

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
INSTITUT DE MICROTECHNIQUE

Filtrage numérique caractérisé
par un traitement
quasi-continu des signaux

THÈSE

PRÉSENTÉE À LA FACULTÉ DES SCIENCES
POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Pierre-André Fariné

IMPRIMATUR POUR LA THÈSE

Filtrage numérique caractérisé par un traitement quasi-continu des signaux

de M on sieur *Pierre-André Farine*

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

FACULTÉ DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel,
sur le rapport des membres du jury,

Messieurs F. Pellandini, A. Shah,

F. Bonzanigo (EPF-Zurich), M. Bellanger

(Paris) et A.G. Deczky (Ottawa)

autorise l'impression de la présente thèse.

Neuchâtel, le *14 août 1986*

Le doyen :

François Sigrist

François Sigrist

TABLE DES MATIERES.

Résumé	1
1. INTRODUCTION	3
1.1. Principe du traitement à la base des filtres numériques quasi-continus	7
1.2. Correspondance filtre analogique à filtre fréquentiel	14
1.3. Applications de la notion de filtrage fréquentiel et dérivation de quelques structures	23
1.3.1. Passe-bas de premier ordre	23
1.3.2. Passe-haut de premier ordre	25
1.3.3. Passe-haut de second ordre	28
1.3.4. Exemple d'un filtre numérique quasi-continu dédié d'une structure en échelle	29
1.4. Définition du filtrage numérique quasi-continu	32
1.4.1. Récursion dans les filtres quasi-continus et leur domaine d'application	36
1.4.2. Mise en évidence d'une caractéristique parti- culière de filtrage non-linéaire des cellules numériques quasi-continues	37
2. COMPARAISON DES STRUCTURES QUASI-CONTINUES AVEC D'AUTRES TECHNIQUES DE FILTRAGE	44
2.1. Différentes formes de réalisation des filtres numériques	44
2.2. Conditions d'équivalence entre un filtre quasi-continu et un filtre numérique à arithmétique incrémentale	55
A) Respect de la condition de non-débordement au cours du déblocage	63

B) Conditions de non-débordement lors du déblocage pas respectées	65
2.3. Simulation d'un filtre analogique par un filtre numérique, rappel de résultats	69
2.4. Comparaison des différents types de filtrage	72
3. ETUDE DU COMPORTEMENT REEL DES FILTRES NUMERIQUES QUASI-CONTINUS	75
3.1. Equations paramétriques des filtres numériques quasi-continus	76
3.2. Modèle analogique par linéarisation des équations paramétriques	85
3.2.1. Développement en série de Taylor des relations paramétriques	85
3.2.2. Méthode des approximations successives dans le modèle analogique et linéarisation	88
3.2.3. Applications du modèle analogique linéarisé déduit des relations paramétriques. Unités récursives de filtrage	95
1) Passe-bas de 1er ordre	95
2) Passe-haut de 1er ordre	97
3) Système de 2ème ordre général	99
3.3. Modèle numérique par équations de récurrence	102
3.4. Application du modèle numérique à la représentation d'un filtre quasi-continu de deuxième ordre	109
3.5. Modèle numérique dérivé de la méthode des approximations successives (1ère approximation)	115
4. ANALYSE DE SENSIBILITE DES COEFFICIENTS DANS LES FILTRES QUASI-CONTINUS	
4.1. Notions de sensibilité des coefficients et d'indice de sensibilité quadratique	118
4.2. Sensibilités aux coefficients des structures directe canonique et à récursion double	121

4.3. Comparaison des indices de sensibilité quadratique et des longueurs de mot des coefficients	128
5. COMPLEXITE DE REALISATION ET CONCLUSIONS	139
5.1. Comparaison de différentes technologies de filtres monolithiques	139
5.2. Expérimentation d'une structure quasi-continue programmable	147
5.3. Conclusions	152
ANNEXE A - Justification du modèle de fonctionnement des multiplicateurs à taux programmables	155
ANNEXE B - Considération concernant le calcul des coefficients d'un filtre numérique de simulation d'un filtre analogique	159
ANNEXE C - Table d'explication des symboles utilisés dans ce travail	161
Bibliographie	165
Remerciements	169

RESUME.

Le filtrage numérique caractérisé par un traitement quasi-continu de l'information est un procédé de traitement de signaux électriques basé sur les analyseurs différentiels numériques. Dans ces systèmes, des multiplieurs à taux programmables transforment l'information de base sous forme de signaux binaires modulés en fréquence. Cette modulation d'impulsions en densité temporelle est l'information quasi-continue qu'il convient de traiter par pondération avec des constantes et intégration sur des compteurs réversibles, et qui justifie ainsi l'appellation de filtre numérique quasi-continu. La nature binaire des signaux apparaissant dans ces systèmes laisse envisager une intégration poussée sur circuit intégré des filtres numériques quasi-continus.

L'analyse des filtres quasi-continus idéalisés ou réels s'effectue avec différents modèles mathématiques, permettant une comparaison directe avec les filtres analogiques et numériques conventionnels.

Il est possible de montrer que le filtre numérique quasi-continu se déduit du filtre numérique canonique. Dans le filtre quasi-continu, nous trouvons un filtre numérique à arithmétique incrémentale présentant les caractéristiques suivantes: arithmétique à virgule flottante particulière, fréquence d'horloge faible et matériel de réalisation relativement limité.

Une approche mathématique d'analyse des filtres appelés quasi-continus fournit un système d'équations paramétriques permettant d'expliquer théoriquement les effets non-linéaires dus à la modulation d'impulsions en densité temporelle. Ces effets apparaissent plus clairement après introduction du développement en série de Taylor et de la méthode des approximations successives (première approximation) dans les équations paramétriques. La simulation sur ordinateur des structures quasi-continues par leurs équations paramétriques donne une solution numérique complète à ces effets non-linéaires de modulation.

La quantification des coefficients des structures quasi-continues est comparée à la sensibilité des coefficients des filtres numériques conven-

tionnels. Il apparait que la sensibilité des filtres quasi-continus est à mettre en relation avec celle des filtres numériques à récursion double. Au voisinage du point $z = +1$ du plan complexe, la structure quasi-continue est donc beaucoup moins sensible que le filtre numérique de forme canonique.

La réalisation d'une structure quasi-continue dont les coefficients et les différents paramètres sont choisis de manière interactive et programmable vérifie les modèles développés. Ce système inclut un interface clavier et écran de visualisation qui permet de programmer une structure à l'essai par mise en cascade de cinq éléments au maximum de premier ou de second ordre. Par manipulation de différents paramètres, nous étudions entre autre des filtres passe-bas, passe-bande, passe-haut et coupe-bande, mais nous observons également les problèmes de quantification des coefficients et des produits (effets non linéaires dus aux multiplicateurs à taux programmables).

Les filtres numériques quasi-continus trouvent des applications intéressantes dans le domaine du traitement des signaux à des fréquences faibles ($f_c \leq 10$ kHz). Des applications particulières typiques existent en électronique bio-médicale. En particulier, ce type de filtre a été adopté dans un appareil de mesure automatique de la pression artérielle, afin de séparer les différents signaux détectés par les capteurs.

1. INTRODUCTION.

Les signaux électriques sont présents dans tous les domaines de la science et l'information qu'ils contiennent revêt une grande importance dans des domaines tels que les télécommunications, les systèmes de contrôle ou encore les appareils d'électronique bio-médicale. Les principaux types de signaux électriques peuvent être classifiés comme indiqué dans le tableau de la figure 1.1: quatre catégories de signaux électriques se caractérisent par leurs évolutions temporelles et en amplitude. Dans le cas d'une évolution temporelle discrète du signal, le terme de signal échantillonné est admis, alors que l'appellation de signaux quantifiés évoque une évolution en amplitude discrète du signal.

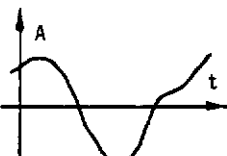
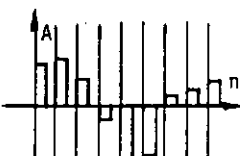
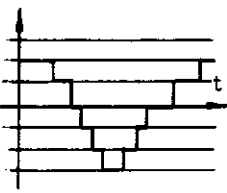
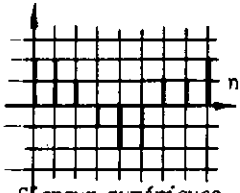
		TEMPS	
		Temps continu t	Temps discret n
AMPLITUDE		Signaux continus	Signaux discrets, échantillonnés
Amplitude continue	Signaux non quantifiés, analogiques	 <p><i>Signaux continus analogiques</i></p>	 <p><i>Signaux échantillonnés analogiques</i></p>
Amplitude discrète	Signaux quantifiés		 <p><i>Signaux numériques</i></p>

Fig.1.1 : Classification des signaux électriques.

Le traitement de l'information contenue dans un signal s'effectue dans certains cas par filtrage. Le filtrage est un procédé de traitement dans lequel le spectre en amplitude et en phase est modifié en accord avec les spécifications désirées. Un filtre peut par exemple réduire ou éliminer le

bruit contenu dans un signal, ou limiter la largeur de bande d'un signal, ou encore séparer plusieurs signaux distincts superposés.

La figure 1.2 présente les trois catégories de filtres connues et qui traitent les types de signaux définis précédemment: il s'agit des filtres analogiques continus (systèmes passifs, actifs ou à ondes élastiques de surface), d'autre part des filtres analogiques échantillonnés (systèmes à transfert de charges qui sont des filtres transversaux et structures à capacités commutées qui sont des filtres récurrents), et enfin les filtres numériques (sous forme transversale à réponse impulsionnelle finie ou sous forme récurrente à réponse impulsionnelle infinie).

Filtres analogiques	continus	passifs à éléments discrets (LC, RC, réson.)	passifs à éléments distribués (cavités, lignes)
		à ondes élastiques de surface SAW	actifs (LC, RC, FDNR, FDNC)
	échantillonnés	à transfert de charges CCD	à capacités commutées SC
Filtres numériques		à réponse impulsionnelle finie FIR	à réponse impulsionnelle infinie IIR

Fig.1.2 : Classification des différents types de filtres.

La théorie moderne du filtrage permet l'analyse et la synthèse des différentes catégories de filtres à partir des spécifications fixées soit dans le domaine des fréquences (gabarit), soit dans le domaine temporel. Les

techniques hybrides permettent la miniaturisation des filtres analogiques continus, alors que les filtres analogiques échantillonnés et les filtres numériques sont produits sous la forme de circuits intégrés. L'état actuel de la miniaturisation des différentes technologies de circuits intégrés permet la réalisation de filtres numériques, malgré leur complexité et la nécessité de conversion analogique-numérique à l'entrée et numérique-analogique à la sortie.

Les domaines d'utilisation des diverses technologies de traitement du signal électrique sont visualisés dans le diagramme simplifié à deux dimensions de la figure 1.3, selon [46, 47]. Dans ce diagramme, les paramètres fondamentaux apparaissant sont la fréquence d'utilisation f reportée en ordonnée et le facteur de qualité $Q (= f/\Delta f)$ en abscisse.

Le domaine d'application des filtres numériques caractérisés par un traitement quasi-continu de l'information faisant l'objet de cette étude y est inclu également. Nous constatons que ce domaine est encore plus restreint que celui des filtres numériques conventionnels. La fréquence de coupure maximale d'une structure quasi-continue est de quelques kHz, ce qui limite leurs applications aux très basses fréquences. En ce qui concerne leur largeur de bande relative, la limite est très proche de celle fixée pour les filtres numériques classiques.

Dans les filtres numériques quasi-continus, les signaux qui représentent les variables d'état, d'entrée et de sortie sont transformés en signaux binaires modulés en fréquence avant d'être introduits dans des éléments de sommation de ces impulsions. Cette modulation d'impulsions en densité temporelle représente de manière quasi-continue l'information à traiter et justifie l'appellation de filtre numérique quasi-continu que nous avons choisie pour désigner ces systèmes.

La réalisation de ces filtres requiert un matériel de logique binaire: des multiplicateurs à taux programmable et des compteurs réversibles, ce qui rend leur expérimentation particulièrement aisée.

Dans ce chapitre, nous examinons le principe du traitement à la base des

systèmes quasi-continus ainsi que leur idéalisation, ce qui permet de les décrire à l'aide d'équations différentielles et de leur transformée dans le domaine de Laplace. Quelques exemples de filtres particuliers sont élaborés.

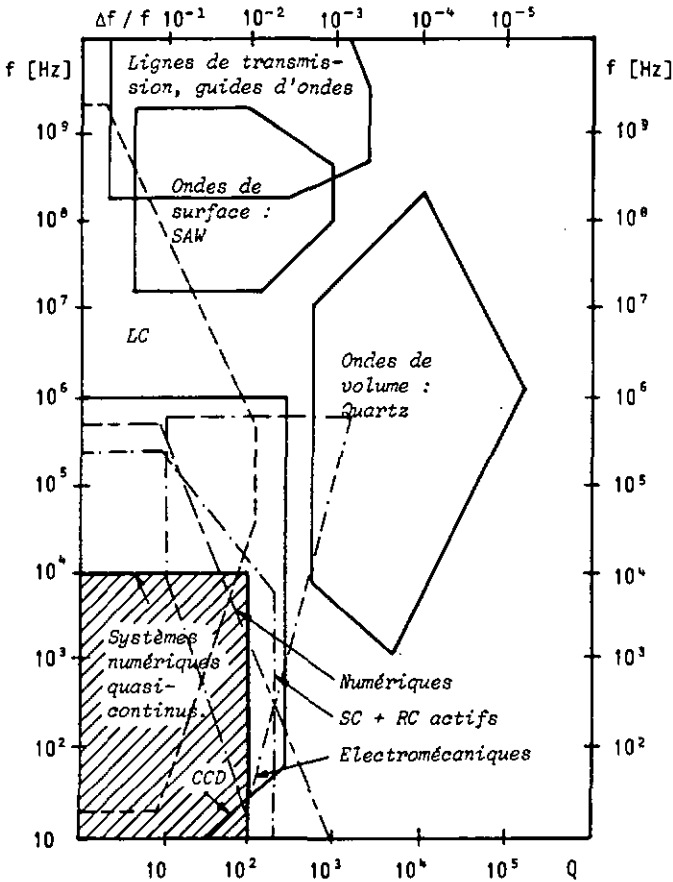


Fig.1.3 : Domaine d'application des technologies de filtrage usuelles (f : fréquence d'utilisation, $\Delta f / f$: largeur de bande relative, Q : facteur de qualité), selon [46] et [47].

Le lecteur trouvera dans l'annexe C une table d'explications des différents symboles utilisés dans le présent travail.

1.1. Principe du traitement à la base des filtres numériques quasi-continus.

On peut comprendre le principe du traitement à la base des filtres numériques quasi-continus par l'examen des systèmes logiques séquentiels permettant la détermination d'une fréquence moyenne d'un signal de fréquence instantanée variable [1, 36].

Un fréquencemètre à intervalle de mesure, comme celui exposé à la figure 1.4, permet de mesurer la fréquence d'entrée constante f_e . Le compteur, dont l'état est donné par la variable X , est remis à zéro avant de comptabiliser les impulsions arrivant à son entrée durant la période T . La fréquence recherchée est égale au rapport du nombre X obtenu par la période de mesure T : $f_e = X/T$.

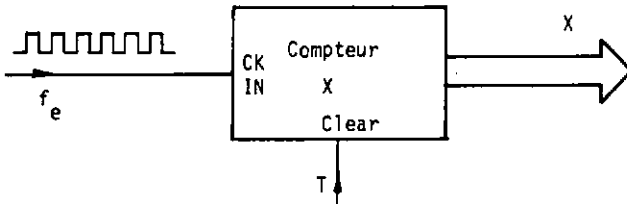


Fig.1.4 : Fréquencemètre à intervalle de mesure.

Lorsque la fréquence à mesurer n'est plus constante mais au contraire variable, la structure de fréquencemètre asservi de la figure 1.5 permet de suivre l'évolution temporelle de la valeur moyenne à court terme de la fréquence. En effet, la fréquence inconnue est introduite ici dans une structure composée d'un compteur réversible (compteur avant-arrière) et d'un multiplicateur à taux programmable. Ce dernier élément fournit, à partir d'une entrée numérique d'une part et d'une fréquence de référence d'autre part, un signal formé d'impulsions binaires de densité temporelle proportionnelle aux deux grandeurs précédentes. La sortie X du fréquencemètre de la figure 1.5 (valeur affichée par le compteur réversible) est en relation directe, à l'équilibre, avec la fréquence d'entrée. Ce système peut par exemple être utilisé pour enlever les irrégularités de la

pulsation cardiaque de l'être humain afin d'en tirer l'information utile dépourvue des phénomènes d'arythmie.

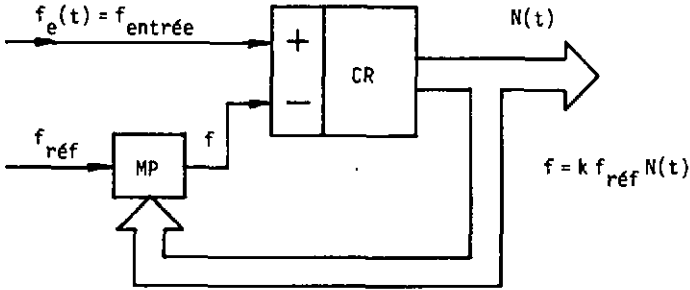


Fig.1.5 : Structure de fréquencesmètre asservi (CR : compteur réversible, MP : multiplicateur à taux programmable).

Comparons la structure de la figure 1.5 avec celle d'un intégrateur de premier ordre. Celui-ci se réalise par exemple avec un circuit de type RC-passif selon la figure 1.6.

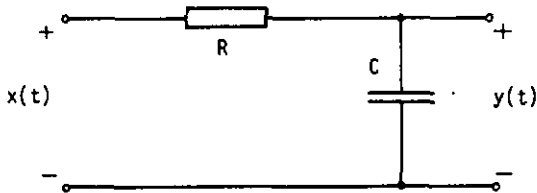


Fig.1.6 : Intégrateur RC-passif de 1er ordre

Cet intégrateur analogique est décrit mathématiquement avec l'équation intégrale :

$$y(t) + \frac{1}{RC} \int_0^t y(\tau) d\tau = \frac{1}{RC} \int_0^t x(\tau) d\tau \quad (1.1)$$

Par transformation dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert, notée $H(s)$, est déduite :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{1 + sT} = \frac{1}{T} \frac{1}{s - (-1/T)} \quad (1.2)$$

avec : $\omega_c = RC = T^{-1}$: fréquence de coupure.

Dans le plan de Gauss \underline{s} , le pôle de cette fonction de transfert est situé en $(-1/T)$ sur l'axe réel négatif, comme indiqué à la figure 1.7.

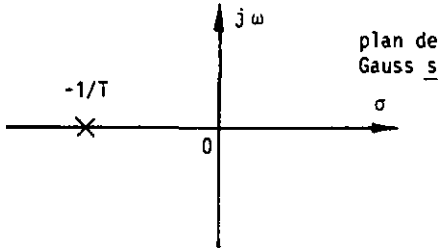


Fig.1.7 : Emplacement du pôle de la fonction de transfert (1.2) dans le plan de Gauss.

La fonction de transfert $H(s)$ en (1.2) détermine de manière univoque les réponses en amplitude et en phase de ce filtre passe-bas de 1er ordre, dont l'illustration est donnée avec le diagramme de Bode de la figure 1.8. Rappelons que ce diagramme est une représentation logarithmique de l'amplitude et de la phase en fonction de la pulsation normalisée $\Omega = \omega / \omega_c$.

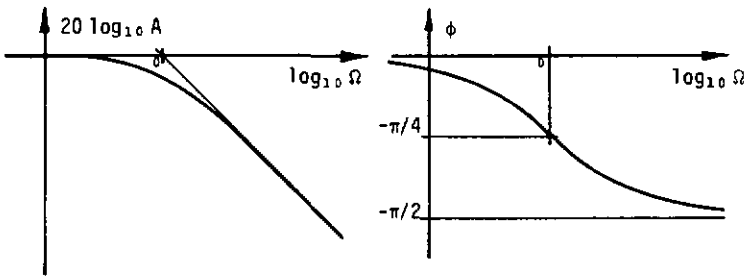


Fig.1.8 : Diagramme de Bode du passe-bas 1er ordre décrit par (1.2)

Le schéma de la figure 1.6 est une réalisation possible d'un intégrateur analogique de premier ordre. Une autre réalisation utilise une structure de type ordinateur analogique [2] comme l'indique la figure 1.9.

La similitude apparente entre cette dernière réalisation et la structu-

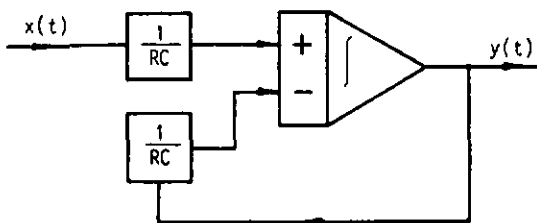


Fig. 1.9 : Réalisation de l'intégrateur de 1er ordre de type ordinateur analogique.

re de fréquences asservi de la figure 1.5 est à souligner. Le fréquences asservi proposé apparaît donc comme un intégrateur de premier ordre ou encore comme un filtre passe-bas réalisé dans une technologie qui n'utilise que des éléments de logique binaire.

La description mathématique idéalisée du fréquences asservi repose sur l'hypothèse de continuité de signaux. Il s'agit donc de représenter les signaux par des fonctions continues dans le temps et en amplitude.

Appliquons l'hypothèse de continuité des signaux au fréquences asservi. Pour cela, il convient de transformer les éléments constitutifs de ce système réel en éléments idéaux, comme l'indique la figure 1.10.

Les multiplicateurs binaires à taux programmables (MP) sont remplacés par des multiplicateurs de fréquence instantanée (MF) et les compteurs réversibles (CR) le sont par des intégrateurs de différence de fréquences instantanées (IDF).

Le fréquences de la figure 1.11, constitué d'éléments idéaux, répond à l'hypothèse de continuité des signaux. En sortie de l'intégrateur de la différence de deux fréquences, la variation différentielle de la variable $n(t)$ s'écrit:

$$dn(t) = (f_e(t) - f(t)) dt \quad (1.3)$$

Cette variation différentielle s'exprime par la différence des fréquences d'entrée de l'intégrateur sur une fraction de temps dt .

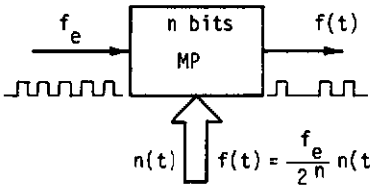
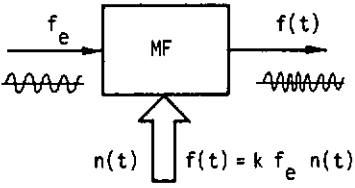
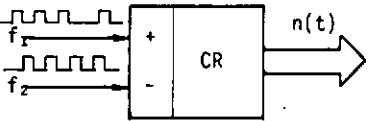
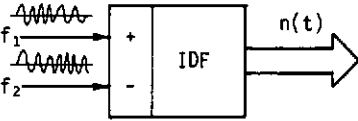
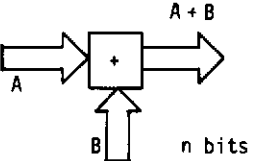
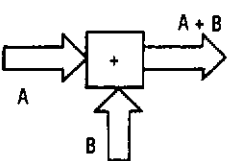
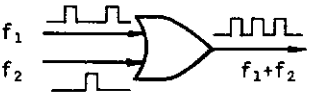
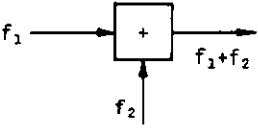
ELEMENTS REELS	ELEMENTS IDEALISES
<p>Multiplicateur binaire à taux programmable MP:</p>  <p>$f(t) = \frac{f_e}{2^n} n(t)$</p>	<p>Multiplicateur de fréquence instantanée MF:</p>  <p>$f(t) = k f_e n(t)$</p>
<p>Compteur réversible CR:</p> 	<p>Intégrateur de différence de fréquence instantanées IDF:</p>  <p>$n(t) \propto \int_0^t (f_1(\tau) - f_2(\tau)) d\tau$</p>
<p>Sommateur:</p>  <p>$A + B$</p> <p>$n \text{ bits}$</p>	<p>Sommateur instantané:</p>  <p>$A + B$</p>
<p>Sommateur d'impulsions:</p>  <p>(porte OU)</p> <p>$f_1 + f_2$</p>	<p>Sommateur de fréquences instantanées:</p>  <p>$f_1 + f_2$</p>

Fig.1.10 : Idéalisations des éléments constitutifs des filtres numériques quasi-continus.

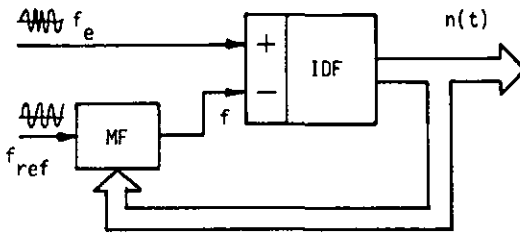


Fig.1.11 : Fréquence-mètre asservi constitué d'éléments idéaux.

Le multiplicateur de fréquence MF produit la fréquence $f(t) = k f_{ref} n(t)$, ce qui donne l'équation du système sous hypothèse de continuité des signaux :

$$\dot{n}(t) + k f_{ref} n(t) = f_e(t) \quad (1.4)$$

Par transformation dans le domaine de Laplace de cette équation différentielle, et avec des conditions initiales nulles, la fonction de transfert $H(s)$, rapport de la transformée $N(s)$ du nombre continu de sortie $n(t)$ et de la transformée $F_e(s)$ de la fréquence instantanée d'entrée $f_e(t)$, est :

$$H(s) = \frac{N(s)}{F_e(s)} = \frac{1}{s + k f_{ref}} \quad (1.5)$$

Cette fonction de transfert est celle d'un élément intégrateur de 1er ordre dont la constante d'intégration τ est fixée par :

$$\omega_c = k f_{ref} = 1/\tau \quad (1.6)$$

Il s'agit d'un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est située en $\omega = \omega_c$. Le système asservi permet donc de réduire sur la variable de sortie les fluctuations de la fréquence d'entrée. La réduction des fluctuations sur l'affichage de l'appareil rend ainsi la lecture plus confortable.

Dans le système réel, l'amplitude et le temps sont quantifiés et la description complète des phénomènes demande des moyens mathématiques

mieux adaptés que les équations différentielles décrites avec l'hypothèse de continuité des signaux. En particulier, l'équation de la différentielle (1.3) devient une équation aux différences, où la variable $\tilde{n}(t)$ et sa variation $\Delta\tilde{n}$ sur une période ΔT sont des valeurs entières :

$$\Delta\tilde{n} = \text{Partie entière} \{ (f_e(t) - f(t)) \Delta T \} \quad (1.7)$$

$$\Delta T \ll 1/f_{\text{ref}}$$

Lorsque ΔT devient très petit pour une fréquence de référence f_{ref} élevée, cela nécessite une différence des fréquences f_e et f d'autant plus grande, de façon à remplir la relation (1.7) :

$$\Delta T > 1/(f_e - f) \quad (1.8)$$

En première approche, le fréquencemètre asservi peut être décrit à partir de l'hypothèse de continuité des signaux, alors qu'un modèle plus complet remplace les fréquences instantanées par des suites d'impulsions d'une part, et tient compte de la quantification des variables numériques d'autre part.

Les filtres numériques quasi-continus utilisent un matériel logique simple :

- les compteurs réversibles sont réalisables à l'aide de bascules enrobées de logique combinatoire,
- les multiplicateurs à taux programmable se composent de compteurs accompagnés de la logique de comparaison avec la variable à multiplier.

Par la suite, nous appelons *filtre fréquentiel* tout système de filtrage constitué des éléments idéaux décrits précédemment. Cette définition prend son origine, dans la structure idéalisée, par l'apparition de variables sous forme de fréquences instantanées.

1.2. Correspondance filtre analogique à filtre fréquentiel.

Dans ce paragraphe, nous établissons les relations existantes entre les paramètres des filtres analogiques conventionnels et ceux du filtre fréquentiel du type défini au paragraphe 1.1. Des exemples de réalisation sont donnés à partir d'une structure de deuxième ordre.

Considérons l'équation différentielle d'un filtre analogique général de deuxième ordre :

$$\frac{d^2y(t)}{dt} + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_2 y(t) = a_0 \frac{d^2x(t)}{dt} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2 x(t) \quad (1.9)$$

Le filtre dit de type calculateur analogique, esquissé à la figure 1.12, constitue une réalisation possible de cette équation différentielle.

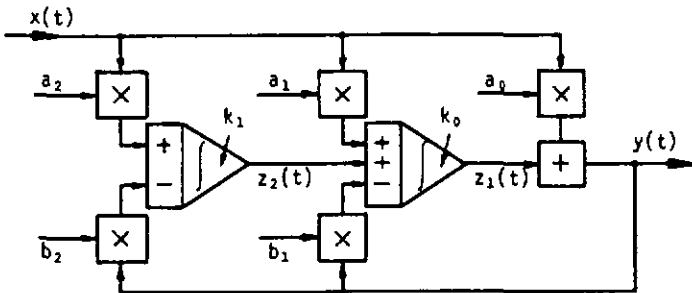


Fig.1.12 : Filtre de 2ème ordre de structure ordinateur analogique.

L'équation différentielle (1.9) devient par la transformée de Laplace:

$$Y(s) = \frac{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}{s^2 + b_1 s + b_2} X(s) + \frac{k_0 s + k_1}{s^2 + b_1 s + b_2} \quad (1.10)$$

et, lorsque les conditions initiales k_0 et k_1 sont nulles, nous obtenons la fonction de transfert $H(s)$ du deuxième ordre:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}{s^2 + b_1 s + b_2} = a_0 \frac{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2}{s^2 + b_1 s + b_2} \quad (1.11)$$

avec: $\alpha_i = a_i/a_0$ et $s = \sigma + j\omega$: fréquence complexe.

Sous forme factorisée, la fonction de transfert laisse apparaître une

une paire de pôles et une paire de zéros :

$$H(s) = a_0 \frac{(s - s_{01})(s - s_{02})}{(s - s_{p1})(s - s_{p2})} \quad (1.12)$$

Les pôles s_{p1} , s_{p2} et les zéros s_{01} , s_{02} peuvent être réels ou complexes conjugués. La stabilité du système est assurée si les pôles satisfont la condition :

$$\operatorname{Re} \{ s_{pi} \} < 0, \quad (1.13)$$

et le filtre est à phase minimale si les zéros sont tels que :

$$\operatorname{Re} \{ s_{oi} \} \leq 0. \quad (1.14)$$

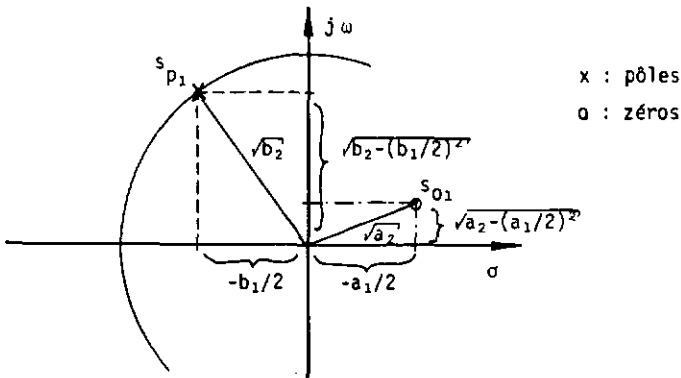


Fig. 1.13 : Position des pôles et des zéros de $H(s)$ dans le plan de Gauss \underline{s} . Cas d'un système stable à phase non minimale selon les équations (1.12) et (1.13).

La figure 1.13 illustre le cas d'un système de deuxième ordre stable à deux pôles et deux zéros complexes conjugués présentant une phase non minimale. Les positions de ces pôles et zéros sont fixés par (1.15).

$$s_{mj} = -m_{1j}/2 \pm \sqrt{m_{1j}^2/4 - m_{2j}} \quad (1.15)$$

avec : $m_{1j} = a_j$: zéros ; $m_{2j} = b_j$: pôles.

De la condition de stabilité (1.13), il vient : $b_1 > 0$; de plus, les racines des polynômes du numérateur et du dénominateur sont :

- complexes conjuguées si $m_2 > m_1^2/4$,
- doubles réelles si $m_2 = m_1^2/4$,
- réelles si $m_2 < m_1^2/4$.

La figure 1.14 rappelle la position des pôles et des zéros dans le plan de Gauss selon les valeurs des coefficients de la fonction de transfert $T(s)$ donnée en (1.11).

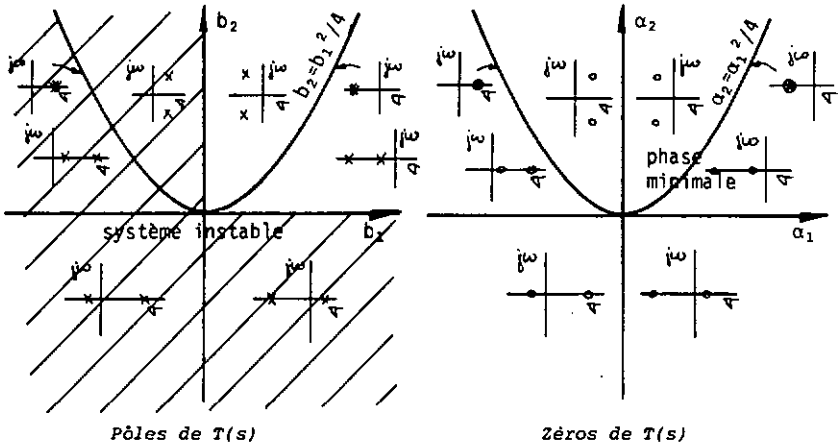


Fig. 1.14 : Analyse des valeurs des coefficients du filtre analogique et répartition des pôles et des zéros dans le plan de Gauss.

Les coefficients b_1 et b_2 ne peuvent admettre que des valeurs positives ($b_1 > 0, b_2 > 0$), dans le cas contraire on aurait en effet un pôle dont la partie réelle serait positive, donc un système instable.

Le filtre fréquentiel équivalent au filtre analogique est déterminé par transposition de la structure ordinateur analogique présentée à la figure (1.12). Nous avons déjà vu que les variables internes d'un filtre fréquentiel sont des fréquences instantanées, par conséquent définies strictement positives. Ce n'est pas le cas de la structure analogique générale où les variables appartiennent au domaine des nombres réels. Afin de simplifier la transposition du filtre analogique en un système fréquentiel, cette

difficulté est évitée par deux moyens différents. Le premier procédé utilise une arithmétique qui tient compte du signe des variables internes du système et qui travaille avec les valeurs absolues des grandeurs de ces variables. La mise en œuvre de cette solution est cependant trop complexe et une autre méthode est utilisée dans la réalité. La deuxième méthode consiste en un décalage des variables internes des filtres. Le domaine physique de fréquences strictement positives des filtres fréquentiels est ainsi respecté. La figure 1.15 illustre ce décalage des variables internes dans le filtre de type ordinateur analogique de second ordre.

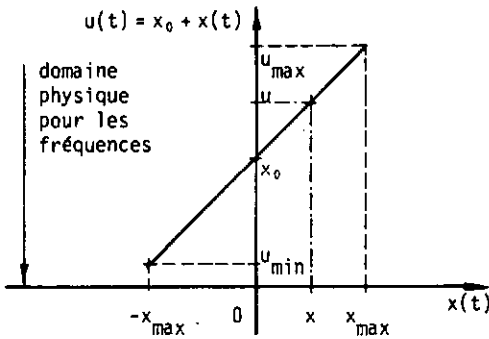


Fig.1.15 : Décalage des variables du filtre de structure ordinateur analogique.

Les signaux d'entrée et de sortie et les variables internes du circuit de la figure 1.12 deviennent ceux de la figure 1.16 après décalage:

$$\begin{aligned}
 \text{signal d'entrée} & : u(t) = x_0 + x(t) \\
 \text{signal de sortie} & : v(t) = y_0 + y(t) \\
 \text{variable interne 1} & : w_1(t) = z_{10} + z_1(t) \\
 \text{variable interne 2} & : w_2(t) = z_{20} + z_2(t)
 \end{aligned}
 \tag{1.16}$$

Le système d'équations différentielles représentant le filtre de type ordinateur analogique de la fig.1.16 après décalage des variables est:

$$\begin{aligned}
 \dot{v}(t) & = a_0 u(t) + w_1(t) \\
 \dot{w}_1(t) & = a_1 u(t) - b_1 v(t) + w_2(t) \\
 \dot{w}_2(t) & = a_2 u(t) - b_2 v(t) + z_{30}
 \end{aligned}
 \tag{1.17}$$

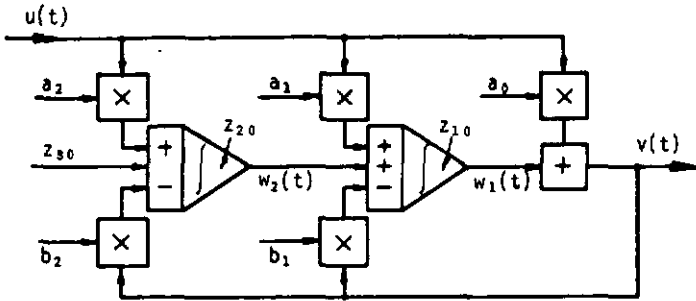


Fig.1.16 : Filtre de 2ème ordre de structure ordinateur analogique après décalage des variables internes.

Les équations différentielles (1.17) peuvent être réduites à la relation (1.11) lorsque les conditions initiales sont nulles et si les valeurs x_0 , y_0 , z_{10} , z_{20} et z_{30} nécessaires à l'équilibre obéissent aux identités:

$$\begin{aligned} z_{10} &= y_0 - a_0 x_0 \\ z_{20} &= b_1 y_0 - a_1 x_0 \\ z_{30} &= b_2 y_0 - a_2 x_0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Les valeurs d'équilibre x_0 , y_0 , z_{10} , z_{20} et z_{30} ne sont pas indépendantes. Les conditions d'équilibre (1.18) énoncées ci-dessus relient ces valeurs entre elles avec les coefficients a_i et b_i du filtre.

