C. R. Acad. Sc. Paris, t. 283 (15 novembre 1976) Série A — 879

TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE. — *Sur les groupes fondamentaux des* H-*espaces.*

Note (*) de M. **François Borel**, présentée par M. Henri Cartan.

Pour un H-espace fini X, on donne des limitations à la structure et à l'ordre du groupe fondamental π_1 (X), imposées par la structure de la cohomologie rationnelle H^* (X, Q).

1. NOTATIONS, RAPPELS ET PREMIÈRE RÉDUCTION DU PROBLÈME. — Dans cette Note, nous désignerons par H-espace un espace de Hopf ayant le type d'homotopie d'un complexe cellulaire fini. Grâce au théorème de Hopf, l'algèbre H^* (X, Q) est une algèbre extérieure $\Lambda(x_1, \ldots, x_r)$ à r générateurs de degrés respectifs $2n_1-1, \ldots, 2n_r-1$. Nous dirons alors, en accord avec la terminologie connue, que X est un H-espace de *rang* r, de *type* $(2n_1-1, \ldots, 2n_r-1)$ et de *semi-type* $(n_1, \ldots, n_r)$. Nous noterons d la *dimension* $(2n_1-1)+\ldots+(2n_r-1)$ de X.

Le groupe fondamental d'un H-espace est abélien de génération finie. De plus, si dans le type de X apparaît exactement k fois l'entier 1, on voit facilement que X a le type d'homotopie de $Y\times(S^1)^k$, où Y est un H-espace de rang $r-k$ et de groupe fondamental fini; $\pi_1(Y)$ = sous-groupe de torsion de $\pi_1(X)$. La partie libre de $\pi_1(X)$ est donc contrôlée par le type de X de façon précise, et *nous n'envisagerans par la suite que des* H-*espaces à groupe fondamental fini.*

Un premier contrôle de la structure de $\pi_1(X)$ est alors fourni par l'étude des suites spectrales de Bockstein de X. En effet, le nombre de facteurs cycliques p-primaires de $\pi_1(X)$ ne peut excéder le rang de X. Ce résultat, implicite dans les travaux de W. Browder, peut s'énoncer de façon plus précise :

THÉORÈME 1. — *Soit p premier. Le nombre de facteurs cycliques p-primaires de* π_1 (X) *est inférieur ou égal au nombre de puissances de p apparaissant dans le semi-type de* X.

Deux exemples typiques d'application du théorème 1 :

1. le groupe fondamental d'un H-espace de type (3,11) est cyclique, d'ordre une puissance de 2;

2. si le semi-type de X ne contient que des nombres pairs, π_1 (X) est un 2-groupe.

2. ANALYSE DE LA TORSION IMPAIRE. — Nous désignerons par g_p l'ordre de la p-composante de π_1 (X), pour p premier impair. Le contrôle de g_p en fonction de H^* (X, Q) est fourni par le :

THÉORÈME 2 — *a.* g_p *est un diviseur de* $n_{q_1} n_{q_2} \ldots n_{q_k}$, *où les* n_{q_j} *sont les puissances de p apparaissant dans le semi-type* $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$;

b. $\log g_p \leqq d\,[\log p/(2p-1)]$;

c. $\log g_p \leqq 2\,r \log p$.

Remarquons que b est une conséquence facile de a. La démonstration repose sur trois lemmes dont nous esquissons les démonstrations.

LEMME 1. — *Soit v un générateur de $\pi_1(X) \simeq H^2(X, Z)$ supposé cyclique d'ordre p^m. Par le théorème de structure cohomologique des H-espaces, la réduction modulo p de v est un générateur polynomial de $H^*(X, Z/p)$, d'ordre multiplicatif p^β. Alors v est également d'ordre multiplicatif p^β.*

Idée de la démonstration. — Si v est d'ordre supérieur à p^β, les suites spectrales de revêtements et de Bockstein en cohomologie modulo p permettent de détecter un générateur polynomial de degré $2p^k$ dans la cohomologie du revêtement universel $\tilde{X}$. Ceci contredit un récent résultat de J. Lin ([1]) qui s'énonce : dans la cohomologie modulo p (impair) d'un H-espace 1-connexe, les générateurs polynomiaux se trouvent en des degrés de la forme $2(1+p+\ldots+p^t)$ $(t \geqq 1)$ ou $2(1+p+\ldots+p^{k-1}+p^{k+1}+\ldots+p^t)$ $(k \geqq 1)$

LEMME 2. — *Soit v comme ci-dessus. Les puissances successives de v satisfont à la propriété suivante : Il existe une suite d'entiers*

$$0 = f_0 < f_1 < \ldots < f_m < f_{m+1}$$

tels que v^n soit d'ordre additif p^{m-i}, pour tout n avec $p^{f_i} \leqq n < p^{f_{i+1}}$.

