Publié dans Interactions didactiques 3, 1-54, 1984
qui doit être utilisé pour toute référence à ce travail

JALONS A PROPOS D'ALGEBRE

par Yves Chevallard et François Conne

LA QUESTION DU RAPPORT ENTRE ALGEBRIQUE ET NUMERIQUE

(Principes directeurs dans la construction d'un enseignement expérimental et introduction à la problématique d'Yves Chevallard, chercheur à l'IREM d'Aix Marseille).

AVANT-PROPOS

Ce cahier a deux parties qui sont très indépendantes mais qui portent sur le même sujet : algèbre au premier cycle de l'école secondaire, et plus précisément relations algébrique/numérique. Il s'agit ici de la classe de 8e (4e française) et de calcul littéral. Dans un premier temps, j'aborde la question de la SIGNIFICATION dans la résolution d'un problème numérique (démonstration par l'algèbre d'une propriété numérique que l'on présente à l'élève). Les considérations que je puis faire à ce sujet sont encore très multiples et différenciées. Il m'a paru alors utile de me baser sur un protocole donné, avec un élève de fin de 8e scientifique et pris dans un cadre tout à fait hors classe.Avant de faire l'entretien, j'ai discuté rapidement de ce que cet élève avait vu en classe et ce qui était à l'ordre du jour. On avait évoqué l'algèbre, les identités remarquables ainsi que la résolution d'équation.

Le second volet est constitué par un texte d'Yves Chevallard, suivi par une analyse que j'avait faite pour un cours. Le texte de Chevallard consiste en des commentaires faits à des enseignants. Il se situe dans le cadre d'une expérience didactique, encore en cours aujourd'hui.

La démarche a débuté par la constitution d'un texte d'enseignement de l'algèbre qui constituerait l'outil principal de l'expérience. Je ne vais pas parler de l'expérience elle-même. Et on ne peut pas la reconstituer dans ses détails à partir du seul texte présenté (moi-même je ne dispose pas d'autres textes). Je laisserai à Yves Chevallard le soin de présenter celle-ci. Et je prierai le lecteur de ne pas trop s'en préoccuper, pour examiner avec moi certains principes directeurs qui président à la construction de cet enseignement. Une dernière remarque : la rédaction des présents commentaires par Yves Chevallard succède aux séances de préparation des leçons (tenues au fur et à mesure de la progression de l'année), il s'agit donc d'une sorte de résumé de ce qui a été discuté.

Enfin, le lecteur retrouvera parmi les activités proposées par Yves Chevallard le problème du protocole présenté en première partie. Ce n'est pas un hasard bien sûr.

François Conne Juin 1984.

UN EXEMPLE DE RESOLUTION DE PROBLEME

Je vais donner ici le protocole d'un entretien tenu avec Mathias, élève de 8e scientifique qui arrivait en fin d'année (mai 1984). La discussion avait été menée après un match de foot, donc dans un cadre tout à fait hors classe. D'autre part, l'entretien avait débuté sur quelques considérations à propos de ce que Mathias faisait en ce moment en classe. Puis débute la résolution proprement dite.

PROTOCOLE MATHIAS

1ère PARTIE NUMERIQUE

Prends 3 nombres consécutifs, trois nombres qui se suivent.

> M. écrit 3,4,5

Maintenant, tu calcules le carré de celui qui est au milieu et tu y soustrais le produit de deux autres nombres.

> M. écrit au fur et à mesure : 25 - 24 = 1.

Un autre, refais trois autres nombres consécutifs.

> M. choisit cette fois 10,11,12 qu'il écrit. Puis il construit son calcul. 121 - 120 = 1. Durant un petit moment, il examine ses nombres. Compare. JE CROIS QUE J'AI TROUVE ! LA, ON FAIT UNE FOIS DE PLUS UN NOMBRE UNE FOIS PLUS PETIT. Il reprend sa formulation. LE MULTIPLICATEUR EST DE UN PLUS GRAND ET LE MULTIP... LE MULTIPLIC. LE MULTIPLE EST DE UN PLUS PETIT. Toujours pas convaincu de son expression, il rajoute : JE NE PEUX PAS MIEUX DIRE, JE VOIS COMMENT PAR ECRIT, ON VOIT COMMENT ÇA MARCHE.

Essaie encore une fois de le dire, explique avec les nombres.

> 12 ON LE FAISAIT..., ON LE MULTIPLIAIT UNE FOIS DE MOINS QUE 11 LA ... ET 12 C'EST UN DE PLUS QUE 11 ... ET PUIS ... COMMENT DIRE ... ÇA ... ÇA DONNE ÇA QUE C'EST UNE FOIS DE PLUS ... Mathias me regarde, j'ai l'impression qu'il doute que je le comprenne.

COMMENTAIRE DE LA PREMIERE PARTIE.

1. Tout d'abord il faut que je confirme le lecteur sur le point suivant : Mathias à ce moment de la résolution est sûr du fait. Il pense que cela donne 1 et que cela donnera sans doute toujours 1.

2. Mathias a tout de suite cherché à analyser cette seconde apparition du 1. Pour cela il examine les nombres, et leur écriture : 121 - 120 = 1 comparé à 10, 11, 12. Lors de cette activité de comparaison et de mise en relation dont les seules manifestations sont les mouvements du regard de Mathias ainsi que les pointages du stylo bille, il a le sentiment de trouver quelque chose. C'est ce qu'il déclare. Et je puis donc inferer que petit à petit les mises en relations s'organisent dans son esprit. Seulement, il n'arrive pas bien à en rendre compte dans sa formulation orale. Soit que sa pensée (l'échafaudage du raisonnement intuitif) est fugace soit que celle-ci est trop vague et ne passe pas par les mots, ceux-ci manquant ou encore faisant censure. L'examen attentif de ce qu'il dit montre qu'il se centre sur les relations entre les nombres donnés. Il situe le produit ac (nommons les 3 nombres a,b,c dans l'ordre de croissance) par rapport au carré b^2, mais dans des termes arithmétiques, je veux dire par là qu'il se refère à la multiplication et particulièrement à une propriété additive de celle-ci. Ressortent alors deux aspects : 1º il retrouve le 1 dans les différences entre a,b,c. Il retrouve la trace du 1 que la soustraction fait apparaître. 2º Il y associe une sorte de compensation : ON PREND UNE FOIS DE PLUS UN NOMBRE UNE FOIS PLUS PETIT. Cela est compris et prend un moment tout l'espace. Cela paraît naturel de retrouver 1 dans le calcul b^2-ac. Mais lorsque Mathias veut le formuler, ce dernier maillon ne passe pas. C'est là qu'il butte, recommence où s'il force, devient évasif. : ÇA... ÇA DONNE ÇA QUE C'EST UNE FOIS DE PLUS ... (son raisonnement évidemment ne permettrait pas de dire pourquoi le résultat est 1 et non pas 0 ou 2 !)

3º. Pour le moment, la SIGNIFICATION de la propriété est numérique. Et Mathias mobilise des représentations des nombres. Ainsi en est-il du recours à ce qu'il sait de la multiplication, et à cet argument de compensation. Mais, nous l'avons vu, il n'arrive pas à recouvrir totalement ce qui se passe. Il y a quelque chose qu'il voit sur ce qu'il a écrit mais qu'il n'arrive pas à dire. Là aussi je ferais l'hypothèse que la valeur des nombres choisis 10,11,12 n'est pas sans jouer un rôle. En particulier la simplicité de la multiplication 10 x 12 qui revient à écrire 12 suivi d'un zéro : 120. Mais aussi peut être le carré de 11 qui n'est ni 101 ni 111. Je dirai encore la présence de 1 dans 11 et sa "retrouvaille" dans 11^2.

Je suppose donc que le traitement de Mathias porte sur les quantités, sur les propriétés des opérations numériques (1 de plus, 1 de moins, et additivité de la multiplication, compensation entre les + et les -). Ainsi que sur l'écriture, les écritures et les relations que l'on peut faire sur les symboles venant comme support (ici comme manifestation) des relations numériques que l'on suppose oeuvrer.

4°. J'en conclus donc à cette réalité numérique et scripturale sur laquelle porte l'attention de Mathias, pour en dégager un élément de signification. Mais dès lors que l'on veut parler de signification, il s'agit de comparer temporellement les divers états par lesquels le sujet passe. Ainsi au départ le choix de 3 nombres consécutifs, pas d'autres indications pour ce choix qui paraît dès lors libre (et immanquablement le sujet hésite ou attend la suite). Le calcul de la quantité, il trouve 1. Bon. Il retrouve 1 et dès lors il s'étonne. C'est alors ce 1 qui étonne, qui devient significatif. Enfin vient l'examen et le premier échafaudage dont on notera une chose que je n'ai pas encore relevée : c'est une centration relationnelle : ON PREND UNE FOIS DE PLUS UN NOMBRE UNE FOIS PLUS PETIT. Je dirai que a,b,c sont des nombres, des nombres vus encore comme bien différents c est une fois de plus que b, a est une fois plus petit que b. Il y a encore 3 nombres dont Mathias traite les relations.

Cette dernière remarque permet la transition à la seconde partie du protocole.

2ème PARTIE ALGEBRIQUE

Essaie de faire par l'algèbre pour expliquer.

Mathias écrit $x^2-yz = 1$, puis réfléchit à haute voix. ALORS ON SAIT QUE DISONS $x - y = 1$ (il ne l'écrit pas) SI ÇA C'EST X. ... il réfléchit ... NON, ON NE DOIT PAS FAIRE COMME ÇA , ÇA NE DONNE PAS UNE FORMULE. JE NE VOIS PAS CE QU'ON DOIT FAIRE. ON DOIT EXPLIQUER PAR L'ALGEBRE ? Il me renvoie donc ma question.

Ouais.

C'EST PAS UNE FORMULE ... puis il réfléchit ... ET SI ÇA ($x^2-yz = 1$) JE FAIS QUE CE SOIT EGAL A ZERO (pour le lecteur, Mathias venait de m'expliquer auparavant que le maître leur avait parlé de produit nul de 2 polynomes $P(x)\ Q(x) = 0 \Rightarrow P(x)$ ou $Q(x) = 0$). Il écrit alors : $x^2-yz - 1 = 0$ en disant : JE NE SUIS PAS SÛR, JE VAIS VOIR SI ÇA MARCHE. Examen puis : AH NON ÇA NE MARCHE PAS ... ON NE PEUT PAS REDUIRE PARCE QU'ON N'A PAS DE X. Un temps de réflexion puis Mathias commence à écrire au dessous : $x^2-(x+1)$ puis $x^2-((x+1)(x-1))$, à ce moment il s'exclame ÇA C'EST UNE FORME ; ÇA, ON SAIT CE QUE C'EST. Il écrit $x^2-((x+1)(x-1)) = 1$ puis $x^2-(x^2-1)= 1$ DONC C'EST 1, C'EST UN DE MOINS QUE X^2.

Réexplique-moi.

X, C'EST LE NOMBRE DU MILIEU. ALORS (il lit) X^2 MOINS GRANDE PARENTHESE DANS LAQUELLE IL Y EN A DEUX PETITES X PLUS UN ET PIS X MOINS UN C'EST X^2 MOINS UN DONC C'EST X^2 MOINS X^2 MOINS UN DONC C'EST EGAL A UN.

Tu es sûr

SI ON ENLEVE LES PARENTHESES il écrit alors à la suite de son équation :

$$\begin{aligned} x^2-(x^2-1) &= 1 \\ x^2- x^2+1 &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Tu en es où dans ton problème ?

... LA J'AI PROUVE QUE QUAND IL Y AVAIT 3 NOMBRES CONSECUTIFS, LE CARRE DU MILIEU MOINS LE PRODUIT DES DEUX AUTRES EST EGAL A UN.

Tu es sûr que tu l'as prouvé ?

moment puis PAS PAR ECRIT. (pas une preuve explicite comme en géométrie) MAIS EN REGARDANT ÇA, X,PEUT ETRE REMPLACE PAR N'IMPORTE QUOI, MANQUERA TOUJORUS UN ... J'AI PAS TOUT EXPLIQUE EN FRANÇAIS J'AI ECRIT SIMPLEMENT

Bon, si maintenant on prend avec des nombres négatifs ... avec 3 nombres consécutifs négatifs, ça marche toujours ?

Il réfléchit un moment. Puis JE CROIS (il examine son égalité $(x^2-(x+1)(x-1)= 1)$ UN NOMBRE NEGATIF AU CARRE ÇA DONNE PLUS, UN NOMBRE NEGATIF FOIS UN NOMBRE NEGATIF ÇA DONNE PLUS, DONC ON DOIT OBTENIR UN. C'EST LA MEME FORMULE SI ON VEUT ... il regarde encore (hésite ?) puis jetant d'un geste vif son crayon sur la table. C'EST LA MEME FORMULE X EST NEGATIF, X EGALE MOINS X SI ON VEUT. (il veut sans doute dire par là que X peut désigner une quantité négative comme une quantité positive.)

COMMENTAIRE DE LA DEUXIEME PARTIE.

Je vais poursuivre mon analyse en examinant la signification.

1°. Nouvelle consigne : expliquer par l'algèbre. Mathias reprend le problème au départ et écrit littéralement le calcul qu'il s'agit d'expliquer. $x^2-yz = 1$. On remarque l'ordre avec lequel Mathias prend les nombres. Le carré du nb. du milieu moins le produit des deux autres. On remarquera aussi, et ce en relation avec le dernier point du commentaire précédent, qu'il y a 3 lettres pour les 3 nombres. Mathias reprend les choses. Il exprime ensuite une des relations données : y-x = 1. Mais de nouveau, on notera que cela relie 2 nombres considérés comme entités bien distinctes.

2°. Le second point à noter est peut-être un effet dû à ma consigne (expliquer par l'algèbre). Il n'en reste pas moins que Mathias anticipe ce que cela devrait donner avant même d'avoir traduit les relations en jeu. Il écrit $x^2-yz = 1$ mais cela est la traduction de la consigne et du résultat escompté. Il explicite une des relations mais abandonne car : ÇA NE DONNE PAS UNE FORMULE. C'est donc que le traitement algébrique est déjà soumis à une finalité : trouver une formule, ce que j'aurais envie de traduire par : trouver quelque chose d'exploitable. C'est à cette finalité aussi que Mathias cherche à répondre lorsqu'il a l'idée, après tâtonnement et analyse de l'obstacle auquel il bute (ON NE PEUT PAS REDUIRE CAR ON N'A PAS DE X), de substituer à y et z leur expression (x+1) et (x-1). Ce point est fondamental car Mathias ne procède pas dans le bleu. Il ne commence pas par traduire les relations de la donnée qu'il substituerait dans la formule pour développer ensuite. Son traitement est moins linéaire, plus contrôlé. Et lorsqu'il exprime les relations (x-1), x, (x+1), cela répond avant tout au souci (sous-tâche) de tout exprimer en x. On remarquera ainsi que ceci marque aussi un changement de perspective dans son traitement. <u>Il utilise les relations données pour exprimer les nombres en fonction d'une seule variable, et ne cherche plus à exprimer les relations pour elles-mêmes.</u> Dès lors, et par le biais de la reconnaissance instantannée d'une identité remarquable (une formule, quelque chose d'utilisable) l'algébrique prend le pas sur le numérique.

