Publié dans Travaux de logique 16, 73-137, 2005,
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

Une construction de l'arithmétique de Peano

Préambule

La liste ordonnée de définitions et de thèses qui suit constitue une construction de l'arithmétique de Peano sur la base de l'Ontologie de S. Leśniewski, augmentée d'un axiome de l'infini. Bien que nous ayons choisi de présenter les preuves dans le style aisé de la déduction naturelle de Fitch, il est attendu du lecteur une connaissance élémentaire de la logique de Leśniewski[1]. La présentation commence par un court récapitulatif des définitions et thèses générales, connues de la littérature et nécessaires à la construction. Viennent ensuite six sections allant de la définition et l'examen de la relation d'équinuméricité à la preuve des cinq propositions de Peano. Nous avons jugé inutile de reprendre les définitions explicites des opérations arithmétiques élémentaires puisque leur inscription, à la suite des propositions de Peano, se serait présentée de manière identique à celle que l'on trouve dans la thèse de doctorat de J. T. Canty (1967: 129-147)[2].

Afin de guider le lecteur indiquons que le cœur du développement se situe dans la définition *D2.2* de *nombre cardinal*. Celle-ci s'appuie sur une version paramétrée (*D2.1*) de la relation d'équinuméricité entre noms, dont dérive un analogue leśniewskien du célèbre *Principe de Hume* (HP, *T2.1*). Figurant à titre de thèse, HP n'a pas ici l'importance qu'il a dans les travaux des néo-frégéens[3] et il convient de

[1] On se reportera à la présentation détaillée de Miéville (2001-04), ou alors à celle succincte de l'Ontologie dans Joray (2001: chap. III).

[2] On trouve en outre une présentation de la méthode d'explicitation des définitions récursives d'opérations arithmétiques s'appuyant sur l'exemple de l'addition dans Joray (2002: 15-17).

[3] Voir, dans la bibliographie, les références relatives à Boolos, Wright et Hale.

remarquer qu'il ne constitue pas un principe d'abstraction au sens de Frege car l'identité du membre gauche de la biconditionnelle n'est pas une identité objectuelle comme chez Frege, mais une identité extensionnelle entre prédicats *s/n* (au sens de la définition *D0.11*). Cette spécificité explique pourquoi la présence de HP ne suffit pas, comme chez les néo-frégéens, à exclure les modèles finis. Les nombres cardinaux ne sont pas ici des objets à compter comme éléments de l'univers et cela nous conduit à recourir à un axiome de l'infini[4].

En adoptant une définition de *nombres naturels* comme *cardinaux inductifs* (*D5.4*), ainsi qu'une définition de *successeur* (*D5.2*) ne faisant pas appel à l'addition, nous avons simplifié de manière significative la preuve des propositions de Peano. De plus, la dépendance de ces propositions vis-à-vis de l'axiome de l'infini s'en trouve clarifiée. Dans les *Principia Mathematica*, en effet, seule la proposition III (*des nombres ayant même successeur sont identiques*) tombe sous cette dépendance. Nous avons montré (Joray 2002: 14-15) que la proposition II (*le successeur d'un nombre est un nombre*) doit tomber aussi sous la dépendance de l'axiome de l'infini si l'on veut éviter la signification hautement artificielle qu'elle endosse chez Whitehead et Russell: *pour chaque nombre, il existe potentiellement un type dans lequel un successeur de ce nombre peut être trouvé.*

Pour terminer, indiquons encore nos conventions typographiques: définitions et thèses sont respectivement notées par les lettres *T* et *D* suivies d'un numéro indiquant leurs section et ordre d'inscription (par exemple *D3.9*: section 3, 9ᵉ définition); les thèses dont le numéro se termine par un chiffre précédé d'un tiret sont des lemmes (par exemple *T1.12-2*: deuxième lemme en vue de la preuve de *T1.12*). La présence d'un astérisque (**T6.3*) indique que la thèse en question est dépendante de l'axiome de l'infini. Enfin la mention «*aux*» associée à une définition signifie que la définition en question est *auxilliaire* en ce sens qu'elle n'est inscrite que dans le but de permettre ou de simplifier la preuve de la thèse, ou des thèses qui suivent.

[4] Que, dans la perspective néo-frégéenne, la présence de HP suffise à exclure les modèles finis constitue à notre sens un défaut dans la mesure ou son expression présente un caractère hybride: à la fois définition implicite de *nombre cardinal* et axiome de l'infini.

0. Ontologie générale

Axiome de l'Ontologie (Ax_o) :
$\lfloor ab \rfloor \lceil a\,\varepsilon\, b \equiv . \lfloor \exists c \rfloor \lceil c\,\varepsilon\, a \rceil \wedge \lfloor dc \rfloor \lceil d\,\varepsilon\, a \ \wedge\ c\,\varepsilon\, a. \supset d\,\varepsilon\, c \rceil \wedge \lfloor d \rfloor \lceil d\,\varepsilon\, a \supset d\,\varepsilon\, b \rceil \rceil$

$T0.1$: $\lfloor a \rfloor \lceil \lfloor \exists b \rfloor \lceil a\,\varepsilon\, b \supset a\,\varepsilon\, a \rceil \rceil$

$T0.2$: $\lfloor ab \rfloor \lceil a\,\varepsilon\, b \supset a\,\varepsilon\, a \rceil$

$T0.3$: $\lfloor abc \rfloor \lceil a\,\varepsilon\, b \ \wedge\ b\,\varepsilon\, c. \supset a\,\varepsilon\, c \rceil$

$T0.4$: $\lfloor abc \rfloor \lceil a\,\varepsilon\, b \ \wedge\ b\,\varepsilon\, c. \supset b\,\varepsilon\, a \rceil$

$D0.1$: $\lfloor ab \rfloor \lceil \{a \subset b\} \equiv \lfloor c \rfloor \lceil c\,\varepsilon\, a \supset c\,\varepsilon\, b \rceil \rceil$ Dfs [s/nn]
Inclusion entre noms

$D0.2$: $\lfloor R \rfloor \lceil Refl(R) \equiv \lfloor a \rfloor \lceil \lfloor \exists b \rfloor \lceil R\{ab\} \vee R\{ba\} \rceil \supset R\{aa\} \rceil \rceil$
Dfs[s/(s/nn)]

$D0.3$: $\lfloor R \rfloor \lceil Sym(R) \equiv \lfloor ab \rfloor \lceil R\{ab\} \supset R\{ba\} \rceil \rceil$ Dfs[s/(s/nn)]

$D0.4$: $\lfloor R \rfloor \lceil Trans(R) \equiv \lfloor abc \rfloor \lceil R\{ab\} \ \wedge\ R\{bc\}. \supset R\{ac\} \rceil \rceil$
Dfs[s/(s/nn)]

$T0.5$: $Trans(\varepsilon)$

$D0.5$: $\lfloor R \rfloor \lceil Equi(R) \equiv .Refl(R) \ \wedge\ Sym(R) \ \wedge\ Trans(R) \rceil$
Dfs[s/(s/nn)]

$D0.6$: $\lfloor ab \rfloor \lceil \{a \approx b\} \equiv . \lfloor c \rfloor \lceil c\,\varepsilon\, a \equiv c\,\varepsilon\, b \rceil \rceil$ Dfs[s/nn]
Identité extensionnelle

$T0.6$: $Equi(\approx)$

$D0.7$: $\lfloor ab \rfloor \lceil \{a = b\} \equiv . a\,\varepsilon\, b \ \wedge\ b\,\varepsilon\, a \rceil$ Dfs[s/nn]
Identité singulière entre noms

$T0.7$: $Equi(=)$

$D0.8$: $\lfloor a \rfloor \lceil !\{a\} \equiv \lfloor \exists b \rfloor \lceil b\,\varepsilon\, a \rceil \rceil$ Dfs[s/n]
Etre un nom qui dénote

$D0.9 : \lfloor a \rfloor \lceil Sin\{a\} \equiv a\,\varepsilon\, a \rceil$ Dfs[s/n]
Etre un nom singulier

$T0.8 : \lfloor ab \rfloor \lceil a\,\varepsilon\, b \supset Sin\{a\} \rceil$

$D0.10 : \lfloor a \rfloor \lceil Emp\{a\} \equiv \sim \lfloor \exists b \rfloor \lceil b\,\varepsilon\, a \rceil \rceil$ Dfs[s/n]
Etre un nom vide

$T0.9 : \lfloor ab \rfloor \lceil Emp\{a\} \ \wedge \ Emp\{b\}. \supset a \approx b \rceil$

1	ab	$Emp\{a\} \ \wedge \ Emp\{b\}$	hyp
2		$c\,\varepsilon\, a$	hyp
3		$\lfloor \exists c \rfloor \lceil c\,\varepsilon\, a \rceil$	2,$\exists$i
4		$Emp\{a\}$	1,$\wedge$e,reit
5		$\sim \lfloor \exists c \rfloor \lceil c\,\varepsilon\, a \rceil$	4,D0.10
6		$c\,\varepsilon\, b$	4,5,$\sim$e
7		$c\,\varepsilon\, a \supset c\,\varepsilon\, b$	2-6,$\supset$i
8		$c\,\varepsilon\, b \supset c\,\varepsilon\, a$	*idem* 2-6,$\supset$i
9		$a \approx b$	7,8,$\equiv$i, D0.6
	$Th.$		1-9,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$D0.11 : \lfloor \varphi\psi \rfloor \lceil [\varphi \approx \psi] \equiv \lfloor a \rfloor \lceil \varphi\{a\} \equiv \psi\{a\} \rceil \rceil$ Dfs[s/(s/n)(s/n)]
Identité extensionnelle entre prédicats de catégorie s/n

$D0.12 : \lfloor \varphi \rfloor \lceil ![\varphi] \equiv \lfloor \exists a \rfloor \lceil \varphi\{a\} \rceil \rceil$ Dfs[s/(s/n)]
Être une propriété non vide

$D0.13 : \lfloor R \rfloor \lceil Obj(R) \equiv \lfloor ab \rfloor \lceil R\{ab\} \supset .Sin\{a\} \ \wedge \ Sin\{b\} \rceil \rceil$
Dfs[s/(s/nn)]
Etre une relation nominale objectuelle

$T0.10 : Obj(=)$

1	ab	$a = b$	hyp
2		$a\,\varepsilon\, b \ \wedge \ b\,\varepsilon\, a$	1,D0.7
3		$a\,\varepsilon\, a$	2,$\wedge$e,T0.2
4		$b\,\varepsilon\, b$	2,$\wedge$e,T0.2
5		$Sin\{a\} \wedge Sin\{b\}$	3,4,D0.9,$\wedge$i
	$Th.$		1-5,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i,D0.13

$D0.14 : \lfloor a \rfloor \lceil a\,\varepsilon \wedge \equiv .\, a\,\varepsilon\, a \wedge \sim (a\varepsilon\, a) \rceil$ Dfn[n]
Nom vide

$T0.11 : Emp\{\wedge\}$

1	$\lfloor \exists b \rfloor \lceil b\,\varepsilon \wedge \rceil$	hyp
2	$b \quad b\,\varepsilon \wedge$	hyp.
3	$b\,\varepsilon\, b \wedge \sim (b\,\varepsilon\, b)$	2,D0.14
4	$\sim \lfloor \exists b \rfloor \lceil b\,\varepsilon \wedge \rceil$	3,$\sim$e
5	$\sim \lfloor \exists b \rfloor \lceil b\,\varepsilon \wedge \rceil$	1,2-4, $\exists$e
	Th.	1,1,5,$\sim$i,D0.10

$T0.12 : \lfloor a \rfloor \lceil \sim (a\,\varepsilon \wedge) \rceil$

1	$a \quad a\,\varepsilon \wedge$	hyp
2	$a\,\varepsilon\, a$	1,D0.14
3	$\sim (a\,\varepsilon\, a)$	1,D0.14
4	$\sim (a\,\varepsilon \wedge)$	1,2,3,$\sim$i
	Th.	1-4,$\lfloor\rfloor$i

$D0.15 : \lfloor a \rfloor \lceil a\,\varepsilon \vee \equiv a\,\varepsilon a \rceil$ Dfn[n]
Nom universel

$D0.16 : \lfloor abc \rfloor \lceil a\,\varepsilon\, \{b \cup c\} \equiv\!:\, a\,\varepsilon\, a \wedge .\, a\,\varepsilon\, b \vee a\,\varepsilon\, c \rceil$ Dfn[n/nn]
Union nominale

$T0.13 : \lfloor a \rfloor \lceil a \approx \{a \cup \wedge\} \rceil$

1	$a \mid c$	$c \,\varepsilon\, a$	hyp
2		$c \,\varepsilon\, c$	1,T0.2
3		$c\varepsilon \wedge . \vee . c \,\varepsilon\, a$	1,∨i
4		$c\varepsilon \{\wedge \cup a\}$	2,3,D0.16
5		$c\varepsilon \{\wedge \cup a\}$	hyp
6		$c\varepsilon \wedge . \vee . c \,\varepsilon\, a$	5,D0.16
7		$\sim (c\,\varepsilon \wedge)$	T0.12
8		$c \,\varepsilon\, a$	6,7,∨e
9		$c \,\varepsilon\, a \equiv c\,\varepsilon \{\wedge \cup a\}$	1-4,5-8,≡i
10		$\lfloor c \rfloor \lceil c \,\varepsilon\, a \equiv c\,\varepsilon \{\wedge \cup a\} \rceil$	1-9,⌊⌋i
11		$a \approx \{\wedge \cup a\}$	10,D0.6
	Th.		1-11,⌊⌋i

$D0.17 : \lfloor abc \rfloor \lceil a \,\varepsilon \{b \cap c\} \equiv . a \,\varepsilon\, a \;\wedge\; a \,\varepsilon\, b \;\wedge\; a \,\varepsilon\, c \rceil$ Dfn[n/nn]
Intersection nominale

$D0.18 : \lfloor abc \rfloor \lceil a \,\varepsilon \{b - c\} \equiv . a \,\varepsilon\, a \;\wedge\; a \,\varepsilon\, b \;\wedge\; \sim (a \,\varepsilon\, c) \rceil$ Dfn[n/nn]
Complément nominal

1. Equinuméricité

$D1.1 : \lfloor R \rfloor \lceil OneOne(R) \equiv \lfloor abc \rfloor \lceil R\{ac\} \wedge R\{bc\}. \vee .R\{ca\} \wedge R\{cb\} : \supset a\,\varepsilon\,b \rceil \rceil$ Dfs[s/(s/nn)]

Etre une relation bi-univoque entre noms singuliers

$T1.1 : \lfloor R \rfloor \lceil OneOne\{R\} \supset Obj(R) \rceil$

1	R | $OneOne(R)$	hyp
2	| ab | $R\{ab\}$	hyp
3	| | $R\{ab\} \wedge R\{ab\}. \vee .R\{ba\} \wedge R\{ba\} :$	
	| | $\supset a\,\varepsilon\,a$	1,D1.1,a/a,b/a,c/b
4	| | $a\,\varepsilon\,a$	2,3,⊃e
5	| | $Sin\{a\}$	4,D0.9
6	| | $R\{ba\} \wedge R\{ba\}. \vee .R\{ab\} \wedge R\{ab\} :$	
	| | $\supset b\,\varepsilon\,b$	1,D1.1,a/b,b/b,c/a
7	| | $b\,\varepsilon\,b$	2,6,⊃e
8	| | $Sin\{b\}$	7,D0.9
9	| | $Sin\{a\} \wedge Sin\{b\}$	5,8,∧i
10	| $\lfloor ab \rfloor \lceil R\{ab\} \supset .Sin\{a\} \wedge Sin\{b\} \rceil$	2,9,⌊⌋i
	$Th.$	1-10,⊃i,⌊⌋i

$T1.2 : OneOne(=)$

1	abc | $a = c \wedge b = c. \vee .c = a \wedge c = b$	hyp
2	| | $a = c \wedge b = c$	hyp
3	| | $a = b$	2, T0.7
4	| | $c = a \wedge c = b$	hyp
5	| | $a = b$	4, T0.7
6	| $a = b$	1,2-3,4-5,∨e
7	| $a\,\varepsilon\,b$	6,D0.7
	$Th.$	1-7,⊃i,⌊⌋i,D1.1

$D1.2 : \lfloor Ra \rfloor \lceil Dom(R)\{a\} \equiv \lfloor b \rfloor \lceil \lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{bc\} \rceil \equiv b\,\varepsilon\,a \rceil \rceil$ Dfs[(s/n)/(s/nn)]

Etre le domaine d'une relation de catégorie s/nn

$D1.3 : \lfloor Ra \rfloor \lceil Cdom\{a\}(R) \equiv \lfloor b \rfloor \lceil \lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{cb\} \rceil \equiv b \,\varepsilon\, a \rceil \rceil$
Dfs[(s/n)/(s/nn)]
Etre le co-domaine d'une relation de catégorie s/nn

$D1.4 : \lfloor ab \rfloor \lceil a \infty b \equiv \lfloor \exists R \rfloor \lceil OneOne(R) \wedge Dom(R)\{a\} \wedge Cdom(R)\{b\} \rceil \rceil$ Dfs[s/nn]
Etre dans une relation d'équinuméricité pour des noms

$D1.5(aux) : \lfloor abc \rfloor \lceil =\langle a \rangle\{bc\} \equiv .b \,\varepsilon\, a \;\wedge\; b = c \rceil$ Dfs [(s/nn)/n]

$T1.3 - 1 : \lfloor abc \rfloor \lceil =\langle a \rangle\{bc\} \supset b = c \rceil$ D1.5

$T1.3 - 2 : \lfloor a \rfloor \lceil OneOne(=\langle a \rangle) \rceil$

1	ab	$=\langle d \rangle\{ac\} \wedge\; =\langle d \rangle\{bc\}. \vee .=\langle d \rangle\{ca\} \wedge\; =\langle d \rangle\{cb\}$	hyp
2	cd	$a = c \;\wedge\; b = c. \vee .c = a \;\wedge\; c = b$	1,T1.3-1
3		$a \,\varepsilon\, b$	2,T1.2
	$Th.$		1-3,D1.1

