1080

COHOMOLOGIE

DE PRODUITS SEMI-DIRECTS DE GROUPES

THESE

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Neuchâtel

pour obtenir le grade de docteur ès sciences par

DENIS JEANDUPEUX

Université de Neuchâtel

Institut de mathématiques

et d'informatique

Chantemerle 20

CH-2007 Neuchâtel

IMPRIMATUR POUR LA THÈSE

Cohomologie des produits semi-directs de groupes

de Monsieur Denis Jeandupeux

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

FACULTÉ DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel sur le rapport des membres du jury,

Messieurs U. Suter, A. Robert et D. Arlettaz (Lausanne)

autorise l'impression de la présente thèse.

Neuchâtel, le 7 juin 1990

Le doyen :

Cl. Mermod

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Dans ce travail, nous calculons la cohomologie de certains produits semi-directs de groupes.

Un produit semi-direct est un groupe défini comme suit. Soient K et Q deux groupes et τ un homomorphisme de Q dans les automorphismes de K. Alors, le produit semi-direct $G = K \rtimes Q$ est par définition l'ensemble $K \times Q$ muni de la loi de composition suivante : $(k,q).(\bar{k},\bar{q}) = (k.\tau(q)\bar{k},q\bar{q})$.

Le n-ième groupe de cohomologie $H^n(G; M)$ d'un groupe G à coefficients dans le G-module M est par définition $\mathrm{Ext}^n_G(\mathbb{Z}, M) = H^n(\mathrm{Hom}_G(P, M))$ où P est une résolution projective sur $\mathbb{Z}G$ du G-module trivial $\mathbb{Z}$.

Différents auteurs ont obtenus des résolutions projectives pour des produits semi-directs. En particulier, Wall [W] construit une résolution libre pour une extension de groupes qui lui permet de calculer l'homologie d'un produit semi-direct de deux groupes cycliques finis.

Pour notre part, nous montrons (dans le texte, c'est le théorème 2.4) :

Si X et Y sont deux résolutions de $\mathbb{Z}$ libres sur $\mathbb{Z}K$ et $\mathbb{Z}Q$ respectivement et que X est aussi une résolution convenable sur $\mathbb{Z}Q$, alors $P = X \otimes Y$ est une résolution $\mathbb{Z}G$-libre de $\mathbb{Z}$.

Les complexes $\mathrm{Hom}_G(X \otimes Y, M)$ et $\mathrm{Hom}_Q(Y, \mathrm{Hom}_K(X, M))$ sont isomorphes (4.1) et le résultat suivant (4.3) facilite le calcul de la cohomologie du second.

Si D est un Q-complexe de cochaînes faiblement homotope sur $\mathbb{Z}Q$ à $\mathrm{Hom}_K(X, M)$, alors $H^*(G; M) \cong H^*(Q; D) = H^*(\mathrm{Hom}_Q(Y, D))$.

L'étude du produit cup montre que si D est muni d'un produit convenable alors les isomorphismes ci-dessus sont des isomorphismes d'anneaux (5.4).

Le résultat 4.3 est exploité pour le calcul de la cohomologie des wreath produits (chap.2). Une autre application est la détermination de $H^*(SL_n\mathbb{F}_q; \mathbb{Z}/l)$ avec l premier et $(l, q) = 1$ (§ 12 et 13). Nous donnons aussi un exemple, dû à Peter Hilton, de deux produits semi-directs non-isomorphes ayant des anneaux de cohomologie entière isomorphes (§7).

Le chapitre 2 n'est pas utilisé dans la suite et est consacré à l'étude de la cohomologie des wreath produits qui sont des produits semi-directs particuliers

$K \rtimes Q = L \int Q$ où Q est un sous-groupe du groupe des permutations de n objets et agit canoniquement sur le produit direct K de n copies d'un groupe L.
Nous étudions $H^*(L \int Q; R)$ pour un groupe L de type FP_∞ et un anneau principal R. En remplaçant le complexe $Hom_K(X, R)$ par un complexe plus simple, nous retrouvons aisément le résultat de Nakaoka [N II.3] (8.7) et nous obtenons une description non-explicite de la stucture additive de la cohomologie entière de $L \int Q$ en terme de suite spectrale. Rappelons brièvement la méthode. En écrivant $H^*(L; \mathbb{Z})$ comme somme directe de la cohomologie de complexes élémentaires D_i, le groupe abélien $H^*(L \int Q; \mathbb{Z})$ est la somme directe des cohomologies des complexes $B = Hom_Q(Y, D)$ où Y est une résolution $\mathbb{Z}Q$-libre de $\mathbb{Z}$ et D une Q-orbite du complexe $(\bigoplus_i D_i)^{\otimes n}$. Le théorème de [N] permet de se ramener au cas où H^*B est de p-torsion pour un premier p. En considérant une suite spectrale E obtenue par une filtration convenable de B, nous avons (9.5) :

$H^*B \cong E_2 \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, en tant que groupes abéliens.

où $\mathbb{Z}_{(p)}$ est le localisé de $\mathbb{Z}$ en p.
Nous montrons aussi (9.3) :

Si p ne divise pas $|Q|$, alors $H^*B \cong H^*(D)^Q$.

Nous obtenons ensuite une description assez explicite de la cohomologie entière de $L \int C_n$, où C_n est cyclique d'ordre n premier. En particulier, nous avons (10.8) :

Supposons que n est premier, α pair si $n = 2$ et n_1 une puissance de n. Alors un générateur ξ d'ordre n_1 de $H^\alpha(L; \mathbb{Z})$ fournit un générateur ζ d'ordre nn_1 dans $H^{n\alpha}(L \int C_n ; \mathbb{Z})$.

Dans la suite de ce travail, nous nous intéressons à la cohomologie des groupes linéaire général $GL_n = GL_n k$ et linéaire spécial $SL_n = SL_n k$ sur un corps fini k à q éléments de caractéristique p. Soient l un nombre premier différent de p et r l'ordre multiplicatif de q mod l. .
Quillen [Q2] a décrit la cohomologie mod l de GL_n. Il considère les classes de Chern $c_i \in H^{2i}(GL_n; \mathbb{Z}/l)$ obtenues par relevé de Brauer et, pour $1 \le i \le n$ et $i \equiv 0$ mod r, il construit des classes $e_i \in H^{2i-1}(GL_n; \mathbb{Z}/l)$. Il montre alors (11.3) :

Les monômes $c_r^{\alpha_1} c_{2r}^{\alpha_2} \dots c_{mr}^{\alpha_m} e_r^{\beta_1} e_{2r}^{\beta_2} \dots e_{mr}^{\beta_m}$, avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $\beta_i \in \{0,1\}$ et $m = [n/r]$, forment une base de $H^*(GL_n; \mathbb{Z}/l)$.

Plusieurs auteurs ont publié sur la cohomologie des groupes linéaires. Signalons en particulier que Kroll [K] détermine $H^*(GL_n; \mathbb{Z}/l^\alpha)$ pour l^α assez petit, Soulé-Tezuka-Yagita [STY] s'intéressent à l'application induite en cohomologie par $GL_3\mathbb{Z} \to GL_3\mathbb{F}_p$ pour p premier et Shapiro [Sh] calcule $H^*(SL_nK; \mathbb{Z}/l)$ pour certains K infinis et l convenable.

Pour notre part, nous déterminons $H^*(SL_n; \mathbb{Z}/l)$ (12.1) :

L'homomorphisme d'algèbres $H^*GL_n \to H^*SL_n$, induit par l'inclusion $SL_n \to GL_n$, est surjectif et son noyau est l'idéal engendré par e_l et c_l.
En particulier, c'est un isomorphisme si $r \geq 2$.

Ce résultat est bien connu dans le cas stable (cf. 16.12 et 11.2), mais n'est pas immédiat dans le cas non-stable. Si r = 1, notre preuve utilise les résultats du chapitre 1 appliqués au produit semi-direct $GL_n = SL_n \rtimes k^*$ et se fait en étudiant la structure multiplicative de la suite spectrale de Lyndon-Hochshild-Serre associée. Nous montrons en particulier que $E_2 = E_\infty$ et que l'action de k^* sur $H^*(SL_n; \mathbb{Z}/l)$ est triviale (13.2). Si $r \geq 2$, le théorème 12.1 se démontre en utilisant des techniques classiques de théorie des groupes et en adaptant à SL_n des résultats de Quillen pour GL_n ([Q1] et [Q2]).

Quillen [Q2] obtient aussi le résultat intéressant suivant. Soient μ_l le groupe des racines l-ième de l'unité dans une clôture algébrique de k, C le groupe cyclique $k(\mu_l)^*$, π le groupe de Galois de $k(\mu_l)/k$, m = [n/r] et Σ_m le groupe symétrique à m lettres. On obtient un homomorphisme injectif $i : C^m \to GL_n$ tel que sur Im i le wreath produit $\pi^m \rtimes \Sigma_m$ agit par automorphismes intérieurs de GL_n. Donc $\mathrm{Im}\, i^* \subset (H^*C^m)^{\pi^m \rtimes \Sigma_m}$

et Quillen prouve (11.4) :

L'homomorphisme $i^* : H^*GL_n \to (H^*C^m)^{\pi^m \rtimes \Sigma_m}$ est injectif. Si l est impair, c'est un isomorphisme.

Nous montrons que le sous-groupe $T = C^m \cap i^{-1}(SL_n)$ est stable par l'action de $\pi^m \rtimes \Sigma_m$ et nous établissons le résultat analogue (12.3) :

L'homomorphisme $H^*SL_n \to (H^*T)^{\pi^m \rtimes \Sigma_m}$, induit par l'injection $T \to SL_n$, est injectif si l est impair et $n \geq 2$ ou si $l = 2$ et $n \geq 3$.
Si l est impair et $n \geq 2$, c'est un isomorphisme.

Ainsi les groupes C^m et T jouent le rôle de "tores maximaux" pour les groupes GL_n et SL_n respectivement et $\pi^m \rtimes \Sigma_m$ celui de "groupe de Weyl".

Si $r \geq 2$, le résultat 12.3 est équivalent au théorème 12.1. La preuve dans le cas $r = 1$ conduit à étudier les invariants de $S = P[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ par une action de Σ_n ainsi que l'injectivité de l'homomorphisme de complexes de de Rham $\Omega(S^{\Sigma_n}) \to \Omega(S)^{\Sigma_n}$. Ces questions font l'objet de l'appendice.

La connaissance de la cohomologie modulo l, pour $l \neq p$, des groupes GL_n et SL_n permet de déterminer leur cohomologie entière à l'exception de la p-torsion. C'est l'objet du chapitre 4 résumé dans [J].

On détermine d'abord l'ordre des classes de Chern entières $\tilde{c}_i \in H^{2i}(BG; \mathbb{Z})$ où $G = GL_n$ ou SL_n (16.1) :

1. Pour $G = GL_n$ et $1 \leq i \leq n$, $\tilde{c}_i$ est d'ordre $q^i - 1$.
2. Pour $G = SL_n$ et $2 \leq i \leq n$, $\tilde{c}_i$ est d'ordre $q^i - 1$ et $\tilde{c}_1$ est nulle.
3. Pour $i > n$, $\tilde{c}_i$ est nulle.

Soient I l'ensemble des i tels que $1 \leq i \leq n$ pour $G = GL_n$ et $2 \leq i \leq n$ pour $G = SL_n$, s_i l'ordre de $\tilde{c}_i$ et, pour chaque $i \in I$, la fibration d'espaces d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbb{Z}/s_i, 2i-1) = K_i \xrightarrow{\beta} K(\mathbb{Z}, 2i) \xrightarrow{s_i} K(\mathbb{Z}, 2i)$. L'application $\tilde{c}_i : BG \to K(\mathbb{Z}, 2i)$ se relève en une application $\gamma_i : BG \to K_i$. Par Cartan [C], il existe un sous-complexe C_i du complexe des cochaînes cellulaires de K_i tel que $H^*C_i = \mathbb{Z}[\tilde{x}_i] / (s_i \tilde{x}_i)$, où $\tilde{x}_i$ est le générateur de $H^{2i}(K_i; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/s_i\mathbb{Z}$. Nous considérons ensuite l'homomorphisme de complexes h obtenu par l'équivalence d'Eilenberg-Zilber :

$$h : \bigotimes_{i \in I} C_i \to \bigotimes_{i \in I} C(K_i) \sim C(\prod_{i \in I} K_i) \xrightarrow{g^*} C(BG),$$

où g est l'application donnée par les γ_i. En choisissant convenablement les γ_i, nous obtenons le théorème suivant (17.8) :

L'application $h^* : \tilde{H}^*(\bigotimes_{i \in I} C_i) \to \tilde{H}^*(BG; \mathbb{Z}[1/p])$ est un isomorphisme de groupes abéliens.

Le résultat reste valable dans le cas stable, c'est-à-dire pour $n = \infty$.

J'exprime ici toute ma gratitude à Monsieur U. Suter, directeur de thèse, dont les conseils m'ont constamment encouragé et je le remercie très sincèrement pour sa gentillesse et sa disponibilité qui ont contribué au plaisir que j'ai eu à travailler avec lui.

Ma reconnaissance s'adresse également à Messieurs A. Robert, pour sa lecture très attentive du manuscrit, et D. Arlettaz, pour ses précieuses remarques et le vif intérêt qu'il a manifesté pour le sujet.

Je remercie encore mes camarades A. Jeanneret, D. Lines et B. Junod pour les fructueuses discussions que nous avons partagées.

Ce travail a été réalisé en partie grâce au soutien du Fonds national suisse de la recherche scientifique (requête n°21-26212.89)

CHAPITRE I UNE RESOLUTION LIBRE POUR UN PRODUIT SEMI-DIRECT

1. Rappels

Soit un anneau A. Un module M sur A est dit :

- projectif si le foncteur $\mathrm{Hom}_A(M,-)$ respecte les suites exactes,
- plat si le foncteur $M \otimes_A -$ respecte les suites exactes.

Les modules libres sont projectifs et les projectifs sont plats. Ces notions s'étendent de façon évidente à des modules gradués et en particulier à des complexes.

Soient (Y, ∂'') un complexe de chaînes sur A et (D, ∂') un complexe de cochaînes sur A. Le bicomplexe $B = \mathrm{Hom}(Y, D)$ est le groupe bigradué différentiel défini par :

$$B_{p,q} = \mathrm{Hom}_A(Y_p, D^q) \quad (p, q \geq 0).$$

Il est gradué par

$$B^n = \bigoplus_{p+q=n} B_{p,q}.$$

Pour $\varphi \in B_{p,q}$, on définit

$$d''\varphi \in B_{p+1,q} : d''\varphi = (\partial'')^*(\varphi) = \varphi \circ \partial''$$

$$d'\varphi \in B_{p,q+1} : (d'\varphi) = \partial' \circ \varphi.$$

On a $d' \circ d' = d'' \circ d'' = 0$ et $d' \circ d'' = d'' \circ d'$, ce qui permet de définir la différentielle

$$d : B^n \to B^{n+1}$$

par

$$d = d''\varphi + (-1)^p\, d'\varphi \ \text{ pour } \varphi \in B_{p,q}.$$

Une approximation diagonale sur Y est un morphisme de complexes

$$\Delta : Y \to Y \otimes Y$$

où A agit diagonalement sur $Y \otimes Y$, c'est-à-dire $a\,(y \otimes y) = ay \otimes ay$ pour $a \in A$. C'est donc la donnée, pour chaque paire (p,p') d'entiers, d'un homomorphisme

$$\Delta_{p,p'} : Y_{p+p'} \to Y_p \otimes Y_{p'}$$

commutant avec les différentielles, c'est-à-dire :

$$\Delta_{p,p'} \circ \partial'' = \partial''_1 \circ \Delta_{p+1,p'} + (-1)^p \partial''_2 \circ \Delta_{p,p'+1},$$

où ∂''_i désigne la différentielle ∂'' sur le i-ième facteur de $Y_r \otimes Y_s$.

On suppose que Y est muni d'une approximation diagonale Δ et que D possède un produit

$$\mu : D^q \otimes D^{q'} \to D^{q+q'}$$

tel que

$$\partial'(xz) = (\partial' x)z + (-1)^{\text{degré}(x)} x(\partial' z) \quad \text{où } xz = \mu(x,z).$$

Ainsi D est un anneau différentiel gradué. Supposons de plus que D soit, pour le produit μ et pour un anneau R, une R-algèbre différentielle graduée. Alors B devient une R-algèbre différentielle bigraduée pour le produit

$$\cup : B_{p,q} \otimes B_{p',q'} \to B_{p+p',q+q'}$$

défini par

(1.1) $$\varphi \cup \psi = (-1)^{qp'} \mu \circ (\varphi \otimes \psi) \circ \Delta_{p,p'}.$$

On a

$$d(\varphi \cup \psi) = d\varphi \cup \psi + (-1)^{p+q} \varphi \cup d\psi.$$

En notant $\cup_D = \mu$ et $\varphi \cup_Y \psi = (\varphi \otimes \psi) \circ \Delta_{p,p'}$, on peut écrire $\cup = (-1)^{qp'} \cup_D \circ \cup_Y$. Ainsi H^*B est une R-algèbre dont le produit est donné par

$$[\varphi] \otimes [\psi] \to [\varphi \cup \psi].$$

En filtrant B par

$$F^r(B^n) = \bigoplus_{k=r}^{n} B_{k,n-k},$$

on a $F^rB \cup F^sB \subset F^{r+s}B$ et B est alors une R-algèbre différentielle bigraduée filtrée. La suite spectrale associée (cf. par exemple [M] ou [Se]) est une suite spectrale de R-algèbres E_r (le produit étant induit de celui de B) de différentielle de bidegré (r,1-r). Elle converge vers H^*B. On note GH^*B le gradué associé à H^*B pour la filtration suivante :

$$H^nB = \bar{D}^{o,n} \supset \bar{D}^{1,n-1} \supset \ldots \supset \bar{D}^{n,o} \supset \bar{D}^{n+1,-1} = 0$$

où

$$\bar{D}^{p,q} = F^p(H^{p+q}B) = \mathrm{Im}\,[H^{p+q}(F^pB) \to H^{p+q}(B)] = C^{p,q}_\infty / B^{p,q}_\infty$$

avec

$C_\infty^{p,q}$: les éléments de F^pC^{p+q} qui sont des cycles de B,

$B_\infty^{p,q}$: les éléments de F^pC^{p+q} qui sont des bords de B,

$E_\infty^{p,q} = C_\infty^{p,q} / (C_\infty^{p+1,q-1} + B_\infty^{p,q}) \cong D^{p,q} / D^{p+1,q-1}$.

Les $\bar{D}^p = \bigoplus_{q \geq 0} \bar{D}^{p,q}$ sont des idéaux de H^*B et on a l'isomorphisme de R-algèbres

$$E_\infty \cong GH^*B.$$

On dit que $\varphi \in H^mB$ est de filtration p si $\varphi \in \bar{D}^{p,m-p} - \bar{D}^{p+1,m-p-1}$. On note $\bar{\varphi}$ l'image de φ dans $E_\infty^{p,q}$. Pour la structure multiplicative et $\bar{\varphi} \in E_\infty^{p,q}$, $\bar{\psi} \in E_\infty^{p',q'}$, on a alors $\overline{\varphi \cup \psi} = \bar{\varphi} \cdot \bar{\psi} \in E_\infty^{p+p',q+q'}$. En particulier $\varphi \cup \psi$ est de filtration plus grande ou égale à p+p'.

Si Y est projectif sur A, alors le foncteur $Hom_A(Y,-)$ est exact et on obtient les isomorphismes de R-algèbres suivants :

$$E_1^{p,q} \cong Hom_A(Y_p, H^qD) \quad \text{et} \quad E_2^{p,q} \cong H^p(Y; H^qD)$$

qui résultent des diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} E_0^{p,q} & \cong & B_{p,q} \\ {\scriptstyle d_0^{p,q}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d'} \\ E_0^{p,q+1} & \cong & B_{p,q+1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E_1^{p,q} & \cong & Hom_A(Y_p, H^qD) \\ {\scriptstyle d_1^{p,q}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d''} \\ E_1^{p+1,q} & \cong & Hom_A(Y_{p+1}, H^qD) \end{array}$$

Le produit de deux éléments $\varphi \in E_i^{p,q}$, $\psi \in E_i^{p',q'}$ est égal, à un facteur $(-1)^{qp'}$ près, au produit cup des cochaînes sur Y à valeur dans la R-algèbre H^*D pour i = 1 et au produit cup des classes de cohomologie sur Y à valeur dans la R-algèbre H^*D pour i = 2.

Un morphisme de complexes $f : C \to \bar{C}$ est une équivalence faible si l'homomorphisme induit en homologie est un isomorphisme.

1.2 Lemme *Soient D et $\tilde{D}$ deux complexes de cochaînes sur un anneau A munis chacun d'un produit comme ci-dessus qui en fait des R-algèbres différentielles graduées.*
Soient encore $f : D \to \tilde{D}$ une équivalence faible (sur A et sur R) respectant la structure multiplicative et Y un complexe de chaînes projectif sur A muni d'une approximation diagonale.
Alors $Hom(1, f) : Hom_A(Y, D) \to Hom_A(Y, \tilde{D})$ est une équivalence faible et elle respecte la structure multiplicative. L'isomorphisme induit en cohomologie est un isomorphisme de R-algèbres.

Preuve On vérifie facilement que Hom(1,f) commute avec les différentielles et qu'il respecte la structure multiplicative. On filtre $\mathrm{Hom}_A(Y, D)$ comme indiqué plus haut et on fait de même pour $\mathrm{Hom}_A(Y,\tilde{D})$. Alors Hom(1,f) respecte les filtrations et induit un morphisme entre les suites spectrales associées. Puisque Y est projectif, le foncteur $\mathrm{Hom}_A(Y,-)$ est exact et au niveau E_1 on obtient

$$\mathrm{Hom}(1, H^*f) : \mathrm{Hom}_A(Y, H^*D) \to \mathrm{Hom}_A(Y, H^*\tilde{D})$$

Par exactitude du foncteur $\mathrm{Hom}_A(Y,-)$, c'est un isomorphisme. Un résultat bien connu de la théorie des suites spectrales montre que l'application induite en cohomologie est un isomorphisme de R-modules. Mais puisque Hom(1,f) respecte la sructure multiplicative, il en est de même de l'isomorphisme induit en cohomologie. ♦

On démontre de même un résultat analogue pour le produit tensoriel des complexes.

