle par une construction mathématique effective qui lui est associée et, par conséquent, «if the construction is impossible, then the notion cannot be clear» (Heyting 1980: 124). Il n'est pas nécessairement du domaine du logicien de s'intéresser à telle ou telle construction, mais il peut néanmoins s'interroger sur les lois de pure logique que la théorie intuitionniste classique refuse. Si cette école accepte les deux théorèmes suivants du calcul des prédicats,

a) $(\forall x)p(x) \supset \sim(\exists x)\sim p(x)$

b) $(\exists x)p(x) \supset \sim(\forall x)\sim p(x)$

par contre, elle n'admet pas ceux-ci:

c) $\sim(\exists x)\sim p(x) \supset (\forall x)p(x)$

d) $\sim(\forall x)\sim p(x) \supset (\exists x)p(x)$

L'argument avancé, ou plutôt le contre-exemple proposé pour refuser l'une de ces thèses est en étroite relation avec une certaine signification de la négation; voici ce contre-exemple:

> «Let x range over the real numbers and let *p(x)* be «*x* is rational or *x* is irrational»» (Heyting 1980: 107).

Dans la perspective constructiviste, on sait construire effectivement certains nombres transcendants tels π et e, mais il en est d'autres au sens ordinaire que l'on ne sait pas construire effectivement, et l'on comprend alors le rejet de certaines des thèses de la logique classique des prédicats du premier ordre. En effet, si aucune preuve de l'irrationalité d'un nombre n'a été donnée, l'expression c) par exemple, perd son sens de loi logique.

Cette situation est quelque peu embarrassante, et on peut penser que certaines ambiguïtés pourraient être éliminées en distinguant différentes interprétations de la négation. Considérons la proposition suivante:

p =df ρ n'est pas irrationnel

La proposition «p est fausse» peut être interprétée:

1) Si nous supposons la vérité de p, nous sommes conduit à une contradiction;
2) aucune preuve de l'irrationalité de ρ n'a été fournie;
3) le nombre ρ est rationnel;
4) le nombre ρ n'est ni rationnel ni irrationnel.

Pour dépasser cette situation, une solution possible pourrait être, notamment, de formuler un principe du tiers exclu associé à la fois à un principe de relativité constructive, ainsi qu'à un principe de convenance.

3. Discours et principe de convenance

Afin d'introduire formellement un principe de convenance dans un langage logique, je me suis intéressé à la manière dont la pensée logico-discursive indique qu'un prédicat tout à la fois convient à un objet et ne lui est pas prédicable. Dans la langue française, une telle prédication est généralement marquée de deux manières: soit à l'aide d'un préfixe, soit en utilisant une négation qui opère sur un terme. Ainsi, dire d'un sujet qu'il est injuste, impair, incommensurable ou non potable, c'est affirmer qu'il n'est pas juste, pair, commensurable ou potable, mais que ces propriétés lui conviennent, qu'il est pertinent de lui associer les notions desquelles ces propriétés sont issues.

Dans la langue de tous les jours, lorsque le principe de convenance est inscrit, il est généralement associé à un couple de propriétés duales telles que (pair/impair), (aligné/non aligné). Le couple -la notion- (pair/impair) convient aux nombres entiers naturels positifs, il ne convient pas à l'objet *Pi* ou à l'objet «terre» dans le monde référentiel où on a l'habitude de penser ces objets. De même, la notion (aligné/non aligné) convient à certains pays, mais pas à tous.

Aristote déjà était conscient de ces distinctions.

> «Si tout est égal ou n'est pas égal, tout n'est pas égal ou inégal, sinon dans le sujet apte à recevoir l'égalité» (Aristote, 1055b: 10).

Je conserverai de ce qui vient d'être exposé que l'idée de convenance logique est associée à celle de négation, mais que celle-ci n'est pas la négation propositionnelle. Elle marque davantage, en tous les cas dans les exemples étudiés, l'existence d'une dualité entre une propriété et son contraire. Je nommerai cette négation, la négation prédicative. Dans la suite de cette étude, il s'agira de penser une représentation logique de cette nouvelle négation, et cela, sans préjuger d'autres formes logiques de la négation que nous n'avons pas encore mentionnées. Celle, par exemple, liée au couple de fonctions propositionnelles «armer» *versus* «désarmer» qui constitue ce que nous nommerons dorénavant, une notion verbale. Il s'agira donc d'utiliser une théorie formelle capable de nous offrir une grande liberté d'expression et d'ouverture.

V. VERS UNE AUTRE MANIERE CONCEPTUELLE D'ELABORER LES THEORIES FORMELLES

Dans notre volonté de disposer d'un système logique qui contienne la signification de différents foncteurs de négation, il est indispensable de connaître les négations que nous voudrions représenter. Cela nécessite donc de les reconnaître dans les organisations raisonnées où elles apparaissent. Cela nous entraîne également à décider dans quelle mesure la liste que nous voudrions proposer épuise les différents foncteurs de négation possibles. Dans un article, Castañeda (1989) distingue dans une première étape de sa réflexion cinq négations différentes: la négation propositionnelle, la négation associée aux propriétés, la négation associée aux actions, les négations liées aux fonctions propositionnelles et aux fonctions de pratique. Puis il asserte un peu plus loin:

> «We do not actually know how many types of negation there are, but we can be certain that they all belong to a genus negation. Are negations like colors?»

Pour réaliser ce projet, il faudrait également analyser les possibles nouveaux connecteurs auxquels ces négations pourraient être associées. La solution à ce problème n'est pas aussi simple qu'on pourrait le supposer. Elle nous engage directement à nous interroger sur la nature conceptuelle des théories formelles et sur le statut épistémique des définitions.

1. Où il est question de la définition conventionnelle

On considère généralement qu'une définition conventionnelle inscrit un accord, un principe choisi par décision volontaire, et ceci pour la commodité d'une description systématique.

Je m'intéresserai ici uniquement aux définitions conventionnelles dites explicites, c'est-à-dire celles qui n'utilisent pas le terme défini pour se définir; je n'aborderai donc pas les définitions dites régressives (Carnap 1949). Je considérerai que toute activité définitoire est associée à un système qui contient des signes primitifs, et que cette activité permet d'inscrire dans le système un signe qu'il ne connaissait pas encore en établissant une relation d'équivalence entre deux ensembles de signes: le *definiendum* et le *definiens*. Cette mise en relation n'est pas quelconque, elle doit nécessairement respecter certaines conditions:

1. Construire le *definiens* uniquement sur ce qui été préalablement posé ou défini.

2. Inscrire un *definiendum* qui contienne nécessairement un terme nouveau.

3. Toute variable du *definiens* doit posséder une occurrence au moins dans le *definiendum*. Cette condition permet d'éviter des contradictions.

4. Toute variable du *definiendum* doit posséder une occurrence dans le *definiens*.

5. Tout signe doit figurer une et une seule fois dans le definiendum; cette condition est nécessaire pour éviter des problèmes liés à la substitution.