La disposition des signaux d'entrée et de sortie du filtre de type ordinateur analogique est illustrée à la figure 1.17.

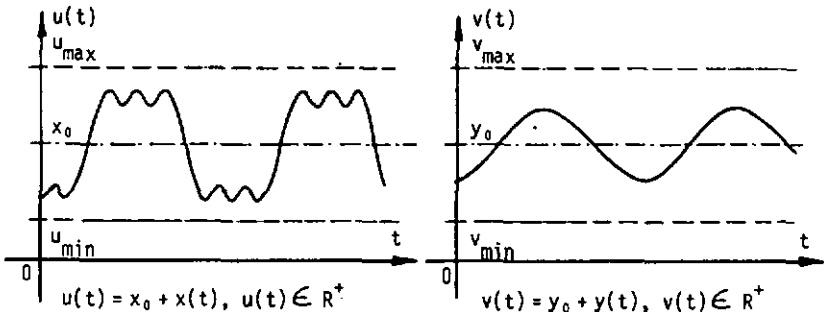


Fig.1.17 : Signaux d'entrée et de sortie du filtre de type ordinateur analogique.

Par transposition des éléments constitutifs du filtre analogique de la figure 1.16 (multiplicateurs de tension et intégrateurs) par les constituants principaux du filtre fréquentiel (multiplicateurs de fréquence MF et intégrateurs de différence de fréquences IDF), nous obtenons deux structures de filtrage fréquentiel de second ordre. L'entrée du filtre fréquentiel peut être placée après un convertisseur analogique-numérique comme dans la figure 1.18, ou après un convertisseur tension-fréquence, selon la structure de la figure 1.19. Dans la première réalisation, les coefficients sont introduits sous forme fréquentielle, alors que dans la seconde, ceux-ci sont placés sous forme numérique aux entrées des multiplicateurs de fréquence idéaux.

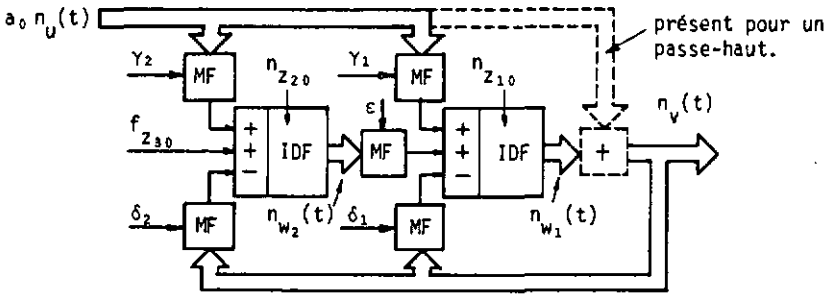
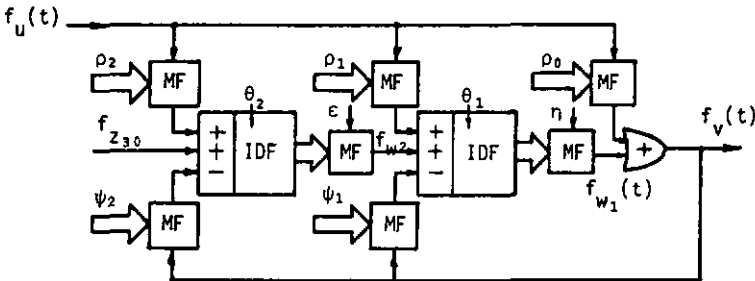


Fig.1.18 : Filtre fréquentiel de 2ème ordre, 1ère forme, entrée provenant d'un convertisseur A/N et coefficients sous forme fréquentielle.



MF : multiplicateur de fréquence

IDF : intégrateur de la différence de fréquences

Fig.1.19 : Filtre fréquentiel de 2ème ordre, 2ème forme, entrée provenant d'un convertisseur T/F et coefficients numériques.

Le degré du filtre synthétisé (en général une cascade d'éléments de second ordre) s'identifie au nombre d'intégrateurs de différence de fréquences, chacun d'entre eux étant lié à une variable interne. Les conditions initiales du filtre sont également les valeurs initiales des intégrateurs IDF.

L'action du multiplicateur de fréquence MF a déjà été soulignée: produire une fréquence instantanée proportionnelle à la fréquence et au nombre se trouvant aux deux entrées du multiplicateur. Dans la figure 1.18, γ_1 , γ_2 , δ_1 , δ_2 et ϵ sont des fréquences de référence fixes définies par les coefficients du filtre à réaliser; les variables internes $n_{w_1}(t)$, $n_{w_2}(t)$, l'entrée $n_U(t)$ et la sortie $n_V(t)$ sont des nombres caractérisés par une longueur de mot supposée infinie dans le filtrage fréquentiel. La structure de la figure 1.19 réalise le même filtre fréquentiel, mais les paramètres de filtrage sont ici des nombres (cas de ρ_0 , ρ_1 , ρ_2 , ψ_1 , ψ_2), alors que les variables internes $f_{w_1}(t)$, $f_{w_2}(t)$, le signal d'entrée $f_U(t)$ et le signal de sortie $f_V(t)$ sont des fréquences.

Par transposition du filtre de type ordinateur analogique, le processus de décalage des variables appliqué au système fréquentiel donne, en cas de conditions initiales nulles pour le filtre de la figure 1.18:

$$\begin{aligned} n_U(t) &= n_{x_0} + n_x(t) & ; & & n_V(t) &= n_{y_0} + n_y(t) \\ n_{w_1}(t) &= n_{z_{10}} + n_{z_1}(t) & ; & & n_{w_2}(t) &= n_{z_{20}} + n_{z_2}(t) \end{aligned} \quad (1.19)$$

En conséquence, les équations différentielles représentant ce filtre fréquentiel de la figure 1.18 s'écrivent:

$$\begin{aligned} \dot{n}_V(t) &= a_0 n_U(t) + n_{w_1}(t) \\ \dot{n}_{w_1}(t) &= a_0 \gamma_1 n_U(t) - \delta_1 n_V(t) + \epsilon n_{w_2}(t) \\ \dot{n}_{w_2}(t) &= a_0 \gamma_2 n_U(t) - \delta_2 n_V(t) + z_{30} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Par comparaison avec les relations (1.17) du cas analogique, nous établissons les correspondances entre les filtres analogique et fréquentiel de première forme au niveau des coefficients:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0 & ; & & a_1 &= a_0 \gamma_1 & ; & & a_2 &= a_0 \gamma_2 \epsilon \\ b_1 &= \delta_1 & ; & & b_2 &= \delta_2 \epsilon \end{aligned} \quad (1.21)$$

Les valeurs à l'équilibre doivent obéir aux conditions suivantes:

$$\begin{aligned} n_{z_{10}} &= n_{y_0} - a_0 n_{x_0} \\ n_{z_{20}} \epsilon &= \delta_1 n_{y_0} - a_0 \gamma_1 n_{x_0} \\ f_{z_{30}} &= \delta_2 n_{y_0} - a_0 \gamma_2 n_{x_0} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Une démarche similaire est exécutée pour le filtre fréquentiel de la figure 1.19, le décalage des variables et la transposition du filtre analogique dans le circuit fréquentiel fournit les variables:

$$\begin{aligned} f_u(t) &= f_{x_0} + f_x(t) & ; & & f_v(t) &= f_{y_0} + f_y(t) \\ f_{w_1}(t) &= f_{z_{10}} + f_{z_1}(t) & ; & & f_{w_2}(t) &= f_{z_{20}} + f_{z_2}(t) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Les équations différentielles représentant le filtre fréquentiel de deuxième forme de la figure 1.19 s'écrivent:

$$\begin{aligned} f_v(t) &= \rho_0 f_u(t) + f_{w_1}(t) \\ \frac{1}{\eta} f_{w_1}(t) &= \rho_1 f_u(t) - \psi_1 f_v(t) + f_{w_2}(t) \\ \frac{1}{\epsilon} f_{w_2}(t) &= \rho_2 f_u(t) - \psi_2 f_v(t) + f_{z_{30}} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Par comparaison avec les relations (1.17) du cas analogique, nous déduisons les correspondances entre les filtres analogique et fréquentiel de deuxième forme au niveau des coefficients:

$$\begin{aligned} a_0 &= \rho_0 & ; & & a_1 &= \rho_1 \eta & ; & & a_2 &= \rho_2 \eta \epsilon \\ b_1 &= \psi_1 \eta & ; & & b_2 &= \psi_2 \eta \epsilon \end{aligned} \quad (1.25)$$

Les valeurs à l'équilibre doivent satisfaire dans ce cas aux expressions suivantes:

$$\begin{aligned} f_{z_{10}} &= f_{y_0} - \rho_0 f_{x_0} \\ f_{z_{20}} &= \psi_1 f_{y_0} - \rho_1 f_{x_0} \\ f_{z_{30}} &= \psi_2 f_{y_0} - \rho_2 f_{x_0} \end{aligned} \quad (1.26)$$

où les fréquences $f_{z_{10}}$ et $f_{z_{20}}$ sont respectivement:

$$f_{z_{10}} = \eta \theta_1 \quad \text{et} \quad f_{z_{20}} = \epsilon \theta_2 \quad (1.27)$$

Dans ce paragraphe, nous avons établi les relations qui décrivent les filtres numériques quasi-continus idéalisés (hypothèse de continuité des signaux) appelés filtres fréquentiels. Ces structures sont obtenues par transposition du filtre de type ordinateur analogique. Les filtres fréquentiels ne possédant que des variables internes strictement positives (fréquences), le décalage des variables de tous ces systèmes dans le domaine des nombres réels positifs est indispensable. Plusieurs groupes d'équations, reliant les coefficients et les valeurs des variables à l'équilibre, ont été déduits.

Il convient maintenant d'examiner quelques applications possibles de ces relations. Nous entreprenons la mise en oeuvre de filtres qui peuvent trouver usage dans des domaines où le traitement de l'information s'effectue dans les basses fréquences (fréquences de coupure inférieures à 10 kHz) comme par exemple en électronique bio-médicale. Cette étude fait l'objet du paragraphe suivant.

1.3. Applications de la notion de filtrage fréquentiel et dérivation de quelques structures.

Rappelons en premier lieu la fonction de transfert d'un filtre fréquentiel de deuxième ordre de première forme comme celui de la figure 1.18:

$$H(s) = \frac{a_0 s^2 + a_0 \gamma_1 s + a_0 \gamma_2 \epsilon}{s^2 + \delta_1 s + \delta_2 \epsilon} \quad (1.28)$$

ainsi que la fonction de transfert du filtre fréquentiel de deuxième ordre de seconde forme de la figure 1.19:

$$H(s) = \frac{\rho_0 s^2 + \eta \rho_1 s + \epsilon \eta \rho_2}{s^2 + \eta \psi_1 s + \epsilon \eta \psi_2} \quad (1.29)$$

Quelques réalisations particulières sont passées en revue et montrent les caractéristiques intéressantes des filtres fréquentiels: il s'agit des structures de premier ordre passe-bas et passe-haut tirées de la topologie de la figure 1.19, d'un filtre passe-haut de deuxième degré déduit du circuit de la figure 1.18, ainsi que d'un circuit passe-bande d'ordre deux déduit d'une structure à boucles imbriquées (en anglais: leap-frog).

1.3.1. Passe-bas de premier ordre.

Le filtre fréquentiel passe-bas de premier ordre est obtenu en posant dans la fonction de transfert (1.29) les conditions suivantes:

$$\rho_0 = \rho_2 = 0 \quad ; \quad \psi_2 = 0 \quad (1.30)$$

d'où la fonction de transfert du passe-bas $H_{LP}(s)$:

$$H_{LP}(s) = \frac{\eta \rho_1}{s + \eta \psi_1} = \frac{\rho_1}{\psi_1} \frac{1}{1 + s(1/\eta \psi_1)} \quad (1.31)$$

avec: $A = \frac{\rho_1}{\psi_1}$: facteur d'amplification du système,

$\omega_c = \eta \psi_1$: fréquence de coupure circulaire du filtre.

Pour des valeurs de A et ω_c choisies, il résulte de (1.27) et de la première relation du groupe (1.26):

$$\theta_1 = \frac{f_{z_{10}}}{\eta} = \frac{1}{\eta} f_{y_0} \quad (1.32)$$

De la deuxième équation du groupe (1.26), puisqu'il est possible de poser la valeur à l'équilibre $f_{z_{20}} = 0$, nous déduisons:

$$\psi_1 f_{y_0} - \rho_1 f_{x_0} = 0 \quad (1.33)$$

Le filtre fréquentiel passe-bas de premier degré recherché prend alors la forme simplifiée du schéma de la figure 1.20.

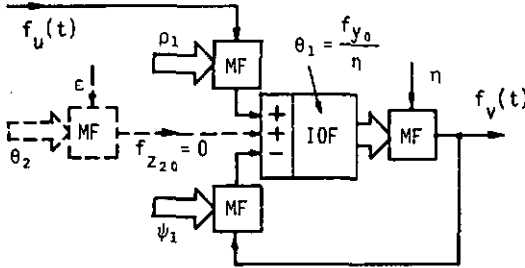


Fig.1.20 : Filtre passe-bas de 1er ordre selon la 2ème forme de filtre fréquentiel (Fig.1.19), lorsque $f_{z_{20}} \approx 0$.

Nous apportons une simplification supplémentaire à la réalisation pratique de ce filtre en substituant les deux multiplicateurs de fréquence de coefficients η et ψ_1 par un unique multiplicateur et en remplaçant la variable de sortie fréquentielle $f_v(t)$ par une variable numérique $n_v(t)$:

$$n_v(t) = \frac{1}{\eta} f_v(t) \quad (1.34)$$

Le circuit de la fig.1.20 se transforme donc dans celui simplifié de la fig.1.21.

Il est intéressant de noter l'équivalence, à un facteur d'amplification près, entre le filtre fréquentiel décrit dans ce paragraphe et la structure de fréquencemètre asservi obtenue au paragraphe 1.1 et schématisée à la figure 1.11, ceci d'autant plus que ces circuits ont été obtenus par des démarches différentes. La réponse en amplitude et en phase du filtre passe-bas de premier ordre sous hypothèse de continuité des signaux correspond donc à celle donnée dans le paragraphe 1.1 à la figure 1.8.

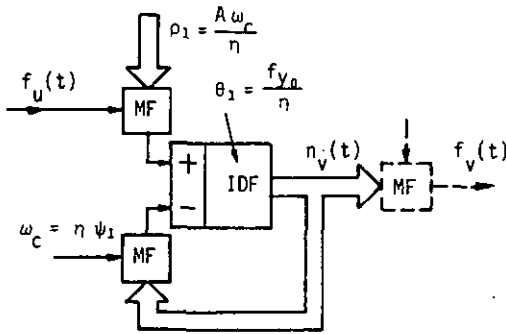


Fig.1.21 : Filtre fréquentiel passe-bas de 1er ordre simplifié.

1.3.2. Passe-haut de premier ordre.

La structure de filtre de type ordinateur analogique transposée sous la forme de filtre fréquentiel (figure 1.19, 2ème forme) sert également de base pour déterminer le schéma du filtre passe-haut fréquentiel de premier ordre. Dans la fonction de transfert (1.29), posons les valeurs suivantes des coefficients:

$$\rho_1 = \rho_2 = 0 \quad ; \quad \psi_2 = 0 \quad (1.35)$$

La fonction de transfert du filtre passe-haut $H_{HP}(s)$ se met alors sous la forme d'un système de premier ordre:

$$H_{HP}(s) = \frac{\rho_0 s}{s + \eta \psi_1} = \rho_0 \frac{s(1/\eta \psi_1)}{1 + s(1/\eta \psi_1)} \quad (1.36)$$

avec: $A = \rho_0$: facteur d'amplification du système,

$\omega_c = \eta \psi_1$: fréquence circulaire de coupure du filtre.

Le coefficient d'amplification A est supposé égal à l'unité dans les schémas de réalisation qui suivent. Nous admettrons qu'un coefficient multiplicatif peut intervenir dans une autre partie du circuit, comme par exemple dans un convertisseur tension-fréquence ou dans un convertisseur analogique-numérique s'il y a lieu.

Pour une amplification A et une pulsation ω_c choisies, il résulte des

équations (1.26) et (1.27):

$$\theta_1 = \frac{f_{z_{10}}}{n} = \frac{1}{n} (f_{y_0} - f_{x_0})$$

$$f_{z_{20}} = \epsilon \theta_2 = \psi_1 f_{y_0}$$
(1.37)

Remarquons qu'il n'est pas possible ici de poser $f_{z_{20}} = 0$ comme dans le cas du filtre passe-bas de premier ordre précédent.

Le filtre fréquentiel passe-haut de premier ordre se présente alors sous la forme de la figure 1.22 et les réponses en amplitude et en phase sont esquissées à la figure 1.23, où une normalisation des fréquences par rapport à la fréquence de coupure ω_c a été opérée.

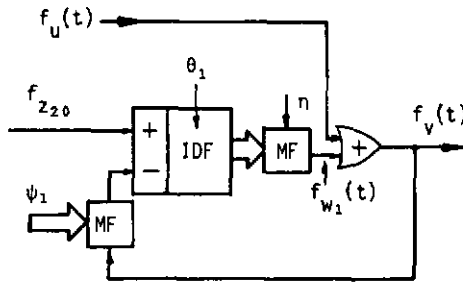


Fig. 1.22 : 2ème forme de filtre fréquentiel passe-haut de 1er ordre.

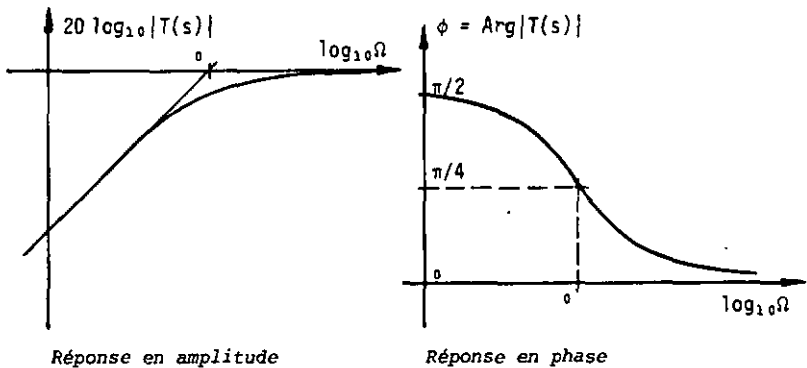


Fig. 1.23 : Réponse en amplitude et en phase d'un filtre passe-haut de premier ordre.

Le schéma du passe-haut de premier ordre peut aussi être déduit de la première forme de filtre fréquentiel de la figure 1.18. Le schéma est alors celui de la figure 1.24.

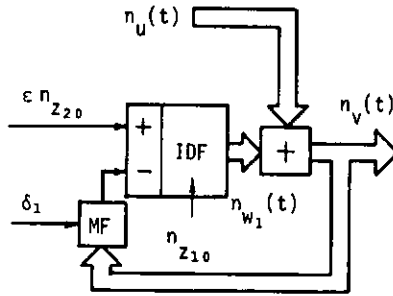


Fig. 1.24 : Filtre fréquentiel passe-haut de 1er ordre et 1ère forme.

Dans les deux schémas proposés, l'un n'utilise qu'un multiplicateur mais a en plus recours à un additionneur de valeurs numériques, alors que le second nécessite deux multiplicateurs de fréquence et que l'additionneur y prend une forme simple.

Une dualité entre les configurations des filtres passe-bas et passe-haut de premier ordre des figures 1.21 et 1.24 peut être mise en évidence. Elle est illustrée à la figure 1.25.

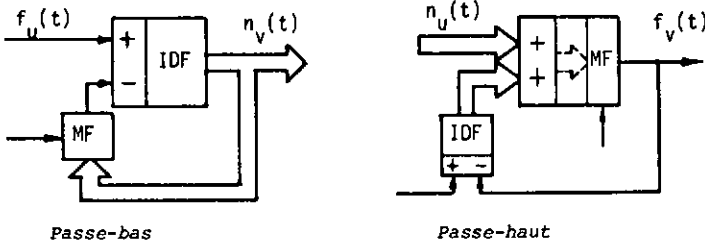


Fig. 1.25 : Comparaison des structures de filtrage fréquentiel passe-bas et passe-haut de premier ordre.

La dualité intervient entre les variables de type fréquence et nombre d'une part, et entre les éléments comme le multiplicateur de fréquence et l'intégrateur de la différence de fréquences d'autre part. Comme mis en

évidence à la fig.1.25, l'échange de chacune des variables d'un type par l'autre type et celui de chacun des éléments par son dual permet de retrouver l'autre structure de filtrage. En effet, considérons initialement le filtre fréquentiel passe-bas de premier ordre. Nous y effectuons l'échange de la variable sous forme de fréquence $f_u(t)$ par la variable numérique $n_u(t)$ et réciproquement l'échange de $n_v(t)$ par $f_v(t)$. Enfin, nous échangeons le multiplicateur de fréquence par un intégrateur de la différence de fréquences et cet élément du passe-bas par un ensemble additionneur numérique plus multiplicateur de fréquence. La transformation obtenue est une transformation filtre passe-bas à filtre passe-haut. Le cheminement inverse est également possible.

1.3.3. Passe-haut de second ordre.

Le filtre numérique quasi-continu de 2ème ordre qui trouve une application en électronique bio-médicale est un cas important à analyser. Un appareil de mesure de la tension artérielle [3] utilise un tel dispositif, afin de séparer deux signaux superposés détectés par un capteur piézorésistif. Le spectre de ces signaux (pulsation du coeur humain et bruit dit de Korotkoff) est compris entre des fréquences de l'ordre de 1 à 100 Hz. La séparation de chacun de ces signaux est effectuée à l'aide d'un filtre numérique de 2ème ordre passe-haut. Afin de conserver un grand nombre d'échantillons du signal présent seulement durant un court intervalle de temps à chaque pulsation du coeur, nous utilisons un filtre quasi-continu qui a justement un rapport élevé fréquence d'échantillonnage à fréquence de coupure, comme nous le verrons par la suite.

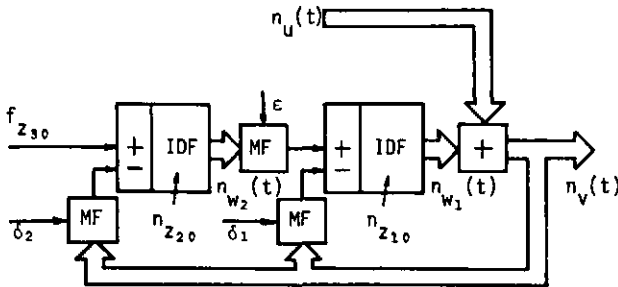


Fig.1.26 : Filtre numérique quasi-continu de deuxième ordre tiré de la première forme (figure 1.18).

Le filtre fréquentiel passe-haut de deuxième ordre est schématisé à la figure 1.26. Pour la détermination de la structure de ce filtre, nous partons du schéma de la figure 1.18 et nous posons les valeurs des coefficients dans la fonction de transfert (1.28):

$$a_0 = 1 \quad ; \quad \gamma_1 = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_2 = 0 \quad (1.38)$$

1.3.4. Exemple d'un filtre numérique quasi-continu déduit d'une structure en échelle.

Rappelons que les filtres analogiques les moins sensibles dans la bande passante aux variations de leurs coefficients sont les filtres LC qui présentent une structure en échelle et des terminaisons résistives [4, 5]. Ce résultat est le point de départ des différentes techniques de réalisation directe et de simulation de ces filtres, afin de conserver cette propriété de sensibilité minimale.

Les systèmes dits à FDNR (Frequency Dependant Negative Resistance) et à FONC (Frequency Dependant Negative Conductance) [6, 7] constituent un exemple de transposition directe de structures de filtres LC en échelle réalisée avec des éléments analogiques actifs.

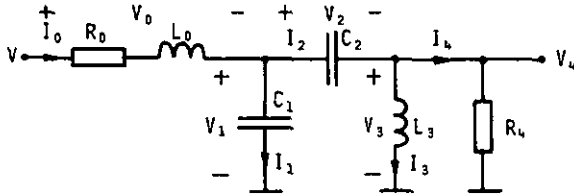
Les filtres à boucles imbriquées (en anglais: leap-frog) représentent par contre une approche globale de simulation de filtre en échelle. On connaît des réalisations de filtres en échelle simulés se basant sur des circuits RC actifs et d'autres qui font appel à la technique des capacités commutées.

Nous allons maintenant démontrer, dans le cas d'un filtre passe-bande, la démarche à suivre pour parvenir à la synthèse d'un filtre numérique en échelle simulé de type quasi-continu. La figure 1.27 présente le graphe de fluence associé à un filtre LC passe-bande de quatrième ordre. Ce graphe est une représentation topologique des relations entre toutes les variables tension et courant des différentes branches du circuit LC que nous allons simuler [9]. Le schéma du filtre passe-bande de deuxième ordre, circuit anti-résonnant, ainsi que le diagramme de fluence correspondant, exposés à la figure 1.28, sont obtenus par élimination des éléments L_0 et C_2 dans la

figure 1.27:

$$L_0 \rightarrow 0 \text{ et } C_2 \rightarrow \infty$$

$$(1.39)$$



Filtere passe-bande de quatrième ordre.

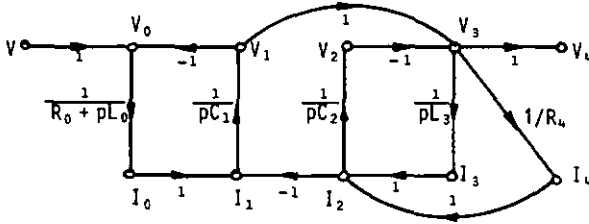
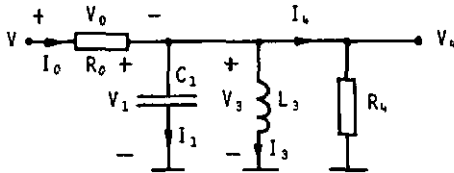


Diagramme de fluence associé.

Fig.1.27 : Filtere passe-bande de 4ème ordre de type LC avec terminaisons résistives et graphe de fluence.



Filtere passe-bande de deuxième ordre.

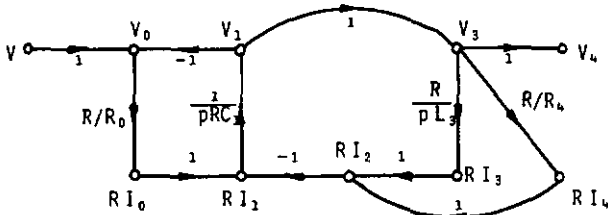


Diagramme de fluence associé.

Fig.1.28 : Filtere passe-bande de 2ème ordre de type LC avec terminaisons résistives et graphe de fluence.

Dans la phase suivante, les éléments qui réalisent les opérations $1/pR_1$ et R/pL_2 sont remplacés par des intégrateurs, et les quotients R/R_0 et R/R_4 deviennent des diviseurs de tension si $R < R_0$ et $R < R_4$:

$$\frac{R}{R_0} = \frac{R_b}{R_a + R_b} \quad \text{et} \quad \frac{R}{R_4} = \frac{R_d}{R_c + R_d} \quad (1.40)$$

On obtient alors le circuit analogique à boucles imbriquées de la figure 1.29.

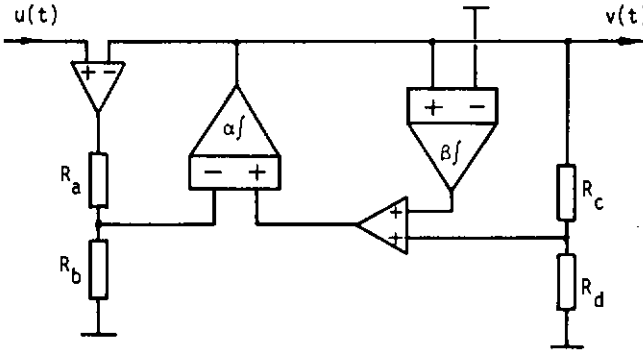


Fig.1.29 : Réalisation analogique du filtre passe-bande de deuxième ordre à boucles imbriquées.

Lorsque les résistances R_a , R_b , R_c et R_d sont égales, la fonction de transfert $H_{BP}(s)$ du circuit à boucles imbriquées de deuxième ordre de la figure 1.29 est donnée par:

$$H_{BP}(s) = \frac{\alpha s}{s^2 + \alpha s + \beta} \quad (1.41)$$

Le passage du système analogique de la figure 1.29 au circuit fréquentiel est effectué par transformation des intégrateurs et des diviseurs de tension respectivement par des intégrateurs de la différence de fréquences et par des multiplicateurs de fréquence. Le schéma du circuit passe-bande à boucles imbriquées de deuxième ordre sous forme fréquentielle est esquissé à la figure 1.30.

Nous venons d'établir une structure fréquentielle tirée d'un circuit LC en échelle à terminaisons résistives qui doit présenter une sensibilité

minimum à un écart sur les coefficients. Simultanément, nous prouvons qu'il existe différentes méthodes de synthèse des filtres fréquentiels et, à fortiori, des systèmes numériques quasi-continus.

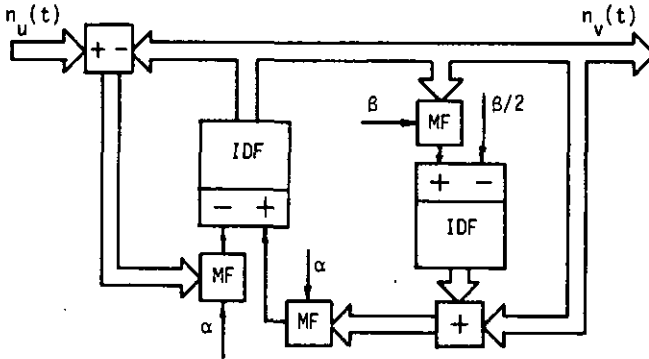


Fig.1.30 : Filtre fréquentiel passe-bande de deuxième ordre à boucles imbriquées.

Dans ce paragraphe, nous avons trouvé différentes structures de filtrage à partir du comportement idéal du système considéré. Ce comportement idéal, appelé filtrage fréquentiel, n'est pas réalisé en pratique; cependant, une première estimation avec ce procédé permet de calculer des paramètres tels que les fréquences de fonctionnement et les fréquences de coupure des filtres numériques quasi-continus.

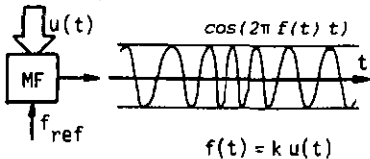
1.4. Définition du filtrage numérique quasi-continu.

L'idéalisation du comportement des filtres quasi-continus a conduit à la notion de filtres fréquentiels, dans lesquels les signaux sont supposés continus dans le temps et en amplitude. Les éléments constitutifs essentiels de ces systèmes fréquentiels sont le multiplicateur de fréquence MF et l'intégrateur de la différence de deux fréquences IDF. Cependant, la mise en oeuvre sous forme intégrée de ces éléments idéaux n'est pas possible en pratique. En conséquence et pour approcher le fonctionnement idéal de ces structures fréquentielles, nous utilisons des éléments tels que les multiplicateurs programmables et les compteurs réversibles. Ceux-ci se prêtent bien à une miniaturisation poussée et donnent naissance aux structures appelées filtres numériques quasi-continus.

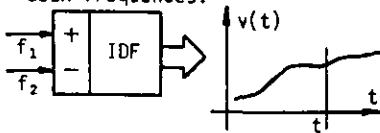
La figure 1.31 présente, dans les deux cas du filtrage fréquentiel et du filtrage quasi-continu, les différentes configurations des signaux dont on est en présence dans les éléments principaux de ces circuits.

CAS DU FILTRE FREQUENTIEL:

- modulation de fréquence
→ fréquence instantanée.



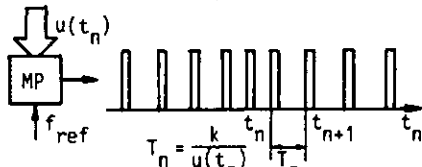
- intégrateur de la différence de deux fréquences.



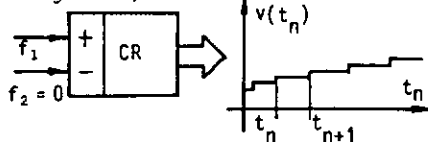
$$v(t) = \int_0^t \underbrace{[k_1 u(\tau) - k_2 w(\tau)]}_{\substack{f_1(\tau) \\ f_2(\tau)}} d\tau$$

CAS DU FILTRE QUASI-CONTINU:

- système de multiplication par modulation d'impulsions en densité.



- compteur réversible (élément intégrateur).



$$t_{n+1} - t_n = k_1 / u(t_n) \quad (z(t) = 0)$$

$$v(t_{n+1}) - v(t_n) = 1$$

Fig.1.31 : Les différents éléments et configurations de signaux en présence, cas idéal et cas réel.

Le filtrage fréquentiel est représenté sur la colonne de gauche de la figure 1.31, le multiplicateur de fréquence est capable de produire une fréquence instantanée proportionnelle à la variable numérique d'entrée, et le deuxième élément de base est capable d'effectuer la différence de deux fréquences et d'intégrer cette différence.

La colonne de droite de la figure 1.31 présente le cas du filtre numérique quasi-continu, tel qu'il sera étudié dans le chapitre 3. Dans ce système, la modulation d'impulsions en densité est produite par une structure de multiplication à logique binaire. Un compteur réversible avant-arrière permet de sommer ces impulsions et est alors utilisé comme élément intégrateur. En pratique, les multiplicateurs programmables les plus fréquemment utilisés [48, 49] ne présentent pas les caractéristiques idéalisées proposées dans le paragraphe 3.1 du troisième chapitre.

Les figures 1.32 et 1.33 montrent deux structures quasi-continues de second degré de formes différentes, déduites respectivement des filtres fréquentiels de première et deuxième forme des figures 1.18 et 1.19.

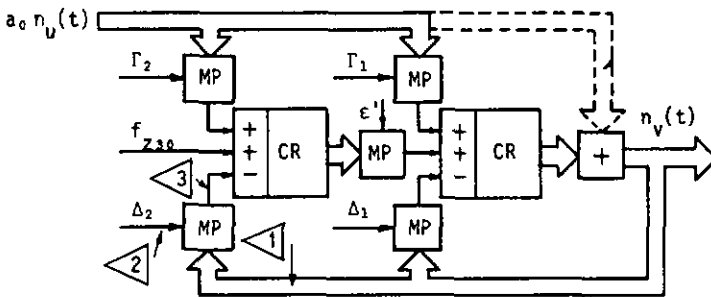


Fig.1.32 : Filtre numérique quasi-continu de 2ème ordre, 1ère forme, entrée provenant d'un convertisseur A/N.

A côté des multiplicateurs à taux programmables (MP) et des compteurs réversibles (CR), le circuit de la figure 1.32 a besoin d'un additionneur numérique complet pendant que, dans la figure 1.33, cet additionneur est réalisé avec une simple porte logique OU.

L'entrée des filtres quasi-continus provient soit d'un convertisseur

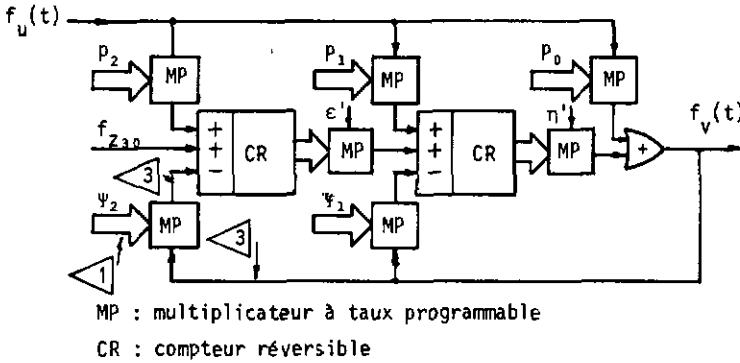


Fig.1.33 : Filtre numérique quasi-continu de 2ème ordre, 2ème forme, entrée provenant d'un convertisseur T/F.

analogique-numérique (figure 1.32), soit encore d'un convertisseur tension-fréquence (figure 1.33). Trois sortes de signaux, tous de type binaire, apparaissent et sont marqués par des indicateurs \triangleleft dans ces deux figures:

- $\triangleleft 1$ signaux binaires représentant des nombres avec des bits en parallèle et, en général, changeant dans le temps de façon asynchrone.
- $\triangleleft 2$ impulsions périodiques binaires représentant des fréquences fixes.
- $\triangleleft 3$ impulsions binaires ayant une densité temporelle variable et résultant de la modulation avec des nombres binaires d'impulsions qui peuvent présenter ou non une densité temporelle variable.

La nature binaire de tous ces signaux, qui représentent finalement toujours des nombres, justifie le nom donné de filtres numériques.

La dénomination de filtre quasi-continu provient de la libre circulation des variables réinjectées dans les boucles de contre-réaction de ces structures. Ces valeurs changent de façon asynchrone, ceci étant dû à l'absence de mémoires de synchronisation. L'appellation quasi-continue est plus significative dans la structure de la figure 1.33, dans laquelle les signaux de contre-réaction sont des impulsions binaires avec une densité temporelle variable qui est proportionnelle aux sorties respectives des compteurs.

1.4.1. Récursion dans les filtres quasi-continus et leur domaine d'application.

Les variables de sortie des compteurs réversibles sont des nombres constitués par une suite finie de chiffres binaires. Dans des systèmes récursifs réels comme celui de première forme de la figure 1.32, la variable de sortie est réinjectée partiellement, dans le cas le plus général, sur un multiplicateur programmable réel. La longueur de mot des compteurs déterminent alors la fréquence de travail maximale du filtre. Ce fait est illustré à la figure 1.34 par un filtre passe-haut de premier ordre dans le cas idéal (a)) et dans le cas réel (b)), alors que la figure 1.35 présente un filtre passe-bas de premier ordre dans le cas idéal (a)) et dans le cas réel (b)).