$T1.3 - 3 : \lfloor a \rfloor \lceil Dom(=\langle a \rangle)\{a\} \rceil$

1	a	b	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil =\langle a \rangle\{bc\} \rceil$	hyp
2			c $=\langle a \rangle\{bc\}$	hyp
3			$b \,\varepsilon\, a \;\wedge\; b = c$	2,D1.5
4			$b \,\varepsilon\, a$	3,$\wedge$e
5			$b \,\varepsilon\, a$	1,2-4,$\exists$e
6			$b \,\varepsilon\, a$	hyp
7			$b \,\varepsilon\, b$	6,T0.2
8			$b = b$	7,D0.7
9			$b \,\varepsilon\, a \;\wedge\; b = b$	6,8,$\wedge$i
10			$=\langle a \rangle\{bb\}$	9,D1.5
11			$\lfloor \exists c \rfloor \lceil =\langle a \rangle\{bc\} \rceil$	10,$\exists$i,b/c
12		$\lfloor \exists c \rfloor \lceil =\langle a \rangle\{bc\} \rceil \equiv b \,\varepsilon\, a$		1-5,6-11,$\equiv$i
13		$\lfloor b \rfloor \lceil \lfloor \exists c \rfloor \lceil =\langle a \rangle\{bc\} \rceil \equiv b \,\varepsilon\, a \rceil$		1-12,$\lfloor\rfloor$i
	$Th.$			1-13,$\lfloor\rfloor$i,D1.2

$T1.3-4 : \lfloor a \rfloor \lceil Cdom(=\langle a \rangle)\{a\} \rceil$

1	a	b		$\lfloor \exists c \rfloor \lceil =\langle a \rangle\{cb\} \rceil$	hyp
2			c	$=\langle a \rangle\{cb\}$	hyp
3				$c \,\varepsilon\, a \ \wedge\ c = b$	2,D0.7
4				$b \,\varepsilon\, c$	3,D0.7
5				$b \,\varepsilon\, a$	3,4,T0.3
6				$b \,\varepsilon\, a$	1,2-5,∃e
7				$b \,\varepsilon\, a$	hyp
8				$b \,\varepsilon\, b$	T0.2
9				$b = b$	7,D0.7
10				$b \,\varepsilon\, a \ \wedge\ b = b$	7,9,∧i
11				$=\langle a \rangle\{bb\}$	10,D1.5
12				$\lfloor \exists c \rfloor \lceil =\langle a \rangle\{bc\} \rceil$	11,∃i b/c
13				$\lfloor \exists c \rfloor \lceil =\langle a \rangle\{bc\} \rceil \equiv b \,\varepsilon\, a$	1-6,7-12,≡i
14				$\lfloor b \rfloor \lceil \lfloor \exists c \rfloor \lceil =\langle a \rangle\{bc\} \rceil \equiv b \,\varepsilon\, a \rceil$	1-13,⌊⌋i
				Th.	1-14,⌊⌋i,D1.2

$T1.3 : \lfloor a \rfloor \lceil a \infty a \rceil$

1	a	$OneOne(=\langle a \rangle)$	T1.3-2
2		$Dom(=\langle a \rangle)\{a\}$	T1.3-3
3		$Cdom(=\langle a \rangle)\{a\}$	T1.3-4
4		$\lfloor \exists R \rfloor \lceil OneOne(R) \ \wedge\ Dom(R)\{a\} \ \wedge$	
		$CDom(R)\{b\} \rceil \rceil$	1,2,3,∧i,∃i =⟨ a⟩/R
5		$a \infty a$	4,D1.4
		Th.	1-5,⌊⌋i

$D1.6 : \lfloor Rab \rfloor \lceil Rec\langle R \rangle\{ab\} \equiv R\{ba\}) \rceil$ Dfs[(s/nn)/(s/nn)]

$T1.4 - 1 : \lfloor R \rfloor \lceil OneOne(R) \supset OneOne(Rec\langle R \rangle) \rceil$

1	R | $\lfloor abc \rfloor \lceil OneOne(R) \rceil$	hyp
2	$\lfloor abc \rfloor \lceil R\{ac\} \wedge R\{bc\}. \vee .R\{ca\} \wedge R\{cb\} :\supset a \varepsilon b \rceil$	1,D1.1
3	$Rec\langle R \rangle\{ac\} \wedge Rec\langle R \rangle\{bc\}. \vee .$	
	$Rec\langle R \rangle\{ca\} \wedge Rec\langle R \rangle\{cb\}$	hyp
4	$Rec\langle R \rangle\{ac\} \wedge Rec\langle R \rangle\{bc\}$	hyp
5	$R\{ca\} \wedge R\{cb\}$	4,D1.6
6	$R\{ac\} \wedge R\{bc\}. \vee .R\{ca\} \wedge R\{cb\}$	5,∨i
7	$a \varepsilon b$	2,6,⊃e
8	$Rec\langle R \rangle\{ca\} \wedge Rec\langle R \rangle\{cb\}$	hyp
9	$Rec\{ac\} \wedge R\{bc\}$	8,D1.6
10	$R\{ac\} \wedge R\{bc\}. \vee .R\{ca\} \wedge R\{cb\}$	9,∨i
11	$a \varepsilon b$	2,10,⊃e
12	$a \varepsilon b$	2,4-7,8-11,∨e
13	$\lfloor abc \rfloor \lceil Rec\langle R \rangle\{ac\} \wedge Rec\langle R \rangle\{bc\}. \vee .$	
	$Rec\langle R \rangle\{ca\} \wedge Rec\langle R \rangle\{cb\} :\supset a \varepsilon b \rceil$	3-12,⊃i,⌊⌋i
15	$OneOne(Rec\langle R \rangle)$	13,D1.1
	$Th.$	1-14,⊃i,⌊⌋i

$T1.4-2 : \lfloor Ra \rfloor \lceil Dom(R)\{a\} \supset Cdom(Rec\langle R\rangle)\{a\} \rceil$

1	Ra $Dom(R)\{a\}$	hyp
2	$\lfloor a \rfloor \lceil \lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{bc\} \rceil \equiv b\,\varepsilon\, a \rceil$	1,D1.2
3	b $\lfloor \exists c \rfloor \lceil Rec\langle R\rangle\{cb\} \rceil$	hyp
4	c $Rec\langle R\rangle\{cb\}$	hyp
5	$R\{bc\}$	4,D1.6
6	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{bc\} \rceil$	5,∃i
7	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{bc\} \rceil$	3,4-6,∃e
8	$b\,\varepsilon\, a$	2,7,≡e
9	$b\,\varepsilon\, a$	hyp
10	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{bc\} \rceil$	2,9,≡e
11	c $R\{bc\}$	hyp
12	$Rec\langle R\rangle\{cb\}$	11,D1.6
13	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil Rec\langle R\rangle\{cb\} \rceil$	12,∃i
14	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil Rec\langle R\rangle\{cb\} \rceil$	10,11-13,∃e
15	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil Rec\langle R\rangle\{cb\} \rceil \equiv b\,\varepsilon\, a$	3-8,9-14,≡i
16	$\lfloor b \rfloor \lceil \lfloor \exists c \rfloor \lceil Rec\langle R\rangle\{cb\} \rceil \equiv b\,\varepsilon\, a \rceil$	3-15,⌊⌋i
17	$Cdom(Rec\langle R\rangle)\{a\}$	16,D1.3
	$Th.$	1-17,⊃i,⌊⌋i

$T1.4-3 : \lfloor Ra \rfloor \lceil Cdom(R)\{a\} \supset Dom(Rec\langle R\rangle)\{a\} \rceil$ *idem* $T1.4$-2

$T1.4 : Sym(\infty)$

1	ab	$a\infty b$	hyp
2		$\lfloor\exists R\rfloor\lceil OneOne(R) \;\wedge\; Dom(R)\{a\} \;\wedge\; Cdom(R)\{b\}\rceil$	1,D1.4
3		R | $OneOne(R) \;\wedge\; Dom(R)\{a\} \;\wedge\; Cdom(R)\{b\}$	hyp
4		$OneOne(Rec\langle R\rangle)$	3,∧e,T1.4-1
5		$Cdom(Rec\langle R\rangle)\{a\}$	3,∧e,T1.4-2
6		$Dom(Rec\langle R\rangle\{b\}$	3,∧e,T1.4-3
7		$OneOne(Rec\langle R\rangle) \;\wedge\; Cdom(Rec\langle R\rangle\{a\}$ $\wedge\; Dom(Rec\langle R\rangle\{b\}$	4,5,6,∧i
8		$\lfloor\exists R\rfloor\lceil OneOne(R) \;\wedge\; Dom(R)\{b\}$ $\wedge\; Cdom(R)\{a\}\rceil$	7,∃i,Rec⟨R⟩/R
9		$b\infty a$	8,D1.4
10		$b\infty a$	2,3-9,∃e
11	$\lfloor ab\rfloor\lceil a\infty b \supset b\infty a\rceil$		1-10,⊃i,⌊⌋i
	$Th.$		10,D0.3

$D1.7 : \lfloor RSab\rfloor\lceil Com\langle RS\rangle\{ab\} \equiv \lfloor\exists c\rfloor\lceil R\{ac\} \;\wedge\; S\{cb\}\rceil\rceil$
Defs[(s/nn)/(s/nn)(s/nn)]

$T1.5 - 1 : \lfloor RS \rfloor \lceil OneOne(R) \wedge OneOne(S). \supset OneOne(Com\langle RS \rangle)\rceil$

1	RS | $OneOne(R) \wedge OneOne(S)$	hyp
2	abc | $Com\langle RS\rangle\{ac\} \wedge Com\langle RS\rangle\{bc\}. \vee .$	
	$Com\langle RS\rangle\{ca\} \wedge Com\langle RS\rangle\{cb\}$	hyp
3	$Com\langle RS\rangle\{ac\} \wedge Com\langle RS\rangle\{bc\}$	hyp
4	$\lfloor \exists d\rfloor \lceil R\{ad\} \wedge S\{dc\}\rceil$	3,∧e, D1.7
5	$\lfloor \exists e\rfloor \lceil R\{be\} \wedge S\{ec\}\rceil$	3,∧e, D1.7
6	de | $R\{ad\} \wedge S\{dc\} \wedge R\{be\} \wedge S\{ec\}$	hyp
7	$S\{dc\} \wedge S\{ec\}$	6,∧2
8	$OneOne(S)$	1,∧e,reit
9	$d \,\varepsilon\, e$	7,8,D1.1
10	$e \,\varepsilon\, d$	7,8,D1.1
11	$e = d$	9,10,D0.7
12	$R\{ad\} \wedge R\{be\}$	6,∧e
13	$OneOne(R)$	1,∧e,reit
14	$a \,\varepsilon\, b$	11,12,13,D1.1
15	$a \,\varepsilon\, b$	4,5,6-15,∃e
16	$Com\langle RS\rangle\{ca\} \wedge Com\langle RS\rangle\{cb\}$	hyp
17	$a \,\varepsilon\, b$	*idem* 3-16
18	$a \,\varepsilon\, b$	2,3-16,15-16,∨e
19	$\lfloor abc\rfloor \lceil Com\langle RS\rangle\{ac\} \wedge Com\langle RS\rangle\{bc\}. \vee .$	
	$Com\langle RS\rangle\{ca\} \wedge Com\langle RS\rangle\{cb\} :\supset a \,\varepsilon\, b\rceil$	2-18,⊃i,⌊⌋i
20	$OneOne(Com\langle RS\rangle)$	19,D1.1
	Th.	1-19,⊃i,⌊⌋i

$T1.5-2 : \lfloor RS \rfloor \lceil Cdom(R) \approx Dom(S) \supset Dom(Com\langle RS \rangle) \approx Dom(R) \rceil$

$T1.5-3 : \lfloor RS \rfloor \lceil Cdom(R) \approx Dom(S) \supset Cdom(Com\langle RS \rangle) \approx Cdom(S) \rceil$
Idem $T1.5$-2

$T1-5 : Trans(\infty)$

1	abc	$a \infty b \wedge b \infty c$	hyp
2		$\lfloor \exists R \rfloor \lceil OneOne(R) \wedge Dom(R)\{a\} \wedge Cdom(R)\{b\} \rceil$	1,∧e,D1.4
3		$\lfloor \exists S \rfloor \lceil OneOne(S) \wedge Dom(S)\{b\} \wedge Cdom(S)\{c\} \rceil$	1,∧e,D1.4
4	RS	$OneOne(R) \wedge Dom(R)\{a\} \wedge Cdom(R)\{b\}$	hyp
5		$OneOne(S) \wedge Dom(S)\{b\} \wedge Cdom(S)\{c\}$	hyp
6		$OneOne(R) \wedge OneOne(S)$	4,5,∧e,∧i
7		$OneOne(Com\langle RS \rangle)$	6,T1.5-1
8		$Cdom(R)\{b\}$	4,∧e
9		$Dom(S)\{b\}$	5,∧e
10		$Cdom(R) \approx Dom(S)$	8,9,D1.2,D1.3,D0.11
11		$Dom(Com\langle RS \rangle) \approx Dom(R)$	10,T1.5-2
12		$Dom(R)\{a\}$	4,∧e
13		$Dom(Com\langle RS \rangle)\{a\}$	11,12,D011
14		$Dom(Com\langle RS \rangle) \approx Cdom(S)$	10,T1.5-3
15		$Cdom(S)\{c\}$	5,∧e
16		$Cdom(Com\langle RS \rangle)\{c\}$	14,15,D0.11
17		$OneOne(Com\langle RS \rangle) \wedge Dom(Com\langle RS \rangle)\{a\}$ $\wedge Cdom(Com\langle RS \rangle)\{c\}$	7,13,16,∧i
18		$\lfloor \exists R \rfloor \lceil OneOne(R) \wedge Dom(R)\{a\}$ $\wedge Cdom(R)\{c\} \rceil$	17,∃i,Com⟨ RS⟩/R
19		$a \infty c$	18,D1.4
20		$a \infty c$	2/3,4-19,∃e
21		$\lfloor abc \rfloor \lceil a \infty b \wedge b \infty c. \supset a \infty c \rceil$	1-20,⊃i,⌊⌋i
		$Th.$	21,D0.4

$T1.6 : \lfloor ab \rfloor [a \approx b \supset a \infty b]$

$$
\begin{array}{l|l|ll}
1 & ab & \underline{a \approx b} & \text{hyp} \\
2 & & a \infty a & \text{T1.3} \\
3 & & a \infty b & \text{1,2,Ext} \\
 & Th. & & \text{1-3,}\supset\text{i,}\lfloor\rfloor\text{i}
\end{array}
$$

$T1.7 : \lfloor ab \rfloor [Emp\{a\} \wedge Emp\{b\}. \supset a \infty b]$

$$
\begin{array}{l|l|ll}
1 & ab & \underline{Emp\{a\} \wedge Emp\{b\}} & \text{hyp} \\
2 & & a \approx b & \text{1,T0.9} \\
3 & & a \infty b & \text{2,T1.6} \\
 & Th. & & \text{1-3,}\supset\text{i,}\lfloor\rfloor\text{i}
\end{array}
$$

$T1.8 : \lfloor ab \rfloor \lceil a \infty b \supset . \,!\{a\} \equiv !\{b\} \rceil$

1	$ab \mid a\infty b$	hyp
2	$!\{a\}$	hyp
3	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil c\,\varepsilon\, a \rceil$	2,D0.8
4	$c \mid c\,\varepsilon\, a$	hyp
5	$a\infty b$	1,reit
6	$\lfloor \exists R \rfloor \lceil OneOne(R) \wedge Dom(R)\{a\}$	
	$\wedge\ Cdom(R)\{b\} \rceil$	5,D1.4
7	$R \mid Dom(R)\{a\}$	hyp
8	$Cdom(R)\{a\}$	hyp
9	$c\,\varepsilon\, a$	4,reit
10	$\lfloor \exists d \rfloor \lceil R\{cd\} \rceil$	7,9,D1.2
11	$d\,\varepsilon\, b$	8,10,D1.3
12	$\lfloor \exists d \rfloor \lceil d\,\varepsilon\, b \rceil$	11,∃i
13	$!\{b\}$	12,D0.8
14	$!\{b\}$	6,7-13,∃e
15	$!\{b\}$	3,4-14,∃e
16	$!\{a\} \supset !\{b\}$	2-15,⊃i
17	$!\{b\} \supset !\{a\}$	idem 2-15
18	$!\{a\} \equiv !\{b\}$	16,17,≡i
	$Th.$	1-18,⊃i,⌊⌋i

$T1.9 : \lfloor ab\rfloor\lceil Emp\{a\} \wedge a\infty b. \supset Emp\{b\}\rceil$