Par rapport à ce moule, il est possible de considérer la définition de deux manières:

a. Les signes sont dépourvus de signification. Les *definiendum* et *definiens* en sont donc dépourvus aussi. La définition est dite syntaxique (ou nominale). Il s'agit d'une convention d'écriture. C'est une abréviation, une commodité linguistique. Aucun problème d'existence ne se pose.

b. Les signes sont pourvus d'une signification. La définition est dite alors sémantique. Dans cette perspective, toute activité définitoire révèle l'importance que l'on veut attribuer à certains contenus de pensée, mais la définition reste une convention, c'est également une abréviation: «les définitions sont très libres, et ... elles ne sont jamais sujettes à être contredites» (Pascal, 1954: 361, lère éd. 1828).

> «Leur utilité et leur usage est d'éclaircir et d'abréger le discours, en exprimant, par le seul nom qu'on impose, ce qui ne pourrait se dire qu'en plusieurs termes; en sorte néanmoins que le nom imposé demeure dénué de tout autre sens, s'il en a, pour n'avoir plus que celui auquel on le destine uniquement» (Pascal 1954: 360-361, lère éd. 1728).

On peut remarquer que:

1. Le regard syntaxique n'est, d'une certaine manière, qu'une vue de la pensée. En effet, il y a toujours une volonté présémantique qui guide une construction syntaxique. C'est dire que, quelque part, on accorde toujours une importance particulière à la signification du *definiens*.

2. Il est surprenant de constater que, théoriquement, la définition n'est rien d'autre qu'une abréviation, qu'elle ne joue aucun rôle dans le raisonnement, qu'elle n'est présente que pour des raisons de convenance pratique, de commodité linguistique. S'il y a surprise, c'est que dans la pratique, dans le développement cognitif d'un sujet, la définition relève d'une démarche particulièrement complexe, et dont la finalité est entre autres choses, d'élargir une connaissance, de fonder une connaissance nouvelle. Cette surprise, Russell l'exprimait déjà il y a quelque quatre-vingts ans:

> «it is a curious paradox, puzzling to the symbolic mind, that definitions, theoretically, are nothing but statements of symbolic abbreviations, irrelevant to the reasoning and

inserted only for practical convenience, while yet in the development of a subject, they always require a very large amount of thought, and often embody some of the greatest achievements of analysis». (Russell 1956: 63, 1ère éd. 1903).

3. Toute activité définitoire est dans cette perspective, une activité métalinguistique. On se sert d'un signe extérieur à la langue objet pour inscrire une définition. En agissant ainsi, on n'introduit pas une idée nouvelle dans le système; on indique seulement que tel ou tel assemblage de signes importe plus particulièrement.

4. Rappelons enfin que ce qui vient d'être dit à propos de la définition est intimement associé à la conception dite classique des théories formelle, et que cette association n'est pas sans importance sur le statut de la définition.

2. La définition et les théories formelles de conception classique

Afin de mieux saisir les raisons pour lesquelles les définitions conservent un statut d'abréviations, étudions les systèmes dans lesquels elles apparaissent, et dans cette perspective, rappelons les conditions que l'on s'accorde à réunir pour élaborer une théorie formelle.

Il est généralement admis qu'un système formel est le donné de quatre ensembles:

a) Un vocabulaire; il s'agit d'un ensemble au plus dénombrable de symboles.

b) Des expressions bien formées; il s'agit d'un ensemble d'expressions dont chacune consiste en une suite de symboles du vocabulaire. Elles sont obtenues à l'aide d'un procédé effectif de formation.

c) Des axiomes; c'est un sous-ensemble décidable de l'ensemble des expressions bien formées.

d) Des règles de transformation; elles sont en nombre fini. Chacune d'entre elles est l'expression d'une famille de relations formelles particulières.

Sur la base de ces ensembles, il est dès lors possible de donner vie formelle à un tel édifice, puis de l'interpréter et de vérifier sa cohérence. Par rapport à la perspective qui nous intéresse ici, il est important de mentionner plusieurs choses: une fois que les conditions syntaxiques associées à un système formel sont remplies, une fois que celui-ci est interprété, il est d'une certaine manière fermé aux idées nouvelles que les définitions devraient soutenir. Il en est ainsi en raison même de sa nature conceptuelle. En effet, d'entrée de jeu, on explicite de manière exhaustive la liste des éléments dont on dispose ainsi que le mode de leurs combinaisons. Il s'ensuit qu'il n'est pas possible d'avoir de nouveaux types ou de nouveaux foncteurs constants puisqu'ils sont tous déjà préalablement posés. Il est certes possible d'inscrire une définition, mais celle-ci est à considérer comme un filtre réducteur d'expressions complexes ou comme un indicateur des significations qu'on veut privilégier.

Pour pouvoir disposer d'une idée nouvelle, d'une signification inconnue, le système doit être transformé de façon substantielle. En fait, il est indispensable d'en élaborer un nouveau en modifiant certains ou tous les ensembles fondamentaux du système initial. De plus cette transformation entraîne la mise en oeuvre de toute une réflexion méta-logique pour s'assurer de la cohérence du nouveau système. La démarche consistant à introduire des significations primitives n'est pas simple et ne semble guère avoir affaire avec l'idée de définition conventionnelle.

Pour attribuer, à la définition explicite et conventionnelle, un statut autre que celui d'une abréviation, pour lui donner ce caractère développemental et créatif que la pensée met en oeuvre lorsqu'elle opère avec elle, il faudrait disposer d'une notion différente de la notion classique. Il serait intéressant de jouir d'un système qui ne dispose pas, préalablement et une fois pour toutes, de toutes les pièces le constituant. Il nous faudrait agir avec un système dont les symboles de base et les significations primitives soient tels, et appréhendés de telle manière, qu'on ne soit pas limité à utiliser seulement ce qui a été posé, mais qu'on puisse inventer des formes et des catégories nouvelles sans être condamné à respecter une démarche constructive liée uniquement à des matériaux préalablement réunis. Il faudrait également considérer l'acte définitoire non pas comme une activité métalinguistique, mais comme une règle de procédure inférentielle essentielle du système, règle qui inscrit une expression appartenant au langage-objet.

Pour réaliser le projet qui vient d'être esquissé, il faut donc reconsidérer le statut qu'on accorde généralement à la définition.

3. Vers une directive informelle associée à la définition

Nous avons déjà mentionné qu'inscrire une définition, c'est formellement établir une relation d'équivalence entre un *definiendum* et un *definiens*. Il convient donc de fonder cette relation, et faire appel à l'opérateur de la biconditionnelle pour la structurer semble, sans conteste, un choix qui s'impose si l'on veut réaliser une procédure définitoire qui inscrive une expression appartenant effectivement au système. Nous exigeons également que toute définition soit conforme aux conditions qui caractérisent les définitions explicites, et qu'elle ne contienne aucune variable libre.

