

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
Institut de Mathématiques

ÉTUDE ASYMPTOTIQUE DES SUITES DE RÈGLES DE DÉCISION

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences
pour obtenir le grade de docteur ès sciences
par

E. GILLIARD

1976
IMPRIMERIE ANDEREGG-GUENIN SA, BIENNE

IMPRIMATUR POUR LA THÈSE

Etude asymptotique des suites de règles
de décision

de Monsieur Etienne Gilliard

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

FACULTÉ DES SCIENCES

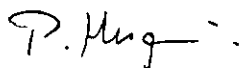
La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel,
sur le rapport des membres du jury,

Messieurs les professeurs P. Burgat,
R. Bader et P.J. Huber (EPF Zurich)

autorise l'impression de la présente thèse sans exprimer
d'opinion sur les propositions qui y sont contenues.

Neuchâtel, le 25 février 1976

Le doyen :



P. Huguenin

Introduction

A. Historique

Dans sa pratique , la méthode d'investigation statistique est toujours séquentielle . Le choix des hypothèses à vérifier , la décision d'accepter ou de rejeter telles hypothèses , ne sont pas des actes isolés , mais résultent le plus souvent de choix ou de décisions préalables et débouchent sur la formulation de nouvelles questions . Il est donc naturel , et même souhaitable que le statisticien cherche à tirer parti de l'information dont il dispose à un moment donné , pour augmenter l'efficacité des expériences suivantes et réduire ainsi le coût du programme de recherches .

On peut donc dire qu'en analyse séquentielle , comme dans bien d'autres domaines , la pratique a précédé la théorie . Toutefois , si elle ne s'appuie pas sur une référence théorique solide , la pratique ne peut pas dépasser le stade d'un bricolage plus ou moins ingénieux .

La parution en 1947 du premier livre de Wald (1) consacré à l'analyse séquentielle , dans lequel certains problèmes particulièrement simples sont résolus , marque incontestablement une date importante dans l'histoire de la théorie statistique . Elle a été suivie d'un effort de généralisation considérable de la part de Wald lui-même (2) et de toute une école de théoriciens américains encore florissante aujourd'hui .

Si l'on pouvait croire au début que des problèmes de plus en plus complexes allaient être résolus , il fallut vite déchanter . En dépit de la multiplication des critères d'optimalité , on est le plus souvent incapable de construire

des procédures optimales dès qu'on s'éloigne du cas le plus simple où seulement deux hypothèses sont confrontées . Dans les cas où une telle construction est possible au moyen de la programmation dynamique , le coût de cette recherche en temps ordinateur la rend le plus souvent impraticable .

Dans la plupart des applications pratiques , le statisticien en est encore réduit comme auparavant , à inventer ses procédures lui-même et à espérer que leurs performances ne seront pas trop mauvaises . Tout au plus dispose-t-il à l'heure actuelle d'une meilleure connaissance de la nature des procédures optimales dans quelques cas simples , ce qui peut le guider dans le choix de ses outils , et d'un certain nombre de bornes inférieures qui lui permettent d'évaluer grossièrement certains aspects des performances des procédures de son cru à l'aide de quelques résultats de simulation .

L'idée d'étudier certains problèmes de la statistique par un passage à la limite , en faisant tendre le nombre des observations vers l'infini et en tirant parti des divers théorèmes sur les grands nombres et sur la convergence des lois de probabilité , s'est imposée dès le début de cette science , ne serait-ce que pour justifier l'usage si longtemps exclusif de la distribution normale . Tout naturellement , des concepts d'optimalité asymptotique se sont introduits peu à peu dans la théorie de l'estimation statistique .

En 1959 , Chernoff (3) définit un concept d'optimalité asymptotique pour des procédures séquentielles . Le nombre des observations n'étant pas fixé d'avance pour une telle procédure , Chernoff obtient l'effet asymptotique en faisant tendre le coût des observations vers zéro . Lors de ce passage à la limite , le problème de l'optimalité se simplifie considérablement et , de ce fait , le critère perd une bonne partie de son pouvoir de sélection . Malgré ses insuffisances , il est cependant le seul outil théorique maniable dont dispose le praticien dans de nombreuses applications .

L'article de Chernoff a été généralisé par Albert (9) et suivi par d'autres études dont la plus importante est sans doute l'article monumental de Kiefer et Sacks (4) paru en 1963 , où est ébauchée une première synthèse .

Les procédures asymptotiquement optimales étudiées par ces auteurs ont une structure commune en ce qui concerne la règle d'arrêt ; ce sont ce que nous appelons dans cette étude des règles de décision simples . Par contre , les procédures de Chernoff et Albert diffèrent radicalement de celles de Kiefer et Sacks en ce qui concerne la planification des expériences . Chez les premiers , la planification procède après chaque observation selon le principe du maximum de vraisemblance ; elle dépend très étroitement des observations , donc des caprices du hasard , ce qui peut mener à un gaspillage initial assez important . Chez les seconds , l'aspect séquentiel de la planification est réduit au minimum ; la procédure comprend deux phases et seul le choix de l'expérience utilisée dans la seconde dépend des observations . Que des procédures aussi dissemblables puissent

être toutes deux asymptotiquement optimales , montre bien la faiblesse du critère . En fait , aucune de ces procédures ne paraît très convaincante ; dans la pratique , on préférera sans doute une solution intermédiaire , à la fois plus robuste que la première et plus souple que la seconde .

Nous nous proposons d'étudier de façon plus générale à quelles conditions doit satisfaire l'expérimentation d'une règle de décision simple pour garantir l'optimalité asymptotique .

Nous introduisons à cet effet un critère légèrement différent d'optimalité asymptotique qui permet d'obtenir des résultats plus simples et plus généraux .

B. Résumé

Nous supposons que nous devons prendre une décision adaptée à l'état d'un système que nous ne pouvons connaître que par des expériences entachées d'erreurs . En général , plus une expérience est susceptible de localiser avec précision l'état du système , plus elle est chère , et le problème consiste à trouver un compromis raisonnable entre l'adéquation de la décision à l'état du système et le coût de l'expérimentation . Nous nous proposons tout d'abord d'exprimer cet antagonisme en généralisant une inégalité due à Hoeffding (5) (chap. 2) . Nous étudierons ensuite le comportement de cet antagonisme lors de certains passages à la limite (chap. 3) . Nous appliquerons enfin les résultats obtenus au problème de l'optimalité asymptotique (chap. 4) .

Chapitre 1. Définitions.

A. Notations et conventions.

- Tous les espaces dont il est question dans cette étude sont des espaces mesurables.
- Si X est un espace mesurable, la notation $A \subset X$ signifie que A est un sous-ensemble mesurable de X .
- Si X et Y sont des espaces mesurables, la notation $X \otimes Y$ désigne l'espace mesurable produit.
- Si X_i est une famille finie ou dénombrable d'espaces mesurables, la notation $\bigcup X_i$ désigne l'espace mesurable réunion :
 A est un sous-ensemble mesurable de $\bigcup X_i$ ssi $\forall i$,
 $A \cap X_i$ est un sous-ensemble mesurable de X_i .
- Si X est un espace mesurable, la notation $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ signifie que f est une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$.
- Lorsque nous définissons une fonction $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, nous convenons que $f(x) = 0$ pour tout élément $x \in X$ non explicitement mentionné.
- Si X est un espace mesurable, nous notons $\mathcal{P}_X$ l'ensemble des mesures de probabilité sur X .
- Etant donnée une fonction $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ et une mesure de probabilité $\mu \in \mathcal{P}_X$, nous notons $\int_X \mu(dx) f(x)$ l'intégrale de f selon μ .

B. Définitione .

1. Notre point de départ est un quadruple $\{\mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, c\}$ où
 - $\mathcal{H}$ est un espace, dont les éléments, notés h , correspondent aux états possibles du système.
 - $\mathcal{D}$ est un espace fini, dont les éléments, notés d , correspondent aux décisions parmi lesquelles nous devons choisir.
 - $\mathcal{E}$ est un espace, dont les éléments, notés e , correspondent aux expériences à notre disposition.
 - c est une fonction mesurable de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^+$;
 $c(e)$ est le coût de l'expérience e .

- A tout état du système h et à toute expérience e correspond une mesure de probabilité $\mu\{. | e, h\}$ sur un espace $\mathcal{X}$, appelé espace des observations et dont les éléments sont notés x .

Nous supposons que $\forall h \in \mathcal{H}, \mu\{A | e, h\}$ définit une fonction mesurable sur $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$.

2. Si le système se trouve dans l'état h_0 , il répond à l'expérience e_1 par une observation x_1 qui est une réalisation de la variable aléatoire de mesure de probabilité $\mu\{. | e_1, h_0\}$; une nouvelle expérience e_2 donne l'observation x_2 qui est une réalisation de la variable aléatoire de mesure de probabilité $\mu\{. | e_2, h_0\}$, et ainsi de suite. Après n expériences, on dispose de n couples de l'espace $\mathcal{E} \otimes \mathcal{X}$: $(e_1, x_1), (e_2, x_2), \dots, (e_n, x_n)$.

Nous appelons trajectoire une suite finie ou vide de couples (e, x) où $e \in \mathcal{E}$ et $x \in \mathcal{X}$.

Nous désignons par T_n l'espace des trajectoires de longueur n et par T_0 l'espace réduit à la seule trajectoire vide.

$T = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$ est l'espace des trajectoires ; ses éléments sont notés t ; t_0 est la trajectoire vide.

3. Une règle de décision est une règle qui , après chaque expérience , prescrit ce qu'il faut faire ensuite : quelle décision de D il faut choisir ou à quelle nouvelle expérience de E il faut soumettre le système .

Formellement , une règle de décision , notée RD , est une application de l'espace des trajectoires T dans l'ensemble $P_{D \cup E}$ des mesures de probabilité sur l'espace $D \cup E$.

Désignons par $RD\{A|t\}$ la mesure du sous-ensemble A de $D \cup E$ par la mesure $RD(t)$. Nous supposons que $\forall A$, $RD\{A|t\}$ définit une fonction mesurable sur T .

