Publié dans Travaux de logique 19, 115-133, 2008,
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

LES DÉFINITIONS SONT-ELLES TRIVIALES : RUSSELL, POINCARÉ, LEŚNIEWSKI

François LEPAGE

Russell

En 1903, Bertrand Russell publie un ouvrage assez singulier, *The Principles of Mathematics*, que l'histoire retiendra comme un des textes fondateurs de ce mouvement philosophique qu'on baptisera logicisme. Singuliers, les *Principles* le sont sous plusieurs aspects. Le plus connu est qu'on y retrouve pour la première fois l'exposition claire et une analyse serrée de la contradiction de l'ensemble de tous les ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes.

Cette contradiction, Russell la rencontre alors que la rédaction de l'ouvrage est presque terminée. Sa présentation et son analyse font l'objet d'un court chapitre de cinq pages, le dixième de l'ouvrage, et le second appendice présente une esquisse de solution.

L'ouvrage n'est donc pas imprégné d'un esprit de crise, que l'on appellera plus tard « la crise des fondements » ; bien au contraire, le ton est serein à l'image de la prétention de la thèse : toutes les mathématiques et même une partie de la physique sont réductibles à quelques principes de logiques ou, pour le dire autrement, sont des constructions logiques qui reposent ultimement sur des primitifs entre lesquels on définit des relations.

La découverte de la contradiction (qui date en fait de 1901) et son insolubilité apparente constituent une catastrophe pour l'entreprise que justement Russell voulait mener à terme par la rédaction de cet ouvrage : la réduction des mathématiques à la logique. Cette réduction signifie, pour le Russell de cette époque, simplement que la :

> Mathématique pure est la classe de toutes les propositions de la forme "*p* implique *q*" où *p* et *q* sont des propositions contenant une ou plusieurs variables [...] et que ni *p* ni *q* ne contiennent de constantes autres que des constantes logiques. (Russell 1972, 3. C'est la première phrase du corps de l'œuvre)

Russell se retrouve donc dans une position délicate : son ouvrage a pour but de convaincre la communauté scientifique qu'une analyse rigoureuse permet d'asseoir tout l'édifice des mathématiques sur un très petit nombre de principes purement logiques et chemin faisant, il montre que ce petit nombre de principes est lui-même incohérent. Comme le lui fera remarquer Poincaré « [L]a logistique n'est plus stérile, elle engendre l'antinomie ». (1906 : 316)

Une autre particularité de cet ouvrage est l'ampleur de la tâche que Russell prétend accomplir. L'entreprise de réduction ou de reconstruction, selon le point de vue que l'on adopte, va, en effet, très loin.

Partant de principes logiques indubitables, la première partie de l'ouvrage n'est absolument pas une reconstruction de quoi que ce soit mais une analyse régressive qui conduit son auteur à la grammaire logique (le chapitre IV s'intitule *Noms propres, adjectifs et verbes*), et à l'examen minutieux des notions de classe, de fonction propositionnelle, de variable, de relation pour terminer avec la contradiction. La position philosophique de Russell pourrait être qualifiée d'hyperréalisme naïf tant son ontologie foisonne d'entité de tous ordres. Tout est, des hommes aux nombres, en passant par les constantes logiques. Le concept fondamental est celui de terme (*term*).

> Tout ce qui peut être un objet de pensée, ou avoir une occurrence dans quelque proposition vraie ou fausse, ou qui peut être compté comme un, je l'appelle un terme. C'est ainsi l'expression la plus englobante du vocabulaire philosophique. Je considérerai comme synonyme les mots unité, individu et entité. Les deux premiers mettent l'accent sur le fait que chaque terme est un, alors que le troisième provient du fait que chaque terme a de l'être, c'est-à-dire est en un certain sens. Un homme, un nombre, une classe, une relation, une chimère, ou n'importe quoi d'autre dont on peut faire mention est assurément un terme; et nier que telle ou telle chose est un terme doit toujours être faux[1]. (Russell 1972, 43)

Ce qu'il est important de retenir ici, c'est l'introduction du concept d'*Être*. Russell défend à cette époque un réalisme que l'on pourrait qualifier de débridé[2]. Dans le royaume de l'être on trouve de tout et probablement des cercles carrés, du moins jusqu'à 1905, année de la publication de « On Dénoting »[3]. Cet hyperréalisme, que Russell avouera explicitement dans son introduction à la deuxième édition des Principles, conditionne totalement sa philosophie des mathématiques :