De plus, nous refusons de disposer d'une liste préalable de symboles appartenant à des catégories syntaxico-sémantiques exhaustivement déterminées. Nous n'acceptons que la liste finie de symboles qui apparaissent dans les axiomes (c'est-à-dire, les symboles qui contribuent à fonder les significations primitives), et rien d'autre, et nous les considérons comme des symboles-marques, symboles qui prennent leur signification dans le contexte où ils sont insérés, un peu à l'image d'une langue naturelle. Il n'en reste pas moins qu'il est nécessaire de se donner un moyen de discriminer les différentes catégories que contient le système, comme il convient de disposer d'une manière d'inscrire et de discriminer, via la définition, de nouvelles constantes et catégories, et cela, sans ambiguïté ni confusion.

Nous procédons en attribuant une catégorie aux symboles non pas en fonction de leur forme, mais en fonction du contexte dans lequel ils sont insérés. Il s'agit donc de symboles-marques (token) et non pas de symboles-types (type). Explicitons cela en considérant quelques exemples.

Dans le contexte classique lorsque j'écris

$$p \equiv q$$

je sais que *p* et *q* appartiennent à la catégorie des propositions parce que, par leur forme, je peux les identifier comme appartenant à l'ensemble qui contient les propositions atomiques. De la même manière, je sais que le symbole ≡ appartient à la catégorie des foncteurs formateurs de propositions à deux arguments propositionnels.

Dans la perspective d'une détermination contextuelle, on procède d'une autre manière. Les axiomes contiennent les significations primitives qui, inscrites dans un contexte formel bien déterminé, permettent d'avoir accès à une première lecture en termes de catégories syntaxico-sémantiques.

Considérons l'expression suivante:

$$(\forall p)(\equiv\{pp\})$$

et imaginons qu'il s'agisse, dans un système donné, d'un axiome. Dans la perspective où nous ne disposons pas d'une catégorisation symbolique -hormis la ponctuation associée à la quantification, ici (et)-, je peux imposer une catégorisation et la caractériser de manière contextuelle. Je dirai dorénavant que chacune des deux entités qui s'inscrivent entre deux parenthèses symétriques équiformes à { et } appartient à la catégorie des propositions, S

$$\begin{matrix}\{- & -\} \\ S & S\end{matrix}$$

Je dirai également que tout terme qui précède une expression parenthésée dont les parenthèses symétriques sont équiformes à

{ et } et qui ne contient que deux entités, est de la catégorie des foncteurs formateurs de propositions à partir de deux arguments propositionnels, S/SS.

$$\frac{t\{-\ -\}}{S/SS}$$

De cette manière, on brise le carcan prédéterministe associé aux listes de symboles préalablement et exhaustivement posés et liés à des catégories bien particularisées. Ainsi, en étudiant de manière contextuelle les expressions suivantes, je sais que dans

$$(\forall p)(\equiv\{p\}),$$

le symbole p est de la catégorie des propositions, et que dans

$$(\forall *\&)(\equiv\{\&\{**\}\&\{**\}\}),$$

le symbole * est de la catégorie des propositions et le symbole & appartient à la famille des foncteurs binaires. Cette détermination catégorielle n'est en aucune manière associée à une liste de formes préalablement posées.

Dans notre perspective contextuelle, il est alors possible de définir des constantes de catégories qui existent déjà dans le système, mais aussi des constantes de catégories nouvelles. De quelle manière? En construisant sur ce qui a déjà été posé ou défini, et en proposant de nouveaux contextes qui, au niveau de leur inscription graphique, ne se confondent pas avec d'autres catégories.

Analysons la définition suivante:

$$(\forall\ fp)(\equiv\{\underbrace{o[fp]}_{\text{definiendum}}\ \underbrace{f\{pp\}}_{\text{definiens}}\}),$$

Le symbole o est de la catégorie des foncteurs constants formateurs de propositions à partir de deux arguments dont le premier est de la catégorie des foncteurs binaires et le second de celle des propositions. Cette attribution catégorielle est univoquement déterminée de manière contextuelle. En effet, o précède une paire de parenthèses symétriques qui contient deux entités. La première entité, f, est de la catégorie des foncteurs formateurs de propositions à partir de deux arguments propositionnels, S/SS, parce que dans

$$f\{pp\}$$

elle précède une paire de parenthèses symétriques équiformes à { et } et qui ne contient que deux entités. La deuxième entité, p, est de la catégorie des propositions, S, parce qu'elle est insérée dans une expression dont les parenthèses sont équiformes à { et }, et que ladite expression ne contient que deux entités:

$$\{pp\}$$

Quant à l'expression o[fp], elle est de la catégorie des propositions parce qu'elle est une des deux entités d'une expression parenthésée dont les parenthèses sont équiformes à { et }:

$$\{\underbrace{o[fp]}_{\text{première entité}}\quad\underbrace{f\{pp\}}_{\text{deuxième entité}}\}$$

Le symbole o est donc bien de la catégorie des foncteurs constants formateurs de propositions à partir de deux arguments dont le premier est de la catégorie des foncteurs binaires et le second de celle des propositions, S/(S/SS)S.

C'est cette manière de procéder que Lesniewski a choisie lorsqu'il a développé ses théories logiques: la protothétique, l'ontologie et la méréologie (Miéville 1984). Il s'agit de théories formalisées dont les directives sont également présentées de manière formelle (Lesniewski 1927-31, 1929, 1930; Rickey 1972, 1973).

La définition joue un rôle considérable dans cette nouvelle manière d'envisager l'élaboration d'un système formel. C'est à travers elle que le système connaît une réelle expansion, qu'il règle son développement en termes de constantes et de catégories syntaxico-sémantiques.

Ainsi en choisissant cette manière conceptuelle-là de procéder, il est possible d'élaborer progressivement la logique des propositions en la fondant uniquement sur l'opérateur de la biconditionnelle associé à une quantification d'ordre supérieur. Ce n'est qu'un exemple parmi beaucoup d'autres. En appliquant la règle de définition, on peut définir successivement tous les opérateurs de vérité unaires et binaires, mais encore d'autres foncteurs logiques; en fait, on peut progressivement définir tous ceux qui tombent dans le champ de la définition inductive suivante fondée sur la catégorie primitive des propositions, S:

1. S est une catégorie syntaxico-sémantique.
2. Si C, C_1, C_2,..., C_n sont des catégories syntaxico-sémantiques, alors C/C_1C_2,..., C_n est une catégorie syntaxico-sémantique.
3. Rien n'est une catégorie syntaxico-sémantique sinon par ce qui précède.

Si dans cette perspective formelle nouvelle, la définition reste conventionnelle dans le sens qu'elle inscrit un accord, un principe choisi par décision volontaire, sa fonction et son importance se voient modifiés. Une définition est bien davantage que pure abréviation réglée de manière externe. Elle est le produit d'une activité interne au système, activité qui permet une expansion effective et progressive. La définition est porteuse de significations additionnelles, elle permet un développement progressif du système en préservant la non-contradiction du système initial. Elle est porteuse d'idées nouvelles et de ce fait peut marquer le temps cognitif. Elle peut enfin être créative dans le sens que, grâce à elle, il est possible de dériver des théorèmes ne contenant pas le nouveau signe défini, mais qu'il ne serait pas possible de dériver sans la présence de la définition (Rickey 1975; Lesniewski 1931; Myhill 1953; Popper 1963, 1970). Ainsi, sans être un axiome explicite, une définition peut en avoir l'importance.