Cette condition est essentielle pour pouvoir étudier une règle de décision en termes probabilistes .

Pratiquement , une règle de décision fonctionne comme suit :

- Pour commencer , on choisit un élément de $D \cup E$ selon la mesure de probabilité $RD(t_0)$. Le résultat de ce choix est soit une décision d , auquel cas la procédure s'arrête , soit une expérience e_1 qui fournit une observation x_1 . On obtient ainsi la trajectoire $t_1 = (e_1, x_1)$.
- Après avoir obtenu une trajectoire de longueur n , $t_n = (e_1, x_1), \dots, (e_n, x_n)$, on choisit un nouvel élément de $D \cup E$ selon la mesure de probabilité $RD(t_n)$. Si le choix tombe sur une décision , la procédure se termine ; sinon , on obtient un nouveau couple (e_{n+1}, x_{n+1}) ,

et la procédure se poursuit à partir de la trajectoire

$t_{n+1} = (e_1, x_1), \dots, (e_{n+1}, x_{n+1})$ jusqu'à ce qu'on arrive à une décision .

4. Si le système se trouve dans l'état h_0 , une règle de décision une mesure de probabilité $\mu_n\{ \cdot | h_0 \}$, en général dégénérée , sur l'espace $\mathcal{T}_n$, qui est la mesure de probabilité des n premiers couples (e, x) obtenus . Nous omettons ici le détail de cette construction qui ne présente aucune difficulté .

$\mu_n\{\mathcal{T}_n | h_0\}$ est la probabilité que la procédure utilise au moins n expériences avant d'atteindre une décision .

Une règle de décision est dite terminante pour h_0 ssi $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n\{\mathcal{T}_n | h_0\} = 0$.

Du point de vue pratique cette condition est essentielle , car elle assure que la procédure se termine après un nombre fini d'expériences .

En utilisant une règle de décision terminante , on obtient avec certitude finalement une décision de $\mathcal{D}$ et une trajectoire de $\mathcal{T}$. Nous désignons par $\delta\{ \cdot | h_0 \}$ et $\tau\{ \cdot | h_0 \}$ les mesures de probabilité de ces variables . On a

$$\forall A \subset \mathcal{D} \quad , \quad \delta\{A | h_0\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathcal{T}_n} \mu_n\{dt | h_0\} \mathcal{R}\mathcal{D}\{A | t\}$$

$$\forall A \subset \mathcal{T} \quad , \quad \tau\{A | h_0\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A \cap \mathcal{T}_n} \mu_n\{dt | h_0\} \mathcal{R}\mathcal{D}\{D | t\} .$$

5. Soit $A \subset \mathcal{E}$ et $C_A: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$C_A(t) = \sum_{i=1}^n c(e_i) \chi_A(e_i) \quad \text{pour } t = (e_1, x_1), \dots, (e_n, x_n)$$

où χ_A est la fonction caractéristique de A .

$C_A(t)$ est la contribution de A au coût de la trajectoire t . Le coût total de la trajectoire est donné par la fonction C_E que nous noterons simplement C . Lorsque le système se trouve dans l'état h_0 , l'espérance mathématique du coût de la procédure pour une règle de décision terminante pour h_0 est

$$E(C|h_0) = \int_T \tau(dt|h_0) C(t).$$

Nous dirons qu'une règle de décision est finie pour h_0 si elle est terminante pour h_0 et $E(C|h_0) < \infty$. Si tel est le cas, nous pouvons attacher à la règle de décision la mesure de probabilité $\{ \cdot | h_0 \}$ sur E définie par

$$\forall A \subset E, \quad \{A|h_0\} = \frac{E(C_A|h_0)}{E(C|h_0)}.$$

Ces mesures de probabilité jouent un rôle central dans cette étude comme reflet du choix des expériences d'une règle de décision.

Chapitre 2 Généralisation de l'inégalité de Hoeffding.

A. Nous supposons donnée une fonction $s: \mathcal{E} \otimes \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ et nous définissons la fonction $S: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$S(t) = \sum_{i=1}^n s(e_i, x_i) \quad \text{pour } t = (e_1, x_1), \dots, (e_n, x_n) \quad .$$

Les deux théorèmes suivants sont des versions un peu plus générales de résultats classiques de l'analyse séquentielle .

Théorème 1 .

Si a) $\mathcal{RD}$ est une règle de décision finie pour h_0 .

$$b) \int_{\mathcal{E}} \{ \{ d_e | h_0 \} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx | e, h_0\} |s(e, x)| \} < \infty .$$

Alors

$$E(S | h_0) = E(C | h_0) \int_{\mathcal{E}} \{ \{ d_e | h_0 \} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx | e, h_0\} s(e, x) \} .$$

Théorème 2 .

Si a) $\mathcal{RD}$ est une règle de décision finie pour h_0 .

$$b) \int_{\mathcal{E}} \{ \{ d_e | h_0 \} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx | e, h_0\} [s(e, x)]^2 \} < \infty .$$

$$c) \forall e \in \mathcal{E}, \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx | e, h_0\} s(e, x) = 0 .$$

Alors

$$E(S^2 | h_0) = E(C | h_0) \int_{\mathcal{E}} \{ \{ d_e | h_0 \} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx | e, h_0\} [s(e, x)]^2 \} .$$

Nous ne reproduisons pas ici les démonstrations de ces théorèmes , qui suivent de très près celles des résultats correspondants de l'analyse séquentielle .

B. Nous supposons que les mesures $\mu\{.\mid e, h\}$ sont absolument continues par rapport à une mesure σ -finie μ sur $\mathcal{X}$. Nous désignons par $f\{.\mid e, h\}$ la densité de $\mu\{.\mid e, h\}$ par rapport à μ , et nous supposons que $f(x\mid e, h)$ définit une fonction mesurable sur l'espace $\mathcal{X} \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$.

Soient h_1 et h_2 deux états possibles du système et $R\{.\mid h_1, h_2\} : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$R(t\mid h_1, h_2) = \prod_{i=1}^n \frac{f(x_i\mid e_i, h_1)}{f(x_i\mid e_i, h_2)} \quad \text{si } t = (e_1, x_1), \dots, (e_n, x_n),$$

$$R(t\mid h_1, h_2) = 1 \quad \begin{array}{l} \text{si } t \text{ est la trajectoire vide } t_0, \\ \text{ou si } R(t\mid h_1, h_2) \text{ est de la forme } \frac{0}{0}. \end{array}$$

1. Le lemme suivant établit une relation entre les mesures $\tau\{.\mid h\}$ et $\delta\{.\mid h\}$ associées à une règle de décision. On peut en trouver une démonstration dans (5).

Lemme 1

Si $\mathcal{RD}$ est une règle de décision terminante pour h_0 , on a

$$\forall h \in \mathcal{H}, \quad \sum_{d \in \mathcal{D}} \delta\{d\mid h_0\} \log \frac{\delta\{d\mid h_0\}}{\delta\{d\mid h\}} \leq \int_{\mathcal{T}} \tau\{dt\mid h_0\} \log R(t\mid h_0, h).$$

Soient $s : \mathcal{E} \otimes \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$s(e, x) = \log \frac{f(x\mid e, h_0)}{f(x\mid e, h)}$$

et $S : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$S(t) = \sum_{i=1}^n s(e_i, x_i), \quad \text{pour } t = (e_1, x_1), \dots, (e_n, x_n).$$

On a $S = \log R(\cdot | h_0, h)$ $\tau\{\cdot | h_0\}$ -presque partout, et le théorème 1 nous donne le

Lemme 2

Si a) $\mathcal{RD}$ est une règle de décision finie pour h_0 .

$$b) \int_{\mathcal{E}} \left\{ \{d| h_0\} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx | e, h_0\} \left| \log \frac{f(x|e, h_0)}{f(x|e, h)} \right| \right\} < \infty.$$

Alors

$$\int_{\mathcal{T}} \tau\{dt | h_0\} \log R(t | h_0, h) = E(C | h_0) \int_{\mathcal{E}} \left\{ \{d| h_0\} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx | e, h_0\} \log \frac{f(x|e, h_0)}{f(x|e, h)} \right\}.$$

2. Les lemmes 1 et 2 nous donnent le théorème 3 qui est la généralisation annoncée du théorème de Hoeffding (5).

Pour simplifier l'écriture, introduisons la notation

$$I(e, h_1, h_2 | h_0) = \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx | e, h_0\} \log \frac{f(x|e, h_1)}{f(x|e, h_2)}.$$

Théorème 3

Si a) $\mathcal{RD}$ est une règle de décision finie pour h_0 .

$$b) \int_{\mathcal{E}} \left\{ \{d| h_0\} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx | e, h_0\} \left| \log \frac{f(x|e, h_0)}{f(x|e, h)} \right| \right\} < \infty.$$

Alors

$$\frac{\sum_{d \in \mathcal{D}} \delta\{d | h_0\} \log \frac{\delta\{d | h_0\}}{\delta\{d | h\}}}{E(C | h_0)} \leq \int_{\mathcal{E}} \left\{ \{d| h_0\} I(e, h_0, h | h_0) \right\}.$$

Le théorème 3 exprime l'antagonisme entre les deux exigences fondamentales posées à toute règle de décision .

- 1°) Maximiser l'écart , mesuré par le numérateur du membre de gauche de l'inégalité , entre les mesures $\delta\{.|h_0\}$ et $\delta\{.|h\}$ où $h \neq h_0$.

Cela revient à chercher à réaliser une sélection aussi spécifique que possible de la décision en fonction de l'état du système .

- 2°) Minimiser le coût de l'expérimentation $E(C|h_0)$.

La force de cet antagonisme dépend de l'écart entre les mesures $\mu\{.|e, h_0\}$ et $\mu\{.|e, h\}$, mesuré par l'information de Kullback-Leibler $I(e, h_0, h|h_0)$ (6) , ainsi que du choix des expériences qui se reflète dans la mesure $\delta\{.|h_0\}$.