> À l'époque où j'écrivais les « Principles », je partageais avec Frege une croyance dans la réalité platonique des nombres, qui, dans mon imagination, peuplaient le royaume intemporel de l'*Être*. C'était une croyance réconfortante que j'ai abandonnée avec regret. (Russell 1972, X)

1 Remarquons que *Les Principles* et les autres textes de Russell de cette période entretiennent une double ambiguïté voire une confusion systématique qui en rendent quelquefois l'interprétation difficile. Russell utilise un vocabulaire dont le domaine sémantique est celui des expressions pour désigner ce à quoi les expressions renvoient. Le cas de l'expression « term » est particulièrement flagrant. Le passage cité ci-dessus est particulièrement troublant. Les termes sont des entités entrant dans la composition des propositions qui sont elles mêmes quelquefois des énoncés et quelquefois ce à quoi renvoient les énoncés

2 Russell avait probablement commencé la lecture de *Meinong* dont il publia de nombreux comptes rendus assez élogieux entre 1899 et 1907. On trouvera trois de ces comptes rendus dans les *Essays in Analysis*. Voir également l'introduction de Douglas Lackey l'éditeur des *Essays* « Russell's Critique of Meinong », 17-20.

3 Repris in (1973, 103-119).

Ou encore

> Ainsi, la première pensée d'Adam doit avoir été en rapport avec le nombre 1; car aucune pensée ne peut précéder celle-là. Bref, tout savoir doit être une reconnaissance sous peine d'être illusion; l'arithmétique doit être découverte exactement au même sens où Colomb a découvert les Antilles et nous ne créons pas plus les nombres qu'il a créé les Indiens. (Russell 1972, 451)

Cette question du réalisme de Russell doit donc être prise très au sérieux, car c'est un présupposé de tout l'édifice. Cette philosophie conditionne, bien sûr, son ontologie mais aussi son épistémologie et, finalement la question qui nous préoccupe, sa conception de la nature des définitions.

Soulignons d'abord que la définition ne peut pas, pour Russell, être créative au sens où la définition aurait pour conséquence d'introduire un nouvel objet dans le monde de l'*Être* qui viendrait enrichir l'ontologie. Pour lui toute définition est nominale, en un sens que nous allons préciser.

Il y a trois passages importants des *Principles* où la question de la nature des définitions est abordée directement. Le principal de ces passages est celui où Russell définit le nombre cardinal et critique la définition par abstraction des nombres naturels qu'a proposée Peano.

Les notions de base qu'il utilise sont celles de (1) *class-concept*, que je traduirai par concept-de-classe, qui est un prédicat considéré sous l'angle de « prédicat considéré en tant que déterminant une extension de termes que l'on peut réunir en une classe » ; (2) de relation *one-one*, que je traduirai par relation biunivoque, qu'il introduit de manière standard. Chaque concept-de-classe définit une classe « et le nombre peut, par conséquent, être regardé comme une propriété de la classe »[4].

4 Le chapitre des *Principles* où Russell traite de cette question est le premier de la seconde partie qui porte le titre de Numbers. Russell ne fait aucune allusion à la contradiction auquel

(*The Principles*, 113) Il définit d'abord ce que c'est que, pour deux classes, d'avoir le même nombre.

> Deux classes ont le même nombre quand, et seulement quand, il y a une relation biunivoque dont le domaine inclut l'une des classes et qui est telle que la classe des corrélés des termes de cette classe est identique à l'autre classe. [...] Quand deux classes ont le même nombre, elles sont dites similaires. (Russell 1972, 113)

Cette définition, une variante de celle de Frege, est un peu complexe pour tenir compte de la classe vide. Après avoir remarqué que la notion de similarité est une relation réflexive, symétrique et transitive, il introduit la définition péanienne du nombre lui-même :

> Ces trois propriétés sont ainsi tenues par Peano et le sens commun pour indiquer que la relation a lieu entre deux termes, ces deux termes ont en commun une certaine propriété commune, et vice versa. C'est cette propriété commune que nous appelons leur nombre. Ceci est la définition des nombres par abstraction. (Russell 1972, 114)

Cette définition du nombre par abstraction souffre, selon Russell, d'un défaut absolument fatal, celui de ne pas déterminer de manière univoque le nombre d'une classe. En effet, n'importe quelle propriété commune à toutes les classes similaires et propre aux classes similaires, est, selon la définition par abstraction, le nombre de cette classe. La définition par abstraction détermine une classe de termes qui ont tous en commun d'être en relation avec des classes similaires et de n'être en relation qu'avec elles. Il y a deux approches possibles pour résoudre ce problème. La première consiste à considérer le nombre d'une classe comme la classe de toutes les entités qui possèdent cette propriété d'être en relation avec toutes les classes qui lui sont

conduit ce principe d'extensionalité non restreint qui vient pourtant faire l'objet du chapitre précédent.

similaires et rien qu'elles. Russell la rejette pour une raison à mon avis, sinon incorrecte, du moins obscure.