3°. L'algébrique, et l'écriture des équations devient alors la réalité sur laquelle Mathias est centré. Je lui demande une reexplication - Voilà qu'il me lit son équation (comme s'il s'agissait de la dicter). Je lui demande s'il est sûr - Il vérifie ses parenthèses, une erreur de signe s'est peut-être glissée. Il a prouvé le théorème (il en revient au problème si je le lui demande) mais cette preuve est administrée par l'algèbre : on peut remplacer x par n'importe quoi ... la preuve réside dans les équations écrites (J'AI PAS TOUT EXPLIQUE EN FRANÇAIS ... MAIS EN REGARDANT ...).

4°. J'ai posé la question des nombres négatifs dans l'espoir de le ramener sur le numérique. Cela avait fonctionné ainsi avec quelques étudiants adultes. A prime abord, il semble que cela marche. En effet, l'examen des signes des quantités écrites répond à des règles de traitement numérique où il est obligatoire de faire la distinction des cas (calcul de valeur absolue, calcul des signes). Mais le souci de Mathias reste la formule. Il lui semble que celle-ci ne devrait pas changer. Les quantités restent positives. Et sur la formule, c'est sûr x^2 reste x^2. (Un petit doute cependant, me semble-t-il pour affirmer que (x+1)(x-1) reste aussi identique). Puis un argument algébrique balaye le tout : X désigne tout autant une quantité négative que positive. Notez l'expressivité : le crayon jeté ("faux problème que je suis en train de me poser!") et : X EGALE MOINS X SI ON VEUT. Phrase très claire mais qu'il ne s'agirait pas de poser algébriquement.

Remarque : Avec mes étudiants adultes, cela n'avait pas été aussi clair. Il avait fallu tout réécrire et le plus dur aura été de réécrire "en négatif" la suite des 3 nombres. Ensuite le calcul avec le contrôle parallèle que cela est plausible (un carré est positif, le produit de 2 nombres négatifs reste positif). Alors quelqu'un se demanda : "et si ces deux nombres ne sont pas négatifs?" On avait alors vérifié avec -1, 0 et 1.

5°. L'algébrique fait donc maintenant toute la signification du problème et Mathias ne reviendra pas vraiment sur le numérique. (il faut remarquer que dans sa vie d'écolier, en mathématiques on travaille exclusivement algèbre et démonstrations - en géométrie surtout -. Pas étonnant donc sa réaction). On notera aussi le niveau (état) de signification auquel il est abouti. Sa formulation reste factuelle :
QUAND IL Y AVAIT 3 NOMBRES CONSECUTIFS ALORS LE CARRE DU MILIEU MOINS LE PRODUIT DES DEUX AUTRES EST EGAL A 1.

Mathias sait que le théorème est général, il comprend à la fois la constance, la valeur de cette différence. Or dans ce théorème la relation exacte en jeu (la propriété qu'elle exprime) porte sur l'écart entre les nombres choisis. Pour le moment Mathias n'accède pas à ce niveau de signification.

3e PARTIE   DISCUSSION AVEC MATHIAS

Avec Mathias, j'ai la chance d'être tombé sur un élève qui non seulement n'a pas trop de difficultés en mathématiques, mais encore a une conscience assez nette de ce qu'il est en train de faire. De là une discussion passionnante que je livre maintenant et où je tente mollement de reproblématiser la question. Je dis mollement car rapidement je me suis plus intéressé à ses commentaires qu'à lui poser de nouvelles questions algébriques. Il va de soi que dans l'écriture des commentaires précédents, j'ai utilisé certains éléments de ce qui va suivre pour guider mon interprétation.

Donc tu as compris ? Tu peux m'expliquer ce qui se passe ?

OUI, MOI JE PEUX EXPLIQUER puis il se tait un moment. Puis : OUI MAIS TA QUESTION ? C'EST OU, A QUEL POINT (que je dois expliquer) JE COMPRENDS POURQUOI, JE COMPRENDS LES OPERATIONS,

J'AI TOUT COMPRIS LES CALCULS QUE J'AI FAITS, LA MANIERE DONT JE PEUX PROUVER, J'AI BIEN COMPRIS ... puis après un moment, JE N'ARRIVE PAS BIEN A SAVOIR CE QU'IL FAUT FAIRE QUAND TU DIS ÇA ... IL NE SE PASSE RIEN, C'EST UN CALCUL, ON NE PEUT PAS DIRE QU'IL SE PASSE QUELQUE CHOSE. IL Y A UNE OPERATION, ON DOIT POUR ... DEVELOPPER ... LA SEULE CHOSE QUI SE PASSE ... C'EST UN NOMBRE AU CARRE ... UNE SUITE DE 3 NOMBRES CONSECUTIFS... NON... COMMENT DIRE ... ON PREND UNE SUITE DE 3 NOMBRES, ET LES DEUX NOMBRES DU BORD ON A CE A LEUR PRODUIT ON... SOUSTRAIT LEUR PRODUIT AU NOMBRE CARRE DU MILIEU ... C'EST ÇA QUI SE PASSE ... LE RESTE C'EST NOUS QUI LE FAISONS.

Et puis cette histoire de 1 qu'on obtient, ça t'étonne ?

QUAND TU ME L'AS MISE SOUS LE NEZ, OUI. MAIS MAINTENANT PLUS. AVANT QUE J'AIE FAIT LE DERNIER ... QUAND J'AI FAIT CELUI-LA (il montre 10, 11, 12) ÇA M'A FRAPPE, C'ETAIT PRESQUE NORMAL AVANT D'ECRIRE X. (...) APRES EN FAISANT DES X J'AI VRAIMENT COMPRIS.

Tu peux maintenant me redire ce que tu disais à ce propos (10,11,12)?

QUAND J'AI REGARDE COMME ÇA, SANS FAIRE LES OPERATIONS SUR LES NOMBRES. QUAND J'AI ECRIT LES NOMBRES J'AI TROUVE NORMAL QUE ÇA FAISAIT UN. MAIS JE N'AI PAS COMPRIS POURQUOI.
PARCE QUE, JE NE SAIS PAS SI C'EST JUSTE, ON MULTIPLIAIT LE CHIFFRE 12 PAR 1 DE MOINS QUE LE CHIFFRE 11 ET QUE LE CHIFFRE 12 EST 1 DE PLUS GRAND QUE LE CHIFFRE 11... DONC ÇA ... DONC ÇA VA SE PASSER ... JE NE SAVAIS PAS EXPLIQUER SANS X ... UN PLUS PETIT FOIS UN PLUS GRAND, C'EST COMME ÇA. JE SAIS QUELLE FORMULE UTILISER $((x-1)(x+1))$.

Explique pourquoi ?

J'AI REMARQUE QU'IL Y AVAIT UN DE MOINS ET UN DE PLUS, IL M'A SEMBLE QUE C'ETAIT A CAUSE DE ÇA ... JE N'ARRIVAIS PAS A TROUVER LE RAISONNEMENT QUI ETAIT DANS MA TETE ... CE N'EST QU'EN METTANT PAR ECRIT QUE J'AI TROUVE QU'ON POUVAIT METTRE EN FORMULE.

Pour toi, maintenant, c'est clair clair clair ?

JE SAIS POURQUOI JE COMPRENDS TOUT. OUAIS ÇA ME PARAIT CLAIR.

Mais tu n'as pas tout de suite fait ça. Tu avais écrit $x^2-yz = 1$.

J'AI REMPLACE TOUS LES CHIFFRES PAR DES LETTRES. JE ME SUIS RENDU COMPTE QUE ÇA NE DONNAIT PAS UNE FORMULE. J'AI ESSAYE. ON A APPRIS A METTRE DE L'AUTRE COTE DU SIGNE EGAL ÇA DONNE 0 COMME ÇA ÇA DONNE LA POSSIBILITE DE LA VALEUR DES NOMBRES EN LETTRES ... PUIS APRES J'AI PENSE QU'ON PRENAIT SIMPLEMENT LE CHIFFRE AU CARRE QU'ON REMPLAÇAIT PAR UNE LETTRE PUIS LES AUTRES C'EST CE CHIFFRE PLUS UN ET CE CHIFFRE MOINS UN.(...)

x+1 SI ON VEUT C'EST LE NOMBRE LE PLUS GRAND DE LA TRIADE x-1 C'EST LE NOMBRE LE PLUS PETIT, J'AI TROUVE PLUS SIMPLE.

Pourquoi ?

J'AI PU SOUSTRAIRE PLUS FACILEMENT ... C'EST EXPRIME EN X SEULEMENT,ÇA M'A PARU MIEUX.

Tu as dit : "c'est pas une formule". Tu cherchais une formule ?

C'EST UNE DES FORMULES DE PRODUIT REMARQUABLE, ON A APPRIS CELA EN CLASSE.

Quand y as-tu pensé ?

EN FAISANT ÇA. Il me montre sur son écriture que c'était au moment où il écrivait la dernière parenthèse de $x^2-((x+1)(x-1))$.

Tu as compris quoi ?

QUE C'EST CELA QU'IL FALLAIT UTILISER ... AH C'EST UNE ... QUESTION ASSEZ ... JE ME SUIS PROUVE UN PEU A MOI-MEME POURQUOI QUAND ON A 3 NOMBRES ET QUAND ON FAIT LE NOMBRE DU MILIEU AU CARRE MOINS LE PRODUIT DES DEUX AUTRES, ON OBTIENT UN ... SI ON VEUT, C'EST SURTOUT A NOUS-MEMES QUE ÇA PROUVE.

Pourquoi tu dis : "à moi-même" ?

PARCE QUE MOI, JE NE LE SAVAIS PAS. EN LE FAISANT A MOI-MEME, JE L'EXPLIQUE AUX AUTRES.

Suppose que je ne connaisse pas les identités remarquables, tu peux m'expliquer ?

<u>Mathias</u> fait alors le développement algébrique et montre comment on passe de $(x+1)(x-1)$ à $x^2-x+1-1$ et finalement x^2-1.

Expliques-moi ce que tu m'as expliqué à propos de 10,11,12 mais là, avec des x.

<u>Mathias</u> inverse ma demande et montre la formule des identités remarquables en remplaçant x par 11. (11+1)(11-1)

Tu as fait le contraire de ce que je te demande.

JE NE PEUX PAS FAIRE AUTRE CHOSE. C'EST GRACE A ÇA QUE J'AI COMPRIS.

Ce 1, il vient d'où ?

LEQUEL.(...) JE VOIS SOIT LE -1 SOIT LE +1 DES DEUX AUTRES NOMBRES DE LA TRIADE SOIT LE 1 QUI EST LE PRODUIT DE CES DEUX OPERATIONS (c'est-à-dire (x+1) et (x-1)...

C'est lequel ?

CELUI QUI EST APRES LE EGAL.

C'est celui-là que j'entend.

JE POURRAIS L'EXPLIQUER EN ECRIVANT ... puis un moment de réflexion, puis soudain très rapide : DONC CE 1 VIENT DU PREMIER NOMBRE ... DU NOMBRE DU MILIEU ... IL VIENT DE LA DIFFERENCE ENTRE LE NOMBRE DU MILIEU ET DES DEUX AUTRES (...)

Ici, il y a un trou dans mes données. J'avais noté l'impression qu'il exprimait effectivement la relation noyau : à savoir la relation entre la différence des nombres de départ et la quantité calculée. Cependant je ne suis pas sûr à 100% de cette interprétation aujourd'hui.

Tu prends 3 nombres qui se suivent de 4, qui sautent de 4, et tu recalcules.

JE CROIS SAVOIR, JE TE DIS SANS CALCULER. JE PENSE QU'ON AURA 14. QUAND ON FAIT LE CALCUL x^2-1, 1, C'EST AU CARRE ET PUIS 14 ... 4 AU CARRE C'EST ... NON JE VEUX DIRE 16.

Tu vérifies.

Il calcule 6, 10, 14 et 100 - 84 = 16. Puis il dit qu'on peut le prouver comme avant, c'est pourquoi il a pu anticiper.
Il écrit :
$$x^2 - (x+4)(x-4) = 16$$
$$x^2 - (x^2-16) = 16$$
$$x^2 - x^2 + 16 = 16$$
Puis il corrige son calcul, vu qu'au départ on ne sait pas que cela fera 16.
$$x^2 - (x+4)(x-4) =$$
$$x^2 - (x^2-16) =$$
$$x^2 - x^2 + 16 = 16.$$

****

Plus tard, je lui explique une autre démonstration qui reprend en fait son argument : UNE FOIS DE PLUS UN NOMBRE UNE FOIS DE MOINS. Par le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
11 \times 11 \arrow[r, "+11"] \arrow[dr, "-1"'] & 12 \times 11 \arrow[d, "-12"] \\
& 12 \times 10
\end{tikzcd}$$

Mathias n'a pas de peine à comprendre la démonstration. Il compare (à ma demande) ceci à son raisonnement. ON JOUE AUSSI SUR LE 1 DE MOINS. MAIS C'EST PAS COMME MOI CAR J'AI PAS UTILISE CE 12 DE MOINS ET CE 11 DE PLUS. TU ARRIVES FINALEMENT AU MEME RESULTAT. MAIS C'EST BIEN MOINS EVIDENT A TROUVER TON TRUC. PARCE QU'IL FAUT PENSER A CHERCHER. A PRENDRE 12 x 11 (comme intermédiaire). IL Y A PLUSIEURS COMBINAISONS POSSIBLES MAIS ON NE SAIT PAS LESQUELLES SONT BONNES.

Il me montre qu'on aurait pu aussi faire en passant par 11 x 10 :

$$\begin{tikzcd} 11 \times 11 \arrow[r, "-11"] \arrow[dr, "-1"'] & 10 \times 11 \arrow[d, "+10"] \\ & 10 \times 12 \end{tikzcd}$$

TANDIS QU'ICI $x^2-(x+1)(x-1)$ TU COMPARES DEUX MULTIPLICATIONS ET TU ABOUTIS A 1. TU AFFICHES QUE ÇA C'EST LE NOMBRE DU MILIEU PLUS 1 ET ÇA MOINS 1

---

3 jours plus tard Mathias viendra me dire qu'il l'a proposé en classe à ses camarades, à son professeur. Mais que personne n'a pu le montrer comme je l'avais fait, sans algèbre.