3. Dans le cas le plus simple où $\mathcal{E}$ se réduit à une seule expérience , $\mathcal{H}$ à deux états et $\mathcal{D}$ à deux décisions , on peut montrer (7,8) que l'inégalité du théorème 3 se transforme asymptotiquement en égalité pour certaines suites de règles de décision non séquentielles où le nombre des observations tend vers l'infini ; c'est une conséquence de la loi des grands nombres de Khinchine .
- L'objectif du chapitre suivant est d'énoncer un résultat analogue pour des suites de règles de décision plus générales .

Chapitre 3. Etude asymptotique de suites de règles de décision.

A. La loi des grands nombres.

1. Considérons une suite de règles de décision RD_v où $v \in \mathbb{N}$. Nous désignons par $\tau_v\{.|h_0\}$, $\delta_v\{.|h_0\}$ et $j_v\{.|h_0\}$ les mesures sur T , D et E associées à la règle de décision RD_v et à l'état du système h_0 .

Au lieu du nombre des observations de RD_v , qui n'est pas fixée d'avance puisqu'il s'agit d'une règle séquentielle, nous considérons le coût moyen de l'expérimentation

$$E_v(C|h_0) = \int_T \tau_v\{dt|h_0\} C(t)$$

Nous dirons que la suite RD_v a un coût divergent pour h_0

ssi 1°) $\forall v$, RD_v est finis pour h_0 .

$$2°) \lim_{v \rightarrow \infty} E_v(C|h_0) = \infty.$$

Nous supposons dès maintenant que le système se trouve dans l'état h_0 .

A une fonction $s: \mathcal{E} \otimes \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall e \in \mathcal{E}, \quad \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx|e, h_0\} |s(e, x)| < \infty, \text{ nous}$$

attachons la fonction $m: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$m(e) = \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx|e, h_0\} s(e, x),$$

ainsi que les fonctions $S: T \rightarrow \mathbb{R}$ et $M: T \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\left. \begin{aligned} S(t) &= \sum_{i=1}^n s(e_i, x_i) \\ M(t) &= \sum_{i=1}^n m(e_i) \end{aligned} \right\} \text{ pour } t = (e_1, x_1), \dots, (e_n, x_n) .$$

2. Le théorème suivant est un premier pas vers une "loi des grands nombres" pour une suite de règles de décision de coût divergent .

Théorème 4

Si a) $\sup_E \frac{1}{c(e)} \int_X \mu\{dx|e, h_0\} |s(e, x)| < \infty .$

b) $\mathcal{RD}_v$ est une suite de règles de décision de coût divergent pour h_0 .

c) $\lim_{a \rightarrow \infty} \limsup_{v \rightarrow \infty} \int_E \{ \}_{v} \{ de | h_0 \} \frac{1}{c(e)} \int_X \mu\{dx|e, h_0\} |s(e, x)| = 0 .$
 Alors $|s(e, x)| > a$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{E_v(|S-M| | h_0)}{E_v(C | h_0)} = 0 .$$

Démonstration .

1°) Nous noterons simplement $\mu\{. | e\}$, $\{ \}_v \{. \}$, $E_v(.)$
 pour $\mu\{. | e, h_0\}$, $\{ \}_v \{. | h_0\}$, $E_v(. | h_0)$.

Soit $B = \sup_E \frac{1}{c(e)} \int_X \mu\{dx|e\} |s(e, x)| .$

A tout nombre $a > 0$ nous attachons les fonctions

$$s_a(e, x) = \begin{cases} s(e, x) & \text{si } |s(e, x)| \leq a \\ 0 & \text{si } |s(e, x)| > a \end{cases} , \quad m_a(e) = \int_X \mu\{dx|e\} s_a(e, x) .$$

2°) Soient $U: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $V: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ et $W: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$\left. \begin{aligned} U(t) &= \sum_{i=1}^n |s(e_i, x_i) - s_a(e_i, x_i)| \\ V(t) &= \sum_{i=1}^n |m(e_i) - m_a(e_i)| \\ W(t) &= \sum_{i=1}^n (s_a(e_i, x_i) - m_a(e_i)) \end{aligned} \right\} \text{ pour } t = (e_1, x_1), \dots, (e_n, x_n) .$$

$$\text{On a } |S - M| \leq U + V + |W| .$$

D'après le théorème 1 ,

$$E_v(U) = E_v(C) \int_{\mathcal{E}} \{ \nu \{ de \} \frac{1}{c(e)} \int_{|s(e,x)| > a} \mu \{ dx | e \} |s(e,x)| .$$

et

$$E_v(V) = E_v(C) \int_{\mathcal{E}} \{ \nu \{ de \} |m(e) - m_a(e)| \leq E_v(C) \int_{\mathcal{E}} \{ \nu \{ de \} \frac{1}{c(e)} \int_{|s(e,x)| > a} \mu \{ dx | e \} |s(e,x)| .$$

D'après le théorème 2 ,

$$E_v(W^2) = E_v(C) \int_{\mathcal{E}} \{ \nu \{ de \} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu \{ dx | e \} [s_a(e, x) - m_a(e)]^2 ,$$

donc

$$E_v(W^2) \leq E_v(C) \int_{\mathcal{E}} \{ \nu \{ de \} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu \{ dx | e \} [s_a(e, x)]^2 \leq E_v(C) aB .$$

Puisque $\forall \varepsilon > 0$, $E_v(|W|) \leq \varepsilon E_v(C) + \frac{1}{\varepsilon E_v(C)} E_v(W^2)$, on a

$$E_v(|W|) \leq \varepsilon E_v(C) + \frac{aB}{\varepsilon} ,$$

et finalement $\forall \varepsilon > 0$,

$$\frac{E_v(|S-M|)}{E_v(C)} \leq 2 \int_{\mathcal{E}} \int_{\mathcal{X}} \{de\} \frac{1}{c(e)} \int_{|s(e,x)| > a} \mu\{dx|e\} |s(e,x)| + \varepsilon + \frac{aB}{\varepsilon E_v(C)}.$$

Les hypothèses b) et c) du théorème garantissant que

$$\limsup_{v \rightarrow \infty} \frac{E_v(|S-M|)}{E_v(C)} = 0, \text{ ce qui achève la démonstration.}$$

3. Soit $S' : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$S'(t) = \sum_{i=1}^{n-1} s(e_i, x_i) \quad \text{pour } t = (e_1, x_1), \dots, (e_n, x_n).$$

Le théorème suivant établit l'équivalence asymptotique des fonctions S et S' .

Théorème 5

Si a) $\sup_{\mathcal{E}} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx|e, h_0\} |s(e,x)| < \infty$.

b) $\mathcal{RD}_v$ est une suite de règles de décision de coût divergent pour h_0 .

c) $\lim_{a \rightarrow \infty} \limsup_{v \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{E}} \int_{\mathcal{X}} \{de\} \frac{1}{c(e)} \int_{|s(e,x)| > a} \mu\{dx|e, h_0\} |s(e,x)| = 0$.

Alors

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{E_v(|S-S'| | h_0)}{E_v(C | h_0)} = 0.$$

Démonstration

1°) Nous reprenons les notations du point 1°) de la démonstration du théorème 4.

2°) Soient $U: T \rightarrow \mathbb{R}$, $V: T \rightarrow \mathbb{R}$ et $W: T \rightarrow \mathbb{R}$
les fonctions définies par

$$\left. \begin{aligned} U(t) &= \sum |s(e_i, x_i) - s_a(e_i, x_i)| \\ V(t) &= \sum |s(e_i, x_i) - s_a(e_i, x_i)| \\ W(t) &= |s_a(e_n, x_n)| \end{aligned} \right\} \text{ pour } t = (e_i, x_i), \dots, (e_n, x_n).$$

$$\text{On a } |S - S'| \leq U + V + W, \quad V \leq U, \quad W \leq a.$$

D'après le théorème 1,

$$E_v(V) \leq E_v(U) = E_v(C) \int \int_{\substack{\mathcal{E} \\ |s(e,x)| > a}} \frac{1}{c(e)} \int \mu\{dx|e\} |s(e,x)|.$$

Puisque $E_v(W) \leq a$, on a finalement

$$\frac{E_v(|S - S'|)}{E_v(C)} \leq 2 \int \int_{\substack{\mathcal{E} \\ |s(e,x)| > a}} \frac{1}{c(e)} \int \mu\{dx|e\} |s(e,x)| + \frac{a}{E_v(C)}.$$

Les hypothèses b) et c) du théorème garantissent que

$$\limsup_{v \rightarrow \infty} \frac{E_v(|S - S'|)}{E_v(C)} = 0, \text{ ce qui achève la démonstration.}$$

4. La condition c) des théorèmes 4 et 5 n'est pas satisfaisante car elle concerne à la fois la suite RD_v et les fonctions $s(e, x)$. On peut éviter cet inconvénient de deux façons.

I) En renforçant les exigences sur la suite RD_v :

1°) On peut supposer que l'expérimentation de la suite
est stable pour h , c. à. d.

$$\exists \{ \in \mathcal{P}_{\mathcal{E}} \text{ telle que } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que} \\ \forall A \in \mathcal{E}, \{A\} \leq \eta \implies \limsup_{v \rightarrow \infty} \int \{A|R_v\} \leq \varepsilon.$$

La condition c) est alors une conséquence du théorème d'Egoroff. En effet :

Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ un nombre remplissant les conditions de l'hypothèse 1°).

Puisque $\forall e \in E$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c(e)} \int_{|s(e,x)| > n} \mu\{dx|e\} |s(e,x)| = 0$, le

théorème d'Egoroff garantit l'existence d'un sous-ensemble

$A \subset E$ tel que

$$\{E - A\} < \eta \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_A \frac{1}{c(e)} \int_{|s(e,x)| > n} \mu\{dx|e\} |s(e,x)| = 0.$$

Puisque $\int_E = \int_A + \int_{E-A}$, il s'ensuit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_E \{d\varepsilon\} \frac{1}{c(e)} \int_{|s(e,x)| > n} \mu\{dx|e\} |s(e,x)| \leq B \varepsilon.$$

2°) On peut supposer plus simplement que l'expérimentation de la suite RD_V converge pour h_0 c. à. d.

$$\exists \{P_\varepsilon\} \text{ telles que } \forall A \subset E, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_A \{P_\varepsilon\} = \int_A.$$

Il est clair que 2°) $\implies$ 1°).