Avec cette manière de concevoir la notion de système formel, la définition conventionnelle retrouve un statut plus conforme aux procédures définitoires que la pensée vivante met en oeuvre.

VI. OU L'ON RETOURNE A LA NEGATION

1. Avertissement

Dans les pages précédentes nous avons montré que la pensée met en oeuvre des opérations de négation autres que propositionnelles. Ce résultat, peu surprenant en soi, est quelque peu terni par le fait que nous ne connaissons pas la liste exhaustive de ces opérations. Par ailleurs, sous l'hypothèse de la possibilité de reconnaître progressivement de nouveaux opérateurs de négation, nous avons mis en évidence que les conceptions classiques de définition et de système formel n'étaient pas satisfaisantes pour représenter de nouvelles significations. Ce constat nous a conduits à emprunter à S. Lesniewski (1939, 1967) sa directive de définition, ainsi que les fondements de ses théories logiques pour représenter de nouvelles opérations. Ce choix a été dicté par les qualités développementales et créatives que possèdent ces théories. En effet, il est toujours possible de les enrichir progressivement d'idées nouvelles à l'aide de la directive de définition, et cela, en ayant la garantie d'une expansion non contradictoire et syntaxiquement non ambiguë. De plus, ces théories autorisent l'emploi de la polysémie, ce qui est particulièrement intéressant dans la perspective d'une représentation des opérations que la pensée en discours exploite. On comprendra donc les raisons qui nous ont conduits à exposer dans un fascicule consacré à la négation, des perspectives qui peuvent sembler lui être étrangères. Ces présentations, bien modestes, ont pour but de convaincre que le développement progressif d'un ensemble d'opérations de négation est possible et conceptuellement aisé dans les théories logiques de S. Lesniewski.

Il est cependant nécessaire d'admettre que l'organisation symbolique de ces systèmes est quelque peu déroutante et parfois difficile d'accès pour ceux qui sont profondément imprégnés par la nature conceptuelle des théories formelles classiques. Celles-ci ne connaissent pas la détermination en contexte de leurs symboles, bien que cette détermination soit aussi de mise dans le langage naturel. Ainsi, la richesse et la liberté définitoire des théories de Lesniewski sont associées à de réelles difficultés d'écriture et de lecture. Dans la suite de notre propos, nous éviterons ces difficultés en utilisant une écriture symbolique plus conforme à la tradition. Les raisons de cette infidélité sont liées à la présentation de notre exposé, et elles ne sont pas de nature conceptuelle.

2. Où certains principes associés à la négation prédicative sont exposés

Dans la quatrième partie de ce fascicule, il a été question des difficultés associées au fait que la logique classique ne dispose que de la négation propositionnelle ou, pour être plus nuancé, qu'elle n'opère aucune distinction entre deux types de négation: la négation propositionnelle d'une part et la négation prédicative d'autre part. Il est possible de situer historiquement l'événement qui consacre cette absence de distinction. Il s'agit de la parution de *The Mathematical Analysis of Logic* de G. Boole en 1847. Il y affirme que:

> «A universal-affirmative proposition is convertible into a universal-negative, and *vice versa* by negation of the predicate. [...]
> A particular-affirmative proposition is convertible into a particular-negative, and *vice versa* by negation of the predicate». (Boole 1965: 29; lère éd. 1847)

On attribue aujourd'hui un nom à la loi qui règle ces transformations: la loi d'obversion. Au dire de Prior (1955: 127) le responsable de cette dénomination est un collaborateur de J.-S. Mill: Alexander Bain (1818-1903). Evoquant ces transformations, ce dernier affirme que:

> «Cette forme [cette loi] est ce qu'on appelle *l'obversion.* D'après le principe de la relativité, toute proposition a deux caractères, deux aspects. Il y a toujours quelque chose à nier, quand il y a quelque chose à affirmer. Quiconque est sage n'est pas fou. Nous devons accepter les deux propositions ou les repousser l'une et l'autre. De l'une à l'autre il n'y a pas de progrès, d'addition dans la connaissance. Nous ne faisons qu'une chose, compléter l'expression de notre pensée qui, en général, est elliptique et incomplète, en raison du fait corrélatif». (Bain 1875: 161)

Cette remarque soulève un problème d'importance. En effet, si j'accepte volontiers que, quel que soit l'objet de pensée x,

«x est sage» implique «x n'est pas fou»

j'ai quelque peine à admettre sans condition l'implication inverse, à savoir que quel que soit l'objet de pensée x,

«x n'est pas fou» implique «x est sage».

En effet, si les deux propositions suivantes sont valides ensemble sur le domaine des philosophes:

a) Aristote n'est pas fou
b) Aristote est sage

ces deux autres ne sont ni valides ensemble ni non valides ensemble sur le domaine des nombres:

c) trois n'est pas fou
d) trois est sage.

Ne pas distinguer «ne pas être fou» de «être non(fou)» pose donc un problème. Cette loi impose des contraintes qui ne sont pas conformes aux activités naturelles de la pensée logique qui s'expriment discursivement au travers du jeu des propriétés duales et de leur négation: (sage/fou), (pair/impair). Un système admettant la loi d'obversion ne saurait pas marquer le lien entre une négation prédicative qui opère sur une propriété et la contraire ou la duale de ladite propriété. On est contraint à ignorer que «non(pair)» et «impair» appartiennent à l'ordre du même et à accepter que «pair» et «impair» n'ont aucune relation. Vouloir exprimer cette parenté par la loi d'obversion nous conduit, dans la théorie classique, à admettre l'équivalence logique des deux propriétés suivantes:

«Pi n'est pas impair»	[proposition valide sur l'ensemble des nombres réels]
«Pi est pair»	[proposition non valide sur l'ensemble des nombres réels]

ce qui n'est manifestement pas le cas.

Pour dépasser ces limitations qui sont la conséquence de cette loi d'obversion, il y a lieu d'expliciter les principes fondamentaux qu'il faut réunir afin de disposer d'une théorie *D* qui respecte le jeu des propriétés duales. Nous allons nous y employer en édifiant ces principes sur la base des propositions singulières suivantes:

a) «x est a»	[x est pair]
b) «x est non(a)»	[x est impair]
c) «x n'est pas a»	[x n'est pas pair]
d) «x n'est pas non(a)»	[x n'est pas impair]

Note: *a* est la propriété duale de *non(a)*, et réciproquement.

I. Toute proposition est en relation de contradiction avec sa négation. Ainsi, nous voudrions pouvoir disposer, dans la théorie *D*, du principe de non-contradiction qui stipule que:

> quelle que soit la proposition p, il n'est pas le cas que (p et non-p)

Il faut donc que l'expression:

$$(\forall p)(\sim(p \wedge \sim p))$$

Si l'on considère les deux propositions singulières et qu'on les soumette à ce principe, on obtient:

quels que soient x et a
1. il n'est pas le cas que (x est a et x n'est pas a)
2. il n'est pas le cas que (x est non(a) et x n'est pas non(a)).