* * * *

COMMENTAIRE 3^e^ PARTIE

Le lecteur trouvera dans les déclarations de Mathias les éléments à l'appui des interprétations précédentes. Quant à moi, je veux revenir brièvement sur les points suivants.

1°. Mathias reste dans l'algébrique. Et ne recherche pas à revenir au numérique. D'ailleurs on pourrait dire:plus de problème pour lui.

2°. Mathias contrôle très bien son calcul algébrique, et cela se voit à sa généralisation. Tout d'abord une possibilité de caractériser le 1 (produit de la différence de x avec les 2 autres nombres de la triade). Que 1 est un carré, et que si les nombres se succédaient de 4, la différence serait de 4^2. Ceci dénote d'un bon niveau de signification. Mais c'est la formule algébrique qui lui sert d'appui (et de représentation.) Il abandonne la représentation en termes de multiplications numériques.

3°. Mathias comprend la démonstration finale (s'appuyant sur un schéma ainsi que sur les propriétés additives de la multiplication numérique). Cela montre aussi son contrôle de ce type de représentation et confirme qu'il a sans doute bien compris quelque chose dans sa propre analyse numérique. Il ne reconnaît cependant pas son raisonnement, ou plutôt le prolongement de son raisonnement vu qu'il est pas possible de quantifier directement la relation entre x^2 et $(x+1)(x-1)$. Il faut en effet considérer cette relation comme composée de deux relations laissant fixe alternativement l'un des facteurs :

$$x.\underline{x} \longrightarrow (x+1)\underline{x}$$
$$\underline{(x+1)}x \longrightarrow \underline{(x+1)}(x-1)$$

Remarquons que ce type d'enchaînement correspond exactement à l'usage de la "technique des noms auxiliaires" proposée par Yves Chevallard. (cf. 2e partie pg 27).

4°. On notera enfin que Mathias ne revient pas sur l'argument numérique (compensation et propriété de la multiplication) qu'il donnait comme explication de la propriété. Il ne semble d'ailleurs pas avoir conscience de l'insuffisance logique de cet argument. Pour lui ce n'est qu'une question de mots qui lui manquent, il n'arrive pas à redire ce qu'il a pensé dans sa tête. Même lorsque je propose une démonstration qui prolonge la sienne, il n'y a pas reexamen et finalement Mathias termine en se référant une fois de plus à la formule algébrique. Sans doute j'aurais dû proposer des contre-exemples, et en parler plus directement avec lui. (Par exemple : $(x+1) + (x-1) = 2x$ et pour le dire en des termes proches des siens: "on ajoute un nombre de 1 de plus à un nombre de 1 de moins et on aboutit à 2 fois ce nombre. $2x - (x+1)+(x-1) = 0$) Avouons quand même qu'il y a quelque chose de vrai et que les mots manquent en français pour expliciter ce genre de raisonnements. Il est bien agréable de se baser d'un autre support. Un schéma par exemple.

C O N C L U S I O N S

A.

Dans ce protocole, nous assistons à un moment de compréhension qui se situe au moment où Mathias anticipe les modalités de traitement propres à lui permettre le succès et où il passe d'un ordre de signification à un autre *. Ce moment passé, les commentaires qui suivent ne peuvent pas le recréer (ce n'est pas possible) on a le sentiment que Mathias et moi resassons des choses, que le problème s'est dégonflé et qu'en fait, il n'y a plus rien à comprendre.

Moi-même, en tant qu'observateur et analyste, j'oscille entre deux attitudes. D'une part considérer le sujet (Mathias) et son évolution, passant par différents états de signification, qui à un moment donné réussit à assimiler la propriété numérique inattendue à un (ou plusieurs) pans de sa réalité ; et de l'autre, l'objet (la propriété numérique) qu'il s'agit d'admettre comme un fait auquel il n'y a pas grand'chose à redire (à comprendre). C'est que la signification (et la compréhension) ne se laissent vraiment saisir qu'aux moments de changement, de passage, que comme un processus dont le siège est le sujet. Dès lors que l'analyse néglige les significations antérieures pour se cantonner au niveau atteint, on perd le contact, cela s'évanouit. Et ces questions nous apparaissent comme des faux problèmes à rejeter. Par exemple la question que je pose à Mathias "d'où provient le 1 de $b^2-ac = 1$" n'a en soi pas beaucoup de sens. Lui en donner (et pouvoir alors entrer en matière) suppose tout un travail. Soit de rechercher d'autres formulations de la propriété. Par exemple ici, vouloir en revenir au traitement numérique (arithmétique) ou encore trouver d'autres traitements. Cf. plus loin un traitement géométrique. Soit de rechercher exactement ce qui est à l'oeuvre dans la propriété, ce qui mène à une généralisation. Quoiqu'il en soit, cela s'accompagne toujours d'un changement de point de vue, donc de signification. Je fais bien sûr l'hypothèse que ceci est toujours possible, du moins du point de vue de la signification. Même si du point de vue de l'objet, il n'y aura pas toujours gain. Je dirai donc finalement qu'il reste toujours quelque chose à comprendre, même si la compréhension elle-même est un phénomène momentané.

*Note : On caractérisera ce passage : soit par l'explicitation de la nouvelle signification auquelle le sujet accède. Ici dans l'exemple de Mathias, c'est sans conteste l'algébrique et en particulier l'écriture des 3 nombres avec une seule variable. (Il n'y a en quelque sorte plus qu'un nombre et deux de ses transformés).
soit par l'explicitation de ce que le sujet rejette. Ici tout le raisonnement numérique et arithmétique sur lequel Mathias n'entre plus en matière.

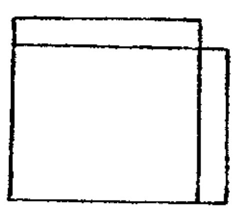
* * *

B.

Revenons-en aux diverses significations. Il y a plusieurs ordres de significations et celles-ci ne se situent pas toutes à un même niveau. Certaines d'entre elles tiennent au système de traitement du problème. C'est-à-dire au support d'objets ou de signifiants sur lequel le sujet travaille ainsi que les actions ou opérations associées. Dans l'exemple, nous en avons vu au moins deux à l'oeuvre, caractérisées par les vocables "algébrique" et "numérique". Remarquons que ce sont des ordres de réalités fort différents, mobilisant des représentations spécifiques (se laissant plus ou moins bien exprimer en langage naturel). Dans l'exemple ci-dessus, les symboles écrits jouaient dans les deux cas un rôle non négligeable. Cependant les comparaisons des symboles 10, 11, 12 et 121-120 que Mathias fait ne sont pas du tout celles qu'il fait sur les formules algébriques. D'autre part, il s'avère que ces opérations sont orientées (sont sous contrôle d'une finalité). Ainsi la traduction d'un système à l'autre ne se fait pas automatiquement ni de but en blanc, même si apparemment le sujet dispose de tous les éléments voulus. Mathias ne décroche que lorsqu'il arrive à rendre les propriétés de la donnée utilisables pour un traitement algébrique (tel qu'il le connaît).

La correspondance entre ces systèmes est globale, mais ne joue pas forcément dans tous les détails. S'il est tout à fait signifiant d'exprimer les 3 nombres consécutifs par (x-1),x, et (x+1), lors du calcul algébrique, la suppression des parenthèses fait apparaître des entités qui n'ont pas leur correspondant direct. Ainsi je puis facilement considérer le calcul numérique de 12 fois 10 comme étant identique à (11+1) fois (11-1) mais dans mon calcul de 12 fois 10 réapparaîtra ni 121ni +11 ni moins 11. D'autre part, le traitement arithmétique considéré dans le protocole ferait plutôt apparaître le découpage -x + (x-1) (c'est plutôt -x et (x-1) qui se compensent que +x et -x qui s'annulent).

Je veux encore examnier ici rapidement un traitement géométrique, par superposition d'un carré d'aire x^2 et d'un rectangle d'aire (x+1)(x-1).



On remarquera tout de suite que ce sont des aires de (x) et de (x-1) qui apparaissent (même découpage que dans le raisonnement arithmétique). Mais examinons ce traitement un plus finement.

a) C'est un nouveau système de traitement. Celui-ci consiste en la construction, à partir des hypothèses du problème (3 nombres consécutifs), de la figure ci-dessus. De cette "organisation" des 3 grandeurs, et de leurs relations, résulte l'apparition d'un petit carré de dimension 1 x 1 qui ne sera pas superposé. (Attention, une illusion perceptive veut qu'on le situe dans le coin droite en haut, mais c'est une erreur, ce carré n'appartient pas à la figure : ni au carré, ni au rectangle. Le petit carré dont je parle est inclus dans le rectangle —ici représenté horizontal— de dimension 1 fois x). Remarquez que dans ce traitement, la soustraction apparaît plutôt comme une opération de comparaison.

b) On pourrait imaginer un autre traitement géométrique. Qui au lieu de construire une figure, construirait effectivement deux figures en carton. L'une un carré de côté x, l'autre un rectangle de côté (x+1) et (x-1). Puis on ferait la comparaison des surfaces par superposition et découpage. Ce type de traitement est l'exact correspondant d'un traitement numérique et comporte les mêmes limites. Les surfaces auraient été considérées comme des entités indépendantes. Cette remarque montre que la démonstration géométrique consiste bien dans la construction d'une figure qui traduise les relations données de sorte à faire apparaître la propriété visée. (de même le traitement algébrique consiste dans la construction de l'équation - la formule si chère à Mathias).

Finalement, les systèmes correspondent puisqu'ils convergent tous vers la même propriété. De cette correspondance, on peut tirer une caractérisation générale de la question (qui se situe alors à un plan de signification plus élevé). Ici par exemple, il s'avère que dans chacun des cas la démonstration procède en deux temps.

- Je rappelle qu'arithmétiquement la relation entre x^2 et $(x+1)(x-1)$ est décomposée selon le schéma

$$\begin{tikzcd} x.x \arrow[r, "+x"] \arrow[dr] & (x+1).x \arrow[d, "-(x+1)"] \\ & (x+1).(x-1) \end{tikzcd}$$

- Géométriquement, les surfaces : le carré de côté x et le rectangle de côtés (x+1) et (x-1), ne sont pas comparables directement. Il n'y a pas de recouvrement qui fasse apparaître tout de suite la différence. On passe par la comparaison des "bouts qui dépassent" à savoir une bande de 1 de large et de x de large et une bande de 1 de large et de (x-1) de long.

- Enfin algébriquement, et pour être tout à fait précis, le calcul de $(x+1).(x-1)$ doit aussi procéder en deux temps à partir de la distributivité : $(x+1)\cdot(x-1) = (x+1)\cdot x + (x+1)\cdot(-1)$ puis on reprend le développement. (Voir aussi la technique des noms auxiliaires telle que Yves Chevallard l'utilise. pg 27 de la 2^e partie de ce cahier).

* *

*

COMMENTAIRE SUR LE TEXTE DE Y. CHEVALLARD

L'ENSEIGNEMENT EN CLASSE DE QUATRIEME

Un fragment, la sous-séquence 2 de la séquence 3

0. Avertissements sur le statut de ce texte.

1. Il s'agit de directives et explications que Y.C. donne à des enseignants qui vont participer à l'expérience prévue. Expérience qui vise à valider/invalider certaines hypothèses (thèses) et en outre à produire de façon suffisemment décantée des phénomènes didactiques.

Il s'agit d'un enseignement expérimental, mais en aucun cas d'un enseignement pilote. A ce jour cet enseignement aura été donné par plusieurs enseignants et par l'un d'eux 4 fois de suite.

2. Pour le bon déroulement de son expérience, Y.C. donne des directives très précises et contraignantes à ses collaborateurs. Mais ceux-ci sont aussi (déjà) des acteurs de l'expérience. Il convient alors de les "former". Y.C. se doit donc d'argumenter, par un commentaire propre, ses décisions. Ainsi les enseignants seront mieux à même de réagir devant les situations imprévues qui ne manqueront pas de se produire.

3. Immanquablement, se profilent derrière les arguments (justifications d'un choix donné) des jugements. Il serait tentant pour un enseignant de les prendre dans leur absolu, et de se prononcer là dessus. Mais ceci ne permettrait pas de comprendre et d'apprécier à juste titre la démarche suivie.

Donc je propose de ne pas prendre ces arguments de Y.C. hors du contexte présent (les explications de Y.C. pour son projet). Si par exemple, Y.C. demande de bannir à tout prix la technique des flèches, c'est qu'il estime qu'elle nuira au bon développement de l'expérience. Bien sûr, si on lui demandait son avis là dessus, il dirait qu'on devrait se passer de tels artifices pédagogiques. Mais, à ce moment, on aurait une opinion sur la question. Tandis qu'ici, dans le texte étudié, une option est prise.

Voici tout d'abord le texte d'Yves Chevallard.

* * * * *

L'ENSEIGNEMENT EN CLASSE DE QUATRIEME

Un fragment, la sous-séquence 2 de la séquence 3

Notes 1. Les séquences ont pour titres :

Séq. 1. NOMBRES ET LETTRES

2. LES OPERATIONS ELEMENTAIRES DANS LE LANGAGE ALGEBRIQUE

Nous sommes ici ⟶ 3. CALCUL ALGEBRIQUE ET IDENTITES REMARQUABLES ⟵

4. EMPLOIS DU LANGAGE ALGEBRIQUE
I. EQUATIONS

5, EMPLOIS DU LANGAGE ALGEBRIQUE
II. INEQUATIONS

6. DES DECIMAUX AUX RATIONNELS ET AUX REELS
I. DES NOMBRES POUR MESURER LES LONGUEURS DU PLAN

7. DES DECIMAUX AUX RATIONNELS ET AUX REELS
II. OPERATIONS ET ECRITURES FRACTIONNAIRES=

2. A l'époque où j'ai écrit le texte des pages 41 à 54, je ne pouvais me baser que sur le texte d'Y.C. reproduit aux pages 18 à 40. Ce n'est que plus tard que j'ai disposé d'autres éléments d'information dont les titres des séquences ci-dessus.

ACTIVITE 2

Problème 2.1.

1. Choisir trois entiers relatifs consécutifs a, b et c; calculer b^2-ac. Que constatez-vous? A partir de votre observation, et après avoir éventuellement calculé la valeur de l'expression algébrique b^2-ac pour d'autres valeurs entières consécutives a, b et c, formulez une conjecture à propos de cette expression.