II) En renforçant les exigences sur la fonction $s(e,x)$:

1°) On peut supposer que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_E \frac{1}{c(e)} \int_{|s(e,x)| > a} \mu\{dx|e, h_0\} |s(e,x)| = 0.$$

L'implication 1°) $\implies$ c) est triviale.

2°) On peut aussi remplacer la condition a) dans l'énoncé des théorèmes 4 et 5 par la condition

$$a') \sup_{\mathcal{E}} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx|e, h_0\} |s(e, x)|^p < \infty \text{ avec } p > 1 .$$

Il est clair que $a') \implies a)$ et $c)$.

La condition 1) 2°) de la convergence de l'expérimentation s'impose presque d'elle-même , car elle garantit en plus la convergence des moyennes

$$\frac{E_v(S|h_0)}{E_v(C|h_0)} = \int_{\mathcal{E}} \{v\{de|h_0\} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx|e, h_0\} s(e, x) \} \text{ (théorème 1) ,}$$

en vertu du lemme suivant emprunté à la théorie de la mesure .

Lemme 3

Si $\{v\}$ est une suite de mesures de probabilité sur $\mathcal{E}$ convergeant (au sens de 1) 2°)) vers la mesure de probabilité $\{ \}$, alors $\forall g : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\sup_{\mathcal{E}} |g(e)| < \infty$ on a

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{E}} \{v\{de\} g(e) = \int_{\mathcal{E}} \{\{de\} g(e) .$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant qui servira de base à la suite de notre exposé .

Théorème 6

Si a) $\sup_{\mathcal{E}} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx|e, h_0\} |s(e, x)| < \infty$.

b) $\mathcal{RD}_v$ est une suite de règles de décision de coût divergent et d'expérimentation convergent pour h_0 .

Alors

a) $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{E_v(S|h_0)}{E_v(C|h_0)} = \int_{\mathcal{E}} \{dc|h_0\} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx|e, h_0\} s(e, x)$,

où $\{c|\cdot|h_0\}$ est la limite de la suite $\{c_v|\cdot|h_0\}$.

b) $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{E_v(|S-M||h_0)}{E_v(C|h_0)} = 0$.

c) $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{E_v(|S-S'||h_0)}{E_v(C|h_0)} = 0$.

5. Le théorème 4 montre l'équivalence asymptotique des suites

de fonctions $\frac{S}{E_v(C|h_0)}$ et $\frac{M}{E_v(C|h_0)}$ pour des suites de

règles de décision appropriées. Le théorème 7 ci-dessous

établit des conditions nécessaires et suffisantes de con-

vergence pour toutes les suites de fonctions du type

$\frac{M}{E_v(C|h_0)}$ où M est obtenue à partir d'une fonction

bornée sur $\mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{M}_c$ l'ensemble des fonctions $m: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ telles

que $\sup_{\mathcal{E}} \frac{|m(e)|}{c(e)} < \infty$.

A toute fonction $m \in \mathcal{M}_c$ nous associons la fonction $M : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$M(t) = \sum_{i=1}^n m(e_i) \quad \text{pour } t = (e_1, x_1), \dots, (e_n, x_n).$$

Théorème 7

Soit $\mathcal{RD}_V$ une suite de règles de décision finies pour h_0 .

Les conditions a) et b) ci-dessous sont équivalentes.

$$a) \quad \forall m \in \mathcal{M}_c, \quad \forall \eta > 0,$$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \tau_v \left\{ \left| \frac{M(t)}{E_v(C|R_0)} - U_v(h_0) \right| > \eta \mid R_0 \right\} = 0$$

$$\text{où } U_v(h_0) = \int_{\mathcal{E}} \{ \cdot \mid R_0 \} \frac{m(e)}{c(e)}.$$

$$b) \quad \forall A \subset \mathcal{E}, \quad \forall \eta > 0,$$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \tau_v \left\{ \left| \frac{C_A(t)}{E_v(C|R_0)} - \{ \cdot \mid A \mid R_0 \} \right| > \eta \mid R_0 \right\} = 0.$$

Démonstration

1°) Pour alléger les notations nous nous permettrons de nouveau d'omettre la variable h_0 dans $\tau_v \{ \cdot \mid R_0 \}$, $\{ \cdot \mid R_0 \}$, $E_v(\cdot \mid R_0)$ et $U_v(h_0)$.

2°) L'implication $a) \Rightarrow b)$ est claire en posant

$m(e) = c(e) \chi_A(e)$ où χ_A est la fonction caractéristique de A .

3°) Montrons que $b) \Rightarrow a)$.

Soient $m \in \mathcal{M}_c$, $\varepsilon > 0$, $m' : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction élémentaire telle que $\sup_{\mathcal{E}} \left| \frac{m(e)}{c(e)} - m'(e) \right| < \varepsilon$ et $M' : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $M'(t) = \sum_{i=1}^n c(e_i) m'(e_i)$ pour $t = (e_1, x_1), \dots, (e_n, x_n)$.

On a , en posant $U'_v = \int_{\mathcal{E}} \{v\} \{de\} m'(e)$,

$$\left| \frac{M}{E_v(C)} - U_v \right| \leq \left| \frac{M - M'}{E_v(C)} \right| + \left| \frac{M'}{E_v(C)} - U'_v \right| + |U'_v - U_v|$$

D'après le théorème 1

$$E_v(|M - M'|) \leq E_v(C) \int_{\mathcal{E}} \{v\} \{de\} \left| \frac{m(e)}{c(e)} - m'(e) \right| \leq E_v(C) \varepsilon .$$

D'autre part

$$|U_v - U'_v| \leq \int_{\mathcal{E}} \{v\} \{de\} \left| \frac{m(e)}{c(e)} - m'(e) \right| \leq \varepsilon .$$

Puisque m' est une fonction élémentaire , on a

$$m'(e) = \sum_{j=1}^J a_j \chi_{A_j}(e) \quad \text{avec} \quad A_j \subset \mathcal{E} .$$

On a donc , pour $t = (e_1, x_1), \dots, (e_n, x_n)$,

$$M'(t) = \sum_{j=1}^J a_j \sum_{i=1}^n \chi_{A_j}(e_i) c(e_i) = \sum_{j=1}^J a_j C_{A_j}(t)$$

Puisque $U'_v = \sum_{j=1}^J a_j \int_{\mathcal{E}} \{v\} \{de\} \chi_{A_j}(e)$, on a enfin

$$\left| \frac{M}{E_v(C)} - U'_v \right| \leq \sum |a_j| \left| \frac{C_{A_j}}{E_v(C)} - \int_{\mathcal{E}} \{v\} \{de\} \chi_{A_j}(e) \right|$$

Dès lors , pourvu que $\varepsilon < \frac{\eta}{3}$,

$$\tau_v \left\{ \left| \frac{M(t)}{E_v(C)} - u_v \right| > \eta \right\} \leq \tau_v \left\{ \left| \frac{M(t) - M'(t)}{E_v(C)} \right| > \frac{\eta}{3} \right\} + \sum_{j=1}^J \tau_v \left\{ \left| \frac{C_{R_j}(t)}{E_v(C)} - \{ \cdot \}_v \{ R_j \} \right| > \frac{\eta}{3J|a_j|} \right\}$$

et , puisque $\tau_v \left\{ \left| \frac{M(t) - M'(t)}{E_v(C)} \right| > \frac{\eta}{3} \right\} \leq \frac{3}{\eta} \frac{E_v(M - M')}{E_v(C)} \leq \frac{3\varepsilon}{\eta}$,

$$\limsup_{v \rightarrow \infty} \tau_v \left\{ \left| \frac{M(t)}{E_v(C)} - u_v \right| > \eta \right\} \leq \frac{3\varepsilon}{\eta} , \text{ ce qui achève la}$$

démonstration .

6. Nous dirons que la suite de règles de décision RD_v a une expérimentation consistante pour h_0 si

$$\forall A \subset E , \forall \eta > 0 , \lim_{v \rightarrow \infty} \tau_v \left\{ \left| \frac{C_A(t)}{E_v(C)} - \{ \cdot \}_v \{ A | h_0 \} \right| > \eta | h_0 \right\} = 0 .$$

Les théorèmes 6 et 7 nous donnent la " loi des grands nombres "

Théorème 8

Si a) $\sup_E \frac{1}{c(e)} \int_X \mu\{dx | e, h_0\} |s(e, x)| < \infty$.

b) RD_v est une suite de règles de décision de coût divergent , d'expérimentation convergente et consistante pour h_0 .

Alors

$$\forall \eta > 0 , \lim_{v \rightarrow \infty} \tau_v \left\{ \left| \frac{S(t)}{E_v(C | h_0)} - u(h_0) \right| > \eta | h_0 \right\} = 0$$

où $u(h_0) = \int \{ \{ de | h_0 \} \frac{1}{c(e)} \int_X \mu\{dx | e, h_0\} s(e, x)$

et $\{ \cdot \}_v \{ \cdot | h_0 \}$ est la limite de la suite $\{ \cdot \}_v \{ \cdot | h_0 \}$.

B. Suites de règles de décision simples .

1. Dans ce paragraphe , nous étudions le comportement asymptotique du coût pour des suites de règles de décision particulières . Elles ne semblent pas avoir de nom officiel ; Bechofer (5) s'y réfère en parlant de " Wald stopping structure " étant donné qu'il s'agit d'une généralisation du test séquentiel de Wald . Nous les appellerons des règles de décision simples .

2. Nous supposons qu'on a défini une partition de $\mathcal{H}$ en une famille de sous-ensembles indexée par $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{H} = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} \mathcal{H}_d \quad \text{avec} \quad \mathcal{H}_d \cap \mathcal{H}_{d'} = \emptyset \quad \text{si} \quad d \neq d' .$$

Nous dirons que d est la décision correcte lorsque le système se trouve dans un état $h \in \mathcal{H}_d$.