> Mais cette méthode est inutile d'un point de vue pratique, car toutes les entités, sans exception, appartiennent à chacune de ces classes, de sorte que chaque classe aura comme nombre la classe de toutes les entités de toute sorte et de toute description. (Russell 1972, 115)

La solution que propose Russell, solution qu'il prétend universelle et donc s'appliquant partout où la définition par abstraction s'applique, est la suivante :

> Cette méthode consiste à définir le nombre d'une classe comme la classe de toutes les classes similaire à la classe donnée. L'appartenance à cette classe de classes (considérée comme un prédicat) est une propriété commune de toutes les classes similaires et d'aucunes autres; de plus chaque classe de l'ensemble des classes similaires a avec cet ensemble une relation qu'il n'a avec rien d'autre et que chaque classe a avec son ensemble. (Russell 1972, 115)

Russell s'étonne même du fait que Peano ait envisagé d'adopter cette définition pour finalement la rejeter. Il semblerait que pour Peano, la classe des classes similaires à une classe donnée possède des propriétés qu'intuitivement ne possède pas le nombre que l'on cherche à définir. Et Russell s'avoue impuissant à découvrir lesquelles. Il insiste cependant que le nombre est bien une classe de classes et non un concept–de-classe qui détermine cette classe de classes. Car à une même classe de classes correspond plusieurs concepts-de-classe. La classe des classes similaires à la classe des étoiles de notre système solaire est la même que la classe des classes similaires à la classe des chefs de l'Église catholique romaine, mais les concepts-de-classe sont totalement différents.

Cette position sur la nature des nombres est vraiment fondamentale pour la philosophie des mathématiques de Russell. À la toute fin de l'ouvrage (mis à part les appendices), en fait dans sa conclusion, il revient sur l'ensemble de l'ouvrage et consacre quelques lignes à ce sujet qu'il vaut la peine de citer.

> Une définition est toujours soit la définition d'une classe soit la définition de l'unique membre d'un singleton : ceci résulte de manière nécessaire du fait sans équivoque qu'une définition peut seulement être effectuée en assignant une propriété de l'objet ou des objets à définir, c'est-à-dire en donnant une fonction propositionnelle qu'ils devront satisfaire. [...] Et partout où le principe d'abstraction est employé, c'est-à-dire où l'l'objet à définir est obtenu à partir d'une relation transitive symétrique, une certaine classe de classes sera toujours l'objet requis. (Russell 1972, 497)

Pour Russell donc, cette notion de définition corrige un défaut fondamental de la définition par abstraction qui reste définitivement ambiguë. On peut donc conclure qu'à l'époque des *Principles*, les définitions ne sont pas, pour Russell, créatives au sens où une définition ne crée pas un nouveau terme. Les termes sont immuables et éternels. Doit-on en conclure que les définitions sont stériles ? Russell voit bien le problème que cela pourrait poser. Son but ultime étant de montrer comment on peut reconstruire toutes les mathématiques à partir d'un petit nombre d'indéfinissables logiques par définitions de plus en plus complexes, il ne peut pas accepter que les définitions soient stériles, ou si elles le sont c'est dans un sens inoffensif. C'est curieusement au début de l'ouvrage qu'il aborde cette question, dans le chapitre intitulé *Denoting* qu'on devrait traduire par *De la référence* où *De la dénotation* (cela n'a rien à voir avec le concept de dénotation qui apparaîtra dans « On Denoting »)[5].

5 Cela n'a d'autant rien à voir que Russell avoue dans son introduction à la seconde édition qu'une des deux découvertes qui l'ont amené à rejeter le platonisme des *Principles* est sa théorie des descriptions. La seconde est l'abandon des classes ! Voir *The Principles*, X.