II. L'autre jeu des propositions que nous voudrions capter est celui associé au principe de la conditionnelle singulière. Ce principe inscrit la relation que supporte un sujet avec une propriété et sa duale:

quels que soient x et a
1. si x est a alors x n'est pas non(a)
2. si x est non(a) alors x n'est pas a.

III. Il est également utile de disposer d'un principe dérivé du précédent: le principe de contrariété. Il stipule que, quel que soit le sujet considéré, il ne saurait être associé en même temps à une propriété et à son contraire (i.e. à la propriété duale) que celles-ci lui conviennent ou non:

quels que soient x et a
il n'est pas le cas que (x est a et x est non(a)).

Les trois principes précédents ne sont pas en désaccord avec une théorie logique qui dispose de la loi d'obversion. Mais cette loi doit être écartée lorsqu'on exige l'explicitation de principes qui règlent la relation que supporte un sujet qui ne possède pas une propriété (p. ex. pair) avec la propriété duale de cette propriété (p. ex. impair). Dans cette perspective deux situations sont à considérer. Soit le sujet possède cette propriété duale (premier cas), soit il ne la possède pas (deuxième cas).

IV. **Premier cas.** Dans la quatrième partie de ce fascicule, le terme de convenance a été à plusieurs reprises utilisé. En substance, sa définition est la suivante: une propriété convient à un sujet si et seulement si.
* soit il possède cette propriété,
* soit il possède la propriété duale (ou contraire) de cette propriété.

Si l'on accepte que le couple propriété/propriété duale forme une notion, on peut formuler cette définition ainsi: une propriété convient à un sujet si et seulement si:
* il possède une des deux propriétés qui fondent la notion.

Ainsi, par rapport à l'univers de l'arithmétique:

- «impair» convient à «trois», et «trois est impair» est une proposition vraie, mais

- «pair» convient également à «trois», bien que «trois est pair» est une proposition fausse.

Ceci est le cas parce que «trois» possède, dans ce référent, la propriété duale de «pair», c'est-à-dire «impair».

Par contre, ni «pair», ni «impair» ne conviennent au nombre «pi». En effet, «pi» ne possède aucune de ces deux propriétés duales, et donc «pi n'est pas impair» n'implique pas «pi est pair», et «pi n'est pas pair» n'implique pas «pi est impair». Ainsi, si le principe de la conditionnellle singulière est universel, il n'en va pas de même du principe inverse que nous appellerons principe de la conditionnelle particulière:

Il y a des x et des a tels que il n'est pas le cas que
1. Si x n'est pas a alors x est non(a) et
2. Si x n'est pas non(a) alors x est a.

V. **Deuxième cas.** Dans une théorie avec la loi d'obversion, les deux propriétés suivantes:

quels que soient x et a
x n'est pas non(a) et
x n'est pas a,

sont contradictoires, et ceci, parce que la négation prédicative est considérée comme une négation propositionnelle. De ce fait, on tombe dans le principe d'élimination de la double négation et on se trouve effectivement en présence de deux propositions contradictoires:

«x est a» et «x n'est pas a»

Mais on vient de le voir, dire d'un sujet qu'il n'a aucun lien avec une notion peut être une proposition vraie. Dans l'univers de l'arithmétique élémentaire, si la proposition suivante est fausse:

Quatre n'est ni pair ni impair,

celle-ci, par contre, est vraie:

pi n'est ni pair ni impair.

Cette nuance est marquée par le principe de non-compatibilité:

Il y a des x et des a tels que
x n'est pas a et x n'est pas non(a)

VI. Enfin il est également utile d'expliciter un principe qui associe la loi du tiers exclu avec la notion de convenance: le principe du tiers exclu revisité.

Quels que soient x et a
[soit x est a, soit x est non(a)]
ou
il n'est pas le cas que [soit x est a, soit x est non(a)].

3. Une ébauche de formalisation

Notre intention est de disposer d'une théorie logique *D* qui contienne entre autres choses les six principes que nous venons d'évoquer. La formulation de ces principes est particulière:

- elle utilise explicitement deux négations: la négation propositionnelle de la catégorie syntaxico-sémantique des foncteurs formateurs de proposition, à un argument propositionnel (S/S) et la négation prédicative de la catégorie des foncteurs formateurs de nom, à un argument nominal (N/N).Par exemple, l'opérateur «non» qui agit sur le nom «pair» produit le nom «impair»;

- elle utilise une quantification d'ordre supérieur:
  quels que soient x et a, ...
  il y a des x et des a tels que, ...

- elle explicite la proposition singulière à l'aide de la copule «est».

Pour réaliser notre entreprise, il est donc indispensable d'avoir l'usage d'un système qui détermine la signification de cette copule, qui admette une quantification d'ordre supérieur et qui offre la possibilité d'inscrire de nouvelles définitions dont celle de négation prédicative.

Pour rendre compte de ces souhaits, j'ai choisi d'utiliser la théorie logique de Lesniewski qui a pour nom *l'ontologie* (Lesniewski 1930; Miéville 1984). Une des bases axiomatiques de ce système explicite la signification de la proposition singulière exprimée à l'aide d'une copule: «x est a». Cette théorie est une logique d'ordre supérieur, elle permet de quantifier sur toute variable quelle que soit sa catégorie syntaxico-sémantique. De plus, il s'agit d'un système ouvert dans le sens où, grâce à une règle de définition, il est possible de définir dans le système, des significations nouvelles. Enfin, elle contrôle la polysémie. Cela nous permettrait, par exemple, d'utiliser le même signe pour les deux types de négation mentionnés sans pour autant les assimiler à un même opérateur:

$$\text{non}(\underbrace{\text{p}}_{\text{proposition}}) \qquad\qquad \text{non}(\underbrace{\text{a}}_{\text{propriété}})$$

Mais je n'utiliserai pas cette possibilité.

Dans un premier temps, je me propose d'exposer une base axiomatique pour l'ontologie de Lesniewski. L'unique proposition primitive de cette théorie est un axiome, et non pas un schéma d'axiomes. Il contient, en plus des foncteurs propositionnels fondamentaux, un nouveau foncteur primitif, l'epsilon ε. Il ne faut pas confondre ce foncteur avec le symbole d'appartenance de la théorie des ensembles. Cet epsilon ε représente l'inscription formelle de la copule «est» qui fonde la proposition singulière: «x est a». Cette proposition peut se lire de la manière présémantique suivante:

> xεa: le nom x désigne l'objet, ou un des objets, désigné(s) par le nom a.

Une telle proposition possède la valeur du vrai si et seulement si toutes les conditions suivantes sont remplies:

1. Le nom x ne représente pas un nom sans dénotation.
2. Le nom x représente un nom individuel. Ce nom ne peut pas dénoter plus d'un individu.
3. Si un nom possède la même dénotation que x, alors il désigne également l'objet ou un des objets désigné(s) par le nom a.

Cette signification et ces conditions sont formellement explicitées dans la proposition primitive de l'ontologie de Lesniewski.