3. Soit π une mesure de probabilité sur $\mathcal{H}$. A toute trajectoire t nous attachons la mesure $\pi\{. | t\}$ sur $\mathcal{H}$ définie par

$$\pi\{. | t_0\} = \pi \quad \text{pour la trajectoire vide } t_0 .$$

$$\forall A \subset \mathcal{H}, \quad \pi\{A | t\} = \frac{\int \pi\{dh\} \prod_{i=1}^n f(x_i | e_i, h)}{\int_{\mathcal{H}} \pi\{dh\} \prod_{i=1}^n f(x_i | e_i, h)} \quad \text{pour}$$

la trajectoire $t = (e_1, x_1), \dots, (e_n, x_n)$.

En langage bayésien , π est la mesure de probabilité à priori et $\pi\{. | t\}$ la mesure de probabilité à postériori étant donné la trajectoire t .

4. Soit α un nombre tel que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Nous dirons qu'une règle de décision RD est simple de niveau α si

$$\begin{aligned} \forall t \in T, \quad RD\{t\} = 1 & \text{ si } \forall d \in D, \pi\{H_d|t\} < 1 - \alpha \\ RD\{d|t\} = 1 & \text{ si } \pi\{H_d|t\} \geq 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Si le système se trouve dans l'état $h \in H_d$, la probabilité d'arriver à une décision incorrecte est $\delta\{t|h\}$ où $t = D - \{d\}$.

L'avantage principal d'une règle de décision simple est qu'on peut évaluer facilement la probabilité d'une erreur de décision au moyen du lemme suivant, emprunté à l'analyse séquentielle.

Lemme 4

Si RD est une règle de décision simple de niveau α ,

$$\text{alors } \forall d \in D, \quad \int_{H_d} \pi\{dh\} \delta\{t|h\} \leq \alpha.$$

On peut en trouver une démonstration dans (5).

5. Pour ne pas surcharger les énoncés, nous introduisons les abréviations suivantes

- $\forall_{\pi} h \in A$: pour π -presque tout $h \in A$.
- $\sup_{h \in A} g(h)$: la borne inférieure de l'ensemble $\{a | a \in \mathbb{R}; \forall_{\pi} h \in A, g(h) \leq a\}$
- $\inf_{h \in A}^{\pi} g(h)$: la borne supérieure de l'ensemble $\{a | a \in \mathbb{R}; \forall_{\pi} h \in A, g(h) \geq a\}$

$$- I(c, h_1, B | h_0) = \frac{1}{\pi\{B\}} \int_B \pi\{dh\} I(c, h_1, h | h_0) .$$

- Etant donné l'état h_0 , nous désignons par d_0 la décision correcte pour h_0 et par $\mathcal{H}_0$ l'ensemble des états pour lesquels d_0 est la décision correcte .

Dans le prochain théorème, nous aurons besoin de l'hypothèse

H_0 : nous dirons que l'hypothèse H_0 est vérifiée pour h_0 si

$\forall \varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini $\mathcal{B}_\varepsilon$ de $\mathcal{H} - \mathcal{H}_0$

tel que $\forall B \in \mathcal{B}_\varepsilon$, $\pi\{B\} > 0$ et

$$\forall \pi, h \in B, \sup_{\varepsilon} \frac{1}{c(c)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx | c, h_0\} \frac{1}{\pi\{B\}} \int_B \pi\{dh\} \left| \log \frac{f(x | c, h)}{f(x | c, h_0)} \right| < \varepsilon .$$

Le lemme 5 est une conséquence à peu près immédiate de l'hypothèse H_0 .

Lemme 5

Si a) $\forall \pi, h \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0$, $\sup_{\varepsilon} \frac{1}{c(c)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx | c, h_0\} \left| \log \frac{f(x | c, h)}{f(x | c, h_0)} \right| < \infty$.

b) H_0 est vérifiée pour h_0 .

Alors

$\forall \varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini $\mathcal{B}_\varepsilon$ de $\mathcal{H} - \mathcal{H}_0$

tel que $\forall B \in \mathcal{B}_\varepsilon$, $\pi\{B\} > 0$ et

$$\forall f \in \mathcal{P}_\varepsilon, \left| \min_{B \in \mathcal{B}_\varepsilon} \int \{dc\} I(c, h_0, B | h_0) - U(h_0) \right| \leq \varepsilon$$

$$\text{où } U(h_0) = \inf_{h \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0} \int \{dc\} I(c, h_0, h | h_0) .$$

6. Le théorème 9 établit une borne inférieure pour le comportement asymptotique du coût des règles de décision jouissant de la propriété du lemme 4, lorsque α tend vers 0 ; il s'applique donc en particulier aux règles de décision simples.

Théorème 9

- Si a) $\forall \pi \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0$, $\sup_{\varepsilon} \frac{1}{c(\varepsilon)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx|e, h_0\} \left| \log \frac{f(x|e, h_0)}{f(x|e, h)} \right| < \infty$
 b) H_0 est vérifiée pour h_0 .
 c) $\mathcal{RD}_v$ est une suite de règles de décision finies pour h_0 et terminantes $\forall \pi \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0$.
 d) $\forall d \in \mathcal{D}$, $\int_{\mathcal{X}_d} \pi\{dh\} \delta_v\{d|h\} \leq \alpha_v$ avec $\lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_v = 0$.
 e) $\lim_{v \rightarrow \infty} \delta_v\{d_0|h_0\} = 1$.

Alors

- a) $\lim_{v \rightarrow \infty} E_v(C|h_0) = \infty$.
 b) $\limsup_{v \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\alpha_v}}{E_v(C|h_0)} \leq \limsup_{v \rightarrow \infty} U_v(h_0)$

$$\text{où } U_v(h_0) = \inf_{h \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0} \int_{\mathcal{X}} \delta_v\{d|h_0\} I(e, h_0, h|h_0) dx.$$

Démonstration

1°) Soit $\varepsilon > 0$ et $\mathcal{B}_\varepsilon$ un recouvrement fini de $\mathcal{H} - \mathcal{H}_0$ tel que $\forall h \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0$, $\pi\{\mathcal{B}_\varepsilon\} > 0$ et

$$\forall \{e\} \in \mathcal{P}_\varepsilon, \min_{h \in \mathcal{B}_\varepsilon} \int_{\mathcal{X}} \{de\} I(e, h_0, h|h_0) \leq U(h_0) + \varepsilon$$

On peut s'arranger pour que tout B_k soit contenu dans un ensemble $\mathcal{H}_d$ tel que $d \neq d_0$.

2°) Pour $B_k \subset \mathcal{H}_d$ avec $d \neq d_0$ on a

$$\frac{1}{\pi\{B_k\}} \int_{B_k} \pi\{dh\} \delta_v\{d_0|h\} \leq \frac{1}{\pi\{B_k\}} \int_{\mathcal{H}_d} \pi\{dh\} \delta_v\{d|h\} \leq \frac{\alpha_v}{\pi\{B_k\}}$$

Puisque RD_v est terminante $\forall \pi, h \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0$, on a

$$\delta_v\{d_0|h\} = 1 - \delta_v\{d_0|h\} \quad \forall \pi, h \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0, \quad \text{donc}$$

$$\frac{1}{\pi\{B_k\}} \int_{B_k} \pi\{dh\} \delta_v\{d_0|h\} \geq 1 - \frac{\alpha_v}{\pi\{B_k\}}.$$

3°) D'après le théorème 3 on a, $\forall \pi, h \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0$,

$$\begin{aligned} & E_v(C|h_0) \int_{\mathcal{E}} \delta_v\{de|h_0\} I(e, h_0, h|h_0) \geq \\ & \geq \delta_v\{d_0|h_0\} \log \frac{\delta_v\{d_0|h_0\}}{\delta_v\{d_0|h\}} + \delta_v\{d_0|h_0\} \log \frac{\delta_v\{d_0|h_0\}}{\delta_v\{d_0|h\}} \geq \\ & \geq -\delta_v\{d_0|h_0\} \log \delta_v\{d_0|h\} - 2. \end{aligned}$$

En intégrant sur B_k selon la mesure $\frac{\pi}{\pi\{B_k\}}$ et en tenant compte de la concavité du log, on obtient

$$\begin{aligned} & E_v(C|h_0) \int_{\mathcal{E}} \delta_v\{de|h_0\} I(e, h_0, B_k|h_0) \geq \\ & \geq -\delta_v\{d_0|h_0\} \log \frac{1}{\pi\{B_k\}} \int_{B_k} \pi\{dh\} \delta_v\{d_0|h\} - 2 \geq \\ & \geq \delta_v\{d_0|h_0\} \log \frac{1}{\alpha_v} + \delta_v\{d_0|h_0\} \log \pi\{B_k\} - 2. \end{aligned}$$

4°) En prenant le minimum sur k dans les deux membres de la dernière inégalité et en tenant compte de 1°) , on obtient

$$E_v(C|h_0) \left[U_v(h_0) + \varepsilon \right] \geq \delta_v\{d_0|h_0\} \log \frac{1}{\alpha_v} + \delta_v\{d_0|h_0\} \min_k \log \pi(B_k) - 2 .$$

Puisque , d'après l'hypothèse a) , $\sup U_v(h_0) < \infty$,
et que , d'après les hypothèses b) et c) ,

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \delta_v\{d_0|h_0\} \log \frac{1}{\alpha_v} = \infty , \text{ on a bien } \lim_{v \rightarrow \infty} E_v(C|h_0) = \infty$$

et $\limsup_{v \rightarrow \infty} U_v(h_0) \geq \limsup_{v \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\alpha_v}}{E_v(C|h_0)}$, ce qui achève la démonstration .

7. Pour simplifier l'écriture , nous posons

$$- f(x|e, B) = \sup_{h \in B} f(x|e, h)$$

$$- I(e, A, B|h_0) = \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx|e, h_0\} \frac{1}{\pi(A)} \int_A \pi\{dh\} \log \frac{f(x|e, h)}{f(x|e, B)}$$

Pour le théorème suivant , nous devons renforcer l'hypothèse H_0 du paragraphe 5 .