2. En donnant à a, b et c des noms bien choisis, démontrez que votre conjecture est vraie.

Problème 2.2.

1. Choisir trois multiples de 4 consécutifs a, b et c; calculer b^2-ac. Après d'autres vérifications numériques éventuelles, formulez une conjecture à propos de la valeur de l'expression b^2-ac (quand a, b et c sont des multiples de 4 consécutifs), puis démontrez votre conjecture en donnant à a, b et c des noms bien choisis.

2. Calculez la valeur de l'expression b^2-ac pour a=5, b=9 et c=13. Quelle réflexion vous inspire le résultat obtenu? Si cela vous intrigue, recommencez avec a=6, b=10 et c=14. Quelle conjecture formuleriez-vous alors à propos de l'expression b^2-ac? Démontrez votre conjecture.

SEQUENCE 3 - COMMENTAIRE

ACTIVITE 2

Problème 2.1.

Quels que soient les entiers consécutifs a, b et c, on a: $b^2-ac=1$. Tel est le noyau mathématique autour duquel est organisé ce problème. De cette propriété mathématique très simple découle une situation-problème très riche.

p 41
51
En premier lieu, l'élève va rencontrer ici une propriété du calcul algébrique que l'on illustrera plus amplement avec la Séquence 4: le calcul algébrique offre une capacité monstrative supérieure à celle du calcul numérique, parce qu'il conserve - plus, du moins, que le calcul numérique - la trace (c'est-à-dire la mémoire) des opérations effectuées. Si l'on calcule b^2-ac pour des entiers consécutifs donnés a, b et c (par exemple 4, 5 et 6), on constate que $b^2-ac=1$ (par exemple: $5^2-4\times6=25-24=1$). Mais on ne voit pas pourquoi il en est ainsi. Le calcul algébrique le montre, en fournissant une "explication" du phénomène observé qui a force de démonstration:

$$b^2-ac=(a+1)^2-a(a+2)=a^2+2a+1-a^2-2a=1.$$

Ensuite, cette situation-problème réunit, tout en les maintenant nettement différenciés, trois aspects fondamentaux du rapport à la vérité mathématique que l'élève est en train de construire - aspects qu'il doit assumer à la fois en leur solidarité et en leur non recouvrement:

* la propriété mathématique étudiée ne va pas de soi pour l'élève, elle n'est pas triviale pour lui, et il ne peut l'anticiper (avant tout essai numérique);

* pourtant, un petit nombre d'essais numériques lui suffit pour qu'il découvre (ou identifie) cette propriété et se convainque qu'elle est vraie;

* mais, bien que convaincu que la propriété est certainement vérifiée quels que soient les entiers consécutifs a, b et c, l'élève ne peut cependant plus égaler intime conviction et démonstration: certitude n'est pas preuve.

On notera que ce dernier point ne peut être posé, ici, que p 52 dans la mesure où l'idée de "démonstration avec les lettres", i.e., par le calcul algébrique, est maintenant devenue familière à l'élève, et même attractive pour lui. Au delà de sa conviction en effet, il reste, pour lui, une démonstration à donner parce qu'il sait faire quelque chose (le calcul avec des lettres) qu'il sait pouvoir - le cas échéant - constituer une démonstration; parce qu'il possède, à ce stade, un début de maîtrise (au moins conceptuelle, sinon technique) de l'organe qui permet (en certaines circonstances) d'assumer la fonction démonstrative...

On remarquera encore que quelques élèves peuvent avoir la tentation d'aller directement au calcul littéral, sans passer par le truchement d'essais numériques préalables - exactement comme le ferait sans doute l'adulte mathématicien... La structuration du problème en deux questions séparées doit éviter d'induire cette démarche, qui gênerait la mise en oeuvre de la stratégie, sous-jacente à ce problème, de rencontre par l'élève de certaines difficultés du calcul algébrique.

<u>Avec cette remarque</u>, nous en arrivons, en effet, à un autre trait de la situation mathématique à laquelle l'élève est affronté. Pour la première fois il rencontre le développement d'expressions de la forme $(a+b)^2$, dans le cas du moins où il aurait choisi de nommer a, a+1, a+2 les nombres a, b et c. Il doit alors travailler sur l'expression $(a+1)^2-a(a+2)$. Or, si le calcul de $a(a+2)$ ne doit pas poser, à ce stade, de grosse difficulté, en revanche le calcul de $(a+1)^2$ risque bien de mobiliser le schème d'erreur classique (qu'il n'est pas question de vouloir faire disparaître d'un coup et pour toujours!).

$$(a+b)^2 = a^2+b^2.$$

Toutefois - et cela justifie le parti d'imposer à l'élève des essais numériques préalables - l'apparition de cette erreur est ici en principe <u>contrôlée par le but à atteindre</u>: "trouver 1". Si l'élève écrivait $(a+1)^2=a^2+1$, il obtiendrait:

$$(a+1)^2-a(a+2)=a^2+1-a^2-2a=1-2a,$$

ce qui ne cadre pas avec le résultat attendu, etc.

Bien entendu, ce mécanisme autocorrecteur inséré dans le problème lui-même (feedback négatif), peut aussi, en un premier temps, fonctionner <u>en amplificateur de l'erreur</u> (feedback positif): l'erreur sur $(a+1)^2$ peut fort bien entraîner - et entraînera presque certainement chez plusieurs élèves - l'apparition d'erreurs compensatoires dans l'effectuation de $a(a+1)$, erreurs qui ne seraient sans doute pas apparues si l'élève avait eu à développer cette dernière expression hors du contexte de contraintes où il la rencontre ici.

Parvenu en ce point, même le bon élève devrait alors se trouver bloqué devant une difficulté pour laquelle il ne dispose pas encore d'une technique d'attaque appropriée. C'est ici que le professeur devra suggérer la technique des "noms auxiliaires" (qui sera ensuite thématisée dans la théorie): posant $c=a+1$, on obtient $(a+1)^2 = (a+1)(a+1) = (a+1)c$, etc. La rencontre par l'élève des difficultés intrinsèquement liées à l'emploi de cette technique est évidemment essentielle, notamment pour que l'exposé de la théorie soit fructueux pour lui (en le référant à une pratique personnelle de l'objet que l'on y théorise). Parmi ces difficultés, il faut compter (ici) le fait de devoir substituer le produit $(a+1)(a+1)$ au carré $(a+1)^2$, le fait de ne remplacer que l'une des deux occurrences de $a+1$ par c, le fait de devoir éliminer ensuite la lettre c qu'il avait fallu d'abord introduire, etc.

On notera que le recours (possible) à l'emploi d'identités remarquables connues par coeur - qui pourrait entrer ici en concurrence avec la technique des lettres auxiliaires - ne sera présenté à l'élève qu'ensuite, dans le cadre de la théorie. Il est hors de question de mettre en balance la technique des noms auxiliaires - d'une extrême généralité d'emploi en mathématiques - avec l'usage des identités remarquables, qui recouvre un champ infime du domaine du calcul algébrique.

Les notations précédentes valent encore pour le cas où l'élève aurait retenu un codage du type $a=b-1$, $c=b+1$, qui conduit au développement de l'expression $b^2 - (b-1)(b+1)$. Là encore, en effet, l'élève rencontre un calcul qu'il ne sait pas spontanément effectuer (et là encore il y a, sous-jacente, une des identités remarquables qui seront présentées dans la théorie). Ce codage devrait être le fait d'une forte minorité d'élèves. Lors du corrigé collectif, le professeur envisagera les deux manières d'aborder le problème: la technique des lettres auxiliaires, introduite par exemple à l'occasion du traitement du codage majoritaire (quel qu'il soit), pourra être réinvestie, et sa maîtrise approfondie, lors du traitement du second type de codage envisagé.

SEQUENCE 3 - COMMENTAIRE

ACTIVITE 2

Problème 2.2.

Question 1

Cette question est bâtie autour d'un argument mathématique tout semblable à celui du Problème 2.1. : si a, b et c sont des multiples consécutifs de 4, on a: $b^2-ac=16$. La ligne d'attaque est la même que précédemment et la technique des noms auxiliaires va pouvoir y être réinvestie, et y être approfondie. Le calcul à effectuer est seulement plus complexe: il faut maintenant développer $(4n+4)^2$ et $4n(4n+8)$, ou encore $(4n)^2$ et $(4n-4)(4n+4)$ (selon le codage adopté).

Dans la conduite de cette phase de l'activité, il apparaît indispensable de prévenir les fuites en avant dans le calcul algébrique non finalisé - tendance déjà soulignée à propos du Problème 2.1. - en demandant aux élèves de faire le point, après quelques minutes, sur le résultat numérique trouvé et la conjecture qu'il convient d'en faire découler. (Oralement, le professeur pourra suggérer de prendre pour valeurs a, b et c les entiers 4, 8 et 12 - parmi d'autres choix possibles).

Lors du corrigé collectif, selon l'habileté atteinte, le professeur pourra commencer à suggérer, à propos du calcul de $4n(4n+8)$, le recours oral à la technique des lettres auxiliaires; en revanche il semble indispensable de poser par écrit les changements de noms nécessaires pour effectuer le développement de $(4n+4)^2$ ou de $(4n-4)(4n+4)$.

Enfin, les difficultés des élèves face au calcul de $(4n)^2$, etc., devront, à ce stade, être maintenant laissées entièrement à leur charge.

En conclusion de cette question, le professeur fera dégager clairement le résultat atteint: si a, b et c sont des multiples de 4 consécutifs, $b^2-ac=16$. Cette institutionnalisation sera utile pour donner son sens à la question 2.

Question 2

La question précédente a ceci de particulier qu'elle constitue un problème mal posé: l'hypothèse faite (a, b et c multiples de 4 consécutifs) est surabondante, et le même résultat peut être obtenu à partir d'une hypothèse adoucie,
p 54 supposant seulement que a, b et c sont en progression arithmétique de raison 4:

$$b^2 - ac = (a+4)^2 - a(a+8) = a^2 + 8a + 16 - a^2 - 8a = 16.$$

C'est précisément ce qu'il s'agit de faire découvrir aux élèves.

La phase de l'essai numérique est à cet égard bien évidemment essentielle, et cela explique le libellé de la question: "calculez la valeur...pour a=5, b=9 et c=13". Le calcul qui doit ensuite permettre d'apporter la preuve de la conjecture que les essais numériques proposés auront autorisé à poser est d'une complexité nettement moindre que celui rencontré dans la question 1. L'attention se portera alors sur le problème "épistémologique" soulevé par le problème lui-même.

p 51 Ce problème épistémologique est le suivant: la généralisation de la propriété étudiée dans le Problème 2.1., telle qu'on l'a retenue dans la question 1 du présent problème, est une mauvaise généralisation, bien qu'elle constitue (au regard de l'histoire de la classe) une généralisation attractive. En effet, jusqu'à présent, au delà de la notion d'entiers consécutifs, on a rencontré la notion de nombres pairs consécutifs (dans la suite des nombres pairs), de nombres impairs consécutifs (dans la suite des nombres impairs), etc. D'où l'idée de tenter de "généraliser" l'énoncé "trois entiers consécutifs" par l'énoncé "trois multiples de 4 consécutifs" (par exemple). Or cette généralisation s'avère - par rapport à la propriété étudiée - n'être pas la bonne...On remarquera que cette situation est somme toute banale dans le travail du mathématicien: le problème proposé a ainsi, là encore, une valeur d'introduction à la culture mathématique.

Au delà de la question 2, l'exercice 7 fournit la formulation la plus large que l'on puisse atteindre selon la voie ouverte par le travail mené à bien dans la question 2; il pourra venir très naturellement en complément de cette activité.

THEORIE 2

Dans l'Activité 2 on a été amené, afin de mener à bien certaines démonstrations, à donner aux nombres ou expressions que l'on considérait des noms "bien choisis", c'est-à-dire des noms montrant des propriétés de ces nombres ou expressions que l'on jugeait (à tort ou à raison) importantes pour la démonstration à effectuer.

Ainsi, dans la question 2 du Problème 2.1., vous avez sans doute été conduit à faire les choix suivants: a conserve son nom (à savoir, a); b est rebaptisé a+1 (nom qui montre qu'il est le successeur de a); c est rebaptisé a+2 (nom qui montre qu'il est le successeur du successeur de a). Dans la question 1 du Problème 2.2., vous avez peut-être choisi de poser: $a=4n$, $b=4n+4$ et $c=4n+8$; tandis que, dans la question 2 de ce même problème, il convenait de choisir les noms a, a+4 et a+8.

Il arrivera souvent que, dans une démonstration ou dans un calcul, on soit amené à introduire des <u>noms auxiliaires</u> qui permettent la démonstration ou facilitent le calcul. Cette idée du "jeu sur les noms" est importante parce qu'elle permet souvent de se tirer d'affaire dans des situations délicates.

Voici un exemple: supposons que l'on veuille développer l'expression $(a+b)(2a+b)$. Appelons c l'expression $2a+b$. On a alors: $(a+b)(2a+b)=(a+b)c=ac+bc$, en vertu de la distributivité; on peut maintenant calculer ac et bc (séparément) en remplaçant c par l'expression qu'il représente, soit $2a+b$:

$$ac=a(2a+b)=2a^2+ab;$$

$$bc=b(2a+b)=2ab+b^2.$$

Finalement il vient:

$$(a+b)(2a+b)=2a^2+ab+2ab+b^2=2a^2+3ab+b^2.$$

On remarquera que la lettre c, introduite pour faire démarrer le calcul, disparaît à la fin du calcul. Cette règle est générale: les <u>lettres auxiliaires</u> introduites dans un calcul <u>doivent disparaître en fin de calcul</u>, et l'on doit revenir aux seules lettres intervenant dans l'expression donnée au départ.

Une autre manière de faciliter les calculs consiste à connaître par coeur certaines identités algébriques que l'on aura souvent à employer au cours des calculs, et que l'on appelle pour cela identités remarquables. Il en est ainsi par exemple de l'identité

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$$

(que l'on démontrera plus loin). Dans les problèmes de l'Activité précédente, on aura pu rencontrer ainsi le calcul (c'est-à-dire, ici, le développement) des expressions

$$(a+1)^2,$$

$$(a+4)^2,$$

$$(4n+4)^2.$$

En ce qui concerne la première expression, l'identité remarquable indiquée ci-dessus nous donne, pour b=1:

$$(a+1)^2 = a^2+1^2+2a.1 = a^2+2a+1.$$

En ce qui concerne la deuxième, on obtient de même, en posant cette fois b=4:

$$(a+4)^2 = a^2+4^2+2a.4 = a^2+8a+16.$$

En revanche, pour la troisième expression, il faut combiner l'usage de l'identité avec l'emploi de lettres auxiliaires: on posera a=4n et b=4 et on aura alors

$$(4n+4)^2 = (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab =$$

$$(4n)^2+(4)^2+ 2(4n).4 = 16n^2+32n+16.$$

Le théorème suivant donne les trois identités remarquables les plus importantes:

Théorème 1

Les égalités algébriques suivantes sont des identités:

1. $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$;

2. $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$;

3. $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.