Axiome: $(\forall x)(\forall a)[(x\varepsilon a \equiv ((\exists b)(b\varepsilon x) \wedge (\forall b)(\forall d)((b\varepsilon x \wedge d\varepsilon x) \supset d\varepsilon b) \wedge (\forall c)(c\varepsilon x \supset c\varepsilon a)]$

Dans cette perspective et par rapport à l'univers de notre arithmétique

trois est un nombre impair

est une proposition singulière vraie.

1/0 est un nombre

et

le nombre pair est toujours divisible par deux

sont deux propositions fausses. Quoique bien formée et parfois pensée, la première proposition est fausse parce que «1/0» ne dénote, dans l'univers en question, aucun objet arithmétique. La deuxième l'est également parce que le «nombre pair», dans ce contexte, est un nom général; il désigne plus d'un objet arithmétique. Il s'agit en fait de la forme contractée d'une universelle affirmative qui, elle, serait vraie.

Au sein de l'ontologie de Lesniewski, on a interprété les termes tels que x, a, comme des noms. Ceux-ci sont associés à des fonctions dénotatives différentes. En effet, le langage de l'ontologie permet de représenter des noms individuels (qui ne dénotent qu'un individu comme «Aristote»), des noms généraux (qui désignent non une classe d'individus, mais l'extension elle-même comme «Nicolas Bourbaki»), enfin des noms vides (qui ne dénotent aucun individu comme «1/0»).

Cette théorie est donc une logique libre même si elle ne l'est pas au sens classique du terme. Elle est une logique libre parce qu'elle permet d'utiliser des noms non dénotants. Ainsi la quantification dans cette théorie ne possède pas le caractère existentiel implicite des logiques classiques ni celui explicite des logiques classiques libres (Miéville 1987). Dans la perspective d'une interprétation sur un domaine sémantique, elle ne saurait être objectuelle. Existence et quantification sont ici dissociées.

En utilisant la directive de définition de l'ontologie de Lesniewski, je peux progressivement inscrire de nouvelles significations. M'intéressant à la négation prédicative, je définirai celle-ci comme suit:

$$(\forall x)(\forall a)((x\varepsilon\text{-}(a)) \equiv (x\varepsilon x \wedge \sim(x\varepsilon a))).$$

De manière présémantique, je peux paraphraser cette définition ainsi:

x est non(a) si et seulement si
[x est un nom individuel, et il n'est pas le cas que x est a].

Cette définition peut sembler artificielle et abstraite. Force est d'admettre cependant que les deux négations en présence ne sont pas «équivalentes». En effet, en utilisant les autres règles d'inférence de l'ontologie (détachement, substitution, distribution des quantificateurs, extensionnalité), il est possible de développer la preuve (Miéville 1984) de chacun des neuf théorèmes suivants qui représentent les principes fondamentaux d'une logique qui refuse la loi d'obversion et qui revendique la présence d'une négation prédicative efficace et autonome.

Principe de non-contradiction

1. $(\forall x)(\forall a)(\sim(x\varepsilon a \wedge \sim(x\varepsilon a)))$

2. $(\forall x)(\forall a)(\sim(x\varepsilon\text{-}(a) \wedge \sim(x\varepsilon\text{-}(a))))$

Principe de la conditionnelle singulière

3. $(\forall x)(\forall a)(x\varepsilon a \supset \sim(x\varepsilon\text{-}(a)))$

4. $(\forall x)(\forall a)(x\varepsilon\text{-}(a) \supset \sim(x\varepsilon a))$

Principe de contrariété

5. $(\forall x)(\forall a)(\sim(x\varepsilon a \wedge \sim(x\varepsilon\text{-}(a)))$

Principe de la conditionnelle particulière

6. $\sim(\forall x)(\forall a)(\sim(x\varepsilon\text{-}(a)) \wedge x\varepsilon a)$ ou

$(\exists x)(\exists a)(\sim(\sim(x\varepsilon\text{-}(a)) \supset x\varepsilon a))$

7. $\sim(\forall x)(\forall a)(\sim(x\varepsilon a) \supset x\varepsilon\text{-}(a))$ ou

$(\exists x)(\exists a)(\sim(\sim(x\varepsilon a) \supset x\varepsilon\text{-}(a)))$

Principe de non-compatibilité

8. $\sim(\forall x)(\forall a)(x\varepsilon a \vee x\varepsilon\text{-}(a))$ ou

$(\exists x)(\exists a)(\sim(x\varepsilon a \wedge \sim(x\varepsilon\text{-}(a))$

Principe du tiers exclu revisité

9. $(\forall x)(\forall a)[(x\varepsilon a \not\equiv x\varepsilon\text{-}(a)) \vee \sim(x\varepsilon a \not\equiv x\varepsilon\text{-}(a))]$

Notons que le symbole $\not\equiv$ désigne la disjonction exclusive.

4. Quelques règles de déduction naturelle

Dans la première partie de cet exposé, nous avons présenté différentes théories logiques, chacune d'entre elles se distinguait par une signification particulière de l'opération de négation. Chaque système a été présenté de deux manières différentes: d'une part par une approche axiomatique, d'autre part part, à l'aide d'un ensemble de règles de déduction. Rappelons celles associées à la logique classique.

- <u>Règle d'introduction</u> [~i]

```
g | |_ P           hyp
  | |  :
  | |  :
k | |  Q
l | |  ~Q
  | ~P                  g, k, l, ~i
```

- <u>Règle d'élimination</u> [~e]

```
k | P
l | ~P
  | :
  | :
  | Q            k, l, ~e
```

- <u>Règle d'élimination [neg ~e]</u>

```
k | ~~P
  | :
  | :
  | P            k, neg ~e
```

Dans la théorie *D* on peut également disposer de règles associées à la négation prédicative.

- <u>Règle d'introduction</u> [-i]

```
g | |_ P           hyp
  | |  :
  | |  :
k | |  xεa
l | |  xε-(a)
  | ~P                  g, k, l, -i
```

- Règle d'élimination [-e]

$$\begin{array}{l|ll} k & x\varepsilon a & \\ l & x\varepsilon\text{-}(a) & \\ & \vdots & \\ & P & k,\ l,\ \text{-}e \end{array}$$

- Règle d'élimination [neg -e]

$$\begin{array}{l|ll} k & x\varepsilon\text{-}(\text{-}(a)) & \\ & \vdots & \\ & x\varepsilon a & k,\ \text{neg -e} \end{array}$$

5. Une ouverture vers d'autres opérations de négation

Ce qui a été développé précédemment porte sur deux types de négations. Nous avons étudié d'une part la négation propositionnelle, appartenant à la catégorie des foncteurs formateurs de proposition, à partir d'un argument propositionnel, (S/S). Nous avons exposé d'autre part quelques principes et règles d'une théorie disposant, en plus de la négation propositionnelle, d'une négation dite prédicative qui appartient à la catégorie des foncteurs formateurs de nom, à partir d'un argument nominal (N/N). Par ailleurs, j'ai mentionné à plusieurs reprises la possibilité d'envisager des négations appartenant à d'autres catégories syntaxico-sémantiques encore. Je terminerai cette partie en esquissant à titre d'exemple un développement de la théorie logique *D* en termes d'une nouvelle opération de négation.