1.3 Lemme *Soit $f : C \to \tilde{C}$ une équivalence faible entre deux complexes de chaînes sur un anneau A et D un complexe plat sur A. Alors $f \otimes 1 : C \otimes_A D \to \tilde{C} \otimes_A D$ est une équivalence faible.*

2. Résolution pour un produit semi-direct

Rappelons la définition d'un produit semi-direct de groupes. Soient K et Q deux groupes et un homomorphisme τ de Q dans les automorphismes de K :

$$\tau : Q \to \mathrm{Aut}\, K.$$

On note $k^q = \tau(q)k$ l'action à gauche de Q sur K. Alors le produit semi-direct $G = K \rtimes Q$ est par définition l'ensemble $K \times Q$ muni de la loi de composition suivante :

$$(k,q).(\bar{k},\bar{q}) = (k\bar{k}^q, q\bar{q}).$$

On a alors la suite exacte de groupes

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1$$

avec $i(k) = (k,1)$ et $\pi(k,q) = q$ pour $k \in K$ et $q \in Q$. Cette suite exacte se scinde. C'est-à-dire qu'il existe un homomorphisme

$$s : Q \to G$$

tel que $\pi \quad s = id$. On dit que s est une section de la suite exacte. On a

$$\tau(q)k = s(q)\, k\, s(q^{-1})\,,\, q \in Q, k \in K,$$

où K est identifié avec son image dans G.

D'autre part, si

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1$$

est une suite exacte scindée, alors G est isomorphe au produit semi-direct $K \rtimes Q$, l'action à gauche de Q sur K est donnée par conjugaison comme ci-dessus.

Le groupe abélien $\mathbb{Z}K \otimes \mathbb{Z}Q$ muni de la structure multiplicative suivante

$$(k\otimes q)\cdot(\bar{k}\otimes\bar{q}) = k\bar{k}^q \otimes q\bar{q} \text{ et prolongement par } \mathbb{Z} \text{ - linéarité}$$

forme un anneau isomorphe à $\mathbb{Z}G$.

Soit

$$\varepsilon' : X \to \mathbb{Z} \ : \ \ldots \to X_n \xrightarrow{\partial'} X_{n-1} \to \ \ldots \ \to X_o \xrightarrow{\varepsilon'} \mathbb{Z}$$

une résolution $\mathbb{Z}K$- libre du module trivial $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}K$ et $\mathbb{Z}Q$, c'est-à-dire les X_n sont des modules sur $\mathbb{Z}K$ et sur $\mathbb{Z}Q$, ils sont $\mathbb{Z}K$-libres et la différentielle ∂' est un homomorphisme de $\mathbb{Z}K$ et de $\mathbb{Z}Q$ - modules. On suppose de plus que

1. les actions de K et Q sur X satisfont

(2.1) $$q(kx) = k^q(qx),\ q \in Q,\ k \in K,\ x \in X.$$

2. chaque X_n possède une $\mathbb{Z}K$ - base $\{x_i : i \in I_n\}$ stable par l'action de Q, c'est-à-dire

(2.2) $$qx_i = x_j \text{ pour un } j = j(i,q) \in I_n.$$

Remarques 1. La résolution bar de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}K$ est une telle résolution. L'action de Q sur la $\mathbb{Z}$-base $\{(k_o,k_1,\ldots,k_n) : k_i \in K\}$ de X_n est donnée par

$$q(k_o,k_1,\ldots,k_n) = (k_o^q,k_1^q,\ldots,k_n^q)\ ,\ q \in Q.$$

2. Chaque automorphisme $\tau(q)$ de K induit une application de complexes $\varphi_q : X \to X$ préservant l'augmentation ε et satisfaisant

$$\varphi_q(kx) = k^q\,\varphi_q(x).$$

qui est l'analogue de la condition 2.1. Mais en général les φ_q n'induisent pas une action de Q sur X.

3. Tout G-module M est un module sur $\mathbb{Z}K$ et $\mathbb{Z}Q$ en restreignant l'action de G aux sous-groupes K et s(Q); dans ce cas la condition 2.1 est satisfaite, car $(1,q)(k,1) = = (k^q,1)(1,q)$. Réciproquement, on vérifie facilement que si M est un module sur $\mathbb{Z}K$ et $\mathbb{Z}Q$ alors $(k,q)m = k(qm)$, pour $m \in M$, définit une G-action sur M et que 2.1 est satisfaite.(cf.aussi [E], p.231).

Soit

$$\varepsilon'' : Y \to \mathbb{Z} : \ldots \to Y_n \xrightarrow{\partial''} Y_{n-1} \to \ldots \to Y_o \xrightarrow{\varepsilon''} \mathbb{Z}$$

une résolution $\mathbb{Z}Q$-libre du module trivial $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}Q$. Regardons X et Y comme complexes de groupes abéliens et formons leur produit tensoriel usuel $P = X \otimes Y$ augmenté par $\varepsilon = \varepsilon' \otimes \varepsilon'' : P_o = X_o \otimes Y_o \to \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$. Sur $X_r \otimes Y_s$, on définit une structure de G-module par

$$(k,q)\ x\otimes y = k(qx) \otimes qy,\ k \in K,\ q \in Q,\ x \in X,\ y \in Y.$$

Il est facile de vérifier que cela définit bien une action à gauche de G sur $X_r \otimes Y_s$.

2.3 Lemme

1. Chaque $X_r \otimes Y_s$ est $\mathbb{Z}G$-libre.

2. La différentielle ∂ de P et l'augmentation ε sont des G-homomorphismes.

Preuve 1. Soit $\{x_i : i \in I\}$ la $\mathbb{Z}K$-base de X_r satisfaisant 2.2 et $\{y_j : j \in J\}$ une $\mathbb{Z}Q$-base de Y_s. Il suffit alors de voir que la $\mathbb{Z}$-base $\{kx_i \otimes qy_j\}$ de $X_r \otimes Y_s$ est stable par l'action de G. Or cela résulte de 2.2.
2. Immédiat en utilisant le fait que ∂' et ε' sont des $\mathbb{Z}K$ et $\mathbb{Z}Q$-homomorphismes.♦

Par conséquent, chaque P_n est un $\mathbb{Z}G$-module libre et la formule de Künneth montre que la suite

$$\varepsilon : P \to \mathbb{Z} \ : \ \ldots \to P_n \xrightarrow{\partial} P_{n-1} \to \ \ldots \ \to P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

est exacte. D'où le résultat suivant.

2.4 Théorème *La suite exacte $\varepsilon : P \to \mathbb{Z}$ est une résolution libre du G-module trivial $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}G$.*

3. Un complexe d'homologie $H_*(G; M)$

L'homologie de G à coefficients dans le G-module à droite M est par définition celle du complexe

$$M \otimes_G P = M \otimes_G (X \otimes Y).$$

En regardant M comme un module sur $\mathbb{Z}K$ et $\mathbb{Z}Q$, on fait agir Q sur $M \otimes_K X$ par

$$(m \otimes x)q = mq \otimes q^{-1}x, \ m \in M, x \in X, q \in Q$$

et $1 \otimes \partial'$ est alors un Q-homomorphisme. Ainsi $(M \otimes_K X, 1 \otimes \partial')$ est un complexe sur $\mathbb{Z}Q$ et on considère son produit tensoriel sur $\mathbb{Z}Q$ avec le complexe (Y, ∂'').

3.1 Lemme *L'homologie de $(M \otimes_K X) \otimes_Q Y$ est isomorphe à $H_*(G; M)$.*

Preuve Soient $\{x_i : i \in I\}$ et $\{y_j : j \in J\}$ les bases usuelles de X_r et Y_s. Les isomorphismes canoniques suivants

$$M \otimes_G \mathbb{Z}G(x_i \otimes y_j) \cong M \cong M \otimes_K \mathbb{Z}Kx_i \cong (M \otimes_K \mathbb{Z}Kx_i) \otimes_Q \mathbb{Z}Qy_j$$

montrent que l'application canonique

$$M \otimes_G (X_r \otimes Y_s) \to (M \otimes_K X_r) \otimes_Q Y_s$$

est un isomorphisme. Il est compatible avec les actions des différents groupes; en effet, $m \otimes (kx_i \otimes qy_j) = m(k,q) \otimes (q^{-1}x_i \otimes y_j)$ a pour image $((mk)q \otimes q^{-1}x_i) \otimes y_j =$ $= (m \otimes kx_i) \otimes qy_j$. Enfin, il est clair que l'isomorphisme commute avec les différentielles.♦

Rappel (cf. [Br], VII.5) L'homologie de Q à coefficients dans le Q-complexe de chaînes C est définie par

$$H_*(Q; C) = H_*(C \otimes_Q Y).$$

Par le lemme 1.3, $H_*(Q; C)$ est un invariant du type faible d'homotopie de C. Et le lemme 3.1 montre que

$$H_*(G; M) \cong H_*(Q; M \otimes_K X).$$

On a ainsi obtenu le résultat suivant.

3.2 Théorème *Si C est un Q-complexe de chaînes faiblement homotope à $M \otimes_K X$, alors*

$$H_*(G; M) \cong H_*(Q; C) = H_*(C \otimes_Q Y).$$

Remarques 1. Si X est un CW-complexe sur lequel Q agit cellulairement, on définit l'homologie équivariante de (Q, X), notée $H_*^Q(X; M)$, par

$$H_*^Q(X; M) = H_*(Q; C(X, M)),$$

où C(X, M) est le complexe des chaînes cellulaires de X à coefficients dans M (cf. [Br], VII.7). Prenons K, G et Q discrets et M un G-module trivial. Soit $Q \to EQ \to BQ$ un fibré Q-principal universel, alors EQ étant contractile la projection $EQ \times X \to X$ est une équivalence d'homotopie et induit donc une équivalence de complexes $C(EQ \times X, M) \to C(X, M)$. Par conséquent, $H_*^Q(X; M) \cong H_*^Q(EQ \times X; M)$.

Puisque Q agit librement sur $EQ \times X$ on peut montrer que $H_*^Q(EQ \times X; M) \cong$ $\cong H_*(EQ \times_Q X; M)$, où $EQ \times_Q X = (EQ \times X)/Q$. D'autre part, on peut prendre pour BG l'espace $EQ \times_Q BK$ et on sait que l'homologie $H_*(G; M)$ de G est isomorphe à l'homologie cellulaire de BG. On obtient donc $H_*(G; M) \cong H_*^Q(BK; M)$.

2. Les isomorphismes ci-dessus sont bien sûr des isomorphismes de groupes abéliens. Mais si M admet de plus une structure de module sur un anneau R, alors on vérifie facilement que ce sont des isomorphismes de R-modules.

4. Un complexe de cohomologie $H^*(G;\ M)$

La cohomologie de G à coefficients dans le G-module à gauche M est par définition celle du complexe

$$\mathrm{Hom}_G(P, M) = \mathrm{Hom}_G(X \otimes Y, M).$$

On fait de $\mathrm{Hom}_K(X, M)$ un Q-module à gauche via

$$f^q(x) = q\cdot f(q^{-1}x),\ f \in \mathrm{Hom}_K(X, M),\ q \in Q,\ x \in X.$$

Alors $(\mathrm{Hom}_K(X, M), \partial'^*)$ est un complexe de cochaînes sur $\mathbb{Z}Q$ et on forme le bicomplexe $\mathrm{Hom}_Q(Y, \mathrm{Hom}_K(X, M))$ comme au §1.

4.1 Lemme *La cohomologie de $\mathrm{Hom}_Q(Y, \mathrm{Hom}_K(X, M))$ est isomorphe à $H^*(G; M)$.*

<u>Preuve</u> L'isomorphisme

(4.2) $$\eta : \mathrm{Hom}_G(X_r \otimes Y_s, M) \to \mathrm{Hom}_Q(Y_s, \mathrm{Hom}_K(X_r, M))$$

défini par

$$[(\eta f)y]\ x\ =\ (-1)^{rs} f(x \otimes y),\ x \in X_r,\ y \in Y_s,$$

est compatible avec les actions des groupes et commute avec les différentielles. En effet, si $f \in \mathrm{Hom}_G(X_r \otimes Y_s, M)$ alors

$$\partial^* f = f \circ (\partial' \otimes 1) + (-1)^r f \circ (1 \otimes \partial'') \in \mathrm{Hom}_G(X_{r+1} \otimes Y_s, M) \oplus \mathrm{Hom}_G(X_r \otimes Y_{s+1}, M),$$

et on vérifie facilement que

$$d'(\eta f) = (-1)^s \eta(f \circ \partial' \otimes 1)\ \text{ et }\ d''(\eta f) = (-1)^r \eta(f \circ 1 \otimes \partial'').$$

D'où

$$\eta(\partial^* f) = d(\eta f). \blacklozenge$$

<u>Rappel</u> (cf. [Br], VII.5) La cohomologie de Q à coefficients dans le Q-complexe de cochaînes D est définie par $H^*(Q; D) = H^*(\mathrm{Hom}_Q(Y, D))$.

Par le lemme 1.2, $H^*(Q; D)$ est un invariant du type faible d'homotopie de D. Et le lemme 4.1 montre que $H^*(G; M) \cong H^*(Q; \mathrm{Hom}_K(X, M))$.
D'où le résultat suivant.

4.3 Théorème *Si D est un Q-complexe de cochaînes faiblement homotope à $Hom_K(X, M)$, alors*

$$H^*(G; M) \cong H^*(Q; D) = H^*(Hom_Q(Y, D)).$$

Remarques 1. Si X est un CW-complexe muni d'une action cellulaire de Q, on définit la cohomologie équivariante de (Q, X), notée $H_Q^*(X; M)$, par

$$H_Q^*(X; M) = H^*(Q; Hom(C(X), M)),$$

où C(X) est le complexe des chaînes cellulaires entières de X (cf. [Br], VII.7). Comme dans le cas de l'homologie, on montre que pour K, G et Q discrets et M un G-module trivial on a

$$H^*(G; M) \cong H_Q^*(BK; M).$$

2. Comme précédemment, les isomorphismes ci-dessus sont des isomorphismes de groupes abéliens, mais si M admet de plus une structure de module sur un anneau R, alors ce sont des isomorphismes de R-modules.

5. Produit cup des cochaînes

Rappelons la définition du produit cup des cochaînes d'un groupe G. Soient $\varepsilon : P \to \mathbb{Z}$ une résolution projective de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}G$ de différentielle ∂ et $\Delta : P \to P \otimes P$ une approximation diagonale préservant l'augmentation (cf. §1). Une telle application existe toujours; par exemple, si P est la résolution bar pour G, alors on a $\Delta_{r,s}(g_0,\dots,g_{r+s}) = (g_0,\dots,g_r) \otimes (g_r,\dots,g_{r+s})$. Si M et N sont deux G-modules à gauche, $f \in Hom_G(P_r, M)$ et $g \in Hom_G(P_s, N)$, on définit le produit cup $f \cup g$ de f et g par

$$f \cup g = (f \otimes g) \circ \Delta_{r,s} \in Hom_G(P_{r+s}, M \otimes N),$$

où G agit diagonalement sur $M \otimes N$. On a alors $\partial^*(f \cup g) = \partial^* f \cup g + (-1)^r f \cup \partial^* g$ et le produit cup sur la cohomologie est donné par

$$\cup : H^r(G; M) \otimes H^s(G; N) \to H^{r+s}(G; M \otimes N), \ [f] \otimes [g] \to [f \cup g].$$

On veut construire une approximation diagonale $\Delta : P \to P \otimes P$ pour le groupe $G = K \rtimes Q$ à partir de deux approximations diagonales $\Delta' : X \to X \otimes X$ et $\Delta'' : Y \to Y \otimes Y$ pour les groupes K et Q. On suppose que

les $\Delta'_{r,s} : X_{r+s} \to X_r \otimes X_s$ sont des homomorphismes sur $\mathbb{Z}K$ et $\mathbb{Z}Q$.

En prenant la résolution bar pour K et l'approximation diagonale mentionnée plus haut, cette hypothèse est clairement satisfaite. Pour le produit cup des cochaînes de K, on a alors la relation suivante :

$$(f \cup g)^q = f^q \cup g^q \text{ pour } q \in Q.$$

Ainsi chaque $q \in Q$ définit un isomorphisme de l'anneau $\mathrm{Hom}_K(X, M)$ et dans la suite on dira que le produit est Q-compatible.

5.1 Lemme *L'application*

$$\Phi : P = X \otimes Y \to (X \otimes X) \otimes (Y \otimes Y)$$

définie par

$$\Phi / X_m \otimes Y_n = \bigoplus_{m=r+s,\, n=u+v} \Delta'_{r,s} \otimes \Delta''_{u,v}$$

est un homomorphisme de G-complexes.

Preuve L'hypothèse faite sur Δ' implique que Φ est un homomorphisme de G-modules. Il est facile de vérifier qu'il commute avec les différentielles. ♦

5.2 Lemme *On a un isomorphisme de G-complexes*

$$T : (X \otimes X) \otimes (Y \otimes Y) \to (X \otimes Y) \otimes (X \otimes Y) = P \otimes P$$

donné par

$$T\,((x_r \otimes x_s) \otimes (y_u \otimes y_v)) = (-1)^{su}\,(x_r \otimes y_u) \otimes (x_s \otimes y_v)$$

avec $x_i \in X_i$ *et* $y_i \in Y_i$.

Preuve Il est clair que T préserve l'action de G et que $T^{-1} = T$. Comme avant, il est facile de vérifier qu'il commute avec les différentielles. ♦

Remarquons encore que Φ et T préservent les augmentations. On a ainsi prouvé le résultat suivant.

5.3 Proposition *Le G-homomorphisme*

$$\Delta = T \circ \Phi : P \to P \otimes P$$

est une approximation diagonale pour le groupe $G = H \rtimes Q$.

Soient M et N deux G-modules à gauche, $f \in \mathrm{Hom}_G(X_r \otimes Y_u, M)$ et $g \in \mathrm{Hom}_G(X_s \otimes Y_v, N)$. Alors $f \cup g \mid X_m \otimes Y_n$ ne peut être non-nul que si $r+s = m$ et $u+v = n$ et vaut alors

$$f \otimes g \circ T \circ (\Delta'_{r,s} \otimes \Delta'_{u,v}).$$

Pour terminer, montrons que l'isomorphisme η de 4.2 est multiplicatif. Soit M un module sur $\mathbb{Z}G$ et sur un anneau R. Alors le bicomplexe $\mathrm{Hom}_G(X \otimes Y, M)$ muni du produit cup construit ci-dessus est une R-algèbre différentielle bigraduée. On applique la situation du §1 avec $A = \mathbb{Z}Q$ et $D = \mathrm{Hom}_K(X, M)$ en munissant $B = \mathrm{Hom}_Q(Y, D)$ du produit définit en 1.1. On obtient le résultat suivant.

5.4 Théorème *Soit M un module sur $\mathbb{Z}G$ et sur un anneau R. Alors les R-algèbres différentielles bigraduées $\mathrm{Hom}_G(X \otimes Y, M)$ et $\mathrm{Hom}_Q(Y, \mathrm{Hom}_K(X, M))$ sont isomorphes, via l'isomorphisme η de 4.2.*
En particulier, $H^*(G; M)$ est isomorphe à $H^*(\mathrm{Hom}_Q(Y, \mathrm{Hom}_K(X, M)))$, en tant que R-algèbres.
Soient D un Q-complexe de cochaînes muni d'un produit Q-compatible et $f : D \rightarrow \mathrm{Hom}_K(X, M)$ une équivalence faible (sur $\mathbb{Z}Q$ et sur R) de Q-complexes respectant la structure multiplicative.
Alors $H^*(G; M)$ est isomorphe à $H^*(\mathrm{Hom}_Q(Y, D))$, en tant que R-algèbres.

Preuve Avec les notations précédentes, $x \in X_{r+s}$ et $y \in Y_{u+v}$, il vient

$$[\eta(f \cup g)y]\, x = (-1)^{rv} [(\eta f \cup_Q \eta g)\, y]\, \Delta'_{r,s}(x),$$

où $\eta f \cup_Q \eta g = (\eta f \otimes \eta g) \circ \Delta'' \in \mathrm{Hom}_Q(Y_{u+v}, \mathrm{Hom}_K(X_r, M) \otimes \mathrm{Hom}_K(X_s, M))$. La deuxième partie résulte du lemme 1.2. ♦

6. La suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre (LHS)

On considère la situation du §1 avec l'algèbre $B = \mathrm{Hom}_Q(Y, \mathrm{Hom}_K(X, M))$. La suite spectrale obtenue est dite suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre (abrégée LHS). Nous utiliserons le résultat suivant dans 13.2.

6.1 Proposition *1. L'application $H^sG \to H^sK$, induite par l'inclusion $K \to G$, est égale à la composition*

$$H^sG \to E_\infty^{o,s} \subset E_2^{o,s} \cong (H^sK)^Q \subset H^sK.$$

2. L'application $H^rQ \to H^rG$, induite par la projection $G \to Q$, est égale à la composition

$$H^rQ \cong E_2^{r,o} \twoheadrightarrow E_\infty^{r,o} = D^{r,o} \subset H^rG.$$

<u>Preuve</u> On peut toujours prendre $Y_0 = \mathbb{Z}Q$ et alors X s'injecte dans $X \otimes Y$ via

$$f : X_s \cong X_s \otimes \mathbb{Z}1 \subset X_s \otimes Y_0 \subset P_s,\ x \to x \otimes 1.$$

L'application $H^sG \to H^sK$ est alors induite par $f^* : \mathrm{Hom}_G(P_s, M) \to \mathrm{Hom}_K(X_s, M)$ qui se factorise canoniquement en

$$\mathrm{Hom}_G(P_s, M) = B^s \to B^s/F^1B^s = B_{o,s} = \mathrm{Hom}_Q(Y_o, \mathrm{Hom}_K(X_s, M)) \cong \mathrm{Hom}_K(X_s, M).$$

Or la théorie des suites spectrales dit que l'application $H^s(B) \to H^s(B/F^1B)$ induite par la projection de complexes $B \to B/F^1B$ est identique à

$$H^sG = H^s(B) \to H^s(B)/D^{1,s-1} \cong E_\infty^{o,s} \subset E_2^{o,s} \cong (H^sK)^Q$$

(cf. par ex. [S] I.2).

La preuve de 2 est analogue avec

$$P_r \to X_0 \otimes Y_r \to Y_r,$$

la première application étant la projection et la deuxième étant donnée par $n_ik_i \otimes y \to n_o1 \otimes y$ où $n_i \in \mathbb{Z}$, $k_i \in K$, $k_o = 1 \in K$.♦

L'existence d'une section $s : Q \to G$ implique que H^*Q est un sommant direct dans H^*G. D'où le corollaire suivant.

6.2 Corollaire $E_\infty^{r,o} = E_2^{r,o}$.

7. Un exemple

L'application qui suit m'a été suggérée par P. Hilton. Avec deux actions différentes de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n$, on construit deux produits semi-directs non-isomorphes G_1 et G_2, mais dont les cohomologies entières sont isomorphes en tant qu'anneaux.