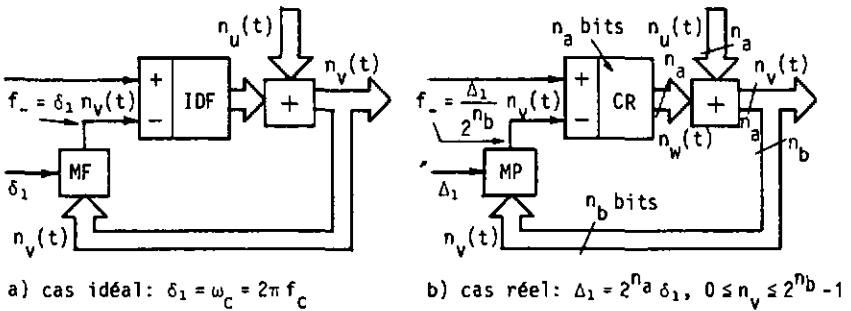


Fig.1.34 : Filtre passe-haut de 1er ordre dans les cas idéaux et réels.

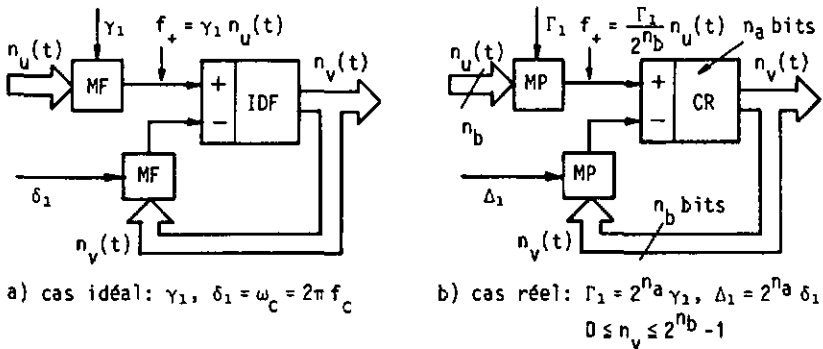


Fig.1.35 : Filtre passe-bas de 1er ordre dans les cas idéaux et réels.

Dans le schéma de la figure 1.36, on voit que la partie de la variable interne du compteur réversible prise dans la contre-réaction n'est pas identique à la longueur de mot totale n_a de cette variable.

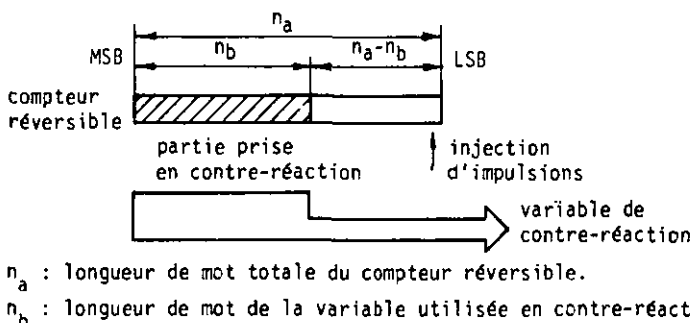


Fig.1.36 : Mise en évidence de la partie du compteur réversible prise en contre-réaction dans la boucle du circuit de la figure 1.34.

La fréquence de travail Δ_1 du système de la figure 1.34 b) est déterminée par le coefficient δ_1 et par la longueur de mot totale du compteur réversible. Cela permet d'établir la relation entre la fréquence de coupure $f_c = \delta_1/2\pi$ et la fréquence de travail maximale Δ_1 de cette cellule quasi-continue.

$$\Delta_1 = 2^{n_a} \delta_1 = 2\pi 2^{n_a} f_c \quad (1.42)$$

C'est donc la longueur de mot totale n_a du compteur réversible qui est importante ici pour déterminer la fréquence maximale de travail Δ_1 , et non pas la longueur de mot n_b de la variable utilisée dans la contre-réaction.

A l'aide de cette relation (1.42), nous allons estimer le domaine d'application des filtres numériques quasi-continus. Constatons en premier lieu que la fréquence de travail maximale $\Delta_{1\max}$ est fixée par la technique d'intégration utilisée. Ainsi, dans des technologies telles que TTL standard ou encore MOS-complémentaire à haute vitesse, cette fréquence maximale de travail vaut approximativement:

$$\Delta_{1\max} \cong 20 \text{ MHz.} \quad (1.43)$$

Par conséquent, la fréquence de coupure maximale $f_{c\max}$ vaut, pour une

longueur de mot totale $n_a = 8$ bits:

$$f_{c_{\max}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta_{1\max}}{2^{n_a}} = 12,4 \text{ kHz} \quad (1.44)$$

Elle descend à 1 kHz lorsque le filtre est plus sélectif. Comme en ce qui concerne les filtres numériques conventionnels, le domaine d'application des filtres numériques quasi-continus apparaît limité aux basses fréquences. L'électronique bio-médicale, dans laquelle les signaux ont des spectres inclus dans les basses fréquences, est un domaine d'application indiqué de ces cellules numériques quasi-continues.

1.4.2. Mise en évidence d'une caractéristique particulière de filtrage non linéaire des cellules numériques quasi-continues.

Dans les filtres fréquentiels, les éléments constitutifs tels que les multiplicateurs de fréquence ou les intégrateurs de la différence de deux fréquences travaillent de manière exacte quelle que soit la résolution des signaux. En réalité, dans les filtres quasi-continus, la modulation de fréquence pure produite dans les multiplicateurs de fréquence est remplacée par une modulation d'impulsions en densité. Cette dernière n'est en quelque sorte qu'une représentation par des impulsions des passages par zéro du signal de modulation de fréquence idéal. Ce phénomène introduit une caractéristique particulière de filtrage non linéaire supplémentaire dans ces systèmes que nous allons étudier.

Pour chaque valeur d'amplitude du signal d'entrée, nous déterminons la fréquence maximale encore saisissable dans un filtre numérique quasi-continu simple du premier ordre. L'information introduite à l'entrée du circuit ne doit pas être perdue au cours de la modulation d'impulsions en densité ou lors de la sommation de ces impulsions sur le compteur réversible. Ainsi, nous évitons une caractéristique particulière de filtrage non linéaire de l'information qui agit parallèlement à l'effet de la structure récursive étudiée.

Considérons, avec les différentes configurations des signaux exposés à la figure 1.31, un signal d'entrée d'un multiplicateur à taux programmable réel dont la variation en amplitude est notée ΔA , avec:

$$|\Delta A| \leq 2^{n_b - 1}, \quad (1.45)$$

où n_b est la longueur de mot du signal d'entrée du multiplicateur. Par exemple, la forme de ce signal peut correspondre à l'échantillonnage d'un signal d'entrée sinusoïdal sur le multiplicateur de fréquence idéal. La période du signal d'entrée est appelée T_e . Ces hypothèses sont décrites graphiquement à la figure 1.37 lorsque la variation d'amplitude est la plus petite ($|\Delta A| = 1$).

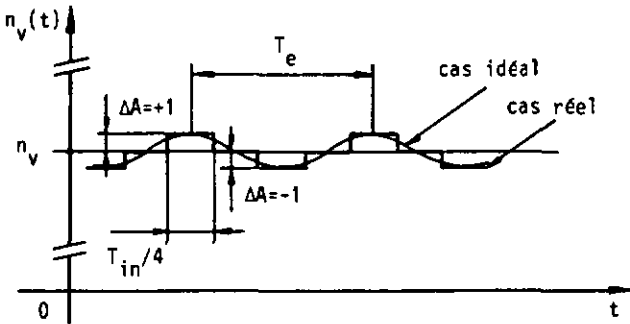


Fig.1.37 : Variation minimale du signal d'entrée du multiplicateur, dans le cas idéal et dans le cas réel, selon la fréquence $f_e = 1/T_e$.

La fréquence maximale $f_{e_{max}}$ du signal d'entrée est liée à la variation d'amplitude de ce signal, de telle sorte que cette variation produise, lors de la modulation d'impulsions en densité, une variation de phase plus élevée que 2π , équivalente à la création d'une impulsion supplémentaire pendant la durée de la variation d'amplitude. Cette situation est illustrée à la figure 1.38.

Cette impulsion supplémentaire (figure 1.38, cas 2) crée une variation significative et durable de l'état interne du compteur, et qui se répercutera ensuite sur le système bouclé complet. Lorsque la variation de phase est inférieure à 2π , aucune impulsion supplémentaire ne provient du multiplicateur réel, mais chaque impulsion créée est déphasée relativement à la situation où le signal d'entrée ne varie pas. Ce simple déphasage des impulsions fournies par le multiplicateur ne suffit pas, au niveau du compteur, pour obtenir un effet significatif à la fin de la boucle de comptage.

Dans le cas de la figure 1.38, une variation d'amplitude unitaire de $n_V(t)$ pendant la période $1/4 f_{in\max}$ est admise. Supposons encore que m impulsions sont apparues sur la ligne de la fréquence de référence cons-

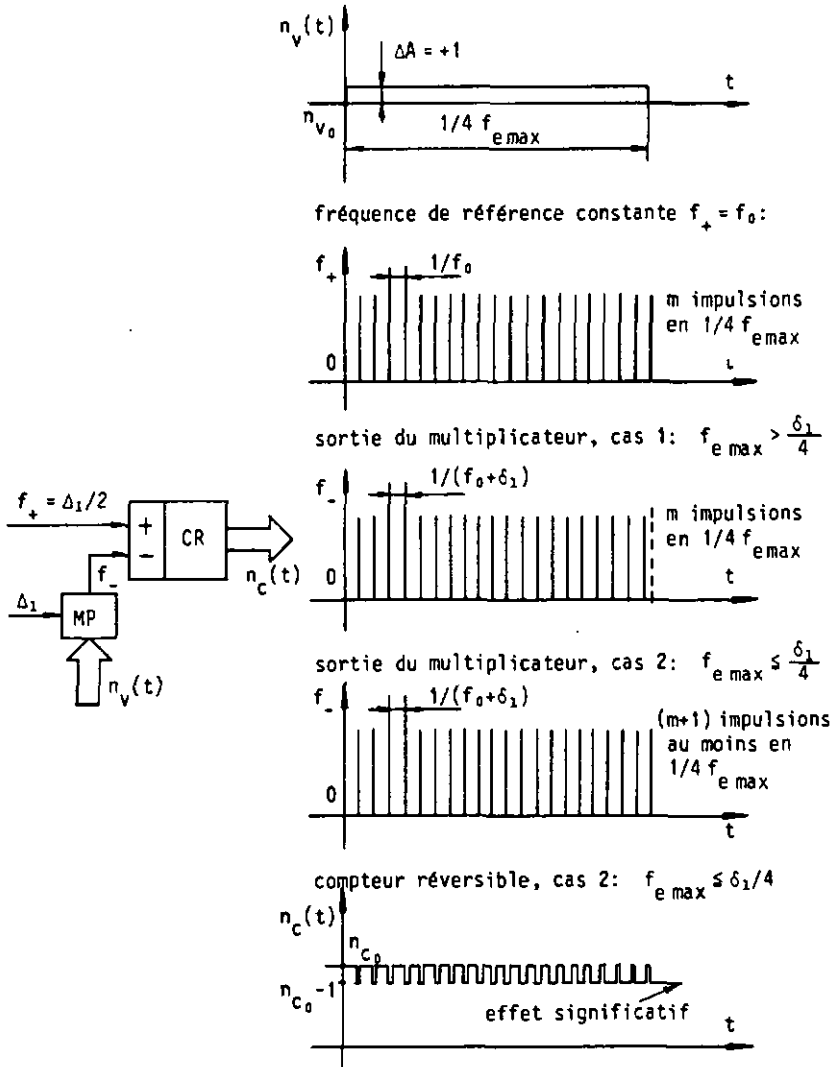


Fig. 1.38 : Effet d'une variation faible de l'entrée d'un multiplicateur programmable sur le compteur réversible. Création d'une impulsion supplémentaire avec effet permanent sur le compteur.

tante $f_+ = f_0$, cela signifie que la relation suivante est vérifiée:

$$\frac{1/(4 f_{e \max})}{1/f_0} = m \quad (1.46)$$

En sortie du multiplicateur réel (figure 1.38, cas 2), durant la période $1/4 f_{in \max}$, nous admettons qu'une impulsion supplémentaire est apparue sur la ligne f_- . La fréquence des impulsions y est donnée par $(f_0 + \delta_1)$, δ_1 étant la variation de fréquence de sortie du multiplicateur provoquée par un changement unitaire de la grandeur d'entrée. Il vient par conséquent l'inéquation:

$$\frac{1/(4 f_{e \max})}{1/(f_0 + \delta_1)} \geq m + 1 \quad (1.47)$$

Les relations (1.46) et (1.47) fixent donc la condition concernant la fréquence maximale du signal d'entrée d'amplitude la plus faible encore saisissable par le système quasi-continu:

$$f_{e \max} \leq \delta_1 / 4 = \frac{\pi}{2} f_c \quad (1.48)$$

Cette relation est généralisable pour le cas où l'amplitude du signal d'entrée n'est pas minimale (c'est à dire égale à 1), mais prend une valeur ΔA quelconque. La fréquence maximale du signal d'entrée vaut alors:

$$f_{e \max} \leq \Delta A \delta_1 / 4 = \frac{\pi}{2} \Delta A f_c \quad (1.49)$$

Nous constatons un effet de filtrage non linéaire en provenance du multiplicateur réel et du compteur. En effet, la relation (1.49) montre que la fréquence maximale du signal d'entrée encore saisissable est proportionnelle à l'amplitude du signal. Cette fréquence maximale est proche de la fréquence de coupure du filtre quasi-continu complet pour un accroissement d'amplitude unité, alors qu'elle tend vers le quart de la fréquence de référence Δ_1 divisée par $(2^{na} - nb)$ pour une amplitude maximale $(2^{nb} - 1)$. Ce résultat est illustré à la figure 1.39.

Ce filtrage passe-bas non linéaire est fonction de l'amplitude et de la fréquence du signal d'entrée et s'ajoute au phénomène de filtrage propre

de la boucle de contre-réaction.

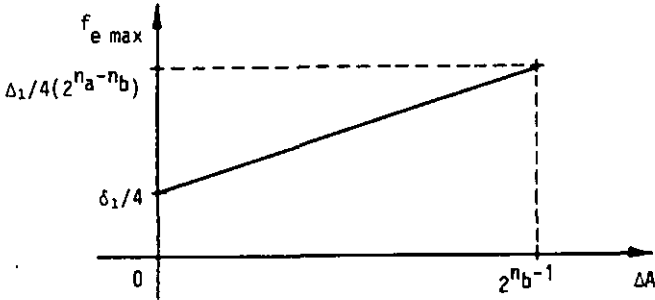


Fig. 1.39 : Valeur maximale de la fréquence d'entrée saisissable dans un système réel en fonction de l'amplitude de ce signal.

Le filtre quasi-continu traite les fréquences inférieures à la fréquence de coupure jusqu'au niveau minimal de résolution défini par la longueur de mot des variables numériques (condition 1.48). Pour des fréquences du signal d'entrée supérieures à la fréquence de coupure, une réjection par non linéarité intervient pour des signaux d'amplitude basse (condition généralisée 1.49).

Cette réjection non linéaire agit dans le même sens que le filtrage passe-bas engendré par les boucles de contre-réaction, comme dans le filtre passe-bas de la figure 1.35 b); elle s'ajoute à l'effet linéaire de la contre-réaction. Dans le filtre passe-haut de la figure 1.34 b), les fréquences plus petites que la fréquence de coupure f_c sont éliminées par la soustraction du signal d'entrée avec le résultat de la boucle de contre-réaction, alors que les fréquences plus grandes que la fréquence de coupure f_c bénéficient du passage direct entre l'entrée et la sortie du filtre dû au filtrage linéaire et non linéaire de la boucle de contre-réaction.

Le filtrage non-linéaire mis en évidence est dû à la quantification des variables d'état. Les éléments de logique binaire des filtres numériques quasi-continus imposent cette quantification des variables. La résolution est limitée dans les structures réelles, ce qui n'est pas le cas dans les filtres fréquentiels.

D'autre part, aucun effet de quantification des coefficients n'est apparu dans ces considérations, car les fréquences de référence (Δ_1 dans la figure 1.36 b)) sont fixées par hypothèse de façon parfaite, ce qui définit de manière précise également les fréquences de coupure de ces systèmes. En réalité, les structures étudiées sont toujours synchronisées par une fréquence d'horloge, aussi élevée apparaît-elle dans le cas le plus favorable. Cette fréquence d'horloge est en général limitée par le convertisseur analogique-numérique des signaux d'entrée, ou même, dans un cas extrême, par le fonctionnement d'un additionneur réel. Dans un tel additionneur, le délai d'apparition du résultat de l'addition n'est pas instantané, mais il dépend du temps de propagation des retenues de l'additionneur. Ces fréquences de référence n'existent par conséquent pas dans une échelle absolue, mais sont définies relativement à la fréquence d'horloge la plus élevée du système, ce qui revient à fixer une longueur de mot finie aux coefficients numériques correspondants. Ces effets de quantification des coefficients sont étudiés dans le chapitre 2 à propos du type d'arithmétique réalisée par les filtres numériques quasi-continus, et dans le chapitre 4 en ce qui concerne la sensibilité des valeurs des coefficients à l'imprécision de la fonction de filtrage recherchée.

Dans le chapitre 3, une mathématique discrète décrit de manière complète et exacte les filtres numériques quasi-continus à l'aide de leurs équations paramétriques. Les phénomènes de filtrage non linéaire peuvent être traités sur ordinateur par implantation de ces équations paramétriques de description des structures quasi-continues.

2. COMPARAISON DES STRUCTURES QUASI-CONTINUES AVEC D'AUTRES TECHNIQUES DE FILTRAGE.

Dans le chapitre précédent, l'idéalisation des filtres quasi-continus a conduit à la notion de filtre fréquentiel, qui a permis d'établir un modèle de description analogique théorique de ces structures. Le présent chapitre analyse les caractéristiques des filtres numériques quasi-continus réels, leurs propriétés arithmétiques et leur champ d'application par comparaison avec les filtres numériques classiques et avec les filtres analogiques. Afin de mieux saisir le fonctionnement des filtres quasi-continus, l'étude comparative ci-après situe ces systèmes relativement à diverses structures numériques définies ultérieurement et nommées filtres à récursion double et filtres à arithmétique incrémentale.

2.1. Différentes formes de réalisation des filtres numériques.

Un filtre numérique est un système à temps discret dans lequel toutes les grandeurs variables (entrée, sortie et états internes) sont des signaux à temps discret. Ce système, lorsqu'il est linéaire et invariant dans le temps, est régi par une équation de récurrence linéaire à coefficients constants. L'application de la transformation en z à cette formule de récurrence conduit à la fonction de transfert $H(z)$ du filtre, définie comme le rapport des transformées en z des signaux d'entrée $X(z)$ et $Y(z)$. La fonction de transfert ou transmittance d'une cellule générale de second ordre est du type:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{C_0 z^2 + C_1 z + C_2}{z^2 + d_1 z + d_2} \quad (2.1)$$

Elle caractérise un système utilisé couramment comme cellule de base pour la synthèse de systèmes plus complexes. La figure 2.1 représente la structure directe canonique obéissant à la transmittance $H(z)$.

La réalisation physique des filtres numériques pose le problème principal du multiplieur. La multiplication est l'opération essentielle du filtrage numérique, qui exige par conséquent un dispositif à hautes performances.

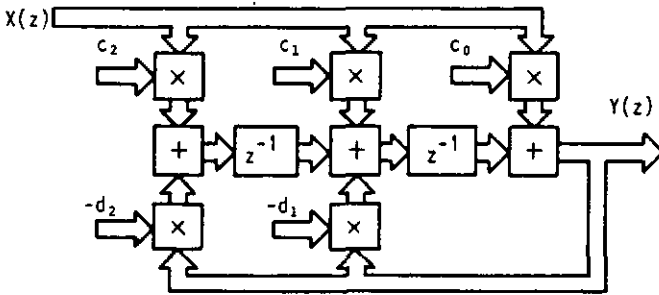


Fig. 2.1 : Filtre numérique canonique de deuxième ordre.

Une grande variété de multiplicateurs existe pratiquement, citons les types suivants de complexité décroissante que nous allons comparer:

- le multiplicateur parallèle-parallèle,
- le multiplicateur série-parallèle,
- le multiplicateur série-série,
- le multiplicateur à arithmétique incrémentale.

Ce multiplieur impose en fait à la structure numérique un délai de calcul et ce délai est identifié en pratique à la durée d'une période d'échantillonnage des signaux à temps discret. Une comparaison des temps de calcul de chacun de ces multiplicateurs est basée sur le nombre de signaux d'horloge nécessaire à une opération de multiplication. La figure 2.2 représente la fréquence de travail maximum de filtres numériques de caractéristiques identiques réalisés avec les différents types de multiplicateurs énoncés dans le cas d'une arithmétique à virgule fixe. Lorsque la complexité du circuit de multiplication diminue, la fréquence de travail maximale augmente.

Parmi les filtres numériques récurrents de structure canonique directe, la structure constituée de multiplieurs parallèle-parallèle nécessite théoriquement un unique signal d'horloge par opération de multiplication. La fréquence d'horloge et la fréquence d'échantillonnage des signaux de cette forme sont par conséquent identiques. Lorsque les multiplieurs sont de type série-parallèle, une multiplication complète demande n impulsions d'horloge, où n représente la longueur de mot du multiplicande et du multiplieur. Un filtre identique à celui réalisé avec des multiplieurs

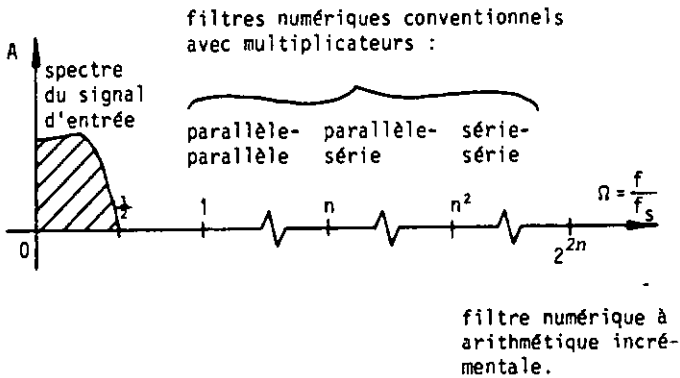


Fig.2.2 : Fréquence de travail maximale des filtres numériques analysés.

parallèle-parallèle impose, avec des multiplieurs série-parallèle, une fréquence de travail maximale d'un facteur n plus élevée que la fréquence d'échantillonnage. Un raisonnement similaire s'applique lorsque les multiplieurs utilisés sont de type série-série. Ceux-ci utilisent n^2 impulsions d'horloge pour une multiplication et rendent le rapport fréquence d'horloge à fréquence d'échantillonnage égal à n^2 .

La structure à arithmétique incrémentale décrite à la figure 2.3 présente de grandes ressemblances avec les systèmes quasi-continus, et est utilisée pour une comparaison avec la réalisation directe canonique de la figure 2.1.

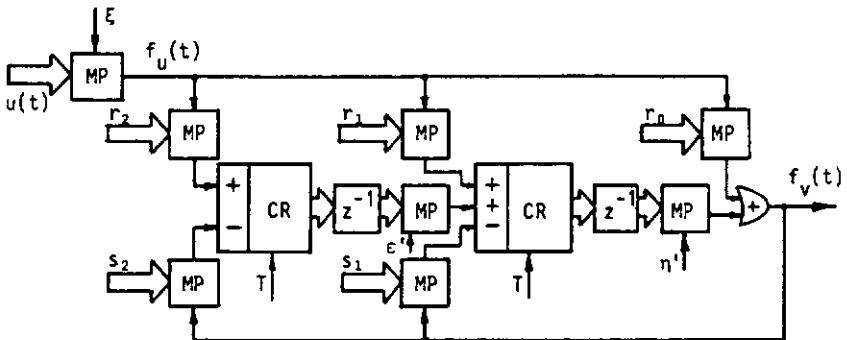


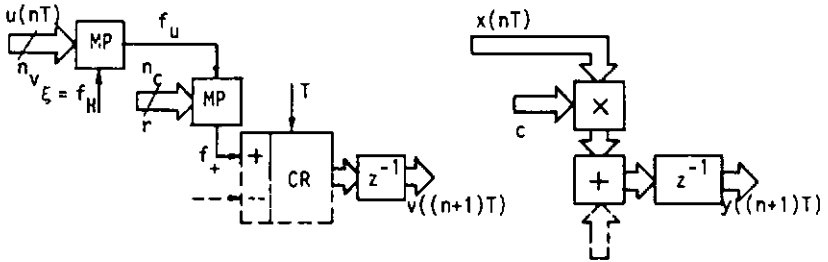
Fig. 2.3 : Filtre numérique à arithmétique incrémentale avec remise à l'équilibre du compteur à chaque période.

Relativement à ce filtre numérique conventionnel, des multiplicateurs binaires à taux programmables et des compteurs réversibles remplacent les multiplicateurs et les additionneurs dans les structures à arithmétique incrémentale.

Dans cette cellule, les impulsions binaires en provenance d'un multiplicateur programmable, dont le nombre est proportionnel à la variable d'entrée du multiplicateur programmable (MP), sont additionnées dans le compteur suivant pendant un temps égal à 2^{2n} fois la période élémentaire du système, où n représente la longueur de mot des variables et des coefficients. Une multiplication est complète dans le système à arithmétique incrémentale après le passage de 2^{2n} impulsions d'horloge.

Deux comportements distincts du filtrage numérique à arithmétique incrémentale sont mis en évidence: les compteurs réversibles subissent ou non une réinitialisation à leur valeur d'équilibre à chaque période d'échantillonnage T des signaux. Dans le premier cas, il s'agit donc de filtrage numérique à arithmétique incrémentale avec réinitialisation périodique (figure 2.3), alors que la seconde hypothèse définit le filtrage sans réinitialisation périodique des variables d'état. Ces comportements distincts des filtres à arithmétique incrémentale avec ou sans réinitialisation périodique des variables d'état trouvent des équivalents dans les structures numériques classiques.

En ce qui concerne la structure numérique à arithmétique incrémentale avec remise à l'état initial périodique de la figure 2.3, les valeurs déterminées dans les compteurs réversibles ne sont pas réutilisées d'une période d'échantillonnage à la suivante. Ces variables d'état interne sont entièrement recalculées à chaque période et les valeurs précédentes effacées intégralement. Le filtre numérique à arithmétique incrémentale avec réinitialisation des compteurs réversibles à intervalle régulier est équivalent, à ce point de vue, au filtre numérique de structure directe canonique de la figure 2.1. L'information stockée dans les mémoires tampons d'un filtre numérique canonique est aussi complètement effacée et remplacée par la nouvelle valeur disponible en sortie des additionneurs. La figure 2.4 illustre cette équivalence.



a) sous-structure à arithmétique incrémentale avec réinitialisation. b) sous-structure directe canonique.

Fig.2.4 : Equivalence des sous-structures à arithmétique incrémentale avec réinitialisation et directe canonique.

Les relations à temps discret qui caractérisent ces sous-structures peuvent être identifiées afin de déterminer les relations entre les différents coefficients. Pour la sous-structure à arithmétique incrémentale:

$$v((n+1)T) = f_+ T = \frac{1}{2^{n_c}} r f_u T = \frac{r T}{2^{n_v+n_c}} f_H u(nT) \quad (2.2)$$

et, en ce qui concerne la cellule directe canonique:

$$y((n+1)T) = c x(nT) \quad (2.3)$$

D'où la relation d'équivalence entre les coefficients:

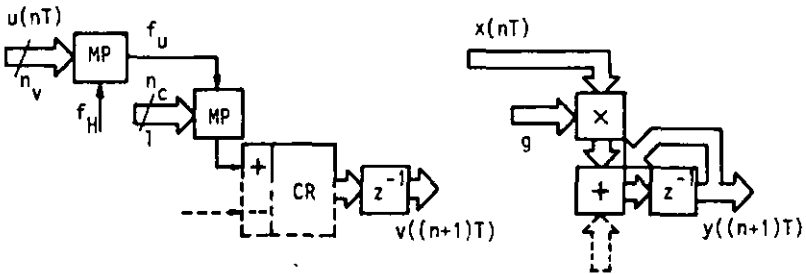
$$c_i = \frac{T f_H}{2^{n_v+n_c}} r_i \quad , \quad \text{et de même:} \quad (2.4)$$

$$d_i = \frac{T f_H}{2^{n_v+n_c}} s_i$$

Sous les deux conditions énoncées (2.4), il est possible d'affirmer que les deux sous-structures sont équivalentes, la réalisation physique des multiplicateurs étant distincte.

La structure numérique à arithmétique incrémentale sans réinitialisation périodique des variables d'état est illustrée à la figure 2.5. Dans cette cellule, les valeurs des compteurs réversibles sont réutilisées comme résultat partiel d'une période d'échantillonnage à la suivante. Ces variables d'état interne ne sont pas effacées mais modifiées progressivement au

structures extraites de ces cellules.



- a) cellule élémentaire à arithmétique
incrémentale sans réinitialisation
des variables internes.
- b) sous-structure numérique
à récursion double.

Fig.2.7 : Equivalence des cellules élémentaires à récursion double et à arithmétique incrémentale sans réinitialisation des variables.

Les relations entre les coefficients g et l et les paramètres f_H , T , n_v et n_c sont énoncées par identification des équations de récurrence de ces cellules élémentaires. Ainsi, pour la cellule à arithmétique incrémentale sans réinitialisation des variables d'état:

$$v((n+1)T) - v(nT) = f_+ T = \frac{1}{2^{n_c}} l f_u T = \frac{l T}{2^{n_v+n_c}} f_H u(nT) \quad (2.5)$$

et, pour la cellule de base à récursion double:

$$y((n+1)T) - y(nT) = g x(nT) \quad (2.6)$$

D'où la relation d'équivalence entre les coefficients:

$$g_i = \frac{T f_H}{2^{n_v+n_c}} l_i \quad , \text{ et de la même manière:} \quad (2.7)$$

$$h_i = \frac{T f_H}{2^{n_v+n_c}} m_i$$

Avec le respect des égalités proposées en (2.7), le circuit à arithmétique incrémentale de la figure 2.5 (sans réinitialisation des variables d'état interne) se comporte de façon identique à la topologie de filtrage numérique à récursion double proposée à la figure 2.6.

Théoriquement, toutes ces structures peuvent réaliser des filtres numériques de caractéristiques identiques. Cependant, les coefficients de tels filtres seront différents d'une structure à l'autre. Les relations entre les coefficients des cellules numériques à récursion double et directe canonique sont données par les équations (2.8):

$$\begin{aligned} g_0 &= c_0 \\ g_1 &= 2c_0 + c_1 & ; & \quad h_1 = 2 + d_1 \\ g_2 &= c_0 + c_1 + c_2 & ; & \quad h_2 = 1 + d_1 + d_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Les effets de quantification des coefficients (analysés au chap. 4) et des produits de ces cellules provoquent des performances de filtrage nuancées.

Lorsque le rapport fréquence d'échantillonnage à fréquence de coupure devient élevé, des différences significatives de sensibilité des coefficients sont mises en évidence. Les coefficients h_1 et h_2 du filtre à récursion double de la figure 2.6 tendent en effet vers zéro, alors que les coefficients d_1 et d_2 de la structure directe canonique de la figure 2.1 glissent respectivement vers les valeurs -2 et +1. Dans un tel cas, la forme canonique devient critique, car elle exige une longueur de mot des coefficients élevée afin de réduire leur effet de quantification. Le recours direct à une arithmétique à virgule flottante dans la forme canonique n'a pas été mise en oeuvre de cette cellule. Pour obtenir des avantages en opérant avec une virgule flottante dans le cas de la réalisation avec une forme directe canonique sélective de la figure 2.1, il est nécessaire de décomposer les coefficients selon leur valeur entière la plus proche et leur écart par rapport à cette grandeur. On comprend qu'avec une telle méthode de réalisation des opérations arithmétiques, on obtient alors substantiellement les mêmes avantages que dans une structure numérique à récursion double [23].

Lorsqu'une représentation des coefficients en virgule flottante est utilisée, la structure à récursion double de la figure 2.6 n'a besoin que d'une longueur de mot restreinte des coefficients. En effet, les coefficients f_1 et f_2 ont une importante fraction de bits nuls en virgule fixe,

comme l'indique l'illustration de la figure 2.8.

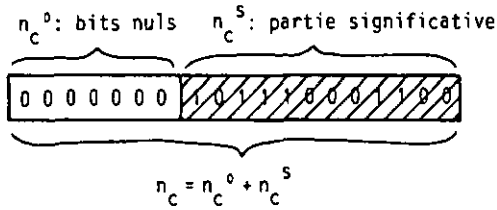


Fig.2.8 : Représentation en virgule fixe d'un coefficient c de longueur de mot n_c dans un filtre à récursion double sélectif.

La réalisation de filtres numériques à récursion double sélectifs, c'est-à-dire ayant un rapport fréquence d'échantillonnage à fréquence de coupure élevé, est particulièrement adaptée à une représentation des coefficients en virgule flottante. La partie de bits nuls n_c^0 est alors importante et la représentation de la figure 2.9 montre une réduction appréciable de la longueur de mot des coefficients relativement à la configuration des coefficients en virgule fixe de la figure 2.8. Un désavantage demeure: un filtre où les coefficients sont en virgule flottante nécessite une mise en oeuvre matérielle plus complexe.

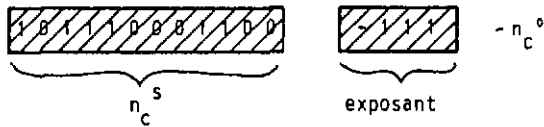


Fig.2.9 : Représentation en virgule flottante d'un coefficient de longueur de mot de mantisse n_c^S .

Un filtre numérique à récursion double de premier ordre de type passe-bas est représenté à la figure 2.10, ainsi que la forme des signaux associés dans les domaines du temps et des fréquences. La figure 2.11 compare les opérations effectuées dans les réalisations à virgule fixe (figure 2.11 a)) et à virgule flottante (figure 2.11 b)) dans un filtre numérique à récursion double sélectif (n_c^0 grand).

Dans les filtres numériques à récursion double illustrés à la figure

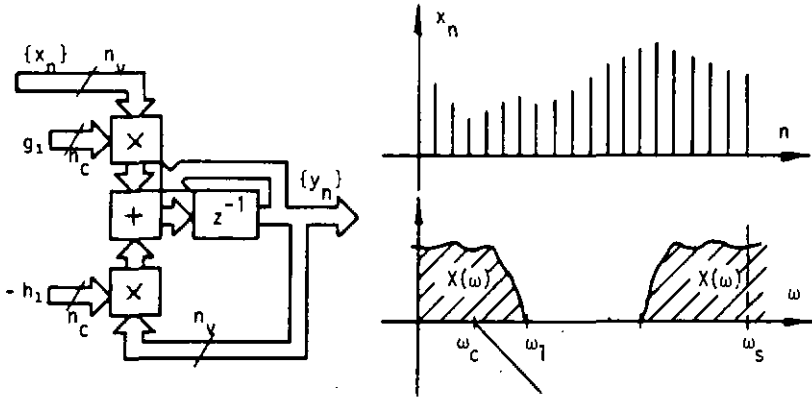
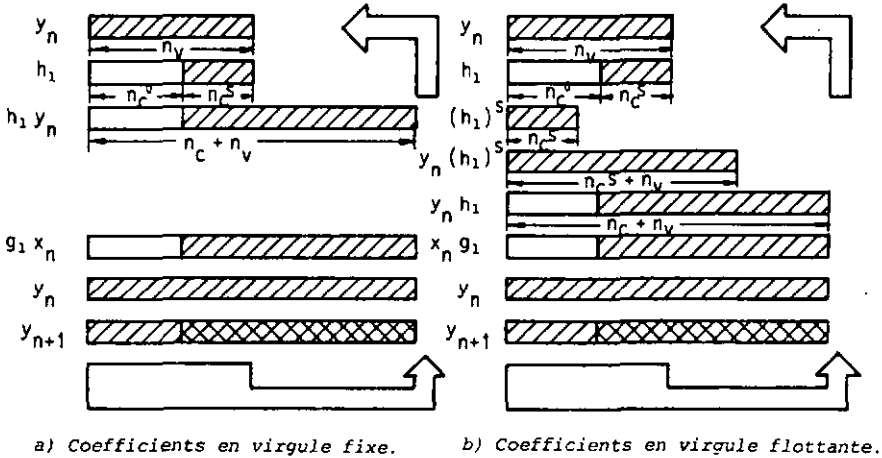


Fig.2.10 : Filtre numérique à récursion double de 1er ordre et forme des signaux associés.



a) Coefficients en virgule fixe.

b) Coefficients en virgule flottante.

Fig.2.11 : Arithmétiques à virgule fixe ou à virgule flottante dans un filtre numérique à récursion double sélectif (n_c^0 grand).

2.10, la longueur de mot n_v des variables doit être supérieure ou égale à la longueur de mot n_c choisie pour les coefficients. La longueur de mot n_c des coefficients est formée par la partie de bits nuls n_c et par la partie significative n_c^s , et nous écrivons:

$$n_v \geq n_c = n_c^0 + n_c^S \quad (2.9)$$

Cette relation se justifie par l'effet perceptible du bit le moins significatif des coefficients sur le bit utile de poids le plus faible du produit. Cette contribution est formée du produit entre le bit le moins significatif du coefficient et le bit le plus significatif de la variable.

Alors qu'une arithmétique à virgule fixe (figure 2.11 a)) demande un multiplieur qui fournit un résultat à $(n_v + n_c)$ bits, la multiplication en technique à virgule flottante dans un filtre sélectif est exécutée sur des mots de longueur plus faible. En effet, la multiplication de chaque variable par le coefficient correspondant nécessite d'être exécutée seulement par la partie significative h_1^S de ce coefficient h_1 de longueur de mot n_c^S donnant un produit de $(n_v + n_c^S)$ bits. Cette opération de multiplication effectuée en virgule flottante plutôt qu'en virgule fixe n'est avantageuse que lorsque le filtre à réaliser est sélectif (n_c^0 grand). Une conversion à un format de type virgule fixe est ensuite indispensable avant l'addition des différents termes dont le résultat est noté par y_{n+1} . Finalement, seulement n_v bits de cette somme sont réutilisés par transfert au multiplieur d'entrée.