Démonstration:

* On utilise la technique des lettres auxiliaires. Posons

$c=a+b$. Il vient:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)c = ac+bc;$$

puis, en "faisant disparaître" c (c'est-à-dire en remplaçant c par a+b), on obtient:

$$ac+bc = a(a+b)+b(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+b^2+2ab.$$

* Les identités remarquables 2 et 3 seront démontrées à titre d'exercice (voir l'Exercice 12).

A propos des identités remarquables, il est important de noter que <u>l'on n'a pas</u>

$$(a+b)^2 = a^2+b^2,$$

<u>mais</u> $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab.$

De même, on n'a pas $(a-b)^2 = a^2-b^2$, mais: $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$.

L'emploi des identités remarquables peut se faire

* soit pour <u>développer</u> une expression, comme dans les exemples déjà vus;

* soit, en sens inverse, pour <u>factoriser</u> une expression; on les utilisera alors "en sens contraire":

$$a^2+b^2+2ab = (a+b)^2,$$
$$a^2+b^2-2ab = (a-b)^2,$$
$$a^2-b^2 = (a+b)(a-b).$$

Voici des exemples de factorisation à l'aide de chacune des identités remarquables étudiées:

1. Soit l'expression $4x^2+12x+9$; on a: $4x^2+12x+9 = (2x)^2 + 2(2x).3 + 3^2 = (2x+3)^2$.

2. Soit l'expression $9x^2-12x+4$; on a: $9x^2-12x+4 = (3x)^2 - 2(3x).2 + 2^2 = (3x-2)^2$.

3. Soit l'expression $4x^2-25$; on a: $4x^2-25 = (2x)^2-5^2 = (2x+5)(2x-5)$.

SEQUENCE 3 - COMMENTAIRE

THEORIE 2

A la fin de l'Activité 2, la technique des lettres auxiliaires est en principe comprise et volontiers manipulée par les élèves. La Théorie 2 a pour objet d'en constituer l'institutionnalisation dans l'histoire de la classe.

p 49 Il est important de souligner à nouveau (cela a déjà été fait dans le commentaire de l'Activité 2) que le recours a des "noms auxiliaires", traditionnellement introduits par les expressions du type "Posons x =...", "En posant I=...", etc., est omniprésent en mathématiques dans tous les domaines du calcul. L'initiation des élèves à cette pratique essentielle doit donc être vue comme un moment nécessaire et riche de potentialités de leur socialisation mathématique.

p 48 On a là un exemple remarquable de ce qu'on peut appeler un "schème d'action" qui, bien que n'étant pas étiqueté par le programme, doit être regardé comme un "contenu cognitif" devant figurer en bonne place dans le répertoire des objectifs d'apprentissage à ce niveau du cursus des études. On notera à cet égard que le mutisme du programme à son endroit n'est vraisemblablement en rien le résultat d'une décision didactique explicite. Car ce schème d'action n'est pas davantage étiqueté dans le langage mathématique savant lui-même: ni objet mathématique (recevant un nom et faisant l'objet d'une définition et d'une étude explicite), ni objet paramathématique (ayant un nom, donc pouvant être nommé, et utilisé comme outil mais non pris comme objet d'étude), il est un objet "protomathématique" - indispensable à la pratique mathématique quoiqu'innommé, ne faisant pas l'objet d'un enseignement (de la part de l'enseignant) bien que devant nécessairement faire l'objet d'un apprentissage (de la part de l'élève).

A la technique des lettres auxiliaires (pour laquelle nous avons donc dû choisir un nom - celui de "technique des lettres auxiliaires", précisément - puisqu'un tel nom faisait défaut), qui appartient en propre à la culture et à la pratique mathématiques, on opposera les créations didactiques plus ou moins popularisées par certains manuels, telle (ce qu'on peut nommer) la "technique des flèches". De semblables créations (qui participent du processus de transposition didactique) ne sont en soi nullement illégitimes. Mais ici l'introduction de la technique des flèches doit être absolument écartée, pour deux ordres de raisons, solidaires mais distinctes:

- d'une part, elle se pose en concurrente, et en concurrente tout à fait déloyale (pour des motifs que nous allons voir) avec la technique des lettres auxiliaires: c'est l'une ou l'autre, et l'une à l'exclusion de l'autre, qui sera apprise par l'élève; le "détour" par la technique des flèches (envisagé par exemple à titre de préalable d'accès plus facile, etc.) ne se contente pas d'allonger le cheminement de l'élève vers la technique des lettres auxiliaires, il l'interdit pour longtemps: une fois qu'il aura acquis la technique des flèches, réalisant en cela un investissement vécu par lui comme gratifiant (au niveau d'activité mathématique où il évolue), le passage à une autre technique deviendra à la fois (momentanément) inutile et beucoup plus difficile (cas particulier du problème général du passage d'un modèle d'action efficace et bien maîtrisé à un nouveau modèle d'action);

p 52 - d'autre part, la technique des flèches l'emporte aisément, auprès de l'élève, sur la technique des lettres auxiliaires parce qu'elle lui apparaît comme une technique adaptée, faite pour lui: en ce combat elle gagne à tout coup; pourtant cette facile victoire doit être regardée comme une défaite de l'enseignement vu précisément comme socialisation et acculturation, en ce qu'elle substitue à un élément culturel "authentique" un élément fruit d'un artificialisme didactique qu'ici rien n'appelle (la technique des lettres auxiliaires se révélant en fait d'un apprentissage très simple), et qui permet seulement (au professeur aussi bien qu'à l'élève) de faire l'économie de l'affrontement avec la culture mathématique "adulte", au bénéfice d'un repliement et d'un enfermement dans une sous-culture "bébé" expressément conçue à cette fin - repliement qui vient ainsi compromettre le travail engagé jusque là sur le contrat didactique, en arrêtant son évolution sur des formations archaïques ou regressives.

p 49 La question des identités remarquables doit faire l'objet
50 de remarques voisines, bien que le problème, ici, soit
51 autre. S'il constitue en effet un élément de la culture de la classe autour duquel enseignant et élèves peuvent se retrouver dans une convivialité attractive (le thème se prête au jeu de miroirs de l'exercice stéréotypé, indéfiniment renouvelable, lieu où les partenaires de la relation didactique communiquent aisément parce que le contrat qui gère leur rencontre peut être finement défini et demeure précisément contrôlé), l'emploi des identités remarquables ne recouvre pas, et de loin (sauf à en opérer une réduction nettement arbitraire) le même champ de mise en oeuvre que la technique des lettres auxiliaires: le

simple passage de (a+b)(a+b) à (a+b)(2a+b) suffit à le disqualifier. La coprésence des deux thèmes y gagne sa viabilité.

Cela noté, on observera cependant que la tradition d'enseignement, pour les raisons mêmes que l'on a indiquées rapidement ci-dessus, a pu accorder au thème des identités remarquables une place sans rapport avec son importance mathématique réelle: en suivant le plan d'action proposé ici ainsi que dans les exercices qui suivent - lequel ne marque aucune concession sur ce point - on se gardera donc de toute nostalgie à cet égard...

EXERCICES 2

Exercice 7

Soit a un entier quelconque et soient $b=a+k$ et $c=b+k$, où k est un entier donné. Démontrez que b^2-ac a une valeur indépendante de a (ne dépendant que de k).

Exercice 8

Développer les expressions suivantes:

$(a+5)(b+3)$; $(x+6)(x+5)$; $(2a+5)(3a+4)$.

Exercice 9

Développer les expressions suivantes:

$(3x+7)(2x+1)$; $(7x-5)(2x+3)$; $(3y-2)(4y-7)$.

Exercice 10

Développer les expression suivantes:

$(1+3x)(1-4x)$; $(x+2)(x^2+xy+y^2)$; $(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Exercice 11

Développer les expressions suivantes:

$(x-y)(x^2+xy+y^2)$; $(x+a)(x^2+2ax+a^2)$.

Exercice 12

Démontrez les identités remarquables $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$ et $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Exercice 13

Développer chacune des expressions ci-après de deux façons:

1. directement, à l'aide de la propriété de distributivité (et éventuellement en introduisant des noms auxiliaires);

2. à l'aide de l'une des identités remarquables (et éventuellement en introduisant des noms auxiliaires):

$(2x+7y)^2$; $(3a-10b)^2$; $(1-5xy)^2$; $(a+3b)(a-3b)$.

Exercice 14

Utiliser une identité remarquable et éventuellement des lettres auxiliaires pour développer les expressions suivantes:

$(a+b+1)^2$; $(x-y+z)^2$; $(4a-2b-1)^2$.

Exercice 15

Développer complètement l'expression

$(a+(b+c))(a-(b+c))$.

Exercice 16

Montrez que chacune des expressions suivantes peut s'écrire comme un produit de deux expressions algébriques:

$3ab+2a$; $4xy+2y^2$; x^3+3x^2-x; a^2b+ab^2-abc.

Exercice 17

En utilisant une identité remarquable, montrez que chacune des expressions algébriques suivantes peut s'écrire comme un produit de deux expressions algébriques:

$x^2+14x+49$; $a^2b^2+8ab+16$; $y^2-2xy+x^2$;

$1-8x+16x^2$; $9a^2-4b^2$; $1-9a^2$.

SEQUENCE 3 - COMMENTAIRE

EXERCICES 2

Comme toujours, les exercices sont une partie intégrante du travail proposé: ils ne sauraient être regardés comme facultatifs, et l'on ne saurait en dispenser les élèves. C'est par eux que pourra être "fixé" (consolidé) le travail réalisé aussi bien dans l'Activité qu'à l'occasion de la Théorie.

p 48 L'exercice 7 constitue un prolongement des problèmes
54 résolus dans l'Activité (comme on l'a déjà indiqué à l'occasion du commentaire du Problème 2.2.). Notons à cet égard que ce prolongement permet (s'il en était besoin) de mieux séparer encore le registre de ce qui recevra le statut de "simple" événement, appartenant à l'histoire de la classe, et qui se conservera, désormais, à titre de souvenir (pouvant, le cas échéant, être rappelé en tant que tel, comme présent dans la mémoire collective de la classe), d'avec le registre de l'"institutionnalisé" (concepts, techniques, méthodes, résultats), recevant de ce fait le statut de ce qui est toujours actuel et qui peut, à tout moment, être mobilisé sans anachronisme ni rupture de contrat. Dans la situation qui nous occupe, le problème résolu (si a, b et c sont tels que $b=a+k$ et $c=b+k$, alors b^2-ac est une constante indépendante de a, égale à k^2) se situe dans l'événementiel (il aura constitué un moment de la pratique mathématique de la classe), et on peut gager, sans gros risque, que ce qui s'en conservera dans la mémoire des élèves en sera surtout la mémoire "affective" (le plaisir ou le déplaisir, l'émotion ou l'indifférence dont il aura été l'occasion), bien plus que le résultat technique en lui-même. En revanche, c'est l'invariant dégagé de la variété des problèmes où son emploi comme outil s'est révélé indispensable, à savoir (ici) la "technique des lettres auxiliaires", qui devrait venir fonctionner comme institutionnalisé. A cet égard, l'assomption théorique qu'en réalise l'enseignant (dans la Théorie 2) n'est que la marque formelle de cette volonté didactique, en même temps que son moyen indispensable. Mais - c'est ici le lieu de le souligner - elle n'en est pas l'unique moyen: cette institutionnalisation doit être reçue des élèves, et cette reconnaissance à opérer "dans le camp de l'élève" trouve son moyen dans les Exercices (ainsi, bien sûr, que dans les interrogations écrites et devoirs: l'évaluation vient confirmer - ou, en cas de maladresse, infirmer ou seulement rendre incertain - le mouvement amorcé dans le travail "libre", non assujetti à la

p 54 notation). C'est à la lumière d'une telle analyse qu'il convient d'envisager l'intérêt stratégique de l'exercice 7 tout particulièrement.

Les exercices 8 à 11 sont ainsi des occasions d'emploi de la technique des lettres auxiliaires. En rupture avec un principe général respecté depuis le début, et respecté notamment dans l'Activité 2 de cette séquence, le moyen à mettre en oeuvre pour répondre à la tâche exigée de l'élève, et cette tâche elle-même, échappent à la finalisation par un problème à résoudre: la consigne n'est pas autre chose que l'exigence formelle de "développer". Il convient de prendre la mesure de cette décision didactique en en précisant la portée et le sens.

p 41 Les besoins de l'étude du numérique ont conduit, dès la Séquence 1, à introduire des "expressions algébriques", considérées comme l'outil essentiel dans cette étude. Présenté d'abord en tant que simple paraphrase ostensive de propriétés du numérique, l'outil algébrique a reçu ensuite - dans la Séquence 2 - un statut d'autonomie relative face au numérique: permettant d'énoncer les règles qui régissent le numérique (et donc introduit à titre de moyen de formulation), il se voyait doté, par cela même, d'une structure formelle (en gros, celle de l'anneau de polynômes $Z[x,y,\ldots]$). Pourtant cette structure ne sera pas exploitée, à ce niveau du cursus, pour faire de ce qui doit demeurer un instrument du travail mathématique un objet d'étude considéré pour lui-même (comme il en irait, à un autre niveau, si l'on décidait d'étudier les anneaux $Z[x]$, $Z[x,y]$, etc.). Ce point de doctrine doit être nettement marqué, même si la dérive vers une étude formelle (fort intéressante du point de vue du mathématicien, et nécessaire à un niveau plus avancé) apparaît ici peu probable...

Les expressions algébriques constituent un outil d'étude et leur étude propre n'est développée, transitoirement, que dans la mesure où cela apparaît nécessaire à leur emploi ultérieur comme outil: tel est donc bien le point de vue général qui prévaut dans la construction proposée ici pour la classe de quatrième. A cette règle de principe, on ne fera que de rares exceptions: dans la Séquence 5, il en sera ainsi de la notion d'équation du premier degré (qui jouera ensuite un rôle important dans la définition de la notion d'ensemble de nombres). Dans la présente séquence, et dans le cadre des exercices, nous faisons un sort à part au développement des expressions algébriques, en ce sens qu'on en promeut (momentanément) le fonctionnement *in vacuo*, du moins sous cette forme particulière qu'est le développement.