On note les groupes multiplicativement. Ainsi

C_n désigne le groupe cyclique d'ordre n de générateur x,

C désigne le groupe cyclique infini de générateur y.

Soient les entiers positifs u, t, m, k suivants :

u premier à n

t l'ordre de u modulo n $(u^t \equiv 1 \bmod n)$

m premier à t et $m \not\equiv \pm 1 \bmod t$

s l'inverse de m mod t $(sm \equiv 1 \bmod t)$.

On peut généralement trouver de tels entiers, par exemple pour n = 25 on peut prendre u = 6, t = 5, m = 2, s = 3.

Considérons alors les groupes

$$G_1 = \langle x, y : x^n = 1, yxy^{-1} = x^u \rangle$$

$$G_2 = \langle x, y : x^n = 1, yxy^{-1} = x^{u^m} \rangle.$$

Il est clair que G_1 et G_2 sont des produits semi-directs :

$$G_1 \cong C_n \rtimes_{\tau_1} C \quad \text{avec } \tau_1(y)x = x^u,$$

$$G_2 \cong C_n \rtimes_{\tau_2} C \quad \text{avec } \tau_2(y)x = x^{u^m}.$$

7.1 Proposition *Les groupes G_1 et G_2 ne sont pas isomorphes.*

Preuve Un homomorphisme $\beta : G_1 \to G_2$ conduit au diagramme commutatif suivant, où les lignes sont les suites exactes canoniques.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & G_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "i_2"'] & G_2 \arrow[r, "\pi_2"'] & C \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Le groupe C_n étant fini $\pi_2 \ \beta \ i_1 : C_n \to C$ est nul et Im $\beta \ i_1 \subset$ Im i_2, ce qui permet de construire l'homomorphisme α et γ s'obtient alors par passage aux quotients.

On a

(7.2) $$\alpha(\tau_1(y)x) = \tau_2(\gamma(y))\,\alpha(x).$$

Car $i_2\alpha(\tau_1(y)x) = \beta(\tau_1(y)x,1) = \beta((1,y)(x,1)(1,y^{-1})) = \beta(1,y)(\alpha(x),1)\beta(1,y)^{-1} =$
$= i_2(\tau_2(\gamma(y))\,\alpha(x))$, car $\pi_2\beta(1,y) = \gamma(y)$ et C_n est abélien.

Maintenant si β est un isomorphisme, alors

1. α est injectif, C_n étant fini c'est un isomorphisme.
2. γ est surjectif, donc $\gamma(y) = y$ ou $\gamma(y) = y^{-1}$.

Avec 7.2 on obtient

$$\alpha(x^u) = \alpha(x)^{u^{\pm m}} = \alpha(x^{u^{\pm m}}).$$

et par bijectivité de α

$$x = x^{u^{\pm m}}.$$

Par conséquent, $u \equiv u^{\pm m} \bmod n$ et t divise $\pm m - 1$, c'est-à-dire $m \equiv \pm 1 \bmod t$. Ainsi en choisissant $m \not\equiv \pm 1 \bmod t$, il n'existe pas d'isomophisme $\beta : G_1 \to G_2$.♦

7.3 Proposition *Les anneaux de cohomologies $H^*(G_1;\mathbb{Z})$ et $H^*(G_2;\mathbb{Z})$ sont isomorphes.*

<u>Preuve</u> Pour C_n on prend la résolution bar X et pour C la résolution usuelle

$$Y : 0 \to \mathbb{Z}C \xrightarrow{y-1} \mathbb{Z}C \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}.$$

Alors $H^*(G;\mathbb{Z})$ est la cohomologie du bicomplexe $B = \mathrm{Hom}_C(Y, D)$ où D est le complexe $\mathrm{Hom}_{C_n}(X, \mathbb{Z})$ muni de l'action convenable de C. On prend la suite spectrale de LHS associée à B et on a :

$$E_2^{p,q} \cong H^p(C; H^q(C_n;\mathbb{Z})).$$

Cas de G_1 On a $H^*(C_n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\xi]/(n\xi)$ avec degré$(\xi) = 2$ et la C-action est donnée par

$$y\,\xi^k = u^k\,\xi^k \quad (k \geq 0),$$

car pour un groupe cyclique l'action sur $H^2(C_n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\,\xi$ est celle sur le groupe : $y\,\xi = u\,\xi$ et sur $H^0(C_n;\mathbb{Z})$ l'action est l'identité.

Notons

$$\alpha_k \text{ la classe de } u^k - 1 \bmod n,\ 0 \leq \alpha_k < n,$$

$$\beta_k \text{ l'ordre de } \alpha_k \bmod n : \beta_k\alpha_k \equiv 0 \bmod n,\ 0 \leq \beta_k < n.$$

On obtient alors

$$E_2^{0,2k} \cong \mathbb{Z}/\alpha_k \text{ de générateur } \beta_k\, \xi^k,$$

$$E_2^{1,2k} \cong \mathbb{Z}/\beta_k \text{ de générateur } \alpha_k\, \xi^k,$$

$$E_2^{0,0} = E_2^{1,0} = \mathbb{Z}\,,\quad E_2^{p,q} = 0 \text{ sinon.}$$

Donc $E_2 = E_\infty = H^*(G_1; \mathbb{Z})$ en tant que groupes abéliens.

On observe que si $x \in H^{2k+\varepsilon}(G_1; \mathbb{Z})$ alors x est de filtration ε, où $\varepsilon \in \{0,1\}$. De $E_\infty = H^*(G_1; \mathbb{Z})$ comme groupes abéliens on déduit alors

$$\bar{a}\bar{b} \neq 0 \iff ab \neq 0,$$

où $\bar{a}$ désigne l'image de a dans E_∞ (cf. §1). Par conséquent, l'isomorphisme $E_\infty = H^*(G_1; \mathbb{Z})$ est un isomorphisme d'anneaux.

Cas de G_2 On procède de la même façon. L'action de C sur $H^*(C_n; \mathbb{Z})$ est donnée par

$$y\, \xi^k = u^{mk}\, \xi^k \quad (k \geq 0).$$

Puisque $sm \equiv 1 \bmod t$, on a les égalités suivantes modulo n

$$u^{mk} - 1 = (u^k)^m - 1 = (u^k - 1)\,((u^k)^{m-1} + (u^k)^{m-2} + \ldots + 1),$$

$$u^k - 1 = (u^{mk})^s - 1 = (u^{mk} - 1)\,((u^{mk})^{s-1} + (u^{mk})^{s-2} + \ldots + 1).$$

Donc le terme E_2 de la suite spectrale est le terme E_2 de la suite spectrale obtenue pour G_1, d'où la proposition. ♦

CHAPITRE 2 COHOMOLOGIE DE WREATH PRODUITS

8. Wreath produit

Soit $K = L \times \ldots \times L$ le produit direct de n copies d'un groupe L et Q un sous-groupe du groupe symétrique à n lettres Σ_n. On a une action canonique à gauche de Q sur K donnée par :

$$\sigma(l_1,\ldots,l_n) = (l_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,l_{\sigma^{-1}(n)}), \quad \sigma \in Q, \; l_i \in L.$$

Le produit semi-direct $G = K \rtimes Q$ est dit "wreath" produit et on le notera $L \int Q$.

Si $\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ est une résolution L-libre de $\mathbb{Z}$, alors le produit tensoriel $\varepsilon' = \varepsilon^{\otimes n} : X = F^{\otimes n} \to \mathbb{Z}$ est une résolution K-libre de $\mathbb{Z}$. Le groupe Q agit à gauche sur chaque $X_r = \bigoplus_{r_1+\ldots+r_n=r} F_{r_1} \otimes \ldots \otimes F_{r_n}$ via :

$$(8.1) \qquad \sigma(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = (-1)^{\nu(\sigma;\, r_1,\ldots,r_n)} (x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma^{-1}(n)}),$$

où $\sigma \in Q$ et $r_i = \text{degré}(x_{r_i})$ ($x_i \in F_{r_i}$).
Le signe $(-1)^\nu$ est défini par

$$(-1)^{\nu(\sigma;\, r_1,\ldots,r_n)} = \prod_{1\le i<j\le n} T(\sigma(i), \sigma(j))^{r_i r_j}$$

$$\text{où } T(i, j) = \begin{cases} +1 & \text{si } i<j \\ -1 & \text{si } i>j \end{cases}$$

(cf. [E] p.230-231). Par exemple si σ est la transposition (i, i+1) alors $\nu = r_i r_{i+1}$. On peut vérifier qu'avec ce choix de signe la résolution $\varepsilon' : X \to \mathbb{Z}$ satisfait les conditions du §1.

Dans la suite on suppose que L est de type FP_∞, c'est-à-dire qu'il existe une résolution $\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ L-libre de $\mathbb{Z}$ de type fini. Par exemple, tout groupe fini est de type FP_∞.

Soit R un anneau principal regardé comme G-module trivial et le complexe de cochaînes $C = Hom_L(F, R)$. On munit le complexe $C^{\otimes n}$ de la Q-action à gauche donnée par 8.1. Le lemme suivant est facile à vérifier.

8.2 Lemme *L'isomorphisme canonique de complexes*

$$Hom_K(X, R) \equiv Hom_L(F, R)^{\otimes n} = C^{\otimes n}.$$

est un isomorphisme de Q-complexes.

Les groupes de cohomologie de L à coefficients dans R étant de génération finie sur R, ils sont la somme directe (au plus dénombrable) de la cohomologie de complexes élémentaires de cochaînes

$$(8.3) \qquad D_i : 0 \to Rb_i \xrightarrow{d} Ra_i \to 0 \text{ avec degré } b_i = \text{degré } a_i - 1.$$

Puisque $C = Hom_L(F, R)$ et $D = \bigoplus_i D_i$ sont libres sur R et que $H^*C = H^*(L; R) \equiv$ $\equiv H^*D$, il existe une équivalence d'homotopie $f : C \to D$ (cf.[D] II.4).

On munit $D^{\otimes n}$ de la Q-action donnée par 8.1. La différentielle de $D^{\otimes n}$ est alors Q-équivariante (même preuve que pour le complexe X) et ainsi $D^{\otimes n}$ est un Q-complexe.

8.4 Lemme *L'application $f^{\otimes n} : C^{\otimes n} \to D^{\otimes n}$ est une équivalence faible Q-équivariante.*

<u>Preuve</u> Il est clair que $f^{\otimes n}$ commute avec les différentielles et avec l'action de Q. Le fait que $(f^{\otimes n})^*$ soit un isomorphisme résulte par induction sur n de la formule de Künneth.♦

8.5 Proposition *On a* $H^*(L\int Q; R) \equiv H^*(Q; D^{\otimes n})$.

<u>Preuve</u> Cela résulte du théorème 4.3 et des lemmes 8.2 et 8.4.♦

8.6 Proposition *Dans la suite spectrale de LHS associée au wreath produit $L^n \rtimes Q$, on a* $E_\infty = E_n$.

<u>Preuve</u> L'application $f^{\otimes n}$ induit un morphisme entre les suites spectrales E et $\overline{E}$ associées respectivement à $Hom_Q(Y, Hom_K(X,R))$ et $Hom_Q(Y,D^{\otimes n})$ qui est un isomorphisme dès le niveau E_1. Mais D étant somme directe de complexes élémentaires D_i, on a $\overline{E}_\infty = \overline{E}_n$.♦

On va démontrer le résultat suivant prouvé par Nakaoka dans le cas où R est un corps (cf. [N] II.3).

8.7 Théorème *Si $H^*(L; R)$ est R-libre, alors $H^*(L\int Q; R)$ et $H^*(Q; H^*(L; R)^{\otimes n})$ sont des R-algèbres isomorphes.*

Remarques 1. On montrera que $H^*(L; R)^{\otimes n}$ est une R-algèbre avec un produit Q-compatible. La structure multiplicative de $H^*(Q; H^*(L; R)^{\otimes n})$ est alors induite de celle du complexe $\mathrm{Hom}_Q(Y, H^*(L; R)^{\otimes n})$ (cf. §1).

2. L'hypothèse du théorème est satisfaite si

R est un corps ou

$R = \mathbb{Z}$ et L sans torsion.

3. L'hypothèse permet de prendre $b_i = 0$ dans les D_i et donc $D = H^*(L; R)$ avec différentielle nulle. La proposition 8.5 et les lemmes 8.2 et 8.4 montrent alors que $H^*(L\int Q; R)$ et $H^*(Q; H^*(L; R)^{\otimes n})$ sont des R-modules isomorphes. Il reste donc à prouver que l'isomorphisme est multiplicatif.

Soient $K = L_1 \times ... \times L_n$ un produit direct de groupes L_i de type FP_∞, pour chaque i une résolution $\varepsilon_i : F_i \to \mathbb{Z}$ L_i-libre de $\mathbb{Z}$ de type fini et $\Delta_i : F_i \to F_i \otimes F_i$ une approximation diagonale. On obtient une approximation diagonale Δ sur la résolution K-libre de type fini obtenue par produit tensoriel des F_i. Il suffit en effet d'appliquer par induction les résultats du §5 pour obtenir $\Delta = T \circ (\Delta_1 \otimes ... \otimes \Delta_n)$ où $T(a_1 \otimes b_1 \otimes ... \otimes a_n \otimes b_n) = (-1)^\mu a_1 \otimes ... \otimes a_n \otimes b_1 \otimes ... \otimes b_n$ avec $\mu = \beta_{n-1}\alpha_n + \beta_{n-2}(\alpha_{n-1} + \alpha_n) + ... + \beta_1(\alpha_2 + ... + \alpha_n)$ où α_i = degré a_i et β_i = degré b_i.

On rappelle que si $A_1,..., A_n$ sont des algèbres graduées alors $A_1 \otimes ... \otimes A_n$ est aussi une algèbre dont le produit est donné par

$$(x_1 \otimes ... \otimes x_n)(y_1 \otimes ... \otimes y_n) = (-1)^\mu x_1y_1 \otimes ... \otimes x_ny_n$$

avec $x_i, y_i \in A_i$ et $\mu = \eta_1(\xi_2 + ... + \xi_n) + \eta_2(\xi_3 + ... + \xi_n) + ... + \eta_{n-1}\xi_n$ où ξ_i = degré x_i et η_i = degré y_i.

8.8 Lemme

1. L'isomorphisme canonique

$$Hom_K(F_1 \otimes ... \otimes F_n, R) \cong Hom_{L_1}(F_1, R) \otimes ... \otimes Hom_{L_n}(F_n, R)$$

est un isomorphisme de R-algèbres.

2. Si $H^*(L_i; R)$ est R-libre pour tout i, alors l'isomorphisme ci-dessus induit un isomorphisme de R-algèbres

$$H^*(K; R) \cong H^*(L_1; R) \otimes ... \otimes H^*(L_n; R).$$

3. Si $L = L_i$ pour tout i, alors Δ est Q-équivariante. Elle satisfait donc les hypothèses du §5 et le produit de $Hom_K(X, R)$ est Q-compatible.

De plus, les produits des algèbres ci-dessus sont Q-compatibles et l'application $f^{\otimes n} : C^{\otimes n} \to D^{\otimes n}$ de 8.4 respecte la structure multiplicative.

Preuve 1. Par induction sur n. Un calcul facile montre que cela est vrai pour n = 2 et le pas d'induction est immédiat.

2. Résulte de la formule de Künneth et de 1.

3. Un calcul facile permet de vérifier que $\Delta \circ \sigma = \sigma \circ \Delta$ pour les transpositions de type $\sigma = (i, i+1)$. Donc le produit de $Hom_K(X, R)$ est Q-compatible. ♦

On peut maintenant terminer la preuve du théorème. Les lemmes 8.2, 8.4 et 8.8 montrent qu'on peut appliquer le théorème 5.4 pour obtenir l'isomorphisme de R-algèbres

$$H^*(L\int Q; R) \cong H^*(Hom_Q(Y, H^*(L; R)^{\otimes n})).$$

Mais la différentielle de $H^*(L; R)^{\otimes n}$ étant nulle on a

$$H^*(Hom_Q(Y, H^*(L; R)^{\otimes n})) = H^*(Q; H^*(L; R)^{\otimes n}).$$

9. Cohomologie entière du wreath produit

Dans ce paragraphe on donne une description non-explicite de la stucture additive de la cohomologie entière d'un wreath produit. On prend donc $R = \mathbb{Z}$ et la proposition 8.5 montre que $H^*(L\int Q; \mathbb{Z})$ est la somme directe de la cohomologie des complexes

$$B = Hom_Q(Y, D)$$

où on désigne par D (avec un léger abus de notation) une Q-orbite du complexe $(\oplus D_i)^{\otimes n}$. Autrement dit, D est la somme directe des transformés par Q de

$D_1 \otimes ... \otimes D_n$ où chaque D_i est un complexe élémentaire (cf. 8.3) et on désigne par D^v le sous-module des éléments de degré v de l'orbite D de $D_1 \otimes ... \otimes D_n$.

Si H^*D_i représente un sommant direct $\mathbb{Z}$ dans $H^*(L; \mathbb{Z})$, on a $b_i = 0$ et si H^*D_i représente un sommant direct $\mathbb{Z}/n_i$ dans $H^*(L; \mathbb{Z})$, on a $d(b_i) = n_i a_i$, où n_i est une puissance d'un nombre premier p_i (on peut choisir n_i de cette façon). Le cas où $H^*D_i = \mathbb{Z}$ est libre pour tout i étant traité par le th.8.7, on peut supposer qu'il existe au moins un i tel que H^*D_i soit de torsion. Par la formule de Künneth, H^*D est de torsion. Ainsi le terme $E_2 \cong H^*(Q; H^*D)$ de la suite LHS associée à B est de torsion et donc E_∞ aussi. Par conséquent, H^*B est de torsion.

Si q est un nombre premier, on note $\mathbb{Z}_{(q)}$ le localisé de $\mathbb{Z}$ en q : $\mathbb{Z}_{(q)}$ est le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ des fractions à dénominateur non-divisible par q, il est principal et $\mathbb{Z}$-plat.

9.1 Lemme

1. S'il existe i et j tels que $p_i \neq p_j$, alors $H^*B = 0$. On peut donc supposer que tous les p_i sont égaux : $p_i = p$ pour tout i.
2. Pour tout premier $q \neq p$, on a $H^*D \otimes \mathbb{Z}_{(q)} = 0$ et $H^*B \otimes \mathbb{Z}_{(q)} = 0$.

Remarque Le lemme ci-dessus et le théorème des coefficients universels disent que

(9.2) $$H^*B = H^*B \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = H^*(B \otimes \mathbb{Z}_{(p)}).$$

Preuve 1. Si deux p_i sont distincts alors par la formule de Künneth on a $H^*D = 0$ et la suite spectrale LHS de B montre que $H^*B \cong E_\infty = E_2 \cong H^*(Q; H^*D) = 0$.

2. La formule de Künneth et le théorème des coefficients universels montrent que $H^*(D \otimes \mathbb{Z}_{(q)}) = H^*D \otimes \mathbb{Z}_{(q)} = 0$ et alors le terme $E_2 \cong H^*(Q; H^*D \otimes \mathbb{Z}_{(q)})$ de la suite LHS associée à $B \otimes \mathbb{Z}_{(q)} = \mathrm{Hom}_Q(Y, D \otimes \mathbb{Z}_{(q)})$ est nul. D'où $H^*(B \otimes \mathbb{Z}_{(q)}) =$ $= H^*B \otimes \mathbb{Z}_{(q)} = 0$.♦

9.3 Théorème *Si p ne divise pas $|Q|$, alors $H^*B \cong H^*(D)^Q$.*

Preuve On considère la suite spectrale de LHS associée à B. Puisque $E_2^{r,s} \cong H^r(Q; H^sD)$, on a $|Q| \cdot E_2^{r,s} = 0$ pour $r \geq 1$. Mais d'autre part H^sD n'a que de la p-torsion (cf. lemme 9.1), donc aussi $E_2^{r,s}$ et la multiplication par $|Q|$ est alors un isomorphisme de $E_2^{r,s}$. Ainsi $E_2^{r,s} = 0$ si $r \geq 1$ et $H^nB = E_\infty^{o,n} = E_2^{o,n} \cong H^n(D)^Q$. ♦

Il reste à examiner le cas où p divise $|Q|$. On considère la suite spectrale E associée à B obtenue par la filtration

$$F^r(B^n) = \bigoplus_{v \geq r} B_{n-v,v} \tag{9.4}$$

où $B_{u,v} = \mathrm{Hom}_Q(Y_u, D^v)$. Cette suite spectrale converge vers H^*B, c'est-à-dire $E_\infty \cong GH^*B$.

<u>Remarque</u> Cette suite spectrale n'est pas celle de LHS. L'intérêt de cette suite spectrale est illustré par le résultat suivant (cf. aussi 8.6 et la remarque 4. après 10.7).

9.5 Théorème *On a* $H^*B \cong E_2 \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, *en tant que groupes abéliens.*

<u>Remarque</u> Le théorème est vrai quelle que soit la divisibilité de $|Q|$ par p.

<u>Preuve</u> On note $\bar{B} = B \otimes \mathbb{Z}/p = \mathrm{Hom}_Q(Y_u, D^v \otimes \mathbb{Z}/p)$ et $\bar{E}$ la suite spectrale associée à $\bar{B}$ obtenue par la filtration 9.4. La preuve se fait en plusieurs étapes et on utilise les notations du §1.

1. On a $E_0^{r,s} \cong B_{s,r} = \mathrm{Hom}_Q(Y_s, D^r)$ et la différentielle $d_0^{r,s} : E_0^{r,s} \to E_0^{r,s+1}$ est induite par la différentielle d''. Ainsi $E_1^{r,s} \cong H^s(Q; D^r)$ et, pour $s \geq 1$, $|Q| \cdot E_1^{r,s} = 0$.

Donc

$$E_1^{r,s} \text{ est de torsion pour } s \geq 1. \tag{9.6}$$

2. Il s'en suit que

$$E_2 \text{ est de torsion.} \tag{9.7}$$

En effet,

$$E_1^{r,o} \text{ est } \mathbb{Z} \text{ - libre,} \tag{9.8}$$

car isomorphe au sous-module $(D^r)^Q$ des invariants de $E_0^{r,o}$ qui est $\mathbb{Z}$ - libre. Mais H^*B étant de torsion, E_∞ aussi. Or il suit de 9.6 qu'un sommant direct $\mathbb{Z}$ dans $E_2^{*,o}$ devrait subsister dans E_∞.