1	$ab \quad Emp\{a\} \wedge a\infty b$	hyp
2	$\lfloor\exists d\rfloor\lceil d\,\varepsilon\, b\rceil$	hyp
3	$d \quad d\,\varepsilon\, b$	hyp
4	$a\infty b$	1,∧e,reit
5	$\lfloor\exists R\rfloor\lceil OneOne(R) \wedge Dom(R)\{a\} \wedge Cdom(R)\{b\}\rceil$	4,D1.4
6	$R \quad OneOne(R) \wedge Dom(R)\{a\} \wedge Cdom(R)\{b\}$	hyp
7	$d\,\varepsilon\, b$	3,reit
8	$Cdom(R)\{b\}$	6,∧e
9	$\lfloor\exists c\rfloor\lceil R\{cd\} \equiv d\,\varepsilon\, b\rceil$	8,D1.3,⌊⌋e
10	$\lfloor\exists c\rfloor\lceil R\{cd\}\rceil$	7,9,≡e
11	$c \quad R\{cd\}$	hyp
12	$\lfloor\exists e\rfloor\lceil R\{ce\}$	11,∃i,d/e
13	$Dom(R)\{a\}$	6,∧e,reit
14	$\lfloor\exists e\rfloor\lceil R\{ce\} \equiv c\,\varepsilon\, a\rceil$	13,D1.2,⌊⌋e
15	$c\,\varepsilon\, a$	12,14,≡e
16	$\lfloor\exists c\rfloor\lceil c\,\varepsilon\, a\rceil$	15,∃i
17	$Emp\{a\}$	1,∧e,reit
18	$\sim \lfloor\exists c\rfloor\lceil c\,\varepsilon\, a\rceil$	17,D0.10
19	$\sim (a\infty b)$	16,18,∼e
20	$\sim (a\infty b)$	10,11-19,∃e
21	$\sim (a\infty b)$	5,6-20,∃e
22	$\sim \lfloor\exists d\rfloor\lceil d\,\varepsilon\, b\rceil$	4,21,∼e
23	$\sim \lfloor\exists d\rfloor\lceil d\,\varepsilon\, b\rceil$	2,3-22,∃e
24	$\lfloor\exists d\rfloor\lceil d\,\varepsilon\, b\rceil$	2,rep
25	$\sim \lfloor\exists d\rfloor\lceil d\,\varepsilon\, b\rceil$	2,23,24,∼i
26	$Emp\{b\}$	25,D0.10
	Th.	1-26,⊃i,⌊⌋i

$$D1.8(aux.) : \lfloor Rabcd\rfloor\lceil \star[Rab]\{cd\} \equiv . \sim (c\,\varepsilon\, a) \wedge \sim (d\,\varepsilon\, b) \wedge (R\{cd\} \vee (R\{cb\} \wedge R\{ad\}))\rceil$$

$T1.10-1 : \lfloor Rbd \rfloor \lceil OneOne(R) \supset OneOne(\star[Rbd] \rceil$

1	R	$OneOne(R)$	hyp
2	xyz	$\star[Rbd]\{xz\} \wedge \star[Rbd]\{yz\}. \vee . \star[Rbd]\{zx\}$ $\wedge \star[Rbd]\{zy\}$	hyp
3		$\star[Rbd]\{xz\} \wedge \star[Rbd]\{yz\}$	hyp
4		$\sim (x \varepsilon b) \wedge \sim (z \varepsilon d)$	3,D1.8
5		$\sim (y \varepsilon b) \wedge \sim (z \varepsilon d)$	3,D1.8
6		$R\{xz\} \vee .R\{xd\} \wedge R\{bz\}$	3,D1.8
7		$R\{yz\} \vee .R\{yd\} \wedge R\{bz\}$	3,D1.8
8		$R\{xz\} \wedge R\{yz\}$	hyp
9		$x \varepsilon y$	1,8,D1.1
10		$R\{xz\} \wedge R\{yd\} \wedge R\{bz\}$	hyp
11		$x \varepsilon b$	1,10,D1.1
12		$\sim (x \varepsilon b)$	4,∧e,reit
13		$x \varepsilon y$	11,12,∼e
14		$R\{yz\} \wedge R\{xd\} \wedge R\{bz\}$	hyp
15		$y \varepsilon b$	1,14,D1.1
16		$\sim (y \varepsilon b)$	5,∧e,reit
17		$x \varepsilon y$	15,16,∼e
18		$R\{yd\} \wedge R\{bz\} \wedge R\{xd\} \wedge R\{bz\}$	hyp
19		$x \varepsilon y$	1,18,D1.1
20		$x \varepsilon y$	6,7,8-19,∨e
21		$\star[Rbd]\{zx\} \wedge \star[Rbd]\{zy\}$	hyp
22		$\sim (z \varepsilon b) \wedge \sim (x \varepsilon d)$	21,D1.8
23		$\sim (z \varepsilon b) \wedge \sim (y \varepsilon d)$	21,D1.8
24		$R\{zx\} \vee .R\{zd\} \wedge R\{bx\}$	21,D1.8
25		$R\{zy\} \vee .R\{zd\} \wedge R\{by\}$	21,D1.8
26		$R\{zx\} \wedge R\{zy\}$	hyp
27		$x \varepsilon y$	1,26,D1.1
28		$R\{zx\} \wedge R\{zd\} \wedge R\{by\}$	hyp
29		$x \varepsilon d$	1,28,D1.1
30		$\sim (x \varepsilon d)$	22,∧e
31		$x \varepsilon y$	29,30,∼e

32	$R\{zy\} \wedge R\{zd\} \wedge R\{bx\}$	hyp
33	$y \, \varepsilon \, d$	1,32,D1.1
34	$\sim (y \, \varepsilon \, d)$	23,$\wedge$e
35	$x \, \varepsilon \, y$	33,34,$\wedge$e
36	$R\{zd\} \wedge R\{bx\} \wedge R\{zd\} \wedge R\{by\}$	hyp
37	$x \, \varepsilon \, y$	1,36,D1.1
38	$x \, \varepsilon \, y$	24,25,26-37,$\vee$e
39	$x \, \varepsilon \, y$	2,3-38,$\vee$e
40	$OneOne(\star[Rbd])$	2-39,$\supset$i,D1.1
	$Th.$	1-40,$\supset$i,$\bigsqcup$i

$T1.10-2: \lfloor Rabcd \rfloor \lceil OneOne(R) \;\wedge\; Dom(R)\{a \cup b\} \;\wedge\; Cdom(R)\{c \cup d\} \;\wedge$
$\quad b \,\varepsilon\, b \;\wedge\; d \,\varepsilon\, d \wedge \sim (b \,\varepsilon\, a) \wedge \sim (d \,\varepsilon\, c). \supset Dom(\star[Rbd]\{a\} \rceil$

1	Rab	$OneOne(R)$	hyp
2	cd	$Dom(R)\{a \cup b\}$	hyp
3		$Cdom(R)\{c \cup d\}$	hyp
4		$b \,\varepsilon\, b \;\wedge\; \sim (b \,\varepsilon\, a)$	hyp
5		$d \,\varepsilon\, d \;\wedge\; \sim (d \,\varepsilon\, c)$	hyp
6	x	$\lfloor \exists y \rfloor \lceil \star[Rbd]\{xy\} \rceil$	hyp
7	y	$\star[Rbd]\{xy\}$	hyp
8		$\sim (x \,\varepsilon\, b) \;\wedge\; \sim (y \,\varepsilon\, d)$	7,D1.8,∧e
9		$R\{xy\} \vee .R\{xd\} \;\wedge\; R\{by\}$	7,D1.8,∧e
10		$R\{xy\}$	hyp
11		$x\varepsilon\{a \cup b\}$	2,10,D1.2
12		$\sim (x \,\varepsilon\, b)$	8,∧e,reit
13		$x \,\varepsilon\, a$	11,12,∪e
14		$R\{xd\} \;\wedge\; R\{by\}$	hyp
15		$x \,\varepsilon\, \{a \cup b\}$	2,14,D1.2
16		$\sim (x \,\varepsilon\, b)$	8,∧e,reit
17		$x \,\varepsilon\, a$	15,16,∪e
18		$x \,\varepsilon\, a$	9,10-13,14-17,∨e
19		$x \,\varepsilon\, a$	6,7-18,∃e
20		$\lfloor \exists y \rfloor \lceil \star[Rbd]\{xy\} \supset x \,\varepsilon\, a \rceil$	6-19,⊃i
21		$x \,\varepsilon\, a$	hyp
22		$\sim (x \,\varepsilon\, b)$	4,21
23		$x \,\varepsilon\{\, a \cup b\}$	21,∪e
24		$\lfloor \exists y \rfloor \lceil R\{xy\} \rceil$	2,23,D1.2
25	y	$R\{xy\}$	hyp
26		$R\{xy\} \vee .\, R\{xd\} \;\wedge\; R\{by\}$	25,∨i
27		$R\{bd\} \vee \sim R\{bd\}$	tiers exclu
28		$R\{bd\}$	hyp
29		$\sim (x \,\varepsilon\, b)$	22,reit
30		$\sim R\{xd\}$	1,28,29
31		$R\{xy\}$	25,reit
32		$\sim (y \,\varepsilon\, d)$	5,30,31
33		$\sim (x \,\varepsilon\, b) \wedge \sim (y \,\varepsilon\, d) \;\wedge\; R\{xy\} \vee (R\{xd\} \;\wedge\; R\{by\})$	26,29,32,∧i

34	$\lfloor\exists y\rfloor\lceil\sim(x\,\varepsilon\,b)\wedge\ \sim(y\,\varepsilon\,d)\wedge$ $(R\{xy\}\ \vee(R\{xd\}\ \wedge\ R\{by\}))\rceil$	33,∃i
35	$\sim R\{bd\}$	hyp
36	$\sim R\{xd\}\vee R\{xd\}$	tiers exclu
37	$\sim R\{xd\}$	hyp
38	$\sim(y\,\varepsilon\,d)$	1,5,25,37
39	$\sim(x\,\varepsilon\,b)\wedge\ \sim(y\,\varepsilon\,d)\wedge$ $(R\{xy\}\ \vee(R\{xd\}\ \wedge\ R\{by\}))$	22,26,38,∧i
40	$\lfloor\exists y\rfloor\lceil\sim(x\,\varepsilon\,b)\wedge\ \sim(y\,\varepsilon\,d)\wedge$ $(R\{xy\}\ \vee(R\{xd\}\ \wedge\ R\{by\}))\rceil$	39,∃i
41	$R\{xd\}$	hyp
42	$\lfloor\exists z\rfloor\lceil R\{bz\}\rceil$	2,4
43	z $R\{bz\}$	hyp
44	$\sim R\{bd\}$	35,reit
45	$\sim(z\,\varepsilon\,d)$	1,5,43,44
46	$R\{xd\}\ \wedge\ R\{bz\}$	41,43,∧i
47	$R\{xz\}\vee(R\{xd\}\ \wedge\ R\{bz\})$	46,∨i
48	$\sim(x\,\varepsilon\,b)\wedge\ \sim(z\,\varepsilon\,d)\wedge$ $(R\{xz\}\ \vee(R\{xd\}\ \wedge\ R\{bz\}))$	22,45,47,∧i
49	$\lfloor\exists y\rfloor\lceil\sim(x\,\varepsilon\,b)\wedge\ \sim(y\,\varepsilon\,d)\wedge$ $(R\{xz\}\ \vee\ (R\{xd\}\ \wedge\ R\{bz\}))\rceil$	48,∃i
50	$\lfloor\exists y\rfloor\lceil\sim(x\,\varepsilon\,b)\wedge\ \sim(y\,\varepsilon\,d)\wedge$ $(R\{xz\}\ \vee\ (R\{xd\}\ \wedge\ R\{bz\}))\rceil$	42,43-49,∃e
51	$\lfloor\exists y\rfloor\lceil\sim(x\,\varepsilon\,b)\wedge\ \sim(y\,\varepsilon\,d)\wedge$ $(R\{xz\}\ \vee\ (R\{xd\}\ \wedge\ R\{bz\}))\rceil$	36,37-40,41-50,∨e
52	$\lfloor\exists y\rfloor\lceil\sim(x\,\varepsilon\,b)\wedge\ \sim(y\,\varepsilon\,d)\wedge$ $(R\{xz\}\ \vee\ (R\{xd\}\ \wedge\ R\{bz\}))\rceil$	27,28-34,35-51,∨e
53	$\lfloor\exists y\rfloor\lceil\sim(x\,\varepsilon\,b)\wedge\ \sim(y\,\varepsilon\,d)\wedge$ $(R\{xz\}\ \vee\ (R\{xd\}\ \wedge\ R\{bz\}))\rceil$	24,25-52,∃e
54	$\lfloor\exists y\rfloor\lceil R[bd]\{xy\}\rceil$	53,D1.8
55	$x\,\varepsilon\,a\supset\lfloor\exists y\rfloor\lceil\star[Rbd]\{xy\}\rceil$	25-54,⊃i
56	$\lfloor\exists y\rfloor\lceil\star[Rbd]\{xy\}\equiv x\,\varepsilon\,a\rceil$	20,55,≡i
57	$\lfloor x\rfloor\lceil\lfloor\exists y\rfloor\lceil\star[Rbd]\{xy\}\rceil\equiv x\,\varepsilon\,a\rceil$	6-56,⌊⌋i
58	$Dom(\star[Rbd])\{a\}$	57,D1.2
	Th.	1-58.⊃i,⌊⌋i

$T1.10-3 : \lfloor Rabcd \rfloor \lceil OneOne(R) \ \wedge \ Dom(R)\{a \cup b\} \ \wedge \ CDom(R)\{c \cup d\} \wedge$
$b \,\varepsilon\, b \ \wedge \ d \,\varepsilon\, d \wedge \ \sim (b \,\varepsilon\, a) \wedge \ \sim (d \,\varepsilon\, c). \supset Cdom(\star[Rbd]\{c\} \rceil$
Idem $T1.10$-2

$T1.10 : \lfloor abcd \rfloor \lceil \{a \cup b\} \infty \{c \cup d\} \ \wedge \ b \,\varepsilon\, b \ \wedge \ d \,\varepsilon\, d \wedge \ \sim (b \,\varepsilon\, a) \wedge$
$\sim (d \,\varepsilon\, c). \supset a \infty c \rceil$

1	ab	$\{a \cup b\} \infty \{c \cup d\}$	hyp
2	cd	$b \,\varepsilon\, b \ \wedge \ d \,\varepsilon\, d \wedge \ \sim (b \,\varepsilon\, a) \wedge \ \sim (d \,\varepsilon\, c)$	hyp
3		$\lfloor \exists R \rfloor \lceil OneOne(R) \ \wedge \ Dom(R)\{a \cup \ b\}$ $\wedge \ Cdom(R)\{c \cup d\} \rceil$	1,D1.4
4	R	$OneOne(R)$	hyp
5		$Dom(R)\{a \cup b\}$	hyp
6		$Cdom(R)\{c \cup d\}$	hyp
7		$OneOne(\star[Rbd])$	4,T1.10-1
8		$Dom(\star[Rbd]\{a\})$	2,4,5,6,T1.10-2
9		$Cdom(\star[Rbd]\{c\})$	2,4,5,6,T1.10-3
10		$OneOne(\star[Rbd]) \ \wedge \ Dom(\star[Rbd]\{a\})$ $\wedge \ Cdom(\star[Rbd]\{c\})$	7,8,9,∧i
11		$\lfloor \exists R \rfloor \lceil OneOne(R) \ \wedge \ Dom(R)\{a\}$ $\wedge \ Cdom(R)\{c\} \rceil$	10,∃i,⋆[Rbd]/R
12		$a \infty c$	11,D1.1
13		$a \infty c$	3,4-12,∃e
	$Th.$		1-13,⊃i,⌊⌋i

$D1.9(aux.) : \lfloor Rabcd \rfloor \lceil *[Rbd]\{ac\} \equiv . \sim Dom(R)\{b\} \wedge \ \sim Cdom(R)\{d\} \wedge$
$(R\{ac\} \vee (b = a \ \wedge \ d = b)) \rceil$

$T1.11-1 : \lfloor Rbd \rfloor \lceil OneOne(R) \supset OneOne(*[Rbd] \rceil$

$T1.11-2 : \lfloor Rabcd \rfloor \lceil OneOne(R) \ \wedge \ Dom(R)\{a\} \ \wedge \ Cdom(R)\{c\} \ \wedge \ b \,\varepsilon\, b \wedge$
$d \,\varepsilon\, d \wedge \ \sim (b \,\varepsilon\, a) \wedge \ \sim (d \,\varepsilon\, c). \supset Dom(*[Rbd])\{a \cup b\} \rceil$

$T1.11-3 : \lfloor Rabcd \rfloor \lceil OneOne(R) \ \wedge \ Dom(R)\{a\} \ \wedge \ Dom(R)\{b\} \ \wedge \ b \,\varepsilon\, b \wedge$
$d \,\varepsilon\, d \wedge \ \sim (b \,\varepsilon\, a) \wedge \ \sim (d \,\varepsilon\, c). \supset Cdom(*[Rbd]\{c \cup d\} \rceil$

Nous omettons les démonstrations de ces thèses qui se font selon le même procédé que celui des thèses T1-10(1-3).