Principe de la démonstration. — Si m désigne la multiplication de X, on a

$$m^* v = 1 \otimes v + v \otimes 1 \in H^2(X \times X, Z) \simeq Z \otimes H^2(X, Z) \oplus H^2(X, Z) \otimes Z$$

et

$$m^* v^n = \sum \binom{n}{i} v^i \otimes v^{n-i}.$$

Le lemme 1, joint aux propriétés connues des coefficients binomiaux, permet alors une démonstration de routine, par induction.

LEMME 3. — *Si $\pi_1(X)$ a un facteur direct cyclique d'ordre p^m, alors dans le semi-type de X figure la suite de nombres suivante :*

$$p^{f_1}, \ldots, p^{f_m} \quad \text{avec} \quad 0 < f_1 < \ldots < f_m.$$

Idée de la démonstration. — On considère un revêtement de X, de groupe fondamental Z/p^m. Soient v et f_i comme au lemme 2. La réduction modulo $p y_i$ de $v^{p^{f_i-1}}$ est un cycle dans la suite spectrale de Bockstein, et provient d'un élément z_i par la $(m-i+1)$-ième différentielle. On montre que $z_i y_i^{p-1}$ est un générateur (de degré $2p^{f_i}-1$) de la limite de la suite qui n'est autre que l'algèbre extérieure $(H^*(X, Z)/\text{torsion}) \otimes Z/p$.

Le théorème 2 se démontre alors par décomposition des revêtements. Il faut faire appel à la suite spectrale d'algèbres de Hopf biprimitives de W. Browder ([4]).

3. 2-TORSION DE $\pi_1(X)$. — Les résultats de J. Lin n'ont pas d'analogue pour $p = 2$, où la situation est, comme toujours, plus délicate. Dans deux cas particuliers, on peut cependant démontrer :

THÉORÈME 3. — *En l'absence de 2-torsion dans le revêtement universel $\tilde{X}$, les lemmes 1, 2, 3 et le théorème 2 sont valables pour $p = 2$.*

THÉORÈME 4. — *Si la 2-torsion de $\pi_1(X)$ est cyclique d'ordre 2^m, le semi-type de X contient 2^f avec $f \geqq m$.*

La démonstration du théorème 3 est analogue à celle du théorème 2. Le théorème 4 fait appel aux suites d'implications de Browder (3). Il constitue une version plus faible du lemme 3. Bien que le théorème 2 pour $p = 2$ n'en découle pas, la décomposition des revêtements, analysée avec précaution, permet d'en extraire le :

THÉORÈME 5. — *a. g_2 est un diviseur de la plus grande puissance entière de 2 inférieure au nombre*

$$(2\, n_{q_1} n_{q_2} \ldots n_{q_s})^{(\log g_2)^{1/2} (4 \log 2)^{-1/2}},$$

où les n_{q_j} sont les puissances de 2 apparaissant dans le semi-type $(n_1, \ldots, n_r)$;

b. $\log g_2 \leqq ((d+3)/6)^2 \log 2$.

4. APPLICATIONS. — Les applications typiques des résultats de ce travail sont des perfectionnements des applications 1 et 2 du théorème 1. Donnons quelques échantillons, sous forme de tableau :

Type de X	Multiple de l'ordre de π_1 (X)
(3, 3)	4
(3, 5)	6
(3, 7)	8
(3, 11) (G_2)	2
(3, 7, 11, ..., $4m-1$)	2*
F_4, E_7, E_8	64
E_6	960

5. REMARQUES FINALES. — Les démonstrations détaillées des résultats de cette Note feront l'objet d'une publication ultérieure. Il nous semble indiqué de mentionner le rôle considérable joué par les travaux de W. Browder [(2), (3), (4)] dans l'élaboration de ce travail. Dans un cadre plus général, citons également le résultat de Curjel-Douglas (5) : il existe un nombre fini de types d'homotopie de H-espaces dont la cohomologie rationnelle est donnée. En garantissant ainsi la finitude du problème, ces deux auteurs ont fortement motivé cet essai de classification.

(*) Séance du 13 septembre 1976.

(1) J. P. LIN, *Torsion in H-spaces*. II (à paraître).
(2) W. BROWDER, *Ann. Math.*, 74, 1961, p. 24-51.
(3) W. BROWDER, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108, 1963, p. 353-375.
(4) W. BROWDER, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 107, 1963, p. 153-176.
(5) C. R. CURJEL et R. R. DOUGLAS, *Topology*, 10, 1971, p. 385-389.