Lorsqu'on raisonne, on utilise souvent des fonctions propositionnelles. Celles-ci peuvent être linguistiquement représentées par des verbes, des relations, etc. Elles peuvent également être mises en relation avec des fonctions duales. Pensons aux deux couples suivants:

armer/désarmer
plus grand que/plus petit que

Il serait intéressant de disposer, dans une théorie logique, de négations qui permettraient de contrôler le jeu de la dualité par rapport à ces catégories syntaxico-sémantiques révélées notamment par certains des verbes intransitifs (S/N) et certaines des relations binaires (S/NN). Par rapport aux exemples ci-dessus, il s'agirait donc de définir d'une part une négation dite «verbale». Elle appartiendrait à la catégorie des foncteurs formateurs de verbe, à un argument verbal, (S/N)/(S/N). Et d'autre part, une définition de négation dite de relation binaire et appartenant à la famille des foncteurs formateurs de relation, à un argument relationnel, (S/NN)/(S/NN).

Considérons le cas de la négation dite verbale. Dans l'ontologie de Lesniewski, il est possible de définir, à partir de la proposition singulière «aεb», un foncteur de la catégorie des verbes, (S/N); ainsi, de

Aristote est philosophe

on peut opérer une transformation de manière à obtenir

Aristote philosophe

et, partant de cette catégorie des verbes, définir une négation de la catégorie (S/N)/(S/N).
A ce sujet voir Henry (1972); Miéville (1984, 1989).

Cette négation doit remplir un certain nombre de conditions, elle doit être associée à certains principes qui la structurent: principes de non-contradiction, de conditionnelles singulière et particulière, de contrariété, de non-compatibilité, d'un tiers exclu revisité. Ces principes doivent s'accorder pour exprimer la vie fonctionnelle de cette négation-là. En développant l'ontologie de Lesniewski dans le sens qui nous intéresse ici, on obtient ces principes comme des théorèmes du système.

Si par convention d'écriture, nous convenons d'utiliser des lettres grecques pour représenter les verbes,

ex: $\alpha(x)$ =df x philosophe.

Il est alors possible de définir une négation verbale ainsi:

$$(\forall x)(\forall \alpha)(\rightarrow[\alpha](x) \equiv (\exists y)(\alpha(y) \wedge \sim(\alpha(x))))$$

et de dériver, par exemple, le principe de contrariété pour cette catégorie, à savoir:

$$(\forall x)(\forall \alpha)(\sim(\alpha(x) \wedge \rightarrow[\alpha](x)))$$

Ce qu'il est intéressant de remarquer, c'est que ce principe, pour cette catégorie, est dans un rapport d'analogie structurelle avec la catégorie précédemment étudiée, à savoir: (N/N).

Il ne s'agit pas d'une coincidence. En effet, quelle que soit la catégorie étudiée, et quel que soit le principe étudié, il sera dans un rapport d'analogie structurelle avec la catégorie (N/N). Ainsi, la propriété portée par tel ou tel principe d'une catégorie sémantique élémentaire peut être projetée dans le champ d'une catégorie sémantique plus complexe. Cette remarque met en évidence que toutes les négations que l'on capte sont intimement associées à un invariant. Cette invariance apparaît également dans les règles de déduction. En effet, quelle soit la catégorie *c* de la négation NEG qui porte sur l'objet formel Δ, on obtiendra des règles de déduction qui possèdent un rapport d'analogie structurelle avec les règles dites élémentaires.

- <u>Règle d'introduction</u> [NEG i]

$$\begin{array}{l|l|ll}
g & & \underline{P} & \text{hyp} \\
 & & \vdots & \\
k & & Q(\ldots\Delta\ldots) & \\
l & & Q(\ldots NEG(\Delta)\ldots) & \\
 & \sim P & & g,\ k,\ l,\ \text{NEG i}
\end{array}$$

- <u>Règle d'élimination</u> [NEG e]

k	P(...Δ...)	
l	P(...NEG(Δ)...)	
	⋮	
	Q	k, l, NEG e

- <u>Règle d'élimination</u> [neg NEG e]

k	P(...NEG(NEG(Δ))...)	
	⋮	
	P(...Δ...)	k, neg NEG e

VII. EPILOGUE

Ce fascicule est modeste. Il vise tout d'abord à exposer un état de la question par rapport à la négation propositionnelle. Dans cette perspective, l'accent est mis sur la présentation de différentes théories logiques.

Puis on y étudie les conséquences causées par la présence d'un principe largement accepté dans la logique classique des prédicats du premier ordre: la loi d'obversion.

> «Cette loi fait évanouir le couplage de deux termes au profit de la complémentation, ce qui ne va pas sans quelque artifice: la contradiction purement formelle ne s'associe plus à la contrariété sémantique. La répartition des choses en classes prend désormais le pas sur l'articulation des pensées». (Frey 1987: 60)

Une telle logique est donc incapable de représenter valablement certains mouvements que la pensée met en oeuvre quand elle opère avec de la négation. De tels mouvements ont cependant une base logique. Aristote en était bien conscient, lui qui conduit au chapitre 46 des Premiers Analytiques, une étude extrêmement fine des principes associés à une négation prédicative.

Nous montrons ensuite que la nature conceptuelle des théories formelles classiques est peu adéquate pour définir progressivement des significations de négations différentes, et ceci d'autant moins que l'ensemble de celles-ci n'est pas connu.

Afin de dépasser les limites inhérentes aux systèmes qui acceptent la loi d'obversion et de s'ouvrir à de nouvelles significations, on s'intéresse alors, d'une part à des systèmes formels dont la nature conceptuelle est une invitation à une expansion en termes de définitions nouvelles, et d'autre part aux mécanismes inférentiels capables d'offrir cette ouverture.

Une dernière partie est consacrée à une étude de cas. On y étudie les principes logiques que doit posséder la négation prédicative, puis ceux-ci sont préformalisés. A partir de ces présupposés, on dégage enfin les invariants qui caractérisent toute négation. Par une analogie structurelle, il est alors possible d'appliquer ces divers principes aux différentes relations établies.

L'opposition est une notion importante, et qui intéresse directement le logicien. Cette notion dépasse largement les limites auxquelles les carrés classiques nous avaient habitués. Les deux constituants d'une opposition, quelle que soit leur catégorie sémantique, restent à l'esprit. Mais au-delà du jeu des oppositions, demeure la toile subtile qu'elles tissent lorsqu'elles interagissent. La négation projetée sur le spectre des couleurs, là où l'opposition n'est pas une mais diverse et nuancée, voilà une étude à poursuivre. Comme il convient également de penser ces figures constitutives de connaissances nouvelles que sont les paradoxismes et que Fontanier définit comme

> «un artifice de langage par lequel des idées et des mots, ordinairement opposés et contradictoires entre eux, se trouvent rapprochés et combinés de manière que, tout en semblant se combattre et s'exclure réciproquement, ils frappent l'intelligence (...) et produisent le sens le plus vrai, le plus profond et le plus énergique». (Fontanier 1968: 137).

figures dans lesquelles la négation -les négations- s'articule(nt) et semble(nt) même se détruire.