H_1 : nous dirons que l'hypothèse H_1 est vérifiée pour h_0 ssi

$\forall \varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini B_k de $\mathcal{H} - \mathcal{H}_0$
tel que $\forall k$, $\pi\{B_k\} > 0$, $f(x|e, B_k)$ définit
une fonction mesurable sur $\mathcal{E} \otimes \mathcal{X}$ et

$$\forall \pi h \in B_k , \sup_{\mathcal{E}} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx|e, h_0\} \left| \log \frac{f(x|e, h)}{f(x|e, B_k)} \right| \leq \varepsilon .$$

Il est clair que $H_1 \implies H_0$. .

Nous aurons aussi besoin de l'hypothèse

H_2 : nous dirons que l'hypothèse H_2 est vérifiée pour h_0 ssi

$\forall \varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble $A \subset \mathcal{H}_0$ tel que $\pi\{A\} > 0$ et

$$\forall_{\pi} h \in A, \quad \sup_{\varepsilon} \frac{1}{c(\varepsilon)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx|e, h_0\} \left| \log \frac{f(x|e, h_0)}{f(x|e, h)} \right| \leq \varepsilon.$$

Comme dans le paragraphe 5, on a le

Lemme 6

Si a) $\forall_{\pi} h \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0$, $\sup_{\varepsilon} \frac{1}{c(\varepsilon)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx|e, h_0\} \left| \log \frac{f(x|e, h_0)}{f(x|e, h)} \right| < \infty$.

b) H_1 et H_2 sont vérifiées pour h_0 .

Alors

$\forall \varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble $A \subset \mathcal{H}_0$ et un recouvrement fini $\mathcal{B}_\varepsilon$ de $\mathcal{H} - \mathcal{H}_0$ tels que $\pi\{A\} > 0$, $\forall h \in \mathcal{B}_\varepsilon$, $\pi\{B_h\} > 0$ et

$$\forall \{e\} \in \mathcal{P}_\varepsilon, \quad \left| \min_{h \in \mathcal{B}_\varepsilon} \int \{dc\} I(e, h, B_h | h_0) - U(h_0) \right| < \varepsilon$$

$$\text{où } U(h_0) = \inf_{h \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0} \int \{dc\} I(e, h_0, h | h_0).$$

8. Le théorème 1a établit une borne supérieure pour le comportement asymptotique du coût de règles de décision simples dont le niveau α tend vers 0.

Théorème 10

- Si
- e) $\forall_{\pi} h \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0$, $\sup_{\varepsilon} \frac{1}{c(\varepsilon)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx | e, h_0\} \left| \log \frac{f(x|e, h_0)}{f(x|e, h)} \right| < \infty$
 - b) H_1 et H_2 sont vérifiées pour h_0 .
 - c) $\mathcal{RD}_v$ est une suite de règles de décision simples de niveaux α_v avec $\lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_v = 0$.
 - d) La suite $\mathcal{RD}_v$ est de coût divergent, d'expérimentation convergente et consistante pour h_0 .

Alors

$$\liminf_{v \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\alpha_v}}{E_v(C | h_0)} \geq U(h_0)$$

$$\text{où } U(h_0) = \inf_{h \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0} \int_{\mathcal{E}} \{de | h_0\} I(e, h_0, h | h_0)$$

et $\{e | h_0\}$ est la limite de la suite $\{e_v | h_0\}$.

Démonstration

1°) Pour alléger les notations, nous omettrons de nouveau la variable h_0 dans $\mu\{. | e, h_0\}$, $\tau_v\{. | h_0\}$, $\{e_v | h_0\}$, $\{e | h_0\}$, $E_v(. | h_0)$ et $U(h_0)$.

2°) Remarquons tout d'abord que

$$\forall t \in \mathcal{T}, \quad \pi\{\mathcal{H}_0 | t\} < 1 - \alpha \iff \frac{\pi\{\mathcal{H} - \mathcal{H}_0 | t\}}{\pi\{\mathcal{H}_0 | t\}} > \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

Soient un sous-ensemble $A \subset \mathcal{H}_0$ et un recouvrement fini $\mathcal{B}_A$ de $\mathcal{H} - \mathcal{H}_0$ tels que $\pi\{A\} > 0$ et $\pi\{B_A\} > 0$.

On a , pour $t = (e_1, x_1), \dots, (e_n, x_n)$,

$$\pi\{\mathcal{H}_0 | t\} < 1-\alpha \implies \frac{\max_k \prod_{i=1}^n f(x_i | e_i, \mathcal{B}_k)}{\frac{1}{\pi\{A\}} \int \pi\{dR\} \prod_{i=1}^n f(x_i | e_i, R)} > \frac{\alpha \pi\{A\}}{(1-\alpha) M}$$

où $M = \max_k \pi\{\mathcal{B}_k\}$.

En prenant le log dans l'inégalité de droite , on obtient

$$\max_k \sum_{i=1}^n \log f(x_i | e_i, \mathcal{B}_k) - \log \frac{1}{\pi\{A\}} \int \pi\{dR\} \prod_{i=1}^n f(x_i | e_i, R) > \log \frac{\alpha \pi\{A\}}{(1-\alpha) M} .$$

En tenant compte de la concavité du log et en renversant le signe , on obtient enfin

$$\pi\{\mathcal{H}_0 | t\} < 1-\alpha \implies \min_k \sum_{i=1}^n \frac{1}{\pi\{A\}} \int \pi\{dR\} \log \frac{f(x_i | e_i, R)}{f(x_i | e_i, \mathcal{B}_k)} < \log \frac{(1-\alpha) M}{\alpha \pi\{A\}} .$$

3°) Soit $\varepsilon > 0$. Nous pouvons choisir le sous-ensemble

$A \subset \mathcal{H}_0$ et le recouvrement fini $\mathcal{B}_k$ de $\mathcal{H}-\mathcal{H}_0$ de façon que

$$\forall \{e\} \in \mathcal{P}_E, \quad \min_k \int_{\varepsilon} \{dc\} I(e, A, \mathcal{B}_k | h_0) \geq 1-\varepsilon$$

Soient $s_k: \mathcal{E} \otimes \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$s_k(e, x) = \frac{1}{\pi\{A\}} \int \pi\{dR\} \log \frac{f(x | e, R)}{f(x | e, \mathcal{B}_k)}$$

et $S_k: \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, $S'_k: \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$\left. \begin{aligned} S_k(t) &= \sum_{i=1}^n s_k(e_i, x_i) \\ S'_k(t) &= \sum_{i=1}^{n-1} s_k(e_i, x_i) \end{aligned} \right\} \text{ pour } t = (e_1, x_1), \dots, (e_n, x_n).$$

Les hypothèses a) et b) garantissent que

$$\forall k, \quad \sup_{\mathcal{E}} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu(dx|e) |s_k(e, x)| < \infty$$

En vertu du théorème 8, on a

$$\forall k, \quad \forall \eta > 0, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \tau_v \left\{ \left| \frac{S_k(t)}{E_v(C)} - U_k \right| > \eta \right\} = 0$$

$$\text{où } U_k = \int_{\mathcal{E}} \{de\} I(e, k, \mathcal{B}_k | k_0).$$

En vertu du théorème 6, on a

$$\forall k, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} E_v \left(\frac{|S_k - S'_k|}{E_v(C)} \right) = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\forall k, \quad \forall \eta > 0, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \tau_v \left\{ \left| \frac{S'_k(t)}{E_v(C)} - U_k \right| > \eta \right\} = 0.$$

et, puisque l'indice k est pris dans un ensemble fini

$$\forall \eta > 0, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \tau_v \left\{ \left| \frac{\min_k S'_k(t)}{E_v(C)} - \min_k U_k \right| > \eta \right\} = 0.$$

4°) RD_v étant une règle de décision simple de niveau α_v , on a, d'après le point 2°) de la démonstration,

$$\min_k S'_k(t) < \log \frac{(1-\alpha_v)M}{\alpha_v \pi\{R\}} \quad , \quad \tau_v \text{-presque partout} .$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{E_v(C)} \log \frac{(1-\alpha_v)M}{\alpha_v \pi\{R\}} - \min_k U_k > -\eta \Rightarrow \frac{\min_k S'_k(t)}{E_v(C)} - \min_k U_k > -\eta$$

Puisque

$$\tau_v \left\{ \frac{\min_k S'_k(t)}{E_v(C)} - \min_k U_k > -\eta \right\} \leq \tau_v \left\{ \left| \frac{\min_k S'_k(t)}{E_v(C)} - \min_k U_k \right| > \eta \right\}$$

on a, d'après le point 3°) de la démonstration

$$\forall \eta > 0, \lim_{v \rightarrow \infty} \tau_v \left\{ \frac{1}{E_v(C)} \log \frac{(1-\alpha_v)M}{\alpha_v \pi\{R\}} - \min_k U_k > -\eta \right\} = 0$$

ce qui implique que

$$\forall \eta > 0, \liminf_{v \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{(1-\alpha_v)M}{\alpha_v \pi\{R\}}}{E_v(C)} \geq \min_k U_k - \eta \geq U - \varepsilon - \eta$$

Puisque $\lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_v = 0$ et que ε et η sont arbitrairement petite, on a bien

$$\liminf_{v \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\alpha_v}}{E_v(C)} \geq U ,$$

ce qui achève la démonstration .

9. La synthèse des théorèmes 9 et 10 s'établit au moyen des deux lemmes suivants. Le lemme 7 est évident et le lemme 8 est une conséquence immédiate des lemmes 3 et 5.

Soit $A \in \mathcal{H}_0$ tel que $\pi\{A\} > 0$.