Université de Neuchâtel,
Institut de Mathématiques,
Chantemerle 20,
CH-2000 *Neuchâtel.*

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 283 (15 novembre 1976). Série A — 879

TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE. — *Sur les groupes fondamentaux des* H-*espaces.* Note (*) de M. **François Borel**, présentée par M. Henri Cartan.

Pour un H-espace fini X, on donne des limitations à la structure et à l'ordre du groupe fondamental π_1 (X), imposées par la structure de la cohomologie rationnelle H^* (X, Q).

1. NOTATIONS, RAPPELS ET PREMIÈRE RÉDUCTION DU PROBLÈME. — Dans cette Note, nous désignerons par H-espace un espace de Hopf ayant le type d'homotopie d'un complexe cellulaire fini. Grâce au théorème de Hopf, l'algèbre H^* (X, Q) est une algèbre extérieure $\Lambda(x_1, \ldots, x_r)$ à r générateurs de degrés respectifs $2n_1-1, \ldots, 2n_r-1$. Nous dirons alors, en accord avec la terminologie connue, que X est un H-espace de *rang* r, de *type* $(2n_1-1, \ldots, 2n_r-1)$ et de *semi-type* $(n_1, \ldots, n_r)$. Nous noterons d la *dimension* $(2n_1-1)+\ldots+(2n_r-1)$ de X.

Le groupe fondamental d'un H-espace est abélien de génération finie. De plus, si dans le type de X apparaît exactement k fois l'entier 1, on voit facilement que X a le type d'homotopie de $Y\times(S^1)^k$, où Y est un H-espace de rang $r-k$ et de groupe fondamental fini; π_1 (Y) = sous-groupe de torsion de π_1 (X). La partie libre de π_1 (X) est donc contrôlée par le type de X de façon précise, et *nous n'envisagerons par la suite que des* H-*espaces à groupe fondamental fini.*

Un premier contrôle de la structure de π_1 (X) est alors fourni par l'étude des suites spectrales de Bockstein de X. En effet, le nombre de facteurs cycliques p-primaires de π_1 (X) ne peut excéder le rang de X. Ce résultat, implicite dans les travaux de W. Browder, peut s'énoncer de façon plus précise :

THÉORÈME 1. — *Soit p premier. Le nombre de facteurs cycliques p-primaires de* π_1 (X) *est inférieur ou égal au nombre de puissances de p apparaissant dons le semi-type de* X.

Deux exemples typiques d'application du théorème 1 :

1. le groupe fondamental d'un H-espace de type (3,11) est cyclique, d'ordre une puissance de 2;

2. si le semi-type de X ne contient que des nombres pairs, π_1 (X) est un 2-groupe.

2. ANALYSE DE LA TORSION IMPAIRE. — Nous désignerons par g_p l'ordre de la p-composante de π_1 (X), pour p premier impair. Le contrôle de g_p en fonction de H^* (X, Q) est fourni par le :

THÉORÈME 2 — *a.* g_p *est un diviseur de* $n_{q_1} n_{q_2} \ldots n_{q_s}$, *où les* n_{q_i} *sont les puissances de p apparaissant dans le semi-type* $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$;

b. $\log g_p \leqq d\,[\log p/(2p-1)]$;

c. $\log g_p \leqq 2\,r \log p$.

Remarquons que b est une conséquence facile de a. La démonstration repose sur trois lemmes dont nous esquissons les démonstrations.

LEMME 1. — *Soit v un générateur de $\pi_1(X) \simeq H^2(X, Z)$ supposé cyclique d'ordre p^m. Par le théorème de structure cohomologique des H-espaces, la réduction modulo p de v est un générateur polynomial de $H^*(X, Z/p)$, d'ordre multiplicatif p^β. Alors v est également d'ordre multiplicatif p^β.*

Idée de la démonstration. — Si v est d'ordre supérieur à p^β, les suites spectrales de revêtements et de Bockstein en cohomologie modulo p permettent de détecter un générateur polynomial de degré $2p^k$ dans la cohomologie du revêtement universel $\tilde{X}$. Ceci contredit un récent résultat de J. Lin ([1]) qui s'énonce : dans la cohomologie modulo p (impair) d'un H-espace 1-connexe, les générateurs polynomiaux se trouvent en des degrés de la forme $2(1+p+\ldots+p^t)$ $(t \geqq 1)$ ou $2(1+p+\ldots+p^{k-1}+p^{k+1}+\ldots+p^t)$ $(k \geqq 1)$

LEMME 2. — *Soit v comme ci-dessus. Les puissances successives de v satisfont à la propriété suivante : Il existe une suite d'entiers*

$$0 = f_0 < f_1 < \ldots < f_m < f_{m+1}$$

tels que v^n soit d'ordre additif p^{m-i}, pour tout n avec $p^{f_i} \leqq n < p^{f_{i+1}}$.