$T1.11 : \lfloor abcd \rfloor \lceil a \infty c \ \wedge\ b \,\varepsilon\, b \wedge \ \sim (b \,\varepsilon\, a) \ \wedge\ d \,\varepsilon\, d \wedge \ \sim (d \,\varepsilon\, c). \supset$
$\{a \cup b\} \infty \{c \cup d\} \rceil$

1	ab		$a \infty c$	hyp
2	bc		$b \,\varepsilon\, b \wedge \ \sim (b \,\varepsilon\, a)$	hyp
3			$d \,\varepsilon\, d \wedge \ \sim (d \,\varepsilon\, c)$	hyp
4			$\lfloor \exists R \rfloor \lceil OneOne(R) \ \wedge\ Dom(R)\{a\}$ $\wedge\ Cdom(R)\{c\} \rceil$	1,D1.4
5		R	$OneOne(R)$	hyp
6			$Dom(R)\{a\}$	hyp
7			$Cdom(R)\{c\}$	hyp
8			$OneOne(*[Rbd])$	5,T1.11-1
9			$Dom(*[Rbd]\{a \cup b\}$	2,3,5,6,7,T1.11-2
10			$Cdom(*[Rbd]\{c \cup d\}$	2,3,5,6,7,T1.11-3
11			$OneOne(*[Rbd]) \ \wedge\ Dom(*[Rbd]\{a \cup b\}$ $\wedge\ Cdom(*[Rbd]\{c \cup d\}$	8,9,10,∧i
12			$\lfloor \exists S \rfloor \lceil OneOne(S) \ \wedge\ Dom(S)\{a \cup b\}$ $\wedge\ Cdom(S)\{c \cup d\} \rceil$	11,∃i,*[Rbd]/S
13			$\{a \cup b\} \infty \{c \cup d\}$	11,D1.1
14			$\{a \cup b\} \infty \{c \cup d\}$	4,5-13,∃e
	$Th.$			1-14,⊃i,⌊⌋i

$D1.10(aux.) : \lfloor abcd \rfloor \lceil = [ab]\{cd\} \equiv .a = c \wedge b = d \rceil$

$T1.12 - 1 : \lfloor ab \rfloor \lceil OneOne(= [ab]) \rceil$

1	$abc \mid\ = [xy]\{ac\} \wedge = [xy]\{bc\}. \vee . = [xy]\{ca\} \wedge = [xy]\{cb\}$	hyp
2	$= [xy]\{ac\}$	hyp
3	$= [xy]\{bc\}$	hyp
4	$x = a \wedge y = c$	2,D1.10
5	$x = b \wedge y = c$	3,D1.10
6	$a \,\varepsilon\, b$	4,5,∧e,D0.7
7	$= [xy]\{ca\}$	hyp
8	$= [xy]\{cb\}$	hyp
9	$x = c \wedge y = a$	7,D1.10
10	$x = c \wedge y = b$	8,D1.10
11	$a \,\varepsilon\, b$	9,10,∧e,D0.7
12	$a \,\varepsilon\, b$	1,2-6,7-11,∨e
13	$\lfloor abc \rfloor \lceil = [xy]\{ac\} \wedge = [xy]\{bc\}. \vee . = [xy]\{ca\} \wedge$	
	$= [xy]\{cb\} :\supset a \,\varepsilon\, b \rceil$	1-12,⊃i,⌊⌋i
	$Th.$	13,D1.1

$T1.12-2 : \lfloor ab \rfloor \lceil Sin\{a\} \wedge Sin\{b\}. \supset Dom(=[ab])\{a\} \rceil$

1	ab	$Sin\{a\}$	hyp
2		$Sin\{b\}$	hyp
3		$a \,\varepsilon\, a$	1,D0.9
4		$b \,\varepsilon\, b$	2,D0.9
5		x | $\lfloor \exists y \rfloor \lceil = [ab]\{xy\} \rceil$	hyp
6		$a = x$	5,D1.10
7		$x \,\varepsilon\, a$	6,D0.7
8		$x \,\varepsilon\, a$	hyp
9		$a \,\varepsilon\, a$	3,reit
10		$x = a$	8,9,T0.4,D0.7
11		$b \,\varepsilon\, b$	4,reit
12		$b = b$	11,D0.7
13		$\lfloor \exists y \rfloor \lceil a = x \wedge b = y \rceil$	10,12,∃i,b/y
14		$\lfloor \exists y \rfloor \lceil = [ab]\{xy\} \rceil$	13,D1.10
15		$\lfloor \exists y \rfloor \lceil = [ab]\{xy\} \rceil \equiv x \,\varepsilon\, a$	5-7,8-14,≡i
16		$\lfloor x \rfloor \lceil \lfloor \exists y \rfloor \lceil = [ab]\{xy\} \rceil \equiv x \,\varepsilon\, a \rceil$	5-15,⌊⌋i
17		$Dom(=[ab])\{a\}$	16,D1.2
	$Th.$		1-17,⊃i,⌊⌋i

$T1.12-3 : \lfloor ab \rfloor \lceil Sin\{a\} \wedge Sin\{b\}. \supset Cdom(=[ab])\{b\} \rceil$
La démonstration est similaire à celle de T.1.12-2

$T1.12 \lfloor ab \rfloor \lceil Sin\{a\} \wedge Sin\{b\}. \supset a \infty b \rceil$

1	ab	$Sin\{a\} \wedge Sin\{b\}$	hyp
2		$OneOne(=[ab])$	T1.12-1
3		$Dom(=[ab])\{a\}$	1,T1.12-2,⊃e
4		$Cdom(=[ab]\{b\}$	1,T1.12-3,⊃e
5		$\lfloor R \rfloor \lceil OneOne(R) \wedge Dom(R)\{a\} \wedge Cdom(R)\{b\} \rceil$	3,4,5 ∧i,∃i,=[ab]/R
6		$a \infty b$	5,D1.4
	$Th.$		1-6,⊃i,⌊⌋i

2. Cardinalité

$D2.1 : \lfloor ab \rfloor \lceil \infty\langle a\rangle\{b\} \equiv a\infty b \rceil$ Dfs[(s/n)/n]

$T2.1 : \lfloor ab \rfloor \lceil \infty\langle a\rangle \approx \infty\langle b\rangle \equiv a\infty b \rceil$

Cette thèse correspond au Principe de Hume, ce qui montre que $\infty\langle a\rangle$ exprime le nombre cardinal de a. Pour «être un nombre cardinal» , on pose :

$D2.2 : \lfloor \varphi \rfloor \lceil Cn[\varphi] \equiv \lfloor \exists a \rfloor \lceil \infty\langle a\rangle \approx \varphi \rceil \rceil$ Dfs[s/(s/n)]

$T2.2 : \lfloor a \rfloor \lceil \infty\langle a\rangle\{a\} \rceil$

1	a	$a\infty a$	T1.3
2		$\infty\langle a\rangle\{a\}$	1,D2.1
	Th.		1,2,$\lfloor\rfloor$i

$T2.3 : \lfloor ab \rfloor \lceil \infty\langle a\rangle\{b\} \supset \infty\langle b\rangle\{a\} \rceil$

1	ab	$\infty\langle a\rangle\{b\}$	hyp
2		$a\infty b$	1,D2.1
3		$b\infty a$	2,T1.4
4		$\infty\langle b\rangle\{a\}$	2,D2.1
	Th.		1-4,$\lfloor\rfloor$i

$T2.4 : \lfloor abc \rfloor \lceil \infty\langle a\rangle\{b\} \wedge \infty\langle b\rangle\{c\}. \supset \infty\langle a\rangle\{c\} \rceil$

1	abc	$\infty\langle a\rangle\{b\} \wedge \infty\langle b\rangle\{c\}$	hyp
2		$a\infty b$	1,D2.1
3		$b\infty c$	1,D2.1
4		$a\infty c$	2,3,T1.5
5		$\infty\langle a\rangle\{c\}$	4,D2.1
	Th.		1-5,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$D2.3 : \lfloor \varphi \rfloor \lceil N[\varphi] \equiv \lfloor ab \rfloor \lceil \varphi\{a\} \wedge a\infty b. \supset \varphi\{b\} \rceil \rceil$ Dfs[s/(s/n)]
Etre une propriété numérique de noms

$D2.4 : \lfloor \varphi \rfloor \lceil Q[\varphi] \equiv \lfloor ab \rfloor \lceil \varphi\{a\} \wedge \varphi\{b\}. \supset a\infty b \rceil \rceil$ Dfs[s/(s/n)]
Etre une propriété quantitative de noms

$T2.5 - 1 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil Cn[\varphi] \supset .![\varphi] \wedge N[\varphi] \wedge Q[\varphi]\rceil$

1	$\varphi \mid Cn[\varphi]$	hyp
2	$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\infty\langle a\rangle \approx \varphi\rceil$	1,D2.2
3	$a \mid \infty\langle a\rangle \approx \varphi$	hyp
4	$a\infty a$	T1.3
5	$\infty\langle a\rangle\{a\}$	4,D2.1
6	$\varphi\{a\}$	3,5,D0.11
7	$![\varphi]$	6,D0.12
8	$bc \mid \varphi\{b\} \wedge \varphi\{c\}$	hyp
9	$\infty\langle a\rangle\{b\} \wedge \infty\langle a\rangle\{c\}$	3,8,D0.11
10	$a\infty b$	9,D2.1
11	$a\infty c$	9,D2.1
12	$b\infty a$	10,T1.4
13	$b\infty c$	11,12,T1.5
14	$\lfloor bc\rfloor\lceil\varphi\{b\} \wedge \varphi\{c\}. \supset b\infty c\rceil$	8-13,⊃i,⌊⌋i
15	$Q[\varphi]$	14,D2.4
16	$bc \mid \varphi\{b\} \wedge b\infty c$	hyp
17	$b\infty c$	16,∧e
18	$\infty\langle a\rangle\{b\}$	3,16,D0.11
19	$a\infty b$	18,D2.1
20	$a\infty c$	17,19,T1.5
21	$\infty\langle a\rangle\{c\}$	20,D2.1
22	$\varphi\{c\}$	3,21,D0.11
23	$\lfloor bc\rfloor\lceil\varphi\{b\} \wedge a\infty b. \supset \varphi\{c\}\rceil$	16-22,⊃i,⌊⌋i
24	$N[\varphi]$	23,D2.3
25	$![\varphi] \wedge N[\varphi] \wedge Q[\varphi]$	7,15,24,∧i,2,3-24,∃e
	$Th.$	1-25,⊃i,⌊⌋i

$T2.5-2 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil ![\varphi] \wedge N[\varphi] \wedge Q[\varphi]. \supset Nn[\varphi]\rceil$

1	φ	$N[\varphi]$	hyp
2		$Q[\varphi]$	hyp
3		$![\varphi]$	hyp
4		$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\varphi\{a\}\rceil$	3,D0.12
5	a	$\varphi\{a\}$	hyp
6	d	$\infty\langle a\rangle\{d\}$	hyp
7		$\varphi\{a\}$	5,reit
8		$a\infty d$	6,D2.1
9		$\varphi\{a\} \wedge a\infty d. \supset \varphi\{d\}$	1,D2.3
10		$\varphi\{d\}$	7,8,9,⊃e
11	d	$\varphi\{d\}$	hyp
12		$\varphi\{a\}$	5,reit
13		$\varphi\{a\} \wedge \varphi\{d\}. \supset a\infty d$	2,D2.4
14		$a\infty d$	11,12,13,⊃e
15		$\infty\langle a\rangle\{d\}$	14,D2.1
16		$\lfloor d\rfloor\lceil\infty\langle a\rangle\{d\} \equiv \varphi\{d\}\rceil$	6-10,11-15,≡i,⌊⌋i
17		$\infty\langle a\rangle \approx \varphi$	16,D0.11
18		$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\infty\langle a\rangle \approx \varphi\rceil$	17,∃i
19		$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\infty\langle a\rangle \approx \varphi\rceil$	4,5-18,∃e
20		$Cn[\varphi]$	19,D2.2
	$Th.$		1-19,⊃i,⌊⌋i

$T2.5 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil Cn[\varphi] \equiv .![\varphi] \wedge N[\varphi] \wedge Q[\varphi]\rceil$ $\quad T2.5\text{-}1, T2.5\text{-}2$,≡i

$T2.6 : \lfloor\varphi a\rfloor\lceil\infty\langle a\rangle \approx \varphi \equiv .\varphi\{a\} \wedge N[\varphi] \wedge Q[\varphi]\rceil$ $\quad$ D2.2, $T2.5$

$T2.7 : \lfloor a\rfloor\lceil Cn[\infty\langle a\rangle]\rceil$

1	a	$a\infty a$	T1.3
2		$\infty\langle a\rangle \approx \infty\langle a\rangle$	T2.1
3		$\lfloor\exists b\rfloor\lceil\infty\langle b\rangle \approx \infty\langle a\rangle\rceil$	2,∃i
	$Th.$		3,D2.2

$T2.8: \lfloor a \rfloor \lceil ![\infty\langle a\rangle]\rceil \qquad T2.5, T2.7$

$T2.9: \lfloor a \rfloor \lceil N[\infty\langle a\rangle]\rceil \qquad T2.5, T2.7$

$T2.10: \lfloor a \rfloor \lceil Q[\infty\langle a\rangle\rceil \qquad T2.5, T2.7$

$T2.11: \lfloor a \rfloor \lceil \lfloor \exists\varphi \rfloor \lceil Cn[\varphi] \wedge \varphi\{a\}\rceil\rceil$

1	a	$\infty\langle a\rangle\{a\}$	T2.2
2		$Cn[\infty\langle a\rangle]$	T2.7
3		$Cn[\infty\langle a\rangle] \wedge \infty\langle a\rangle\{a\}$	1,2,$\wedge$i
4		$\lfloor \exists\varphi \rfloor \lceil Cn[\varphi] \wedge \varphi\{a\}\rceil$	3,$\exists$i, $\infty\langle a\rangle/\varphi$
	Th.		1-4,$\lfloor\rfloor$i

$T2.12: \lfloor a\varphi\psi \rfloor \lceil \varphi\{a\} \wedge \psi\{a\} \wedge Cn[\varphi] \wedge Cn[\psi]. \supset \varphi \approx \psi\rceil$
Unicité de la cardinalité d'un nom

1	a $\varphi\psi$	$\varphi\{a\} \wedge \psi\{a\} \wedge Cn[\varphi] \wedge Cn[\psi]$		hyp
2		b	$\varphi/\psi\{b\}$	hyp
3			$\varphi/\psi\{a\}$	1,$\wedge$e
4			$Cn[\varphi/\psi]$	1,$\wedge$e
5			$Q[\varphi/\psi]$	1,$\wedge$e
6			$a\infty b$	2,3,5,D2.4
7			$\psi/\varphi\{a\}$	1,$\wedge$2
8			$Cn[\psi/\varphi]$	1,$\wedge$e
9			$N[\psi/\varphi]$	T2.7
10			$\psi/\varphi\{b\}$	6,7,9,D2.3
11		$\varphi/\psi\{b\} \supset \psi/\varphi\{b\}$		2-10,$\supset$i
12		$\varphi\{b\} \equiv \psi\{b\}$		11,$\equiv$i
13		$\lfloor b \rfloor \lceil \varphi\{b\} \equiv \psi\{b\}\rceil$		2-12,$\lfloor\rfloor$i
14		$\varphi \approx \psi$		13,D0.11
	Th.			1-14,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

3. Inductivité et finitude

$D3.1 : \lfloor a \rfloor \lceil Ind\{a\} \equiv \lfloor \varphi \rfloor \lceil \varphi\{\wedge\} \wedge \lfloor bc \rfloor \lceil b \varepsilon a \wedge \varphi\{c\} \rceil . \supset \varphi\{c \cup b\} \rceil . \supset \varphi\{a\} \rceil \rceil$
Defs[s/n]
Inductivité : finitude au sens de Frege

$D3.2 : \lfloor \varphi \rfloor \lceil Ind[\varphi] \equiv . \lfloor a \rfloor \lceil \varphi\{a\} \supset Ind\{a\} \rceil \rceil$ Dfs[s/(s/n)]
Etre une propriété de noms inductifs

$T3.1 : Ind\{\wedge\}$
Le nom vide est inductif

1	φ	$\varphi\{\wedge\} \wedge \lfloor bc \rfloor \lceil b\varepsilon a \wedge \varphi\{c\} \rceil . \supset \varphi\{c \cup b\}$	hyp
2		$\varphi\{\wedge\}$	1,∧e
3	$\varphi\{\wedge\} \wedge \lfloor bc \rfloor \lceil b\varepsilon a \wedge \varphi\{c\}. \supset \varphi\{c \cup b\} \rceil . \supset \varphi\{\wedge\}$		1-2,⊃i
	$Th.$		1-3,D3.1

$T3.2 : ![Ind]$

1		$Ind\{\wedge\}$	T3.1
2		$\lfloor \exists a \rfloor \lceil Ind\{a\} \rceil$	1,∃i,∧/a
	$Th.$		2,D0.12

$T3.3 : \lfloor a \rfloor \lceil Sin\{a\} \supset Ind\{a\} \rceil$

Les noms singuliers sont inductifs

1	a	$Sin\{a\}$	hyp
2	φ	$\varphi\{\wedge\} \wedge \lfloor bc \rfloor \lceil b\varepsilon a \wedge \varphi\{c\} \rceil . \supset \varphi\{c \cup b\}$	hyp
3		$\varphi\{\wedge\}$	2,∧e
4		$a \,\varepsilon\, a$	1,D0.9
5		$a \,\varepsilon\, a \wedge \varphi\{\wedge\} . \supset \varphi\{\wedge \cup a\}$	2,∧e,⌊⌋e,b/a,c/∧
6		$\varphi\{\wedge \cup a\}$	3,4,5,⊃e
7		$a \approx \{\wedge \cup a\}$	T0.13
8		$\varphi\{a\}$	6,7,Ext.
9		$\lfloor \varphi \rfloor \lceil \varphi\{\wedge\} \wedge \lfloor bc \rfloor \lceil b\varepsilon a \wedge \varphi\{c\} .$	
		$\supset \varphi\{c \cup b\} \rceil . \supset \varphi\{a\} \rceil$	2-8,⊃i,⌊⌋i
10		$Ind\{a\}$	9,D3.1
	$Th.$		1-10,⊃i,⌊⌋i

$D3.3(aux) : \lfloor ab\varphi \rfloor \lceil \cup\langle \varphi a \rangle\{b\} \equiv \varphi\{a \cup b\} \rceil$ Dfs[(s/n)/((s/n)n)]

$T3.4 - 1 : \lfloor a\varphi \rfloor \lceil \varphi\{a\} \supset \cup\langle \varphi a \rangle\{\wedge\} \rceil$

1	$a\varphi$	$\varphi\{a\}$	hyp
2		$a \approx \{a \cup \wedge\}$	T0.13
3		$\varphi\{a \cup \wedge\}$	1,2,Ext
4		$\cup\langle \varphi a \rangle\{\wedge\}$	3,D3.3
	$Th.$		1-4,⊃i,⌊⌋i

$T3.4 : \lfloor ab \rfloor \lceil Ind\{a\} \wedge Ind\{b\}. \supset Ind\{a \cup b\} \rceil$
L'union des noms inductifs est un nom inductif