Lemme 7

Si a) $\mathcal{RD}_v$ est une suite de règles de décision terminantes

$$\forall_{\pi} h_0 \in \mathcal{H}.$$

$$b) \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{H}} \pi\{dh\} \delta_v\{d_0|h\} = 0.$$

Alors

$$\forall_{\pi} h_0 \in \mathcal{H}, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \delta_v\{d_0|h_0\} = 1.$$

Lemme 8

$$Si \quad a) \quad \forall_{\pi} h \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0, \quad \sup_E \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx|e, h_0\} \left| \log \frac{f(x|e, h_0)}{f(x|e, h)} \right| < \infty.$$

$$b) \quad H_0 \text{ est vérifiée pour } h_0.$$

$$c) \quad \left\{ \int_{\mathcal{E}} \right\}_v \text{ est une suite de mesures de probabilité sur } \mathcal{E} \text{ qui converge vers la mesure de probabilité } \left\{ \right\}.$$

Alors

$$\limsup_{v \rightarrow \infty} \inf_{h_0 \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0} \int_{\mathcal{E}} \left\{ \int_{\mathcal{X}} \right\}_v \{de\} I(e, h_0, h|h_0) = \inf_{h_0 \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0} \int_{\mathcal{E}} \left\{ \int_{\mathcal{X}} \right\} \{de\} I(e, h_0, h|h_0).$$

Nous obtenons donc le résultat suivant qui décrit le comportement asymptotique du coût pour une classe assez large de suites de règles de décision simples .

Théorème 11

Si a) $\forall_{\pi} h_0 \in \mathcal{A}$, $\forall_{\pi} h \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0$,

$$\sup_{\varepsilon} \frac{1}{c(\varepsilon)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx|e, h_0\} \left| \log \frac{f(x|e, h_0)}{f(x|e, h)} \right| < \infty .$$

b) H_1 et H_2 sont vérifiées $\forall_{\pi} h_0 \in \mathcal{A}$.

c) $\mathcal{RD}_v$ est une suite de règles de décision simples de niveaux d_v avec $\lim_{v \rightarrow \infty} d_v = 0$, finies $\forall_{\pi} h_0 \in \mathcal{A}$.

d) L'expérimentation de la suite $\mathcal{RD}_v$ est convergente et consistante $\forall_{\pi} h_0 \in \mathcal{A}$.

Alors

$$\forall_{\pi} h_0 \in \mathcal{A} , \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\alpha_v}}{E_v(C|h_0)} = U(h_0)$$

$$\text{où } U(h_0) = \inf_{h \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0} \int \{de|h_0\} I(e, h_0, h|h_0)$$

et $\{.\|h_0\}$ est la limite de la suite $\{.\|h_0\}_v$.

Chapitre 4

L'optimalité asymptotique

1. Soient $A \subset \mathcal{H}$ et π une mesure de probabilité sur $\mathcal{H}$.

Considérons une suite $\mathcal{R}_v$ où $\forall v$, $\mathcal{R}_v$ est un ensemble de règles de décision, ainsi qu'une suite de règles de décision RD_v telle que $\forall v$, $RD_v \in \mathcal{R}_v$.

Nous dirons que la suite RD_v est π -asymptotiquement optimale sur A relativement à la suite $\mathcal{R}_v$ si

pour toute suite de règles de décision RD'_v telle que $\forall v$, $RD'_v \in \mathcal{R}_v$, on a

$$\forall \pi h \in A, \quad \limsup_{v \rightarrow \infty} \frac{E_v(C|h)}{E'_v(C|h)} \leq 1, \quad ,$$

où $E'_v(C|h)$ désigne le coût de RD'_v .

Cette définition de l'optimalité asymptotique est légèrement différente de celle de Chernoff (3) et de celle de Kiefer et Sacks (4), en ce sens que le critère d'optimalité n'est pas le risque mais le coût de l'expérimentation. Nous pouvons avancer trois raisons pour le choix de cette définition.

1°) Elle s'inscrit dans le prolongement direct des résultats que nous avons obtenus dans le chapitre 3.

2°) Il est souvent difficile de comparer les coûts objective de l'expérimentation aux pertes dues aux erreurs de décision qui ne sont pas toujours de nature purement financières .

3°) Le coût de l'expérimentation constitue la partie prépondérante du risque des procédures asymptotiquement optimales au sens de Chernoff ou de ses successeurs .

2. Soit α un nombre tel que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Désignons par $\mathcal{R}_\alpha$ l'ensemble des règles de décision RD telles que

- RD est finie $\forall \pi, h \in \mathcal{H}$.

- $\forall d \in \mathcal{D}$, $\int_{\mathcal{H}_d} \pi\{dh\} \delta\{d|h\} \leq \alpha$.

Soit $A \subset \mathcal{H}_0$ tel que $\pi\{A\} > 0$.

On a , comme conséquence directe du théorème 9 et du lemme 7 , le

Théorème 12

Si a) $\forall \pi, h_0 \in \mathcal{A}$, $\forall \pi, h \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0$,

$$\sup_{\varepsilon} \frac{1}{c(\varepsilon)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx|e, h_0\} \left| \log \frac{f(x|e, h_0)}{f(x|e, h)} \right| < \infty .$$

b) H_0 est vérifiée $\forall \pi, h_0 \in \mathcal{A}$.

c) RD_v est une suite de règles de décision telles que $\forall v$, $RD_v \in \mathcal{R}_{\alpha_v}$ avec $\lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_v = 0$.

Alors

$$\forall h_0 \in \mathcal{A}, \quad \limsup_{v \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\alpha_v}}{E_v(C|h_0)} \leq M(h_0)$$

$$\text{où } M(h_0) = \sup_{\{e \in \mathcal{P}_E\}} \inf_{\pi} \int_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}_0} \{de\} I(e, h_0, h|h_0) .$$

3. Nous appelons mesure de probabilité optimale pour h_0

toute mesure de probabilité $\sigma\{.|h_0\}$ sur $\mathcal{E}$ telle que

$$\inf_{\pi} \int_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}_0} \sigma\{de|h_0\} I(e, h_0, h|h_0) = M(h_0)$$

Le théorème 13 établit l'optimalité asymptotique d'une classe assez large de suites de règles de décision simples .

Théorème 13

Si a) $\forall_{\pi} h_0 \in \mathcal{A}$, $\forall_{\pi} h \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0$,

$$\sup_E \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx|e, h_0\} \left| \log \frac{f(x|e, h_0)}{f(x|e, h)} \right| < \infty .$$

b) H_1 et H_2 sont vérifiées $\forall_{\pi} h_0 \in \mathcal{A}$.

c) $\forall_{\pi} h_0 \in \mathcal{A}$; $M(h_0) > 0$.

d) $\mathcal{RD}_v$ est une suite de règles de décision simples de niveaux α_v avec $\lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_v = 0$, finies $\forall_{\pi} h \in \mathcal{H}$.

e) L'expérimentation de la suite $\mathcal{RD}_v$ est consistante et converge vers une mesure de probabilité optimale

$$\forall_{\pi} h_0 \in \mathcal{A} .$$

Alors

la suite RD_v est π -asymptotiquement optimale sur A relativement à la suite R_{α_v} .

Démonstration

Soit RD'_v une suite de règles de décision telle que $\forall v, RD'_v \in R_{\alpha_v}$.

D'après le théorème 12,

$$\forall \pi, h_0 \in A, \quad \limsup_{v \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\alpha_v}}{E'_v(C|h_0)} \leq M(h_0).$$

D'après le théorème 10,

$$\forall \pi, h_0 \in A, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\alpha_v}}{E_v(C|h_0)} = M(h_0).$$

Il s'ensuit que

$$\forall \pi, h_0 \in A, \quad \limsup_{v \rightarrow \infty} \frac{E_v(C|h_0)}{E'_v(C|h_0)} \leq 1, \text{ ce qui achève}$$

la démonstration.

4. L'existence d'une mesure de probabilité optimale n'est pas assurée dans tous les cas.

Cependant, si $\mathcal{E}$ est un espace topologique compact où les sous-ensembles mesurables sont boréliens, on peut énoncer le

Lemme 9

Si a) $\forall_{\pi} h \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0$, $\sup_{\mathcal{E}} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx|e, h_0\} \left| \log \frac{f(x|e, h_0)}{f(x|e, h)} \right| < \infty$.

b) H_0 est vérifiée pour h_0 .

Alors

il existe une mesure de probabilité optimale pour h_0 .

Démonstration

1°) Soit $\{ \pi_n \}$ une suite de mesures de probabilité sur $\mathcal{E}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{h \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0} \int_{\mathcal{E}} \{ \pi_n \{ de \} I(e, h_0, h | h_0) = M(h_0) .$$

Puisque $\mathcal{E}$ est compact, on peut extraire de la suite

$\{ \pi_n \}$ une sous-suite $\{ \pi'_n \}$ qui converge vers une mesure de probabilité σ .

2°) Soit $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 5, il existe un recouvrement fini $\mathcal{B}_k$ de $\mathcal{H} - \mathcal{H}_0$ tel que

$$\forall \{ \} \in \mathcal{P}_{\mathcal{E}}, \quad \left| \min_k \int_{\mathcal{E}} \{ \{ de \} I(e, h_0, B_k | h_0) - V(\{ \}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

où $V(\{ \}) = \inf_{h \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0} \int_{\mathcal{E}} \{ \{ de \} I(e, h_0, h | h_0)$.

D'après le lemme 3, on a

$$\forall h, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{E}} \{ \pi'_n \{ de \} I(e, h_0, B_k | h_0) = \int_{\mathcal{E}} \{ \sigma \{ de \} I(e, h_0, B_k | h_0) .$$

L'indice k étant pris dans un ensemble fini, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_k \int_{\mathcal{E}} \{d\epsilon\} I(e, h_0, B_k | h_0) = \min_k \int_{\mathcal{E}} \{d\epsilon\} I(e, h_0, B_k | h_0) .$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} V(\{j'_n\}) = M(h_0)$, il s'ensuit que

$$|V(\sigma) - M(h_0)| \leq \varepsilon . \quad \varepsilon \quad \text{étant arbitrairement}$$

petit, on a $V(\sigma) = M(h_0)$; σ est donc une

mesure de probabilité optimale pour h_0 .