Dans ce paragraphe il a été mis en évidence l'équivalence entre le filtre à récursion double et le filtre à arithmétique incrémentale sans réinitialisation des variables d'état, ainsi que la capacité particulière de ces deux cellules à réaliser des filtres sélectifs (grand rapport fréquence d'échantillonnage à fréquence de coupure). Si, comme nous venons de le voir, l'arithmétique à virgule flottante est bien adaptée au filtre numérique à récursion double, le paragraphe qui suit met en évidence *l'arithmétique à virgule flottante particulière* réalisée par le filtre à arithmétique incrémentale sans réinitialisation des variables internes.

2.2. Conditions d'équivalence entre un filtre quasi-continu et un filtre numérique à arithmétique incrémentale.

Examinons maintenant dans quelles circonstances le filtre numérique à arithmétique incrémentale travaille de la même façon que le filtre quasi-continu. Nous définissons tout d'abord le rapport r entre la fréquence d'échantillonnage f_s et la fréquence de coupure f_c , donné par :

$$r = \frac{f_s}{f_c} \tag{2.10}$$

Lorsque ce rapport r augmente, le filtre devient de plus en plus sélectif. Par opposition, nous parlons de filtre non sélectif si ce rapport r reste peu élevé.

Considérons le filtre numérique à arithmétique incrémentale sans réinitialisation des variables internes de la figure 2.12. Il s'agit d'une cellule de premier ordre passe-bas déduite de la structure de deuxième ordre générale (figure 2.5).

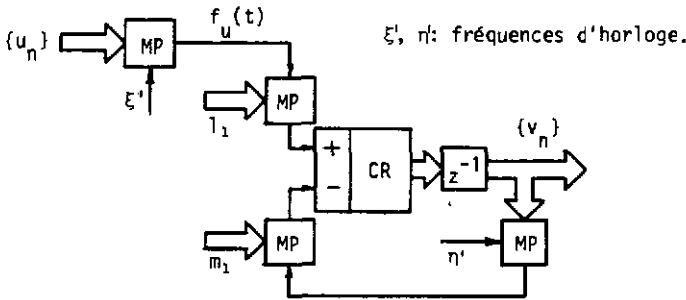


Fig. 2.12 : Filtre numérique à arithmétique incrémentale de 1er ordre de type passe-bas.

Dans ce système, les fréquences d'entrée ξ' et η' des multiplieurs programmables sont déterminées par les relations :

$$\xi' = 2^{n_1} f_s \quad \text{et} \quad \eta' = 2^{n_2} f_s \tag{2.11}$$

ceci afin que la variation la plus petite de la valeur d'entrée du multiplieur soit encore perceptible après la modulation d'impulsions en

densité dans l'espace de temps $T_s = 1/f_s$. Cette variation est ensuite interprétée dans le compteur réversible. La valeur minimale $n_{v\min}$ de la longueur de mot de la variable qui tient compte de la précision avec laquelle les coefficients doivent être définis et du phénomène de quantification des variables sera évaluée par la suite.

Afin que le bit de poids le plus faible (LSB) de la partie significative du coefficient (de longueur n_c^s) agisse encore avec le bit de poids le plus élevé de la variable (de longueur de mot n_v) pour produire une contribution sur le bit le moins significatif du produit, il convient de respecter la relation:

$$n_v \geq n_c^s \quad (2.12)$$

Nous étudions en premier lieu le cas le plus défavorable du point de vue de la quantification des variables d'état. Ce cas est représenté par l'égalité dans l'expression (2.12):

$$n_{v\min} = n_c^s \quad (2.13)$$

La seconde hypothèse ($n_v > n_c^s$), où la quantification des variables est fortement diminuée, est examinée ultérieurement.

La densité locale des pôles d'un filtre numérique n'est pas homogène à l'intérieur du cercle unité dans le plan z , elle est moins dense aux abords de $z=+1$. Pour une fréquence de coupure f_c définie et un rapport r croissant, les pôles se déplacent vers le point $z=+1$, définissant ainsi des problèmes de résolution. Comme nous le verrons dans le chap. 4, afin de pouvoir toujours situer ces pôles dans une zone à densité constante, il suffit d'augmenter le nombre de bits nuls n_c^0 et de maintenir le nombre de bits significatifs n_c^s constant. Pour cette raison, nous considérons par la suite:

$$n_c^s = \text{constante} \quad (2.14)$$

Recherchons la condition sous laquelle, durant une période d'échantillonnage, les variations du compteur réversible ne débordent pas sur la portion du compteur prise en contre-réaction, mis à part les effets cumulatifs des retenues. Cette condition, dite de non-débordement immédiat, indique que le bit le plus significatif modifié dans le compteur sur une période d'échantillonnage est de poids plus faible que le bit le moins

significatif utilisé dans la boucle de contre-réaction.

La figure 2.13 illustre les longueurs de mot respectives des coefficients n_c , des variables réinjectées dans les multiplieurs n_v et des variables au niveau des additionneurs (compteurs réversibles) n_a .

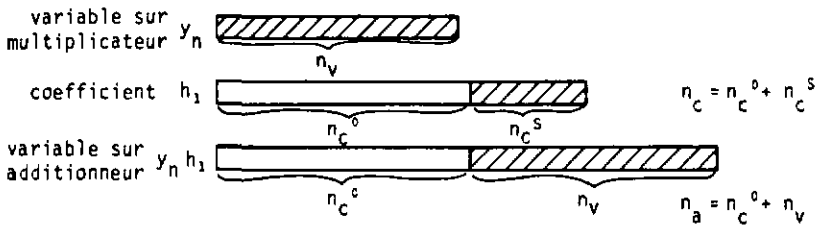


Fig. 2.13 : Représentation des longueurs de mot des variables sur le multiplicateur (n_v), sur l'additionneur (n_a), et de la longueur de mot des coefficients (n_c).

Nous allons montrer que la condition de non-débordement immédiat dépend principalement des relations existantes entre ces longueurs de mot. Les différents cas étudiés dans les prochaines figures représentent l'équivalent numérique de ce qui se passe dans le filtre à arithmétique incrémentale sans réinitialisation des variables.

a) $n_c^0 > n_c^s, n_{v_{\min}} = n_c^s$.

La figure 2.14 illustre les opérations successives qui interviennent dans la cellule du premier ordre de la figure 2.12. Lorsque $n_c^0 > n_c^s, n_c^s$ restant raisonnablement élevé, le filtre est sélectif. En effet, une partie importante de bits nuls n_c^0 ne peut être obtenue dans le coefficient h_1 que si le rapport r entre la fréquence d'échantillonnage et la fréquence de coupure est très élevé.

Nous constatons dans ce cas que le bit le plus significatif de la modification apportée au compteur réversible durant une période d'échantillonnage est de poids plus faible que le bit le moins significatif utilisé dans la boucle de contre-réaction. Le blocage des variables internes est pratiquement inutile et le filtre à arithmétique incrémentale est équivalent à un filtre numérique quasi-continu.

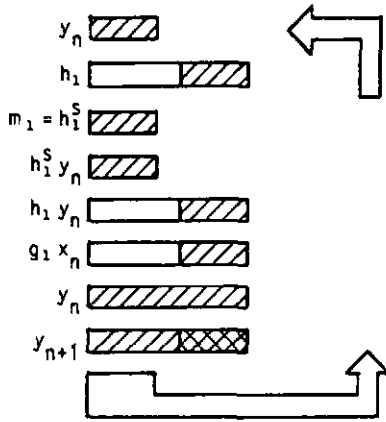


Fig.2.14 : Arithmétique incrémentale avec $n_c^0 > n_c^S$, $n_v = n_c^S$.

La fréquence de travail minimale f_H du filtre, lorsque $n_v = n_c^S = n_{vmin}$, est :

$$f_H = 2^{n_c^S} f_s \quad (2.15)$$

La fréquence de travail des filtres quasi-continus est ainsi décalée favorablement au niveau de celle des filtres numériques classiques avec multiplicateurs de type série-parallèle, ceci à partir de la fréquence de travail maximale des filtres à arithmétique incrémentale sans réinitialisation des variables comme l'indique la figure 2.15.

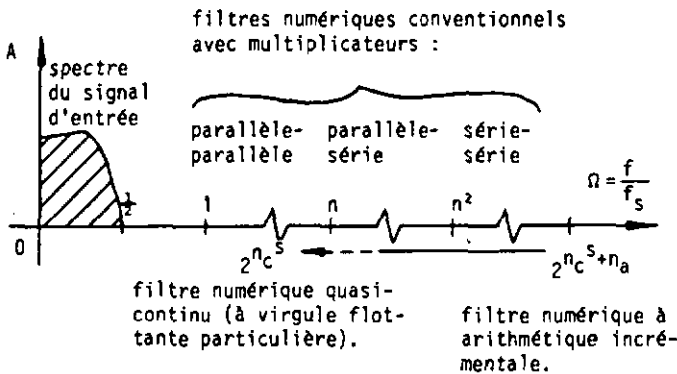


Fig.2.15 : Fréquence de travail maximale des filtres quasi-continus relativement à d'autres techniques de filtres numériques.

Notons que dans le système numérique à récursion double, les additions sont effectuées en double précision (fig. 2.11 b)), alors que l'arithmétique incrémentale ne réalise qu'un équivalent simple précision des additions.

Afin de diminuer l'effet de quantification des variables qui peut être considérable voire inacceptable si n_c^S est trop réduit, nous augmentons la longueur de mot des variables n_v en maintenant constante la longueur de mot de la partie significative des coefficients n_c^S :

$$n_v > n_c^S \quad (2.16)$$

Il reste à préciser la relation d'ordre qui existe entre la longueur de mot de la variable n_v et le nombre de bits nuls du coefficient n_c^0 . Trois possibilités sont distinguées, comme l'indique la figure 2.16: $n_v < n_c^0$, $n_v = n_c^0$ ou encore $n_v > n_c^0$.

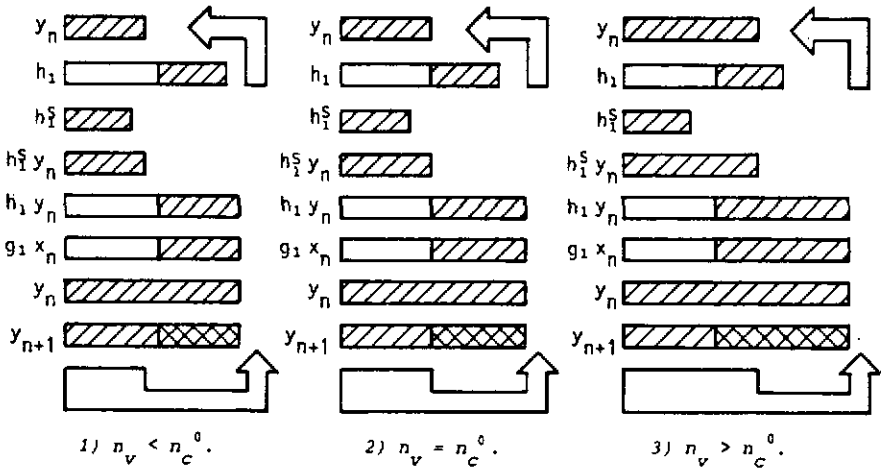


Fig. 2.16 : Arithmétique incrémentale avec $n_v > n_c^S$, $n_c^0 > n_c^S$, et différentes conditions entre n_v et n_c^0 .

$n_v < n_c^0$: la partie de la variable qui change après une période d'échantillonnage ne déborde pas immédiatement sur la partie reprise en contre-réaction.

$n_v = n_c^0$: il s'agit du cas limite qui ne présente juste pas de recouvre-

ment immédiat par les variations de la partie du compteur réversible prise dans la contre-réaction.

$n_v > n_c^0$: une partie de la valeur du compteur réversible qui change durant une période d'échantillonnage déborde immédiatement et recouvre la partie de la variable prise en contre-réaction. Ce débordement n'a cependant pas de conséquences importantes si, n_c^0 étant suffisamment grand, il intervient sur des bits peu significatifs du produit. On peut alors débloquer les variables internes sans modifier les caractéristiques de filtrage, ce recouvrement permettant de réduire le bruit de quantification de la variable. La fréquence de travail minimale f_H du filtre est ici donnée par :

$$f_H = 2^{n_v} f_s \quad (2.17)$$

b) $n_c^0 = n_c^S, n_{v_{\min}} = n_c^S.$

La figure 2.17 présente l'équivalent numérique de ce qui se passe dans le filtre à arithmétique incrémentale de premier ordre de la figure 2.12.

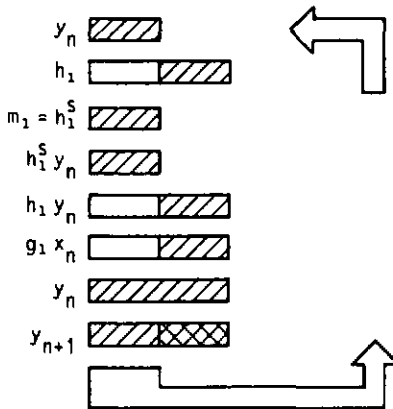


Fig.2.17 : Arithmétique incrémentale avec $n_c^0 = n_c^S = n_v.$

En conclusion et si n_c^S est suffisamment élevé, le filtre est toujours considéré sélectif pour $n_c^0 = n_c^S$. En effet, le rapport $r = f_s/f_c$ reste

suffisamment grand grâce à la partie de bits nuls du coefficient notée n_c^0 . La fraction du compteur réversible qui évolue à chaque période d'échantillonnage ne concerne pas la partie de la variable utilisée dans la boucle de contre-réaction. Le blocage des variables internes est toujours inutile (cas limite) et le filtre à arithmétique incrémentale est équivalent à un filtre quasi-continu. A nouveau, les effets de quantification des variables sont réduits par une augmentation de la longueur de mot des variables n_v , avec n_c^S constant et selon l'équation (2.16). Le schéma de l'arithmétique qui en découle est illustré à la figure 2.18.

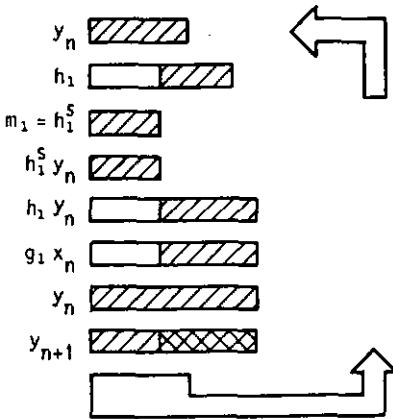


Fig. 2.18 : Arithmétique incrémentale avec $n_c^0 = n_c^S$, $n_v > n_c^S$.

On observe un débordement de la partie qui varie dans le compteur sur la partie prise en contre-réaction. Lorsque n_c^0 est assez grand, ce changement n'agit donc que sur les bits de poids le plus faible, on modifie donc le bruit de quantification de la variable sans changer les caractéristiques de filtrage.

c) $n_c^0 < n_c^S$, $n_{v_{\min}} = n_c^S$.

La représentation de l'équivalent numérique du filtre de premier ordre de la figure 2.12 est donné à la figure 2.19.

Le recouvrement des deux parties, l'une représentant les variations et l'autre la contre-réaction de la variable, intervient au niveau des bits

de poids les plus fort. On ne peut donc pas débloquent les variables sans entraîner un débordement significatif dans cette situation. Le rapport $r = f_s/f_c$ n'est plus assez élevé pour rendre le nombre de bits nuls n_c^0 suffisamment grand.

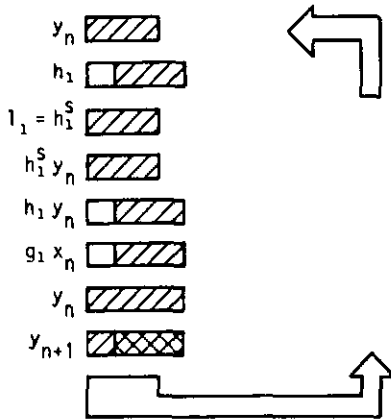


Fig.2.19 : Arithmétique incrémentale avec $n_c^0 < n_c^S$, $n_v = n_c^S$.

En conclusion, le rapport r entre la fréquence d'échantillonnage et la fréquence de coupure remplit un rôle important pour la détermination du nombre de bits nuls n_c^0 des coefficients et, par conséquent, également en ce qui concerne la condition de non-débordement. Ainsi, il existe une valeur critique r_c de ce rapport pour laquelle il n'y a juste pas de recouvrement. L'ordre de grandeur de ce rapport critique r_c est déduit de la condition de non-débordement immédiat:

$$n_c^0 \geq n_c^S \quad \text{d'où :} \quad r = \frac{f_s}{f_c} \geq r_c \quad (2.18)$$

Pour le cas critique où l'on évite juste un recouvrement de la partie prise en contre-réaction par la partie variable du compteur durant une période d'échantillonnage:

$$n_c^0 = n_c^S \quad \text{d'où :} \quad r = r_c \quad (2.19)$$

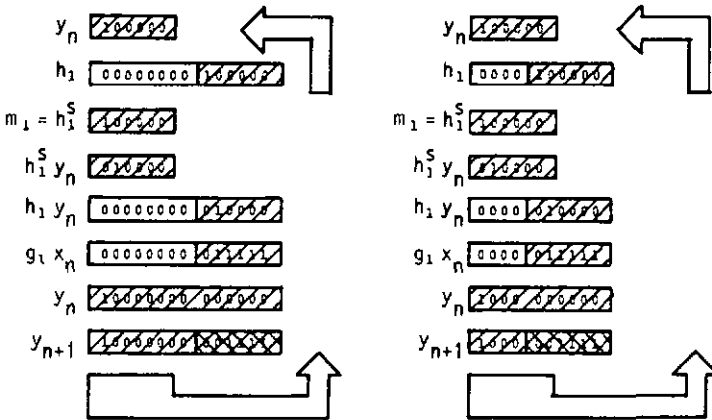
Dans la remarque située à la fin du présent paragraphe, la valeur critique de ce rapport r_c est estimée pour un système à arithmétique incrémentale de premier ordre passe-bas (figure 2.12).

Deux exemples quantitatifs, apparaissant à la figure 2.20, illustrent la condition de non-débordement (2.18). Les paramètres suivants ont été retenus:

$$f_c = 125 \text{ Hz}$$

$$1) f_s = 402 \text{ kHz} ; r = r_c = 3217, n_c^0 > n_c^S = n_v \text{ (cas a)}.$$

$$2) f_s = 50,3 \text{ kHz} ; r = 402, n_c^0 < n_c^S = n_v \text{ (cas c)}.$$



$$1) g_1 = h_1 = 0,001953731$$

$$2) g_1 = h_1 = 0,015629851$$

$$r = r_c = 3217; n_c^0 > n_c^S; n_v = n_c^S. \quad r = 402 < r_c; n_c^0 < n_c^S; n_v = n_c^S.$$

Fig. 2.20 : Exemples quantitatifs de l'équivalent arithmétique de filtres passe-bas de 1er ordre selon la structure de la figure 2.12.

Le filtre numérique quasi-continu réalise donc, avec une arithmétique incrémentale particulière, l'équivalent d'un filtre numérique à récursion double. Le système quasi-continu utilise une représentation particulière des coefficients à virgule flottante de type simple précision, par opposition au format double précision du filtre numérique à récursion double.

Analysons différentes circonstances du déblocage des variables internes du filtre à arithmétique incrémentale qui permettent de retrouver le filtre numérique quasi-continu. Simultanément, nous évaluons la fréquence d'horloge minimale f_H du système, à partir de l'équation (2.15).

A) Respect de la condition de non-débordement au cours du déblocage.

Choisissons un système qui présente le rapport critique r_c entre la fréquence d'échantillonnage f_s minimale, fixée par la fréquence maximum contenue dans le spectre du signal à filtrer, et la fréquence de coupure donnée f_c . Recherchons maintenant les conditions d'évolution de la fréquence de travail f_H maximale du système lorsque la fréquence de coupure s'écarte de la valeur du cas critique $f_c|_{r_c}$. Deux situations sont distinguées à la figure 2.21.

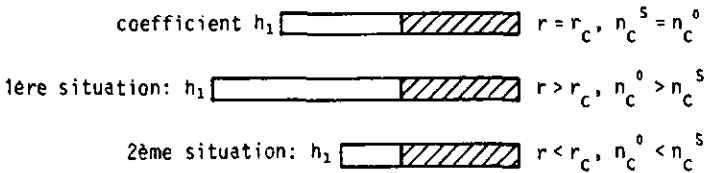


Fig. 2.21 : Parties de bits nuls et significative n_c^0 et n_c^S d'un coefficient dans un filtre numérique à arithmétique incrémentale : 1ère situation - cas très sélectif, 2ème situation - cas peu sélectif.

1ère situation - filtre très sélectif :

La fréquence de coupure f_c est ici inférieure à la fréquence de coupure correspondante au rapport critique r_c , ce rapport r est donc supérieur à r_c . La fréquence de travail maximale du système demeure constante, car la longueur de mot significative n_c^S ne change pas. Il n'y a pas de débordement de la partie variable du compteur réversible sur la partie prise en contre-réaction durant une période d'échantillonnage. Il est donc possible d'augmenter la longueur de mot des variables n_v jusqu'à la valeur n_c^0 . Après cette limite, une augmentation supplémentaire de cette longueur de mot n_v implique un débordement comme défini auparavant. Ce dernier est significatif lorsque le nombre de bits nuls n_c^0 est insuffisant et il n'est pas significatif si ce nombre est suffisamment élevé. En résumé:

$$f_c < f_c|_{r_c} \rightarrow r > r_c, n_c^0 \uparrow, n_c^S = \text{cte} \rightarrow f_H = 2^{n_c^S} f_s = \text{cte} \quad (2.20)$$

2ème situation - filtre peu sélectif :

Si la fréquence de coupure f_c devient supérieure à celle critique $f_c|_{r_c}$, alors le rapport r est inférieur à r_c . Nous constatons un débordement des variations du compteur sur la partie reprise dans le système. Dans ces conditions, un déblocage des variables internes du système à arithmétique

incrémentale produit une variation sensible des caractéristiques de filtrage. Pour éviter ce phénomène, il convient d'augmenter la fréquence d'échantillonnage f_s minimale afin de respecter à nouveau le rapport critique r_c . Cette augmentation doit amener le rétablissement du nombre de bits nuls n_c^0 jusqu'à la valeur du nombre de bits significatifs n_c^s . Notons également une croissance de la fréquence de travail maximale f_H , ce qui s'écrit simplement:

$$f_c > f_c |_{r_c} + (f_s + |_{r=r_c = cte}) + f_H = 2^n c^s f_s + \quad (2.21)$$

Les deux relations (2.19) et (2.20) donnent un moyen d'évaluation de la fréquence de travail maximale f_H d'un système à arithmétique incrémentale en fonction de la fréquence de coupure f_c ; le graphe de la figure 2.22 résume ces deux situations.

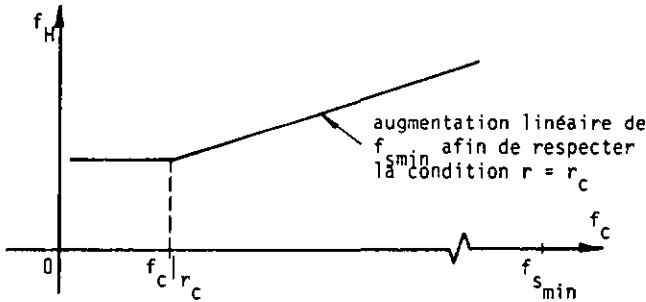


Fig. 2.22 : Fréquence de travail f_H relativement à la fréquence de coupure d'un système à arithmétique incrémentale.

B) Conditions de non-débordement lors du déblocage pas respectées.

Lorsque le rapport r est inférieur à la valeur critique r_c (filtre peu sélectif), la partie du compteur réversible qui change durant une période d'échantillonnage concerne les bits de poids les plus forts de la variable prise dans la contre-réaction. Le déblocage des variables internes du système à arithmétique incrémentale peut alors produire une variation sensible des caractéristiques de filtrage. Ce phénomène est de même nature que celui qui conduit aux variations des caractéristiques d'un système

analogique à variables internes bloquées dont on enlève le blocage [34]. La figure 2.23 schématise l'action du déblocage des variables dans un tel système, qui amène une modification des caractéristiques de filtrage.

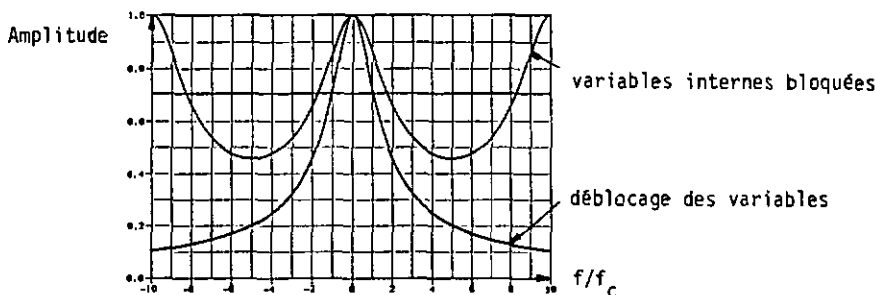


Fig.2.23 : Modification des caractéristiques de filtrage d'un passe-bas lors du déblocage des variables internes d'un filtre analogique à variables internes bloquées.

La synthèse d'un filtre de caractéristiques fixées peut s'effectuer avec une fréquence de coupure f_c corrigée par un facteur calculable (f_c plus grande). Cette fréquence de coupure f_c est déplacée en f'_c lors du déblocage des variables internes. Ce processus, employé pour le filtre quasi-continu obtenu par déblocage du système à arithmétique à incrémentale, permet de conclure pour la fréquence de travail f_H de ces systèmes:

$$f_s = \text{cte} ; (f_c + |f'_c \text{ fixé}) \rightarrow n_c^0 \uparrow \text{ et } n_c^S = \text{cte} \rightarrow f_H = \text{cte} \quad (2.22)$$

Pour résumer, lors de la synthèse d'un filtre quasi-continu, si la condition de non-débordement n'est pas respectée, deux méthodes s'appliquent:

- augmenter la fréquence d'échantillonnage f_s afin de respecter à nouveau la condition $n_c^0 = n_c^S$ (ou encore $r = r_c$),
- ou effectuer la synthèse du filtre avec une fréquence de coupure f_c plus faible, modifiée en f'_c par déblocage des variables internes du filtre à arithmétique incrémentale.

Condition de non-débordement pour la réalisation de filtre passe-bas de premier ordre (figure 2.12).

Déterminons la valeur critique r_c du rapport entre fréquence d'échantillonnage f_s et fréquence de coupure f_c dans le circuit proposé à la

figure 2.12. Conformément à (2.44) et (2.8), les coefficients e_1 et f_1 du filtre numérique à récursion double passe-bas de premier ordre correspondant sont donnés par:

$$g_1 = h_1 = b_1 T_s = \frac{2 \pi f_c}{f_s} = \frac{2 \pi}{r} \quad (2.23)$$

où b_1 est le coefficient du filtre analogique correspondant ($b_1 = 2 \pi f_c$). Le coefficient h_1 peut être décomposé en deux parties: la partie significative du coefficient (notée h_1^S et égale à la partie introduite sur le filtre à arithmétique incrémentale l_1) et la partie de bits nuls. Il vient donc:

$$h_1 = h_1^S \cdot 2^{-n_c^0} \quad (2.24)$$

Par la condition de non-débordement immédiat et dans le cas le plus critique (selon l'équation (2.18)):

$$h_1 = h_1^S \cdot 2^{-n_c^S} \quad (2.25)$$

Mais h_1^S est borné à l'unité par valeurs inférieures:

$$0,5 \leq h_1^S < 1 \quad (2.26)$$

Les relations (2.23), (2.25) et (2.26) fournissent donc l'inégalité:

$$r > 2 \pi 2^{n_c^S} \quad (2.27)$$

La valeur critique du rapport r_c qui ne provoque pas de débordement s'exprime donc sous la forme:

$$2 \pi 2^{n_c^S} < r \leq 2 \pi 2^{n_c^S + 1} \quad (2.28)$$

Si l'on considère par exemple $n_c^S = 8$ bits significatifs du coefficient comme suffisant en qualité pour la trame définie dans le plan complexe z , alors le rapport critique r_c entre la fréquence d'échantillonnage et la fréquence de coupure vaut:

$$n_c^S = 8 \text{ bits } (= n_c^0) + r_c = 3217 \quad (2.29)$$

Remarque: La comparaison des fréquences maximales de fonctionnement des

filtres numériques quasi-continus calculées dans le premier chapitre (dans le cas d'un filtre passe-haut de premier ordre) et dans le chapitre 2 (cas du filtre à arithmétique incrémentale de premier ordre passe-bas après le déblocage des variables internes) aboutit à un ordre de grandeur identique dans les deux méthodes dont on a recours. En effet, ces fréquences d'horloge maximale f_H s'écrivent:

- pour le filtre passe-bas de premier ordre du chapitre 1:

$$\Delta_1 = 2^{n_a} \delta_1 = 2\pi 2^{n_a} f_c \quad (2.30)$$

n_a : longueur de mot au niveau de l'additionneur (compteur réversible).

$$n_a = n_c^0 + n_v \quad (2.31)$$

ce qui implique la relation:

$$\Delta_1 = 2\pi 2^{n_c^0} 2^{n_v} f_c \quad (2.32)$$

- pour le filtre à arithmétique incrémentale passe-bas de premier ordre du chapitre 2:

$$f_H = 2^{n_c^s} f_s \quad (2.33)$$

L'identification des fréquences de travail maximales (2.32) et (2.33) fournit l'équation suivante:

$$\Delta_1 = f_H \quad \rightarrow \quad 2\pi 2^{n_c^0} 2^{n_v} f_c = 2^{n_c^s} f_s \quad (2.34)$$

Il reste à introduire la condition (2.13) entre les longueurs minimales de mot des variables n_v et de la partie significative des coefficients n_c^s , ainsi que le rapport $r = f_s/f_c$, et il vient l'égalité:

$$r = 2\pi 2^{n_c^0} \quad (2.35)$$

Cette relation est en accord avec la relation (2.27) déduite précédemment. Les deux fréquences de travail maximales calculées sont du même ordre de grandeur.

2.3. Simulation d'un filtre analogique par un filtre numérique (2ème ordre, signal de synthèse saut unité), rappel de résultats.

Le problème de la simulation d'un filtre analogique par un filtre numérique n'a pas de solution générale exacte. Dans certains cas particuliers, lorsque le signal d'entrée du filtre est une superposition de signaux avec transformée de Laplace rationnelle (par exemple une fonction en escalier), il existe un filtre numérique qui donne en sortie exactement les valeurs échantillonnées de la réponse du filtre analogique, conformément à [28]. Le principe de la simulation d'un filtre analogique par un filtre numérique est rappelé à la figure 2.24.

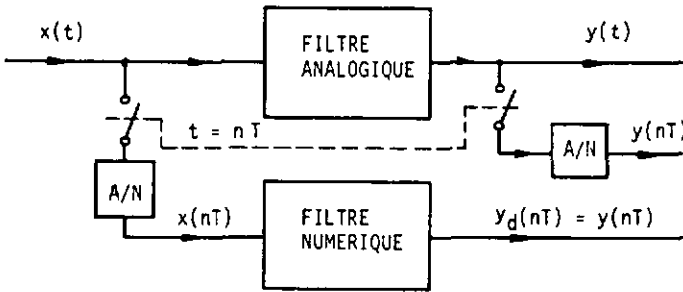


Fig.2.24: Principe de la simulation d'un filtre analogique par un filtre numérique.

Dans ce paragraphe, nous rappelons des résultats obtenus pour une structure de deuxième ordre dont le signal de synthèse de l'entrée choisi est le saut unité, de transformée de Laplace rationnelle. Par [28] et [29], nous déduisons qu'une solution numérique à ce problème peut être trouvée; de plus, la référence [30] fournit la solution analytique particulière recherchée.

Considérons la fonction de transfert $H(s)$ d'un filtre analogique idéal de deuxième ordre:

$$H(s) = \frac{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}{s^2 + b_1 s + b_2} \quad (2.36)$$

avec le signal saut indiciel qui sert pour la synthèse du filtre numérique (= signal de synthèse):

$$X(s) = \frac{1}{s}, \quad \text{car} \begin{cases} x(t) = 0 & , t < 0 \\ x(t) = 1 & , t \geq 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

Il reste à effectuer l'inversion numérique de la transformée de Laplace de la réponse $Y(s)$:

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}{s^2 + b_1 s + b_2 s} \quad (2.38)$$

La fonction de transfert du filtre numérique de simulation qui donne le même résultat que le signal en escalier introduit dans le filtre analogique est donnée, selon [29] et [30], par:

$$H(z) = \frac{c_0 z^2 + c_1 z + c_2}{z^2 + d_1 z + d_2} \quad (2.39)$$

Les coefficients c_i et d_i valent respectivement (voir aussi en annexe B):

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \\ c_1 &= -a_0 + \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} \{ a_0 [\lambda_2 e^{\lambda_3 T} - \lambda_3 e^{\lambda_2 T}] + a_1 [e^{\lambda_2 T} - e^{\lambda_3 T}] + \\ &\quad + a_2 [\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3 \lambda_2} + \frac{e^{\lambda_3 T}}{\lambda_3} - \frac{e^{\lambda_2 T}}{\lambda_2}] \} \\ c_2 &= \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} \{ a_0 [\lambda_3 e^{\lambda_2 T} - \lambda_2 e^{\lambda_3 T}] + a_1 [e^{\lambda_2 T} - e^{\lambda_3 T}] + \\ &\quad + a_2 [\frac{e^{\lambda_3 T}}{\lambda_3} - \frac{e^{\lambda_2 T}}{\lambda_2} + \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3 \lambda_2} e^{(\lambda_2 + \lambda_3) T}] \} \\ d_1 &= - (e^{\lambda_2 T} + e^{\lambda_3 T}) \\ d_2 &= e^{(\lambda_2 + \lambda_3) T} \end{aligned} \quad (2.40)$$

où λ_2 et λ_3 sont les pôles de la fonction de transfert $G(s)$ dans le domaine de Laplace:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -\frac{b_1}{2} + \sqrt{\frac{b_1^2}{4} - b_2} \\ \lambda_3 &= -\frac{b_1}{2} - \sqrt{\frac{b_1^2}{4} - b_2} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Ces pôles satisfont les relations suivantes, fournies par le théorème de Viète:

$$\lambda_2 + \lambda_3 = -b_1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 \lambda_3 = b_2 \quad (2.42)$$

Ces résultats et les transformations inverses (passage d'un filtre numérique aux coefficients du filtre analogique) apportent donc une solution analytique au problème de simulation de filtres analogiques par des systèmes numériques, ou au problème réciproque. La seule restriction concerne la forme du signal d'entrée du filtre analogique: ce signal doit être formé de la superposition pondérée de signaux unité décalés dans le temps, le signal unité correspondant au saut indiciel (2.37) est exposé à la figure 2.25.

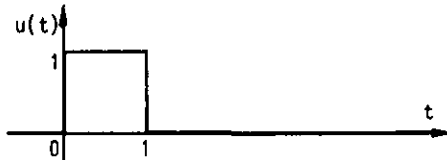


Fig.2.25 : Signal unité correspondant au signal de synthèse saut indiciel.

Lorsque la fréquence d'échantillonnage du filtre numérique de simulation est beaucoup plus importante que la fréquence de coupure de celui-ci, les pôles sont très rapprochés du point $z = +1$ du plan complexe z , et nous admettons l'approximation:

$$e^{\lambda_2 T} = 1 + \lambda_2 T \quad ; \quad e^{\lambda_3 T} = 1 + \lambda_3 T \quad (2.43)$$

Notons que λ_2 et λ_3 sont des grandeurs complexes. Par l'introduction de cette approximation dans (2.39) les coefficients du filtre numérique de simulation deviennent, relativement au filtre analogique:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \\ c_1 &= -2 a_0 + a_1 T \quad ; \quad d_1 = -2 + b_1 T \\ c_2 &= a_0 - a_1 T + a_2 T^2 \quad ; \quad d_2 = 1 - b_1 T + b_2 T^2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

La réalisation d'un filtre numérique de structure directe canonique et l'emplacement des coefficients c_i et d_i dans cette structure est présentée à la figure 2.1.

2.4. Comparaison des différents types de filtrage.

La figure 2.26 compare des structures de filtrage de deuxième ordre, répertoriées selon trois catégories principales de traitement des signaux, soit les traitements analogiques, numériques et numériques quasi-continus.

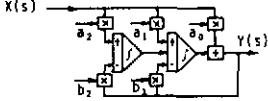
Les systèmes analogiques sont caractérisés par des opérations de multiplication et d'addition des variables d'état analogiques qui relèvent de processus analogiques. Dans le filtre conventionnel de structure ordinateur analogique, ces variables d'état demeurent libres, par opposition au filtre analogique dit à variables internes bloquées. Ce dernier type de filtre possède des variables échantillonnées et maintenues constantes pendant une période d'échantillonnage T par un extrapolateur d'ordre zéro. Le déblocage des variables internes produit un décalage des caractéristiques de filtrage dans le domaine des fréquences [34].

En ce qui concerne la technique des filtres numériques, les variables numériques, de longueur de mot finie (quantification des variables) et échantillonnées dans le temps, font l'objet de multiplications par des coefficients de longueur finie (quantification des coefficients) et sont mémorisées dans des éléments à retard. Deux topologies de filtre numérique sont étudiées: la structure directe canonique et la cellule à récursion double. Une transformation simple des coefficients permet de passer d'une topologie à la seconde.

Par les méthodes de simulation d'un filtre analogique par un filtre numérique avec un signal de synthèse saut unité [28-30], des relations analytiques sont établies entre les coefficients du filtre numérique et ceux du filtre analogique. Ces équations sont simplifiées et exprimées à la figure 2.26 lorsque les pôles de la fonction de transfert sont très proches du point $z = +1$ du plan complexe z , c'est-à-dire lorsque le rapport fréquence d'échantillonnage à fréquence de coupure du filtre est suffisamment élevé, par exemple supérieur à 100. Il convient alors de vérifier que les pôles calculés par ces équations ne rendent pas le circuit instable (pôles à l'extérieur du cercle de rayon unité du plan complexe z). Le filtre numérique à récursion double est une réalisation topologique diffé-

TRAITEMENT ANALOGIQUE

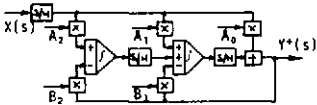
Filtre analogique :



Débloccage des variables internes.

$$H(s) = \frac{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}{s^2 + b_1 s + b_2}$$

Filtre analogique à variables internes bloquées :

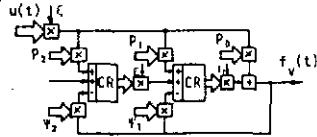


$$H(z) = \frac{A_0 z^2 + (A_1 T - 2A_0) z + A_0 - A_1 T + A_2 T^2}{z^2 + (B_1 T - 2) z + 1 - B_1 T + B_2 T^2}$$

simulation d'un filtre analogique par un filtre numérique.