1	ab $Ind\{a\}$	hyp
2	$Ind\{b\}$	hyp
3	φ $\varphi\{\wedge\}$	hyp
4	$\lfloor cd \rfloor \lceil c\,\varepsilon\,\{a \cup b\} \wedge \varphi\{d\}. \supset \varphi\{d \cup c\} \rceil$	hyp
5	cd $c\,\varepsilon\,a \wedge \varphi\{d\}$	hyp
6	$c\,\varepsilon\,c$	5,T0.2
7	$c\,\varepsilon\,a \vee c\,\varepsilon\,b$	5,∨i
8	$c\,\varepsilon\,\{a \cup b\}$	6,7,D0.16
9	$\varphi\{d \cup c\}$	4,5,8,⊃e
10	$\lfloor cd \rfloor \lceil c\,\varepsilon\,a \wedge \varphi\{d\}. \supset \varphi\{d \cup c\} \rceil$	5-9,⊃i,⌊⌋i
11	$\varphi\{a\}$	1,D3.1,3,10,⊃e
12	$\cup\langle\varphi a\rangle\{\wedge\}$	11,T3.4-1
13	cd $c\varepsilon b$	hyp
14	$\cup\langle\varphi a\rangle\{d\}$	hyp
15	$c\,\varepsilon\,c$	13,T0.2
16	$c\,\varepsilon\,a \vee c\,\varepsilon\,b$	13,∨i
17	$c\,\varepsilon\,\{a \cup b\}$	15,16,D0.16
18	$\varphi\{a \cup d\}$	14,D3.3
19	$c\,\varepsilon\,\{a \cup b\} \wedge \varphi\{a \cup d\}. \supset \varphi\{a \cup d \cup c\}$	4,⌊⌋e,c/d,d/a∪d
20	$\varphi\{a \cup d \cup c\}$	17,18,19,⊃e
21	$\cup\langle\varphi a\rangle\{d \cup c\}$	20,D3.3
22	$\lfloor cd \rfloor \lceil c\,\varepsilon\,b \wedge \cup\langle\varphi a\rangle\{d\}. \supset \cup\langle\varphi a\rangle\{d \cup c\} \rceil$	13-21,⊃i,⌊⌋i
23	$\cup\langle\varphi a\rangle\{\wedge\} \wedge \lfloor cd \rfloor \lceil c\,\varepsilon\,b \wedge \cup\langle\varphi a\rangle\{d\}. \supset \cup\langle\varphi a\rangle\{d \cup c\} \rceil.$	2,D3.1, ...
	$\supset \cup\langle\varphi a\rangle\{b\}$	⌊⌋e,φ/∪⟨φa⟩
24	$\cup\langle\varphi a\rangle\{b\}$	12,22,23,⊃e
25	$\varphi\{a \cup b\}$	24,D3.3
26	$\lfloor\varphi\rfloor \lceil \varphi\{\wedge\} \wedge \lfloor cd \rfloor \lceil c\,\varepsilon\,\{a \cup b\} \wedge \varphi\{d\}. \supset \varphi\{d \cup c\} \rceil. \supset$	
	$\varphi\{a \cup b\} \rceil$	3-26,⊃i
27	$Ind\{a \cup b\}$	26,D3.1
	$Th.$	1-27,⊃i,⌊⌋i

$D3.4(aux) : \lfloor a \rfloor \lceil Ind_{\subset}\{a\} \equiv \lfloor b \rfloor \lceil b \subset a \supset Ind\{b\} \rceil \rceil$ Dfs[s/n]

$T3.5 - 1 : Ind_{\subset}\{\wedge\}$

1	b	$b \subset \wedge$	hyp
2		$\lfloor c \rfloor \lceil c \varepsilon b \supset c \varepsilon \wedge \rceil$	1,D0.1
3		$c \varepsilon \wedge$	hyp
4		$c \varepsilon c$	3,D0.14
5		$\sim (c \varepsilon c)$	3,D0.14
6		$c \varepsilon b$	4,5,$\sim$e
7		$\lfloor c \rfloor \lceil c \varepsilon \wedge \supset c \varepsilon b \rceil$	3-6,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
8		$\lfloor c \rfloor \lceil c \varepsilon b \equiv c \varepsilon \wedge \rceil$	2,7,$\equiv$i
9		$b \approx \wedge$	8,D0.6
10		$Ind\{\wedge\}$	T3.1
11		$Ind\{b\}$	9,10,Ext
12		$\lfloor b \rfloor \lceil b \subset \wedge \supset Ind\{b\} \rceil$	1-11,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
		$Th.$	12,D3.4

$T3.5 - 2 : \lfloor bcd \rfloor \lceil b \subset \{d \cup c\} \wedge c \varepsilon b. \supset \{b - c\} \subset d \rceil$

1	bcd	$b \subset \{d \cup c\}$	hyp
2		$c \varepsilon b$	hyp
3	e	$e \varepsilon \{b - c\}$	hyp
4		$\sim (e \varepsilon c)$	3,D0.18
5		$e \varepsilon b$	3,D0.18
6		$e \varepsilon \{d \cup c\}$	1,5,D0.1
7		$e \varepsilon d \vee e \varepsilon c$	6,D0.16
8		$e \varepsilon d$	4,7,$\vee$e
9		$\lfloor e \rfloor \lceil e \varepsilon \{b - c\} \supset e \varepsilon d \rceil$	3-8,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
10		$\{b - c\} \subset d$	9,D0.1
		$Th.$	1-10,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$T3.5-3 : \lfloor bcd \rfloor \lceil b \subset \{d \cup c\} \wedge \ c\varepsilon c \ \wedge \ \sim (c\varepsilon b) . \supset b \subset d \rceil$

1	bcd | $b \subset \{d \cup c\}$	hyp
2	$c\varepsilon c$	hyp
3	$\sim (c\varepsilon b)$	hyp
4	e | $e\varepsilon b$	hyp
5	$e\varepsilon \{d \cup c\}$	1,4,D0.1
6	$e\varepsilon d \vee e\varepsilon c$	5,D0.16
7	$e\varepsilon c$	hyp
8	$c\varepsilon c$	2,reit
9	$c\varepsilon e$	7,8,T0.4
10	$e\varepsilon b$	4,reit
11	$c\varepsilon b$	9,10,T0.3
12	$\sim (c\varepsilon b)$	3,reit
13	$\sim (e\varepsilon c)$	7,11,12,$\sim$i
14	$e\varepsilon d$	6,13,$\vee$e
15	$\lfloor e \rfloor \lceil e\varepsilon b \supset e\varepsilon d \rceil$	4-14,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
16	$b \subset d$	15,D0.1
	$Th.$	1-16,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$T3.5-4 : \lfloor bc\rfloor\lceil c\,\varepsilon\, b. \supset \{\{b-c\}\cup c\}\approx b\rceil$

1	bc	$c\,\varepsilon\, b$	hyp
2	a	$a\,\varepsilon\,\{\{b-c\}\cup c\}$	hyp
3		$a\,\varepsilon\,\{\{b-c\}\vee a\,\varepsilon\, c$	2,D0.16
4		$a\,\varepsilon\,\{b-c\}$	hyp
5		$a\,\varepsilon\, b$	4,D0.18
6		$a\,\varepsilon\, c$	hyp
7		$c\,\varepsilon\, b$	1,reit
8		$a\,\varepsilon\, b$	6,7,T0.3
9		$a\,\varepsilon\, b$	3,4-5,6-8,∨e
10		$a\,\varepsilon\, b$	hyp
11		$a\,\varepsilon\, c\vee\sim(a\,\varepsilon\, c)$	tiers exclu
12		$a\,\varepsilon\, c$	hyp
13		$a\,\varepsilon\,\{\{b-c\}\cup c\}$	12,∪i
14		$\sim(a\,\varepsilon\, c)$	hyp
15		$a\,\varepsilon\, b$	10,reit
16		$a\,\varepsilon\,\{b-c\}$	14,15,D0.18
17		$a\,\varepsilon\,\{\{b-c\}\cup c\}$	16,∪i
18		$a\,\varepsilon\,\{\{b-c\}\cup c\}$	11,12-13,14-17,∨e
19		$a\,\varepsilon\,\{\{b-c\}\cup c\}\equiv a\,\varepsilon\, b$	2-9,10-18,≡i
20		$\lfloor a\rfloor\lceil a\,\varepsilon\,\{\{b-c\}\cup c\}\equiv a\,\varepsilon\, b\rceil$	2-19,⌊⌋i
21		$\{\{b-c\}\cup c\}\approx b$	20,D0.16
	$Th.$		1-21,⊃i,⌊⌋i

$T3.5 : \lfloor ab \rfloor \lceil Ind\{a\} \wedge b \subset a. \supset Ind\{b\} \rceil$

Tout nom inclus dans un nom inductif est un nom inductif

1	ab	$Ind\{a\}$	hyp
2		$b \subset a$	hyp
3		$Ind_{\subset}\{\wedge\} \wedge \lfloor cd \rfloor \lceil c\,\varepsilon\, a \wedge Ind_{\subset}\{d\}. \supset Ind_{\subset}\{d \cup c\} \rceil. \supset$	
		$Ind_{\subset}\{a\}$	1,D3.1
4		$Ind_{\subset}\{\wedge\}$	T3.5-1
5	cd	$c\,\varepsilon\, a$	hyp
6		$Ind_{\subset}\{d\}$	hyp
7	b	$b \subset \{d \cup c\}$	hyp
8		$c\,\varepsilon\, b \vee \sim (c\,\varepsilon\, b)$	tiers exclu
9		$c\,\varepsilon\, b$	hyp
10		$b \subset \{d \cup c\}$	7,reit
11		$\{b - c\} \subset d$	9,10,T3.5-2
12		$Ind_{\subset}\{d\}$	6,reit
13		$Ind\{b - c\}$	11,12,D3.4,$\lfloor\rfloor$e,$\supset$e
14		$Sin\{c\}$	9,T0.8
15		$Ind\{c\}$	14,T3.3
16		$Ind\{\{b - c\} \cup c\}$	13,15,T3.4
17		$\{\{b - c\} \cup c\} \approx b$	9,T3.5-4
18		$Ind\{b\}$	16,17,Ext
19		$\sim (c\,\varepsilon\, b)$	hyp
20		$c\,\varepsilon\, c$	5,T0.2
21		$b \subset \{d \cup c\}$	7,reit
22		$b \subset d$	19,20,21,T3.5-3
23		$Ind_{\subset}\{d\}$	6,reit
24		$Ind\{b\}$	22,23,D3.4
25		$Ind\{b\}$	8,9-18,19-25,$\vee$e
26		$\lfloor b \rfloor \lceil b \subset \{d \cup c\} \supset Ind\{b\} \rceil$	7-25,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
27		$Ind_{\subset}\{a\}$	26,D3.4
28		$\lfloor cd \rfloor \lceil c\,\varepsilon\, a \wedge Ind_{\subset}\{d\}. \supset Ind_{\subset}\{d \cup c\} \rceil$	5-27,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
29		$Ind_{\subset}\{a\}$	3,4,28,$\supset$e
30		$\lfloor b \rfloor \lceil a \subset c \supset Ind\{b\} \rceil$	29,D3.4
31		$Ind\{b\}$	2,30,$\supset$e
		$Th.$	1-31,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$D3.5(aux) : \lfloor a \rfloor \lceil Ind_{\infty}\{a\} \equiv \lfloor b \rfloor \lceil a \infty b \supset Ind\{b\} \rceil \rceil$ Dfs [s/n]

$T3.6 - 1 : Ind_{\infty}\{\wedge\}$

1	b	$\wedge \infty b$	hyp
2		$Emp\{\wedge\}$	T0.11
3		$Emp\{b\}$	1,2,T1.9
4		$b \approx \wedge$	2,3,T0.9
5		$Ind\{\wedge\}$	T3.1
6		$Ind\{b\}$	4,5,Ext
7	$\lfloor b \rfloor \lceil \wedge \infty b \supset Ind\{b\} \rceil$		1-6,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
	$Th.$		7,D3.5

$T3.6 - 2 : \lfloor bcd \rfloor \lceil \{\{d \cup c\} \infty b \wedge c \,\varepsilon\, d. \supset d \infty b \rceil$

1	bcd	$\{d \cup c\} \infty b$	hyp
2		$c \,\varepsilon\, d$	hyp
3		e | $e \,\varepsilon\, \{d \cup c\}$	hyp
4		$e \,\varepsilon\, d \vee e \,\varepsilon\, c$	3,D0.16
5		$e \,\varepsilon\, d$	hyp
6		$e \,\varepsilon\, d$	5,rep
7		$e \,\varepsilon\, c$	hyp
8		$c \,\varepsilon\, d$	2,reit
9		$e \,\varepsilon\, d$	7,8,T0.3
10		$e \,\varepsilon\, d$	4,5-6,7-9,$\vee$e
11		$e \,\varepsilon\, d$	hyp
12		$e \,\varepsilon\, \{d \cup c\}$	11,$\cup$i
13		$e \,\varepsilon\, d \equiv e \,\varepsilon\, \{d \cup c\}$	3-10,11-12,$\equiv$i
14		$\lfloor e \rfloor \lceil e \,\varepsilon\, d \equiv e \,\varepsilon\, \{d \cup c\} \rceil$	3-13,$\lfloor\rfloor$i
15		$d \approx \{d \cup c\}$	14,D0.6
16		$d \infty \{d \cup c\}$	15,T1.6
17		$d \infty b$	1,16,T1.5
	$Th.$		1-17,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$T3.6 - 3 : \lfloor bcde \rfloor \lceil \{d \cup c\} \infty b \wedge c \,\varepsilon\, c \wedge \sim (c \,\varepsilon\, d) \wedge e \,\varepsilon\, b. \supset d \infty \{b - e\} \rceil$
Cf. $T1.10$

$T3.6 : \lfloor ab \rfloor \lceil Ind\{a\} \wedge a \infty b. \supset Ind\{b\} \rceil$

Les noms équinumériques sont inductifs ensemble

1	ab	$Ind\{a\}$	hyp
2		$a \infty b$	hyp
3		$Ind_{\infty}\{\wedge\} \wedge \lfloor cd \rfloor \lceil c \varepsilon a \wedge Ind_{\infty}\{d\}. \supset Ind_{\infty}\{d \cup c\} \rceil.$	
		$\supset Ind_{\infty}\{a\}$	1,D3.1
4		$Ind_{\infty}\{\wedge\}$	T3.6-1
5	cd	$c \varepsilon a$	hyp
6		$Ind_{\infty}\{d\}$	hyp
7	b	$\{d \cup c\} \infty b$	hyp
8		$c \varepsilon d \vee \sim (c \varepsilon d)$	tiers exclu
9		$c \varepsilon d$	hyp
10		$d \infty b$	7,9,T3.6-2
11		$Ind_{\infty}\{d\}$	6,reit
12		$Ind\{b\}$	10,11,D3.5,$\lfloor\rfloor$e,$\supset$e
13		$\sim (c \varepsilon d)$	hyp
14		$c \varepsilon c$	5,T0.2
15		$c \varepsilon \{d \cup c\}$	14,$\cup$i
16		$\sim Emp\{d \cup c\}$	15,D0.10
17		$\sim Emp\{b\}$	7,16,$\sim$T1.8
18		$\lfloor \exists e \rfloor \lceil e \varepsilon b \rceil$	17,D0.10
19	e	$e \varepsilon b$	hyp
20		$d \infty \{b - e\}$	7,13,14,19,T3.6-3
21		$Ind_{\infty}\{d\}$	6,reit
22		$Ind\{b - e\}$	20,21,D3.5,$\lfloor\rfloor$e,$\supset$e
23		$Sin\{e\}$	19,T0.8
24		$Ind\{e\}$	23,T3.3
25		$Ind\{\{b - e\} \cup e\}$	22,24,T3.4
26		$\{\{b - e\} \cup e\} \approx b$	19,T3.5-4
27		$Ind\{b\}$	25,26,Ext
28		$Ind\{b\}$	18,19-27,$\exists$e
29		$Ind\{b\}$	8,9-12,13-28,$\vee$e
30		$\lfloor b \rfloor \lceil \{d \cup c\} \infty b \supset Ind\{b\} \rceil$	7-29,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

31	$Ind_{\infty}\{d \cup c\}$	30,D3.5
32	$\lfloor cd \rfloor \lceil c \varepsilon a \wedge Ind_{\infty}\{d\}. \supset Ind_{\infty}\{d \cup c\}\rceil$	5-31,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
33	$Ind_{\infty}\{a\}$	3,4,32,$\supset$e
34	$\lfloor b \rfloor \lceil a \infty b \supset Ind\{b\}\rceil$	33,D3.5
35	$Ind\{b\}$	2,34,$\supset$e
	Th.	1-35,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

*T*3.7 : $N[Ind]$ T3.6, D2.3

*D*3.6 : $\lfloor a \rfloor \lceil Find\{a\} \equiv \lfloor b \rfloor \lceil b \subset a \wedge \sim (a \subset b). \supset \sim (a \infty b)\rceil\rceil$ Dfs[s/n]
Finitude au sens de Dedekind

$T3.8-1 : \lfloor ab \rfloor \lceil b \subset a \,.\supset \lfloor \exists c \rfloor \lceil \{c \cup b\} \approx a \,\wedge\, \sim \lfloor \exists d \rfloor \lceil d \,\varepsilon\, c \wedge d \,\varepsilon\, b \rceil \rceil \rceil$