> C'est un curieux paradoxe, mystérieux pour un esprit symbolique, que les définitions, théoriquement, ne sont rien d'autre que des formulations d'abréviations symboliques, sans rapport au raisonnement, introduites pour des raisons de commodité pratiques, alors que, dans le développement d'un sujet, elles requièrent toujours un énorme effort de pensée et contiennent souvent certaines des plus grandes réussites de l'analyse. [...] Un objet peut être présent à notre esprit sans que nous connaissions quelque concept dont le dit objet serait l'instance; et la découverte d'un tel concept n'est pas un simple progrès dans la notation. La raison pour laquelle cela semble être le cas, dès que la définition est trouvée, est qu'il devient totalement inutile de se rappeler l'objet actuellement défini, car seuls les concepts sont pertinents pour nos déductions. Au moment de la découverte, la définition est perçue comme vraie parce que l'objet à définir était déjà dans nos pensées; mais comme partie de notre raisonnement ce n'est pas vrai mais purement symbolique parce que ce que le raisonnement requiert n'est pas qu'il doit impliquer cet objet mais simplement impliquer l'objet dénoté par la définition. (Russell 1972, 63)

Il est peu probable que globalement la théorie de Russell soit cohérente. Elle convient cependant très bien à son entreprise de réduction et implique une épistémologie minimale, celle de la reconnaissance de ce qui est déjà là. Et puis, la fameuse contradiction va compliquer les choses, ce dont il ne se doute pas encore.

Russell et Poincaré

Deux ans plus tard, alors qu'il est toujours dans le brouillard en ce qui concerne la contradiction, Russell publie dans *Mind* un compte rendu de la traduction en anglais de l'ouvrage de Poincaré *La science et l'hypothèse* qui va déclencher une polémique dans laquelle, sans être le centre de gravité, la question du statut des définitions, de leur stérilité ou de leur utilité sera largement débattue. Il faut dire que le ton adopté d'emblée par

Russell est celui de quelqu'un qui cherche querelle. Qu'on en juge par le début du premier paragraphe.

> Dans son ouvrage, qui consiste essentiellement d'articles antérieurs légèrement remaniés, les qualités bien connues de M. Poincaré ressortent clairement – sa concision lucide et tranchante, son air de maîtrise facile qui fait souvent apparaître sa pensée moins profonde qu'elle ne l'est et sa capacité à coordonner l'ensemble du domaine des mathématiques et de la physique en un système de pensée unifié. Mais ces qualités, aussi grandes soit-elles, sont accompagnées de ce qui ne peut qu'apparaître comme défauts à quiconque est familier de la philosophie. (Russell 1905, 412)

Ce ton annonce déjà que le débat sera un dialogue de sourds. Bien qu'ils utilisent le même vocabulaire, Russell et Poincaré ne parlent pas vraiment de la même chose.

L'édition originale de *La science et l'hypothèse* date de 1902 et la traduction anglaise de 1905. Le premier chapitre s'intitule « Sur la nature du raisonnement mathématique ». Poincaré y soutient la thèse suivante : la logique, de par le caractère tautologique de la syllogistique, est stérile.

> Le syllogisme ne peut rien nous apprendre d'essentiellement nouveau et, si tout devait sortir du principe d'identité, tout devrait pouvoir s'y ramener. Admettra-t-on que tout ces théorèmes qui remplissent tant de volumes ne soient que des manières détournées de dire que A est A ? (Poincaré 1968, 31)

Une première remarque s'impose. Lorsque Poincaré parle de la logique, il parle de la logique aristotélicienne telle que l'a transmise et transformée l'histoire. Il ne parle pas spécifiquement de la nouvelle logique, la logistique disait-on à l'époque, qui commence en gros avec Boole et à laquelle Frege et Russell vont définitivement donner des lettres de noblesse, et qui donne la prééminence au calcul propositionnel. En fait, il ne semble pas faire de distinction entre les logiciens anciens et les modernes.

Une seconde thèse que soutient Poincaré est que la science mathématique, contrairement à la logique, est créatrice, et que son pouvoir créateur repose essentiellement sur la preuve par induction (Poincaré utilise l'expression maintenant un peu désuète de raisonnement par récurrence).

> Le caractère essentiel du raisonnement par récurrence c'est qu'il contient, condensés pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogisme. (...) On voit donc que, dans les raisonnements par récurrence, on se borne à énoncer la mineure du premier syllogisme, et la formule générale qui contient comme cas particulier toutes les majeures. (Poincaré 1968, 39)

La validité du raisonnement par induction ne peut pas être démontrée. Elle provient de la puissance de l'esprit qui est capable de concevoir la répétition indéfinie d'actes similaires.