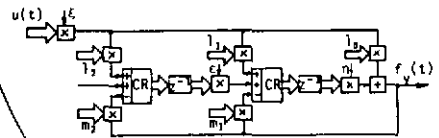
TRAITEMENT QUASI-CONTINU

Filtre quasi-continu :



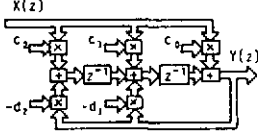
condition d'équivalence

Filtre numérique à arithmétique incrémentale :



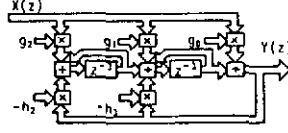
$$H(z) = \frac{1_0 z^2 + (1_1 T - 21_0) z + 1_0 - 1_1 T + 1_2 c_{11} T^2}{z^2 + (m_1 T - 2) z + 1 - m_1 T + m_2 c_{11} T^2}$$

Filtre numérique de simulation :



$$H(z) = \frac{c_0 z^2 + c_1 z + c_2}{z^2 + d_1 z + d_2}$$

Filtre numérique à récursion double :



$$H(z) = \frac{g_0 z^2 + (g_1 - 2g_0) z + g_0 - g_1 + g_2}{z^2 + (h_1 - 2) z + 1 - h_1 + h_2}$$

Topologie

TRAITEMENT NUMERIQUE

approximation : $c_0 = a_0$
 $c_1 = a_1 T - 2a_0$
 $c_2 = a_0 - a_1 T + a_2 T^2$
 $d_1 = b_1 T - 2$
 $d_2 = 1 - b_1 T + b_2 T^2$

par topologie : $g_0 = c_0$
 $g_1 = 2c_0 + c_1$
 $g_2 = c_0 + c_1 + c_2$
 $h_1 = 2 + d_1$
 $h_2 = 1 + d_1 + d_2$

Fig.2.26 : Différentes catégories de filtrage classées suivant le traitement de l'information : analogique, numérique et numérique quasi-continu. Relations entre ces filtres.

rente de la structure canonique et est avantageuse lorsque les pôles de la fonction de transfert sont très proches du point $z = +1$ du plan complexe z . Les coefficients de cette cellule dépendent de la fréquence d'échantillonnage f_s et si celle-ci est élevée, les coefficients tendent vers zéro. Cette forme est avantageuse dans une arithmétique à virgule flottante plutôt qu'en virgule fixe.

Dans la catégorie des filtres numériques à traitement quasi-continu des signaux, les opérations de multiplication et d'intégration numériques des variables sont effectuées à l'aide d'éléments transformant l'information en amplitude (information de type "parallèle") en densité d'impulsions temporelle (information de type "sérielle"). Ces impulsions modifient l'état interne des compteurs réversibles qui redonnent à l'information une nature "parallèle". Comme pour le traitement analogique, les variables internes des systèmes à traitement quasi-continu peuvent être libres ou bloquées. Lorsqu'elles sont bloquées, le filtre numérique est dit à arithmétique incrémentale et si ces variables sont libres, nous définissons le terme de filtre numérique quasi-continu.

En partant du filtre numérique de structure directe canonique, il est possible de déduire le filtre numérique quasi-continu. Dans ce chapitre, nous avons montré que le filtre à arithmétique incrémentale (variables internes bloquées) possède une arithmétique à virgule flottante proche de celle qui apparaît dans le filtre numérique à récursion double. Cette arithmétique est de type simple précision dans le filtre à arithmétique incrémentale alors qu'elle est de type double précision pour la cellule à récursion double. Dans les circonstances énumérées dans les paragraphes précédents, les systèmes à arithmétique incrémentale et quasi-continu travaillent de manière similaire. Le filtre quasi-continu s'obtient par déblocage des variables internes de la structure à arithmétique incrémentale et possède les propriétés suivantes: arithmétique à virgule flottante particulière et fréquence de fonctionnement maximale limitée.

3. ETUDE DU COMPORTEMENT REEL DES FILTRES NUMERIQUES QUASI-CONTINUS.

Dans les filtres numériques quasi-continus, les signaux numériques sont transformés par des multiplicateurs binaires à taux programmables en des signaux binaires modulés en fréquence avant d'être introduits dans des compteurs réversibles qui somment ces impulsions. L'information est de ce fait représentée par cette modulation d'impulsions en densité d'une façon quasi-continue.

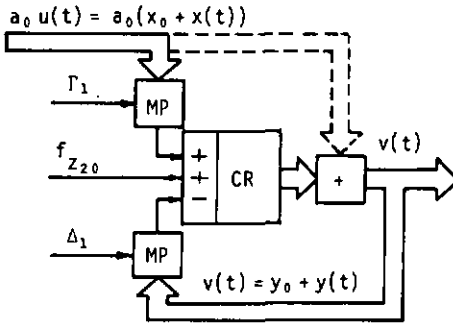
Au deuxième chapitre, la comparaison des filtres quasi-continus avec les filtres numériques conventionnels montre que, premièrement, la structure quasi-continue réalise un filtre numérique à récursion double proche de la forme classique, et que, deuxièmement, son arithmétique possède une représentation des coefficients à virgule flottante particulière.

L'étude générale des filtres numériques quasi-continus sera entreprise dans ce chapitre avec un élément de second degré. Afin de décrire complètement cette structure de filtrage, le modèle paramétrique décrivant une cellule de base en boucle ouverte sera élaboré. Dans cette unité de base, nous aurons deux multiplicateurs programmables et un compteur-réversible. La forme à boucle fermée de la cellule de base réalisera des filtres récurrents qui peuvent ensuite être analysés par une simulation sur ordinateur.

Un procédé analytique, basé sur l'interpolation et la linéarisation des relations paramétriques, fournira des approximations linéaires de type analogique et numérique. Ces approches permettront l'investigation des effets non-linéaires dus au phénomène de modulation d'impulsions en densité des multiplicateurs à taux programmables et à l'intégration numérique produite par les compteurs réversibles. Le premier terme perturbateur qui sera mis en évidence dépend de la longueur de mot des variables et des valeurs des fréquences de référence.

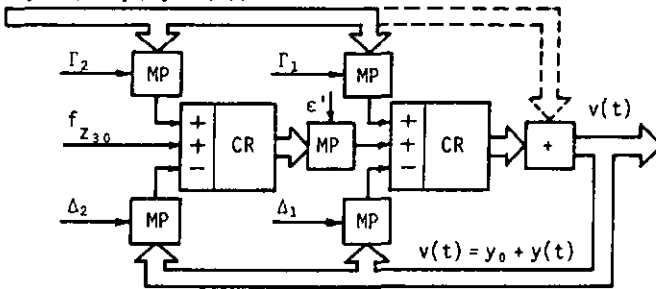
3.1. Equations paramétriques des filtres numériques quasi-continus.

Considérons deux systèmes numériques quasi-continus, l'un de premier ordre et l'autre de deuxième degré, dont les variables d'entrée, de sortie et d'état apparaissent sous forme numérique quantifiée alors que les coefficients sont introduits à l'aide de fréquences. La figure 3.1 illustre ces deux structures, dans lesquelles est incluse la cellule élémentaire de la figure 3.2.



a) Structure générale de premier ordre.

$$a_0 u(t) = a_0 (x_0 + x(t))$$



b) Structure générale de deuxième ordre.

Fig.3.1 : Filtres numériques quasi-continus de 1er et de 2ème ordre.

Nous allons établir les équations de fonctionnement de la cellule de base de la figure 3.2, composée d'un compteur réversible et précédée de deux multiplicateurs à taux programmables. Ces relations dépendent des signaux numériques d'entrée $u(t)$ et $w(t)$ considérés ici continus dans le temps et en amplitude (non quantifiés), ainsi que des fréquences de

référence f_{01} et f_{02} . La variable de sortie $v(t)$ est quantifiée en amplitude et ses variations sont perçues de manière continue dans le domaine du temps. Cette quantification provient du compteur réversible caractérisé par une longueur de mot finie. Cette valeur numérique augmente d'une unité chaque fois que l'entrée de comptage en avant (+) reçoit une impulsion, et diminue d'une unité lorsque l'entrée de comptage en arrière (-) reçoit une impulsion.

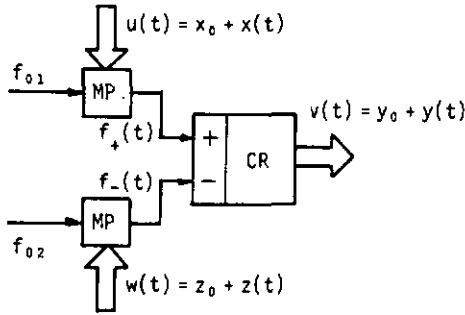
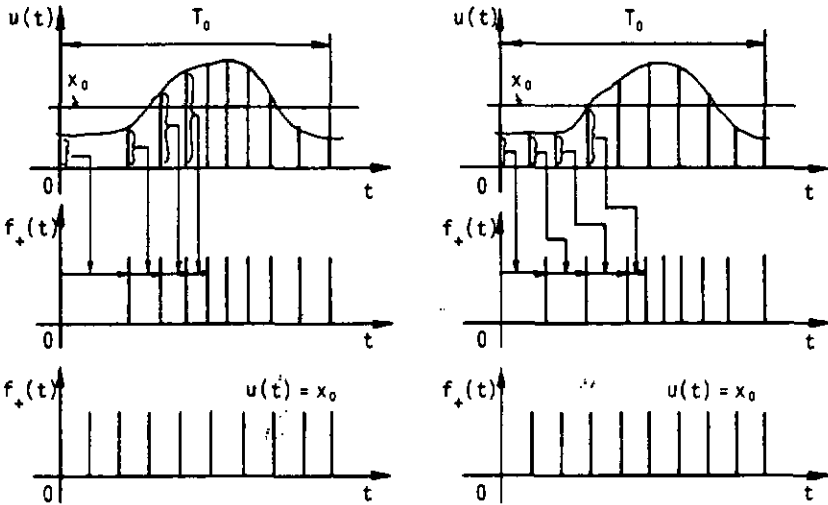


Fig. 3.2 : Cellule élémentaire composée d'un compteur réversible et précédée de multiplicateurs binaires à taux programmables.

Afin de permettre la description analytique de la cellule de la figure 3.2, le modèle de fonctionnement suivant des multiplicateurs programmables est adopté: le signal d'entrée considéré continu du multiplicateur est échantillonné toutes les fois qu'une impulsion est produite en sortie; la période entre deux impulsions est inversement proportionnelle à l'amplitude de l'échantillon. L'amplitude de l'entrée du multiplicateur programmable est transformée en une séquence d'impulsions sommées dans le compteur réversible qui suit. Ce modèle de fonctionnement du multiplicateur programmable est illustré à la figure 3.3 a), alors que la figure 3.3 b) présente un autre modèle de fonctionnement de multiplicateur dans lequel l'échantillonnage du signal d'entrée s'effectue à une fréquence constante.

Lorsque le signal d'entrée $x(t)$ du multiplicateur est périodique et de période T_0 et sa valeur moyenne égale à la valeur d'équilibre x_0 , le signal recueilli à la sortie de la cellule doit être égal à l'intégrale de la valeur d'équilibre notée x_0 . Dans un tel cas, le modèle discret de fonc-

tionnement de la figure 3.3 a) avec échantillonnage irrégulier produit un nombre d'impulsions n identique pendant la période T_0 par rapport au cas où le signal d'entrée est constant et égal à la valeur d'équilibre $u(t) = x_0$. La démonstration de cette affirmation est donnée dans l'annexe A. Notons que ce résultat n'est plus vérifié lorsque l'échantillonnage du signal d'entrée $u(t)$ est régulier. Ces considérations fixent le choix du modèle de fonctionnement du multiplicateur programmable utilisé. Il s'agit du modèle avec un échantillonnage du signal d'entrée irrégulier (fig.3.3 a)).



a) Echantillonnage irrégulier du signal d'entrée (lors de chaque impulsion produite). b) Echantillonnage régulier du signal d'entrée $u(t)$.

Fig.3.3 : Modèles de fonctionnement du multiplicateur programmable.

Ce modèle de représentation des multiplicateurs binaires à taux programmables et des compteurs réversibles est utilisé dans les équations paramétriques de la cellule élémentaire de la figure 3.2. La forme des signaux de la figure 3.4 est un exemple où $u(t)$ est sinusoïdal et $w(t)$ constant; les signaux modulés en densité d'impulsions sont appelés $f_+(t)$ et $f_-(t)$ et les signaux partiels fictifs de sortie dénommés $v_+(t)$ et $v_-(t)$. Ces derniers constituent les contributions séparées des multiplicateurs après

sommation sur le compteur avant-arrière. Le signal de sortie $v(t)$ est simplement la somme des signaux fictifs $v_+(t)$ et $v_-(t)$, l'un étant strictement croissant et le second décroissant:

$$v(t) = v_+(t) + v_-(t) \quad (3.1)$$

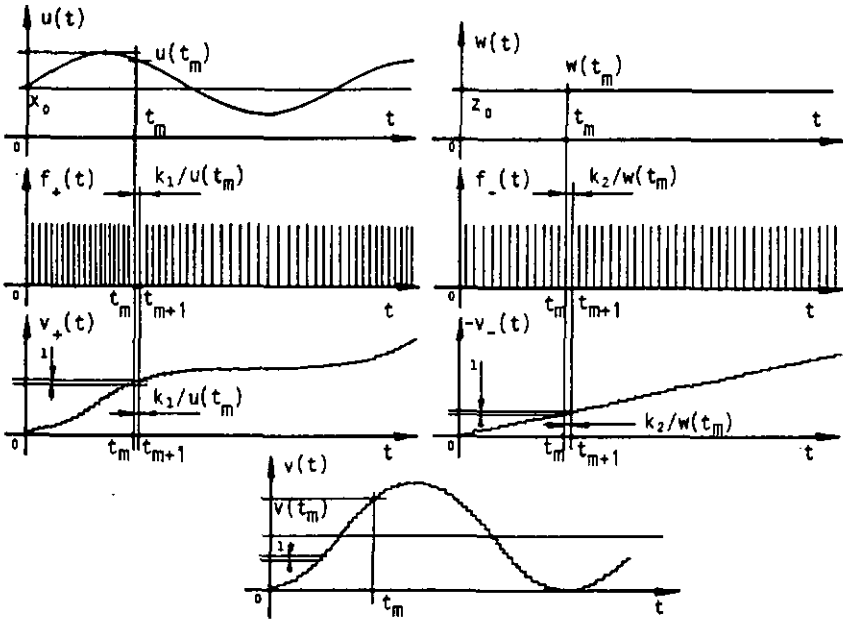


Fig.3.4 : Porme des signaux dans l'élément de base de la figure 3.2, lorsque $u(t)$ est sinusoidal et $w(t)$ constant.

L'effet d'intégration numérique du système multiplicateur-compteur est présenté qualitativement à la figure 3.4: l'information est transformée par modulation d'impulsions en densité et ces impulsions sont ensuite sommées dans le compteur réversible. Le multiplicateur programmable transforme les signaux d'entrée, continus dans le temps, en échantillons et produit un train d'impulsions dont la période est inversement proportionnelle à ces valeurs échantillonnées.

Analytiquement, le signal de sortie des multiplicateurs programmables s'exprime à l'aide d'une somme de distributions de Dirac. Considérons le

temps t_{1n} auquel est produite la n-ième impulsion et le temps t_{1n-1} de la (n-1)-ième impulsion. L'intervalle Δt_{1n-1} qui s'écoule entre ces deux instants t_{1n} et t_{1n-1} est inversement proportionnel à la valeur échantillonnée à l'entrée du multiplicateur au temps t_{1n-1} :

$$t_{1n} - t_{1n-1} = \Delta t_{1n-1} = \frac{k_1}{u(t_{1n-1})} \quad (3.2)$$

Par récurrence, cette relation se met sous la forme suivante:

$$t_{1n} = t_{1n-1} + \Delta t_{1n-1} = \sum_{m=0}^{n-1} T_{1m} \quad (3.3)$$

$$\text{où: } T_{1m} = \frac{k_1}{u(t_m)} \quad \text{et} \quad k_1 = \frac{u_{\max}}{f_{01}}$$

De façon semblable en ce qui concerne le signal de sortie du second multiplicateur dont l'entrée est $w(t)$:

$$t_{21} = t_{21-1} + \Delta t_{21-1} = \sum_{p=0}^{1-1} T_{2p} \quad (3.4)$$

$$\text{où: } T_{2p} = \frac{k_2}{w(t_p)} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{w_{\max}}{f_{02}}$$

Rappelons qu'une somme de distributions de Dirac réparties à intervalles temporels réguliers à partir de $t = 0$ est décrite analytiquement par la fonction $p(t)$ suivante:

$$p(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-t_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t - \frac{n}{f_p}) \quad (3.5)$$

où: f_p : fréquence de répétition,
 δ : distribution de Dirac.

Appliquons cette représentation au multiplicateur programmable qui fournit des impulsions distantes d'une valeur inversement proportionnelle à la valeur du signal d'entrée échantillonné. On remplace dans l'expression (3.5) le temps t_n par les expressions obtenues en (3.3) et (3.4) respectivement. Les signaux $f_+(t)$ et $f_-(t)$ s'écrivent:

$$\begin{aligned} f_+(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \delta(t-t_{1n}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta(t - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{k_1}{u(t_{1m})}) \\ f_-(t) &= \sum_{1=1}^{+\infty} \delta(t-t_{21}) = \sum_{1=1}^{+\infty} \delta(t - \sum_{p=0}^{1-1} \frac{k_2}{w(t_{2p})}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

avec: $k_1 = \frac{u_{\max}}{f_{01}}$ et $k_2 = \frac{w_{\max}}{f_{02}}$

f_{01}, f_{02} : fréquences de référence d'entrée des multiplicateurs,

$u_{\max} \leq 2x_0$: valeur maximale de la variable numérique u .

$w_{\max} \leq 2z_0$: valeur maximale de la variable numérique w .

Les contributions séparées des multiplicateurs programmables sur le compteur réversible (élément intégrateur) sont incluses dans les variables fictives $v_+(t)$ et $v_-(t)$. Chaque variable représente l'accumulation des trains de distributions delta de Dirac dans un compteur. Rappelant que l'intégrale de la distribution de Dirac produit une fonction saut unité notée v [12]:

$$v(t-a) = \int_0^t \delta(\tau-a) d\tau, \quad (3.7)$$

l'opération de sommation se traduit sur les fonctions fictives $v_+(t)$ et $v_-(t)$ par les expressions:

$$\begin{aligned} v_+(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} v\left(t - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{k_1}{u(t_{1m})}\right) + v_{+0} \\ -v_-(t) &= \sum_{l=1}^{+\infty} v\left(t - \sum_{p=0}^{l-1} \frac{k_2}{w(t_{2p})}\right) + v_{-0} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ces équations déterminent les variations du signal de sortie $v(t)$ dans le temps. Il est cependant plus important de connaître le temps t auquel le signal de sortie est augmenté d'une unité (changement de $v_+(t)$) ou diminué d'une unité (changement de $v_-(t)$), afin d'obtenir les relations paramétriques de description de la cellule élémentaire de la figure 3.2:

$$\begin{aligned} v_+ \left(\sum_{m=0}^{n-1} \frac{k_1}{u(t_{1m})} \right) &= n + v_{+0} \\ v_- \left(\sum_{p=0}^{l-1} \frac{k_2}{w(t_{2p})} \right) &= l + v_{-0} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Les équations paramétriques décrivant la cellule de la figure 3.2 s'écrivent:

$$\begin{aligned} v_+(t_{1n}) &= n + v_{+0}, \quad v_+(t_{1n+1}) = n + 1 + v_{+0} \\ t_{1n} &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{k_1}{u(t_{1m})}, \quad \Delta t_{1n} = \frac{k_1}{u(t_{1n})}, \quad t_{1n+1} = t_{1n} + \Delta t_{1n} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$v_-(t_{21}) = 1 + v_{-0}, \quad v_-(t_{21+1}) = 1 + 1 + v_{-0}$$

$$t_{21} = \sum_{p=0}^{1-1} \frac{k_2}{w(t_{21})}, \quad \Delta t_{21} = \frac{k_2}{w(t_{21})}, \quad t_{21+1} = t_{21} + \Delta t_{21}$$

Recherchons encore la condition d'équilibre d'une cellule élémentaire formée d'un compteur réversible et de multiplicateurs programmables, car cette condition n'est pas incluse dans les relations (3.10). Rappelons que dans le chapitre 1 où ont été étudiés les filtres quasi-continus idéalisés (appelés filtres fréquentiels), il a été établi que tous les signaux sont définis strictement positifs, ceci étant dû à la présence d'une modulation de fréquence. Ce principe reste valable dans les systèmes réels (modulation d'impulsions en densité), par conséquent la valeur à l'équilibre des signaux de la cellule de la figure 3.2 est positive et est notée x_0 , y_0 et z_0 :

$$u(t) = x_0 + x(t)$$

$$v(t) = y_0 + y(t) \tag{3.11}$$

$$w(t) = z_0 + z(t)$$

Afin d'éviter une dérive et un dépassement de capacité du compteur réversible, la somme des impulsions sur les entrées avant et arrière doit être équilibrée à long terme. Cela signifie pour les valeurs moyennes des périodes Δt_{1n} et Δt_{21} en sortie des multiplicateurs à taux programmables:

$$\overline{\Delta t_{1n}} = \overline{\Delta t_{21}} \tag{3.12}$$

ce qui se traduit d'après les équations paramétriques (3.10) par la condition d'équilibre de la cellule élémentaire compteur-multiplicateur de la figure 3.2:

$$\frac{x_0}{k_1} = \frac{z_0}{k_2} \quad \text{avec:} \quad k_1 = \frac{u_{\max}}{f_{01}}, \quad k_2 = \frac{w_{\max}}{f_{02}} \tag{3.13}$$

Les équations paramétriques (3.10) et la condition d'équilibre (3.13) décrivent une cellule de base en boucle ouverte comme celle donnée en figure 3.2. Avec ce modèle paramétrique dans une structure à boucle fermée (filtre récursif à contre-réaction), il sera possible d'évaluer un système de filtrage à proprement parler.

La simulation par ordinateur des filtres numériques quasi-continus requiert ces équations paramétriques. L'étude du comportement de ces structures est entreprise à partir d'un système de deuxième ordre général [13], un filtre plus complexe étant réalisé par mise en cascade d'unités de second ordre. Deux types d'algorithmes sont proposés pour cette simulation sur ordinateur.

Le premier algorithme évalue le signal de sortie $v(t)$ du compteur réversible à un instant donné à l'aide des équations (3.8). Le calcul de la variable $v(t)$ nécessite alors de sauvegarder les différents états du système en mémoire. La transcription de cet algorithme sur ordinateur n'est pas aisée, car il impose l'utilisation de routines ré-entrantes.

Le second algorithme est basé sur un système de routines non ré-entrantes obtenu par inversion du problème: il s'agit de calculer les différents temps auxquels un changement d'état de $v(t)$ se produit. Cette méthode évalue les équations paramétriques (3.10) et est particulièrement indiquée dans notre problème.

La simulation d'un filtre quasi-continu est divisée en trois parties principales, programmées de la façon suivante:

- l'entrée des paramètres nécessaires à la simulation, tels que: le type de filtre, le degré, les valeurs des coefficients, la longueur de mot des variables et celle des coefficients, ainsi que les fréquences de coupure et d'échantillonnage du système numérique quasi-continu;
- la simulation proprement dite, c'est-à-dire la phase de calcul des phénomènes décrits par les équations paramétriques (3.10);
- le traitement des résultats sous une forme facilement utilisable comme la réponse à des excitations particulières ou la transformation de Fourier de ces réponses.

Ce logiciel analyse le fonctionnement des systèmes quasi-continus et les résultats sont comparés avec les performances des filtres mis en oeuvre sous forme câblée. Outre la vérification de la validité des modèles de description élaborés, il convient de signaler que l'ensemble des programmes

permet l'examen des limites de linéarité des différents éléments constitutifs des filtres numériques quasi-continus. En effet, nous avons déjà relevé au chapitre 1 les effets limitatifs du fonctionnement des multiplieurs programmables et au chapitre 2 nous avons mentionné les bruits dus aux quantifications des coefficients et des variables. L'analyse de ces effets non-linéaires pourrait être envisagée à l'aide de cet ensemble de programmes et constituerait une suite logique à cette étude. En particulier, la limite de linéarité dépend de paramètres comme le rapport fréquence de travail maximale à fréquence maximale du signal d'entrée, ou encore de la valeur de l'amplitude du signal relative à sa valeur maximale. Les aspects de sensibilité de quantification des coefficients et des variables, par ailleurs traités analytiquement au chapitre 4, peuvent s'étudier par variations des longueurs de mot des différents paramètres et des variables.

L'analyse de Fourier, via Transformée de Fourier Rapide (TFR), des signaux d'entrée et de sortie nous permet de déterminer les limites de linéarité de la structure quasi-continue comme une fonction de l'amplitude et de la fréquence du signal à filtrer. Il est possible de mettre en évidence des effets non-linéaires dus à la modulation d'impulsions en densité des multiplieurs programmables et à l'intégration numérique produite sur les compteurs réversibles.

Dans le prochain paragraphe, un développement analytique va fournir des approximations analogiques de l'unité de base du système quasi-continu. Cette méthode analytique sera basée sur l'interpolation des relations paramétriques, du développement en série de la fonction d'interpolation et de l'application de la méthode des approximations successives.

Par la fermeture des boucles de contre-réaction, cette méthode permettra d'estimer comment des paramètres tels que l'atténuation maximale et la fréquence de coupure sont modifiés dans un filtre quasi-continu récursif relativement au filtre analogique dont il est issu.

3.2. Modèle analogique par linéarisation des équations paramétriques.

La représentation paramétrique des filtres numériques quasi-continus est utile non seulement pour la simulation sur ordinateur de ces systèmes, mais également pour établir un modèle analogique approché du comportement des filtres quasi-continus. Nous appliquerons ici une méthode analytique pour déduire une approximation analogique basée sur les relations paramétriques. Cette approximation fournira une prédiction linéaire entre les signaux d'entrée et de sortie, en incluant les premières perturbations dues à la modulation d'impulsions en densité et à l'intégration numérique produites sur les systèmes quasi-continus réels.

3.2.1. Développement en série de Taylor des relations paramétriques.

Rappelons le développement en série de Taylor d'une fonction $y(t)$ dérivable $(N+1)$ fois au voisinage du point $t = a$ (cf. figure 3.5) donné par le polynôme $P_{N+1}(t)$:

$$P_{N+1}(t) = f(a) + (t-a) f'(a) + \frac{(t-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(t-a)^N}{N!} f^{(N)}(a) + \frac{(t-a)^{N+1}}{(N+1)!} f^{(N+1)}(a + \theta(t-a)) \quad , \quad 0 < \theta < 1, \quad \theta = \theta(\Delta t) \quad (3.14)$$

$$\forall a, t, \exists \theta \mid P_{N+1}(t) = f(t)$$

ou, par transformation de $t = a + \Delta t$:

$$f(a + \Delta t) - f(a) = \sum_{m=1}^N \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \Delta t^m + \frac{f^{(N+1)}(a + \theta \Delta t)}{(N+1)!} \Delta t^{N+1} \quad , \quad 0 < \theta < 1, \quad \theta = \theta(\Delta t) \quad (3.15)$$

Les équations paramétriques (3.10) définissent des valeurs entières quantifiées de l'amplitude du compteur réversible $v(t)$; ces variations d'amplitude se produisent à des instants quelconques. La figure 3.6 illustre une succession possible des nombres $v(t_{i_n})$ définie par valeurs entières.

Les relations paramétriques (3.10) se mettent sous la forme (3.16).

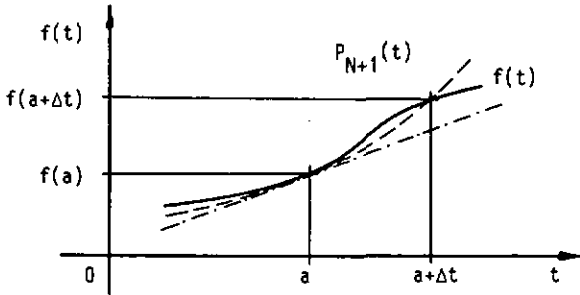


Fig.3.5 : Fonction continue $f(t)$ au voisinage du point $t = a$.

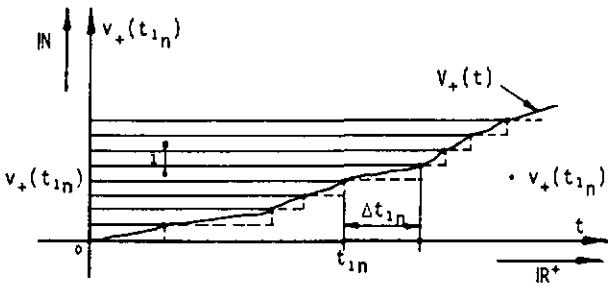


Fig.3.6 : Séquence $v_+(t_{1n})$ et fonction $V_+(t)$ définie continue et passant par les points $v_+(t_{1n})$.

$$v_+(t_{1n} + \Delta t_{1n}) - v_+(t_{1n}) = 1$$

$$\Delta t_{1n} = \frac{k_1}{u(t_{1n})}$$

(3.16)

$$v_-(t_{21} + \Delta t_{21}) - v_-(t_{21}) = 1$$

$$\Delta t_{21} = \frac{k_2}{w(t_{21})}$$

Recherchons une fonction continue $V_+(t)$ et une autre $V_-(t)$ continues dans le temps et en amplitude qui passent en particulier par les points définis par les équations paramétriques (3.16). Les relations suivantes doivent être satisfaites:

$$V_+(t_1 + \Delta t_1) - V_+(t_1) = 1$$

$$V_-(t_2 + \Delta t_2) - V_-(t_2) = 1$$

(3.17)

Les intervalles de temps Δt_1 et Δt_2 sont déterminés par les valeurs échantillonnées de $u(t)$ et $w(t)$ aux instants t_1 et t_2 . Les fonctions $u(t)$ et $w(t)$ sont continues et les relations (3.18) représentent le même phénomène physique que celles contenues dans (3.16):

$$\Delta t_1 = \frac{k_1}{u(t_1)} \quad \text{et} \quad \Delta t_2 = \frac{k_2}{w(t_2)} \quad (3.18)$$

En utilisant le développement en série de Taylor (3.15) pour les fonctions continues $V_+(t)$ et $V_-(t)$, il vient:

$$\begin{aligned} V_+(t_1 + \Delta t_1) - V_+(t_1) &= \sum_{m=1}^N \frac{V_+^{(m)}(t_1)}{m!} \Delta t_1^m + \frac{V_+^{(N+1)}(t_1 + \theta \Delta t_1)}{(N+1)!} \Delta t_1^{N+1} \\ V_-(t_2 + \Delta t_2) - V_-(t_2) &= \sum_{m=1}^N \frac{V_-^{(m)}(t_2)}{m!} \Delta t_2^m + \frac{V_-^{(N+1)}(t_2 + \theta \Delta t_2)}{(N+1)!} \Delta t_2^{N+1} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Les deux échelles de temps t_1 et t_2 étant devenues continues, elles sont confondues en une seule échelle $t = t_1 = t_2$ et la combinaison des équations (3.17), (3.18) et (3.19) fournit les relations différentielles:

$$\begin{aligned} \dot{V}_+(t) &= \frac{u(t)}{k_1} - \sum_{m=2}^N \frac{k_1^{m-1} V_+^{(m)}(t)}{m! u^{m-1}(t)} - \frac{k_1^N V_+^{(N+1)}(t + \theta k_1/u(t))}{(N+1)! u^N(t)} \\ \dot{V}_-(t) &= \frac{w(t)}{k_2} - \sum_{m=2}^N \frac{k_2^{m-1} V_-^{(m)}(t)}{m! w^{m-1}(t)} - \frac{k_2^N V_-^{(N+1)}(t + \theta k_2/w(t))}{(N+1)! w^N(t)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Les fonctions recherchées $V_+(t)$ et $V_-(t)$ découlent de l'intégration de ces deux dernières expressions:

$$V_+(t) = V_{+0} + \int_0^t \dot{V}_+(\tau) d\tau \quad \text{et} \quad V_-(t) = V_{-0} + \int_0^t \dot{V}_-(\tau) d\tau \quad (3.21)$$

d'où les deux expressions de $V_+(t)$ et de $V_-(t)$:

$$\begin{aligned} V_+(t) &= V_{+0} + \frac{1}{k_1} \int_0^t u(\tau) d\tau - \sum_{m=2}^N \frac{k_1^{m-1}}{m!} \int_0^t \frac{V_+^{(m)}(\tau)}{u^{m-1}(\tau)} d\tau \\ &\quad - \frac{k_1^N}{(N+1)!} \int_0^t \frac{V_+^{(N+1)}(\tau + \theta(u(\tau)) k_1/u(\tau))}{u^N(\tau)} d\tau \\ V_-(t) &= V_{-0} + \frac{1}{k_2} \int_0^t w(\tau) d\tau - \sum_{m=2}^N \frac{k_2^{m-1}}{m!} \int_0^t \frac{V_-^{(m)}(\tau)}{w^{m-1}(\tau)} d\tau \\ &\quad - \frac{k_2^N}{(N+1)!} \int_0^t \frac{V_-^{(N+1)}(\tau + \theta(w(\tau)) k_2/w(\tau))}{w^N(\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (3.22)$$

La variable de sortie polynomiale continue dans le temps et en amplitude $V(t)$ de la cellule de base en boucle ouverte (cf. figure 3.2) est définie par les équations (3.23):

$$V(t) = I(t) + P(t)$$

$$I(t) = V_0 + \int_0^t \left(\frac{u(\tau)}{k_1} - \frac{w(\tau)}{k_2} \right) d\tau, \quad V_0 = V_{+0} + V_{-0}$$

$$P(t) = - \sum_{m=2}^N \frac{1}{m!} \int_0^t \left(k_1^{m-1} \frac{V_+^{(m)}(\tau)}{u^{m-1}(\tau)} - k_2^{m-1} \frac{V_-^{(m)}(\tau)}{w^{m-1}(\tau)} \right) d\tau + R_{N+1}(t) \quad (3.23)$$

$$R_{N+1}(t) = - \frac{1}{(N+1)!} \int_0^t \left(k_1^N \frac{V_+^{(N+1)}(\tau + \theta(u(\tau)) k_1/u(\tau))}{u^N(\tau)} - k_2^N \frac{V_-^{(N+1)}(\tau + \theta(w(\tau)) k_2/w(\tau))}{w^N(\tau)} \right) d\tau$$

avec: $I(t)$: réponse idéale de la cellule quasi-continue,

$P(t)$: perturbation due à la discontinuité des signaux produite par la modulation d'impulsions en densité,

$R_{N+1}(t)$: reste de Lagrange du développement de degré $N+1$.

Le premier terme $I(t)$ de la variable $V(t)$ représente la solution de l'intégration des deux signaux $u(t)$ et $w(t)$ évoquée dans le cas idéalisé des filtres fréquentiels du chapitre 1. La perturbation $P(t)$ est produite par la discontinuité des signaux engendrée par la modulation d'impulsions en densité.

Les équations (3.23) n'ont pas de solution analytique générale. Toutefois, des solutions particulières seront déterminées par la suite.

3.2.2. Méthode des approximations successives et linéarisation.

Afin de donner une solution à l'équation (3.23) de description de la cellule élémentaire multiplicateurs-compteur, nous appliquons la méthode des approximations successives au modèle analogique étudié dans le paragraphe précédent. En particulier, nous posons la première approximation:

$$\begin{aligned} V_+^{(m)}(t) &= \frac{1}{k_1} u^{(m-1)}(t) \\ V_-^{(m)}(t) &= \frac{1}{k_2} w^{(m-1)}(t) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ces deux relations peuvent par ailleurs être déduites du cas des filtres fréquentiels du premier chapitre. Par introduction de (3.24) dans la solution $V(t)$ obtenue en (3.23), l'expression suivante vient:

$$\begin{aligned} V(t) &= V_0 + \int_0^t \left(\frac{u(\tau)}{k_1} - \frac{w(\tau)}{k_2} \right) d\tau - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u(t)}{x_0} \frac{z_0}{w(t)} \right| - \\ &- \sum_{m=3}^N \frac{1}{m!} \int_0^t \left(k_1^{m-2} \frac{u^{(m-1)}(\tau)}{u^{m-1}(\tau)} - k_2^{m-2} \frac{w^{(m-1)}(\tau)}{w^{m-1}(\tau)} \right) d\tau \\ &- \frac{1}{(N+1)!} \int_0^t \left(k_1^{N-1} \frac{u^{(N)}(\tau + \theta(u(\tau)) k_1/u(\tau))}{u^N(\tau)} - k_2^{N-1} \frac{w^{(N)}(\tau + \theta(w(\tau)) k_2/w(\tau))}{w^N(\tau)} \right) d\tau \end{aligned} \quad (3.25)$$

La fonction représentant le signal de sortie avec cette approximation ne dépend maintenant plus que des signaux d'entrée supposés continus $u(t)$, $w(t)$. Pour rendre ces équations plus lisibles, nous admettons encore certaines hypothèses simplificatrices et qui rendent le sous-système considéré linéaire. De cette manière, nous mettons en évidence les premiers termes perturbateurs par rapport au modèle du filtre fréquentiel.