Principe de la démonstration. — Si m désigne la multiplication de X, on a

$$m^* v = 1 \otimes v + v \otimes 1 \in H^2(X \times X, Z) \simeq Z \otimes H^2(X, Z) \oplus H^2(X, Z) \otimes Z$$

et

$$m^* v^n = \sum \binom{n}{i} v^i \otimes v^{n-i}.$$

Le lemme 1, joint aux propriétés connues des coefficients binomiaux, permet alors une démonstration de routine, par induction.

LEMME 3. — *Si $\pi_1(X)$ a un facteur direct cyclique d'ordre p^m, alors dans le semi-type de X figure la suite de nombres suivante :*

$$p^{f_1}, \ldots, p^{f_m} \quad \text{avec} \quad 0 < f_1 < \ldots < f_m.$$

Idée de la démonstration. — On considère un revêtement de X, de groupe fondamental Z/p^m. Soient v et f_i comme au lemme 2. La réduction modulo py_i de $v^{p^{f_i}-1}$ est un cycle dans la suite spectrale de Bockstein, et provient d'un élément z_i par la $(m-i+1)$-ième différentielle. On montre que $z_i y_i^{p-1}$ est un générateur (de degré $2p^{f_i}-1$) de la limite de la suite qui n'est autre que l'algèbre extérieure $(H^*(X, Z)/\text{torsion}) \otimes Z/p$.

Le théorème 2 se démontre alors par décomposition des revêtements. Il faut faire appel à la suite spectrale d'algèbres de Hopf biprimitives de W. Browder ([4]).

3. 2-TORSION DE $\pi_1(X)$. — Les résultats de J. Lin n'ont pas d'analogue pour $p = 2$, où la situation est, comme toujours, plus délicate. Dans deux cas particuliers, on peut cependant démontrer :

THÉORÈME 3. — *En l'absence de 2-torsion dans le revêtement universel $\tilde{X}$, les lemmes 1, 2, 3 et le théorème 2 sont valables pour $p = 2$.*

THÉORÈME 4. — *Si la 2-torsion de $\pi_1(X)$ est cyclique d'ordre 2^m, le semi-type de X contient 2^f avec $f \geqq m$.*

La démonstration du théorème 3 est analogue à celle du théorème 2. Le théorème 4 fait appel aux suites d'implications de Browder [3]. Il constitue une version plus faible du lemme 3. Bien que le théorème 2 pour $p = 2$ n'en découle pas, la décomposition des revêtements, analysée avec précaution, permet d'en extraire le :

THÉORÈME 5. — *a.* g_2 *est un diviseur de la plus grande puissance entière de 2 inférieure au nombre*

$$(2\,n_{q_1}\,n_{q_2}\ldots n_{q_s})^{(\log g_2)^{1/2}(4\log 2)^{-1/2}},$$

où les n_{q_j} *sont les puissances de 2 apparaissant dans le semi-type* $(n_1, \ldots, n_r)$;

b. $\log g_2 \leqq ((d+3)/6)^2 \log 2$.

4. APPLICATIONS. — Les applications typiques des résultats de ce travail sont des perfectionnements des applications 1 et 2 du théorème 1. Donnons quelques échantillons, sous forme de tableau :

Type de X	Multiple de l'ordre de π_1 (X)
(3, 3)	4
(3, 5)	6
(3, 7)	8
(3, 11) (G_2)	2
(3, 7, 11, ..., 4 m − 1)	2*
F_4, E_7, E_8	64
E_6	960

5. REMARQUES FINALES. — Les démonstrations détaillées des résultats de cette Note feront l'objet d'une publication ultérieure. Il nous semble indiqué de mentionner le rôle considérable joué par les travaux de W. Browder [[2], [3], [4]] dans l'élaboration de ce travail. Dans un cadre plus général, citons également le résultat de Curjel-Douglas [5] : il existe un nombre fini de types d'homotopie de H-espaces dont la cohomologie rationnelle est donnée. En garantissant ainsi la finitude du problème, ces deux auteurs ont fortement motivé cet essai de classification.

(*) Séance du 13 septembre 1976.

(1) J. P. LIN, *Torsion in* H-*spaces*. II (à paraître).
(2) W. BROWDER, *Ann. Math.*, 74, 1961, p. 24-51.
(3) W. BROWDER, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108, 1963, p. 353-375.
(4) W. BROWDER, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 107, 1963, p. 153-176.
(5) C. R. CURJEL et R. R. DOUGLAS, *Topology*, 10, 1971, p. 385-389.

Université de Neuchâtel,
Institut de Mathématiques,
Chantemerle 20,
CH-2000 *Neuchâtel.*