1	ab	$b \subset a$	hyp
2	d	$d\,\varepsilon\,\{a-b\}$	hyp
3		$\sim (d\,\varepsilon\, b)$	2,D0.18
4		$\lfloor d \rfloor \lceil d\,\varepsilon\,\{a-b\} \supset\sim (d\,\varepsilon\,b)\rceil$	2-3,⊃i,⌊⌋i
5		$\sim (\lfloor \exists d \rfloor \lceil d\,\varepsilon\,c \wedge d\,\varepsilon\,b\rceil$	4
6	e	$e\,\varepsilon\,\{\{a-b\} \cup b\}$	hyp
7		$e\,\varepsilon\,\{a-b\} \vee e\,\varepsilon\,b$	6,D0.16
8		$e\,\varepsilon\,\{a-b\}$	hyp
9		$e\,\varepsilon\,a$	8,D0.18
10		$e\,\varepsilon\,b$	hyp
11		$b \subset a$	1,reit
12		$e\,\varepsilon\,a$	10,11,D0.1
13		$e\,\varepsilon\,a$	7,8-9,10-12,∨e
14		$e\,\varepsilon\,a$	hyp
15		$e\,\varepsilon\,b \vee \sim (e\,\varepsilon\,b)$	tiers exclu
16		$e\,\varepsilon\,b$	hyp
17		$e\,\varepsilon\,\{\{a-b\} \cup b\}$	16,∪i
18		$\sim (e\,\varepsilon\,b)$	hyp
19		$e\,\varepsilon\,a$	14,reit
20		$e\,\varepsilon\,\{a-b\}$	18,19,∧i,D0.18
21		$e\,\varepsilon\,\{\{a-b\} \cup b$	20,∪i,D0.16
22		$e\,\varepsilon\,\{\{a-b\} \cup b$	15,16-17,18-21,∨e
23		$e\,\varepsilon\,\{a-b\} \cup b\} \equiv e\,\varepsilon\,a$	6-13,14-22,≡i
24		$\lfloor e \rfloor \lceil e\,\varepsilon\,\{a-b\} \cup b\} \equiv e\,\varepsilon\,a\rceil$	6-23,⌊⌋i
25		$\{a-b\} \cup b \approx a$	24,D0.6
26		$\lfloor \exists c \rfloor \lceil \{c \cup b\} \approx a \wedge \sim \lfloor \exists d \rfloor \lceil d\,\varepsilon\,c \wedge d\,\varepsilon\,b\rceil\rceil$	5,25,∧i,∃i,c/a-b
	$Th.$		1-26,⊃i,⌊⌋i

$D3.7(aux) : \lfloor b \rfloor \lceil \diamond\{b\} \equiv \lfloor a \rfloor \lceil \{a \cup b\} \infty b \wedge \sim \lfloor \exists e \rfloor \lceil e \varepsilon b \wedge e \varepsilon a . \supset a \infty \wedge \rceil \rceil \rceil$

$T3.8 - 2 : \diamond\{\wedge\}$

1	a	$\{a \cup \wedge\} \infty \wedge$	hyp
2		$\sim \lfloor \exists e \rfloor \lceil e \varepsilon \wedge . \wedge . e \varepsilon a \rceil$	hyp
3		$\{a \cup \wedge\} \approx a$	T0.13
4		$\{a \cup \wedge\} \infty a$	T1.6
5		$a \infty \wedge$	1,4,T1.4,T1.5
	$Th.$		1-5,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$T3.8-3 : \lfloor b \rfloor \lceil Ind\{b\} \supset \lfloor a \rfloor \lceil \{a \cup b\} \infty b \wedge \sim \lfloor \exists e \rfloor \lceil e \varepsilon b \wedge e \varepsilon a \rceil \supset a \infty \wedge \rceil \rceil$

1	b		$Ind\{b\}$	hyp
2			$\diamond\{\wedge\} \wedge \lfloor cd \rfloor \lceil c \varepsilon b \wedge \diamond\{d\}. \supset \diamond\{d \cup c\} \rceil. \supset \diamond\{b\}$	1,D3.1,$\varphi/\diamond$
3			$\diamond\{\wedge\}$	T3.8-2
4		cd	$c \varepsilon b \wedge \diamond\{d\}$	hyp
5			$\lfloor a \rfloor \lceil \{a \cup d\} \infty d \wedge \sim \lfloor \exists e \rfloor \lceil e \varepsilon d \wedge e \varepsilon a \rceil. \supset a \infty \wedge \rceil$	4,D3.7,$\wedge$e
6		a	$\{a \cup \{d \cup c\}\} \infty \{d \cup c\} \wedge$ $\sim \lfloor \exists e \rfloor \lceil e \varepsilon \{d \cup c\} \wedge e \varepsilon a \rceil$	hyp
7			$c \varepsilon c$	4,$\wedge$e,reit,T0.2
8			$c \varepsilon \{d \cup c\}$	9,$\cup$i
9			$\sim (c \varepsilon a)$	6,8,e/c
10			$c \varepsilon d \vee \sim (c \varepsilon d)$	tiers exclu
11			$c \varepsilon d$	hyp
12			$\{d \cup c\} \approx d$	11,D0.6,D016
13			$\diamond\{d\}$	4,$\wedge$e,reit
14			$\diamond\{d \cup c\}$	12,13,Ext
15			$a \infty \wedge$	6,14, D3.7,$\supset$e
16			$\sim (c \varepsilon d)$	hyp
17			$\sim (c \varepsilon a)$	9,reit
18			$\sim (c \varepsilon \{a \cup d\})$	16,17,D0.16
19			$c \varepsilon c$	9,reit
20			$\{\{a \cup d\} \cup c\} \infty \{d \cup c\}$	6,$\wedge$e,reit
21			$\{a \cup d\} \infty d$	16,18,19,20,T1-10
22			$a \infty \wedge$	5,6,21,$\supset$e
23			$a \infty \wedge$	10,11-15,16-22,$\vee$e
24			$\diamond\{d \cup c\}$	6-23,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i, D3.7
25			$\lfloor cd \rfloor \lceil c \varepsilon b \wedge \diamond\{d\}. \supset \diamond\{d \cup c\} \rceil$	4-24,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
26			$\diamond\{b\}$	2,3,25,$\wedge$e
	Th.			1-26,$\supset$i,D3.7,$\lfloor\rfloor$i

$T3.8 : \lfloor a \rfloor \lceil Ind\{a\} \supset FinDed\{a\} \rceil$

1	a | $Ind\{a\}$	hyp
2	b | $b \subset a$	hyp
3	$\sim (a \subset b)$	hyp
4	$a \infty b$	hyp
5	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil \{c \cup b\} \approx a \wedge \sim \lfloor \exists d \rfloor \lceil d \,\varepsilon\, c \wedge d \,\varepsilon\, b \rceil \rceil$	2,T3.8-1
6	c | $\{c \cup b\} \approx a$	hyp
7	$\sim \lfloor \exists d \rfloor \lceil d \,\varepsilon\, c \wedge d \,\varepsilon\, b \rceil$	hyp
8	$a \infty b$	4,reit
9	$\{c \cup b\} \infty b$	6,8,Ext
10	$Ind\{b\}$	1,2,T3.5
11	$\{c \cup b\} \infty b \;\wedge \sim \lfloor \exists d \rfloor \lceil d \,\varepsilon\, b \wedge d \,\varepsilon\, c \rceil$	
	$\supset c \infty \Lambda$	10,T3.8-3,$\lfloor\rfloor$e,a/c
12	$c \infty \Lambda$	7,9,$\supset$e
13	$c \approx \Lambda$	12,T1.8,D0.4
14	$\{c \cup b\} \approx b$	13,T0.14
15	$b \approx a$	6,14,Ext
16	$\lfloor d \rfloor \lceil d \,\varepsilon\, b \equiv d \,\varepsilon\, a \rceil$	15,D0.6
17	$\lfloor d \rfloor \lceil d \,\varepsilon\, b \supset d \,\varepsilon\, a \rceil$	16
18	$a \subset b$	17,D1.1
19	$a \subset b$	5,6-18,$\exists$e
20	$\sim (a \subset b)$	3,reit
21	$\sim (a \infty b)$	4,19,20,$\sim$i
22	$\lfloor b \rfloor \lceil b \subset a \wedge \sim (a \subset b). \supset \sim (a \infty b \rceil$	2-21,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
23	$FinDed\{a\}$	22,D3.6
	$Th.$	1-23,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$D3.8 : \lfloor a \rfloor \lceil FinT\{a\} \equiv \lfloor b \rfloor \lceil b \,\varepsilon\, a \supset \sim (a \infty \{a - b\}) \rceil \rceil$ Dfs[s/n]
Finitude «Tout»

$T3.9 : \lfloor a \rfloor \lceil FinDed\{a\} \supset FinT\{a\} \rceil$

1	$a \quad FinDed\{a\}$	hyp
2	$\lfloor b \rfloor \lceil b \subset a \wedge \sim (a \subset b). \supset \sim (a \infty b) \rceil$	D3.6
3	$b \quad b \, \varepsilon \, a$	hyp
4	$\{a - b\} \subset a \wedge \sim (a \subset \{a - b\}). \supset \sim (a \infty \{a - b\})$	1,$\lfloor\rfloor$e,b/a-b
5	$c \quad c \, \varepsilon \, \{a - b\}$	hyp
6	$c \, \varepsilon \, a \wedge \sim (c \, \varepsilon \, b)$	5,D0.18
7	$c \, \varepsilon \, a$	6,$\wedge$e
8	$\lfloor c \rfloor \lceil c \, \varepsilon \{a - b\} \supset c \, \varepsilon \, a \rceil$	5-7,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
9	$\{a - b\} \subset a$	7,D0.1
10	$a \subset \{a - b\}$	hyp
11	$\lfloor c \rfloor \lceil c \, \varepsilon \, a \supset c \, \varepsilon \, \{a - b\} \rceil$	10,D0.1
12	$b \, \varepsilon \, a \supset b \, \varepsilon \, \{a - b\}$	11,$\lfloor\rfloor$e, c/b
13	$b \, \varepsilon \, a$	3,reit
14	$b \, \varepsilon \, \{a - b\}$	12,13,$\supset$e
15	$\sim (b \, \varepsilon \, b)$	14,D0.18,$\wedge$e
16	$b \, \varepsilon \, b$	14,T0.2
17	$\sim (a \subset \{a - b\})$	10,15,16,$\sim$i
18	$\sim (a \infty \{a - b\})$	4,9,17,$\supset$e
19	$\lfloor b \rfloor \lceil b \, \varepsilon \, a \supset \sim (a \infty \{a - b\}) \rceil$	3-18-$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
20	$FinT\{a\}$	19,D3.8
	$Th.$	1-20,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$D3.9 : \lfloor a \rfloor \lceil FinQ\{a\} \equiv .Emp\{a\} \vee \lfloor \exists b \rfloor \lceil b \, \varepsilon \, a \wedge \sim (a \infty \{a - b\}) \rceil \rceil$ Dfs[s/n]
Finitude «quelque»

$T3.10 : \lfloor a \rfloor \lceil FinT\{a\} \supset Fin\{a\} \rceil$

1	a	$FinT\{a\}$	hyp
2		$\sim Emp\{a\}$	hyp
3		$\lfloor \exists c \rfloor \lceil c \,\varepsilon\, a \rceil$	2,D0.10
4	c	$c \,\varepsilon\, a$	hyp
5		$\sim (a \infty \{a - c\})$	1,reit,4,D3.8
6		$\lfloor \exists b \rfloor \lceil b \varepsilon a \wedge \sim (a \infty \{a - b\}) \rceil$	4,5,$\wedge$i,$\exists$i,c/b
7		$\lfloor \exists b \rfloor \lceil b \varepsilon a \wedge \sim (a \infty \{a - b\}) \rceil$	2,4,6,$\exists$e
8		$Emp\{a\} \vee \lfloor \exists b \rfloor \lceil b \,\varepsilon\, a \wedge \sim (a \infty \{a - b\}) \rceil$	2-7,$\supset$i
9		$FinQ\{a\}$	8,D3.9
	$Th.$		1-9,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

4. Axiome de l'infini

$*AxInf : \lfloor \exists aR \rfloor \lceil a \,\varepsilon\, a \wedge \lfloor bcd \rfloor \lceil R\{bd\} \wedge R\{cd\}. \vee .R\{db\} \wedge R\{dc\} :\supset$
$b \,\varepsilon\, c \rceil \wedge \lfloor b \rfloor \lceil b \,\varepsilon\, b \supset . \lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{bc\} \rceil \wedge \lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{cb\} \rceil \equiv\sim (b \,\varepsilon\, a) \rceil \rceil$

Il y a un individu a *et une relation bi-univoque* R *telle que son domaine contient tout individu et son co-domaine tout individu sauf* a.

$*T4.1 :\sim Emp\{\vee\}$

1		$\lfloor \exists a \rfloor \lceil a \,\varepsilon\, a \rceil$	*AxInf,∧e
2	a	$a \,\varepsilon\, a$	hyp
3		$a \,\varepsilon \vee$	2,D0.15
4		$\lfloor \exists b \rfloor \lceil b \,\varepsilon \vee \rceil$	3,∃i,a/b
5		$\lfloor \exists b \rfloor \lceil b \,\varepsilon \vee \rceil$	1,2-4,∃e
6		$Emp\{\vee\} \equiv\sim \lfloor \exists b \rfloor \lceil b \,\varepsilon \vee \rceil$	D0.10
		$Th.$	5,6,∼≡e

$*T4.2 : \lfloor \exists a \rfloor \lceil a\varepsilon \vee \wedge (\vee \infty \{\vee - a\}) \rceil$

1	$AxInf$	*AxInf
2	$Ra \quad a \,\varepsilon\, a$	hyp
3	$\lfloor bcd \rfloor \lceil R\{bd\} \wedge R\{cd\}. \vee .R\{db\} \wedge R\{dc\} :\supset b \,\varepsilon\, c \rceil$	hyp
4	$\lfloor b \rfloor \lceil b \,\varepsilon\, b \supset : \lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{bc\} \rceil \ \wedge .$	
	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{cb\} \rceil \equiv \sim (b \,\varepsilon\, a) \rceil$	hyp
5	$a \,\varepsilon \vee$	2,D0.15
6	$OneOne(R)$	3,D1.1
7	$b \quad b \,\varepsilon \vee$	hyp
8	$b \,\varepsilon\, b$	7,D0.15
9	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{bc\} \rceil$	4,8,⊃e,∧e
10	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{bc\} \rceil$	hyp
11	$Obj(R)$	6,T1.1
12	$Sin\{b\}$	10,11,D0.13
13	$b \,\varepsilon\, b$	12,D0.9
14	$b \,\varepsilon \vee$	13,D0.15
15	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{bc\} \rceil \equiv b \,\varepsilon \vee$	7-9,10-14,≡i
16	$Dom(R)\{\vee\}$	7-15,⌊⌋i,D1.2
17	$b \quad b \,\varepsilon\, \{\vee - a\}$	hyp
18	$\sim (b \,\varepsilon\, a)$	17,D0.18,∧e
19	$b \,\varepsilon\, b$	17,T0.2
20	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{cb\} \rceil \equiv \sim (b \,\varepsilon\, a)$	4,19,⊃e,∧e
21	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{cb\} \rceil$	18,20,≡e
22	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{cb\} \rceil$	hyp
23	$Obj(R)$	6,T1.1
24	$Sin\{b\}$	22,23,D0.13
25	$b \,\varepsilon\, b$	24,D0.9
26	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{cb\} \rceil \equiv \sim (b \,\varepsilon\, a)$	4,25,⊃e,∧e
27	$\sim (b\varepsilon a)$	22,26,≡e
28	$b \,\varepsilon \vee$	25,D0.15
29	$b \,\varepsilon\, \{\vee - a\}$	27,28,D0.18
30	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{cb\} \rceil \equiv b \,\varepsilon\, \{\vee - a\}$	17-21,22-29,≡i
31	$Cdom(R)\{\vee - a\}$	17-30,⌊⌋i,D1.3
32	$\lfloor \exists R \rfloor \lceil OneOne(R) \wedge Dom(R)\{\vee\} \wedge Cdom(R)\{\vee - a\} \rceil$	6,16,31,∧i,∃i
33	$\vee \infty \{\vee - a\}$	32,D1.4
34	$\lfloor \exists a \rfloor \lceil a\varepsilon \vee . \wedge . \vee \infty \{\vee - a\} \rceil$	5,33,∧i,∃i
	$Th.$	1,2-34,∃e

$*T4.3 :\sim FinT\{\vee\}$

1		$\lfloor \exists a \rfloor \lceil a\,\varepsilon \vee\ .\wedge.\ \vee \infty\{\vee - a\} \rceil$	*T4.2
2	a	$a\,\varepsilon \vee\ .\wedge.\ \vee \infty\{\vee - a\}$	hyp
3		$\lfloor a \rfloor \lceil a\,\varepsilon \vee \supset \sim (\vee\infty\{\vee - a\}) \rceil$	hyp
4		$a\,\varepsilon \vee$	2,reit,$\wedge$e
5		$\sim (\vee\infty\{\vee - a\})$	3,4,$\supset$e
6		$\vee\infty\{\vee - a\}$	2,reit,$\wedge$e
7		$\sim \lfloor a \rfloor \lceil a\,\varepsilon \vee \supset \sim (\vee\infty\{\vee - a\}) \rceil$	3,5,6,$\sim$i
8		$\sim FinT\{\vee\}$	7,D3.4,$\sim\equiv$e
		Th.	1,2-8,$\exists$e

$*T4.4 :\sim FinDed\{\vee\}$ $\quad *T4.3, T3.8$,$\sim\supset$e

$*T4.5 :\sim Ind\{\vee\}$ $\quad *T4.4, T3.7$,$\sim\wedge$e

$*T4.6 : \lfloor a \rfloor \lceil FinT\{a\} \supset \lfloor \exists b \rfloor \lceil b\,\varepsilon\, b \wedge \sim (b\,\varepsilon\, a) \rceil \rceil$
Aucun nom fini-T ne dénote tous les individus

1	a	$FinT\{a\}$	hyp
2		$\sim \lfloor \exists b \rfloor \lceil b\,\varepsilon\, b \wedge \sim (b\,\varepsilon\, a) \rceil$	hyp
3		$\lfloor b \rfloor \lceil b\,\varepsilon\, b \supset b\,\varepsilon\, a \rceil$	2
4	b	$b\,\varepsilon\, a$	hyp
5		$b\,\varepsilon\, b$	4,T0.2
6		$b\,\varepsilon \vee$	5,D0.15
7		$b\,\varepsilon \vee$	hyp
8		$b\,\varepsilon\, b$	7,T0.2
9		$b\,\varepsilon\, a$	3,8,$\supset$e
10		$b\,\varepsilon \vee \equiv b\,\varepsilon\, a$	4-6,7-9,$\equiv$i
11		$\lfloor b \rfloor \lceil b\,\varepsilon \vee \equiv b\,\varepsilon\, a \rceil$	4-10,$\lfloor\rfloor$i
12		$\vee \approx a$	11,D0.6
13		$FinT\{\vee\}$	1,12,Ext
14		$\sim FinT\{\vee\}$	*T4.3
15		$\sim\sim \lfloor \exists b \rfloor \lceil b\,\varepsilon\, b \wedge \sim (b\,\varepsilon\, a) \rceil$	2,13,14,$\sim$i
16		$\lfloor \exists b \rfloor \lceil b\,\varepsilon\, b \wedge \sim (b\,\varepsilon\, a) \rceil$	15,$\sim\sim$e
		Th.	1-16,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$*T4.7 : \lfloor a \rfloor \lceil FinDed\{a\} \supset \lfloor \exists b \rfloor \lceil b \,\varepsilon\, b \wedge \sim (b \,\varepsilon\, a) \rceil \rceil$ *T4.6,T3.8
Aucun nom fini-Ded ne dénote tous les individus