Considérons tout d'abord l'hypothèse selon laquelle les termes d'ordre supérieur à deux dans la solution $V(t)$ sont négligeables relativement aux premiers termes:

$$\frac{k_1^{m-2}}{m!} \frac{u^{(m-1)}(t)}{u^{m-1}(t)} \ll \frac{u(t)}{k_1}, \quad \frac{k_2^{m-2}}{m!} \frac{w^{(m-1)}(t)}{w^{m-1}(t)} \ll \frac{w(t)}{k_2} \quad (3.26)$$

La réponse $V(t)$ du sous-système s'écrit en conséquence:

$$V(t) = v_0 + \int_0^t \left(\frac{u(\tau)}{k_1} - \frac{w(\tau)}{k_2} \right) d\tau - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u(t)}{x_0} \frac{z_0}{w(t)} \right| \quad (3.27)$$

Le terme logarithme naturel décrit la distorsion de premier ordre de l'élément de base multiplicateur-compteur réversible analysé. Linéarisons cette distorsion par quelques considérations supplémentaires. Selon (3.11) tous les signaux sont strictement positifs et l'unité de base satisfait de plus à la condition d'équilibre (3.13), d'où la réponse $V(t)$ de la cellule élémentaire:

$$V(t) = v_0 + \int_0^t \left(\frac{x(\tau)}{k_1} - \frac{z(\tau)}{k_2} \right) d\tau - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \frac{x(t)}{x_0}}{1 + \frac{z(t)}{z_0}} \right| \quad (3.28)$$

Les autres effets non-linéaires sont partiellement contenus dans les termes d'ordre supérieur (comme ceux donnés en (3.26)). Lorsque les fréquences $f_{01} = u_{\max}/k_1$ et $f_{02} = w_{\max}/k_2$ ne sont pas suffisamment grandes relativement à la fréquence des signaux d'entrée, les relations (3.26) ne sont plus vérifiées et la réponse du système ne peut plus être exprimée d'après (3.28) en fonction des signaux d'entrée.

La linéarisation du terme logarithmique de l'expression (3.28) n'est possible qu'avec des rapports $x(t)/x_0$ et $z(t)/z_0$ suffisamment petits, c'est-à-dire lorsque les amplitudes des signaux d'entrée sont faibles par rapport à x_0 et y_0 .

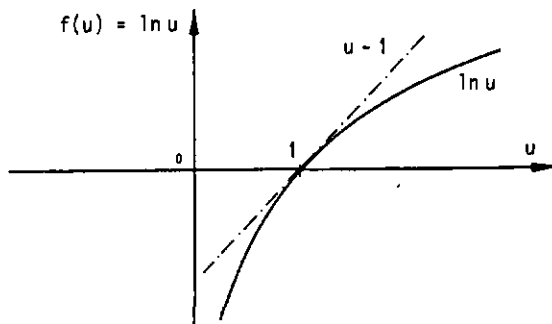


Fig. 3.7 : Développement au premier ordre de $f(u) = \ln u$.

Le développement du logarithme naturel en série de Taylor approché au premier ordre est donné par:

$$\ln \left| \frac{u(t)}{x_0} \right| = \ln \left| 1 + \frac{x(t)}{x_0} \right| = \frac{x(t)}{x_0} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n(t)}{n x_0^n} \cong \frac{x(t)}{x_0}$$

$$\ln \left| \frac{w(t)}{z_0} \right| \cong \frac{z(t)}{z_0}$$
(3.29)

Par introduction dans (3.28), l'équation intégrale de la réponse de la cellule rendue linéaire est simplement:

$$V(t) = V_0 + \int_0^t \left(\frac{x(\tau)}{k_1} - \frac{z(\tau)}{k_2} \right) d\tau - \frac{x(t)}{2 x_0} + \frac{z(t)}{2 z_0}$$
(3.30)

En conclusion, le filtrage numérique quasi-continu introduit un passage direct atténué entre entrée et sortie pour des signaux de faible amplitude. En effet, l'expression (3.30) montre ce transfert direct des entrées sur la sortie, qui demeure faible puisque par hypothèse $x(t)/2x_0$ et $z(t)/2z_0$ sont petits. Toutefois, l'importance relative de cette transmission directe dépend du rapport entre les fréquences de référence f_{01} et f_{02} et celles des signaux d'entrée, comme nous allons le montrer.

La transformée de Laplace de l'équation linéaire (3.30) est donnée par:

$$V(s) = \frac{V_0}{s} + \frac{1}{s} \left(\frac{X(s)}{k_1} - \frac{Z(s)}{k_2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{X(s)}{x_0} - \frac{Z(s)}{z_0} \right)$$
(3.31)

Les termes perturbateurs apparaissant dans cette dernière relation prennent d'autant plus d'importance que le facteur $1/s$ devient petit, c'est-à-dire que la fréquence des signaux $x(t)$ ou $z(t)$ est élevée. Considérons par exemple le cas limite admissible lorsqu'il y a égalité entre les valeurs absolues de la réponse idéale et de la perturbation:

$$\frac{1}{\omega_{11} k_1} = \frac{1}{2 x_0} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\omega_{12} k_2} = \frac{1}{2 z_0},$$
(3.32)

ce raisonnement fournit les fréquences limites maximales des signaux d'entrée $x(t)$ et $z(t)$ de la cellule élémentaire de la figure (3.2), notées f_{11} et f_{12} :

$$f_{11} = \frac{1}{2\pi} f_{01} \quad \text{et} \quad f_{12} = \frac{1}{2\pi} f_{02}$$
(3.33)

L'influence des termes perturbateurs devient d'autant plus importante que les fréquences des signaux d'entrée s'approchent des fréquences de fonctionnement f_{0i} des éléments de modulation d'impulsions en densité.

Remarquons cependant que, en raison des hypothèses simplificatrices (3.26) non valables lorsque les fréquences des signaux d'entrée deviennent voisines des fréquences de fonctionnement des multiplicateurs, l'approximation (3.31) n'est plus entièrement satisfaisante jusqu'à ces fréquences.

La validité de la méthode des approximations successives (1ère approximation) et des hypothèses simplificatrices supplémentaires appliquées aux équations paramétriques (3.10) est illustrée par la simulation sur ordinateur. En effet, ces deux méthodes de résolution sont programmées et comparées dans le cas d'un signal d'entrée sinusoïdal. La figure 3.8 présente une représentation graphique des réponses au signal d'entrée sinusoïdal $x(t)$ (fig.3.8 a): cas des équations paramétriques (3.10) à la figure 3.8 b) et cas de la première approximation d'après la relation (3.30) à la figure 3.8 c). Dans cette expérimentation, les signaux d'entrée à traiter sont:

$$u(t) = x_0 + x_1 \sin \omega_0 t \quad \text{et} \quad w(t) = z_0 = \frac{k_2}{k_1} x_0, \quad (3.34)$$

et les équations paramétriques décrivant exactement le comportement du sous-système élémentaire deviennent:

$$\begin{aligned} v_+(t_{1n}) &= n + v_{+0} ; & t_{1n} &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{k_2}{x_0 + x_1 \sin \omega_0 t_m} \\ v_-(t_{2l}) &= l + v_{-0} ; & t_{2l} &= \sum_{m=0}^{l-1} \frac{k_2}{z_0} = l \frac{k_2}{z_0} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Où la variable de sortie $v(t) = v_+(t) - v_-(t)$:

$$\begin{aligned} v(t_n) &= v_0 + n - \frac{x_0}{k_1} t_n = v_0 + n - \frac{f_{01}}{2} t_n \\ t_n &= t_{n-1} + \frac{k_1}{x_0 + x_1 \sin \omega_0 t_{n-1}} = t_{n-1} + \frac{2}{f_{01}} \frac{1}{1 + \frac{x_1}{x_0} \sin \omega_0 t_{n-1}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Les valeurs numériques adoptées dans l'exemple numérique de la figure 3.8 sont les suivantes:

$$\begin{aligned} x_1 &= 32, \quad x_0 = 128, \quad f_0 = 200 \text{ Hz} \\ f_{01}/2 &= 65536 \text{ Hz}, \quad 10 \text{ kHz}, \quad 5 \text{ kHz} \text{ et } 2,5 \text{ kHz} \end{aligned} \quad (3.37)$$

D'autre part, l'équation intégrale (3.30) estimée avec les signaux d'entrée (3.34) devient:

$$V(t) = v_0 + \frac{x_1 f_{01}}{u_{\max} \omega_0} (1 - \cos \omega_0 t) - \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{x_1}{x_0} \sin \omega_0 t \right| \quad (3.38)$$

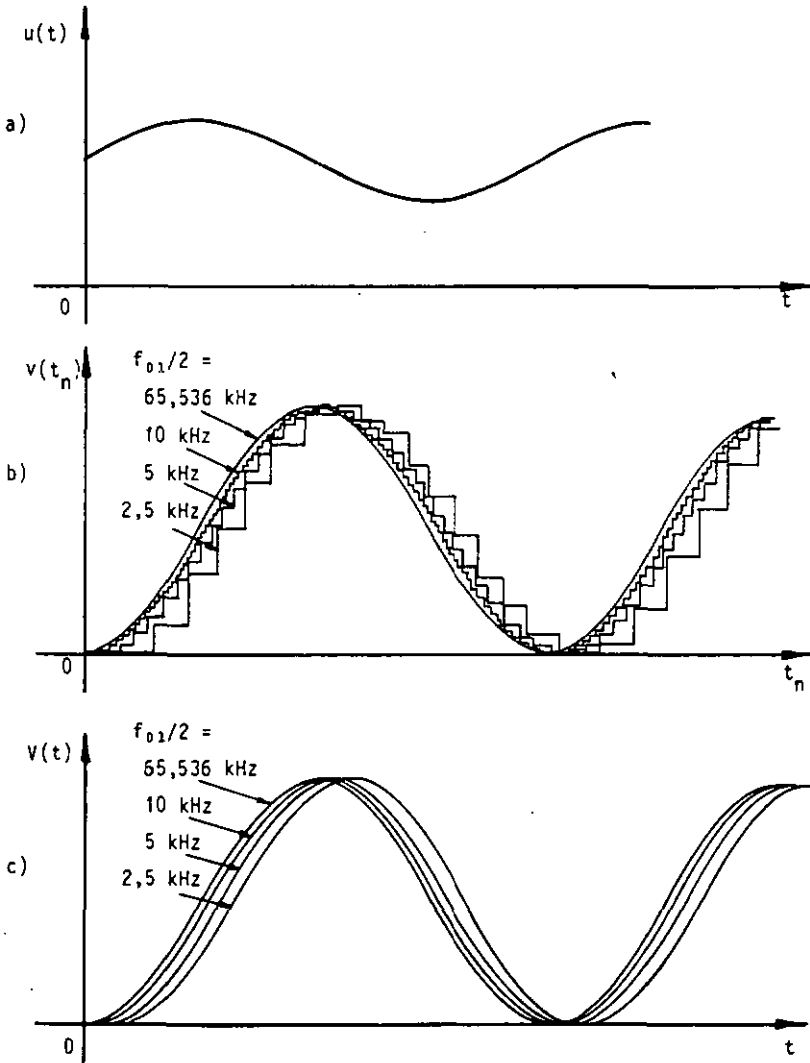


Fig.3.8 : Excitation et réponses du système de base de la figure 3.2.

a) Signal d'excitation sinusoïdal $u(t)$.

b) Réponse $v(t_n)$ selon équation (3.36).

c) Réponse $V(t)$ d'après la relation (3.38).

La figure 3.8 compare qualitativement les réponses $v(t_n)$ et $V(t)$, la partie b) illustre le résultat des calculs avec les équations paramétriques (3.36) alors que la partie c) de cette figure représente la fonction continue $V(t)$ (3.38).

Définissons le rapport ρ entre la fréquence de fonctionnement f_{01} du multiplicateur à taux programmable et la fréquence f_0 du signal d'entrée:

$$\rho = \frac{f_{01}}{f_0} \quad , \quad (3.39)$$

d'où les valeurs de ρ tirées de (3.37):

$$\rho = 655,36 \quad ; \quad 100 \quad ; \quad 50 \quad ; \quad 25 \quad (3.40)$$

La perturbation la plus faible relative à la réponse idéale (cas du filtre fréquentiel) est celle obtenue pour la valeur la plus grande du rapport ρ entre la fréquence de référence du multiplicateur programmable et la fréquence du signal d'entrée. Lorsque ce rapport ρ diminue et tend vers la valeur 2π , les termes perturbateurs ont une importance croissante sur la réponse de la cellule élémentaire. En ce qui concerne les deux modèles mathématiques utilisés aux figures 3.8 b) et c), il existe une excellente correspondance qualitative. L'effet perturbateur apparaît ici comme un retard (ou délai) qui agit au niveau du signal de sortie; ce retard est d'autant plus prononcé que le rapport ρ est élevé.

3.2.3. Applications du modèle analogique linéarisé déduit des relations paramétriques. Unités récursives de filtrage.

Examinons maintenant les applications du développement de la méthode des approximations successives (première approximation) pour la description de la cellule de base de la figure 3.2 dans le cas de filtres récurrents constitués par un ensemble de cellules élémentaires à boucles fermées. Cette analyse est exécutée ici dans le cas particulier où la longueur de mot totale n_a des compteurs est égale à la longueur de mot n_b utilisée dans les variables d'entrée des multiplicateurs (paragraphe 1.4.1).

1) Passe-bas de 1er ordre.

Rappelons tout d'abord le schéma de principe de l'élément passe-bas de premier ordre déjà traité dans le chapitre 1 concernant les filtres fréquentiels:

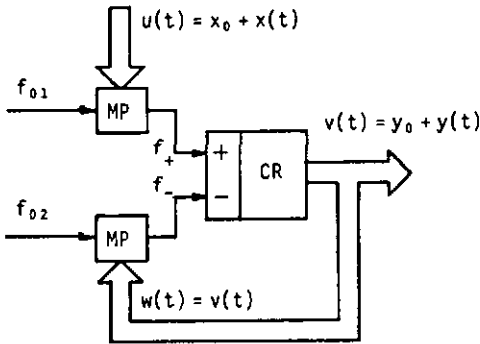


Fig.3.9 : Filtre passe-bas de 1er ordre tiré de la figure 3.2.

La structure passe-bas de la figure 3.9 est obtenue à partir de l'élément de base de la figure 3.2 par l'adjonction de la contre-réaction:

$$w(t) = v(t) \quad \rightarrow \quad W(s) = V(s) \quad (3.41)$$

La réponse de ce système $v(t)$ est considérée continue, car elle est le résultat de l'équation intégrale (3.30) appliquée à ce circuit et qui rend ce système linéaire. Dans la réalité, la réponse $v(t)$ est quantifiée en

amplitude et il a déjà été vu que $v(t)$ représente en fait une approximation continue du résultat réel contenant les effets perturbateurs principaux.

Par introduction de la condition de contre-réaction (3.41) dans la transformée de Laplace de la représentation linéaire (3.31), le système passe-bas est décrit par l'équation:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \left(\frac{X(s)}{k_1} - \frac{Y(s)}{k_2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{X(s)}{x_0} - \frac{Y(s)}{y_0} \right) \quad (3.42)$$

et la fonction de transfert $H(s)$ se calcule facilement:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1/k_1 - s/2x_0}{s(1 - 1/2y_0) + 1/k_2} \quad (3.43)$$

La condition d'équilibre, déterminée par des fréquences d'entrées du compteur réversible identiques en moyenne, reste semblable à la relation (3.13):

$$\frac{x_0}{k_1} = \frac{y_0}{k_2} \quad (3.44)$$

Le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert $H(s)$ (réponses en amplitude et en phase) est donné à la figure 3.10. On y reconnaît les caractéristiques d'un filtre-passe-bas dont l'atténuation est limitée pour des fréquences du signal d'entrée de plus en plus élevées. C'est une conséquence de l'effet de transmission directe entre l'entrée et la sortie de la cellule de base qui devient prépondérant et qui a déjà été mentionné auparavant dans la relation intégrale (3.30).

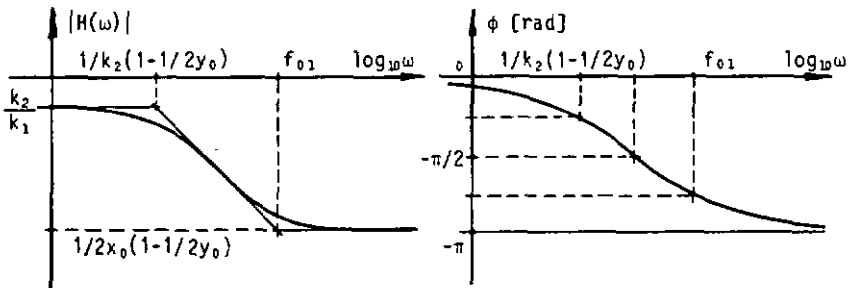


Fig.3.10 : Réponse en fréquence du filtre passe-bas de 1er ordre représenté par la fonction de transfert $H(s)$ (3.43).

Cette atténuation maximale est fixée par les longueurs de mot des variables, représentées dans la fonction de transfert (3.43) par les termes $2x_0$ et $2y_0$. Il apparaît donc ici l'effet de quantification des variables qui avait été abordé dans le second chapitre.

Le second effet important sur les caractéristiques de filtrage est mis en évidence par examen de la fréquence de coupure du système. Cette fréquence de coupure subit un décalage vers les valeurs plus élevées des fréquences, et ce décalage dépend de la longueur de mot de la variable de sortie (fixée par la grandeur $2y_0$ dans la relation (3.43)). Cet effet disparaît lorsque la longueur de mot de la variable de sortie devient suffisamment élevée.

2) Passe-haut de 1er ordre.

L'élément de filtrage du premier ordre passe-haut est esquissé à la figure 3.11:

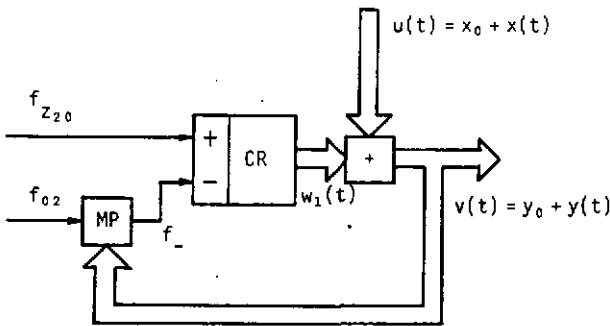


Fig.3.11 : Filtre passe-haut de 1er ordre tiré de la figure 3.2.

Cette structure provient également de la cellule élémentaire de la figure 3.2, dans laquelle ont été ajoutés un additionneur numérique et une contre-réaction du signal de sortie. La relation (3.31) devient pour ce circuit:

$$Y(s) - X(s) = - \left(\frac{1}{k_2 s} - \frac{1}{2v_0} \right) Y(s) \tag{3.45}$$

La fonction de transfert $H(s)$ de ce filtre passe-haut est:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s}{s(1 - 1/2v_0) + 1/k_2} \quad (3.46)$$

et sa fréquence de coupure vaut:

$$\omega_c = \frac{1}{k_2(1 - 1/2v_0)} \quad (3.47)$$

Par rapport à la valeur du cas fréquentiel idéal, cette pulsation est décalée dans la direction des fréquences plus élevées par un taux fixé par le terme $2v_0$ dépendant de la longueur de mot du signal de sortie. Lorsque cette longueur de mot est grande, ce déplacement de fréquence est moins marqué. La condition d'équilibre du compteur réversible se note ici:

$$\frac{x_0}{k_1} = \frac{v_0}{k_2} \quad (3.18)$$

La réponse en amplitude de ce système passe-haut donné par (3.46) est dessinée à la figure 3.12.

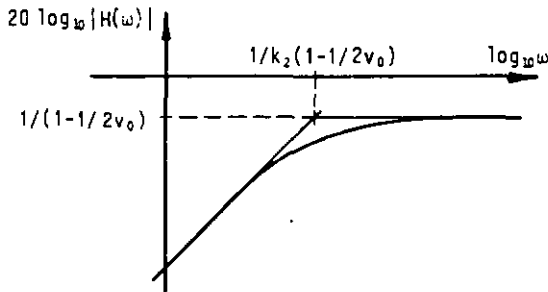


Fig.3.12 : Réponse en amplitude du filtre de 1er ordre décrit par la fonction de transfert $H(s)$ (3.46).

Dans ce filtre passe-haut de premier ordre, le phénomène d'atténuation maximale n'a aucune raison d'apparaître aux basses fréquences. En effet, les fortes atténuations obtenues pour des fréquences inférieures à la fréquence de coupure résultent de la différence des deux signaux $v(t)$ et $w_1(t)$ d'amplitudes voisines.

3) Système de 2ème ordre général.

Considérons un filtre numérique quasi-continu de deuxième ordre complet comme celui schématisé à la figure 3.13.

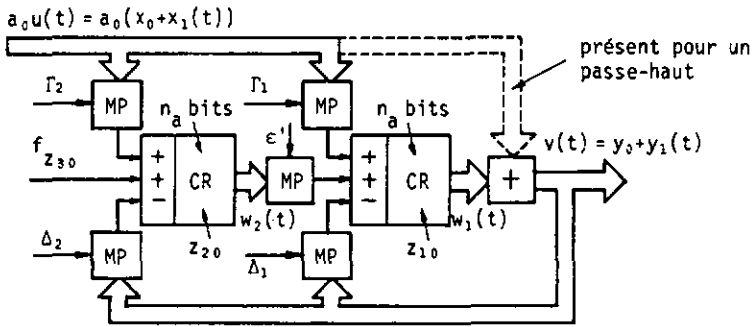


Fig. 3.13 : Filtre numérique quasi-continu de 2ème ordre général.

De façon analogue à ce qui a été vu au paragraphe 1.4.1 du premier chapitre, les fréquences de référence Γ_i , Δ_i et ϵ' de ce système quasi-continu réel s'expriment en fonction des coefficients du filtre fréquentiel γ_i , δ_i et ϵ avec les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= 2^{n_a} \gamma_i \\ \Delta_i &= 2^{n_a} \delta_i \\ \epsilon' &= 2^{n_a} \epsilon \end{aligned} \tag{3.49}$$

La structure de la figure 3.13 est décrite avec les hypothèses précédentes (méthode des approximations successives et linéarisation) par les équations du domaine de Laplace:

$$\begin{aligned} W_2(s) &= \frac{f}{s} + \gamma_2 a_0 \left(\frac{x_0}{s} + \frac{X(s)}{s} \right) - \delta_2 \left(\frac{y_0}{s} + \frac{Y(s)}{s} \right) - \frac{1}{2} \left(a_0 \frac{X(s)}{x_0} - \frac{Y(s)}{y_0} \right) \\ W_1(s) &= \epsilon \left(\frac{z_{20}}{s} + \frac{W_2(s)}{s} \right) + \gamma_1 a_0 \left(\frac{x_0}{s} + \frac{X(s)}{s} \right) - \delta_1 \left(\frac{y_0}{s} + \frac{Y(s)}{s} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(a_0 \frac{X(s)}{x_0} + \frac{W_2(s)}{z_{20}} - \frac{Y(s)}{y_0} \right) \end{aligned} \tag{3.50}$$

$$Y(s) + \frac{y_0}{s} = \frac{a_0 x_0}{s} + a_0 X(s) + \frac{z_{20}}{s} + W_1(s)$$

Posons, de manière semblable au cas des filtres fréquentiels du chapitre 1 (paragraphe 1.2), les conditions d'équilibre à satisfaire:

$$\begin{aligned} z_{10} &= y_0 - a_0 x_0 \\ z_{20} \epsilon &= \delta_1 y_0 - a_0 \gamma_1 x_0 \\ f_{z_{30}} &= \delta_2 y_0 - a_0 \gamma_2 x_0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Le groupe des trois relations (3.50) se réduit ainsi à une seule équation:

$$\begin{aligned} Y(s) = & a_0 X(s) + a_0 \gamma_1 \frac{X(s)}{s} - \delta_1 \frac{Y(s)}{s} - \frac{1}{2} \left(a_0 \frac{X(s)}{x_0} - \frac{Y(s)}{y_0} \right) + \\ & + \epsilon \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{2z_{20}\epsilon} \right) \left(a_0 \gamma_2 \frac{X(s)}{s} - \delta_2 \frac{Y(s)}{s} - \frac{1}{2} \left(a_0 \frac{X(s)}{x_0} - \frac{Y(s)}{y_0} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Cette dernière détermine la fonction de transfert $H(s)$ du système numérique quasi-continu de deuxième ordre complet linéarisé à partir des équations paramétriques; à l'aide des relations (1.21) on obtient:

$$H(s) = \frac{(a_0 - (1 - \frac{a_0}{2z_{20}})/2x_0) s^2 + (a_1 - \frac{a_0 \epsilon}{2x_0} - \frac{a_2}{2z_{20}\epsilon}) s + a_2}{(1 - (1 - \frac{1}{2z_{20}})/2y_0) s^2 + (b_1 - \frac{\epsilon}{2y_0} - \frac{b_2}{2z_{20}\epsilon}) s + b_2} \quad (3.53)$$

Ce résultat est apparenté avec la fonction de transfert du système idéal (c'est-à-dire le filtre fréquentiel défini dans le chapitre 1), les coefficients C_i et D_i étant ici modifiés par des termes perturbateurs:

$$\begin{aligned} C_0 &= a_0 - \frac{1}{2x_0} \left(1 - \frac{a_0}{2z_{20}} \right) & D_0 &= 1 - \frac{1}{2y_0} \left(1 - \frac{1}{2z_{20}} \right) \\ C_1 &= a_1 - \frac{a_0 \epsilon}{2x_0} - \frac{a_2}{2z_{20}\epsilon} & D_1 &= b_1 - \frac{\epsilon}{2y_0} - \frac{b_2}{2z_{20}\epsilon} \\ C_2 &= a_2 & D_2 &= b_2 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Des valeurs élevées de x_0 , y_0 , $2z_{20}$ et ϵ minimisent d'autant l'influence des termes perturbateurs sur les valeurs des coefficients C_i et D_i .

Par introduction des relations (3.49) dans le groupe (3.54), les coefficients C_i et D_i deviennent des fonctions des paramètres réels tels que la longueur de mot n_a des compteurs réversibles ou encore les fréquences de référence Γ_i , Δ_i et ϵ' qui agissent sur les multiplicateurs à taux programmables.

$$\begin{aligned}
 C_0 &= a_0 - \frac{1}{2x_0} \left(1 - \frac{a_0}{2Z_{20}}\right) & D_0 &= 1 - \frac{1}{2y_0} \left(1 - \frac{a_0}{2Z_{20}}\right) \\
 C_1 &= a_0 \left(\frac{\Gamma_1}{2^{n_a}} - \frac{\epsilon'}{2^{n_a}} \frac{1}{2x_0} - \frac{\Gamma_2}{2^{n_a}} \frac{1}{2Z_{20}} \right) & D_1 &= \frac{\Delta_1}{2^{n_a}} - \frac{\epsilon'}{2^{n_a}} \frac{1}{2y_0} - \frac{\Delta_2}{2^{n_a}} \frac{1}{2Z_{20}} \\
 C_2 &= a_0 \frac{\Gamma_2}{2^{n_a}} \frac{\epsilon'}{2^{n_a}} & D_2 &= \frac{\Delta_2}{2^{n_a}} \frac{\epsilon'}{2^{n_a}}
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Succinctement, dans ce paragraphe, nous avons élaboré un procédé analytique de linéarisation du modèle paramétrique décrit dans le paragraphe 3.1. L'approximation analogique basée sur ces relations paramétriques comprend l'interpolation de ces équations par une fonction polynomiale continue, son développement en série, et l'application de la méthode des approximations successives. Cette approche analogique a fourni une prédiction linéaire entre les signaux d'entrée et de sortie d'une cellule élémentaire à boucle ouverte, et elle inclut les effets principaux de perturbation dus à la modulation d'impulsions en densité et à l'intégration numérique apparaissant dans ces systèmes. Il est ainsi possible d'estimer comment des paramètres, comme l'atténuation maximale en amplitude et la fréquence de coupure, sont modifiés dans un filtre quasi-continu récursif relativement au filtre analogique duquel il a été déduit.

3.3. Modèle numérique par équations de récurrence.

La représentation des filtres numériques caractérisés par un traitement quasi-continu de l'information est étudiée avec un modèle discret dans ce paragraphe, ce qui est d'autant plus justifié que ces filtres présentent une nature quantifiée en amplitude et dans le temps due à leurs éléments constitutifs. Un certain nombre des descriptions précédentes (filtres fréquentiels, modèle analogique obtenu par développement en série et linéarisation des équations paramétriques) considèrent en effet les signaux continus en amplitude et dans le temps.

Rappelons que le multiplicateur à taux programmable et que le compteur réversible avant-arrière sont des éléments qui, respectivement, produisent des impulsions et les comptabilisent de façon discrète. Une méthode d'analyse de ces structures faisant intervenir des signaux échantillonnés paraît donc adaptée et le modèle numérique choisi utilise les équations de récurrence approchées du système et leur transformation en z , définissant ainsi la fonction de transfert $H(z)$.

Les équations intégrales définies pour les systèmes supposés continus dans le temps deviennent, dans le cas de systèmes à temps discret, des équations de récurrence qui calculent l'amplitude d'un phénomène à chaque période d'échantillonnage en fonction de valeurs précédentes connues.

Considérons la cellule élémentaire du filtre numérique quasi-continu composée par deux multiplicateurs à taux programmable et d'un compteur réversible esquissé à la figure 3.14, de façon semblable au modèle développé au paragraphe 3.1.

Nous supposons que les différents signaux traités ne sont définis que pour des valeurs discrètes du temps; ces signaux unidimensionnels échantillonnés s'écrivent donc:

$$u(nT), w(nT), v(nT) \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \quad , \quad T : \text{période} \quad (3.56)$$

Dans le cas le plus général, admettons les fréquences des signaux $f_+(t)$ et $f_-(t)$ ayant des valeurs beaucoup plus élevées que la fréquence d'échantil-

lissage du signal d'entrée. Plusieurs impulsions sont donc susceptibles de parvenir aux entrées du compteur réversible avant-arrière durant une période d'échantillonnage.

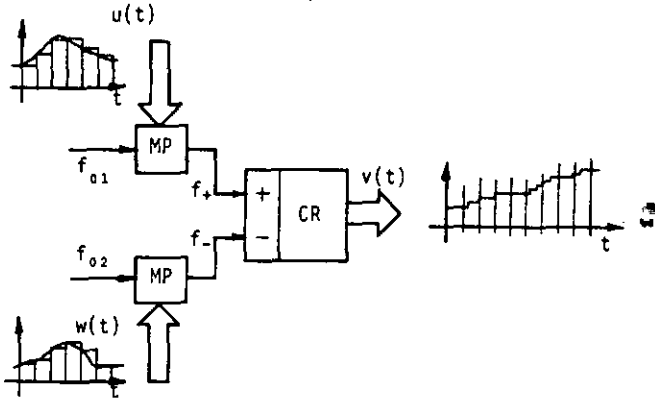


Fig.3.14 : Elément de base du filtre numérique quasi-continu dans le modèle des équations de récurrence.

Caractérisons l'intervalle de temps inclu entre $(n-1)T$ et nT défini par Δt , comme illustré à la figure 3.15:

$$\Delta t = t - (n-1)T \tag{3.57}$$

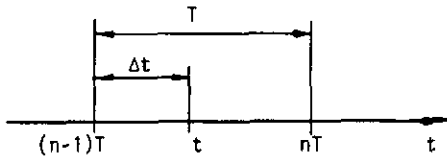


Fig.3.15 : Temps t entre deux échantillons séparés par une période T .

Par conséquent, nous formulons l'accroissement de la valeur numérique du compteur réversible au temps t par l'expression:

$$\tilde{v}(t) - \tilde{v}((n-1)T) = \text{Partie entière} \left\{ \frac{f_{01}}{u_{\max}} \Delta t u((n-1)T) - \frac{f_{02}}{w_{\max}} \Delta t w((n-1)T) \right\} \tag{3.58}$$

Cette expression reste valable pour la partie des signaux qui varie autour des valeurs d'équilibre; nous posons donc pour les signaux:

$$\begin{aligned}
 \tilde{v}(t) &= y_0 + \tilde{y}(t) & , & & y_0 \leq \frac{1}{2} \tilde{v}_{\max} \\
 u(nT) &= x_0 + x(nT) & , & & x_0 \leq \frac{1}{2} u_{\max} \\
 w(nT) &= z_0 + z(nT) & , & & z_0 \leq \frac{1}{2} w_{\max}
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

$$k_1 = \frac{u_{\max}}{f_{01}} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{w_{\max}}{f_{02}}$$

D'où la partie $\tilde{y}(t)$ du signal de sortie, variable dans le temps:

$$\tilde{y}(t) - \tilde{y}((n-1)T) = \text{Partie entière} \left\{ \Delta t \left(\frac{x((n-1)T)}{k_1} - \frac{z((n-1)T)}{k_2} \right) \right\} \tag{3.60}$$

La relation ci-dessus est correcte lorsque la condition d'équilibre du système est remplie:

$$\frac{x_0}{k_1} = \frac{z_0}{k_2} \tag{3.61}$$

Nous retrouvons ici une condition déjà énoncée lors de l'élaboration des autres modèles comme celui du filtre fréquentiel et le modèle analogique basé sur les équations paramétriques.

Au temps $t = nT$, donc pour $\Delta t = T$, le signal de sortie $\tilde{y}(nT)$ devient:

$$\tilde{y}(nT) - \tilde{y}((n-1)T) = \text{Partie entière} \left\{ \frac{T}{k_1} x((n-1)T) - \frac{T}{k_2} z((n-1)T) \right\} \tag{3.62}$$

Lorsque les fréquences de référence f_{01} et f_{02} sont beaucoup plus élevées que la fréquence d'échantillonnage $f_s = 1/T$, la dernière équation avec suppression de la partie entière fournit une nouvelle fonction d'approximation $y(nT)$:

$$y(nT) - y((n-1)T) = \frac{T}{k_1} x((n-1)T) - \frac{T}{k_2} z((n-1)T) \tag{3.63}$$

Les transformations de nombre à fréquence et de fréquence à nombre qui interviennent dans les éléments constitutifs tels que les multiplicateurs programmables et les compteurs réversibles sont représentées et contenues dans cette dernière formulation.

Dans le cas où le signal de sortie n'est pas pris en contre-réaction

sur l'une des entrées et que la fréquence d'échantillonnage utilisée pour les signaux d'entrée est de plusieurs ordres de grandeur inférieure aux fréquences de fonctionnement des multiplicateurs programmables, la qualité de l'approximation est satisfaisante. En effet, le temps d'intégration du signal d'entrée est un grand multiple de la période moyenne de fonctionnement des multiplicateurs, ce qui donne sur le compteur un grand nombre d'incrémentations et une erreur relative faible de la fonction d'approximation (3.63).

Pour un filtre avec contre-réaction de la variable de sortie sur l'une des entrées, le signal $y(t)$ reconduit à l'entrée est caractérisé par la présence de fréquences élevées. On suppose alors la variable de sortie approchée par un signal sous-échantillonné avec la période T , et les fréquences les plus élevées disparaissent avant la réinjection sur l'entrée.

La transformée en z de l'équation aux différences (3.63) fournit une description analytique du modèle numérique élaboré :

$$Y(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} T \left(\frac{1}{k_1} X(z) - \frac{1}{k_2} Z(z) \right) \quad (3.64)$$

Le schéma numérique de la figure 3.16 correspond donc à la cellule numérique quasi-continue de la figure 3.14.

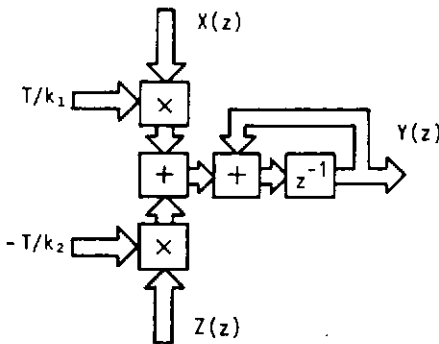


Fig.3.16 : Schéma numérique proposé pour l'élément de base du filtre numérique quasi-continu.

L'ensemble des multiplicateurs programmables et le compteur réversible y sont remplacés par deux multiplicateurs numériques de coefficients cons-

tants T/k_1 et T/k_2 et par un additionneur et un registre mémoire noté z^{-1} dont la réaction de la sortie sur l'entrée matérialise la mémoire permanente du compteur. Ce schéma numérique de remplacement de la cellule de base du filtre quasi-continu s'identifie parfaitement avec la structure de filtre numérique à récursion double définie et décrite dans le second chapitre.

Etablissons maintenant une correspondance entre le modèle du filtre fréquentiel du premier chapitre et le modèle numérique décrit dans ce paragraphe. Ces deux représentations, l'une continue et l'autre discrète, équivalentes en qualité, ont toutes deux pour origine des approximations de même degré de la réalité.

Dans le cas idéal du filtrage fréquentiel, il est possible de déduire la solution à l'excitation de la cellule élémentaire: sous la forme intégrale, elle s'identifie comme les deux premiers termes de l'équation (3.23) et la transformée de Laplace de la partie $Y(s)$ s'écrit:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{k_1} X(s) - \frac{1}{k_2} Z(s) \right) \quad (3.65)$$

La correspondance formelle entre cette description (3.65) et son équivalent avec des signaux numériques (3.64) donne:

$$\frac{1}{s} \cong \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} T \quad , \quad (3.66)$$

d'où la transformation en z entre ces deux représentations approchées:

$$z \cong 1 + sT \quad \text{ou:} \quad s \cong \frac{1}{T} \frac{1-z^{-1}}{z^{-1}} \quad (3.67)$$

A l'aide de cette correspondance, nous retrouvons les coefficients d'un des modèles par connaissance des coefficients de l'autre modèle.

La transformation en z (3.67); dont nous examinons quelques propriétés et conditions d'emploi, se distingue d'autres transformations connues (voir par exemple [16]) telles que:

- la transformation en z adaptée (matched z -transform) qui effectue la transformation:

$$z = e^{sT} \quad , \text{ soit: } \quad s = \frac{1}{T} \ln z \quad (3.68)$$

sur chaque pôle et sur chaque zéro de la fonction de transfert.

- la transformation en z standard qui substitue par contre:

$$z = e^{sT} \quad , \text{ soit: } \quad s = \frac{1}{T} \ln z \quad (3.69)$$

dans la décomposition en fraction simple de la fonction de transfert.