5. Dans le cas où $\mathcal{E}$ n'est pas un espace topologique compact, on ne peut pas garantir l'existence de mesures de probabilité optimales. On ne peut donc plus obtenir l'optimalité asymptotique pour des suites de règles de décision dont l'expérimentation est convergente. On peut néanmoins établir l'optimalité asymptotique de certaines suites de règles de décision simples, en choisissant la seconde des deux possibilités qui se sont offertes au chapitre 3A§ 4 pour la construction d'une " loi des grands nombres ". Cela revient à renforcer les hypothèses sur la fonction $S(e, x)$ dans les théorèmes 6 et 8 et celles sur les mesures $\mu\{e, h\}$ dans les théorèmes 10 et 11. Les autres théorèmes restent inchangés.

Théorème 6 bis

Si a) $\sup_{\mathcal{E}} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx|e, h_0\} |S(e, x)|^p < \infty$ avec $p > 1$.

b) $\mathcal{RD}_V$ est une suite de règles de décision de coût divergent pour h_0 .

Alors

$$a) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{E_v(|S-M| | h_0)}{E_v(C | h_0)} = 0 \quad .$$

$$b) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{E_v(|S-S'| | h_0)}{E_v(C | h_0)} = 0 \quad .$$

Théorème 8 bis

Si a) $\sup_{\mathcal{E}} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx | e, h_0\} |s(e, x)|^p < \infty$ avec $p > 1$.

b) $\mathcal{RD}_v$ est une suite de règles de décision de coût divergent et d'expérimentation consistante pour h_0 .

Alors

$$\forall \eta > 0, \quad \tau_v \left\{ \left| \frac{S(t)}{E_v(C | h_0)} - U_v(h_0) \right| > \eta \mid h_0 \right\} = 0$$

$$\text{où} \quad U_v(h_0) = \int_{\mathcal{E}} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx | e, h_0\} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx | e, h_0\} s(e, x) .$$

Il faut aussi renforcer les hypothèses H_1 et H_2 qui figurent dans la condition b) des théorèmes 10 et 11 .

H_1^1 : l'hypothèse H_1^1 est vérifiée pour h_0 ssi

$\forall \varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini $\mathcal{B}_\varepsilon$ de $\mathcal{H} - \mathcal{H}_0$.

tel que $\forall h \in \mathcal{B}_\varepsilon$, $\pi\{\mathcal{B}_\varepsilon\} > 0$, $f(x | e, h)$ définit

une fonction mesurable sur $\mathcal{E} \otimes \mathcal{X}$ et

$$\forall h \in \mathcal{B}_\varepsilon, \quad \sup_{\mathcal{E}} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx | e, h_0\} \left| \log \frac{f(x | e, h)}{f(x | e, h_0)} \right|^p \leq \varepsilon$$

avec $p > 1$.

H_2^1 : l'hypothèse H_2^1 est vérifiée pour h_0 ssi

$\forall \varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble $A \subset \mathcal{H}_0$ tel

que $\pi\{A\} > 0$ et

$$\forall_{\pi} h \in A, \quad \sup_{\varepsilon} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx|e, h_0\} \left| \log \frac{f(x|e, h_0)}{f(x|e, h)} \right|^p \leq \varepsilon$$

avec $p > 1$.

Théorème 10 bis

Si a) $\forall_{\pi} h \in \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}_0$, $\sup \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx|e, h_0\} \left| \log \frac{f(x|e, h_0)}{f(x|e, h)} \right|^p < \infty$
avec $p > 1$.

b) H_1^1 et H_2^1 sont vérifiées pour h_0 .

c) $\mathcal{RD}_v$ est une suite de règles de décision simples de niveaux α_v avec $\lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_v = 0$.

d) La suite $\mathcal{RD}_v$ est de coût divergent et d'expérimentation consistante pour h_0 .

Alors

$$\liminf_{v \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\alpha_v}}{E_v(C|h_0)} \geq \liminf_{v \rightarrow \infty} U_v(h_0)$$

$$\text{où } U_v(h_0) = \inf_{h \in \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}_0} \int_{\mathcal{E}} \{ \nu\{de|h_0\} I(e, h_0, h|h_0) \}.$$

La démonstration de ce théorème est semblable à celle du théorème 10 ; il suffit de remplacer les constantes U_h du point 3°) par $U_{v,h} = \int_{\mathcal{E}} \{ \nu\{de\} I(e, h_0, B_h|h_0) \}.$
 $\mathcal{E}$

Théorème 11 bis

Si a) $\forall_{\pi} h_0 \in \mathcal{A}$, $\forall_{\pi} h \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0$,

$$\sup_{\mathcal{E}} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx|e, h_0\} \left| \log \frac{f(x|e, h_0)}{f(x|e, h)} \right|^p < \infty \quad \text{avec } p > 1 .$$

b) H_1^1 et H_2^1 sont vérifiées $\forall_{\pi} h_0 \in \mathcal{A}$.

c) $\mathcal{RD}_v$ est une suite de règles de décision simples de niveaux α_v avec $\lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_v = 0$, finies $\forall_{\pi} h \in \mathcal{H}$.

d) L'expérimentation de la suite $\mathcal{RD}_v$ est consistante

$$\text{et } \lim_{v \rightarrow \infty} \inf_{h \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0} \int_{\mathcal{E}} \{de|h_0\} I(e, h_0, h|h_0) = U(h_0) , \quad \forall_{\pi} h_0 \in \mathcal{A} .$$

Alors

$$\forall_{\pi} h_0 \in \mathcal{A} , \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\alpha_v}}{E_v(C|h_0)} = U(h_0) .$$

On obtient finalement le théorème suivant pour l'optimalité asymptotique des suites de règles de décision simples

Théorème 13 bis

Si a) $\forall_{\pi} h_0 \in \mathcal{A}$, $\forall_{\pi} h \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_0$,

$$\sup_{\mathcal{E}} \frac{1}{c(e)} \int_{\mathcal{X}} \mu\{dx|e, h_0\} \left| \log \frac{f(x|e, h_0)}{f(x|e, h)} \right|^p < \infty \quad \text{avec } p > 1 .$$

b) H_1^1 et H_2^1 sont vérifiées $\forall_{\pi} h_0 \in \mathcal{A}$.

c) $\forall_{\pi} h_0 \in \mathcal{A}$, $M(h_0) > 0$.

d) RD_ν est une suite de règles de décision simples de niveaux α_ν avec $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \alpha_\nu = 0$, finies $\forall_\nu h \in \mathcal{H}$.

e) L'expérimentation de la suite RD_ν est consistante

$$\text{et } \lim_{\nu \rightarrow \infty} \inf_{h \in \mathcal{H}} \int_{\mathcal{E}} \{d_\nu | h_0\} I(e, h_0, h | h_0) = M(h_0), \forall_\nu h_0 \in \mathcal{H}.$$

Alors

la suite RD_ν est π -asymptotiquement optimale sur $\mathcal{A}$ relativement à la suite R_{α_ν} .

6. L'ensemble des règles de décision R_α dépend de la mesure de probabilité à priori π sur $\mathcal{H}$, ce qui limite quelque peu la portée du théorème 13. On pourrait souhaiter trouver un résultat analogue où la suite des ensembles de règles de décision servant de référence soit plus largement indépendante de π . On peut envisager par exemple, de remplacer l'ensemble R_α par l'ensemble R'_α des règles de décision RD telles que

- RD est finie $\forall_\pi h \in \mathcal{H}$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{D}, \sup_{h \in \mathcal{H}_\alpha} \delta\{d | h\} \leq \alpha$.

Kiefer et Sacks (4) se sont penchés sur un problème analogue ; leurs résultats permettent de supposer qu'en renforçant quelque peu les hypothèses sur les mesures $\mu\{e, h\}$ et en admettant la compacité de $\mathcal{E}$, on peut construire une fonction $\eta(\alpha)$ avec $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \eta(\alpha) = 0$ telle que toute règle de décision simple de niveau $\alpha^{1+\eta(\alpha)}$ finie $\forall_\pi h \in \mathcal{H}$ appartienne à l'ensemble R'_α dès que α est assez petit.

Une suite de règles de décision simplee de niveaux $\alpha_v^{1+\eta(d_v)}$
 avec $\lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_v = 0$ satisfaisant aux conditions du théorème
 13, serait donc asymptotiquement optimale relativement à
 la suite R'_{d_v} .

Références

- (1) Wald A. (1947) , " Sequential Analysis " , Wiley , New York .
- (2) Wald A. (1950) , " Statistical Decision Functions " ,
Wiley , New York .
- (3) Chernoff H. (1959) , " Sequential design of experiments " ,
Annals of Mathematical Statistics , Vol. 30 , pp. 755-770 .
- (4) Kiefer J. et Sacks J. (1963) , " Asymptotically optimum
inference and design " , Annals of Mathematical Statistics ,
Vol. 34 , pp. 705-749 .
- (5) Bechhofer R.E. , Kiefer J. et Sobel M. (1968) , " Sequen-
tial Identification and Ranking Rules " , The University
of Chicago Press , Chicago et Londres .
- (6) Kullback S. (1959) , " Information Theory and Statistics " ,
Wiley , New York .
- (7) Chernoff H. (1952) , " A measure of asymptotic efficiency
for tests of a hypothesis based on the sum of observations " ,
Annals of Mathematical Statistics , Vol. 23 , pp. 493-507 .
- (8) Morgenstern D. (1964) , " Einführung in die Wahrscheinlich-
keitsrechnung und Mathematische Statistik " , Springer-Ver-
lag , Berlin Göttingen Heidelberg .
- (9) Albert A.E. (1961) , " The sequential design of experiments
for infinitely many states of Nature " , Annals of Mathe-
matical Statistics , Vol. 32 , pp. 774-799 .

Tablea dea matiere

<u>Introduction</u>	1
A. Historique	1
B. Résumé	4
<u>Chap. 1</u> Définitions	5
A. Notations et conventions	5
B. Définitions	6
<u>Chap. 2</u> Généralisation de l'inégalité de Hoeffding	10
<u>Chap. 3</u> Etude asymptotique de suites de règles de décision	14
A. La loi des grands nombres	14
B. Suites de règles de décision simples	25
<u>Chap. 4</u> L'optimalité asymptotique	38
<u>Références</u>	49