$*T4.8 : \lfloor a \rfloor \lceil Ind\{a\} \supset \lfloor \exists b \rfloor \lceil b \,\varepsilon\, b \wedge \sim (b \,\varepsilon\, a \rceil \rceil$ *T4.7,T3.7
Aucun nom inductif ne dénote tous les individus

5. Termes primitifs de Peano

$D5.1 : \lfloor a \rfloor \lceil 0\{a\} \equiv a\infty\wedge \rceil$ Dfs[s/n]
Zéro

$T5.1 : 0 \approx Emp$

1	a	$Emp\{a\}$	hyp
2		$Emp\{\wedge\}$	T0.11
3		$a\infty\wedge$	1,2,T1.7
4		$0\{a\}$	3,D5.1
5		$0\{a\}$	hyp
6		$a\infty\wedge$	5,D5.1
7		$Emp\{\wedge\}$	T0.11
8		$Emp\{a\}$	6,7,T1.8
9		$0\{c\} \equiv Emp\{a\}$	1-4,5-8,≡i
	Th.		1-9,⌊⌋i,D0.11

$T5.2 : 0 \approx \infty\langle\wedge\rangle$

1	a	$0\{a\}$	hyp
2		$Emp\{a\}$	1,T5.1
3		$Emp\{\wedge\}$	T0.11
4		$\wedge\infty a$	2,3,T1.7
5		$\infty\langle\wedge\rangle\{a\}$	4,D2.1
6		$\infty\langle\wedge\rangle\{a\}$	hyp
7		$\wedge\infty a$	6,D2.1
8		$Emp\{\wedge\}$	T0.11
9		$Emp\{a\}$	7,8,T1.9
10		$0\{a\}$	9,T5.1
11		$0\{a\} \equiv \infty\langle\wedge\rangle\{a\}$	1-5,6-10,≡i
	Th.		1-11,⌊⌋i,D0.11

$T5.3 : Ind[0]$

1	a	$0\{a\}$	hyp
2		$a\infty\wedge$	1,D5.1
3		$\wedge\infty a$	2,T1.4
4		$Ind\{\wedge\}$	T3.1
5		$Ind\{a\}$	3,4,T3.6
6	$\lfloor a\rfloor\lceil 0\{a\} \supset Ind\{a\}\rceil$		1-5,⊃i,⌊⌋i
	$Th.$		6,D3.2

$T5.4 : Cn[0]$

1	$0 \approx \infty\langle\wedge\rangle$	T5.2
2	$\lfloor\exists a\rfloor\lceil 0 \approx \infty\langle a\rangle\rceil$	1,∃i
	$Th.$	2,D2.2

$T5.5 : ![0]$ T5.4,T2.5,≡e,∧e

$T5.6 : N[0]$ T5.4,T2.5,≡e,∧e

$T5.7 : Q[0]$ T5.4,T2.5,≡e,∧e

$D5.2 : \lfloor\varphi a\rfloor\lceil S\langle\varphi\rangle\{a\} \equiv \lfloor\exists b\rfloor\lceil b\,\varepsilon\, a \wedge \varphi\{a - b\}\rceil\rceil$ Dfs[(s/n)/(s/n)]
Successeur

$T5.8 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil ![S\langle\varphi\rangle] \supset ![\varphi]\rceil$

1	$\varphi \mid\ ![S\langle\varphi\rangle]$	hyp
2	$\lfloor\exists a\rfloor\lceil S\langle\varphi\rangle\{a\}\rceil$	1,D0.12
3	$S\langle\varphi\rangle\{a\}$	hyp
4	$\lfloor\exists a\rfloor\lceil b\,\varepsilon\, a \wedge \varphi\{a-b\}\rceil$	3,D5.2
5	$b \mid b\,\varepsilon\, a$	hyp
6	$\varphi\{a-b\}$	hyp
7	$\lfloor\exists c\rfloor\lceil\varphi\{c\}\rceil$	6,∃i,c/a-b
8	$\lfloor\exists c\rfloor\lceil\varphi\{c\}\rceil$	4,5-7,∃e
9	$\lfloor\exists c\rfloor\lceil\varphi\{c\}\rceil$	2,3-8,∃e
10	$![\varphi]$	9,D0.12
	Th.	1-10,⊃i,⌊⌋i

$T5.9-1 : \lfloor a\rfloor\lceil\sim(a\approx\vee) \supset \lfloor\exists b\rfloor\lceil b\,\varepsilon\, b \wedge \sim(b\,\varepsilon\, a)\rceil\rceil$

1	$a \mid \sim(a\approx\vee)$	hyp
2	$\sim\lceil\exists b\rfloor\lceil b\,\varepsilon\, b \wedge \sim(b\,\varepsilon\, a)\rceil$	hyp
3	$\lfloor b\rfloor\lceil b\,\varepsilon\, b \supset b\,\varepsilon\, a\rceil$	2
4	$a \mid b\,\varepsilon\, a$	hyp
5	$b\,\varepsilon\, b$	4,T0.2
6	$b\,\varepsilon\,\vee$	5,D0.15
7	$b\,\varepsilon\,\vee$	hyp
8	$b\,\varepsilon\, b$	7,D0.15
9	$b\,\varepsilon\, a$	3,reit,8,⊃e
10	$b\,\varepsilon\,\vee \equiv b\,\varepsilon\, a$	4-6,7-9,≡i
11	$\lfloor a\rfloor\lceil b\,\varepsilon\,\vee \equiv b\,\varepsilon\, a\rceil$	4-10,⌊⌋i
12	$a\approx\vee$	11,D0.6
13	$\sim(a\approx\vee)$	1,reit
14	$\lfloor\exists b\rfloor\lceil b\,\varepsilon\, b \wedge \sim(b\,\varepsilon\, a)\rceil$	2,12,13,∼i,∼∼e
	Th.	1-14,⊃i,⌊⌋i

$*T5.9-2 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil ![\varphi] \wedge N[\varphi]. \supset \lfloor\exists a\rfloor\lceil\varphi\{a\}\wedge \sim (a \approx \vee)\rceil\rceil$

1	$\varphi \mid N[\varphi] \wedge ![\varphi]$	hyp
2	$\mid\ \mid \sim\varphi\{\vee\} \vee \varphi\{\vee\}$	tiers exclu
3	$\mid\ \mid\ \mid \sim\varphi\{\vee\}$	hyp
4	$\mid\ \mid\ \mid ![\varphi]$	1,∧e,reit
5	$\mid\ \mid\ \mid \lfloor\exists a\rfloor\lceil\varphi\{a\}\rceil$	4,D0.12
6	$\mid\ \mid\ \mid a \mid \varphi\{a\}$	hyp
7	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \sim\varphi\{\vee\}$	3,reit
8	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \sim (a \approx \vee\}$	6,7,Ext
9	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \varphi\{a\}\wedge \sim (a \approx \vee)$	6,8,∧i
10	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \lfloor\exists a\rfloor\lceil\varphi\{a\}\wedge \sim (a \approx \vee)\rceil$	9,∃i
11	$\mid\ \mid\ \mid \lfloor\exists a\rfloor\lceil\varphi\{a\}\wedge \sim (a \approx \vee)\rceil$	5,6-10,∃e
12	$\mid\ \mid\ \mid \varphi\{\vee\}$	hyp
13	$\mid\ \mid\ \mid \sim \mathit{FinDed}\{\vee\}$	*T4.4
14	$\mid\ \mid\ \mid \lfloor\exists a\rfloor\lceil a \subset \vee. \wedge . \sim (\vee \subset a) \wedge (\vee \infty a)\rceil$	13,D3.6
15	$\mid\ \mid\ \mid a \mid a \subset \vee. \wedge . \sim (\vee \subset a)$	hyp
16	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \vee \infty a$	hyp
17	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \sim (a \approx \vee)$	15,D0.1,D0.6
18	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \varphi\{\vee\}$	12,reit
19	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid N[\varphi]$	1,∧e,reit
20	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \varphi\{a\}$	16,18,∧i,19,D2.3
21	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \varphi\{a\}\wedge \sim (a \approx \vee)$	17,20,∧i
22	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \lfloor\exists a\rfloor\lceil\varphi\{a\}\wedge \sim (a \approx \vee)\rceil$	21,∃i
23	$\mid\ \mid\ \mid \lfloor\exists a\rfloor\lceil\varphi\{a\}\wedge \sim (a \approx \vee)\rceil$	14,15-22,∃e
24	$\mid\ \mid \lfloor\exists a\rfloor\lceil\varphi\{a\}\wedge \sim (a \approx \vee)\rceil$	2,3-11,12-23,∨e
	$\mid \mathit{Th}.$	1-24,⊃i,⌊⌋i

$*T5.9 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil Cn[\varphi] \supset ![S\langle\varphi\rangle]\rceil$

1	$\varphi \quad Cn[\varphi]$	hyp
2	$![\varphi] \wedge N[\varphi]$	1,T2.5
3	$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\varphi\{a\}\wedge\sim(a\approx\vee)\rceil$	2,T5.9-2
4	$a \quad \varphi\{a\}$	hyp
5	$\sim(a\approx\vee)$	hyp
6	$\lfloor\exists b\rfloor\lceil b\,\varepsilon\, b\wedge\sim(b\,\varepsilon\, a)\rceil$	5,T5.9-1
7	$b\,\varepsilon\, b\wedge\sim(b\,\varepsilon\, a)$	hyp
8	$b\,\varepsilon\, b$	7,∧e
9	$b\,\varepsilon\,\{a\cup b\}$	8,∪i
10	$\sim(b\,\varepsilon\, a)$	7,∧e
11	$\{\{a\cup b\}-b\}\approx a$	8,10
12	$\varphi\{a\}$	4,reit
13	$\varphi\{\{a\cup b\}-b\}$	11,12,Ext
14	$b\,\varepsilon\,\{a\cup b\}\wedge\varphi\{\{a\cup b\}-b\}$	9,13,∧i
15	$\lfloor\exists c\rfloor\lceil c\,\varepsilon\,\{a\cup b\}\wedge\varphi\{\{a\cup b\}-c\}\rceil$	10,∃i,b/c
16	$S\langle\varphi\rangle\{a\cup b\}$	15,D5.2
17	$\lfloor\exists d\rfloor\lceil S\langle\varphi\rangle\{d\}\rceil$	16,∃i,a∪b/d
18	$![S\langle\varphi\rangle]$	17,D0.12
19	$![S\langle\varphi\rangle]$	6,7-18,∃e
20	$![S\langle\varphi\rangle]$	3,4-19,∃e
	Th.	1-20,⊃i,⌊⌋i

$T5.10 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil N[\varphi] \supset N[S\langle\varphi\rangle]\rceil$

1	φ	$N[\varphi]$	hyp
2	ab	$S\langle\varphi\rangle\{a\}$	hyp
3		$a\infty b$	hyp
4		$\lfloor\exists c\rfloor\lceil c\,\varepsilon\, a \wedge \varphi\{a-c\}\rceil$	2,D5.2
5	c	$c\,\varepsilon\, a$	hyp
6		$\varphi\{a-c\}$	hyp
7		$a\infty b$	3,reit
8		$!\{a\}$	5,D0.8
9		$!\{b\}$	7,8,T1.8
10		$\lfloor\exists d\rfloor\lceil d\varepsilon b\rceil$	9,D0.8
11	d	$d\,\varepsilon\, b$	hyp
12		$\{\{b-d\}\cup d\} \approx b$	11,T3.5-4
13		$c\,\varepsilon\, a$	5,reit
14		$\{\{a-c\}\cup c\} \approx a$	13,T3.5-4
}15		$\}\{b-d\}\cup d\} \infty \{\{a-c\}\cup c$	12,14,Ext
16		$d\,\varepsilon\, d$	11,T0.1
17		$c\,\varepsilon\, c$	13,T0.1
18		$\sim (d\,\varepsilon\,\{b-d\})$	D0.18
19		$\sim (c\,\varepsilon\,\{a-c\})$	D0.18
20		$\{b-d\}\infty\{a-c\}$	15,16,17,18,19,T1.10
21		$\varphi\{b-d\}$	1,6,20,D2.3
22		$\lfloor\exists d\rfloor\lceil d\,\varepsilon\, b \wedge \varphi\{b-d\}\rceil$	11,21,∧i,∃i
23		$S\langle\varphi\rangle\{b\}$	22,D5.2
24		$S\langle\varphi\rangle\{b\}$	11-23,∃e
25		$S\langle\varphi\rangle\{b\}$	5-24,∃e
26		$\lfloor ab\rfloor\lceil S\langle\varphi\rangle\{a\} \wedge a\infty b. \supset S\langle\varphi\rangle\{b\}\rceil$	2-25,⊃i,⌊⌋i
27		$N[S\langle\varphi\rangle]$	26,D2.3
		Th.	1-27,⌊⌋i

$T5.11 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil Q[\varphi] \supset Q[S\langle\varphi\rangle]\rceil$

1	$\varphi \mid Q[\varphi]$	hyp
2	$ab \mid S\langle\varphi\rangle\{a\}$	hyp
3	$S\langle\varphi\rangle\{b\}$	hyp
4	$\lfloor\exists c\rfloor\lceil c\,\varepsilon\, a \wedge \varphi\{a-c\}\rceil$	2,D5-2
5	$c \mid c\,\varepsilon\, a$	hyp
6	$\varphi\{a-c\}$	hyp
7	$\lfloor\exists d\rfloor\lceil d\,\varepsilon\, b \wedge \varphi\{b-d\}\rceil$	3,reit,D5.2
8	$d \mid d\,\varepsilon\, b$	hyp
9	$\varphi\{b-d\}$	hyp
10	$\{a-c\}\infty\{b-d\}$	1,6,8,9,D2.4
11	$\sim(c\,\varepsilon\,\{a-c\})$	D0.18
12	$\sim(d\,\varepsilon\,\{b-d\})$	D0.18
13	$c\,\varepsilon\, c$	5,T0.1
14	$d\,\varepsilon\, d$	8,T0.2
15	$\{\{a-c\}\cup c\}\infty\{\{b-d\}\cup d\}$	10,11,12,13,14,T1.10
16	$\{\{a-c\}\cup c\} \approx a$	5,T3.5-4
17	$\{\{b-d\}\cup d\} \approx b$	8,T3.5-4
18	$a\infty b$	15,16,17,Ext
19	$a\infty b$	7,8-18,∃e
20	$a\infty b$	4,5-19,∃e
21	$\lfloor ab\rfloor\lceil S\langle\varphi\rangle\{a\} \wedge S\langle\varphi\rangle\{b\}. \supset a\infty b\rceil$	2-20,⊃i,⌊⌋i
22	$Q[S\langle\varphi\rangle]$	21,D2.4
	Th.	1-22,⊃i,⌊⌋i

$*T5.12 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil Cn[\varphi] \supset Cn[S\langle\varphi\rangle]\rceil$ $\quad T5.9, T5.10, T5.11$

$T5.13 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil \varphi \approx \psi. \supset S\langle\varphi\rangle \approx S\langle\psi\rangle\rceil$ $\quad D5.2$,Ext

$D5.3 : \lfloor a\rfloor\lceil 1\{a\} \equiv S\langle 0\rangle\{a\}\rceil$ $\quad$ Dfs[s/n]
Un

$T5.14 : 1 \approx Sin$

1	a		$1\{a\}$	hyp
2			$S\langle 0\rangle\{a\}$	1,D5.3
3			$\lfloor \exists b \rfloor \lceil b\,\varepsilon\, a \wedge 0\{a-b\} \rceil$	2,D5.2
4		b	$b\,\varepsilon\, a$	hyp
5			$0\{a-b\}$	hyp
6			$\{a-b\} \approx \wedge$	5,D5.1
7			$a\,\varepsilon\, a$	4,6
8			$Sin\{a\}$	7,D0.9
9			$Sin\{a\}$	3,4-8,∃e
10	a		$Sin\{a\}$	hyp
11			$a\,\varepsilon\, a$	10,D0.9
12			$\{a-a\} \approx \wedge$	11,D0.6,D0.14,D0.18
13			$\{a-a\} \infty \wedge$	12,T1.6
14			$0\{a-a\}$	13,D5.1
15			$\lfloor \exists d \rfloor \lceil d\,\varepsilon\ \wedge 0\{a-d\} \rceil$	11,14,∃i,a/b
16			$S\langle 0\rangle\{a\}$	15,D5.2
17			$1\{a\}$	16,D5.3
18			$\lfloor a \rfloor \lceil Sin\{a\} \equiv 1\{a\} \rceil$	1-9,10-17,≡i,⌊⌋i
			$Th.$	18,D0.11

$T5.15 : Ind[1]$

1	a	$1\{a\}$	hyp
2		$Sin\{a\}$	1,T15.14,D0.11
3		$Ind\{a\}$	2,T3.3
4		$\lfloor a \rfloor \lceil 1\{a\} \supset Ind\{a\} \rceil$	1-3,⊃i,⌊⌋i
		$Th.$	4,D3.2

$T5.16 : N[1]$

1	ab	$1\{a\}$	hyp
2		$a\infty b$	hyp
3		$Sin\{a\}$	1,T5.14,D0.11
4		$Sin\{b\}$	2,3
5		$1\{b\}$	4,T5.14,D0.11
6	$\lfloor a \rfloor \lceil 1\{a\} \wedge a\infty b. \supset 1\{b\} \rceil$		1-5.$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
	$Th.$		6,D2.3