> Cette règle, inaccessible à la démonstration analytique et à l'expérience, est le véritable type du jugement synthétique *a priori*. On ne saurait d'autre part songer à y voir une convention, comme pour quelques-uns des postulats de la géométrie. (Poincaré 1968, 41)

Malgré leurs échanges parfois musclés, Russell et Poincaré n'arriveront jamais à un point d'entente tant le fossé est grand. La question de la nature des définitions va cependant dériver vers un contexte légèrement différent. Celui de l'imprédicativité de certaines définitions, de définitions de propriétés qui ne déterminent pas de classes. Russell présente en effet à la fin de 1905 un article où il propose trois voies de solution pour éliminer les paradoxes[6] ; Russell y présente trois ébauches de théories

6 « On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types ». *Proceedings of the London Mathematical Society*, Series 2, 4, 1906, 29-53. Repris in (1973, 135-164). Les références renvoient à cette dernière édition.

qui lui semblent prometteuses pour éviter la contradiction. Ce sont la (a) la théorie zigzag, (b) la théorie de la limitation de taille et (c) la théorie pas de classes.Une première chose intéressante est que Russell présente une matrice qui, selon lui, est commune à toutes les contradictions basées sur l'imprédicativité.

> Étant donnée une propriété ϕ et une fonction f telle que, si ϕ appartient à tous les membres de u, f'u existe toujours, a la propriété ϕ et n'est pas un membre de u; alors la supposition qu'il y ait une classe w de tous les termes qui ont la propriété ϕ et que f'w existe conduit à la conclusion que f'w a et n'a pas à la fois la propriété ϕ. (Russell 1973, 142)

L'enjeu pour Russell est de trouver une façon naturelle et intuitive de bloquer la fabrication de tels monstres. C'est ce que ces trois approches devraient être capables de faire. La théorie zigzag consisterait à axiomatiser la notion de fonction prédicative. Cette approche sera vite abandonnée car elle manque de principes directeurs excepté celui d'éviter la contradiction[7]. La seconde théorie utilise elle aussi la notion de prédicativité mais ce n'est plus la complexité de la propriété qui serait la source de l'imprédicativité mais la taille de la classe à définir. Cette approche lui est suggérée par le paradoxe de Burali-Forti. Là encore Russell n'ira pas très loin. C'est la troisième approche que retiendra Russell. Au moment de mettre sous presse, il fait ajouter une note :

> [*Note ajoutée le 5 février 1906*. Suite à de nouvelles investigations, je n'ai plus de doute que la théorie pas de classe fournit la solution com-

7 Voir (1973, 147).

> plète à toutes les difficultés dont il est question dans la première partie de ce texte][8]. (Poincaré 1968, 164)

Dans cet embryon de théorie, qui deviendra la théorie des types, Russell ne considère plus la fonction propositionnelle comme un primitif et choisit de plutôt utiliser la notion de proposition et de reconstruire celle de fonction propositionnelle.

Soit p une proposition et a un des ses constituants. '$p(x/a)$' dénote ce que p devient en substituant x à a pour toutes ses occurrences dans p. Nous pouvons utiliser cette notation pour affirmer des énoncés généraux comme '$p(x/a)$ est vraie pour toute valeur de x'. Cette fonction propositionnelle reconstituée est indépendante de a au sens suivant. Soit $q = p(b/a)$. Il est alors équivalent d'affirmer '$p(x/a)$ est vraie pour toute valeur de x' et '$q(x/b)$ est vraie pour toute valeur de x'. On dira que '$p(x/a)$' et '$q(x/b)$' ont la même forme. La conséquence la plus intéressante de ce virage est la suivante :

> Ici, les valeurs de x pour lesquelles $p(x/a)$ est vraie remplacent la classe des u ; mais nous ne supposons pas que ces valeurs forment collectivement une entité singulière qui serait la classe composée de ces valeurs. (Russell 1973, 155)

On est loin de l'ontologie des *Principles*. La philosophie de Russell en ce qui concerne les définitions semble avoir pris un virage assez radical. N'oublions pas que cet article a été écrit deux ou trois mois après la publication de « On Denoting ». On peut d'abord remarquer une sorte de "linguistic turn". Les définitions comme celle de $p(x/a)$ ne sont plus de simples truismes. La syntaxe du langage, et même la grammaire, prend un rôle prépondérant. La contradiction pourra être évitée parce que l'on ne s'autorise plus à postuler que l'objet u qui serait la classe des

8 Poincaré se gaussera de cette valse hésitation dans « Les mathématiques et la logique » : 306.

valeurs qui rendent *p(x/a)* vraie préexiste dans quelque royaume de l'Être. Il y a des combinaisons de symboles qui semblent faire sens et qui pourtant ne dénotent pas. Les définitions prennent donc un nouveau statut même si celui-ci n'est pas tout à fait explicite.