La procédure de développement, en effet, a ceci de particulier (si on la compare, notamment, à la procédure inverse, de factorisation) qu'elle peut être régie (en dehors de toute finalisation extrinsèque) par un algorithme "intrinsèque" dont les élèves connaissent, à ce stade, les premières étapes. A partir (par exemple) de l'expression $(2a+5)(3a+4)$ (Exercice 8), ils peuvent ainsi passer à l'expression "brute"

$$(2a)(3a) + (2a).4 + 5.(3a) + 5.4$$

grâce à la technique des lettres auxiliaires. Il s'agit alors ici, à travers les exercices proposés, et parallèlement à l'approfondissement de la technique des lettres auxiliaires, d'assurer leur maîtrise des étapes suivantes de l'algorithme de développement: "réduction des termes semblables", mise en ordre des termes obtenus en fonction du degré par rapport à la lettre (ou à l'une des lettres) y figurant, etc.

p 52 Bien entendu, il n'en reste pas moins que le recours à la
procédure de développement entendue en son sens large (et
non au sens restreint défini par l'algorithme), lorsque la
situation est finalisée par un problème à résoudre, suppose
que l'on sache, le cas échéant, déroger judicieusement à la
procédure algorithmique de développement <u>stricto sensu</u>, en
réalisant un développement "incomplet", un arrangement
p 50 particulier des termes, etc.. L'algorithme de développement
demeure bien une procédure particulière à mettre en oeuvre
lorsqu'aucune condition extérieure ne lui fait préférer une
variante mieux adaptée au contexte d'emploi de la procédure
générale de développement.

p 49 On notera par ailleurs que l'algorithme de développement ne fait ici l'objet d'aucune institutionnalisation particulière: sa maîtrise relève entièrement d'une pratique qui, volontairement, n'est pas reprise au niveau d'une théorisation explicite. Ces exercices sont donc le lieu où une telle pratique doit prendre forme; et leur importance à cet égard ne saurait être exagérée...

p 47 Cela dit, on se contentera d'observer que les expressions
50 choisies présentent une gradation dans la complexité de la tâche offerte: présence d'abord de deux lettres différentes, qui écarte encore le problème de la réduction des termes (littéraux) semblables ($(a+5)(b+3)$); passage ensuite au cas de lettres identiques, dans lequel cette réduction devient nécessaire ($(x+6)(x+5)$); puis apparition de coefficients numériques différents de 1 ($(2a+5)(3a+4)$) (<u>Exercice 8</u>). <u>L'exercice 9</u> prolonge d'abord l'exercice 8 ($(3x+7)(2x+1)$) avant d'introduire des facteurs contenant un

puis deux signes moins ((7x-5)(2x+3) puis (3y-2)(4y-7)); les exercices 10 et 11 accroissent encore la complexité de la tâche, selon une progression d'ensemble évidente.

Les exercices 12 à 17 ont pour objet la mise en oeuvre des identités remarquables - en concurrence éventuelle, ou en conjonction, avec la technique des lettres auxiliaires.

L'exercice 12 provient du renvoi en exercice d'une partie de la démonstration du Théorème 1, et ne propose aucune difficulté particulière à ce stade.

Les exercices 13 à 15 concernent le développement. L'exercice 13 fait se confronter les deux techniques de développement présentées aux élèves. L'exercice 14 suppose au contraire leur emploi conjoint, de même que l'exercice
p 49 15. Ce dernier donne l'occasion de souligner (à l'intention de l'enseignant, non de l'élève!) que la notion d'algorithme de développement (ou de développement "complet") ne se définit pas aussi simplement qu'on a pu le laisser entendre dans les notations précédentes...

p 51 Les exercices 16 et 17 portent sur la factorisation. Le sujet a été effleuré dans les exemples qui closent la Théorie 2. Contrairement au développement, la factorisation - telle qu'on la pratique traditionnellement à ce niveau - n'est régie par aucun algorithme universel. S'il est convenu par exemple que le résultat de la factorisation de $4xy+2y^2$ doit être $(2y)(2x+y)$ (factorisation "maximum" - dans $Z[x,y]$), il n'y a cependant aucune raison mathématique de refuser une réponse comme $y(2(2x+y))$, qui montre par exemple que, si x et y désignent des entiers relatifs, le nombre $4xy+2y^2$ est le produit de y par un nombre pair (ce qui peut, le cas échéant, avoir quelque intérêt), etc.

p 52 En général, la pratique de ce qu'on peut appeler la "factorisation ostensive complète" ne devra pas recevoir une attention exclusive. S'il est vrai que, par exemple, ce point de vue conduira à écrire

$$x^3+3x^2-x = x(x^2+3x-1)$$

(factorisation dans $Z[x]$), il ne faut pas perdre de vue que, plus tard, dans l'étude du comportement asymptotique des fonctions d'une variable réelle, l'élève sera amené par exemple à écrire aussi l'égalité

$$x^3+3x^2-x = x^3(1+3/x-1/x^2),$$

qui est une factorisation légitime (et nécessaire) - mais dans Q(x) cette fois...

L'une des "difficultés" didactiques essentielles de la factorisation à ce niveau est liée, en fait, au *contrat didactique*, en ce sens que l'élève, mis devant la tâche *de faire croître la complexité ostensive* des écritures qu'il doit "gérer", ne s'y sent pas spontanément autorisé en général (toute sa pratique antérieure - notamment en calcul numérique - l'ayant installé dans l'habitude de travailler
p 47 à complexité ostensive *décroissante*). La classe de
52 "symptômes" que l'on rencontre alors, en un premier temps, est faite en particulier de "refus d'aller plus loin". Ces blocages momentanés ne doivent pas induire à diagnostiquer hâtivement la présence de difficultés mathématiques profondes. C'est le travail sur le contrat didactique qui, en permettant une banalisation des rapports de l'élève avec la factorisation, assurera la levée de ces blocages. Dans un premier temps, ce travail consistera en une autorisation expresse à aller plus loin - sous la forme didactique de *l'obligation* d'aller plus loin...

ANNEXE

- Interrogation écrite n°3

- Devoir n°3

N.B. Cet ensemble se rapporte à la fin de la séquence 2 et au début de la séquence 3.

p 53 Interrogation écrite n° 3

1. a) Pour démontrer que si $-a=-b$ alors nécessairement $a=b$, un élève a proposé la démonstration suivante:

(1) Si $-a=-b$ alors $(-1)a=(-1)b$;

(2) Si $(-1)a=(-1)b$ alors $a=b$.

Justifiez chacune des deux étapes de cette démonstration.

b) Pour démontrer la même propriété, un autre élève a proposé la démonstration suivante:

(1) Si $-a=-b$ alors $-(-a)=-(-b)$;

(2) Si $-(-a)=-(-b)$ alors $a=b$.

Justifiez la <u>seconde étape</u> de cette démonstration.

c) Démontrez, en utilisant la règle de simplification de l'addition et le résultat ci-dessus, que l'on a la propriété suivante:

Si $a-b=a-c$ alors $b=c$.

Comment proposeriez-vous d'appeler cette propriété ?

2. Pour chacune des égalités algébriques ci-après, indiquez

-si elle est vraie, et alors justifiez-la à l'aide des résultats du cours (axiomes et théorèmes),

-si elle est fausse, et alors donnez un contre-exemple numérique.

* $9a-5=4a$
* $7a^2+6a=13a$
* $9a+5ab=a(9+5b)$
* $2a+3b=5(a+b)$.

3. Afin de calculer la valeur de l'expression numérique

$$(12+(-(-8)))(-2) + 5(2^2+(-2)^2)$$

recopier et compléter les calculs suivants:

$2^2+(-2)^2 = 4+\ldots=$.

$5(2^2+(-2)^2) =$.

$12+(-(-8)) = 12+\ldots=$.

$(12+(-(-8)))(-2) =$.

$(12+(-(-8)))(-2) + 5(2^2+(-2)^2) =$

p 53 Devoir n° 3

1. Etant donnés deux entiers relatifs a et b, on considère le nombre

$$X = (7a+8b) - (2a-2b).$$

a) Calculez X pour les valeurs suivantes de a et b:

a=1 et b=-1; a=2 et b=-1; a= -1 et b=0; a=-2 et b=0; a=1 et b=2; a=2 et b=2.

b) Donnez une écriture du nombre X qui montre que ce nombre est toujours multiple de 5.

c) Démontrez que si a est pair X est pair.

d) Démontrez que si a est impair X est impair (dans cette dernière question, on utilisera le fait que le produit de deux nombres impairs est impair).

2. On considère le nombre Y = 5(a+2b) - 7(a-b).

a) Calculez Y pour les valeurs suivantes de a et de b:

a=b=1; a=-1 et b=0.

b) Ecrivez Y sous la forme de la somme d'un multiple de a et d'un multiple de b.

c) Ecrivez Y sous la forme de la somme d'un multiple de b-a et d'un multiple de b.

Passons à l'analyse de ce texte

1. Cadre de départ

Préside à l'analyse, l'exigence de tout traiter dans les rapports entre les 3 termes du système didactique

$$\begin{tikzcd} \text{Elève} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \text{Professeur} \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & \text{Savoir} & \end{tikzcd}$$

Il ne faudra jamais réduire le champ en oubliant l'un des 3 protagonistes, et en se centrant sur des analyses partielles ; par exemple : $E \longleftrightarrow S$ (psychopédagogie), $E \longleftrightarrow P$ (psychologie sociale ou psychanalyse) ou encore $P \longleftrightarrow S$ (épistémologie, programmatique). Il ne suffit pas seulement de rendre compte de ce qu'on désire enseigner (ou désire voir acquérir) mais de considérer l'ensemble de ce qui se passe en classe qui puisse se rapporter spécifiquement à l'enseignement de l'algèbre. Tous les éléments doivent être situés les uns par rapport aux autres.

La thèse d'Y.C. est que cette organisation des rapports permet d'accéder à un certain nombre de phénomènes didactiques spécifiques à la matière enseignée (puisque celle-ci n'est elle non plus jamais exclue) de les observer et éventuellement de les reproduire. Savoir si cette approche est la seule envisageable ou la meilleure, ou la plus efficace, etc... est une question qui me dépasse. Je me demande même si cela ne reviendrait pas, analogiquement, à se poser la question de savoir si l'emploi exclusif du thermomètre suffit à étudier la thermodynamique.

Je vais donc commencer par retrouver, dans le texte d'Y.C. l'analyse de ce qu'il s'agit d'enseigner, puis celle de la progression de cet enseignement. Ensuite j'aborderai la façon dont la classe s'organise autour de ceci.

* * *

2. Contenu à enseigner.

Se référer à la page 33 depuis le par. qui commence par : "Les besoins de l'étude du numérique..." jusqu'à la fin de cette page, ainsi qu'à la page 19 , par. 2 : "En premier lieu ...".

Y.C. part d'une analyse de l'algèbre. Analyse épistémologique, fonctionnaliste de cette matière chez les mathématiciens mais aussi à l'école. Il place au départ l'articulation algèbre/étude du numérique, ce dernier jouant le rôle de "réalité" (quasi physique) dont l'algèbre est alors un outil privilégié d'expression et d'investigation (à l'image du rapport : géométrie $\longrightarrow$ figures géométriques). On travaillera alors les expressions algébriques qui, au cours de la progression s'étofferont et se définiront de plus en plus comme des objets à part entière, gagnant en autonomie. Mais on n'ira pas jusqu'à étudier la structure de ce modèle ($\mathbb{Z}[X]$) et la considération de ce rapport algèbre/numérique marque les limites dans lesquelles cet enseignement se cantonnera.

Rem. Une petite remarque s'impose. Actuellement, à l'école, on parle plus volontiers de polynôme (voire de fonction polynôme) que "d'expressions algébriques, ou littérales". Une analyse de Y.C. tend à montrer que cette notion de polynôme est présentée comme un préconstruit. C'est-à dire que l'élève est appelé à porter attention à cette notion, comme de quelque chose qui préexiste à l'étude qu'il va faire (avec son maître). On lui dira : voilà des polynômes, en lui montrant des specimens mais sans lui donner de définition ni de critère précis de reconnaissance. Ainsi tout particulièrement $\sqrt{x}$ n'est pas un polynôme mais cette question est toujours éludée. De là, se crée un manque, autour duquel toutes les pratiques d'algèbre de ce niveau d'enseignement vont s'organiser (tourner).

Une notion préconstruite est superflue. Ainsi Y.C. a-t-il banni ce terme de son enseignement. Il semble d'ailleurs que le fait suivant lui donne raison. Je veux dire qu'aucun de vous* n'a remarqué jusqu'ici cette absemce (bien sûr me direz-vous, comment savoir que plus tard il ne va pas l'aborder, et je vous concède ceci). Mais disons que dans ce qui a été discuté et analysé, la nécessité d'un recours à ce mot, et donc d'une préparation idoine d'un enseignement des polynômes ne s'est pas fait sentir.

Voici maintenant comment les 5 premières séquences de cet enseignement se succèdent :

Séquence 1. Introduction des expressions algébriques comme paraphrases ostensives de propriétés numériques. D'emblée on introduit l'algèbre comme outil.

Séquence 2. "L'outil algébrique a reçu ensuite (à cette séquence 2 précisément) un statut d'autonomie relative face au numérique : permettant d'énoncer les règles qui régissent le numérique" (et plus seulement de paraphraser des propriétés numériques observées). "Introduit à titre de moyen de formulation, il se voyait doté, par celà même, d'une structure formelle (en gros, celle de l'anneau de polynômes)
Pourtant cette structure ne sera pas exploitée pour faire un objet d'étude pour lui-même".

Remarques :

1. On voit donc énoncée une limite du projet d'enseignement.

2. Dans cette séquence (comme on peut le voir aux devoirs 3 et interrogation 3), on pratique le calcul algébrique dans un contexte de démonstration. C'est ainsi que Y.C. veut donner aux expressions algébriques ce statut de relative autonomie qui se marquera par une fonction de l'algèbre : formuler des règles du numérique, et donc un modèle de structure.

3. Les règles formulées ne sont pas toujours évidentes (qu'est-ce qui fait qu'une propriété numérique (ex. l'arsocréativité) accède à ce rang de règle ?) Ainsi l'activité 2 de la séquence 3 que

*je m'adressais ici à mes étudiants qui durant plusieurs séances avaient analysé le texte de Y.C.

l'on va étudier plus loin donne un exemple de cas où la règle qui régit une propriété numérique (qui "l'explique") n'apparaît pas immédiatement (cf. suite, pg 54 point B).