$T5.17 : Q[1]$

1	ab	$1\{a\}$	hyp
2		$1\{b\}$	hyp
3		$Sin\{a\}$	1,T5.12,D0.11
4		$Sin\{b\}$	2,T5.12,D0.11
5		$a\infty b$	3,4,T1.12
6	$\lfloor a \rfloor \lceil 1\{a\} \wedge 1\{b\}. \supset a\infty b \rceil$		1-5.$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
	$Th.$		6,D2.4

$*T5.18 :![1]$

1	$![0]$	T5.5
2	$![S\langle 0\rangle]$	1,T5.4,*T5.9
3	$\lfloor \exists a \rfloor \lceil S\langle 0\rangle\{a\} \rceil$	2,D0.12
4	$1\{a\}$	3,D5.3
5	$\lfloor \exists a \rfloor \lceil 1\{a\} \rceil$	4,$\exists$i
	$Th.$	5,D0.12

$*T5.19 : Cn[1]$

1	$![1]$	*T5.18
2	$N[1]$	T5.14
3	$Q[1]$	T5.15
	$Th.$	1,2,3,∧i,T2.7

$T5.20 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil Ind[\varphi] \supset Ind[\langle\varphi\rangle]\rceil$

1	φ	$Ind[\varphi]$			hyp
2		a	$S\langle\varphi\rangle\{a\}$		hyp
3			$\lfloor\exists b\rfloor\lceil b\,\varepsilon\, a \wedge \varphi\{a-b\}\rceil$		2,D5.2
4			b	$b\,\varepsilon\, a$	hyp
5				$\varphi\{a-b\}$	hyp
6				$Ind\{a-b\}$	1,6,D3.2
7				$Sin\{b\}$	4,T0.8
8				$Ind\{b\}$	7,T3.3
9				$Ind\{\{a-b\}\cup b\}$	6,8,T3.4
10				$\{a-b\}\cup b\} \approx a$	4,T3.5-4
11				$Ind\{a\}$	9,10,Ext
12			$Ind\{a\}$		3,4-11,∃e
13		$\lfloor a\rfloor\lceil S\langle\varphi\rangle\{a\} \supset Ind\{a\}\rceil$			1-12,⊃i,⌊⌋i
14		$Ind[S\langle\varphi\rangle]$			13,D3.2
	$Th.$				1-14,⊃i,⌊⌋i

$D5.4 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil Nn[\varphi] \equiv .\, Cn[\varphi] \wedge Ind[\varphi]\rceil$
Nombre naturel

6. Propositions de Peano

$T6.1 : Nn[0]$
Peano I : *0 est un nombre naturel*

1	$Ind[0]$	T5.3
2	$Cn[0]$	T5.4
	$Th.$	1,2,∧i,D5.4

$*T6.2 : Nn[1]$
1 est un nombre naturel

1	$Ind[1]$	T5.15
2	$Cn[1]$	*T5.17
	$Th.$	1,2,∧i,D5.4

$*T6.3 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil Nn[\varphi] \supset Nn[S\langle\varphi\rangle]\rceil$
Peano II : *le successeur d'un nombre naturel est un nombre naturel*

1	φ	$Nn[\varphi]$	hyp
2		$Ind[\varphi]$	1,D5.4
3		$Cn[\varphi]$	1,D5.4
4		$Ind[S\langle\varphi\rangle]$	2,T5.20
5		$Cn[S\langle\varphi\rangle]$	3,*T5.12
6		$Sn[S\langle\varphi\rangle]$	4,5,∧i,D5.4
	$Th.$		1-7,⊃i,⌊⌋i

$T6.4 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil ![S\langle\varphi\rangle] \supset .Nn[\varphi] \supset Nn[S\langle\varphi\rangle]\rceil$
Peano II (affaibli, sans l'axiome de l'infini)

$*T6.5 : \lfloor\varphi\psi\rfloor\lceil Nn[\varphi] \wedge Nn[\psi]. \supset .S\langle\varphi\rangle \approx S\langle\psi\rangle \supset \varphi \approx \psi\rceil$
Peano III : *deux nombres naturels différents ont des successeurs différents*

1	$\varphi\psi$	$Nn[\varphi]$	hyp
2		$Nn[\psi]$	hyp
3		$S\langle\varphi\rangle \approx S\langle\psi\rangle$	hyp
4	a	$\varphi\{a\}$	hyp
5		$Ind[\varphi]$	1,D5.4
6		$Ind\{a\}$	4,5,D3.2
7		$\lfloor\exists b\rfloor\lceil b\,\varepsilon\, b \wedge \sim(b\,\varepsilon\, a)\rceil$	6,*T4.8
8	b	$b\,\varepsilon\, b$	hyp
9		$\sim(b\,\varepsilon\, a)$	hyp
10		$\{\{a \cup b\} - b\} \approx a$	8,9
11		$\varphi\{\{a \cup b\} - b\}$	4,10,Ext
12		$b\,\varepsilon\, a \vee b\,\varepsilon\, b$	8,∨i
13		$b\,\varepsilon\,\{a \cup b\}$	8,12,D0.16
14		$S\langle\varphi\rangle\{a \cup b\}$	11,13,D5.2
15		$S\langle\psi\rangle\{a \cup b\}$	3,14,Ext
16		$\lfloor\exists c\rfloor\lceil c\,\varepsilon\,\{a \cup b\} \wedge \psi\{\{a \cup b\} - c\}\rceil$	15,D5.2
17	c	$c\,\varepsilon\,\{a \cup b\}$	hyp
18		$\psi\{\{a \cup b\} - c\}$	hyp
19		$\{\{a \cup b\} - c\} \cup c\} \approx \{a \cup b\}$	17,T3.5-4
20		$\{\{a \cup b\} - c\} \cup c\} \infty \{a \cup b\}$	19,T1.6
21		$c\,\varepsilon\, c$	17,T0.2
22		$\sim(c\,\varepsilon\,\{\{a \cup b\} - c\})$	21
23		$\{\{a \cup b\} - c\} \infty a$	8,9,20,21,22,T1-10
24		$N[\psi]$	2,T2.5,D5.4
25		$\psi\{a\}$	18,23,24,D2.3
26		$\psi\{a\}$	16,17-25,∃e
27		$\psi\{a\}$	7,8-26,∃e
28		$\lfloor a\rfloor\lceil\varphi\{a\} \supset \psi\{a\}\rceil$	4-27,⊃i,⌊⌋i
29		$\lfloor a\rfloor\lceil\psi\{a\} \supset \varphi\{a\}\rceil$	idem 4-27,⊃i,⌊⌋i
30		$\lfloor a\rfloor\lceil\varphi\{a\} \equiv \psi\{a\}\rceil$	28,29,≡i
31		$\varphi \approx \psi$	30,D0.11
32		$S\langle\varphi\rangle \approx S\langle\psi\rangle \supset \varphi \approx \psi$	3-31,⊃i
		Th.	1-32,⊃i,⌊⌋i

$*T6.6 : \lfloor \varphi\psi \rfloor \lceil Nn[\varphi] \wedge Nn[\psi] . \supset . \varphi \approx \psi \equiv S\langle\varphi\rangle \approx S\langle\psi\rangle \supset \rceil$ *T6.5,T5.13
Peano III (renforcé avec l'unicité du successeur)

$T6.7 - 1 : \lfloor \varphi \rfloor \lceil \sim (S\langle\varphi\rangle \approx 0 \rceil$

1	φ	$S\langle\varphi\rangle \approx 0$	hyp
2		$\wedge \approx \wedge$	T0.6
3		$0\{\wedge\}$	2,D5.1
4		$S\langle\varphi\rangle\{\wedge\}$	1,3,D0.11
5		$\lfloor \exists b \rfloor \lceil b \varepsilon \wedge . \wedge . \varphi\{\wedge - b\} \rceil$	4,D5.2
6		$\lfloor \exists b \rfloor \lceil b \varepsilon \wedge \rceil$	5,∧e
7		$\sim \lfloor \exists b \rfloor \lceil b \varepsilon \wedge \rceil$	T0.12
8		$\sim (S\langle\varphi\rangle \approx 0)$	1,6,7,∼i
	Th.		1-8,⌊⌋i

$T6.7 : \lfloor \varphi \rfloor \lceil Nn[\varphi] \supset \sim (S\langle\varphi\rangle \approx 0) \rceil$ T6.7-1
Peano IV : *0 n'est le sucesseur d'aucun nombre naturel*

$D6.1(aux) : \lfloor a\varphi \rfloor \lceil \bullet[\varphi]\{a\} \equiv \varphi[\infty\langle a\rangle] \rceil$

$T6.8 - 1 : \lfloor \varphi \rfloor \lceil \varphi[0] \supset \bullet[\varphi]\{\wedge\} \rceil$

1	φ	$\varphi[0]$	hyp
2		$0 \approx \infty\langle\wedge\rangle$	T5.2
3		$\varphi[0] \equiv \varphi[\infty\langle\wedge\rangle]$	2,Ext
4		$\varphi[\infty\langle\wedge\rangle]$	1,3,≡e
5		$\bullet[\varphi]\{\wedge\}$	4,D6.1
	Th.		1-5,⊃i,⌊⌋i

$T6.8-2 : \lfloor ab \rfloor \lceil b \varepsilon b :\supset \infty\langle c \cup b\rangle \approx \infty\langle c\rangle . \vee . \infty\langle c \cup b\rangle \approx S\langle \infty\langle c\rangle\rangle \rceil$

1	bc | $b \varepsilon b$	hyp
2	$b \varepsilon c \vee \sim (b \varepsilon c)$	tiers exclu
3	$b \varepsilon c$	hyp
4	x | $\infty\langle c \cup b\rangle\{x\}$	hyp
5	$\{c \cup b\}\infty x$	4,D2.1
6	$c \varepsilon x$	3,5,T3.6-2
7	$\infty\langle c\rangle\{x\}$	6,D2.1
8	$\infty\langle c\rangle\{x\}$	hyp
9	$c \varepsilon x$	8,D2.1
10	$\{c \cup b\}\infty x$	3,9
11	$\infty\langle c \cup b\rangle\{x\}$	10,D2.1
12	$\infty\langle c\rangle\{x\} \equiv \infty\langle c \cup b\rangle\{x\}$	4-7,8-11,≡i
13	$\lfloor x \rfloor \lceil \infty\langle c\rangle\{x\} \equiv \infty\langle c \cup b\rangle\{x\} \rceil$	4-12,⌊⌋i
14	$\infty\langle c \cup b\rangle \approx \infty\langle c\rangle$	13,D0.11
15	$\infty\langle c \cup b\rangle \approx \infty\langle c\rangle . \vee . \infty\langle c \cup b\rangle \approx S\langle \infty\langle c\rangle\rangle$	14,∨i
16	$\sim (b \varepsilon c)$	hyp
17	x | $\infty\langle c \cup b\rangle\{x\}$	hyp
18	$\{c \cup b\}\infty x$	18,D2.1
19	$\lfloor \exists d \rfloor \lceil d \varepsilon x \rceil$	1,18
20	d | $d \varepsilon x$	hyp
21	$c\infty\{x - d\}$	1,16,18,20,T3.6-3
22	$\infty\langle c\rangle\{x - d\}$	21,D2.1
23	$\lfloor \exists d \rfloor \lceil d \varepsilon x \wedge \infty\langle c\rangle\{x - d\} \rceil$	20,22,∧i
24	$S\langle \infty\langle c\rangle\rangle\{x\}$	23,D5.2
25	$S\langle \infty\langle c\rangle\rangle\{x\}$	19,20-24,∃e
26	$S\langle \infty\langle c\rangle\rangle\{x\}$	hyp
27	$\lfloor \exists d \rfloor \lceil d \varepsilon x \wedge \infty\langle c\rangle\{x - d\} \rceil$	26,D5.2
28	d | $d \varepsilon x$	hyp
29	$\infty\langle c\rangle\{x - d\}$	hyp
30	$c\infty\{x - d\}$	29,D2.1
31	$\{c \cup b\}\infty x$	1,16,28,30
32	$\infty\langle c \cup b\rangle\{x\}$	31,D2.1
33	$\infty\langle c \cup b\rangle\{x\}$	27,28-32,∃e
34	$\infty\langle c \cup b\rangle\{x\} \equiv S\langle \infty\langle c\rangle\rangle\{x\}$	17-25,26-33,≡i
35	$\lfloor x \rfloor \lceil \infty\langle c \cup b\rangle\{x\} \equiv S\langle \infty\langle c\rangle\rangle\{x\} \rceil$	17-34,⌊⌋i
36	$S\langle \infty\langle c\rangle\rangle \approx \infty\langle c \cup b\rangle$	35,D0.11
37	$\infty\langle c \cup b\rangle \approx \infty\langle c\rangle . \vee . \infty\langle c \cup b\rangle \approx S\langle \infty\langle c\rangle\rangle$	36,∨i
38	$\infty\langle c \cup b\rangle \approx \infty\langle c\rangle . \vee . \infty\langle c \cup b\rangle \approx S\langle \infty\langle c\rangle\rangle$	2,3-15,16-37
	Th.	1-37,⊃i,⌊⌋i

$T6.8-3 : \lfloor \varphi P \rfloor \lceil Nn[\varphi] \land P[0] \land \lfloor \psi \rfloor \lceil P[\psi] \supset P[S\langle\psi\rangle]\rceil . \supset P[\varphi]\rceil$

1	φP	$Nn[\varphi]$	hyp
2		$P[0]$	hyp
3		$\lfloor \psi \rfloor \lceil P[\psi] \supset P[S\langle\psi\rangle]\rceil$	hyp
4		$Cn[\varphi]$	1,D5.4
5		$Ind[\varphi]$	1,D5.4
6		$\lfloor \exists a \rfloor \lceil \infty\langle a\rangle \approx \varphi\rceil$	4,D2.2
7	a	$\infty\langle a\rangle \approx \varphi$	hyp
8		$\varphi\{a\}$	7,T2.6
9		$Ind[\varphi]$	5,reit
10		$Ind\{a\}$	8,9,D3.2
11		$\bullet[P]\{\land\} \land \lfloor bc \rfloor \lceil b\,\varepsilon\, a \land \bullet[P]\{c\}. \supset \bullet[P]\{c \cup b\}\rceil . \supset$	
		$\bullet[P]\{a\}$	10,D3.1,$\varphi/\bullet$[P]
12		$P[0]$	2,reit
13		$\bullet[P]\{\land\}$	12,T6.8-1
14	bc	$b\,\varepsilon\, a$	hyp
15		$\bullet[P]\{c\}$	hyp
16		$P[\infty\langle c\rangle]$	15,D6.1
17		$P[S\langle\infty\langle c\rangle\rangle]$	3,16
18		$b\,\varepsilon\, b$	14,T0.2
19		$\infty\langle c \cup b\rangle \approx \infty\langle c\rangle . \lor . \infty\langle c \cup b\rangle \approx S\langle\infty\langle c\rangle\rangle$	18,T6.8-2
20		$\infty\langle c \cup b\rangle \approx \infty\langle c\rangle$	hyp
21		$P[\infty\langle c\rangle]$	16,reit
22		$P[\infty\langle c \cup b\rangle]$	20,21,Ext
23		$\bullet[P]\{c \cup b\}$	22,D6.1
24		$\infty\langle c \cup b\rangle \approx S\langle\infty\langle c\rangle\rangle$	hyp
25		$P[S\langle\infty\langle c\rangle\rangle]$	17,reit
26		$P[\infty\langle c \cup b\rangle]$	24,25,Ext
27		$\bullet[P]\{c \cup b\}$	26,D6.1
28		$\bullet[P]\{c \cup b\}]$	19,20-23,24-27,∨e
29		$\lfloor bc \rfloor \lceil b\,\varepsilon\, a \land \bullet[P]\{c\}. \supset \bullet[P]\{c \cup b\}\rceil$	14-28,⊃i
30		$\bullet[P]\{a\}$	11,29,⊃e

31	$P[\infty\langle a\rangle]$	30,D6.1
32	$P[\varphi]$	7,31,Ext
33	$P[\varphi]$	6,7-32,$\exists$e
	Th.	1/3-36,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$D6.2(aux) : \lfloor\varphi\psi\phi\rfloor\lceil\cap\langle\varphi\psi\rangle[\phi] \equiv \varphi[\phi] \wedge \psi[\phi]\rceil$

$T6.8 : \lfloor\varphi\ P\rfloor\lceil Nn[\varphi] \wedge P[0] \wedge \lfloor\psi\rfloor\lceil Nn[\psi] \wedge P[\psi]. \supset P[S\langle\psi\rangle]\rceil. \supset P[\varphi]\rceil$
Peano V : *Le principe d'induction arithmétique*

1	φP	$Nn[\varphi]$	hyp
2		$P[0]$	hyp
3		$\lfloor\psi\rfloor\lceil Nn[\psi] \wedge P[\psi]. \supset P[S\langle\psi\rangle]\rceil$	hyp
4		$Nn[0]$	T6.1
5		$\cap\langle PNn\rangle[0]$	2,4,D6.2
6		$\cap\langle PNn\rangle[\psi]$	hyp
7		$P[\psi] \wedge Nn[\psi]$	6,D6.2
8		$P[S\langle\psi\rangle]$	3,7,$\supset$e
9		$Nn[\psi]$	7,$\wedge$e
10		$Nn[S\langle\psi\rangle]$	9,T6.3
11		$P[S\langle\psi\rangle] \wedge Nn[S\langle\psi\rangle]$	8,10,$\wedge$i
12		$\cap\langle PNn\rangle[S\langle\psi\rangle]$	11,D6.2
13		$\cap\langle PNn\rangle[\psi] \supset \cap\langle PNn\rangle[S\langle\psi\rangle]$	6-12,$\supset$i
14		$\cap\langle PNn\rangle[\varphi]$	1,5,13,T6.8-3
15		$P[\varphi]$	14,D6.2
	Th.		1-15,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i