3. Dans $\bar{B}$ la différentielle d' est nulle, car p divise chaque n_i, d'où

(9.9) $$\bar{E}_\infty = \bar{E}_1 = H^*\bar{B}.$$

Puisque $E_0^{r,*}$ est $\mathbb{Z}$-libre le théorème des coefficients universels donne la courte suite exacte scindée

(9.10) $$0 \to E_1^{r,s} \otimes \mathbb{Z}/p \to \bar{E}_1^{r,s} \to \mathrm{Tor}\,(E_1^{r,s+1}, \mathbb{Z}/p) \to 0 \text{ pour tout r et s.}$$

Les différentielles d' et d'' commutent (cf.§1), et donc $d' : E_0^{r,*} \to E_0^{r+1,*}$ est un morphisme de complexes qui induit $d_1^{r,*} : E_1^{r,*} \to E_1^{r+1,*}$. La fonctorialité de la suite 9.10 et le fait que $\bar{d}_1^{r,s} = 0$ (par 9.9) montrent que $d_1^{r,s} \otimes 1$ et $\mathrm{Tor}\,(d_1^{r,s+1}, 1)$ sont nulles. Au total, $E_1^{*,s}$ est la somme directe des complexes $E_1^{*,s} \otimes \mathbb{Z}/p$ et $\mathrm{Tor}\,(E_1^{*,s+1}, \mathbb{Z}/p)$. Alors, avec 9.8 et le théorème des coefficients universels, on obtient

(9.11) $$E_1^{r,o} \otimes \mathbb{Z}/p \cong E_2^{r,o} \otimes \mathbb{Z}/p \oplus \mathrm{Tor}\,(E_2^{r+1,o}, \mathbb{Z}/p).$$

4. En notant E_j^k pour $\bigoplus\limits_{r+s=k} E_j^{r,s}$ et dim pour la dimension sur $\mathbb{Z}/p$, on obtient les inégalités suivantes. Elles sont valables pour tout k.

$$\begin{aligned}
&\dim (E_\infty^k \otimes \mathbb{Z}/p) + \dim \mathrm{Tor}\,(E_\infty^{k+1}, \mathbb{Z}/p) \geq \\
&\geq \dim (H^kB \otimes \mathbb{Z}/p) + \dim \mathrm{Tor}\,(H^{k+1}B, \mathbb{Z}/p) = \\
&= \dim H^k\bar{B} \quad \text{(coefficients universels)} \\
&= \dim \bar{E}_1^k \quad (9.9) \\
&= \dim (E_1^k \otimes \mathbb{Z}/p) + \dim \mathrm{Tor}\,(E_1^{k+1}, \mathbb{Z}/p) \quad (9.8 \text{ et } 9.10) \\
&\geq \dim (E_2^k \otimes \mathbb{Z}/p) + \dim \mathrm{Tor}\,(E_2^{k+1}, \mathbb{Z}/p) \quad (9.6 \text{ et } 9.11) \\
&\geq \dim (E_\infty^k \otimes \mathbb{Z}/p) + \dim \mathrm{Tor}\,(E_\infty^{k+1}, \mathbb{Z}/p) \quad (9.7).
\end{aligned}$$

On a donc en fait égalité.

5. De dim $(E_\infty^k \otimes \mathbb{Z}/p) \geq \dim (H^k B \otimes \mathbb{Z}/p)$ et dim Tor $(E_\infty^k, \mathbb{Z}/p) \geq$ $\geq$ dim Tor $(H^k B, \mathbb{Z}/p)$ pour tout k, on déduit de 4. que dim $(E_\infty^k \otimes \mathbb{Z}/p) =$ $=$ dim $(H^k B \otimes \mathbb{Z}/p)$ pour tout k. Ainsi le nombre de sommants directs dans $E_\infty^k \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ est le même que dans $H^k B \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. D'où, par 9.2, $E_\infty^k \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \cong H^k B \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = H^k B$.

De même, de dim $(E_2^{r,s} \otimes \mathbb{Z}/p) \geq \dim (E_\infty^{r,s} \otimes \mathbb{Z}/p)$ et dim Tor $(E_2^{r,s}, \mathbb{Z}/p) \geq$ $\geq$ dim Tor $(E_\infty^{r,s}, \mathbb{Z}/p)$ pour tout r et s, on déduit de 4. que dim $(E_2^{r,s} \otimes \mathbb{Z}/p) =$ $=$ dim $(E_\infty^{r,s} \otimes \mathbb{Z}/p)$ pour tout r et s. Ainsi, par 9.7, le nombre de sommants directs de $E_2 \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ est le même que dans $E_\infty \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. De plus, en utilisant le fait $E_\infty \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \cong$ $\cong H^* B$ et que E_2 est de torsion, on voit que si $x \in C_2^{r,s} \subset B$ représente un générateur de $E_2^{r,s} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, alors un multiple de x doit être un cycle de B. Mais B étant $\mathbb{Z}$-libre, x est un cycle de B. D'où $E_2 \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = E_\infty \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \cong H^* B$.♦

9.12 Remarque En utilisant 9.11 et 9.6 on déduit comme au point 5. ci-dessus que $E_\infty^{r,s} \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = E_1^{r,s} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ si $s \geq 1$. Ainsi 9.2 et la preuve ci-dessus montrent que

$$E_\infty^{r,s} = E_\infty^{r,s} \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = E_1^{r,s} \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \text{ pour } s \geq 1$$

et

$$E_\infty^{r,0} = E_\infty^{r,0} \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = E_2^{r,0} \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \cong H^r(D^Q) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}.$$

10. Cas particulier : $Q = C_n$

Soit $Q = C_n$ le groupe cyclique d'ordre n engendré par la permutation $\sigma = (1\ 2 \dots n)$. La résolution de $\mathbb{Z}$ associée à C_n sera la résolution usuelle

$$Y : \dots \to \mathbb{Z}C_n \xrightarrow{N} \mathbb{Z}C_n \xrightarrow{\sigma-1} \mathbb{Z}C_n \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

où $N = 1 + \sigma + \sigma^2 + \dots + \sigma^{n-1}$. On considère la suite spectrale E précédente (obtenue par la filtration 9.4) et on calcule d'abord $E_1^{r,s} \cong H^s(C_n, D^r)$. Le module D^r est somme directe de sous-$\mathbb{Z}C_n$-modules X du type

$$X = \mathbb{Z}x \oplus \mathbb{Z}\sigma x \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\sigma^{u-1}x$$

où $x = x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ avec $x_i \in D_i$ et où u est le plus petit entier $\alpha \geq 1$ tel que $\sigma^\alpha x \in \mathbb{Z}x$. On a donc $\sigma^u x = (-1)^\rho x$ où, avec r_i = degré x_i,

$$\rho = \nu(\sigma^u ; r_1,\dots,r_n) = \begin{cases} (r_1+\dots+r_{n-u})(r_{n-u+1}+\dots+r_n) & \text{si } 1 \leq u \leq n-1 \\ 0 \text{ si } u = n. \end{cases}$$

Puisque $\sigma^n x = x$, u divise n et on écrit $n = uv$.

Remarque Si ρ est impair alors n est pair, car on a $\sigma^{2u}x = x$ et donc 2u divise n.

10.1 Lemme *On a*

1. Pour ρ pair

$$H^s(C_n ; X) = \begin{cases} \mathbb{Z}(x + \sigma x + \dots + \sigma^{u-1}x) & si\ s = 0 \\ 0 & si\ s\ impair \\ \mathbb{Z}/v\,(x + \sigma x + \dots + \sigma^{u-1}x) & si\ s\ pair > 0. \end{cases}$$

2. Pour ρ impair

$$H^s(C_n ; X) = \begin{cases} 0 & si\ s\ pair \\ \mathbb{Z}/2\,x & si\ s\ impair. \end{cases}$$

Remarque Le lemme ci-dessus donne une description de $E_\infty^{r,s} = E_1^{r,s} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ pour $s \geq 1$.

Preuve Pour $z = \sum_{i=o}^{u-1} z_i\sigma^i x \in X$, $z_i \in \mathbb{Z}$, on a

$$(\sigma-1)z = ((-1)^\rho z_{u-1}-z_o)\,x + (z_o-z_1)\,\sigma x + \dots + (z_{u-2}-z_{u-1})\,\sigma^{u-1}x,$$
$$Nz = \Big(\sum_{i=o}^{v-1} (-1)^\rho\Big)\,(1+\sigma+\sigma^2+\dots+\sigma^{u-1})x.$$

Pour ρ pair on obtient

$$\mathrm{Ker}\,(\sigma-1) = \mathbb{Z}(x + \sigma x + \dots + \sigma^{u-1}x)$$
$$\mathrm{Im}\,(\sigma-1) = \mathrm{Ker}\,N = \{z \in X : \textstyle\sum x_i = 0\}$$
$$\mathrm{Im}\,N = v\mathbb{Z}(x + \sigma x + \dots + \sigma^{u-1}x)$$

d'où la première partie du lemme.

Pour ρ impair, une autre $\mathbb{Z}$-base de X est formée de

$$v_0 = x, \ \ v_i = \sigma^i x - \sigma^{i+1} x \ \text{ pour } i = 1, 2, ..., u\text{-}1.$$

On a $2v_0 = v_1 + ... + v_{u-1} - (\sigma-1)v_0 \in \operatorname{Im}(\sigma-1)$,
d'où

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ker}(\sigma\text{-}1) = 0 \supset \operatorname{Im} N\\
&\operatorname{Ker} N = X \quad (\text{puisque } N = 0)\\
&\operatorname{Im}(\sigma\text{-}1) = 2\mathbb{Z}v_0 \oplus \mathbb{Z}v_1 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}v_{u-1}.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve la deuxième partie du lemme.♦

On décrit maintenant $E_\infty^{*,\rho} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ dans le cas où **n est premier**. Soit k le plus petit entier ≥ 1 tel que $\sigma^k (D_1 \otimes ... \otimes D_n) = D_1 \otimes ... \otimes D_n$. On a k =1 ou k = n.

10.2 Théorème *Si k = n alors on a*

$$H^*B = E_2^{*,0} \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = E_2^{*,0} = H^*(D^{C_n}) \cong H^*(D_1 \otimes ... \otimes D_n).$$

<u>Preuve</u> L'hypothèse implique qu'il existe i et j avec $D_i \neq D_j$ et donc que pour tous les modules X on a u = n et donc ρ pair. Ainsi on a $E_1^{*,s} = 0$ si $s \geq 1$. Par le théorème 9.5 et le fait que $D^{C_n} = E_1^{*,0}$, on a donc $H^*B = E_2^{*,0} = E_2^{*,0} \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = H^*(D^{C_n})$. D'autre part,

$$D_1 \otimes ... \otimes D_n \to D^{C_n} \subset D, \quad x \to Nx$$

est un isomorphisme de complexes. En effet, par 10.1 l'application est surjective et l'application réciproque est la projection sur le sommant direct $D_1 \otimes ... \otimes D_n$. D'où $H^*(D_1 \otimes ... \otimes D_n) \cong H^*(D^{C_n})$.♦

Dans la suit on prend k = 1. Alors $D_1 = ... = D_n$ et $D = D_1 \otimes ... \otimes D_1$. On rappelle que n_1 est une puissance de $p_1 = p$. Soient

$$\alpha = \text{degré}(a_1) = r_1 = ... = r_n,$$

$$R = \begin{cases} \{ n\alpha\text{-}2j : 0 \leq j \leq (n\text{-}3)/2 \} \text{ si n impair} \\ \{n\alpha\} \text{ si n pair et } \alpha \text{ pair} \\ \varnothing \text{ si n pair et } \alpha \text{ impair.} \end{cases}$$

10.3 Lemme *Si $k = 1$ et si $p \neq n$, alors*

$$E_2^{r,o} \otimes \mathbb{Z}_{(n)} = \begin{cases} \mathbb{Z}/n & si\ r \in R \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

<u>Preuve</u> Puisque n est premier on a $u = n$ et ρ pair pour tous les sous-$\mathbb{Z}C_n$-modules X de D^r avec $n(\alpha-1) < r < n\alpha$. Ainsi $E_1^{r,s} = 0$ pour ces r et $s \geq 1$. Pour $r = n\alpha$ ou $r = n(\alpha-1)$, il n'y a qu'un seul sous-$\mathbb{Z}C_n$-module X et pour lequel on a $u = 1$. Par 10.1 on obtient :

pour n impair, $s \geq 1$ et $r = n\alpha$ ou $r = n(\alpha-1)$

$$E_1^{r,s} = \begin{cases} \mathbb{Z}/n & \text{si s pair} > 0 \\ 0 & \text{si s impair,} \end{cases}$$

pour $n = 2$, α pair et $s \geq 1$

$$E_1^{r,s} = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{si } r = n\,\alpha \text{ et s pair} > 0 \text{ ou } r = n(\alpha-1) \text{ et s impair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour $n = 2$, α impair et $s \geq 1$

$$E_1^{r,s} = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{si } r = n\,(\alpha-1) \text{ et s pair} > 0 \text{ ou } r = n\alpha \text{ et s impair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'autre part, si $p \neq n$ il n'y a pas de n-torsion dans E_∞ par 9.2. Il y a donc exactement un sommant direct $\mathbb{Z}/n$ dans $E_2^{r,o}$ pour $r \in R$. ♦

10.4 Lemme *Soit D_1 un complexe élémentaire de différentielle $d(b_1) = n_1a_1$ avec n_1 entier ≥ 1 quelconque et degré$(a_1) = \alpha$. On considère le complexe $(D_1^{\otimes n})^{C_n} = D^{C_n}$ des invariants par l'action usuelle de C_n. Alors*

1. Si $r \notin R$, $H^r(D^{C_n})$ est somme directe de $\mathbb{Z}/n_1$.

2. Si $r \in R$, $H^r(D^{C_n})$ est somme directe de $\mathbb{Z}/n_1$ et d'un sommant direct $\mathbb{Z}/nn_1$.

Dans les deux cas, le nombre total de sommants directs est égal à un même nombre $k = k(r)$ indépendant de n_1.

Preuve Le module D^{C_n} est indépendant de n_1 et, étant $\mathbb{Z}$-libre, le module Z des cycles de D^{C_n} est lui aussi $\mathbb{Z}$-libre et indépendant de n_1. Si $n_1 = 1$, on note B le module des bords. En utilisant les facteurs invariants (cf. [L] XV §2) la cohomologie de D^{C_n} avec $n_1 = 1$ s'écrit, en un degré r fixé,

$$H^r(D^{C_n}) = Z^r/B^r = \bigoplus_i (\mathbb{Z})_i \oplus \mathbb{Z}/d_1 \oplus \mathbb{Z}/d_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/d_k$$
avec $d_1 \mid d_2 \mid \ldots \mid d_k$ et $k = k(r)$.

Mais pour n_1 quelconque, n_1B est le module des bords et la cohomologie de D^{C_n} en degré r s'écrit

$$H^r(D^{C_n}) = Z^r/n_1B^r = \bigoplus_i (\mathbb{Z})_i \oplus \mathbb{Z}/n_1d_1 \oplus \mathbb{Z}/n_1d_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/n_1d_k$$
avec n_1 quelconque, $d_1 \mid d_2 \mid \ldots \mid d_k$ et $k = k(r)$.

Les d_i sont indépendants de n_1 el on va maintenant les déterminer.

Si $r \notin R$, on choisit n_1 une puissance d'un premier p.

Assertion *Le module $H^r(D^{C_n})$ n'a que de la p-torsion.*

Donc n_1d_i est un multiple de p, pour tout i. En faisant varier p, on obtient $d_1 = \ldots =$ $= d_k = 1$.

Si $r \in R$, on procède de même, mais en choisissant $p \neq n$. On obtient $H^r(D^{C_n}) \cong$ $\cong E_2^{r,0} = E_2^{r,0} \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \oplus \mathbb{Z}/n$ par 10.3. On voit qu'un (et un seul) n_1d_i est divisible par n, ce qui implique $d_k = np^j$ avec $j \geq 0$. En faisant varier p ($\neq$n), on a $d_1 = \ldots = d_{k-1} = 1$ et $d_k = n$.♦

Preuve de l'assertion Pour ces n_1, $H^r(D^{C_n})$ est le terme $E_2^{r,o}$ de la suite spectrale E associée à $B = \mathrm{Hom}_Q(Y, D)$ et est de torsion (cf. 9.7). De plus, $E_2^{r,o} = E_2^{r,o} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Cela résulte du lemme 10.3, du fait que $E_1^{*,s}$ n'a que de la n-torsion si $s \geq 1$ (cf. preuve de 10.3) et de $E_\infty = E_\infty \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ (cf. 9.12).♦

10.5 Remarque $H^{n(\alpha-1)}B = 0$. En effet, on a $H^{n(\alpha-1)}B = E_2^{n(\alpha-1),o} = H^{n(\alpha-1)}(D^{C_n}) = $
$= Z^{n(\alpha-1)}$ qui est à la fois $\mathbb{Z}$-libre et de torsion (cf.9.2 ou 9.7).

10.6 Théorème *Si $k = 1$ et si $p \neq n$, alors $H^*B \cong H^*(D)^{C_n} \cong E_2^{*,o} \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \cong$
$\cong H^*(D^{C_n}) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ est une somme directe de $\mathbb{Z}/n_1$.*

Preuve Par 10.3, $E_1^{*,s}$ n'a que de la n-torsion pour $s \geq 1$. Alors les théorèmes 9.3 et 9.5 et la remarque 9.12 montrent que

$$H^*B \cong H^*(D)^{C_n} \cong E_2^{*,o} \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \cong H^*(D^{C_n}) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}.$$

Le fait que $E_2^{*,o} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ est somme directe de $\mathbb{Z}/n_1$ résulte du lemme 10.4.♦

10.7 Théorème *Si $k = 1$ et si $p = n$, alors*

$$H^*B \cong E_2 = E_2 \otimes \mathbb{Z}_{(n)}.$$

Plus précisément,

$$H^rB = \begin{cases} \mathbb{Z}/n & \text{si } r > n\alpha \\ \mathbb{Z}/nn_1 \oplus \bigoplus_i (\mathbb{Z}/n_1)_i & \text{si } r \in R \text{ et } n(\alpha-1) < r \leq n\alpha \\ \mathbb{Z}/n \oplus \bigoplus_j (\mathbb{Z}/n_1)_j & \text{si } r \notin R \text{ et } n(\alpha-1) < r \leq n\alpha \\ 0 & \text{si } r \leq n(\alpha-1) \end{cases}$$

Preuve Le théorème résulte du théorème 9.5, du lemme 10.4 et du calcul de $E_1^{*,s}$ pour $s \geq 1$ dans la preuve de 10.3 (en particulier $E_1^{*,s}$ n'a que de la n-torsion si $s \geq 1$) et de la remarque 10.5.♦

Remarques 1. Pour $r = n\alpha$, on a $H^{n\alpha}B = \mathbb{Z}/nn_1$ si $r \in R$ et $H^{n\alpha}B = \mathbb{Z}/n$ si $r \notin R$. En effet, $E_1^{n\alpha,o} = Z^{n\alpha}$ est $\mathbb{Z}$-libre de rang 1 et $E_2^{n\alpha,o} = \mathbb{Z}/nn_1$ si $r \in R$ et $E_2^{n\alpha,o} = 0$ si $r \notin R$.

2. Si M est le terme $E_2^{*,o} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ obtenu avec $p \neq n$, alors $E_2^{*,o}$ s'obtient de M en remplaçant un sommant direct $\mathbb{Z}/n_1$ par un sommant direct $\mathbb{Z}/(nn_1)$ en degré r, avec $r \in R$.

3. Le nombre de sommants directs dans les théorèmes 10.6 et 10.7 peut être déterminé à l'aide de la cohomologie modulo p calculée en 8.7.

4. Le théorème 10.6 montre que dans la suite spectrale LHS, les extensions ne sont pas triviales, car le terme E_2 de cette suite spectrale contient de la p-torsion d'ordre au plus n_1.

De 10.7 et de la remarque 1. ci-dessus, on déduit facilement le résultat suivant.

10.8 Corollaire *Supposons que n est premier, α pair si $n = 2$ et n_1 une puissance de n. Alors un générateur ξ d'ordre n_1 de $H^{\alpha}(L; \mathbb{Z})$ fournit un générateur ζ d'ordre nn_1 dans $H^{n\alpha}(L \int C_n ; \mathbb{Z})$.*
De plus, si $i : L^n \to L \int C_n$ est l'inclusion alors

$$i^* \zeta = \xi^{\otimes n} \in H^{\alpha}(L; \mathbb{Z})^{\otimes n} \subset H^{n\alpha}(L^n ; \mathbb{Z})$$

et le noyau de i^* est formé d'éléments d'ordre n.

CHAPITRE 3 COHOMOLOGIE MODULO l DU GROUPE LINEAIRE SPECIAL SUR UN CORPS FINI

Soit $k = \mathbb{F}_q$ un corps fini à q éléments et de caractéristique p, $GL_n = GL_nk$ le groupe des matrices $n \times n$ inversibles à coefficients dans k et $SL_n = SL_nk$ le sous-groupe des matrices de déterminant égal à 1. Soit l un nombre premier différent de p et r l'ordre multiplicatif de q modulo l : $q^r \equiv 1 \bmod l$. Dans ce chapitre les groupes de cohomologie sont pris à coefficients dans le corps $\mathbb{F}_l \equiv \mathbb{Z}/l$.

Si G est un groupe topologique on notera BG son espace classifiant. Rappelons que si G est discret et A est un G-module trivial alors BG est un espace d'Eilenberg-MacLane K(G,1) et la cohomologie cellulaire de BG est égale à la cohomologie algébrique de G, c'est-à-dire $H^*(BG; A) \cong H^*(G; A)$. Dans la suite, les groupes finis sont toujours munis de la topologie discrète.

11. Cohomologie modulo l du groupe linéaire général

On considère la fibration classique

(1.1.1) $$F\psi^q \xrightarrow{\Phi} BU \xrightarrow{\psi^q-1} BU$$

où BU désigne le classsifiant du groupe classique U et ψ^q-1 l'application correspondant à l'opération d'Adams. On a

$$H^*BU = \mathbb{Z}/l\,[c_1', c_2',\ldots],$$

où $c_i' \in H^{2i}BU$ est la i-ième classe de Chern universelle modulo l. Quillen considère les classes $\xi_i = \Phi^* c_i' \in H^{2i}(F\psi^q)$ et montre que $\xi_i = 0$ si $i \not\equiv 0 \bmod r$. Il construit alors pour $i \equiv 0 \bmod r$ des classes $\eta_i \in H^{2i-1}(F\psi^q)$ (cf. [Q2]§3) et prouve le résultat suivant.

11.2 Théorème ([Q2] th.1)

1. Les monômes $\xi_r^{\alpha_1}\xi_{2r}^{\alpha_2}\ldots\eta_r^{\beta_1}\eta_{2r}^{\beta_2}\ldots$, *avec* $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $\beta_i \in \{0,1\}$ *, forment une* $\mathbb{Z}/l$ *- base de* $H^*(F\psi^q)$.