Les pôles sont alors identiques à ceux obtenus par la transformation en z adaptée, mais les zéros sont en général différents. Cette transformation conserve la réponse impulsionnelle du filtre.

- la transformation bilinéaire qui remplace:

$$z = \frac{2/T + s}{2/T - s} \quad , \text{ soit: } \quad s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (3.70)$$

Le filtre transformé reste de même degré que le filtre de départ et présente approximativement la même réponse dans le domaine temporel que le filtre original pour n'importe quelle excitation.

La transformation en z (3.67) ainsi que les deux autres transformations (3.69 - 3.70) sont conformes car elles conservent les angles et l'orientation dans le plan z par rapport au plan s . L'axe imaginaire du plan de Gauss s (à gauche duquel sont placés tous les pôles d'un système stable) est transformé par ces quatre applications en différents cercles dans le plan z . La figure 3.17 illustre graphiquement la transformation $z = 1 + sT$ relativement à la transformation en z standard ou à la transformation bilinéaire qui sont différentes.

La correspondance (3.67) applique du plan s au plan z :

- l'axe imaginaire du plan s sur la droite $z = +1$ du plan z ,
- la partie droite ouverte du plan s sur la partie ouverte à la droite de $z = +1$ du plan z ,
- la partie gauche ouverte du plan s sur la partie ouverte à la gauche de $z = +1$ du plan z .

Cette transformation $z = 1 + sT$ est bien connue en pratique où elle est utilisée par exemple dans la synthèse de filtres à capacités commutées lorsque le rapport fréquence d'échantillonnage à fréquence de coupure est

supérieur à 100. Dans ce cas, elle remplace la transformation en z standard, selon la même méthode d'approximation que celle utilisée en analyse numérique pour la règle d'Euler:

$$z = e^{sT} = 1 + sT + \frac{s^2 T^2}{2!} + \frac{s^3 T^3}{3!} + \dots = 1 + sT \quad (3.71)$$

$$r = \frac{f_s}{f_c} > 100$$

Lorsque la fréquence d'échantillonnage $f_s = 1/T$ n'est pas suffisamment élevée, le danger existe que certains pôles d'un filtre sélectif dans le plan de Gauss, très proches de l'axe imaginaire $j\omega$, soient transposés dans le plan z par (3.67) dans une zone extérieure au cercle unité. Cela entraînerait l'instabilité du système synthétisé et il convient de vérifier que ce phénomène ne se produit pas lors de la synthèse.

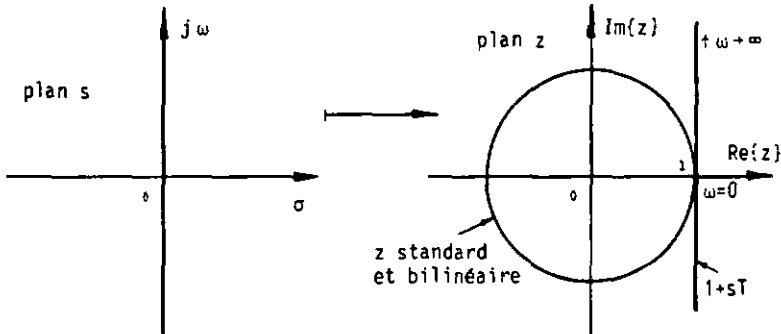


Fig.3.17 : Applications du plan s au plan z : transformations en z standard, bilinéaire et $z = 1 + sT$.

Nous venons d'établir un schéma numérique approché correspondant à la cellule quasi-continue de base en boucle ouverte. Ce modèle numérique sera utilisé dans le prochain paragraphe dans une structure bouclée de second ordre et fournira donc une représentation numérique d'un filtre quasi-continu récursif général.

3.4. Application du modèle numérique à la représentation d'un filtre quasi-continu de deuxième ordre.

Soit le circuit quasi-continu général de second ordre dont le schéma se trouve à la figure 1.32 du premier chapitre. Décrivons ce système à l'aide de l'approximation numérique du paragraphe précédent: équations aux différences et transformation en z. Dans une telle structure quasi-continue, nous considérons d'une part que la longueur de mot totale des compteurs réversibles est donnée par n_a , et que les fréquences de référence Γ_i , Δ_i et ϵ' sont définies par les relations (3.49) avec les coefficients γ_i , δ_i et ϵ du filtre fréquentiel. Les coefficients du modèle numérique approché de ce filtre quasi-continu général s'écrivent donc pour l'étage i:

$$\begin{aligned} T/k_1 &= T/(2^{n_a}/\Gamma_i) = \frac{\Gamma_i}{2^{n_a}} T = \gamma_i T \\ T/k_2 &= T/(2^{n_a}/\Delta_i) = \frac{\Delta_i}{2^{n_a}} T = \delta_i T \end{aligned} \quad (3.72)$$

La topologie du circuit numérique correspondant au système quasi-continu de la figure 1.32 est déduite des considérations précédentes et est exposée à la figure 3.18.

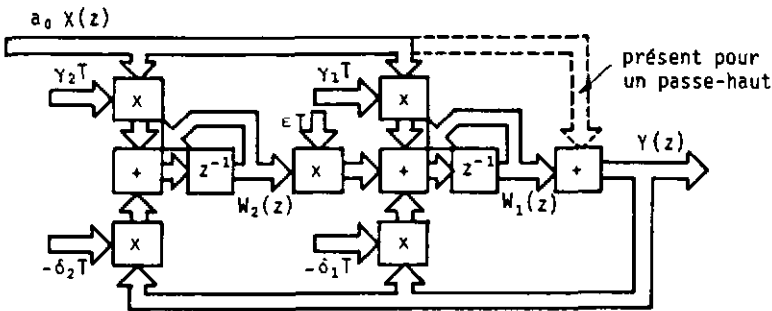


Fig.3.18 : Modèle numérique approché du filtre numérique quasi-continu de deuxième ordre.

Le groupe d'équations aux différences suivant vient:

$$\begin{aligned} w_2((n+1)T) &= w_2(nT) + \gamma_2 T a_0 x(nT) - \delta_2 T y(nT) \\ w_1((n+1)T) &= w_1(nT) + \gamma_1 T a_0 x(nT) + \epsilon T w_2(nT) - \delta_1 T y(nT) \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$y(nT) = a_0 x(nT) + w_1(nT)$$

La transformation en z de ces trois équations aux différences aboutit à des relations algébriques desquelles nous éliminons les variables internes w_1 et w_2 . Ce système est alors réduit à une seule équation et la fonction de transfert $H(z)$ s'exprime par:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 z^2 + (-2a_0 + a_0 \gamma_1 T) z + (a_0 - a_0 \gamma_1 T + a_0 \gamma_2 \epsilon T^2)}{z^2 + (-2 + \delta_1 T) z + (1 - \delta_1 T + \delta_2 \epsilon T^2)} \quad (3.74)$$

Cette fonction de transfert peut également être déterminée en appliquant la transformation $z \hat{=} 1 + sT$ à une fonction de transfert $H(s)$ similaire à (1.28) qui décrirait la structure de la figure 1.32 par un modèle fréquentiel.

De la figure 3.18, il apparaît clairement que le modèle numérique approché du filtre quasi-continu de 2ème ordre est similaire, topologiquement, au filtre numérique à récursion double introduit dans le second chapitre et présenté à la figure 2.6. En conclusion, le système quasi-continu possède des propriétés proches de cette structure. Ce fait, qui a déjà été démontré dans le deuxième chapitre, trouve ici une justification supplémentaire.

La fonction de transfert du système à récursion double de la figure 2.6 est du deuxième degré en z et le polynôme suivant la définit:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{g_0 z^2 + (-2g_0 + g_1) z + (g_0 - g_1 + g_2)}{z^2 + (-2 + h_1) z + (1 - h_1 + h_2)} \quad (3.75)$$

Réaliser un filtre quasi-continu de deuxième ordre approché par la structure numérique à récursion double de la figure 2.6 revient à identifier les coefficients des fonctions de transfert (3.74) et (3.75):

$$\begin{aligned} g_0 &= a_0 \\ g_1 &= a_0 \gamma_1 T & , & & h_1 &= \delta_1 T \\ g_2 &= a_0 \gamma_2 \epsilon T^2 & , & & h_2 &= \delta_2 \epsilon T^2 \end{aligned} \quad (3.76)$$

Remarquons de plus qu'une correspondance existe également entre le modèle quasi-continu approché par équations de récurrence et la structure directe canonique de la figure 2.1 utilisée dans le chapitre 2. Les re-

lations entre ces différents circuits se calculent simplement à l'aide des groupes d'équations (3.76) ci-dessus et (2.8). Les équations (2.8) déterminent les rapports entre les coefficients des cellules numériques à récursion double et directe canonique. Les résultats suivants viennent:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= a_0 \\
 c_1 &= -2a_0 + a_0 \gamma_1 T & , & \quad d_1 = -2 + \delta_1 T \\
 c_2 &= a_0 - a_0 \gamma_1 T + a_0 \gamma_2 \varepsilon T^2 & , & \quad d_2 = 1 - \delta_1 T + \delta_2 \varepsilon T^2
 \end{aligned}
 \tag{3.77}$$

Illustrons toutes ces relations établies entre les structures quasi-continues, à récursion double et directe canonique par un exemple de filtrage passe-haut sélectif de deuxième ordre dont les caractéristiques sont les suivantes:

fréquence de coupure: $f_c = 23 \text{ Hz}$
 ondulation : $N = 3,6 \text{ dB}$

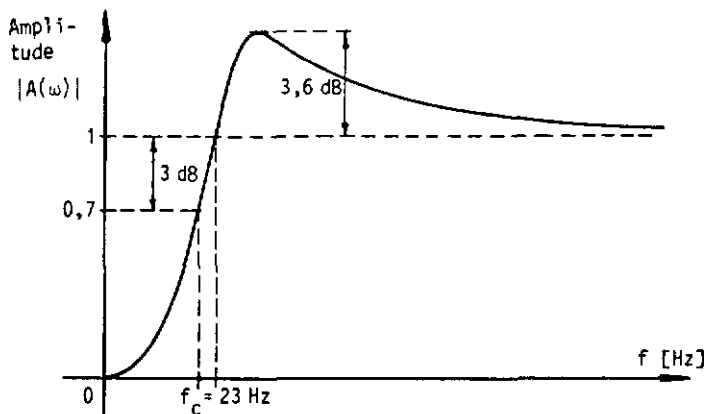


Fig.3.19 : Amplitude en fonction de la fréquence d'un filtre passe-haut de 2ème ordre : $f_c = 23 \text{ Hz}$ et $N = 3,6 \text{ dB}$.

Les méthodes classiques de synthèse des filtres analogiques fournissent les coefficients de la fonction de transfert de ce circuit, selon l'équation (1.10) du premier chapitre:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 1 \\
 a_1 &= 0 \quad , \quad b_1 = 128 \\
 a_2 &= 0 \quad , \quad b_2 = 32768
 \end{aligned}
 \tag{3.78}$$

Par (1.22), les coefficients du filtre quasi-continu idéal (i.e. le filtre fréquentiel) peuvent être calculés aisément. Si l'on choisit une fréquence d'échantillonnage:

$$f_s = 65536 \text{ Hz} = 2^{16} \text{ Hz} \quad , \tag{3.79}$$

alors les coefficients du filtre numérique à récursion double et ceux du système direct canonique se calculent à l'aide des relations (3.76) et (3.77):

- filtre quasi-continu:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 1 \\
 \Gamma_1 &= 0 \quad , \quad \delta_1 = 128 \quad , \quad \Delta_1 = 2^{n_a} \delta_1 \\
 \Gamma_2 &= 0 \quad , \quad \delta_2 \epsilon = 32768 \quad , \quad \Delta_2 \epsilon' = 2^{2n_a} \delta_2 \epsilon
 \end{aligned}
 \tag{3.80}$$

- filtre à récursion double:

$$\begin{aligned}
 g_0 &= 1 \\
 g_1 &= 0 \quad , \quad h_1 = 0,001953125 \\
 g_2 &= 0 \quad , \quad h_2 = 0,000007629
 \end{aligned}
 \tag{3.81}$$

- filtre de structure directe canonique:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= 1 \\
 c_1 &= -2 \quad , \quad d_1 = -1,998046875 \\
 c_2 &= 1 \quad , \quad d_2 = 0,998054504
 \end{aligned}
 \tag{3.82}$$

La fréquence d'échantillonnage (3.79) retenue donne un rapport r avec la fréquence de coupure très élevé:

$$r = \frac{f_s}{f_c} = 2850 \tag{3.83}$$

De telles caractéristiques sont typiques d'un système quasi-continu (cf. chapitre 2) et il montre les difficultés de réalisation de ces spécifications dans les structures à récursion double et directe canonique. Les coefficients h_1 et h_2 deviennent très petits si la fréquence d'échantillonnage est élevée, d'où l'avantage éventuel d'une arithmétique à virgule flottante dans un système à récursion double. Dans la structure canonique,

les valeurs des coefficients s'approchent des valeurs limites (pour d_1 la valeur -2 et pour d_2 la valeur 1). En revanche, les coefficients δ_1 , δ_2 et ϵ gardent des valeurs convenables (cf. (3.80)) et facilement réalisables dans une structure quasi-continue.

Dans le but de clarifier le domaine d'utilisation propice des filtres numériques quasi-continus relativement aux techniques conventionnelles de filtrage numérique, rappelons l'analyse du domaine de stabilité des circuits numériques d'ordre deux ainsi que la répartition des pôles dans le plan z . La zone couverte par les systèmes quasi-continus dans cette partition y sera précisée.

Considérons la fonction de transfert (2.1) d'un filtre numérique direct canonique de second ordre. La stabilité d'un tel système est fixée par:

$$|z_{p_j}| < 1 \quad \forall j, \quad (3.84)$$

où z_{p_j} représente la coordonnée complexe du pôle p_j .

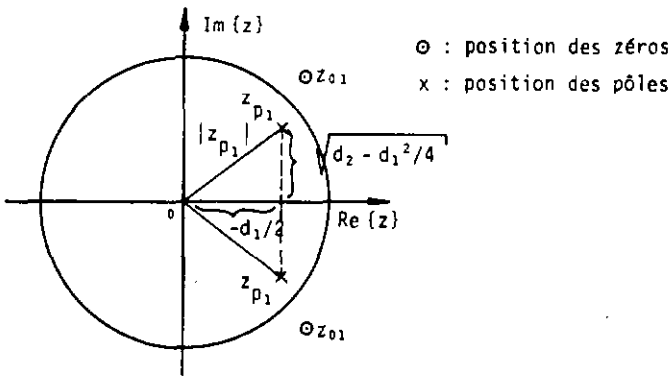


Fig.3.20 : Position des pôles et des zéros de $T(z)$ dans le plan z .
 Cas d'un système stable ($|z_{p_i}| < 1$) à phase non minimale ($|z_{0_i}| > 1$).

L'emplacement des pôles du système de la figure 3.20 (deux pôles et deux zéros), stable et à phase non minimale, est donné par:

$$z_{p_j} = -\frac{d_{1j}}{2} \pm \sqrt{\frac{d_{1j}^2}{4} - d_{2j}} \quad (3.85)$$

Une expression équivalente est valable pour les zéros z_{0j} de la fonction de transfert (2.1). Le type des racines z_{pj} dépend du signe du discriminant :

- racines complexes conjuguées: $d_2 > d_1^2/4$
- racines doubles: $d_2 = d_1^2/4$ (3.86)
- racines réelles: $d_2 < d_1^2/4$

L'analyse des valeurs des coefficients d_1 et d_2 dépend de la condition de stabilité (3.83), d'où l'inéquation:

$$|z_{pj}| = \left| -\frac{d_{1j}}{2} \pm \sqrt{\frac{d_{1j}^2}{4} - d_{2j}} \right| < 1 \quad (3.87)$$

La condition de stabilité devient dans les cas suivants:

- pôles complexes ($d_2 > d_1^2/4$): $d_2 < 1$
- pôles réels distincts ou doubles ($d_2 \leq d_1^2/4$): $1 - d_1 + d_2 > 0$ (3.88)
- $1 + d_1 + d_2 > 0$

La figure 3.21 illustre les conditions de stabilité d'un filtre numérique classique de coefficients d_1 et d_2 [17].

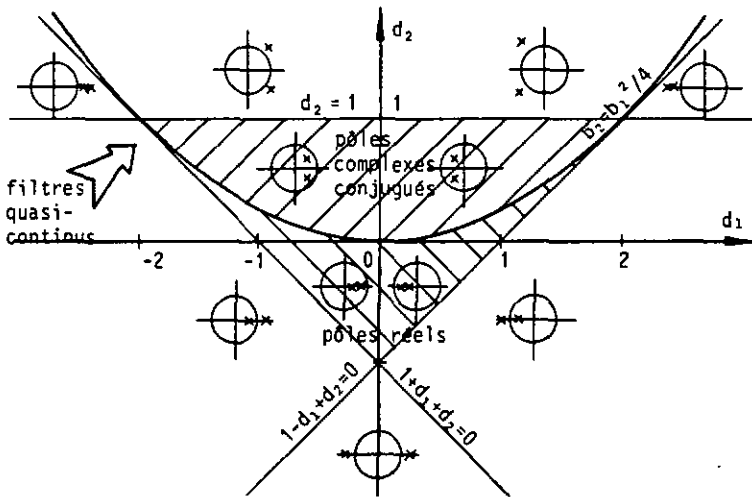


Fig.3.21 : Domaine de stabilité d'un filtre numérique de 2ème ordre en fonction des coefficients d_1 et d_2 avec répartition des pôles dans le plan z . Les zones hachurées indiquent les conditions de stabilité du système.

La région du plan (d_1, d_2) utilisée pour les applications des filtres quasi-continus est pointée par une flèche à la figure 3.21. Cette zone est celle définie par l'application type du filtre passe-haut de second ordre précédente, de coefficients (3.82).

3.5. Modèle numérique dérivé de la méthode des approximations successives (première approximation).

Soit la cellule élémentaire de la figure 3.15 formée de multiplicateurs programmables et d'un compteur réversible. La transformée de Laplace de l'équation différentielle (3.31) est le résultat de la linéarisation des équations paramétriques (3.10). Cette relation constitue la base de ce modèle et elle est rappelée ici:

$$V(s) = \frac{V_0}{s} + \frac{1}{s} \left(\frac{X(s)}{k_1} - \frac{Z(s)}{k_2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{X(s)}{x_0} - \frac{Z(s)}{z_0} \right) \quad (3.89)$$

En reprenant les hypothèses concernant la forme échantillonnée des signaux et par application de la transformation $z \hat{=} 1 + sT$ (3.67), nous obtenons la réponse dans le domaine z de la cellule élémentaire aux excitations $\{x_n\}$ et $\{z_n\}$:

$$Y(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} T \left(\frac{X(z)}{k_1} - \frac{Z(z)}{k_2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{X(z)}{x_0} - \frac{Z(z)}{z_0} \right) \quad (3.90)$$

Cette expression tient compte de la transmission directe du signal d'entrée sur la sortie d'une part, mais également de l'aspect discret du système quasi-continu.

Examinons quelques exemples comme les filtres passe-bas et passe-haut de premier ordre ainsi qu'une structure générale de deuxième ordre. Les fonctions de transfert de ces formes sont calculées à l'aide de (3.90). Les fonctions de transfert suivantes sont déduites:

- filtre passe-bas de 1er ordre:

$$H_{LP}(z) = \frac{(T/z_{20} \epsilon + 1/2x_0) z^{-1} - 1/2x_0}{(1 - 1/2y_0) - (1 - (1/x_0 + 1/y_0)/2) z^{-1}} \quad (3.91)$$

- filtre passe-haut de 1er ordre:

$$H_{HP}(z) = \frac{1}{(1-1/2y_0) - (1-1/2y_0 - T/f_{z_{30}} \epsilon) z^{-1}} \quad (3.92)$$

- structure générale de 2ème ordre:

$$H(z) = \frac{C_0 z^2 + (-2 C_0 + C_1 T) z + (C_0 - C_1 T + C_2 T^2)}{D_0 z^2 + (-2 D_0 + D_1 T) z + (D_0 - D_1 T + D_2 T^2)} \quad (3.93)$$

où C_0, C_1, C_2, D_0, D_1 et D_2 sont fixés par les équations (3.55).

Cette dernière relation est du même type que (3.75), avec des coefficients modifiés par l'approximation plus fine adoptée.

En conclusion, les méthodes numériques développées dans ce chapitre restent valables pour des rapports élevés entre la fréquence d'échantillonnage et la fréquence de coupure du système quasi-continu.

Ces méthodes numériques restent cependant des approximations du système réel quasi-continu. Le développement par les équations paramétriques et leur simulation sur ordinateur offre un modèle précis utile pour la compréhension de ces structures.

4. ANALYSE DE SENSIBILITE DES COEFFICIENTS DANS LES FILTRES QUASI-CONTINUS.

Par leur nature numérique discontinue en amplitude et échantillonnée dans le temps, les filtres numériques quasi-continus sont sujets à des erreurs dues à la longueur de mot finie (ou nombre de bits constitutifs) des variables internes, d'entrée et des coefficients de filtrage. Cette notion expérimentale de longueur de mot finie entraîne une quantification des nombres et a pour conséquence une dégradation des propriétés intrinsèques d'un filtre numérique. Cette dégradation est d'autant plus marquée que le nombre de bits est petit.

La quantification des nombres donne lieu à différents types d'erreurs présentes dans les systèmes discrets à longueur de mot finie [17], dont les erreurs dues à la quantification des coefficients et les erreurs dues à la quantification des opérations (cf. selon chapitre 2).

Les erreurs de quantification des coefficients peuvent déplacer sensiblement la position des pôles et peuvent rendre le système instable dans certains cas particulièrement défavorables où les pôles sortent du cercle unité du plan z .

Les effets de longueur finie de mot ont déjà été analysées précédemment dans de nombreuses structures (cf. [18-24]) et sont utilisées ici pour comparaison avec les sensibilités des filtres numériques quasi-continus.

Nous avons vu dans le second chapitre que les filtres quasi-continus sont très proches des filtres numériques à récursion double et qu'ils fonctionnent de façon similaire. Ces deux structures auront donc les mêmes propriétés du point de vue des sensibilités des coefficients. C'est pourquoi les erreurs de quantification des coefficients sont étudiées pour le filtre quasi-continu à partir de la fonction de transfert (3.73), décrivant un modèle numérique de ce système semblable à un filtre numérique à récursion double.

Une analyse de sensibilité du filtre numérique de structure directe canonique, basée sur la fonction de transfert (2.1), sera ensuite utili-

sée ici pour comparer les deux principes de filtrage.

4.1. Notions de sensibilité des coefficients et d'indice de sensibilité quadratique.

Nous commençons par rappeler quelques définitions concernant l'écart d'un coefficient et sa conséquence sur la fonction d'affaiblissement. La fonction d'affaiblissement se calcule avec le logarithme de l'inverse de la fonction de transfert $H(z)$. Soit les notations suivantes:

- $H(z) = H(e^{j\phi})$: fonction de transfert du filtre numérique.
- $\phi = \omega T$: pulsation réduite.
- T : période d'échantillonnage.
- X : vecteur des différents coefficients.
- ΔX : vecteur des écarts sur les coefficients quantifiés par rapport à leurs valeurs réelles.

La fonction de transfert $H(z)$ est définie comme:

$$H(z) = H(e^{j\phi}) = A(\phi) e^{jB(\phi)} = |H(z)| e^{j \arg H(z)} \Big|_{z=e^{j\phi}} \quad (4.1)$$

- avec: $A(\phi) = |H(e^{j\phi})|$: réponse en amplitude du système.
- $B(\phi) = \arg H(e^{j\phi})$: réponse en phase du filtre.

D'où l'affaiblissement $A_f(\phi)$ qui s'écrit:

$$A_f(\phi) = -20 \log_{10} A(\phi) = -20 \log_{10} |H(z)| \Big|_{z=e^{j\phi}} \quad (4.2)$$

L'écart sur les coefficients quantifiés ΔX produit une variation $\Delta A_f(\phi)$ de l'affaiblissement qui vaut au premier ordre:

$$A_f(\phi) = \sum_k \frac{\partial A_f}{\partial X_k} \Delta X_k \quad (4.3)$$

Dans les systèmes analogiques, la variation $\Delta A_f(\phi)$ de l'affaiblissement s'exprime en fonction des erreurs relatives $\Delta X_k / X_k$. Les composants analogiques se caractérisent en effet par des tolérances relatives à leurs valeurs, tant en ce qui concerne la précision que la stabilité de ces éléments. Une simple manipulation de l'équation (4.3) définit la sensibilité relative par rapport au coefficient X_k :

$$\Delta A_f(\phi) = \sum_k X_k \frac{\partial A_f}{\partial X_k} \frac{\Delta X_k}{X_k} = \sum_k S_{Rk}(\phi) \frac{\Delta X_k}{X_k}, \quad (4.4)$$

d'où la sensibilité relative des filtres analogiques:

$$S_{Rk}(\phi) = X_k \frac{\partial A_f(\phi)}{\partial X_k} \quad (4.5)$$

Cette définition convient parfaitement lorsque les coefficients d'un système numérique utilisent la représentation en virgule flottante, car la précision sur ces coefficients est connue de façon relative. Dans le modèle numérique à récursion double proche du filtre quasi-continu dont nous allons étudier les sensibilités aux coefficients, nous utilisons une représentation des paramètres en virgule fixe. L'erreur sur la valeur du coefficient X_k est donc donnée de façon absolue:

$$|\Delta X_k| \leq \frac{1}{2} 2^{-n} \quad (4.6)$$

où n désigne le nombre de bits de la partie fractionnaire des coefficients.

L'expression (4.3) définit la sensibilité semi-relative par rapport au coefficient X_k pour un système numérique en virgule fixe:

$$S_{X_k}(\phi) = \frac{\partial A_f(\phi)}{\partial X_k} \quad (4.7)$$

Par la définition de l'affaiblissement (4.1), on calcule aisément la sensibilité S_{X_k} :

$$\begin{aligned} S_{X_k}(\phi) &= -20 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial X_k} (\log_{10} |H(z)|) \Big|_{z=e^{j\phi}} \right\} \\ S_{X_k}(\phi) &= -20 \log_{10} e \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{H(z)} \frac{\partial H(z)}{\partial X_k} \Big|_{z=e^{j\phi}} \right\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Sans perdre de vue que la quantification est un phénomène déterministe et qu'un modèle stochastique peut ne pas expliquer tous les phénomènes apparaissant dans un filtre numérique, nous allons utiliser une méthode statistique pour comparer des structures numériques différentes qui réalisent des fonctions de transfert identiques. Pour cela, posons les hypothèses:

- 1) L'erreur d'arrondi E sur le coefficient X_k est aléatoire, sa densité de probabilité est uniforme entre ses valeurs extrêmes, comme le montre la figure 4.1.

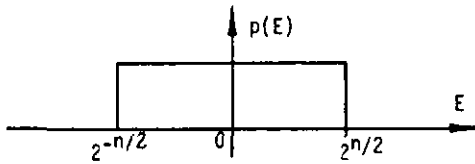


Fig.4.1 : Fonction de densité de probabilité du bruit de quantification avec une opération d'arrondi.

La variance sur cette erreur d'arrondi des coefficients X est:

$$\sigma_x^2 = \frac{2^{-n}}{12} \quad (4.9)$$

- 2) Les diverses erreurs ΔX_k sont statistiquement indépendantes.
- 3) L'écart sur l'affaiblissement $\Delta A_f(\phi)$ est considéré comme une variable gaussienne en première approximation.

La variance de l'écart sur l'affaiblissement $\Delta A_f(\phi)$ s'écrit donc:

$$\sigma_{\Delta A_f}^2 = \sum_k S_{X_k}^2 \sigma_x^2 \quad (4.10)$$

et l'on déduit l'écart quadratique moyen $\sigma_{\Delta A_f}$:

$$\sigma_{\Delta A_f} = \left(\sum_k S_{X_k}^2 \right)^{1/2} \sigma_x = P(\phi) \sigma_x \quad (4.11)$$

La comparaison des structures numériques étudiées dans les précédents chapitres se base sur la fonction $P(\phi)$. Cette fonction est appelée l'indice de sensibilité quadratique et dépend de la fréquence. Parmi deux structures de filtre réalisant une fonction de transfert donnée, le système le moins sensible dans une gamme de fréquence est celui dont l'indice de sensibilité quadratique $P(\phi)$ est le plus faible dans cette gamme.

La valeur d'un polynôme de degré élevé est très sensible aux erreurs commises sur ses coefficients. Il en va de même pour la fonction de transfert des filtres numériques récurrents d'ordre élevé. C'est la raison pour laquelle la forme de cascade d'éléments de second ordre paraît la plus adaptée pour les filtres numériques. Nous comparons donc deux structures numériques de deuxième ordre de telle sorte qu'une mise en cascade de ces cellules réalise des systèmes élaborés d'ordre supérieur.

L'indice de sensibilité quadratique $P(\phi)$ est, d'après (4.11):

$$P(\phi) = \sqrt{\sum_k S_{X_k}^2} \quad (4.12)$$

et se développe avec la fonction de transfert $H(z)$ du système à l'aide de (4.8):

$$P(\phi) = \left| \sum_k (20 \log_{10} e \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{H(z)} \frac{\partial H(z)}{\partial X_k} \right\} \Big|_{z=e^{j\phi}} \right)^2 \Big|^{1/2} \quad (4.13)$$

4.2. Sensibilités aux coefficients des structures directe canonique et à récursion double.

En premier lieu, considérons la structure directe canonique conventionnelle comme celle de la figure 2.1, dont la fonction de transfert est:

$$H(z) = c_0 \frac{z^2 + \Gamma_2 z + \Gamma_1}{z^2 + d_1 z + d_2} \quad (4.14)$$

La formulation analytique des sensibilités individuelles des cinq coefficients de cette structure est aisée:

$$S_{c_0}(\phi) = -20 \log_{10} e \frac{1}{c_0}, \quad S_{\Gamma_1}(\phi) = -20 \log_{10} e \frac{1}{\Gamma_1 + 2 \cos \phi}, \quad S_{\Gamma_2}(\phi) = 0$$

$$S_{d_1}(\phi) = 20 \log_{10} e \frac{d_1 + (1+d_2) \cos \phi}{(1+d_1^2+d_2^2) + 2 d_1 (1+d_2) \cos \phi + 2 d_2 \cos 2\phi} \quad (4.15)$$

$$S_{d_2}(\phi) = 20 \log_{10} e \frac{d_2 + d_1 \cos \phi + \cos 2\phi}{(1+d_1^2+d_2^2) + 2 d_1 (1+d_2) \cos \phi + 2 d_2 \cos 2\phi}$$

Les équations ci-dessus montrent que la sensibilité croît lorsque les pôles et les zéros de la fonction de transfert se rapprochent du cercle unité dans le plan complexe z .

La position des pôles réalisables pour un nombre de bits n des variables est liée aux considérations faites à la figure (3.20). On remarque d'après cette figure pour $|z_{p_i}| < 1$:

$$\operatorname{Re} \{ z_{p_i} \} = -\frac{1}{2} d_1 \quad \text{et} \quad |z_{p_i}| = d_2^{1/2} \quad (4.16)$$

Les coefficients d_1 et d_2 sont arrondis à la valeur multiple de 2^{-n} et les positions de pôles réalisables sont données par des droites verticales

distantes de $-d_1/2$ de l'origine et des cercles de rayon $d_2^{1/2}$. La figure 4.2 illustre la position des pôles réalisables pour le cas où la longueur de mot n est égale à quatre bits.

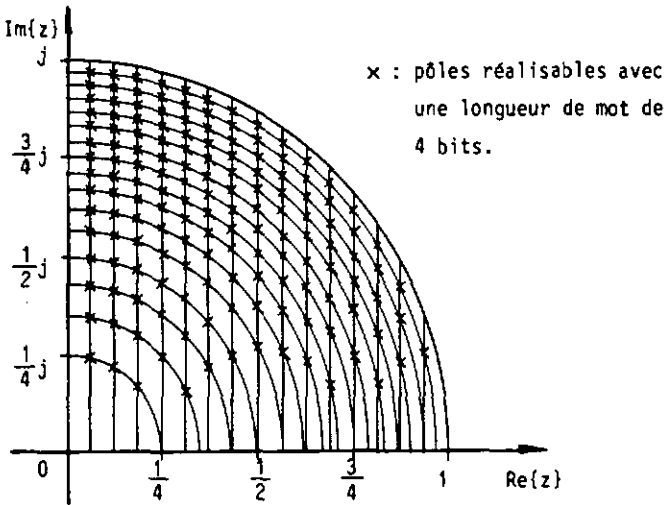


Fig.4.2 : Position des pôles de la structure canonique pour une longueur de mot de 4 bits, selon [18].

Les pôles réalisables occupent les noeuds d'intersection des courbes en (4.16). Rappelons que les pôles voisins de $z = +1$ sont situés à l'intersection de deux courbes qui se coupent sous un angle faible. Un léger déplacement de l'une d'entre elles entraîne donc un glissement de leurs positions beaucoup plus marqué que lorsque ces deux courbes se coupent sous un angle droit.

Avec les équations (4.15), les courbes de sensibilité typiques individuelles montrent des sensibilités élevées sur les coefficients Γ_j du numérateur dans les bandes atténuées. Les coefficients du dénominateur présentent une sensibilité plus importante dans les bandes passantes. Ces courbes de sensibilité sont esquissées ultérieurement afin d'être comparées au modèle numérique par équations de récurrence des filtres quasi-continus.

Avec le modèle numérique par équations de récurrence développé au cha-

pitre 3 (paragraphes 3.5 et 3.6), la fonction de transfert suivante découle:

$$H(z) = a_0 \frac{z^2 + (\gamma_1 T - 2)z + (1 - \gamma_1 T + \gamma_2 \epsilon T^2)}{z^2 + (\delta_1 T - 2)z + (1 - \delta_1 T + \delta_2 \epsilon T^2)} \quad (4.17)$$

La figure 3.18 illustre le schéma numérique correspondant à ce modèle. Dans cette structure, dite également à récursion double (cf. chapitre 2), la position des pôles réalisables pour un nombre de bits n fixé des coefficients s'étudie avec le dénominateur de la fonction de transmission ci-dessus:

$$z_p^2 + (\delta_1 T - 2)z_p + (1 - \delta_1 T + \delta_2 \epsilon T^2) = 0 \quad (4.18)$$

d'où les pôles de la fonction de transfert $H(z)$ dans le cas d'une paire conjuguée complexe:

$$z_{p_{1,2}} = 1 - \frac{\delta_1 T}{2} \pm j \sqrt{\delta_2 \epsilon - \delta_1^2 / 4} T \quad (4.19)$$

De façon analogue à la figure 3.20, les pôles de la fonction de transfert (4.17) sont placés dans le plan complexe z (figure 4.3).

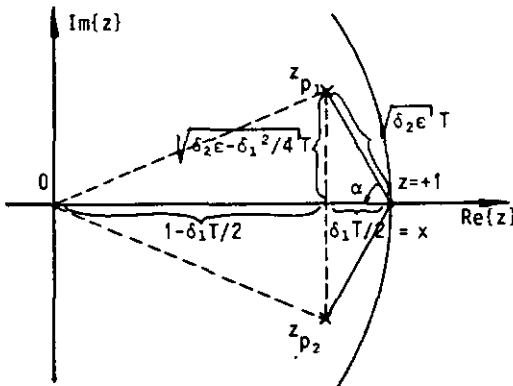


Fig.4.3 : Position des pôles de $T(z)$ dans le plan complexe z d'un filtre quasi-continu par approche numérique.

Il apparaît avec la figure 4.3 que la position des pôles z_{p_i} par rapport aux coefficients δ_1 , δ_2 et ϵ , T doit être comparée relativement au point $z = +1$ du plan complexe et non plus par rapport à l'origine $z = 0$ comme c'é-

tait le cas auparavant.

$$x = \delta_1 T/2 \quad \text{et} \quad R = \sqrt{\delta_2 \epsilon} T \quad (4.20)$$

Soient $\delta_1 T$ et $\delta_2 \epsilon T^2$ les coefficients numériques correspondants au système quasi-continu et les valeurs de ces coefficients arrondies aux multiples de 2^{-n} (où n est le nombre de bits des coefficients), la position des pôles réalisables sous ces hypothèses est fixée par les intersections des droites verticales distantes de $\delta_1 T/2$ du point $z = +1$ et des cercles de rayon $\sqrt{\delta_2 \epsilon} T$ centrés en $z = +1$. La figure 4.4 montre la répartition des pôles lorsque le nombre de bits n est égal à quatre. Lorsque la période de travail minimale T diminue, le nombre de ces cercles et de ces droites augmente dans la proportion inverse.

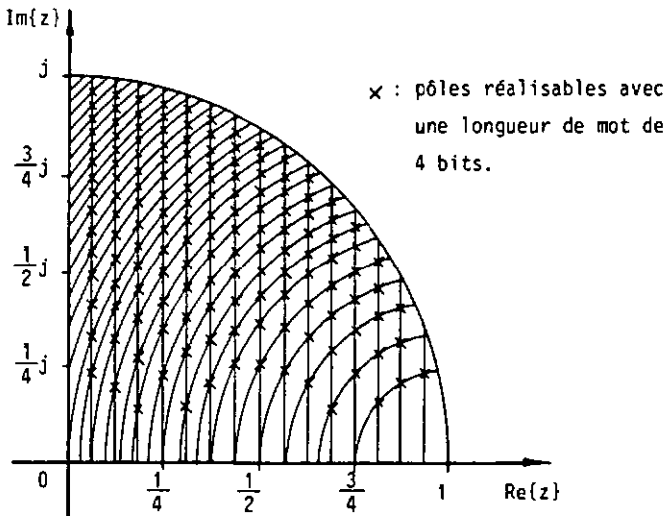


Fig.4.4 : Position des pôles du système quasi-continu approché par modèle numérique, coefficients représentés en virgule fixe avec 4 bits.