Séquence 3. Y.C. prévoit deux dérogations à ce principe de ne pas étudier l'algébrique pour lui-même. La première de ces dérogations se situe à cette séquence. Ainsi va-t-on demander aux élèves de développer "in vacuo" (c'est-à-dire sans s'occuper de ce qu'elles "expriment", ni même de "démontrer") certaines expressions algébriques. Ceci est mis en oeuvre dans les exercices, faisant nettement contraste avec le reste de la séquence. Je préciserai plus loin dans l'analyse détaillée de cette séquence.

Séquence 4. Après ce travail "in vacuo" et ce jeu entre calcul algébrique "soumis" ou non à une finalité numérique extérieure, sera reprise la question de l'ostensif dans les expressions algébriques. C'est là une propriété que Y.C. met au centre de sa théorie. C'est là que réside la spécificité et la puissance de cet outil. On a donc un retour au point de départ (séquence 1) mais à un niveau plus élevé.

Séquence 5. Seconde entorse à la règle de n'examiner l'algébrique que comme outil (et non pas comme objet). Ici se place l'étude des équations du 1er degré. Importante car elle permettra à son tour de définir les ensembles de nombres.

Séquences > 5 ? ? ?

Ainsi on retrouve les caractéristiques essentielles de cette analyse.

1. Nécessité de bien centrer le travail sur l'articulation algèbre/numérique.

2. L'algèbre prise comme outil de formulation, donc une écriture puis une pratique, puis (plus tard) un objet. Avec les caractéristiques informationnelles propres de cette écriture : l'ostensif.

3. Ces caractéristiques sont ce qui constitue le modèle structurel. Avec sa généralité, et son pouvoir explicatif et discriminatif.

4. On commence par amener les élèves à une "pratique" de ces outils (le calcul numérique, dans le cadre de démonstration). Pratique qui, à son tour comporte des aspects particuliers (théorie des noms auxiliaires).

* * *

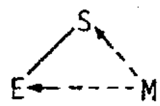
3. Organiser la classe. Espace et temps.

Il s'agit alors d'enseigner. Ce qui consiste (entre autres) à organiser les échanges de savoir entre élèves et professeurs dans un temps donné et sur un espace structuré par les places que chacun occupe. D'après lui, il faudrait penser cette double structuration. (Même si celle-ci est très déterminée par ailleurs).

Pour ce qui est du temps, il y a plus qu'une progression dans le savoir. Et cette dernière n'est pas forcément linéaire. Il y a une histoire de la classe, et des échanges, une succession d'événements, de retours en arrière, ou de rappels implicites ou explicites au passé. On peut ainsi déterminer les moments du travail selon que E. ou P. (élèves ou professeur) sont seuls ou en train d'échanger à propos du savoir. Y.C. les organise en Activités, Théories, Exercices, Devoirs et Interrogations. C'est ici que le croisement spatial et temporel est le plus manifeste.

Le savoir circule là-dedans.

Voici comment la sous-séquence 2 de la séquence 3 est organisée temporellement et spatialement. C.f. tableaux ci-dessous.

TYPE		DEMARCHE	ARTICULATION	CONTROLE
ACTIVITE 2.				
Problème 1. Problème 2.	 Polarisation forte E - S : conviction intime d'une propriété numérique. Appel à une performance technique : démontrer. Le maître est là pour aider (relance) et surtout pour amener le déblocage et faire le point.	Amorce qui donne un cadre et une "motivation" où s'inscrira l'acquisition du savoir nouveau : T.N.A. et I.R.	Problème 1 : <u>continuité</u> par rapport à : propriété numérique, traduction algébrique et démarche démonstrative. <u>rupture :</u> difficulté insurmontable de calcul par manque de moyens. Problème 2 : <u>continuité :</u> répétition du problème 1. <u>rupture :</u> toute traduction algébrique n'est pas forcément adéquate. Règle pas immédiatement accessible.	contrôle par une finalité externe. Observation d'une propriété numérique et recours à algèbre et au calcul pour expliquer et démontrer. Contrat didactique propre à la tâche de démonstration et de paraphrases.
THEORIE	 Le maître expose à l'élève la théorie.	Identification de l'objet que l'élève doit s'approprier. On sort de l'événement pour entrer dans l'actuel.	<u>continuité :</u> il s'agit toujours de la T.N.A. qui a été montrée dans l'activité. <u>rupture :</u> on travaille une opération spécifique à l'algèbre. On examine les expressions algébriques pour elles-mêmes.	Le contrôle reste la démonstration par calcul algébrique. Mais cette démonstration est laissée à charge du maître.

TYPE	S E M	DEMARCHE	ARTICULATION	CONTROLE
EXERCICES				
Exercice No. 7	S E ----→ M Le maître intervient de façon ponctuelle (de cas en cas)	L'élève prend en charge le travail avec la T.N.A.	Continuité : On retrouve le problème numérique et le recours à la T.N.A. pour le calcul de démonstration. Rupture : On travaille sur l'algébrique directement, la propriété numérique n'est plus qu'une référence.	Travail sous contrôle de finalité à démontrer. Mais à ce niveau supérieur : règle. $a, b=a+k, c=b+k, b^2-ac = k^2$
Exercices 8 - 17	S E ----→ M Le maître intervient de façon ponctuelle (de cas en cas)	L'élève apprend à utiliser l'outil algébrique TNA et IR	Continuité : usage de la T.N.A. et des I.R. Rupture : travail in vacuo, pour lui-même. (Ceci est une grosse rupture dans le travail qui s'est fait jusque là dans cette sous-séquence).	Ce travail se fait au cours des tâches développement et factorisation qui est contrôlé par l'existence de l'algorithme de développement ou de techniques partielles pour la factorisation. Ce qui suppose un type particulier de contrat didactique.
DEVOIR 3 INTERROGATIONS 3	S E ←—— M	Retour en arrière (boucle) sur ce qui a été acquis auparavant.	Continuité : contenu Rupture : décalages au niveau lieu (domicile) et du temps (moment où cela se passe, temps à disposition, décalage dans le temps du feed back de M.).	

Analyse des exercices 8 à 17.

Exercices 8 - 11	<u>Développements</u> des expressions algébriques. - distributivité * - regroupement des termes semblables - réduction des termes semblables - réarrangements * pour la distributivité : recours à la T.N.A.	ALGORITHME Travail à complexité ostensive décroissante, indices de fin. (cf. pg 36)	Progression fine de la complexité des exercices. Basée sur le contenu lui-même (information ostensive,formes) ce qui implique un rapport particulier entre S E M un contrat très spécial (cf. pg. 34 - 35)
Exercices 12 - 15	<u>Développements</u> des expressions algébriques avec confrontation (concurrence, complémentarité, alternance) des recours à la T.N.A. ou aux I.R. Situer les rapports entre les 2 objets théorisés.		
Exercices 16 - 17	<u>Factorisations</u> d'expressions algébriques. - reconnaissance de régularités. lettres coefficients exposants - reconnaissance d'IR à "remonter". Ces reconnaissances proviennent ainsi du travail précédent de développement.	Pas d'ALGORITHME. Travail à complexité ostensive croissante. Pas d'indice net de fin.	2 exemples sans plus. Pas de progression fine dans la complexité. Le contrat est ici aussi très spécial, l'échange est plus incertain. (devinette).

Travail <u>in vacuo</u> . Ne fait pas objet de théorie. (développement et factorisation ne sont pas objets de théorie).

* * *

4. Remarques à propos de ce qui est enseigné.

1. Par rapport à la vie de la classe, il faut distinguer ce qui est évênementiel et ce qui ne l'est pas. C'est-à-dire ce qui est sorti du temps (de l'histoire) et de ce fait sera "objectivé" puis échangé.

L'événementiel peut être comparé aux éléments de paysage que l'on parcourt durant les heures de cours (qui se déroule sur un certain laps de temps, à un rythme donné).

On sort certaines choses de ce cadre dès lors qu'on institutionnalise, c'est-à-dire, finalement, par l'inscription de ce que l'on fait dans un contrat précis. (cf. pg 34).

Ce qui a été exposé en théorie puis exercé est alors toujours actuel et, en tant que tel, n'aura pas à être rappelé par le maître. Au cas où celui-ci se verrait amené à faire un tel rappel, ce sera toujours en dérogation au contrat, et alors il dispensera l'élève d'une pénalisation méritée puisque cela voudrait dire que l'élève n'aurait pas acquis ces éléments et donc n'aurait pas rempli son contrat.

L'institutionnalisation peut se définir comme l'identification d'un objet et son échange (passage du prof. à l'élève). Le nom que l'on donne à l'objet permet de le désigner. C'est un premier pas : l'identification. A l'occasion des exercices et des devoirs, l'élève devra s'approprier cet objet. Puis au cours de l'interrogation, il sera demandé à l'élève de rendre compte de ce qu'il en a fait.

2. a) Ce qui fait objet de théorie est puisé dans la culture mathématique. (contenu + pratique). Dans cette culture, Y.C. distingue 3 catégories d'objets : (cf. pg 27 , par. qui commence par : "on a là un exemple ..."et par. suivant) objets mathématiques, paramathématiques et protomathématiques. Ici, la théorie porte sur quelque chose de bien présent dans la culture mathématique, mais qui n'a pas reçu dans cette culture de nom. (En fait dans ce cadre la nécessité ne s'en fait pas sentir). C'est un exemple d'objet protomathématique.

Rem. On peut dire par exemple que lorsque les profs d'uni disent à leurs étudiants tout débutants : "oubliez tout". Il est bien entendu: oublier tout, sauf ce genre de choses.

b) Mais à l'école, on ne se trouve pas dans cette culture mathématique. Il est donc nécessaire ici de pouvoir désigner ces objets. De là l'apparition de noms qui nous paraissent toujours barbares et superflus : comme entre autres : théorie des noms auxiliaires; ceci fait partie du processus de transposition didactique.

c) Cette transposition doit elle-même être contrôlée. Y.C. pose alors comme exigence précise, d'ouvrir l'enseignement sur la culture mathématique. (il faut y acculturer les élèves). Il convient alors de proscrire les constructions pédagogiques (transposées) ad hoc qui enferment l'élève dans une sous-culture scolaire. Par ex.: la technique des flèches.

d) Il y a d'autres exigences. Il faut encore que l'objet à théoriser soit assez général. On prendra en compte le champ d'application de chaque objet. Ainsi la TNA (théorie des noms auxiliaires) est bien plus générale que les IR (identités remarquables). (cf pg 28 dernier par. et pg 29).

e) Il faut aussi qu'il se situe (l'objet à théoriser) à une articulation précise. Ainsi la T.N.A. voisine le conceptuel dans la mesure où elle pourrait être soumise à un contrôle d'une signification externe. (i.e. la paraphrase ou formulation du numérique qu'elle peut alors concrétiser). Mais elle peut aussi n'être qu'un artifice de calcul.

f) Un objet pour lequel on dispose d'un algorithme ne sera pas forcément théorisé (ex. Développement d'expressions algébriques). L'usage de l'algorithme peut suffire à son enseignement.

3. Ainsi donc la T.N.A. a le degré de généralité et l'importance requise pour faire objet de théorie. Elle détermine d'autres objets de théorie comme les identités remarquables. Elle détermine l'algorithme de développement des expressions algébriques (les IR sont d'ailleurs un "raccourci" pour le développement des expressions algébriques). Dans les exercices, ce sera ce contrôle qui sera mis en jeu.

4. Développement et factorisation font l'objet des exercices. La différence qu'il y a entre ces deux choses, liée à l'existence ou non d'un algorithme et aux types de contrat didactique spécifiques de ces deux exercices, apparaîtra dans la pratique.

Ceci ne fera cependant pas l'objet de commentaires destinés aux élèves. (toute évocation de ceci resterait de l'événementiel). La maîtrise de ceci est donc laissée entièrement à une pratique (cf. pg 34, 3e par. qui commence par : "On notera par ailleurs").

De même il ne sera pas question de communiquer aux élèves, les remarques sur les différences de champ d'application de la T.N.A. et des I.R. (cf. pg 27 2e par. et 28 - 29 la question des IR). Ni de leur complémentarité complexe dans le travail de développements. (cf. pg 35. Y.C. insiste, à propos de l'exercice 15, en écrivant : à l'intention de l'enseignant et pas de l'élève).

Il est important que l'enseignant soit au clair là-dessus pour bien apprécier le projet et ses limites.

* * *

5. Développement et factorisation.

Venons en aux commentaires sur ces deux tâches qui sont enseignées traditionnellement, et qui figurent aussi dans cet enseignement expérimental, à des degrés d'importance moindre il est vrai, et surtout, sous le contrôle de la T.N.A.

A Développement

Les expressions algébriques peuvent être développées au moyen d'un algorithme précis. Celui-ci procède de l'application de la distributivité (qui est une règle structurelle du numérique aisément formulable avec une expression algébrique), ainsi que des opérations spécifiques des écritures littérales : regroupements de termes semblables, réductions éventuelles (simplification) et réordonnement de ceux-ci (opérations qui mettent en oeuvre essentiellement associativité, commutativité et existence d'inverse du numérique). Sans oublier bien sûr, la T.N.A.

Rem. Avec ce type de schéma, il est tout naturel que les règles structurelles du numérique se prolongent à l'algébrique - et cela va peut-être dans un sens inverse puisque l'algébrique est un outil de formation de ces règles et donc un modèle du numérique.

Du point de vue de l'information ostensive, le développement se fait dans une vection de réduction de la complexité. Enfin, il y a un critère de fin de calcul (on peut facilement reconnaître qu'une expression algébrique n'est plus développable, donc qu'on a été "jusqu'au bout du calcul"). Ce critère va suppléer, dans certains cas précis, au manque d'informations extrinsèques provenant du problème traité (cf. pg 34 fin du 2e par."L'algorithme de développement demeure...).

Rem. Il en est de même pour tout algorithme, prenez comme exemple la division par écrit, ou encore la soustraction ...

Donc le développement des expressions algébriques peut être régi par un algorithme "intrinsèque". Dans une perspective d'enseignement, ceci en facilite l'exercice "in vacuo", hors de toute finalisation (motivation) extrinsèque. Avec alors, en contrepartie, un net danger d'inflation d'exercices de ce type (cf. pg 28 dernier par. et pg 29).

A ce stade de l'apprentissage, les élèves connaissent bien les premières étapes de l'algorithme (distributivité à un facteur simple $a(b+c)$ ou $(a+b)c$ mais pas $(a+b)(c+d)$,arrangement des termes). La T.N.A. leur permet d'en compléter la connaissance (rendant possible la distributivité $(a+b)(c+d)$. Comme, en outre, il y a des indices de fin de calcul, on peut donc leur proposer sans autres ce genre d'exercices.