2. La structure multiplicative se décrit comme suit :

- si $l \neq 2$ *ou si* $l = 2$ *et* $q \equiv 1 \bmod 4$ *alors* $\eta_j^2 = 0$ *et*

$$H^*(F\psi^q) \cong \mathbb{Z}/l\,[\xi_r, \xi_{2r},\ldots] \otimes \Lambda(\eta_r, \eta_{2r},\ldots),$$

- si $l = 2$ *et* $q \equiv 3 \bmod 4$ *alors* $\eta_j^2 = \sum_{0 \le a < j} \xi_a\, \xi_{2j-1-a}$.

A toute représentation ρ de dimension finie d'un groupe fini G sur la clôture algébrique de k, le relevé de Brauer de ρ associe une application

$$E(\rho) : BG \to BU,$$

unique à homotopie près, qui se relève en

$$\varepsilon(\rho) : BG \to F\psi^q,$$

aussi unique à homotopie près (cf. [Q2]§1 et §7). On considère les classes

$$c_i(\rho) = E(\rho)^* c_i' = \varepsilon(\rho)^*\xi_i \in H^{2i}BG$$

et pour $i \equiv 0 \bmod r$, les classes

$$e_i(\rho) = \varepsilon(\rho)^*\eta_i \in H^{2i-1}BG.$$

On note $c_i \in H^{2i}BGL_n$ et $e_i \in H^{2i-1}BGL_n$ les classes obtenues par l'application $\varepsilon : BG \to F\psi^q$ fournie par le relevé de Brauer de la représentation canonique de GL_n sur k. Quillen démontre le résultat suivant.

11.3 Théorème ([Q2] th.4) *L'homomorphisme d'algèbres $\varepsilon^* : H^*(F\psi^q) \to H^*BGL_n$ est surjectif de noyau l'idéal engendré par les classes ξ_{jr} et η_{jr} pour $jr > n$. Autrement dit :*

1. $c_{jr} = e_{jr} = 0$ si $jr > n$.

2. Les monômes $c_r^{\alpha_1} c_{2r}^{\alpha_2} \ldots c_{mr}^{\alpha_m} e_r^{\beta_1} e_{2r}^{\beta_2} \ldots e_{mr}^{\beta_m}$, avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $\beta_i \in \{0,1\}$ et $m = [n/r]$, forment une $\mathbb{Z}/l$ - base de H^*BGL_n.

3. La structure multiplicative se décrit comme suit :

- si $l \neq 2$ ou si $l = 2$ et $q \equiv 1 \bmod 4$ alors $e_j^2 = 0$ et

$$H^*BGL_n \cong \mathbb{Z}/l\,[c_r, c_{2r}, \ldots, c_{mr}] \otimes \Lambda(e_r, e_{2r}, \ldots, e_{mr}),$$

- si $l = 2$ et $q \equiv 3 \bmod 4$ alors $e_j^2 = \sum_{0 \leq a < j} c_a\, c_{2j-1-a}$.

Soient μ_l le groupe des racines l-ième de l'unité dans une clôture algébrique de k et $K = k(\mu_l)$ l'extension engendrée par μ_l. L'extension K/k est galoisienne cyclique de degré r et $\pi = \mathrm{Gal}(K/k)$ est engendré par l'homomorphisme de Frobenius $F: x \to x^q$.

Le groupe cyclique $C = K^*$ agit par multiplication sur K et l'action étant k-linéaire on obtient, après choix d'une k-base de K, un homomorphisme injectif

$$C \to GL_r, \quad x \to h(x).$$

En écrivant $n = mr + e$, $0 \leq e < r$, et en faisant m blocs de taille r, on obtient un homomorphisme injectif

$$i : C^m \to GL_n, \quad x = (x_1, \ldots, x_m) \to i(x) = \mathrm{diag}\,(h(x_1), \ldots, h(x_m), \mathbb{1}_e).$$

D'autre part, soit Σ_m le groupe symétrique à m lettres. Puisque F est un automorphisme de K^*, le groupe π agit sur C et le wreath produit $\pi \int \Sigma_m = \pi^m \rtimes \Sigma_m$ agit à gauche sur C^m via

$$(\varphi, \sigma)\, x = (\varphi_i\,(x_{\sigma^{-1}(i)}))_{1 \leq i \leq m},$$

$$\text{où } \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \pi^m, \ \sigma \in \Sigma_m, \ x = (x_1, \ldots, x_m) \in C^m.$$

L'action de $\pi^m \rtimes \Sigma_m$ sur l'image de i est réalisée par des automorphismes intérieurs de GL_n. Puisque ces automorphismes induisent l'identité en cohomologie, on a $\mathrm{Im}\, i^* \subset (H^*C^m)^{\pi^m \rtimes \Sigma_m}$.

Quillen montre alors le résultat suivant (cf. [Q2] cor. du th.3).

11.4 Proposition *L'homomorphisme* $i^* : H^*GL_n \to (H^*C^m)^{\pi^m \rtimes \Sigma_m}$ *est injectif. Si* l *est impair, c'est un isomorphisme.*

12. Cohomologie modulo l du groupe linéaire spécial

La cohomologie du groupe linéaire spécial est décrite par le théorème suivant.

12.1 Théorème *L'homomorphisme d'algèbres* $H^*GL_n \to H^*SL_n$, *induit par l'inclusion* $SL_n \to GL_n$, *est surjectif et son noyau est l'idéal engendré par* e_l *et* c_l. *En particulier, c'est un isomorphisme si* $r \geq 2$.

Soit $T = C^m \cap i^{-1}(SL_n)$ le sous-groupe de C^m correspondant aux matrices de déterminant 1.

12.2 Lemme *Le groupe* T *est stable par l'action de* $\pi^m \rtimes \Sigma_m$.

Preuve Si $x = (x_1,\dots,x_m) \in T$ et $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_m) \in \pi^m$ avec $\varphi_j = F^{\alpha(j)}$ alors on a

$$\det i((\varphi,\sigma)\,x) = \prod_{j=1}^{m} \det h(\varphi_j(x_{\sigma^{-1}(j)})) = \prod_j \det h(x_{\sigma^{-1}(j)})^{q^{\alpha(j)}}$$

$$= \prod_j \det h(x_{\sigma^{-1}(j)}) \prod_{\alpha(j)\geq 1} \det h(x_{\sigma^{-1}(j)})^{q^{\alpha(j)}-1} = 1,$$

car k^* est d'ordre $q-1$ divisant $q^{\alpha(j)}-1$ si $\alpha(j) \geq 1$.♦

Le théorème 12.1 permet alors de démontrer le résultat suivant qui est l'analogue de la proposition 11.4.

12.3 Corollaire *L'homomorphisme* $H^*SL_n \to (H^*T)^{\pi^m \rtimes \Sigma_m}$, *induit par l'injection* $T \to SL_n$, *est injectif si* l *est impair et* $n \geq 2$ *ou si* $l = 2$ *et* $n \geq 3$. *Si* l *est impair et* $n \geq 2$, *c'est un isomorphisme.*

13. Preuve du théorème 12.1 dans le cas r = 1

La suite exacte de groupes

(13.1) $$1 \to SL_n \to GL_n \xrightarrow{\det} k^* \to 1$$

se scinde et GL_n est alors isomorphe au produit semi-direct $SL_n \rtimes k^*$. Le groupe multiplicatif $C = k^*$ est cyclique d'ordre q-1 et pour la résolution Y associée à C on prend donc la résolution usuelle

$$Y : \ldots \to \mathbb{Z}C \xrightarrow{N} \mathbb{Z}C \xrightarrow{g-1} \mathbb{Z}C \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

où g est un générateur de C et $N = 1 + g + g^2 + \ldots + g^{q-2}$. Pour SL_n on prend la résolution bar, notée X. Alors la cohomologie de GL_n est celle de l'algèbre différentielle $B = \mathrm{Hom}_{SL_n}(Y, \mathrm{Hom}_C(X, \mathbb{Z}/l))$ (cf.§1, 4.1 et 5.4).

13.2 Proposition *Pour la suite spectrale de LHS associée à B, on a*

1. L'élément $c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \ldots c_n^{\alpha_n}\, e_1^{\beta_1} e_2^{\beta_2} \ldots e_n^{\beta_n} \in H^*GL_n$ *est de filtration* $2\alpha_1+\beta_1$ *et* $E_\infty^{p,q}$ *a pour* $\mathbb{Z}/l$ *-base les monômes* $\bar{c}_1^{\alpha_1} \bar{c}_2^{\alpha_2} \ldots \bar{c}_n^{\alpha_n}\, \bar{e}_1^{\beta_1} \bar{e}_2^{\beta_2} \ldots \bar{e}_n^{\beta_n}$ *de degré* $p+q = 2(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) + \beta_1 + \ldots + \beta_n$ *avec* $p = 2\alpha_1+\beta_1$.

2. $E_\infty = E_2$.

3. L'action de k^* *sur* H^*SL_n*, induite par celle de* k^* *sur* SL_n*, est triviale.*

Puisque $E_2^{p,q} \cong H^p(k^*; H^q\, SL_n)$, on a

$$E_\infty^{0,q} = E_2^{0,q} \cong H^0(k^*; H^q\, SL_n) = (H^q\, SL_n)^{k^*} = H^q\, SL_n.$$

Le théorème 12.1 résulte alors de la proposition 6.1.

<u>Preuve de la proposition 13.2</u> On procède par induction sur l'indice q. Pour q = 0, on observe que k^* est isomorphe à GL_1 et que

$$\det^* : H^*(GL_1) \to H^*GL_n$$

est injective, car la suite 13:1 possède une section. D'autre part, $H^1GL_n \cong \mathbb{Z}/l\, e_1$ et $H^2GL_n \cong \mathbb{Z}/l\, c_1$. On appelle e le générateur de H^1GL_1 et c le générateur de H^2GL_1. Par injectivité de $\det^*$, on doit avoir $c_1^{\alpha} e_1^{\beta} = \det^*(c^\alpha e^\beta)$. Mais $\mathrm{Im}\det^* = E_\infty^{*,0} = D_\infty^{*,0} \subset$

$\subset H^*GL_n$ (cf. proposition 6.1), ainsi $c_1^\alpha e_1^\beta$ est de filtration $2\alpha+\beta$ dans $H^{2\alpha+\beta}GL_n$ et les $c_1^\alpha e_1^\beta$ avec $p = 2\alpha+\beta$ forment une base de $E_\infty^{p,0}$. L'injectivité de det* implique $E_\infty^{*,0} \cong$ $\cong H^*GL_1$ et puisque $E_\infty^{*,0}$ est un quotient de $E_2^{*,0} \cong H^*(GL_1; H^0SL_n) = H^*GL_1$, cela montre que $E_2^{*,0} = E_\infty^{*,0}$ (on sait que l'action de k^* sur H^0SL_n est triviale). D'où l'ancrage à $q = 0$.

Supposons la proposition vraie pour $s \leq q-1$ et montrons qu'elle est vraie pour $s = q$. Notons

$$b(m) = c_2^{\alpha_2}...c_n^{\alpha_n}\ e_2^{\beta_2}...e_n^{\beta_n} \in H^mGL_n.$$

$$\bar{b}(m) = \bar{c}_2^{\alpha_2}...\bar{c}_n^{\alpha_n}\ \bar{e}_2^{\beta_2}...\bar{e}_n^{\beta_n} \in \bigoplus_{r+s=m} E_\infty^{r,s}.$$

L'hypothèse d'induction et $H^qGL_n \cong \bigoplus_{r+s=q} E_\infty^{r,s}$ (et donc $\dim H^qGL_n = \sum_{r+s=q} \dim E_\infty^{r,s}$) ainsi que la structure multiplicative du terme E_∞ montrent :

13.3 Les $c_1^{\alpha_1}e_1^{\beta_1}b(q)$ sont de filtration $2\alpha_1+\beta_1$ dans $H^{2\alpha_1+\beta_1+q}(GL_n)$ et les $\bar{c}_1^{\alpha_1}\bar{e}_1^{\beta_1}\bar{b}(q)$ sont linéairement indépendants dans $E_\infty^{2\alpha_1+\beta_1,q}$; de plus les $\bar{b}(q)$ forment une base de $E_\infty^{0,q}$. En particulier, dans E_∞ la multiplication par $\bar{c}_1^{\alpha_1}\bar{e}_1^{\beta_1}$ est injective.

13.4 Les différentielles $d_r^{p,q}$ sont nulles pour $r \geq 2$. En particulier,

$$E_\infty^{0,q} = E_2^{0,q} \quad \text{et} \quad E_\infty^{1,q} = E_2^{1,q}.$$

On sait que $E_2^{p,q} \cong H^p(k^*; H^qSL_n)$ où H^qSL_n est regardé comme k^*-module et que $E_2^{0,q} \cong (H^qSL_n)^{k^*}$.

13.5 Lemme *$H^qSL_n = (H^qSL_n)^{k^*}$.*

Ainsi H^qSL_n est trivial comme k^*-module et le théorème des coefficients universels montre alors que $E_2^{p,q} \cong E_2^{p,o} \otimes E_2^{o,q}$. On a $\dim E_2^{p,o} = \dim E_\infty^{p,o} = 1$ et par 13.4 $\dim E_2^{p,q} = \dim E_2^{o,q} = \dim E_\infty^{o,q}$. Par 13.3, on a $\dim E_\infty^{o,q} \leq \dim E_\infty^{p,q}$. Ainsi

$$\dim E_\infty^{p,q} \leq \dim E_2^{p,q} \leq \dim E_\infty^{p,q}.$$

D'où $E_\infty^{*,q} = E_2^{*,q}$ et les $\bar{c}_1^{\alpha_1}\, \bar{e}_1^{\beta_1} \bar{b}(q)$ forment alors une base de $E_\infty^{2\alpha_1+\beta_1,q}$, car $\dim E_\infty^{o,q} =$ $= \dim E_\infty^{p,q}$. D'où la proposition 13.2.♦

Preuve du lemme 13.5 On a un isomorphisme multiplicatif de complexes (cf.§1)

$$E_1^{*,q} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}C}(Y_*, H^qSL_n). \tag{13.6}$$

Puisque $Y_p = \mathbb{Z}C$ pour tout p, on obtient le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccccc} E_1^{o,q} & \xrightarrow{d_1^{o,q}} & E_1^{1,q} & \xrightarrow{d_1^{1,q}} & E_1^{2,q} \\ \wr\| & & \wr\| & & \wr\| \\ H^qSL_n & \xrightarrow{g-1} & H^qSL_n & \xrightarrow{N} & H^qSL_n \end{array} \tag{13.7}$$

13.8 Assertion *La multiplication $E_1^{o,q} \otimes E_1^{1,o} \to E_1^{1,q}$ est un isomorphisme.*

Preuve On a $E_1^{1,0} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}C}(Y_1, \mathbb{Z}/l) \cong \mathbb{Z}/l$ et $E_2^{1,0} \cong H^1(C; \mathbb{Z}/l) \cong H^1(GL_1; \mathbb{Z}/l) \cong$ $\cong \mathbb{Z}/l\, e_1$, donc $E_1^{1,0} = E_2^{1,0} \cong \mathbb{Z}/l\, e_1$. On regarde alors e_1 comme le cocycle prenant la valeur $1 \in \mathbb{Z}/l$ en $1 \in Y_1 = \mathbb{Z}C$. En prenant l'approximation diagonale Δ usuelle associée à Y on obtient, pour $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}C}(Y_o, H^qSL_n)$,

$$(-1)^q(\varphi \cup e_1)(1) = \mu \circ (\varphi \otimes e_1) \circ \Delta_{o,1}(1) = \mu(\varphi(1), e_1(1)) = \varphi(1), \tag{13.9}$$

où $1 \in Y_1 = \mathbb{Z}C$ et où μ est le produit cup de H^*SL_n. Par 13.6, la multiplication est donc surjective. De plus, $\dim(E_1^{0,q} \otimes E_1^{1,0}) = \dim E_1^{1,q}$. ♦

Ainsi tout élément de $E_1^{1,q}$ s'écrit de façon unique sous la forme $\varphi \cdot e_1$ avec $\varphi \in E_1^{0,q}$. Supposons alors par l'absurde qu'il existe un élément $x \in H^qSL_n$ non-fixe par l'action de $C = k^*$. Alors $d_1^{0,q}x \neq 0$ et il existe $\varphi \neq 0$ dans $E_1^{0,q}$ tel que

$$d_1^{0,q}x = \varphi \cdot e_1. \tag{13.10}$$

Puisque e_1 est un cocycle, on a

$$0 = d_1^{1,q}\, d_1^{0,q}x = (d_1^{0,q}\varphi)\cdot e_1.$$

Du diagramme 13.7 et de 13.9, on tire que φ est fixe dans H^qSL_n. Dans E_∞, e_1 devient $\bar{e}_1$ qui est non-nul et φ devient $\bar{\varphi}$ qui est aussi non-nul, car $(H^qSL_n)^{k^*} \cong E_2^{0,q} \subset E_1^{0,q}$ et $E_\infty^{0,q} = E_2^{0,q}$ par 13.4. Par 13.3, $\bar{\varphi}\cdot\bar{e}_1$ est alors non-nul dans E_∞. Mais par 13.10, $\varphi \cdot e_1$ est un bord de d_1, donc nul dans E_2 et a fortiori dans E_∞, d'où la contradiction. ♦

14. Preuve du corollaire 12.3 dans le cas r = 1

Dans ce cas, C est le groupe cyclique k^*. Ainsi, C^n et T sont respectivement les sous-groupes de GL_n et de SL_n formés des matrices diagonales. On a la suite exacte de groupes

$$1 \to T \to C^n \xrightarrow{\det} k^* \to 1$$

et les diagrammes commutatifs suivants.

$$\begin{array}{ccc} T & \xhookrightarrow{j} & SL_n \\ f\downarrow & & \downarrow g \\ C^n & \xhookrightarrow{i} & GL_n \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H^*T & \xleftarrow{j^*} & H^*SL_n \\ f^*\uparrow & & \uparrow g^* \\ H^*C^n & \xleftarrow{i^*} & H^*GL_n \end{array}$$

Le théorème 12.1. montre qu'on peut identifier H^*SL_n à une sous-algèbre de H^*GL_n via une section de g^*. Pour montrer l'injectivité de j^*, il suffit alors de voir que la restriction de $f^* \circ i^*$ à H^*SL_n est injective.

Dans la suite on distingue les cas suivants :

cas typique : $l \neq 2$ ou $l = 2$ et $q \equiv 1 \bmod 4$,

cas exceptionnel : $l = 2$ et $q \equiv 3 \bmod 4$.

Cas typique

Puisque C est isomorphe à GL_1, on a

$$H^*C = P[x] \otimes \Lambda(y) \quad \text{avec } x = c_1 \text{ et } y = e_1,$$

et, avec des identifications canoniques,

$$H^*C^n = P[x_1,\dots,x_n] \otimes \Lambda(y_1,\dots,y_n).$$

Avec $y_i = dx_i$, H^*C^n s'interprète comme le complexe de de Rham associé à $P[x_1,\dots,x_n]$.

Soit s_j le j-ième polynôme symétrique élémentaire en $x_1,\dots, x_n$ et Ω le complexe de de Rham associé à $P[s_1,\dots,s_n]$:

$$\Omega = P[s_1,\dots,s_n] \otimes \Lambda(ds_1,\dots,ds_n)$$

où ds_j s'obtient en dérivant usuellement s_j ; les x_i étant de degré pair on a

$$ds_j = \sum_{1 \leq i_1 <\dots< i_j \leq n} x_{i_1}\dots\widehat{x_{i_k}}\dots x_{i_j}\, y_{i_k}$$

Le groupe symétrique à n lettres Σ_n agit sur C^n en permutant les facteurs et il est bien connu que l'action induite sur H^*C^n permute canoniquement les x_i et les dx_i. On a (cf. [Q2] rem.3 p.565)

$$P[s_1,\dots,s_n] = P[x_1,\dots,x_n]^{\Sigma_n} \quad \text{et} \quad \Omega \subset (H^*C^n)^{\Sigma_n} \text{ avec égalité si } l \text{ est impair.}$$

14.1 Lemme *Pour $1 \leq j \leq n$, on a $i^*c_j = s_j$ et $i^*e_j = ds_j$.*
En particulier, $\operatorname{Im} i^* = \Omega$ et $i^*H^*SL_n = P[s_2,\dots,s_n] \otimes \Lambda(ds_2,\dots,ds_n)$.

Le groupe T est isomorphe à C^{n-1} via

$$C^{n-1} \to T, \quad (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1}) \mapsto \operatorname{diag}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1}, (\varepsilon_1\dots\varepsilon_{n-1})^{-1}).$$

Ainsi

$$H^*T = P[\xi_1,\dots,\xi_{n-1}] \otimes \Lambda(d\xi_1,\dots,d\xi_{n-1}).$$

Notons σ_j le j-ième polynôme symétrique élémentaire en $\xi_1,\dots,\xi_{n-1}$. On convient que $\sigma_0 = 1$ et $\sigma_j = 0$ si $j \geq n$. Pour $2 \leq j \leq n$, soit

$$f_j = \sigma_j - \sigma_{j-1}\,\sigma_1 \in S = P[\xi_1,\dots,\xi_{n-1}].$$

14.2 Lemme *On peut choisir les ξ_j tels que*

$$f^*x_j = \xi_j \ \textit{ et } \ f^*dx_j = d\xi_j \ \textit{ pour } 1 \leq j \leq n-1$$

$$f^*x_n = -\,\sigma_1 \ \textit{ et } \ f^*dx_n = -\,d\sigma_1.$$

Alors pour $1 \leq j \leq n$, on a

$$f^*s_j = \sigma_j - \sigma_{j-1}\,\sigma_1 = f_j \ \textit{ et } \ f^*ds_j = d\sigma_j - d\sigma_{j-1}\,\sigma_1 - \sigma_{j-1}\,d\sigma_1 = df_j.$$

En particulier, $f^*s_1 = f^*ds_1 = 0$.

Si $n = 2$, $f^*ds_2 = -\,2\sigma_1\,d\sigma_1$ et le lemme 14.1 montre que j^* n'est pas injective si $l = n = 2$. Dans la suite on suppose donc l impair et $n \geq 2$ ou $l = 2$ et $n \geq 3$. On a donc déjà montré l'injectivité de j^*.