Poincaré attaque alors avec véhémence les théories de Russell dans un article publié dans la *Revue de métaphysique et de morale* intitulé « Les mathématiques et la logique ». Il faut dire que Russell est un peu inconstant : soutenir dans un même texte trois théories incompatibles deux à deux est un exploit que peu de philosophes ont réussi.

Ce qui est le plus intéressant dans l'article de Poincaré n'est cependant pas l'attaque des propositions de Russell mais plutôt la solution qu'il propose aux paradoxes. Une définition ne doit pas contenir de cercles vicieux, c'est-à-dire que la définition d'un ensemble d'objets *E* ne doit pas faire référence à l'ensemble *E* comme s'il préexistait à sa définition. Cela implique, si nous ne le savions déjà, que pour Poincaré les définitions ne sont pas triviales, elles créent des objets et ce, à la condition que l'on respecte certains principes comme celui du cercle vicieux.

Poincaré va très loin. Pour lui la définition même du nombre inductif n'est pas prédicative (1905-06, 309). Pour lui, la seule façon de se mettre à l'abri des contradictions, c'est de respecter des principes de non-circularité dans les définitions.

Il est intéressant d'examiner la réponse de Russell dans « Les paradoxes de la logique ».

> M. Poincaré croit que tous ces paradoxes viennent d'une espèce de cercle vicieux, et en cela je suis d'accord avec lui. Mais il ne voit pas la difficulté qu'il y a à éviter un cercle de cette sorte. J'essaierai de montrer que, si l'on veut l'éviter, il faut adopter une théorie analogue à ma « no-classes theory » ; en fait, c'est à cette fin que j'ai inventé celle-ci. (Les paradoxes de la logique, 627)

Ainsi donc, Poincaré ne verrait pas la difficulté qu'il y a à éviter le cercle vicieux. À propos de la solution que propose Richard et que Poincaré a reprise dans son article, Russell écrit :

> Il propose d'éviter ce cercle vicieux en définissant E « tous les nombres définissables par un nombre fini de mots sans mention de E ». Pour un profane, cette définition semble encore plus circulaire que la première. (Les paradoxes de la logique, 633)

Le problème pour Russell est qu'il faut caractériser de manière indépendante les contraintes que l'on doit imposer aux fonctions propositionnelles pour qu'elles donnent naissance à des classes. Il ne suffit pas de proclamer qu'il faut éviter le cercle vicieux, il faut mettre à jour les principes logiques fondamentaux qui, lorsqu'ils sont respectés, nous assurent que nous ne serons plus entraînés dans des cercles vicieux.

L'idée fondamentale de Russell est que toute proposition portant sur une classe peut se paraphraser par une proposition portant sur les valeurs de variables satisfaisant une fonction propositionnelle. Ce qu'auparavant il considérait comme la définition d'une classe définit maintenant la portée d'une fonction propositionnelle, mais celle-ci n'est pas un objet susceptible d'être une valeur de la fonction propositionnelle. En fait, Russell sera amené plus tard à une certaine réification des classes, mais elles ne pourront être valeurs de la fonction propositionnelle qui lui a donné naissance mais seulement de fonctions propositionnelles d'un type supérieur. Ce sera la *Théorie des types*. Pour l'instant, ce qui importe est qu'une réforme de la syntaxe est nécessaire pour que la possibilité de contradiction disparaisse.

> Il importe de remarquer que le principe du cercle vicieux n'est pas lui-même la solution des paradoxes de cercles vicieux, mais seulement la conséquence qu'une théorie doit fournir pour apporter une solution. Par conséquent, il faut construire une théorie des expressions contenant des variables apparentes qui fournisse comme conséquence le

> principe du cercle vicieux. C'est pour cette raison que nous avons besoin d'une reconstruction des premiers principes logiques, et que nous ne pouvons pas nous contenter de ce simple fait que les paradoxes sont dus à des cercles vicieux. (Les paradoxes de la logique, 640-641)

Russell marque là un sérieux point dans le match qui l'oppose à Poincaré. C'est la doctrine de l'univers du discours qu'il attaque. Il n'y a pas d'univers du discours. Même un énoncé comme « pour tout x, $x = x$ » n'a pas un domaine sans restriction. Le principe du cercle vicieux tel que proposé par Poincaré viole lui-même ce principe. La proposition de Russell est une réforme en profondeur des processus que l'on considère comme légitime pour introduire de *nouvelles définitions* d'objets.