Ces derniers sont facilement constructibles et on peut leur donner une fine graduation de complexité selon qu'une ou plusieurs lettres apparaissent etc. etc... (cf. pg 34 dernier par.).

Remarque importante : Les principes mêmes de cette graduation des exercices portent sur les détails des écritures littérales (information ostensive). De sorte qu'en les construisant, le professeur, lui aussi, fonctionne in vacuo ! Ceci explique sans doute la tendance si forte à l'inflation. (Et ce d'autant plus que les élèves ne "pigent" pas tout de suite).

Rem. Certaines étapes du développement peuvent être condensées (raccourcis) par l'application des I.R. (on remplace une forme non développée par une forme d'emblée développée, réduite et ordonnée). On s'économise donc de refaire à chaque fois la démonstration des identités remarquables.

B Factorisation

La différence essentielle qu'il y a avec la factorisation, c'est qu'on va à complexité ostensive croissante. Alors on ne dispose pas de critère général pour décider si celle-ci est complète (je comparerai le schéma développement - factorisation à un treillis selon l'ordre de complexité ostensive).

On ne dispose pas d'algorithme général et intrinsèque de factorisation. La seule possibilité est de se baser sur des marques formelles ou d'utiliser des techniques partielles. Les marques formelles sur lesquelles se reposer seront soit de repérer des répétitions (régularités) de lettres, d'exposants ou de coefficients, soit de reconnaître des formes connues comme p. ex. une identité remarquable. Mais la chose devient très difficile s'il faut imaginer des facteurs qui se seraient compensés (cela tient à l'irréversibilité des opérations de regroupement des termes semblables, de réduction de ceux-ci et de simplification). En fait on retrouve les difficultés de la factorisation numérique, même si les expressions littérales ont une "capacité monstrative supérieure" (pg 19 2e par.).

Un cas simple est celui de $a^2 - b^2$, où il faut "réintroduire" $+ab -ab$.

Un exercice de factorisation comportera donc une part de devinette. Dès lors il n'est pas possible sans autre de produire des exercices de factorisation à l'infini. Mais on peut les soumettre à une "finalité" de type problème (comme dans l'activité 2). Ce qui dira de quel degré de factorisation on peut se contenter (cf. les 2 derniers par. de la page 35 à propos des exercices 16 et 17). On peut aussi contrôler ces exercices par le recours à des techniques particulières, comme celles de reconnaissance évoquées plus haut. Ainsi en est-il des exercices 16 et 17. A l'exercice 16, se baser sur des répétitions de termes, à l'exercice 17, se baser sur les identités remarquables à "remonter". Et alors on pourra aussi se développer un jeu sophistiqué de "camouflage" de ces formes ... référez-vous encore une fois aux pages 28 et 29 .

* * *

6. Du point de vue du contrat didactique.

A Le développement d'expressions algébriques, par algorithme, ainsi que la factorisation par reconnaissance des I.R. impliquent une forme particulière de contrat didactique. L'élève sait ce qu'il doit faire fonctionner et jusqu'où il doit le faire pour satisfaire aux exigences (demandes) de l'enseignant. Ce dernier peut alors aisément comptabiliser et indiquer les erreurs de l'élève. Tout marche donc rondement. C'est ce que Y.C. évoque par l'adjectif "attractif" que l'on retrouve ci et là dans les expressions: "convivialité attractive" (pg 29 dernier par. : "le thème se prête au jeu de miroirs de l'exercice stéréotypé, indéfiniment renouvelable, lieu où les partenaires de la relation didactique communiquent aisément parce que le contrat qui gère leur rencontre peut être finement défini et demeure précisément contrôlé) ou encore "généralisation attractive" (cf pg 23 3e par. : "Ce problème épistémologique...").

A ceci sont liés divers phénomènes en apparence paradoxaux :
l'inflation d'un type d'exercice purement scolaire qui n'a que peu d'intérêt mathématique, et auxquels les mathématiciens ne se sont jamais intéressés.

L'enfermement dans une sous-culture "bébé" (cf. pg 28 à propos de la technique des flèches, qui est aussi un algorithme) Cet enfermement se manifeste d'ailleurs de façon critique lorsqu'il y a blocage de l'élève. Blocage qui manifeste non pas la présence de difficultés mathématiques profondes (cf. pg 36, la fin du par : "La classe de "symptômes"...), mais qui est un comportement "en réaction" de l'élève. Par exemple - et je reprends ce que dit Y.C. - dans tel contrat didactique, l'élève va s'interdire ce qui ne lui aurait pas été manifestement indiqué de faire. Et contre ceci, Y.C. suggère que - dans une sorte de jeu de miroir - l'enseignant oblige l'élève à poursuivre plus loin son travail, afin que plus tard il (l'élève) puisse se le permettre.

Autre situation particulière, c'est le cas où le travail est soumis à une finalisation externe (de type problème numérique). Ceci peut amener à ne considérer que des développements partiels, voire originaux ou des factorisations incomplètes ou très spéciales (cf. pg34 2e par. et pg35 dernier par. : "En général ...). Dans les termes du contrat didactique, ceci aura alors valeur d'une dérogation , à la règle implicite qu'il faut mener son calcul "jusqu'au bout". (Règle qu'il n'y a jamais besoin de formuler car elle découle soit de l'algorithme (développement) soit de ce qui contrôle la factorisation (identité remarquable par exemple)). Le mot même de dérogation souligne que, dans la conscience des participants, se crée une"inversion" de priorités par rapport à l'objet d'étude mathématique. Inversion tout à fait banale dans la mesure où le sujet, au premier niveau de conscience, reste centré sur ses actions et sur les échanges qu'il a avec ses partenaires.

B L'usage du terme "convivialité" (cf. plus haut convivialité attractive) indique qu'il ne faut pas voir le contrat didactique d'un point de vue négatif. En effet, il se noue de toutes façons, il gère les échanges et on ne peut s'en extraire. Prenons pour clarifier cela l'exemple de la démonstration. (cf. pg20 par 1).

L'élève a appris l'existence d'un système de notations littérales qui permet de paraphraser quelques propriétés numériques qu'il connaît. De plus il apprend à travailler ces expressions algébriques et peut en obtenir des transformations. Celles-ci, à leur tour, peuvent acquérir une signification. Et permettent de voir certains liens, certaines règles numériques qu'il ne soupçonnait pas, ou encore qu'il est tout à fait à même de reconnaître dans la pratique d'un calcul, mais qu'il ne saurait identifier ni thématiser (prendre comme objet d'étude hors du contexte de calcul où elle apparaît). Dès lors, la notation littérale prend le statut de formulation de propriétés numériques (qui acquièrent alors au statut de règles). Ces formulations peuvent rendre compte (modéliser) des phénomènes numériques (ainsi on peut "simuler" l'obtention de 1 à partir de $a^2 - (a-1)(a+1)$) et de ce fait en être une explication (ou explicitation, tout au moins).

Revenons alors à la séquence d'enseignement. Dans le contrat didactique tel que défini dans les séquences antérieures (cf. les formulations des exer. du devoir 3 et de l'interrogation 3), la demande faite à l'élève de travailler à ce niveau des expressions littérales est marquée (indiquée) par le vocable : démontrer. Ainsi l'élève sait ce qu'on veut de lui. Et ce qu'il aura fait jusque là, lui aura appris que dans tous les cas (traités) cette démonstration était faisable (il pouvait faire aboutir le calcul). Donc démontrer représente pour l'élève tout un programme d'action en lequel le travail précédent lui donne toute confiance. De ce fait d'ailleurs, Y.C., aura opéré une certaine fermeture. Fermeture provisoire car il se garde le choix stratégique du moment où cette pratique va être rendue moins sûre pour l'élève. (et c'est l'activité 2 de la sous-séquence 2 de la séquence 3).

Rem. 1. A rappeler qu'il n'existe pas de démonstration absolue, c'est-à dire non soumise à un accord social tacite dans une communauté de chercheurs. Il n'existe pas non plus d'explication ni de compréhension totale, exhaustive. Ceci rejoint le problème superdélicat en didactique : savoir où on s'arrête.

Rem. 2. Tout ceci, qui concerne le contrat didactique, constitue la thèse centrale d'Y.C.

---

7. Etude de l'activité 2. (pour conclure)

A Comme dit plus haut, et en contraste avec les exercices 8 - 17, ici le calcul algébrique est contrôlé (soumis) à une finalisation (au sens où Y.C. l'emploie) d'un problème numérique. Cet aspect fondamental est à réaliser dans l'expérience. De cette manière l'élève a donc un but clair à atteindre, d'autre part, il sait ce qu'on attend de lui dans la demande de démonstration.. Il peut penser (selon les expériences passées de ce cours d'algèbre) que le calcul algébrique est possible (il peut aboutir). C'est dans ce contexte qu'Y.C. l'amène à rencontrer des difficultés qui devraient être à prime abord insurmontables pour les élèves : difficultés de calcul algébrique. Le professeur, par l'exposé de la T.N.A., les tirera de ce mauvais pas et cette expérience motivera pour eux l'acquisition de cette technique.

Il est donc capital que l'expérience prenne cette tournure et la forme même des données vise à rendre improbable (si l'élève se conforme à faire ce qu'on lui demande) les "comportements" de calcul direct (Ainsi on pose le problème comme purement numérique : activité 2 problème 1. Question 1). Ce calcul direct aurait en effet pour inconvénient que la rencontre des difficultés algébriques se fasse "hors du contrôle numérique". Ce qui ferait alors écran à l'élève, celui-ci n'ayant pas de feed back direct lui indiquant si ses calculs sont faux ou incomplets. Les difficultés prévues sont de deux types : a) la notation avec des"noms" bien choisis des nombres consécutifs : a,(a+1),(a+2) (ou (a-1),a,(a+1)).
b) les développements de (a+1)(a+2),(ou (a-1)(a+1)).

Ceci peut amener l'élève à un arrêt dans le calcul (blocage) ou bien à commettre une ou des erreurs. La finalité extrinsèque (démontrer une propriété numérique bien identifiée) lui montrera alors qu'il y a un non-aboutissement (par arrêt prématuré ou par erreur). Il y a certes un risque que cette finalité soit si forte pour l'élève qu'il se mette à "forcer" son calcul en commettant par exemple des "erreurs compensatoires". Ceci s'est vu.

Pour la suite de l'expérience, et en particulier, l'exposé précis de la théorie, il convient de montrer aux élèves comment la T.N.A. permet de s'en sortir (mais pas de recourir encore aux I.R.).

B Le problème 2 a deux buts. D'une part mettre en oeuvre une nouvelle fois, dans un contexte de finalité numérique toujours, la T.N.A. Cet aspect en fait alors la répétition du problème 1. La continuité est de ce point de vue assurée. D'autre part, et cette fois-ci en rupture avec l'histoire de la classe, l'élève va rencontrer ici une formulation algébrique inadéquate (mais pas fausse). (Rappelons que la rupture du 1er problème était de mettre les élèves face à l'insuffisance de leurs techniques de calcul algébrique et de motiver leur assimilation de la T.N.A.). Jusque là, et au travers des problèmes surtout, toute expression algébrique était légitime. Ceci vient de ce que les expressions algébriques avaient été présentées comme dérivant de propriétés numériques (paraphrases) . Ici, il apparaît que la formulation à laquelle on pense au premier abord est inadéquate. (parce qu'elle rend compte indirectement de la relation centrale de la propriété : les écarts entre les nombres choisis). Cette inadéquation apparaît de deux façons :

a) on tire une conjecture qui généralise la première mais qui cependant reste partielle. Elle n'englobe pas le cas des triplets 5, 9, 13, et rend ce dernier cas assez mystérieux.

b) Cette conjecture partielle, formulée algébriquement est lourde, délicate à démontrer (fastidieuse). Alors que la conjecture adéquate sera d'une simplicité frappante. Un problème mal posé aboutit à des difficultés superflues.

Ainsi le calcul algébrique aura paru indispensable (comme moyen) pour dégager la relation exacte en jeu (l'écart régulier entre les 3 nombres choisis). C'est-à-dire la propriété qu'il aurait fallu tout de suite pouvoir paraphraser. On illustre donc la fonction formulatrice du calcul algébrique.

Rem. 1. Y.C. parle (à la page 23 1er par.) de nombres a, b, c "en progression arithmétique". Ceci suffit à montrer la difficulté à laquelle on s'achoppe si on veut en rester au plan du numérique (progression arithmétique contre la formulation de l'ex. 7, a, b = a+k, c = b + k).

Rem. 2. Le moment où la formulation complète et définitive de la relation en jeu est atteinte, c'est l'exercice 7 précisément. Ce qui assure la continuité des exercices par rapport à l'activité et la théorie. La rupture étant cette fois opérée par le fait qu'ici, l'élève travaille seul (cf. pg 32 et 33).

FIN

Liste des publications INTERACTIONS DIDACTIQUES

No 1 PERRET-CLERMONT, A.N., BRUN, J., CONNE, F., SCHUBAUER-LEONI, M.L.- Décontextualisation et recontextualisation du savoir dans l'enseignement des mathématiques à de jeunes élèves, Universités de Neuchâtel et Genève, Contribution présentée au Colloque international du Laboratoire européen de psychologie sociale: "Représentations sociales et champ éducatif", Aix-en-Provence, du 30.11.au 3.12.81, novembre 1981.

No 2 PERRET-CLERMONT, A.N., BRUN, J., SAADA, E.H., BELL, N., CONNE, F., GROSSEN, M. - Processus psychosociologiques, niveau opératoire et appropriation de connaissances, Universités de Genève et de Neuchâtel, avril 1982.

No 2bis PERRET-CLERMONT, A.N., BRUN, J., SAADA, E.H., SCHUBAUER-LEONI, M.L., et BELL, N., CONNE, F., GROSSEN, M. - Psychosociological processes, operatory level and the acquisition of knowledge. Universités de Genève et de Neuchâtel, août 1984.

No 3 CHEVALLARD, Y., CONNE, F. - Jalons à propos d'algèbre. Universités de Genève et de Neuchâtel, novembre 1984.

No 4 SCHUBAUER-LEONI, M.L., PERRET-CLERMONT, A.N. - Construction sociale d'écritures symboliques en deuxième primaire - (Opérations additives), Universités de Genève et de Neuchâtel, avril 1984.

No 5 SCHUBAUER-LEONI, M.L., SCHUBAUER-LEONI, M.L. & GROSSEN, M., SAADA, E.H. & BRUN, J. - Formulations écrites et résolution de problèmes additifs - Analyse de leur élaboration et de leur contenu, Universités de Neuchâtel et de Genève, juillet 1984.