Les transpositions $\tau_j = (j, j+1)$, $1 \leq j \leq n-1$, engendrent Σ_n qui agit par restriction sur $T \subset C^n$. Le lemme 14.2 et le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
H^*C^n \arrow[r, twoheadrightarrow, "f^*"] \arrow[d, "\tau_j"'] & H^*T \arrow[d, "\tau_j"] \\
H^*C^n \arrow[r, twoheadrightarrow, "f^*"'] & H^*T
\end{tikzcd}$$

montrent que l'action de τ_j sur H^*T est canonique pour $j \leq n-2$ et que

$$\tau_{n-1}\,\xi_k = \xi_k\,,\ \ \tau_{n-1}\,d\xi_k = d\xi_k \ \text{ si } k \leq n-2$$

$$\tau_{n-1}\,\xi_{n-1} = -\,\sigma_1\,,\ \ \tau_{n-1}\,d\xi_{n-1} = -\,d\sigma_1\,.$$

On déduit alors des lemmes 14.1 et 14.2 et de A.1 que

$$j^*H^*SL_n = \Omega\,(\,S^{\Sigma_n}\,) = P[f_2,\dots,f_n] \otimes \Lambda(df_2,\dots,df_n)$$

qui est isomorphe à H^*SL_n pour des raisons de dimensions.

De plus, l'application canonique

$$\Omega (S^{\Sigma_n}) \to \Omega (S)^{\Sigma_n} = (H^*T)^{\Sigma_n}$$

est injective et est un isomorphisme si l est impair (cf. A.1). D'où le corollaire 12.3 dans le cas typique.

Preuve du lemme 14.1 La preuve se trouve dans [Q2] p.564 et elle se fait comme suit. On interprète l'inclusion $i : C^n \to GL_n$ comme la représentation produit

$$E_1 \times \ldots \times E_n \ : \ C^n \ \to \ C^n \subset GL_n$$

où E_j est l'identité sur le j-ième facteur. Alors i^*c_j et i^*e_j sont les classes correspondantes de la représentation $E_1 \times \ldots \times E_n$. Pour le produit $\rho_1 \times \rho_2$ de deux représentations ρ_1 et ρ_2, on a les formules

$$c_j(\rho_1 \times \rho_2) = \sum_{r+s=j} c_r(\rho_1) \otimes c_s(\rho_2)$$

(14.3)

$$e_j(\rho_1 \times \rho_2) = \sum_{r+s=j} (c_r(\rho_1) \otimes e_s(\rho_2) + e_r(\rho_1) \otimes c_s(\rho_2))$$

avec $c_0 = 1$ et $e_0 = 0$ (cf. [Q2] p.563). Dans notre cas nous avons

$$e_1(E_i) = y_i \ , c_1(E_i) = x_i \ \text{ et } \ e_j(E_i) = c_j(E_i) = 0 \text{ si } j \geq 2.$$

La preuve du lemme se fait par induction sur n et pour $n = 1$ cela résulte de $C \cong GL_1$. On note

$$c_j(k) = c_j(E_1 \times \ldots \times E_k) \in H^{2j}C^k, \quad e_j(k) = e_j(E_1 \times \ldots \times E_k) \in H^{2j-1}C^k$$

et $s_j^o = s_j |_{x_n = o}$ le j-ième polynôme symétrique élémentaire en $x_1,\ldots,x_{n-1}$ et ds_j^o la différentielle associée.

Par hypothèse d'induction et en identifiant produits tensoriels et produits cup, on a

$$c_j(n) = \sum_{r+s=j} c_r(n-1) \otimes c_s(E_n) = c_j(n-1) \otimes 1 + c_{j-1}(n-1) \otimes c_1(E_n) =$$

$$= s_j^o + s_{j-1}^o \, x_n = s_j.$$

Pour la classe $e_j(n)$ l'hypothèse d'induction donne

$$e_j(n) = \sum_{r+s=j} (c_r(n-1) \otimes e_s(E_n) + e_r(n-1) \otimes c_s(E_n)) =$$

$$= e_j(n-1) \otimes 1 + c_{j-1}(n-1) \otimes e_1(E_n) + e_{j-1}(n-1) \otimes c_1 (E_n) =$$

$$= ds_j^o + s_{j-1}^o \, y_n + ds_{j-1}^o \, x_n.$$

Mais un calcul simple montre que $ds_j = ds_j^o + s_{j-1}^o \, y_n + ds_{j-1}^o \, x_n$. ♦

<u>Preuve du lemme 14.2</u> L'isomorphisme

$$\mathbb{C}^{n-1} \to T \subset \mathbb{C}^n, \quad (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}) \mapsto \operatorname{diag} (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1} , (\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{n-1})^{-1})$$

est l'identité sur les n-1 premiers facteurs. Ainsi, pour $1 \leq j \leq n-1$, on peut choisir ξ_j tel que $f^*x_j = \xi_j$.

Si $\pi_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ désigne la projection sur le n-ième facteur, alors

$$\mathbb{C}^{n-1} \to T \xrightarrow{\pi_n} \mathbb{C}$$

est la composée de la multiplication et de $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\varepsilon \mapsto \varepsilon^{-1}$. Puisque les ξ_j et les $d\xi_j$ sont primitifs et que φ induit en cohomologie la multiplication par -1, on a

$$f^*x_n = - (\xi_1 + \ldots + \xi_{n-1}) = - \sigma_1$$

$$f^*dx_n = - (d\xi_1 + \ldots + d\xi_{n-1}) = - d\sigma_1.$$

Avec les notations du lemme 14.1, on obtient

$$f^*s_j = f^*(s_j^o + s_{j-1}^o \, x_n) = \sigma_j - \sigma_{j-1} \, \sigma_1$$

$$f^*ds_j = d\sigma_j - d\sigma_{j-1} \, \sigma_1 - \sigma_{j-1} \, d\sigma_1. \blacklozenge$$

Cas exceptionnel ($l = 2$ et $q \equiv 3 \bmod 4$)

On procède comme dans le cas typique. Le groupe C étant isomorphe à GL_1, on a

$$H^*C = P[y] \quad \text{avec } y = e_1 \text{ et } c_1 = e_1^2,$$

et donc

$$H^*C^n = P[y_1,\dots,y_n].$$

Soit $s_j = s_j(y_1,\dots,y_n)$ le j-ième polynôme symétrique élémentaire en les $y_1,\dots,y_n$. On convient que $s_0 = 1$ et $s_j = 0$ pour $j \geq n+1$.

14.4 Lemme *Pour $1 \leq j \leq n$, on a*

$$i^*c_j = s_j^2 \quad \text{et} \quad i^*e_j = \sum_{0 \leq k < j} s_k\, s_{2j-1-k}.$$

En particulier, $i^*e_1 = s_1$ et $\operatorname{Im} i^* \subset P[s_1,\dots,s_n] = (H^*C^n)^{\Sigma_n}$.

14.5 Lemme *Le noyau de $f^*: P[s_1,\dots,s_n] \to H^*T$ est l'idéal N de $P[s_1,\dots,s_n]$ engendré par s_1.*

14.6 Lemme *Pour $n \geq 3$, on a $i^* H^*SL_n \cap N = \{0\}$.*

Par proposition 11.4, i^* est injective et les lemmes 14.5 et 14.6 montrent alors que j^* l'est aussi pour $n \geq 3$. Comme dans le cas typique, l'isomorphisme

$$C^{n-1} \to T \subset C^n, \quad (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1}) \to \operatorname{diag}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1}, (\varepsilon_1\dots\varepsilon_{n-1})^{-1})$$

permet d'écrire

$$H^*T = P[\eta_1,\dots,\eta_{n-1}] \quad \text{avec } d^\circ\eta_i = 1 \text{ pour tout } i$$

et

$$f^*y_i = \eta_i \quad \text{si } 1 \leq i \leq n-1$$

$$f^*y_n = \eta_1 + \dots + \eta_{n-1}.$$

(cf. preuve du lemme 14.2). Appelons $\sigma_j = \sigma_j(\eta_1,\dots,\eta_{n-1})$ le j-ième polynôme symétrique élémentaire en $\eta_1,\dots,\eta_{n-1}$. Comme dans le cas typique, on montre que $f^*s_j = f_j = \sigma_j - \sigma_{j-1}\sigma_1$ pour $2 \leq j \leq n$ et en utilisant A.1 on obtient

$$j^*H^*SL_n \subset P[f_2,\dots,f_n] = P[\eta_1,\dots,\eta_{n-1}]^{\Sigma_n} = (H^*T)^{\Sigma_n}.$$

D'où le corollaire 12.3 dans le cas exceptionnel. Pour $n = 2$, j^* n'est pas injective. En effet, on a par exemple $i^*e_2 = s_1 s_2 \in N$.

Preuve du lemme 14.4 La preuve se trouve dans [Q2] p.565 et utilise la formule de Wu. On donne ici une variante de preuve en procédant comme dans le cas typique (preuve de 14.1).

Pour $c_j(n)$ c'est le même calcul, car $c_1(E_i) = y_i^2$ et modulo 2 $s_j(y_1^2,\dots,y_k^2) =$

$= s_j(y_1,\dots,y_k)^2$.

Pour $e_j(n)$, l'hypothèse d'induction donne

$$e_j(n) = \sum_{r+s=j} (c_r(n-1) \otimes e_s(E_n) + e_r(n-1) \otimes c_s(E_n)) =$$

$$= e_j(n-1) \otimes 1 + c_{j-1}(n-1) \otimes e_1(E_n) + e_{j-1}(n-1) \otimes c_1(E_n) =$$

$$= \sum_{0\le k<j} s^o_k s^o_{2j-1-k} + (s^o_{j-1})^2 y_n + \Big(\sum_{o \le k < j-1} s^o_k s^o_{2j-3-k}\Big) y_n^2 .$$

Dans $\mathbb{Z}[y_1,\dots,y_n]$, $p = p(y_1,\dots,y_n) = \sum_{o\le k<j} s_k s_{2j-1-k}$ est un polynôme de degré ≤ 2 en y_n et s'écrit donc $a_o + a_1 y_n + a_2 y_n^2$ avec

$$a_o = p\,|_{y_n = o} = \sum_{0\le k<j} s^o_k s^o_{2j-1-k},$$

$$a_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial y_n}\right)_{y_n = o} = \sum_{0\le k<j} (s^o_{k-1} s^o_{2j-1-k} + s^o_k s^o_{2j-2-k}) =$$

$$= (s^o_{j-1})^2 + 2 \sum_{0\le k<j-1} s^o_k s^o_{2j-1-k},$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial y_n^2}\right)_{y_n = o} = \sum_{0\le k<j} s^o_{k-1} s^o_{2j-2-k} = \sum_{0\le k<j-1} s^o_k s^o_{2j-3-k} .$$

On conclut en réduisant modulo 2. ♦

Preuve du lemme 14.5 Comme vu plus haut, l'isomorphisme

$$C^{n-1} \to T \subset C^n, \quad (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1}) \to \operatorname{diag}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1}, (\varepsilon_1\dots\varepsilon_{n-1})^{-1})$$

permet d'écrire

$$H^*T = P[\eta_1,...,\eta_{n-1}] \quad \text{avec } d°\eta_i = 1 \text{ pour tout } i$$

et

$$f^*y_i = \eta_i \quad \text{si } 1 \le i \le n-1$$

$$f^*y_n = \eta_1 + ... + \eta_{n-1}.$$

Il est alors clair que $f^* : H^*C^n \to H^*T$ est surjective et que $f^*s_1 = 0$. Soit K l'idéal de $H^*C^n = P[y_1,...,y_n]$ engendré par s_1, on a $K \subset \operatorname{Ker} f^*$. En comparant les séries de Poincaré de K et de Ker f^* on obtient

$$PS(\operatorname{Ker} f^*) = PS(H^*C^n) - PS(H^*T) = (1-t)^{-(n-1)}((1-t)^{-1} - 1) = t(1-t)^{-n}$$

et, puisque $P[y_1,...,y_n]$ est intègre,

$$PS(K) = t(1-t)^{-n}.$$

Donc $K = \operatorname{Ker} f^*$.
Si $p \in P[s_1,...,s_n] \cap \operatorname{Ker} f^*$, alors $p = s_1 q$ avec $q \in P[y_1,...,y_n]$. Mais $q = ps_1^{-1}$ est symétrique, donc $q \in P[s_1,...,s_n]$. ♦

<u>Preuve du lemme 14.6</u> Soit $\omega = \sum_I a_I x^I \in H^*SL_n$ avec $I = (\alpha_2,..., \alpha_n, \beta_2,..., \beta_n)$ où $0 \le \alpha_i$ et $0 \le \beta_i \le 1$, $a_I \in \mathbb{Z}/2$ et $x^I = c_2^{\alpha_2}...c_n^{\alpha_n} e_2^{\beta_2}...e_n^{\beta_n}$. On ordonne les monômes $s_n^{a_n} s_{n-1}^{a_{n-1}} ... s_1^{a_1}$ lexicographiquement, c'est-à-dire

$$s_n^{a_n} s_{n-1}^{a_{n-1}} ... s_1^{a_1} > s_n^{\bar{a}_n} s_{n-1}^{\bar{a}_{n-1}} ... s_1^{\bar{a}_1}$$

s'il existe j, $1 \le j \le n$, tel que $a_j > \bar{a}_j$ et $a_k = \bar{a}_k$ pour $k > j$.

On a $i^*\omega = \sum_I a_I i^*(x^I) = \sum_I (m_I + r_I)$ où m_I est le plus petit monôme non-divisible par s_1 apparaissant dans $i^*(x^I)$ et $r_I = i^*(x^I) - m_I$. Pour $n \ge 3$, m_I existe. On a $m_I = s_n^{a_n} s_{n-1}^{a_{n-1}} ... s_2^{a_2}$ avec

$a_2 = 2\alpha_2 + \beta_3$
$a_3 = 2\alpha_3 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$
$a_k = 2\alpha_k + \beta_k + \beta_{k+1}$ si $4 \leq k \leq n-1$
$a_n = 2\alpha_n + \beta_n$.

Si $J = (a_2, \ldots, a_n)$ on observe que $J = J'$ implique $I = I'$. Donc si $I \neq I'$ alors $m_I \neq m_{I'}$. Ainsi le plus petit des m_I a coefficient 1 dans $i^*\omega$. Les s_j étant algébriquement indépendants, $i^*\omega$ n'est pas divisible par s_l.♦

15. Preuve du théorème 12.1 et du corollaire 12.3 dans le cas $r \geq 2$

Dans ce paragraphe, on note C la composante l-primaire du groupe cyclique K^*. Le groupe C est cyclique d'ordre l^a avec $a = v_l(q^r-1)$ la puissance de l dans q^r-1. On note encore C son image dans GL_r par l'homomorphisme injectif $C \to GL_r$, $x \to h(x)$. Puisque k^* est cyclique d'ordre q-1 et que l ne divise pas q-1, on a $C \subset SL_r$. Ainsi, l'homomorphisme injectif $i : C^m \to GL_n$, obtenu en faisant m blocs de taille r, prend ses valeurs dans SL_n et on le note

$$j : C^m \to SL_n \ , \quad x = (x_1, \ldots, x_m) \to j(x) = \mathrm{diag}\,(h(x_1), \ldots, h(x_m), \mathbb{1}_e).$$

15.1 Proposition *Si l ne divise pas q-1, l'homomorphisme $j^* : H^*SL_n \to H^*C^m$ est injectif.*

D'autre part, le groupe π agit sur C, car F est un automorphisme de K^* et conserve donc l'ordre des éléments. Concernant l'action du wreath produit $\pi \int \Sigma_m = \pi^m \rtimes \Sigma_m$ sur C^m, on a la proposition suivante.

15.2 Proposition *Dans SL_n, l'action d'un élément de $\pi^m \rtimes \Sigma_m$ sur C^m est réalisée par un automorphisme intérieur de SL_n.*

Puisqu'un automorphisme intérieur induit l'identité en cohomologie, les propositions 15.1 et 15.2 montrent qu'on a un homomorphisme injectif

$$j^* : H^*SL_n \to (H^*C^m)^{\pi^m \rtimes \Sigma_m}.$$

Mais l est impair, car l ne divise pas q-1, et la proposition 11.4 montre alors que l'inclusion $i : C^m \to GL_n$ induit un isomorphisme

$$i^* : H^*GL_n \to (H^*C^m)^{\pi^m \rtimes \Sigma_m}.$$

Le théorème 12.1 et le corollaire 12.3 résultent alors du diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} H^*GL_n \arrow[rr] \arrow[dr, "i^*"', "\wr"] & & H^*SL_n \arrow[dl, "j^*"] \\ & (H^*C^m)^{\pi^m \rtimes \Sigma_m}. & \end{tikzcd}$$

<u>Preuve de la proposition 15.1</u> La preuve consiste essentiellement à adapter à SL_n les résultats obtenus par Quillen pour GL_n dans [Q1]§3 et [Q2]§8.
Puisque l ne divise pas q-1, on a l impair et

$$v_l(q^s-1) = \begin{cases} v_l(s) + v_l(q^r-1) & \text{si r divise s} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(cf. [FP], VIII.2.4)
D'autre part,

$$| SL_n | = q^{n(n-1)/2}(q^2-1)\ldots(q^n-1).$$

Ainsi $v_l(| SL_n |) = v_l(| SL_{mr} |)$ et par la théorie du transfert

$$H^*SL_n \to H^*SL_{mr}$$

est injective. Il suffit alors de voir que

$$H^*SL_{mr} \to H^*C^m$$

est injective.

<u>Rappels</u> 1. On dit qu'une famille $\{H_i, i \in I\}$ de sous-groupes d'un groupe G détecte $H^*(G; \mathbb{Z}/l)$ si l'application

$$H^*(G;\mathbb{Z}/l) \to \prod_{i\in I} H^*(H_i; \mathbb{Z}/l),$$

induite par les restrictions, est injective.
2. Un groupe G est d'exposant divisant n si $g^n = 1 \ \forall g \in G$.

On a les deux lemmes suivants (cf. les résultats analogues pour GL_n dans [Q2] lemmes 12 et 13).

15.3 Lemme *La cohomologie modulo l de SL_{mr} est détectée par des sous-groupes abéliens (de SL_{mr}) d'exposant divisant l^a où $a = v_l\,(q^r-1)$.*

15.4 Lemme *Tout sous-groupe abélien de SL_n d'exposant divisant l^a, où $a = v_l\,(q^r-1)$, est conjugué dans SL_n à un sous-groupe de C^m.*

Il suit de ces deux lemmes que la cohomologie modulo l de SL_{mr} est détectée par une famille $\{H_i, i \in I\}$ de sous-groupes de C^m. Alors

$$H^*SL_{mr} \to \prod_{i \in I} H^*(H_i)$$

est injective et se factorise par H^*C^m, d'où la proposition 15.1. ♦

<u>Preuve du lemme 15.3</u> Soit Σ_m le groupe symétrique à m lettres. On a un homomorphisme injectif $\Sigma_m \to GL_{mr}$ donné de la façon suivante : chaque coefficient de la matrice $m \times m$ de permutation représentant $\sigma \in \Sigma_m$ devient un bloc $r \times r$: 1 devient $\mathbb{1}_r$ et 0 devient $\mathbb{O}_r$. Le déterminant de la matrice obtenue vaut $(-1)^{r\,\mathrm{sign}\,\sigma}$. Le groupe Σ_m agit par conjugaison sur GL_{mr} et sur les matrices "diagonales" de m blocs $r \times r$ l'action de Σ_m est de permuter ces blocs.

Soit $H_{m,r} = \Sigma_m \cap SL_{mr}$. C'est un sous-groupe de Σ_m d'indice 1 ou 2 et, puisque l est impair, on a

$$v_l\,(|H_{m,r}|) = v_l\,(|\Sigma_m|) = v_l\,(m!).$$

Le wreath produit $H = C \int H_{m,r}$ est un sous-groupe de SL_{mr} d'indice premier à l. En effet, on a d'une part

$$v_l\,(|SL_{mr}|) = mv_l\,(q^r-1) + \sum_{j=1}^{m} v_l\,(jr) = mv_l\,(q^r-1) + v_l\,(m!),$$

car r divise l-1, puisque $q^r \equiv 1 \bmod l$, et donc $r < l$ et $v_l\,(jr) = v_l\,(j)$; et d'autre part, C étant la composante l-primaire de K^*, on a

$$v_l\,(|H|) = v_l\,(|H_{m,r}|) + mv_l\,(|C|) = v_l\,(m!) + mv_l\,(q^r-1).$$

Par conséquent, H contient un l-Sylow de SL_{mr} et détecte H^*SL_{mr}. Il suffit alors de voir que $H^*(H)$ est détectée par des sous-groupes abéliens d'exposant divisant l^a. Or C étant cyclique d'ordre l^a, le lemme 15.3 résulte du lemme 15.5 suivant (cf. [Q1] prop.3.4 pour un résultat analogue).♦

15.5 Lemme *Soit l premier impair et G un groupe dont la cohomologie modulo l est détectée par une famille de sous-groupes abéliens d'exposant divisant l^a avec $a \geq 1$. Alors le groupe $G \int H_{m,r}$ a la même propriété.*

<u>Preuve du lemme 15.5</u> Elle se fait par induction sur m. Pour m = 1, il n'y a rien à montrer. On suppose alors le lemme vrai pour m' < m et pour tout r et on montre qu'il est vrai pour m et tout r. On distingue deux cas.

1. Si m est premier à l, soit $H_{m-1,r} = H_{m,r} \cap \Sigma_{m-1} \subset SL_{(m-1)r}$. Alors le sous-groupe $(G \int H_{m-1,r}) \times G$ de $G \int H_{m,r}$ est d'indice premier à l et détecte donc la cohomologie modulo l de $G \int H_{m,r}$. On conclut par hypthèse d'induction et par le fait que la formule de Künneth montre que si $\{M_i, i \in I\}$ et $\{N_j, j \in J\}$ détectent la cohomologie de M et N respectivement alors $\{M_i \times N_j, (i,j) \in I \times J\}$ détecte celle de $M \times N$.

2. Si l divise m, la permutation circulaire $(1\ 2 \ldots l)$ engendre un groupe cyclique D d'ordre l que l'on regarde comme sous-groupe de $H_{l,r} \subset SL_{lr}$; en effet, la matrice correspondant à $(1\ 2 \ldots l)$ est de déterminant $(-1)^{r(l-1)} = 1$, car l est impair, et on a bien $D \subset SL_{lr}$. Ecrivons $m = \overline{m}l$ et considérons les sous-groupes

$$H_{\overline{m},lr} = \Sigma_{\overline{m}} \cap SL_{mr}$$

et

$$(G \int D) \int H_{\overline{m},lr} \cong G \int (D \int H_{\overline{m},lr}) \subset G \int H_{m,r}.$$

Le sous-groupe $H_{\overline{m},lr}$ permute les $\overline{m}$ blocs de taille lr.