On constate l'ampleur du chemin parcouru depuis les *Principles*. La richesse de l'ontologie du Russell de 1903 lui permet de se passer d'une théorie autre que triviale et naïve des définitions. La découverte de la contradiction l'a conduit à un sérieux examen de la structure du langage. Arrive alors la découverte de la théorie des descriptions qui porte un coup fatal à sa naïveté. Et c'est toute son ontologie qui sera balayée.

> Les cercles vicieux apparaissent quand une phrase contenant des mots tels que tout ou quelque (c'est-à-dire contenant une variable apparente) paraît représenter un des objets auxquels s'applique le mot tout ou quelque. Cette apparence est donc illusoire. La difficulté est qu'il y a des raisons pour croire que tout doit pouvoir signifier absolument tout : ainsi les phrases en question ne peuvent pas du tout représenter des entités[9]. (Les paradoxes de la logique, 648-649)

Poincaré ne répondra pas vraiment à ce texte de Russell. En 1909 il publie, toujours dans la *Revue de métaphysique et de morale*, son dernier texte portant sur l'imprédicativité : « La

9 Ce passage contient une erreur de traduction si on se fie au manuscrit publié dans les *Essays*. L'expression française « phrase » qui apparaît deux fois est une mauvaise traduction de l'expression anglaise « phrase ».

logique de l'infini ». Il y reprend méticuleusement sa théorie du cercle vicieux en l'appliquant aux classifications. On ne peut classer des objets qui n'existent pas encore. Or « toute définition est une classification » (1909 : 402). Il ne reprend pas le combat se contentant de répéter son point de vue. Il met même un terme la discussion en répétant sa profession de foi à propos du rôle de l'intuition.

> M. Russell me dira sans doute qu'il ne s'agit pas de psychologie, mais de logique et d'épistémologie ; et moi je serai conduit à répondre qu'il n'y a pas de logique et d'épistémologie indépendante de la psychologie ; et cette profession de foi clora probablement la discussion parce qu'elle mettra en évidence une irrémédiable divergence de vues. (Poincaré 1909, 414)

Russell, Poincaré et Leśniewski

Leśniewski n'a probablement jamais entendu parler de cette querelle entre Russell et Poincaré. Pourtant, la solution logico-philosophique la plus intéressante émergera de son œuvre. En effet, on peut introduire dans l'ontologie, suivant la présentation que Sobociński (1984, 15) fait de l'analyse de Leśniewski, l'équivalent de la notion de classe distributive et de la notion « d'être élément de cette classe distributive » de la manière suivante :

$[AB]{:}B\varepsilon el(A).\equiv.(\exists a).A\varepsilon Kl(a).B\varepsilon a$

$A\varepsilon Kl(a)$ signifie « A est l'ensemble des objets a » et
$B\varepsilon el(A)$ signifie « b est élément de l'ensemble A »

Les deux postulats qui étaient universellement acceptés avant la découverte de la contradiction peuvent s'exprimer formellement de la manière suivante :

A1 $[a].[\exists A].A\varepsilon Kl(a)$
A2 $[ABab].A\varepsilon Kl(a).A\varepsilon Kl(b).B\varepsilon b.\supset.B\varepsilon a$

Ces deux postulats, comme le montre Sobociński conduisent effectivement à la contradiction, ce qui n'est pas étonnant. Partant de la définition

$$[A]\therefore A\varepsilon{*}.\equiv:A\varepsilon A:[a]:A\varepsilon Kl(a).\supset.\sim(A\varepsilon A)$$

où $A\varepsilon{*}$ peut être interprété comme signifiant « A est une classe qui n'est pas élément d'elle-même », on montre les deux théorèmes suivants qui sont contradictoires :

$$[A].\equiv:\sim A\varepsilon Kl(*) \text{ et } [\exists A].\equiv.A\varepsilon Kl(*)$$

En fait, ces deux postulats sont faux dans le système de Leśniewski lorsque les « classes » sont entendues au sens collectif. Leur apparente vérité intuitive repose sur une confusion, sur un usage ambigu du terme « classe ». Ce terme est utilisé pour désigner à la fois la classe comme une multiplicité – classe distributive – et la classe comme unité – la classe collective.