C'est dans ces perspectives que nous poursuivrons cette étude sur la négation, en privilégiant toujours davantage la dimension formelle.

La Comballaz, mars 1991

REFERENCES

ARISTOTE [*Cat.*]: *Catégories*. In: Tricot, 1946.

ARISTOTE [*De Int.*]: *De l'interprétation*. In: Tricot, 1946.

ARISTOTE [*Meta*]: *De la métaphysique*. In: Tricot, 1946.

BAIN, A. (1875): *Logique déductive et logique inductive*. Paris: Gernier Boillère. T. I, II.

BETH, E.W. (1955): *Les fondements logiques des mathématiques*. Paris: Gauthier-Villars; Louvain: E. Nauwelaerts.

BLAMEY, S. (1986). Partial logic. In: *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. 3. Dordrecht: Reidel, 1-70.

BOOLE, G. (1847): *The Mathematical Analysis of Logic*. Oxford: Basil Blackwell, 1965.

CARNAP, R. (1949). *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton: Princeton University Press.

CASTANEDA, H.-N. (1988). Negations, imperatives, colors, indexical properties, non-existence, and Russell's paradox. In: D.F. Austin (ed.), *Philosophical Analysis. A Defense by Example*. Dordrecht: Kluwer, 169-205.

CHENIQUE, F (1975): *Eléments de la logique classique*. Paris: Dunod. T. I, II.

CORCORAN, J. (1973). Gaps between logical theory and mathematical practice. In: M. Bunge (ed.), *The Methodological Unity of Science*. Dordrecht: Reidel, 23-50.

CURRY, H.B. (1963). *The Foundations of Mathematics*. New York: McGraw-Hill Book Company.

DELESSERT, A. (1988). *Introduction à la logique*. Lausanne: Presses Polytechniques romandes.

FONTANIER, P. (1968): *Les figures du discours*. Paris: Flammarion.

FREY, L. (1987): De la négation à l'affirmation en logique aristotélicienne. In: *Travaux du Centre de Recherches Sémiologiques*, nº 56, 121-138.

GÖDEL, K. (1932). Zum intuitionistischen Aussagenkalkül. Traduction in: K. Gödel, 1986.

GÖDEL, K. (1986). *Collected Works*. Ed. by S. Feferman *et al.* New York: Oxford University Press; London: Clarendon Press.

GRIZE, J.-B. (1967). Logique: historique. Logique des classes et des propositions. Logique des prédicats. Logiques modales. In: *Logique et connaissance scientifique*. Encyclopédie la Pléiade, vol. 22. Paris: Gallimard, 175-399.

GRIZE, J.-B. (1989). Signification et contradiction. In. *Travaux du Centre de Recherches Sémiologiques*, nº 57, 103-119.

HARTSHORNE, C. & WEISS, P. (eds) (1933). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. Cambridge; The Belknap Press of Harvard University Press. Second printing, 1960.

HENRY, D.P. (1972): *Medieval Logic and Metaphysics*. London: Hutchinson University Press.

HEYTING, A. (1930): Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. *Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl.*, 42-56.

HEYTING, A. (1956): *Intuitionism. An Introduction*. Amsterdam, North-Holland, 1980.

JOHANSSON, I. (1936). Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionischer Formalismus. *Compositio Math.*, 4, 119-136.

La négation sous divers aspects. Actes du colloque, Neuchâtel 22-23 octobre 1987. Université de Neuchâtel: Travaux du Centre de Recherches Sémiologiques, nº 56, septembre 1988.

La négation. Contre-argumentation et contradiction. Université de Neuchâtel: Travaux du Centre de Recherches Sémiologiques, nº 57, septembre 1989.

LESNIEWSKI, S. (1927-31). O podstawach matematyki (Sur les fondements de la mathématique), *Przeglad filozoficzny*, 30-34, 191-261.

LESNIEWSKI, S. (1929). Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik. *Fundamenta mathematicae*, *14*, 1-81.

LESNIEWSKI, S. (1930). Ueber die Grundlagen der Ontologie. *Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, *Classe III*, *23*, 111-132.

LESNIEWSKI, S. (1931). Ueber Definitionen in der sogenannten Theorie der Deduktion. *Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, 24*, 289-309.

LESNIEWSKI, S. (1938): Einleitende Bermerkungen zur Fortsetzung meiner Mitteilung u.d.T. «Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik», *Collectanea Logica*, 1, 61-144.

LESNIEWSKI, S. (1967): Introductory remarks to the continuation of my article: «Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik». In: S. McCall (ed.): *Polish Logic 1920-1939*. Oxford: Clarendon Press, 116-169.

MIEVILLE, D. (1984). *Un développement des systèmes logiques de S. Lesniewski. Protothétique, Ontologie, Méréologie.* Berne, Francfort/M., New York, P. Lang.

MIEVILLE, D. (1987): Axiomes et définitions chez Lesniewski: une manière génétique de développer les systèmes formels. *Theoria*, Segunda Epoca, nº 5-6, 285-307.

MIEVILLE, D. (1989): Lorsque la logique rencontre l'argumentation. *Argumentations*, 3, 45-57.

MYHILL, J. (1953). Arithmetic with creative definitions by induction. *The Journal of Symbolic Logic*, Vol 18, nº 2, 115-118.

PASCAL, B. (1728) [posthume]. De l'esprit géométrique et de l'art de persuader. In. *Oeuvres complètes*. Texte établi et annoté par J. Chevalier. Paris: Gallimard, 1954.

PEIRCE, C.S. (1885). On the algebra of logic. A contribution to the philosophy of notation. In: C. Hartshorne & P. Weiss (eds), (1933), vol. 3, 210-249.

POPPER, K.R. (1963). Creative and non-creative definitions in the calculus of probability. *Synthese*, Vol. 15, 167-186.

POPPER, K.R. (1970). Corrections. *Synthese*, Vol. 21, 107.

PRIOR, A.N. (1955): *Formal Logic*. Oxford: Clarendon Press.

RICKEY, V.F. (1972). Axiomatic inscriptional syntax, part I: General syntax. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. XIII, 1-33.

RICKEY, V.F. (1973). Axiomatic inscriptional syntax, part II: Syntax of protothetic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. XIV, 1-52.

RICKEY, V.F. (1975). Creative definitions in propositional calculi. *Notre Dame Journal of Formal Logic*. Vol. XVI, nº 2, 273-294.

RUSSELL, B. (1903). *The Principle of Mathematics*. London, Allen & Unwin. 7th ed., 1956.

STRAWSON, P.F. (1952). *Introduction to Logical Theory*. London: Methuen. 5th ed., 1966.

TRICOT, J. (1946). *Catégories. De l'interprétation*. Traduction et notes. Paris, Vrin.

TRICOT, J. (1946). *De la métaphysique*. Traduction et notes. Paris, Vrin.

UMEZAWA, T. (1959). On logics intermediate between intuitionistic and classical predicate logic. *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 24, nº 2, 141-153

INDEX DES AUTEURS

INDEX DES MATIERES

Couverture : Atelier Seth, Peseux
Impression : Zentralstelle der Studentenschaft der Universität Zürich

SOMMAIRE