La cohomologie modulo l de $G \int H_{m,r}$ est détectée par celle de $(G \int D) \int H_{\overline{m},lr}$, car c'est un sous-groupe d'indice premier à l. Mais $G \int D$ est un sous-groupe de SL_{lr} dont la cohomologie modulo l est détectée par des sous-groupes abéliens d'exposant divisant l^a comme le montre le résultat suivant.

Résultat ([Q1], cor. 3.3) *Si $\{A_i, i \in I\}$ détecte la cohomologie de K alors la famille suivante de sous-groupes de $K \int D$ détecte celle de $K \int D$:*

$$A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_l} \subset K^l \subset K \int D,\ i_j \in I$$

$$A_i \times D \subset K \times D \subset K \int D,\ i \in I$$

On conclut alors par hypothèse d'induction. ♦

Preuve du lemme 15.4 Le résultat suivant est classique.

15.6 Lemme *L'homomorphisme $K^* \to GL_r \xrightarrow{det} k^*$ est surjectif.*

Soit G un sous-groupe abélien de SL_n d'exposant divisant l^a. Par [Q2] lemme 12, il existe $g \in GL_n$ tel que $gGg^{-1} \subset (K^*)^m$. Mais G étant dans la composante l-primaire de SL_n, on a $gGg^{-1} \subset C^m$. Par le lemme 15.6, il existe $h \in K^*$ tel que $\det h = \det g^{-1}$. Avec $h = (h,1,\ldots,1) \in (K^*)^m$ on a $hg \in SL_n$ et

$$(hg)\, G\, (hg)^{-1} \subset h\, C^m\, h^{-1} \subset C^m,$$

car $(K^*)^m$ est abélien. ♦

Preuve de la proposition 15.2 Puisque C^m est un sous-groupe de $SL_{mr} \subset SL_n$, il suffit de voir que l'action de $\pi^m \rtimes \Sigma_m$ est réalisée par des automorphismes intérieurs de SL_{mr}. Ainsi pour $(\varphi, \sigma) \in \pi^m \rtimes \Sigma_m$ on cherche $A \in SL_{mr}$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} C^m \arrow[r, "j"] \arrow[d, "(\varphi,\sigma)\cdot"'] & SL_{mr} \arrow[d, "c_A"] \\ C^m \arrow[r, "j"] & SL_{mr} \end{tikzcd}$$

où c_A est la conjugaison par A.

L'action de π sur K étant k-linéaire on a des homomorphismes injectifs

$$\pi \to GL_r,\ \varphi \mapsto b(\varphi)$$

et

$$\pi^m \to GL_{mr},\ \varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_m) \mapsto M(\varphi) = \mathrm{diag}\,(b(\varphi_1),\ldots,b(\varphi_m)).$$

En notant $m_x : C \to C$, $z \to xz$ la multiplication par $x \in C$, on a

$$F \circ m_x \circ F^{-1} = m_{F(x)},$$

où F est l'homomorphisme de Frobenius $F: z \to z^q$. Ainsi dans GL_r, π agit par conjugaison sur C et donc, dans GL_{mr}, π^m agit par conjugaison sur C^m.

Dans GL_{mr}, Σ_m agit par conjugaison sur C^m (cf. preuve du lemme 15.3). Ainsi, l'action de $\pi^m \rtimes \Sigma_m$ sur C^m est réalisée par des automorphismes intérieurs de GL_{mr}, c'est-à-dire

$$j((\varphi, \sigma)x) = c_B(j(x)) = Bj(x)B^{-1}$$

où $x \in C^m$, $M(\sigma) \in GL_{mr}$ est la matrice de $\sigma \in \Sigma_m$ et $B = M(\varphi)M(\sigma) \in GL_{mr}$.

Le lemme 15.6 implique qu'il existe $z \in (K^*)^m$ tel que $\det i(z) = \det B^{-1}$. Alors on a $A = Bi(z) \in SL_{mr}$ et, pour tout $x \in C^m$,

$$c_A(j(x)) = Bi(z)j(x)i(z)^{-1}B^{-1} = Bj(zxz^{-1})B^{-1} = c_B(j(x)) = j((\varphi, \sigma)x),$$

car $(K^*)^m$ est abélien et donc $zxz^{-1} = x$. ♦

CHAPITRE 4 SUR LA COHOMOLOGIE ENTIERE DU GROUPE LINEAIRE GENERAL ET DU GROUPE LINEAIRE SPECIAL SUR UN CORPS FINI

Dans ce chapitre on donne une description de la cohomologie entière de GL_n et de SL_n, à l'exception de la p-torsion. Les notations sont celles du chapitre 3. On désigne par G l'un des deux groupes GL_n ou SL_n et BG l'espace classifiant associé.

16. Ordre des classes de Chern entières

Soit $E : BG \to BU$ l'application obtenue par le relevé de Brauer de la représentation canonique de G sur k. On a

$$H^*(BU; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\tilde{c}'_1, \tilde{c}'_2, \ldots],$$

où $\tilde{c}'_i \in H^{2i}(BU; \mathbb{Z})$ est la i-ième classe de Chern universelle entière. L'ordre des classes $\tilde{c}_i = E^*\tilde{c}'_i \in H^{2i}(BG; \mathbb{Z})$ est donné par le résultat suivant.

16.1 Théorème

1. Pour $G = GL_n$ et $1 \leq i \leq n$, $\tilde{c}_i$ est d'ordre $q^i - 1$.
2. Pour $G = SL_n$ et $2 \leq i \leq n$, $\tilde{c}_i$ est d'ordre $q^i - 1$ et $\tilde{c}_1$ est nulle.
3. Pour $i > n$, $\tilde{c}_i$ est nulle.

<u>Preuve</u> On considère à nouveau la fibration classique

$$F\psi^q \xrightarrow{\Phi} BU \xrightarrow{\psi^q - 1} BU \tag{16.2}$$

où $\psi^q - 1$ est l'application correspondant à l'opération d'Adams (cf.11.1). Soient les limites directes canoniques $GL = \varinjlim GL_n$ et $SL = \varinjlim SL_n$, ainsi que les espaces BGL^+ et BSL^+ obtenus par la construction "+" de Quillen à partir des classifiants BGL et BSL, GL et SL étant muni de la topologie discrète.

On rappelle que la construction "+" de Quillen permet d'associer à tout CW-complexe X et à tout sous-groupe N normal parfait (c'est-à-dire $N = [N,N]$) de $\pi_1 X$ un espace X^+ et une application continue $i : X \to X^+$ tels que :

(16.3) $i_* : \pi_1 X \to \pi_1 X^+$ s'identifie à $\pi_1 X \to \pi_1 X/N \cong \pi_1 X^+$.

(16.4) $i^* : H^*(X; L) \to H^*(X^+ ; L)$ est un isomorphisme pour tout système L de coefficients locaux sur X^+.

Cette construction est fonctorielle à homotopie près.

L'application E se relève en

$$\varepsilon : BG \to F\psi^q,$$

et ε se factorise par BGL (cf. [Q2] p.575-576). D'autre part, l'espace $F\psi^q$ ayant le type d'homotopie de BGL^+ (cf.[Q2] th.7), on obtient le diagramme commutatif suivant, où les applications sont canoniques.

$$\begin{tikzcd}
BSL_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma_n"'] & BSL \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & BSL^+ \arrow[d] \\
BGL_n \arrow[r, "g"] & BGL \arrow[r] & BGL^+ \sim F\psi^q
\end{tikzcd}$$

On note encore $\tilde{c}_i$ l'image de $\tilde{c}_i$ dans $H^{2i}(F\psi^q; \mathbb{Z}) \cong H^{2i}(BGL; \mathbb{Z})$ (resp. dans $H^{2i}(BSL; \mathbb{Z})$) par Φ^* (resp. $j^* \circ \Phi^*$). On montrera le résultat suivant (cf. [FP] I.8.1 p.45 et [H]).

16.5 Proposition *L'ordre de $\tilde{c}_i$ dans $H^{2i}(F\psi^q; \mathbb{Z})$ est exactement q^i-1.*
En particulier, la p-torsion des classes $\tilde{c}_i$ dans $H^{2i}(F\psi^q; \mathbb{Z})$ et dans $H^{2i}(BG; \mathbb{Z})$ est nulle.

On a $H^2(BSL_n; \mathbb{Z}/l) = 0$ pour tout $l \neq p$ (cf.12.1) et donc $H^2(BSL_n; \mathbb{Z}[1/p]) = 0$, d'où la nullité de $\tilde{c}_1 \in H^2(BSL_n; \mathbb{Z})$ par 16.5. La nullité de $\tilde{c}_1$ résulte aussi de 16.12.

Montrons maintenant la troisième assertion. Si S est un l-sous-groupe de Sylow de G, l'ordre de S ne divise pas la caractéristique p de $\mathbb{F}_q$ et alors le caractère de Brauer de l'inclusion $I : S \to GL_n$ est le caractère d'une représentation complexe de dimension n de S (cf. [F] th.1.5 et [G] p.414). Ainsi l'application $BS \to BU$ obtenue par le relevé de Brauer de I se factorise par BU(n), le classifiant du groupe classique U(n), et on sait que $\tilde{c}_i$ est nulle dans $H^*(BU(n); \mathbb{Z})$ pour i > n. D'autre part, l'application $I^* : H^*(BG; \mathbb{Z}_{(l)}) \to H^*(BS; \mathbb{Z}_{(l)})$ étant injective, puisque S est un l-sous-groupe de Sylow, $\tilde{c}_i$ est nulle dans $H^{2i}(BG; \mathbb{Z}[1/p])$ pour i > n et donc aussi dans $H^{2i}(BG; \mathbb{Z})$ par 16.5.

On obtient une variante de preuve en observant que, dans $H^{2i}(BG; \mathbb{Z})$, $\tilde{c}_i$ est d'ordre un diviseur de q^i-1. Si $\tilde{c}_i$ est non-nulle alors, pour un premier l divisant l'ordre de $\tilde{c}_i$, la l-torsion de $\tilde{c}_i$ est non-nulle et par conséquent la réduction modulo l aussi. Par 16.5, 11.3.1 et 12.1 cela n'est possible que si $i \leq n$.

Finalement, les assertions 1 et 2 de 16.1 résultent des lemmes suivants.

16.6 Lemme *Les applications*

$$f^* : H^k(BSL; \mathbb{Z}) \to H^k(BSL_n; \mathbb{Z}) \quad et \quad g^* : H^k(BGL; \mathbb{Z}) \to H^k(BGL_n; \mathbb{Z})$$

sont injectives pour $k \leq 2n$.

16.7 Lemme *L'application $j^* : H^k(BGL; \mathbb{Z}) \to H^k(BSL; \mathbb{Z})$ conserve l'ordre des classes de Chern $\tilde{c}_i$, pour $i \geq 2$.*

<u>Preuve de la proposition 16.5</u> On travaille à homotopie près et les groupes de cohomologie sont pris à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers. Puisque ΩBU est homotope à U, on obtient, à partir de 16.2, la fibration

$$(16.8) \qquad U \to F\psi^q \xrightarrow{\Phi} BU.$$

C'est la fibration induite par l'application $\psi^q-1 : BU \to BU$ de la fibration universelle

$$(16.9) \qquad U \to EU \to BU.$$

On considère la suite spectrale de Serre associée à 16.9. L'espace BU étant simplement connexe, le système de coefficients locaux sur

$$H^*U = \Lambda(y_1, y_2, ...) \quad \text{où degré } y_i = 2i\text{-}1$$

est trivial et ainsi

$$E_2^{r,s} \cong H^rBU \otimes H^sU \cong E_2^{r,o} \otimes E_2^{o,s}.$$

Par [Bo] th.19.1, les y_i sont transgressifs, c'est-à-dire $d_r y_i = 0$ pour $r = 2, 3, ..., 2i\text{-}1$, et

$$d_{2i} y_i = \tilde{c}'_i \in E_{2i}^{2i,o} \cong \mathbb{Z}\ c'_i,$$

où $E_{2i}^{2i,o}$ est le quotient de $H^{2i}BU$ par le sous-module engendré par les monômes de degré 2i en les classes de Chern $\tilde{c}'_1, \ldots, \tilde{c}'_{i-1}$.

Par naturalité de la suite spectrale, les y_i sont aussi transgressifs dans 16.8 avec

$$d_{2i}y_i = (\psi^q - 1)^* \tilde{c}'_i = (q^i - 1)\tilde{c}'_i \in E_{2i}^{2i,o}.$$

On voit facilement par récurrence sur i que dans 16.8, $E_{2i}^{*,*} = T_i \oplus L_i$ où T_i est de torsion et L_i est $\mathbb{Z}$-libre de base les $\tilde{c}_i^{\alpha_i}\, \tilde{c}_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots\, y_i^{\beta_i}\, y_{i+1}^{\beta_{i+1}} \ldots$, avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $\beta_i \in \{0,1\}$. Ainsi $\tilde{c}'_i$ engendre un sommant direct $\mathbb{Z}$-libre dans $E_{2i}^{2i,o}$ et un sommant direct d'ordre $q^i - 1$ dans $E_{2i+1}^{2i,o} = E_\infty^{2i,o} = \Phi^*(H^{2i}BU)$.

Enfin, les $\tilde{c}_i$ n'ont pas de p-torsion car p ne divise pas q^i-1.♦

<u>16.10 Remarque</u> La démonstration ci-dessus montre que

$$E_{2i}^{2i,o} \cong \mathbb{Z}\, c_i \oplus T \quad \text{et} \quad E_\infty^{2i,o} = E_{2i+1}^{2i,o} \cong \mathbb{Z}/(q^i - 1)\, c_i \oplus T,$$

où T est de torsion. Donc $\tilde{c}_i$ engendre un sommant direct d'ordre q^i-1 dans $\operatorname{Im} \Phi^* = E_\infty^{*,o} \subset H^*(BGL; \mathbb{Z})$. D'autre part, pour i fixé ≥ 2, soient $\tilde{c}_1 \in E_\infty^{2,o} = E_{2i}^{2,o}$ et $\tilde{c}_{i-1} \in E_\infty^{2i-2,o} = E_{2i}^{2i-2,o}$. Alors $\tilde{c}_{i-1}\tilde{c}_1 \in T \subset E_{2i}^{2i,o}$, car $\tilde{c}_{i-1}\tilde{c}_1$ est un élément de torsion (de E_{2i}) d'ordre un diviseur de q^i-1. Ainsi $\tilde{c}_i - \tilde{c}_{i-1}\tilde{c}_1 \in E_\infty^{2i,o} \subset \operatorname{Im} \Phi^*$ est d'ordre q^i-1.

<u>Preuve du lemme 16.6</u> Rappelons d'abord que pour une application continue $h : A \to B$ on peut considérer son cône C_h et obtenir une longue suite exacte en cohomologie

(16.11) $$H^o(C_h; L) \to H^o(B; L) \to H^o(A; L) \to H^1(C_h; L) \to \ldots$$

pour tout groupe abélien L.

Par 16.4 et les théorèmes 11.2 et 11.3, $g^* : H^k(BGL; \mathbb{Z}/l) \to H^k(BGL_n; \mathbb{Z}/l)$ est un isomorphisme pour $k \leq 2n$ ($l \neq p$). Alors par 16.11, $H^k(C_g; \mathbb{Z}/l) = 0$ pour $1 \leq k \leq 2n$ et donc $H^k(C_g; \mathbb{Z}[1/p]) = 0$ pour $1 \leq k \leq 2n$. En utilisant à nouveau 16.11

on voit que

$$g^* : H^k(BGL; \mathbb{Z}[1/p]) \to H^k(BGL_n; \mathbb{Z}[1/p])$$

est un isomorphisme pour $1 \le k \le 2n-1$ et injective pour $k = 2n$. On conclut par le fait que $H^*(BGL; \mathbb{Z})$ n'a pas de p-torsion (cf.[Q2] cor.2 du th.6 p.579).

Pour l'application $f : BSL_n \to BSL$, on remarque d'abord que

(16.12) $\quad BGL^+$ a le type d'homotopie de $BSL^+ \times Bk^*$ où $k^* \equiv GL_1$.

En effet, la suite exacte

$$1 \to SL \to GL \xrightarrow{\det} k^* \to 1$$

est scindée et BGL est un H-espace (cf.[A]§1). Ainsi en cohomologie modulo l, l'application j^* est surjective de noyau l'idéal engendré par c_1 et e_1. Il en est de même de j_n^* par 12.1. Comme précédemment, $f^* : H^k(BSL; \mathbb{Z}/l) \to H^k(BSL_n; \mathbb{Z}/l)$ est un isomorphisme pour $k \le 2n$ et $f^* : H^k(BSL; \mathbb{Z}[1/p) \to H^k(BSL_n; \mathbb{Z}[1/p])$ est un isomorphisme pour $1 \le k \le 2n-1$ et injective pour $k = 2n$. Puisque $H^*(BGL; \mathbb{Z})$ n'a pas de p-torsion, $H^*(BSL; \mathbb{Z})$ non plus par 16.12 et on conclut comme avant.♦

<u>Preuve du lemme 16.7</u> L'homomorphisme injectif

$$GL_{n-1} \to SL_n, \quad A \to \begin{pmatrix} \det A^{-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

conduit au diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} GL_{n-1} & \to & SL_n & \hookrightarrow & GL_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ GL_n & \to & SL_{n+1} & \hookrightarrow & GL_{n+1} \end{array}$$

et en passant à la limite on obtient une application

(16.13) $\quad h : BGL \to BSL \xrightarrow{j} BGL.$

16.14 Lemme *Pour tout i,* $h^*\tilde{c}_i = \tilde{c}_i - \tilde{c}_{i-1}\tilde{c}_1$.

On a ainsi $h^*\tilde{c}_i \in \operatorname{Im} \Phi^*$ et la remarque 16.10 montre que, pour $i \ge 2$, $h^*\tilde{c}_i$ a l'ordre de $\tilde{c}_i$ et donc $j^*\tilde{c}_i$ aussi par 16.13.♦

Preuve du lemme 16.14 On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} GL_{n-1} & \xrightarrow{h_n} & GL_n \\ {\scriptstyle \tilde{\iota}_{n-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\iota}_n} \\ GL & \xrightarrow{h} & GL \end{array}$$

où $h_n(A) = \begin{pmatrix} \det A^{-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = (\det A^{-1}, A) \in GL_1 \times GL_{n-1}$. Par la formule du produit (cf.15.3) on a $h_n^* \check{c}_i = \tilde{c}_i - \tilde{c}_{i-1}\tilde{c}_1$ pour $i < n$.

Mais par le lemme 16.6, $i_n^* : H^k(GL; \mathbb{Z}) \to H^k(GL_n; \mathbb{Z})$ est injective pour $k \leq 2n$ $(g = Bi)$. D'où le lemme 16.14.♦

17. Calcul de $H^*(BG; \mathbb{Z}[1/p])$

Rappel La suite exacte de groupes

(17.1) $$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{s} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/s \to 0$$

fournit une suite d'espaces d'Eilenberg-MacLane et d'applications

(17.2) $$\dots \to K(\mathbb{Z}/s, k-1) \xrightarrow{\beta} K(\mathbb{Z}, k) \xrightarrow{s} K(\mathbb{Z}, k) \xrightarrow{\pi} K(\mathbb{Z}/s, k) \to \dots$$

telle que chaque triple est une fibration à homotopie près. Pour tout CW-complexe X, 17.2 induit le diagramme commutatif suivant :

(17.3)
$$\begin{array}{ccccccccc} \dots\to[X, K(\mathbb{Z}/s, k-1)] & \xrightarrow{\beta} & [X, K(\mathbb{Z}, k)] & \xrightarrow{s} & [X, K(\mathbb{Z}, k)] & \xrightarrow{\pi} & [X, K(\mathbb{Z}/s, k)]\to\dots \\ \wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr \\ \dots\to H^{k-1}(X; \mathbb{Z}/s) & \xrightarrow{\beta} & H^k(X; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{s} & H^k(X; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi} & H^k(X; \mathbb{Z}/s) \to\dots \end{array}$$

où β est le cobord usuel associé à 17.1 et où les lignes sont exactes. L'isomorphisme est donné par

(17.4) $$[X, K(R, k)] \cong H^k(X; R), \quad [f] \leftrightarrow f^*\iota$$

où ι est la classe fondamentale de $H^k(K(R,k); R) \cong \mathrm{Hom}(R, R)$ correspondant à l'identité. Enfin, les constructions ci-dessus sont fonctorielles.

On note encore c l'application correspondant par 17.4 à une classe c de cohomologie.

Soit I l'ensemble des i tels que $1 \leq i \leq n$ pour $G = GL_n$ et $2 \leq i \leq n$ pour $G = SL_n$. Notons s_i l'ordre de $\tilde{c}_i$. Si $\tilde{x}$ est une classe de cohomologie entière alors x désigne sa réduction modulo *l*. Pour $i \in I$ on applique le rappel à

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{s_i} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/s_i \to 0$$

et X = BG. Par 17.3 l'application $\tilde{c}_i : BG \to K(\mathbb{Z}, 2i)$ se relève en une application $\gamma_i : BG \to K(\mathbb{Z}/s_i, 2i\text{-}1)$.

Soient $K_i = K(\mathbb{Z}/s_i, 2i\text{-}1)$ et $K = K(\mathbb{Z}, 2i)$. On sait que $H^*(K_i; \mathbb{Z})$ contient comme sommant direct une sous-algèbre de polynômes $P_i = \mathbb{Z}[\tilde{x}_i] / (s_i \tilde{x}_i)$, où $\tilde{x}_i$ est le générateur de $H^{2i}(K_i; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/s_i\mathbb{Z}$ (cf. [C]).

17.5 Lemme *On peut choisir le générateur $\tilde{x}_i$ de $H^{2i}(K_i; \mathbb{Z})$ tel que $\tilde{c}_i = \gamma_i^* \tilde{x}_i$ pour tout relevé γ_i de $\tilde{c}_i$.*

<u>Preuve</u> On a $H^{2i}(K; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\iota$ où ι est la classe fondamentale et l'applicaton $s_i^* : H^{2i}(K; \mathbb{Z}) \to H^{2i}(K; \mathbb{Z})$ est la multiplication par s_i, car $(s_i)_* : \pi_{2i}K \to \pi_{2i}K$ est la multiplication par s_i et l'isomorphisme de Hurewicz est naturel. La suite exacte de Serre de la fibration

$$K_i \xrightarrow{\tilde{\beta}} K \xrightarrow{s_i} K$$

est donc comme suit :

$$\dots \to H^{2i}(K; \mathbb{Z}) \xrightarrow{s_i} H^{2i}(K; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\tilde{\beta}^*} H^{2i}(K_i; \mathbb{Z}) \to \dots$$

et montre que $\tilde{\beta}^*\iota$ est d'ordre s_i dans $H^{2i}(K_i; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/s_i\mathbb{Z}$. Avec $\tilde{x}_i = \tilde{\beta}^*\iota$ on a bien $\tilde{c}_i = \tilde{c}_i^*\, \iota = (\beta \circ \gamma_i)^*\iota = \gamma_i^* \tilde{x}_i$. ♦

<u>17.6 Remarque</u> La preuve montre que $\tilde{\beta}$ est homotope à $\tilde{x}_i$, car $\tilde{\beta}^*\iota = \tilde{x}_i = \tilde{x}_i^*\, \iota$.