Paradoxalement, ce résultat n'est pas une conséquence des systèmes de Leśniewski : il en est le point de départ. C'est l'examen de la contradiction qui l'amènera à développer des systèmes dont les postulats non seulement sont libres de contradiction mais sont également ouverts, jamais totalement déployés. Les solutions de Russell et de Zermelo apparaissent alors comme *ad hoc* et superficielles et ne constituent pas une précaution contre l'apparition d'autres contradictions.

> Le paradoxe ne sera résolu que lorsque nous serons convaincus que nous avons utilisés soit des règles de raisonnement incorrectes, soit ou des présuppositions fausses dans la construction du paradoxe [...] (Sobociński 1984, 12)

Leśniewski consacrera sa vie à l'élaboration de systèmes fondationnels. La réalisation de ce programme ne sera possible que par l'introduction du concept de définition-thèse qui sera la pierre angulaire de son œuvre. Ces définitions-thèses de par leurs constructions mêmes, nous assurent que le système est libre de toute contradiction. Comme le remarque Luschei :

> La "pureté" sémantique et le risque de paradoxes exigent que toute définition d'une constante nouvelle, bien qu'elle ne soit jamais une proposition relative à une thèse antérieure, soit assertée comme une thèse identique à elle-même et précédant n'importe quelle thèse ultérieure du système. (The Logical Systems : 222-223, cité par Peeters 2006, 44)

Les définitions ne sont plus triviales mais créatives. Bien plus, on montre aisément que le système ne peut conduire à des contradictions. Les définitions deviennent ainsi le véritable fondement de la structure des systèmes logiques.

Pourquoi les systèmes de Leśniewski n'ont-ils pas reçu l'accueil qu'il méritait par la communauté des logiciens. Il est difficile de répondre à ce genre de questions. Une des raisons est probablement qu'il est arrivé trop tard, à une époque où l'on admettait que la crise des fondements était terminée et où d'autres défis étaient relevés. Une autre raison est sans doute que la présentation des systèmes de Leśniewski était assez hermétique. Comme le remarque Sobociński :

> Ce système, qui diffère de bien des façons des systèmes contemporains, est non contradictoire (ce qui se prouve facilement) et constitue une base adéquate pour la construction des mathématiques contemporaines. Il n'est toutefois pas facile de se faire une impression générale du système, pas plus qu'il ne l'est de pénétrer la psychologie qui est à son origine – de ce que Leśniewski pensait précisément du paradoxe de Russell. (Sobociński 1984, 11)

Près de soixante-dix ans après sa disparition, ce n'est toujours pas facile.

Références bibliographiques

DETLEFSEN M. (1992). Poincaré against the logicians. *Synthese 90*, 349-378.

HEINZMANN G. (1985). *Entre Intuition et analyse. Poincaré et le concept de prédicativité*. Paris : Blanchard.

HEINZMANN G. (1986). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano. Textes de la discussion (1906-1912) sur les fondements des mathématiques : des antinomies à la prédicativité*. Paris : Blanchard.

PEETERS M. (2006). *Introduction à l'œuvre de S. Lesnieeski*. Fasc. IV: *L'œuvre de jeunesse*. Unviersité de Neuchâtel : Travaux de logique.

POINCARÉ H. (1905-06). Les mathématiques et la logique, *Revue de métaphysique et de morale 13*, 815-835 ; *14* 17-34 et 294-317.

POINCARÉ H. (1909). La logique de l'infini. *Revue de métaphysique et de morale 17*, 461-482.

POINCARÉ H. (1968). *La science et l'hypothèse*. Paris : Flammarion.

RUSSELL B. (1905). Review of Science and Hypothesis by H. Poincaré. *Mind 14*.55, 412-418.

RUSSELL B. (1972). *The Principles of Mathematics*. London : George Allen & Unwin Ltd [1903].

RUSSELL B. (1973). *Essays in Analysis*. D. Lackey ed., London : George Allen & Unwin Ltd.

RUSSELL B. Les paradoxes de la logique. *Revue de métaphysique et de morale t. XIV*, 627-650. La version originale en anglais a été publiée dans les *Essays in Analysis*, 190-214.

SOBOCINSKI B. (1984). Lesniewski's analysis of Russell's paradox. In : Jan T. Srzednicki, V.F. Rickey (eds), J. Czelakowski (ass. ed.), *Lesniewski's systems: ontology and mereology*. La Haye : M. Nijhof, 11-44