Pour chaque $i \in I$, Quillen construit une classe $\tilde{e}_i \in H^{2i-1}(BG; \mathbb{Z}/s_i)$ telle que $\tilde{\beta}\tilde{e}_i = \tilde{c}_i$ (cf. [Q2] §3). On peut donc prendre

$$\gamma_i = \tilde{e}_i,$$

ce que nous faisons dans la suite.

Notons $(C(X), d)$ le complexe des cochaînes cellulaires entières d'un espace X. On construit un sous-complexe C_i de $C(K_i)$ en choisissant un cocycle $z_i \in C^{2i}(K_i)$ représentant $\widetilde{x}_i$ et $b_i \in C^{2i-1}(K_i)$ tel que $db_i = s_i z_i$. On prend

$$C_i^o = \mathbb{Z}\, z_i^o,\quad C_i^{2im-1} = \mathbb{Z}\, z_i^{m-1} \cup b_i,\quad C_i^{2im} = \mathbb{Z}\, z_i^m \quad \text{et} \quad C_i^m = 0 \text{ sinon},$$

où "$\cup$" désigne le produit cup des cochaînes. Puisque K_i est un CW-complexe de type fini, $C(K_i)$ est $\mathbb{Z}$-libre de type fini et ainsi C_i est bien un sous-complexe de $C(K_i)$.

17.7 Lemme *L'homomorphisme $H^*(C_i) \to H^*(K_i; \mathbb{Z})$, induit par l'inclusion $C_i \to C(K_i)$, est injectif d'image P_i.*

<u>Preuve</u> On a bien $H^oC_i = \mathbb{Z}$ et il est clair que H^*C_i est isomorphe (abstraitement) à P_i. L'injectivité de $H^*C_i \to H^*(K_i; \mathbb{Z})$ provient du fait que $\alpha\, z_i^m$ n'est un bord dans $C(K_i)$ que si s_i divise α, car $\widetilde{x}_i^m$ est d'ordre s_i.♦

Soient $g : BG \to \prod_{i\in I} K_i$ l'application donnée par les γ_i et h l'homomorphisme de complexes

$$\bigotimes_{i\in I} C_i \to \bigotimes_{i\in I} C(K_i) \sim C\big(\prod_{i\in I} K_i\big) \xrightarrow{g^*} C(BG)$$

obtenu par l'équivalence d'Eilenberg-Zilber.

17.8 Théorème *L'application*

$$h^* : \widetilde{H}^*\big(\bigotimes_{i\in I} C_i\big) \to \widetilde{H}^*(BG; \mathbb{Z}[1/p])$$

est un isomorphisme de groupes abéliens.

<u>Remarques</u> 1. Le théorème est vrai dans le cas stable, c'est-à-dire pour $n = \infty$, et décrit donc $H^*(BGL; \mathbb{Z})$ et $H^*(BSL; \mathbb{Z})$ ($H^*(BGL; \mathbb{Z})$ n'a pas de p-torsion et $H^*(BSL; \mathbb{Z})$ non plus par 16.12).

2. Les groupes $H^k(\bigotimes_{i\in I} C_i)$ se calculent aisément à l'aide de la formule de Künneth.

3. Soient R et R' les sous-algèbres engendrées respectivement par les x_i et les c_i. Alors il est clair que $h^* : R \to R'$ est un isomorphisme d'algèbres.

cohomologie en question étant de type fini, on voit, en utilisant le cône de l'application h et le théorème des coefficients universels, qu'il suffit de vérifier que h^* est un isomorphisme modulo l.

En appliquant le rappel au diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "s_i"] \arrow[d, "s_i/l"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "id"] & \mathbb{Z}/s_i \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "l"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/l \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

on obtient, avec la remarque 17.6, le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & K_i \arrow[r, "y_i"] \arrow[d] & K(\mathbb{Z}/l\,, 2i\text{-}1) \arrow[d, "\beta"] \\
BG \arrow[r, "c_i"] \arrow[ur, bend left, "\tilde{e}_i = \gamma_i", "\tilde{\beta} \sim \tilde{x}_i"'] \arrow[urr, bend left=20, "e_i"'] & K \arrow[r, "s_i/l"] \arrow[d, "s_i"'] & K \arrow[d, "l"] \\
 & K \arrow[r, equal] & K
\end{tikzcd} \tag{17.9}$$

L'application y_i fournit une classe $y_i \in H^{2i-1}(K_i\,;\, \mathbb{Z}/l)$ telle que $\beta y_i = s_i/l\ \tilde{x}_i$.

17.10 Lemme *On a* $\gamma_i^* y_i = e_i \in H^{2i}(BG;\, \mathbb{Z}/l)$.

17.11 Lemme *L'homomorphisme* $H^*(C_i \otimes \mathbb{Z}/l) \to H^*(K_i;\, \mathbb{Z}/l)$, *induit par l'inclusion* $C_i \to C(K_i)$, *est injectif.*

Le lemme 17.11 dit qu'on peut identifier $H^*(C_i \otimes \mathbb{Z}/l)$ au sous-espace de $H^*(K_i;\, \mathbb{Z}/l)$ de base les $x_i^{\alpha_i}\, y_i^{\beta_i}$, avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $\beta_i \in \{0,1\}$. Ainsi en identifiant les produits cup aux produits tensoriels, on peut regarder $H^*(\otimes C_i \otimes \mathbb{Z}/l)$ comme le sous-espace de $H^*(\prod K_i ; \mathbb{Z}/l)$ ayant pour base les

$$\omega = x_r^{\alpha_1} x_{2r}^{\alpha_2} \dots x_{mr}^{\alpha_m} \; y_r^{\beta_1} y_{2r}^{\beta_2} \dots y_{mr}^{\beta_m}, \text{ avec } \alpha_i \in \mathbb{N}, \beta_i \in \{0,1\}$$

(dans le cas $G = SL_n$ et $r = 1$, la base est formée des $x_{2r}^{\alpha_2} \dots x_{mr}^{\alpha_m} \; y_{2r}^{\beta_2} \dots y_{mr}^{\beta_m}$).

Par les lemmes 17.5 et 17.10, les $g^*\omega$ forment la base usuelle de $H^*(BG; \mathbb{Z}/l)$ décrite dans 11.3. D'où le théorème 17.8.♦

Preuve du lemme 17.10 L'application y_i représente la réduction modulo l : $\mathbb{Z}/s_i \to \mathbb{Z}/l$. Ainsi $\gamma_i^* \, y_i = (y_i \circ \gamma_i)^* \iota = y_i^* \, (\gamma_i^* \iota) = \text{réd}\,(\tilde{e}_i) = e_i$.♦

Preuve du lemme 17.11 Le cocycle $z_i^m \otimes 1$ n'est clairement pas un bord dans $C(K_i) \otimes \mathbb{Z}/l$, car il représente le générateur de $H^{2im}(K_i; \mathbb{Z}/l) = \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$.
D'autre part, si le cocycle $(z_i^{m-1} \cup b_i) \otimes 1$ est un bord de $C(K_i) \otimes \mathbb{Z}/l$, alors par exactitude de

$$0 \to C(K_i) \xrightarrow{l} C(K_i) \to C(K_i) \otimes \mathbb{Z}/l \to 0,$$

il existe ξ et η dans $C(K_i)$ tels que $d\eta + l\,\xi = z_i^{m-1} \cup b_i$ dans $C(K_i)$. D'où $d\xi = s_i/l \; z_i^m$, ce qui contredit le fait que l'ordre de $\tilde{x}_i$ est s_i.♦

APPENDICE INVARIANTS D'UNE ALGEBRE DE POLYNOMES

Soit un anneau A commutatif intègre avec unité et Σ_{m+1} le groupe symétrique à m+1 lettres. Les transpositions $\tau_j = (j, j+1)$, $j = 1,..., m$, engendrent Σ_{m+1} qui agit sur l'algèbre de polynômes $S = A[x] = A[x_1,..., x_m]$ de la façon suivante :

$$\text{si } j < m,\ (\tau_j p)x = p(\tau_j x) = p(...,x_{j+1}, x_j,...),$$

$$\text{si } j = m,\ (\tau_m p)x = p(x_1,...x_{m-1},-s_1) \text{ où } s_1 = \sum_{i=1}^{m} x_i.$$

On note s_j, $j = 1, ..., m$, les polynômes symétriques élémentaires en les $x_1, ..., x_m$ avec la convention usuelle $s_0 = 1$ et $s_j = 0$ si $j > m$. Pour $2 \le j \le m+1$, on considère $f_j = s_j - s_{j-1}s_1 \in S$.

On suppose dans la suite que si la caractéristique de A est 2 alors $m \ge 2$.

A.I Proposition

1. Les f_j sont invariants par Σ_{m+1}.

2. Les f_j sont algébriquement indépendants sur A.

3. $S^{\Sigma_{m+1}} = A[f_2,..., f_{m+1}]$.

4. Soit $J = det(\partial_i f_j)_{2\le j\le m+1,\ 1\le i\le m}$ où $\partial_i f_j = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \in A[x]$. On a

$$J = (-1)^m \prod_{1\le i<j\le m} (x_i - x_j) \prod_{1\le i\le m} (x_i + s_1).$$

En particulier si $m = 1$ alors $J = -2x_1$. Pour $m \ge 2$, J est non-nul dans $A[x]$.

5. L'application de complexes de de Rham

$$\varphi : \Omega(S^{\Sigma_{m+1}}) \to \Omega(S)^{\Sigma_{m+1}} ,$$

induite par l'inclusion des f_j dans S, est injective.

6. Si la caractéristique de A est impaire, alors φ est un isomorphisme.

<u>Preuve de 1</u> On a $s_j = s_j^o + s_{j-1}^o x_m$ où $s_j^o = s_j \mid_{x_m = 0}$ est le j-ième polynôme symétrique en $x_1,...x_{m-1}$. Il est clair que $f_j = s_j - s_{j-1}s_1$ est invariant par τ_i pour $1\le i \le m-1$.

De plus $(\tau_m f_j)(x) = s_j^o - s_{j-1}^o s_1 - (s_{j-1}^o + s_{j-2}^o s_1)(-x_m) = s_j^o + s_{j-1}^o x_m - (s_{j-1}^o + s_{j-2}^o x_m) s_1 =$

$= s_j - s_{j-1}s_1 = f_j(x).$ ♦

Preuve de 2 La démonstration dans le cas usuel de l'action de Σ_{m+1} sur $A[x_1,..., x_{m+1}]$ s'adapte sans difficulté (cf. p. ex. [L] V§9). ♦

Preuve de 3 Le poids d'un monôme $t_1^{\nu_1} \dots t_k^{\nu_k}$ est $\nu_1 + 2\nu_2 + \dots + k\nu_k$ et celui de $g(t_1,...,t_k)$ est le maximum des poids de ses monômes. On montre par induction sur m que pour tout $p \in A[x_1,..., x_m]^{\Sigma_{m+1}}$ de degré d, il existe un polynôme $g(t_2,...,t_m)$ de poids $\leq d$ tel que $p = g(f_2,...,f_m)$. On distingue les cas suivants.

1. Caractéristique de A impaire ou nulle. Pour l'ancrage à $m = 1$, l'hypothèse sur p donne $p(x_1) = p(-x_1)$ et 2 étant une unité de A on obtient $p(x_1) = g(x_1^2) = g(-x_1^2) =$ $= g(f_2)$ avec g de poids $\leq d$. L'induction sur m se réalise comme dans le cas classique par induction sur d (cf. [L] V§9).

2. Si la caractéristique de A est 2, l'ancrage se fait à $m = 2$ par induction sur d. Le cas $d = 0$ est trivial. Soit $p(x_1,x_2)$ de degré d. Puisque p est invariant par Σ_2, il existe $q(t_1,t_2)$ de poids $\leq d$ tel que $p = q(s_1,s_2)$. L'invariance par τ_3 donne alors $p(x_1,x_2) = p(x_1,x_1+x_2) = q(x_2, x_1^2+x_1x_2)$. Alors $p(x_1,0) = q(0,x_1^2)$ est un polynôme en $x_1^2 = f_2(x_1,0)$. En procédant comme dans le premier cas pour le pas d'induction, on obtient $p(x_1,x_2) = p_1(f_2) + f_3p_4(f_2)$. L'induction sur m se réalise comme précédemment.

Preuve de 4 Soit l'homomorphisme canonique d'anneaux $\lambda : \mathbb{Z} \to A$ et $B = \mathrm{im}\lambda$. Puisque $s_j \in B[x]$, on a $f_j \in B[x]$ et il suffit alors de calculer J pour $A = \mathbb{Z}$.
Pour $1 \leq k \leq m-1$, on a

$$\tau_k\partial_i f_j = \begin{cases} \partial_{k+1}f_j & \text{si } i = k \\ \partial_k f_j & \text{si } i = k+1 \\ \partial_i f_j & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, $\tau_k\partial_k f_j(x) = (\partial_k f_j)(\tau_k x) = \partial_{k+1}(f_j(\tau_k x)) = \partial_{k+1}(f_j(x)) = (\partial_{k+1}f_j)(x)$; et le reste est clair. Donc $\tau_k J = -J$ et par suite $\tau J = -J$ pour toute transposition $\tau \in \Sigma_m$. Par conséquent J est divisible par $\prod_{1\leq i<j\leq m} (x_i-x_j)$.

On a

$$\tau_m\partial_i f_j = \begin{cases} \partial_i f_j - \partial_m f_j & \text{si } 1 \leq i \leq m-1 \\ - \partial_m f_j & \text{si } i = m. \end{cases}$$

En effet, pour $1 \leq i \leq m-1$ $\tau_m \partial_i f_j(x) = \partial_i f_j(x_1,\dots x_{m-1},-s_1) = \partial_i(f_j(x_1,\dots x_{m-1},-s_1)) +$ $+ (\partial_m f_j)(x_1,\dots x_{m-1},-s_1) = \partial_i(f_j(x)) - \partial_m(f_j(x_1,\dots x_{m-1},-s_1)) = \partial_i f_j(x) - \partial_m(f_j(x)) =$ $= (\partial_i f_j)(x) - (\partial_m f_j)(x)$. Et pour $i = m$, $\tau_m \partial_m f_j(x) = \partial_m f_j(x_1,\dots x_{m-1},-s_1) =$ $= -\partial_m(f_j(x_1,\dots x_{m-1},-s_1)) = -\partial_m(f_j(x)) = -(\partial_m f_j)(x)$. Donc $\tau_m J = -J$ et J est divisible par $x_m + s_1$ et donc aussi par $\prod_{1\leq i\leq m} (x_i+s_1)$.

Au total, J est divisible par $H = \prod_{1\leq i<j\leq m} (x_i-x_j) \prod_{1\leq i\leq m} (x_i+s_1)$. Or J et H sont homogènes de degré $m(m+1)/2$ et donc $J = aH$ pour un $a \in \mathbb{Z}$. En regardant J et H comme des polynômes en x_1, on a $H = a_{2m-1} x_1^{2m-1} + a_{2m-2} x_1^{2m-2} + \dots + a_0$ avec $a_{2m-1} = 2 \prod_{2\leq i<j\leq m} (x_i-x_j)$. Mais, $J = \det \frac{\partial f_i}{\partial s_k} \det \frac{\partial s_k}{\partial x_i}$ avec $\det \frac{\partial s_k}{\partial x_i} = \prod_{2\leq i<j\leq m} (x_i-x_j)$ (cf.[Q2], preuve du lemme 9) et par induction on voit que $\det \frac{\partial f_i}{\partial s_k} =$ $= (-1)^m(s_m + s_1 s_{m-1} + \dots + s_1^{m-2}s + 2s_1^m)$. Le coefficient de x_1^{2m-1} dans J est alors $(-1)^m a_{2m-1}$, d'où $a = (-1)^m$.

Il reste à voir que $J \neq 0$ pour $m \geq 2$. Pour $m = 2$, on a $J(x_1,x_2) = 2x_1^3 + 3 x_1^2 x_2 -$ $- 3x_1 x_2^2 - 2x_2^3 \neq 0$ quelle que soit la caractéristique de A. Puis $J(x_1,\dots, x_m)|_{(x_m = 0)} =$ $= \pm J(x_1,\dots, x_{m-1})x_1 \dots x_{m-1}(x_1 + \dots + x_{m-1})$ permet de conclure par récurrence sur m et intégrité de A[x].

<u>Preuve de 5</u> Elle est analogue à celle du lemme 9 de [Q2]. Soit $\omega = \sum_I a_I\, df_I \in \operatorname{Ker} \varphi$ où I parcourt les parties de $\{2,\dots,m+1\}$, $a_I \in A[f_2,\dots, f_{m+1}]$ et $df_I = df_{i_1}\dots df_{i_k}$ si $I = \{i_1,\dots i_k\}$ avec $i_1 < \dots < i_k$. On a $\varphi(df_2\dots df_{m+1}) = J\, dx_1\dots dx_m$. Si I' est le complémentaire de I alors $0 = \varphi(\omega)\, \varphi(df_{I'}) = \varphi(\omega df_{I'}) = \varphi(\pm\, a_I\, df_2\dots df_{m+1}) =$ $= \pm\, a_I J\, dx_1\dots dx_m$. Donc $a_I J = 0$ pour tout I. Puisque $J \neq 0$ sous nos hypothèses et que $A[x_1,\dots, x_m]$ est intègre, on a $a_I = 0$ pour tout I et donc $\omega = 0$.

<u>Preuve de 6</u> On utilise les notations précédentes. Soit $u \in \Omega(S)^{\Sigma_{m+1}}$.

18.2 Lemme *On a* $u = \sum_I a_I\, df_I$ *avec* $a_I \in A(x_1,\dots, x_m)^{\Sigma_{m+1}}$.

Preuve de 6 On utilise les notations précédentes. Soit $u \in \Omega(S)^{\Sigma_{m+1}}$.

A.2 Lemme *On a* $u = \sum_I a_I\, df_I$ *avec* $a_I \in A(x_1,\dots, x_m)^{\Sigma_{m+1}}$.

Si I' est le complémentaire de I, on a $udf_{I'} = \pm\, a_I\, J\, dx_1 \dots dx_m$. Or $udf_{I'} \in \Omega(S)$, donc $a_I\, J$ est un polynôme. Pour toute transposition $\tau \in \Sigma_{m+1}$, on a $\tau(a_I\, J) = a_I\, \tau(J) =$ $= -a_I\, J$ (cf. preuve de 4). Puisque caract(A) $\neq 2$, le polynôme $a_I\, J$ est divisible par J dans A[x] : $a_I\, J = J\, p_I$ pour un polynôme p_I (cf. preuve de 4). Mais $J \neq 0$ et K corps impliquent que $a_I = p_I$. Donc $a_I \in A[x]^{\Sigma_{m+1}}$ et $u \in \Omega(S^{\Sigma_{m+1}})$. ♦

Preuve du lemme A.2 Notons $F = A[f_2,\dots, f_{m+1}] \subset K = A(x_1,\dots, x_m)$. A partir de φ, on construit

$$\psi : K \otimes_F \left(\bigoplus_{j=2}^{m+1} F df_j\right) = \bigoplus_{j=2}^{m+1} K df_j \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{m} K dx_j$$

définie par

$$\psi(df_j) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i.$$

Alors ψ est inversible, car $\det \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = J \neq 0$. Ainsi $dx_i \in \mathrm{Im}\psi$ pour tout i et $u = \sum_I a_I\, df_I$ pour des $a_I \in K$. De plus, u et df_I étant invariants par Σ_{m+1}, on a $a_I \in K^{\Sigma_{m+1}}$ (multiplication par le complémentaire de I). ♦

BIBLIOGRAPHIE

[A] D. Arlettaz, Chern-Klassen von ganzzahligen und rationalen Darstellungen diskreter Gruppen, Math. Z. 187 (1984), 49-60.

[Bo] A. Borel, Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Ann. of Math 57 (1953), 115-207.

[Br] K. S. Brown, Cohomology of groups, Springer-Verlag 1982.

[C] H. Cartan, Algèbres d'Eilenberg-MacLane et homotopie, Séminaire Henri Cartan, ENS, 7e année, 2e édition (1956).

[D] A. Dold, Lectures on Algebraic Topology, Springer-Verlag 1972.

[E] L. Evens, Cohomology ring of finite groups, Trans. of AMS 101 (1961), 224-239.

[FP] Z. Fiedorowicz et S. Priddy, Homology of classical groups over finite fields and their asociated infinite loop spaces, Lecture Notes in Mathematics 674 Springer-Verlag 1978.

[F] E. M. Friedlander, Unstable K-theories of the algebraic closure of a finite field, Comment. Math. Helv. 50 (1975), 145-154.

[G] J. A. Green, The characters of the finite general linear groups, Trans. of AMS 80 (1955), 402-447.

[H] J. Huebschmann, The cohomology of $F\psi^q$. The additive structure, J. of Pure and Applied Algebra 45 (1987), 73-91.

[J] D. Jeandupeux, Sur la cohomologie entière du groupe linéaire général et du groupe linéaire spécial sur un corps fini, C. R. Acad. Sci. Paris, 308 (1989), 71-73.

[K] O. Kroll, The cohomology of the finite general linear group, J. of Pure and Applied Algebra 54 (1988), 95-115.

[L] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1970.

[Q1] D. Quillen, The Adams Conjecture, Topology 10 (1971), 67-80.

[Q2] D. Quillen, On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field, Ann. of Math. 96 (1972), 552-586.

[M] S. Maclane, Homology, Springer-Verlag 1963.

[N] M. Nakaoka, Homology of infinite symetric group, Ann. of Math. 73 (1961), 229-257.

[Se] J.-P. Serre, Homologie singulière des espaces fibrés, Ann. of Math. 63 (1951), 425-505.

[Sh] J. Shapiro, On the cohomology of the classical linear groups, Illinois J. Math. 20 (1976), 589-597.

[STY] C. Soulé, M. Tezuka, N. Yagita, Cohomological behaviour of the reduction modulo a prime of $GL_3\mathbb{Z}$, J. of Pure and Applied Algebra 32 (1976), 589-597.

[W] C. T. C. Wall, Resolutions for extensions of groups, Proc. Cambridge Philos.Soc. 57 (1961), 251-255.