Contrairement à la structure directe canonique, les pôles voisins de $z = +1$ sont ici situés à l'intersection de deux courbes qui se coupent sous un angle proche de nonante degrés. Un petit déplacement de l'une d'entre elles ne suscite donc qu'une variation faible de la position du pôle situé au noeud de ces courbes. Ceci va à l'encontre de la remarque faite à propos

de la figure 4.2.

Pour des coefficients tels que les pôles se rapprochent de l'origine ($z=0$), les deux courbes se coupent dans la figure 4.4 sous un angle faible. Cette situation concernant la stabilité des pôles et des zéros donne un avantage à la réalisation d'un système quasi-continu par rapport à la structure directe canonique lorsque les pôles s'approchent fortement du point $z=+1$ du plan complexe. Ce cas correspond d'ailleurs à un rapport élevé entre la fréquence d'échantillonnage et la fréquence de coupure et a déjà été discuté dans le chapitre 2.

La densité locale des pôles d'un filtre numérique à récursion double n'est donc pas homogène à l'intérieur du cercle unité dans le plan z , et elle est moins dense aux abords de $z=+1$. Pour une fréquence de coupure f_c définie et un rapport $r=f_s/f_c$ croissant (donc pour une valeur de la période de travail T décroissante), les nombres $\delta_1 T$ et $\delta_2 \epsilon T^2$ diminuent, provoquant un déplacement des pôles z_{pi} vers le point $z=+1$. Afin de conserver la résolution (densité locale) de la trame définie dans le plan z au voisinage de la zone définissant la fréquence de coupure du système, il convient d'augmenter la longueur de mot totale n_c des coefficients. De plus, une précision relative constante de la position des pôles dans le plan z correspond à maintenir le nombre de bits significatifs n_c^S des coefficients. Comme $n_c^0 = n_c - n_c^S$, le nombre de bits nuls n_c^0 augmente.

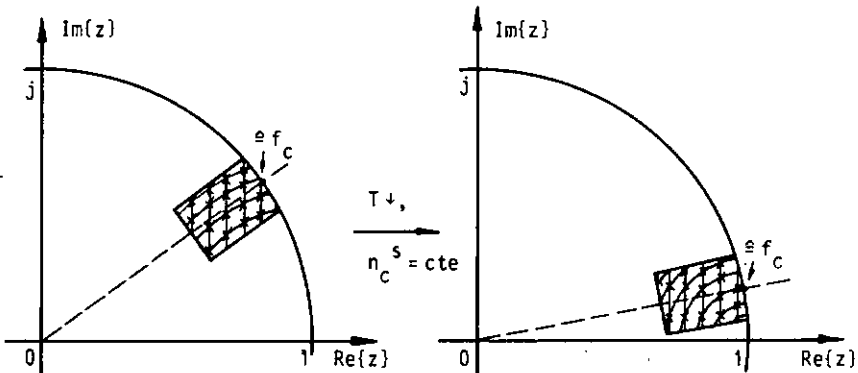


Fig. 4.5 : Déplacement homothétique et conservation de la densité locale de pôles au voisinage de la fréquence de coupure lorsque T diminue.

La figure 4.5 schématise le déplacement homothétique par rapport à $z = +1$ de la trame des pôles et de la fréquence de coupure du modèle numérique dans lequel la période T décroît et où le nombre de bits significatifs n_c^S est maintenu constant. Le facteur de conversion de cette homothétie dépend de la période de travail T .

De la fonction de transfert du modèle numérique à récursion double (4.17) et avec la relation qui définit la sensibilité (4.8), la formulation analytique des sensibilités individuelles du système quasi-continu s'écrit par le groupe d'équations (4.21):

$$\begin{aligned}
 S_{a_0} &= -20 \log_{10} e \frac{1}{a_0} \\
 S_{\gamma_1}(\phi) &= -\frac{20 \log_{10} e T}{a_0} \frac{\cos \phi - \cos 2\phi + (3 - 2\gamma_1 T + \gamma_2 \epsilon T^2) (\cos \phi - 1)}{D_1(\phi)} \\
 S_{\gamma_2}(\phi) &= -\frac{20 \log_{10} e \epsilon T^2}{a_0} \frac{\cos 2\phi + (\gamma_1 T - 2) \cos \phi + 1 - \gamma_1 T + \gamma_2 \epsilon T^2}{D_1(\phi)} \\
 S_{\epsilon}(\phi) &= -\frac{20 \log_{10} e \gamma_2 T^2}{a_0} \frac{\cos 2\phi + (\gamma_1 T - 2) \cos \phi + 1 - \gamma_1 T + \gamma_2 \epsilon T^2}{D_1(\phi)} \\
 &\quad - 20 \log_{10} e \zeta_2 T^2 \frac{\cos 2\phi + (\delta_1 T - 2) \cos \phi + 1 - \delta_1 T + \delta_2 \epsilon T^2}{D_2(\phi)} \\
 S_{\delta_1}(\phi) &= -20 \log_{10} e T \frac{\cos \phi - \cos 2\phi + (3 - 2\delta_1 T + \delta_2 \epsilon T) (\cos \phi - 1)}{D_2(\phi)} \quad (4.21) \\
 S_{\delta_2}(\phi) &= -20 \log_{10} e \epsilon T^2 \frac{\cos 2\phi + (\delta_1 T - 2) \cos \phi + 1 - \delta_1 T + \delta_2 \epsilon T^2}{D_2(\phi)} \\
 D_1(\phi) &= 1 + (\gamma_1 T - 2)^2 + (1 - \gamma_1 T + \gamma_2 \epsilon T^2)^2 + 2(1 - \gamma_1 T + \gamma_2 \epsilon T^2) \cos 2\phi \\
 &\quad + 2(\gamma_1 T - 2)(2 - \gamma_1 T + \gamma_2 \epsilon T^2) \cos \phi \\
 D_2(\phi) &= 1 + (\delta_1 T - 2)^2 + (1 - \delta_1 T + \delta_2 \epsilon T^2)^2 + 2(1 - \delta_1 T + \delta_2 \epsilon T^2) \cos 2\phi \\
 &\quad + 2(\delta_1 T - 2)(2 - \delta_1 T + \delta_2 \epsilon T^2) \cos \phi
 \end{aligned}$$

L'erreur sur la période élémentaire T est admise nulle implicitement dans le groupe d'équations ci-dessus, car la sensibilité correspondante n'a pas été calculée. Pratiquement, un système quasi-continu muni d'un moyen de réglage précis de cette fréquence $1/T$ réalise cette condition, par exemple avec un oscillateur à quartz.

Il est intéressant de noter qu'une légère variation de la période T la plus faible ne peut rendre instable un filtre dont les coefficients du dénominateur déterminent un système stable, ceci lorsque les pôles s'approchent encore de $z = +1$. En effet et comme le montre la figure 4.3, une diminution de cette période T conserve l'angle α entre le rayon vecteur $1z_{p_1}^{\rightarrow}$ et l'horizontale. Cela signifie que le pôle ne peut donc en aucun cas traverser le cercle unité lors d'une variation de cette période T .

4.3. Comparaison des indices de sensibilité quadratique et des longueurs de mot des coefficients.

Les réponses en amplitude et en phase ainsi que les sensibilités individuelles des coefficients des structures directe canonique et à récursion double sont calculées sur ordinateur. Les relations déterminées dans l'annexe B et dans les groupes d'équations (4.15) et (4.21) autorisent les comparaisons des propriétés des systèmes respectifs. L'indice de sensibilité quadratique défini en (4.13) est un résultat dont l'interprétation est facilitée par la présence de périphériques de l'ordinateur tels que terminaux graphiques et traceur de courbes.

Lorsque les coefficients des filtres numériques tendent vers les valeurs limites de structures physiques stables (cf. figure 3.21), c'est-à-dire si le rapport fréquence d'échantillonnage à fréquence de coupure est élevé, les expressions (4.15) et (4.21) apportent un problème d'analyse numérique supplémentaire. Dans un tel cas, les sensibilités individuelles sont des quotients de différences de valeurs très faibles de type:

$$S_X(\phi) = \frac{N_+(\phi) - N_-(\phi)}{D_+(\phi) - D_-(\phi)}, \quad (4.22)$$

où $N_+(\phi)$ et $N_-(\phi)$ ainsi que $D_+(\phi)$ et $D_-(\phi)$ prennent des valeurs élevées et très voisines avec des différences $N_+(\phi) - N_-(\phi)$ et $D_+(\phi) - D_-(\phi)$ qui portent sur les quinzième ou seizième décimales. Dans ces conditions, une nouvelle analyse des formules (4.15) et (4.21) doit être envisagée, qui tienne compte de cet aspect analyse numérique du problème. Une seconde solution consiste à travailler avec les relations établies et avec une précision de travail accrue sur l'ordinateur, expressément demandée lors de l'élaboration du logiciel. Remarquons que ce problème se produit également lors du calcul des coefficients du filtre numérique de simulation d'un système analogique; une solution est exposée dans l'annexe B.

La réponse en amplitude d'un filtre numérique dont la fonction de transfert est fixée par l'équation (2.1) s'écrit:

$$H(\omega) = \frac{(c_0 \cos 2\omega T + c_1 \cos \omega T + c_2)^2 + (c_0 \sin 2\omega T + c_1 \sin \omega T)^2}{(\cos 2\omega T + d_1 \cos \omega T + d_2)^2 + (\sin 2\omega T + d_1 \sin \omega T)^2} \quad (4.23)$$

La réponse en phase $\phi(\omega)$ vaut:

$$\phi(\omega) = \text{Arc tan} \frac{N_{\phi}(\omega)}{D_{\phi}(\omega)} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \text{avec: } N_{\phi}(\omega) &= (c_0 \sin 2\omega T + c_1 \sin \omega T)(\cos 2\omega T + d_1 \cos \omega T + d_2) - \\ &\quad - (c_0 \cos 2\omega T + c_1 \cos \omega T + c_2)(\sin 2\omega T + d_1 \sin \omega T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{\phi}(\omega) &= (c_0 \cos 2\omega T + c_1 \cos \omega T + c_2)(\cos 2\omega T + d_1 \cos \omega T + d_2) - \\ &\quad - (c_0 \sin 2\omega T + c_1 \sin \omega T)(\sin 2\omega T + d_1 \sin \omega T) \end{aligned}$$

Les réponses en amplitude et en phase (4.23) et (4.24) sont valables pour tout système numérique récursif de second degré, en particulier aussi pour la structure à récursion double de la figure (3.18). Dans ce dernier cas, nous utilisons en complément les formules d'équivalence (3.77).

Choisissons tout d'abord un exemple de filtre numérique direct canonique de rapport fréquence d'échantillonnage à fréquence de coupure pas élevée ($r = 10$). La répartition des pôles et des zéros de ce système de deuxième degré se trouve à la figure 4.6 et montre un pôle d'atténuation (c'est-à-dire un zéro de transmission) de la fonction de transfert.

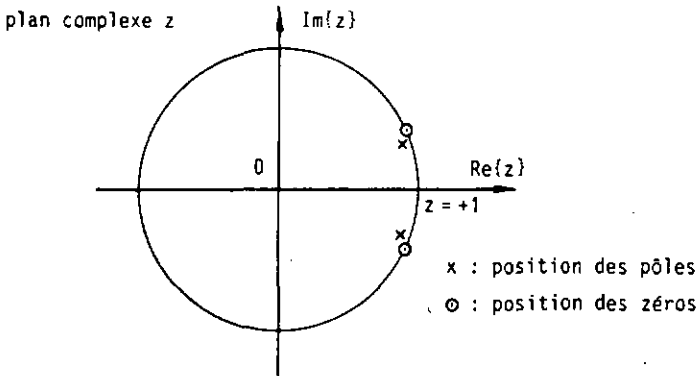


Fig. 4.6 : Position des pôles et des zéros d'un filtre passe-bas ayant deux pôles et deux zéros.

Avec une fréquence d'échantillonnage $f_s = 10^4$ Hz, le filtre possède une fréquence de coupure $f_c = 10^3$ Hz et un zéro de la fonction de transfert à

1200 Hz environ. Les coefficients sont déterminés par la position des pôles et des zéros dans le plan complexe z :

$$\begin{aligned} z_{p_i} &= \frac{11}{12} \pm j \frac{1275}{3600} \\ z_{o_i} &= \frac{32726}{36000} \pm j \frac{15}{36} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Ces pôles et zéros imposent la fonction de transmission:

$$H(z) = \frac{z^2 - 1,818118686 + 1}{z^2 - 1,833333333 z + 0,965711806} \quad (4.26)$$

Les équations (4.23) et (4.24) permettent de tracer les courbes de réponse en amplitude et en phase indiquées à la figure 4.7. Ce filtre numérique est un passe-bas avec un zéro de transmission.

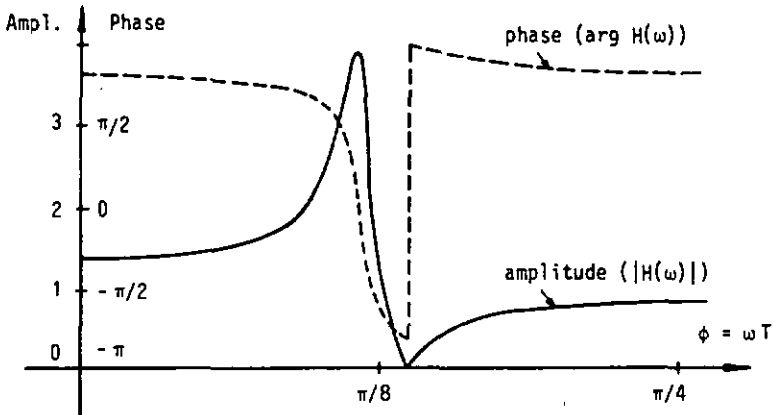


Fig. 4.7 : Amplitude et phase de l'exemple de filtre passe-bas (4.26).

Les deux figures 4.8 et 4.9 suivantes donnent les courbes de sensibilité individuelles de ce filtre passe-bas déterminées d'après le groupe (4.15), ainsi que l'indice de sensibilité quadratique (4.13) en fonction de la fréquence circulaire réduite ϕ .

L'indice de sensibilité quadratique $P(\phi)$ de la figure 4.9 met particulièrement en évidence les différentes remarques faites auparavant concernant la sensibilité des coefficients du numérateur (zéros de $H(z)$) dans la bande atténuée et le rôle des coefficients du dénominateur de (4.26) dans

la bande passante.

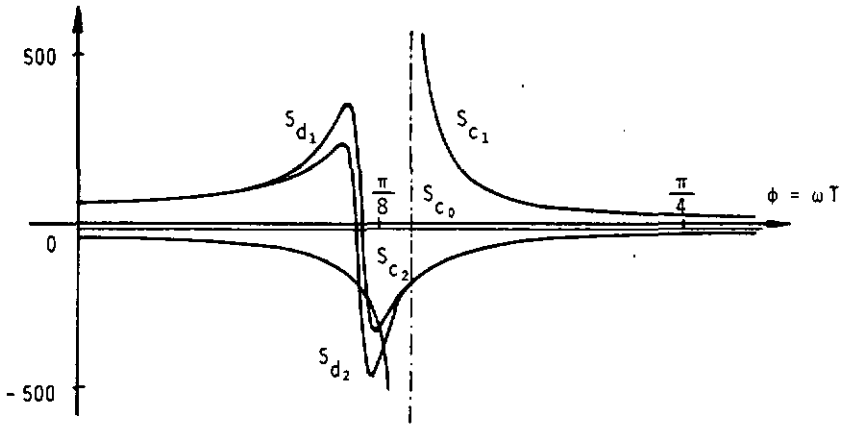


Fig. 4.8 : Sensibilités individuelles en fonction de la fréquence du filtre passe-bas (4.26).

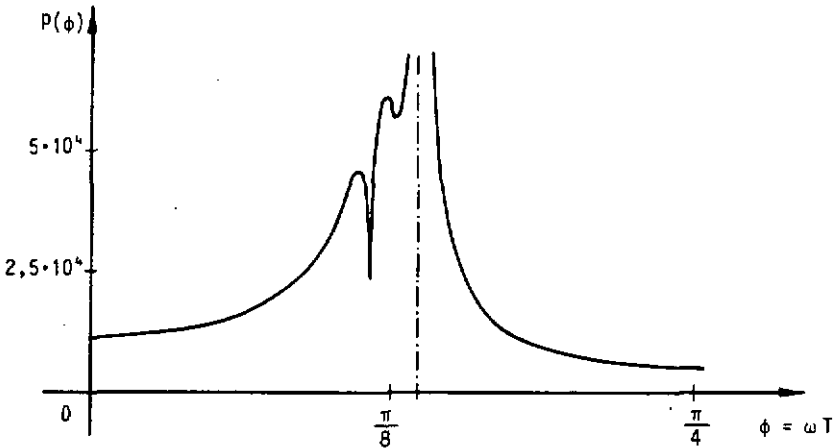


Fig. 4.9 : Indice de sensibilité quadratique $P(\phi)$ en fonction de la fréquence pour le filtre passe-bas (4.26).

Nous allons maintenant montrer l'effet de l'augmentation de la fréquence d'échantillonnage sur un filtre passe-bas de structure classique. Pour un filtre passe-bas dont les pôles et les zéros sont beaucoup plus proches du

cercle unité et du point $z = +1$ que le cas précédent ($f_s = 2^{16}$ Hz), la fonction de transfert devient:

$$H(z) = \frac{z^2 - 2z + 1,000022}{z^2 - 1,998046875z + 0,998048526} \quad (4.27)$$

La figure 4.10 illustre ce rapprochement des pôles et des zéros de $z = +1$.

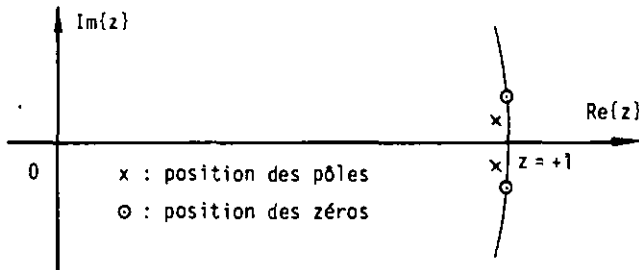


Fig. 4.10: Position des pôles et des zéros d'un filtre passe-bas avec un rapport élevé fréquence d'échantillonnage à fréquence de coupure.

Les figures 4.11, 4.12 et 4.13 représentent respectivement les réponses en amplitude (4.23) et en phase (4.24) du système, les sensibilités individuelles données par (4.15) et l'indice de sensibilité quadratique de la structure défini en (4.13).

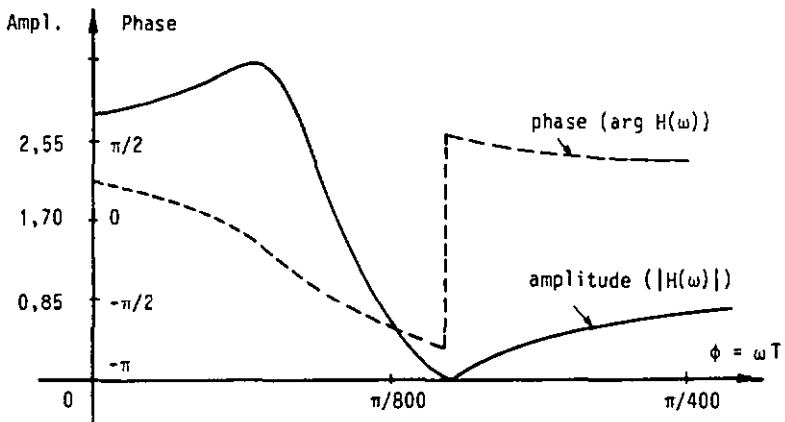


Fig. 4.11 : Réponse en amplitude et en phase du filtre passe-bas (4.27).

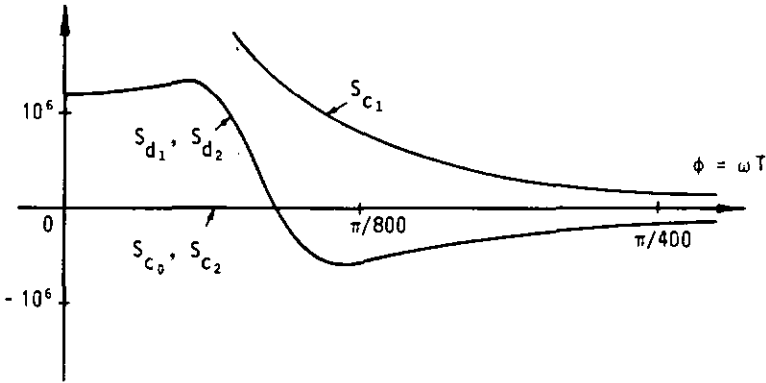


Fig. 4.12 : Sensibilités individuelles du filtre passe-bas (4.27).

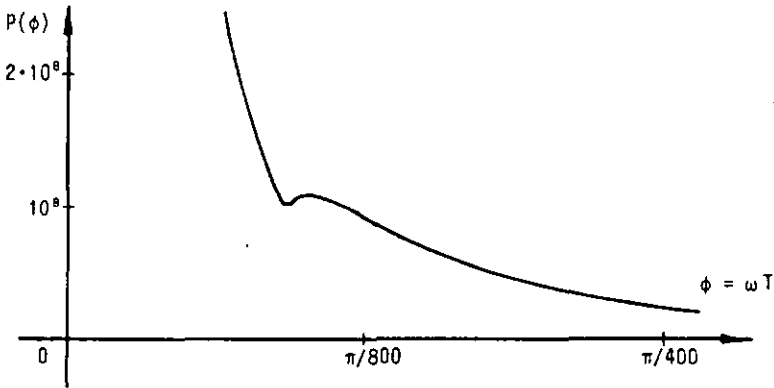


Fig. 4.13 : Indice de sensibilité quadratique $P(\phi)$ du filtre passe-bas (4.27).

Les augmentations de sensibilité constatées sur ce dernier filtre par rapport au précédent prouvent une nouvelle fois qu'une structure numérique directe canonique ne tolère pas des zéros et des pôles proches du cercle unité et du point $z = +1$.

Le troisième exemple considère le même filtre passe-bas de second ordre réalisé avec le modèle approché du filtre quasi-continu, c'est-à-dire par la structure à récursion double de la figure 3.18. Dans ce système, les valeurs numériques de la fonction de transfert (4.27) sont conservées,

mais la fonction de transfert est produite à partir de l'équation (3.74). Dans le but de simplifier les calculs des sensibilités individuelles et d'offrir une comparaison adéquate avec les sensibilités de la structure directe canonique basées sur (4.14), nous éliminons le coefficient ϵ en le groupant avec les autres coefficients γ_2 et δ_2 :

$$\begin{array}{ll} \gamma_2 \epsilon \rightarrow a_2 & \text{de plus:} \quad \gamma_1 \rightarrow a_1 \\ \delta_2 \epsilon \rightarrow b_2 & \delta_1 \rightarrow b_1 \end{array} \quad (4.28)$$

Les substitutions proposées n'enlèvent rien à la qualité de l'estimation des sensibilités individuelles, il s'agit en fait d'une opération de changement de variables. Ce changement de variables est introduit minutieusement dans les expressions (4.21) et le calcul fournit ensuite les courbes de sensibilités individuelles S_{a_1} , S_{a_2} , S_{b_1} et S_{b_2} des figures 4.14 à 4.17. L'indice de sensibilité quadratique $P(\phi)$ est esquissé à la figure 4.18.

O'après ces résultats, nous constatons que les sensibilités sont beaucoup plus faibles avec le circuit à récursion double qu'avec la structure directe canonique. Cette remarque est une preuve expérimentale supplémentaire des constatations avancées précédemment à propos de la figure 4.4. Ces constatations se basaient sur l'angle proche de nonante degrés fait par l'intersection des courbes qui définissent les pôles dans le plan z.

L'indice de sensibilité quadratique $P(\phi)$, dont l'allure est donnée par les graphes des figures 4.9, 4.13 et 4.18 pour les trois exemples pris, permet de constater l'évolution de la sensibilité des filtres numériques lors de l'augmentation de la fréquence d'échantillonnage. Dans la bande passante du filtre canonique, l'indice de sensibilité est de l'ordre de 10^4 pour une fréquence d'échantillonnage relativement faible, alors que cet indice de sensibilité est de l'ordre de 10^6 pour une fréquence d'échantillonnage 50 fois plus élevée. En ce qui concerne le filtre à récursion double correspondant (3ème exemple), l'indice de sensibilité quadratique diminue de façon très marquée dans la bande passante du filtre passe-bas; les sensibilités individuelles dans la bande bloquante tendent vers l'infini au voisinage d'un pôle d'atténuation, comme dans le cas des systèmes numériques conventionnels.

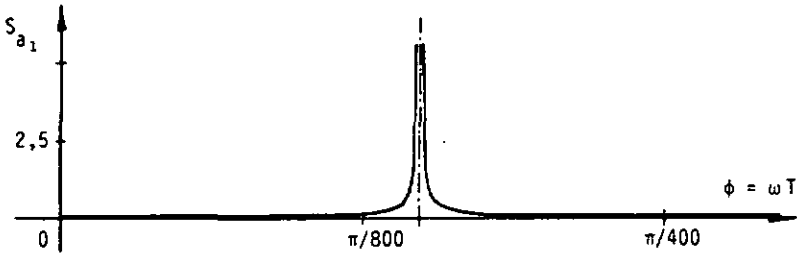


Fig.4.14 : Sensibilité individuelle S_{a_1} du filtre à récursion double (4.28).

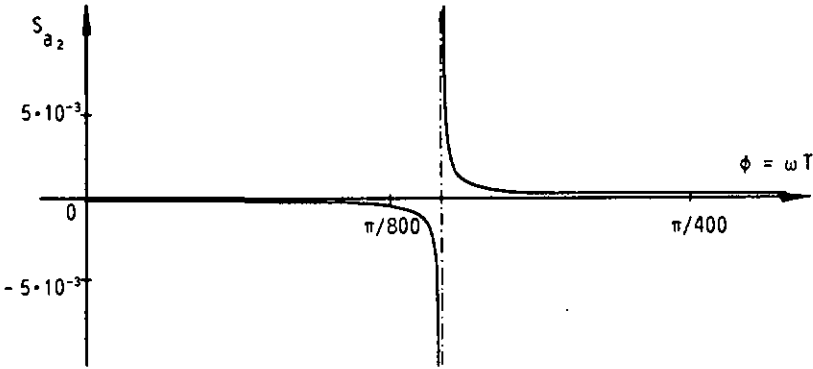


Fig.4.15 : Sensibilité individuelle S_{a_2} du filtre à récursion double (4.28).

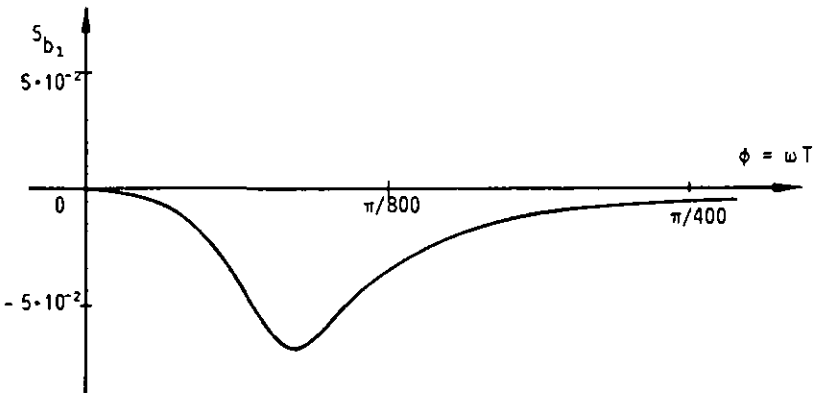


Fig.4.16 : Sensibilité individuelle S_{b_1} du filtre déduit de (4.28).

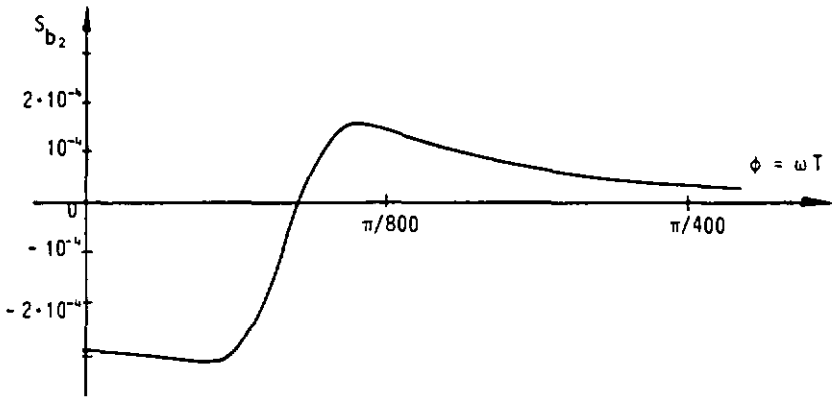


Fig.4.17 : Sensibilité individuelle S_{b_2} du filtre tiré de (4.28).

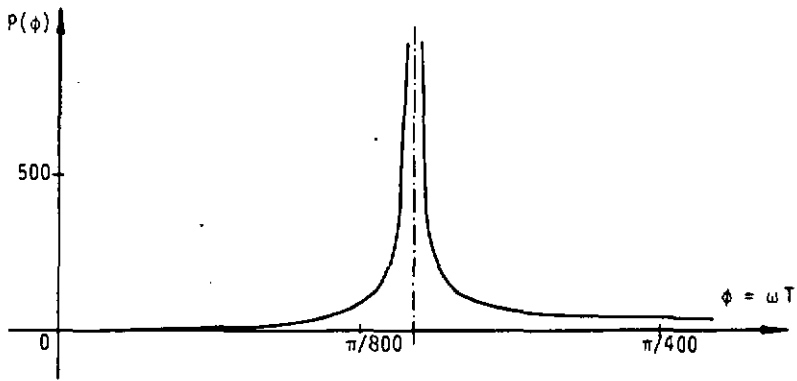


Fig.4.18 : Indice de sensibilité quadratique $P(\phi)$ du filtre tiré de la substitution (4.28).

La réduction de sensibilité apparaît clairement par examen des relations (4.21): les sensibilités sont en effet inversement proportionnelles à la fréquence d'échantillonnage. En effet, lorsque la fréquence d'échantillonnage augmente, la trame définie à la figure 4.3 diminue de taille en proportion avec sa maille élémentaire.

En conséquence et pour un filtre de caractéristiques fixées, la longueur de mot des coefficients d'un filtre numérique quasi-continu est plus faible

que celle d'un filtre numérique de structure directe canonique de fréquence d'échantillonnage identique. Cette observation est valable lorsque les pôles de la fonction de transfert sont proches du point $z = +1$ du plan complexe z .

La longueur de mot des coefficients d'un filtre quasi-continu est maintenant estimée relativement à la structure conventionnelle à l'aide des relations (4.9) et (4.11). Si l'on suppose un écart quadratique moyen sur la variation de l'affaiblissement $\sigma_{\Delta A_f}$ maximal dans un intervalle de fréquence, il est possible de déduire le rapport des longueurs de mot des coefficients des deux types de réalisation numérique quasi-continue et directe canonique. De (4.11):

$$\overline{\sigma_{\Delta A_f}} = \overline{P(\phi)}_{\text{num}} \sigma_{x_{\text{num}}} = \overline{P(\phi)}_{\text{qu-c}} \sigma_{x_{\text{qu-c}}} = \text{constante} \quad (4.29)$$

Les figures 4.13 et 4.18 donnent l'indice de sensibilité $P(\phi)$ dans les deux cas retenus et permettent de déduire une valeur $P(\phi)$ moyenne dans le cas d'un filtre passe-bas très sélectif:

$$\overline{P(\phi)}_{\text{num}} \cong 10^8 \quad \text{et} \quad \overline{P(\phi)}_{\text{qu-c}} \cong 10^2 \quad (4.30)$$

En introduisant l'écart sur l'erreur d'arrondi (4.9) dans l'équation (4.29), on trouve une expression fixant la longueur de mot des coefficients du système quasi-continu $n_{\text{qu-c}}$:

$$n_{\text{qu-c}} = n_{\text{num}} - \frac{1}{2 \log_{10} 2} \log_{10} \frac{P_{\text{qu-c}}}{P_{\text{num}}} \quad (4.31)$$

Il vient numériquement, par (4.30):

$$n_{\text{qu-c}} \cong n_{\text{num}} - 10 \quad (4.32)$$

Si l'on imagine un système direct canonique sélectif qui demande par exemple une longueur de mot des coefficients de 18 bits (définition des coefficients à $3 \cdot 10^{-6}$ près), le même filtre réalisé par la structure quasi-continue ne nécessite qu'une longueur de mot des coefficients de 8 bits. Ces valeurs offrent un aperçu des possibilités d'applications attrayantes des filtres numériques quasi-continus lorsque le rapport fréquence d'échantillonnage à fréquence de coupure est élevé.

D'autres structures numériques, comme par exemple celle proposée en [24], définissent une trame régulière dans le plan complexe z , et sont ainsi bien adaptées du point de vue de la quantification des coefficients pour toute caractéristique de filtrage.

Notons que le deuxième type d'erreur, qui résulte de la quantification de produits, peut être analysé par différentes approches. L'approche théorique comprendrait une étude complète des effets non-linéaires dus aux multiplicateurs à taux programmables. La méthode expérimentale utilise quant à elle la simulation sur ordinateur des structures quasi-continues développées à l'aide des équations paramétriques du chapitre 3 [13].

Dans ce chapitre est apparue une propriété remarquable du modèle numérique à récursion double des filtres quasi-continus. En effet, nous avons montré que la densité relative des pôles dans le plan z (définie par une trame) est constante pour les filtres à récursion double dans la zone du plan concernant la fréquence de coupure. Ce fait est une conséquence d'une définition des coefficients en précision relative, et qui présentent une partie importante de bits nuls et une partie constante de bits significatifs. Une structure à récursion double peut être réalisée de façon numérique avec une arithmétique à virgule flottante ou avec un filtre quasi-continu qui possède une arithmétique incrémentale particulière de même type.

En revanche, dans les filtres numériques à structure directe canonique, les coefficients sont implantés de manière absolue. Lorsque le rapport $r = f_s/f_c$ augmente, le maintien de la densité des pôles dans le plan z au voisinage de la zone concernant la fréquence de coupure exige une définition absolue des coefficients croissante. La conséquence directe de ce fait est l'augmentation de la complexité de l'arithmétique de réalisation de ces structures numériques conventionnelles.

5. CONCLUSIONS - COMPLEXITE DE REALISATION.

Dans les précédents chapitres, nous avons évoqué la réduction du nombre de bits des coefficients et des variables des filtres numériques quasi-continus relativement aux filtres numériques conventionnels. Ce sont en particulier les opérations de multiplication des variables par des coefficients fixes qui nécessitent une mise en oeuvre considérable dans les systèmes conventionnels (multiplication de type parallèle-parallèle ou série-parallèle) ou encore l'utilisation d'un processeur spécialisé pour le traitement des signaux.

Nous examinons à présent la complexité de réalisation des filtres numériques quasi-continus relativement à d'autres techniques de filtrage, comme les filtres à capacités commutées et les filtres numériques conventionnels qui trouvent des applications similaires aux systèmes quasi-continus (basses fréquences et systèmes hautement intégrés). Cette comparaison porte non seulement sur la densité d'intégration par élément de filtrage obtenue dans les différentes techniques, mais également en ce qui concerne les performances de ces systèmes, telles que l'universalité de la structure utilisée, la sélectivité ou encore la valeur maximale de la fréquence de coupure réalisable.

5.1. Comparaison de différentes technologies de filtres monolithiques.

Evaluons la surface d'intégration sur une puce occupée par les éléments de base des circuits logiques. Pour cela, nous supposons une technologie centrée sur les transistors MOS de canal n et de canal p, ainsi que de leur conjonction en technique CMOS. La longueur de grille L_g est une dimension linéaire primordiale significative de l'état de maîtrise des procédés physiques et chimiques utilisés pour l'élaboration de cette technologie. La figure 5.1 montre le schéma d'implantation d'un transistor MOS à canal n sur un substrat de Silicium. En partant de la configuration géométrique d'un transistor MOS, la longueur de canal L_g fixe l'encombrement d'un transistor élémentaire. En conséquence, l'encombrement relatif d'une porte ou d'une bascule peut être évalué si l'on connaît le nombre de transistors constitutifs de chacun des éléments.

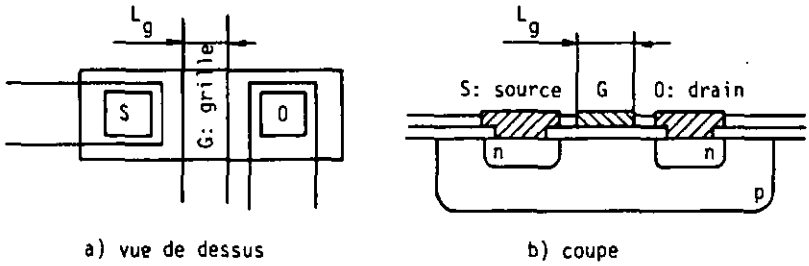


Fig.5.1 : Implantation d'un transistor MOS de canal n sur un substrat de Silicium.

Type d'élément	Surface intégrée S_{Si} relative à L_g : S_{Si}/L_g [μm]	Nombre d'éléments N par surface int. rel. $N L_g/S_{Si}$ [$\mu\text{m}/\text{mm}^2$]
<p>transistors n-MOS + p-MOS</p>	550	1820
<p>porte NAND CMOS</p>	3500	286
<p>bascule D CMOS</p>	8200	122
<p>bascule JK CMOS</p>	12000	83

Fig.5.2 : Densité d'intégration d'éléments logiques relativement à la longueur de grille L_g .

La figure 5.2 donne la densité d'intégration d'éléments relativement à la longueur L_g de la grille. Conformément à [41] et à [45], notons que la surface occupée par un élément logique sur une puce est proportionnelle à la longueur du canal L_g en première approche pratiquement, alors qu'une considération théorique simple fixe plutôt cette proportionnalité à la longueur de grille élevée au carré.

La surface intégrée relative à la longueur de grille S_{Si}/L_g est une grandeur exprimée en μm à la figure 5.2, et qui dépend du type d'élément. La surface absolue occupée par cet élément intégré sur une puce s'obtient par multiplication de cette grandeur S_{Si}/L_g par la longueur de grille L_g .

La partie droite du tableau de la figure 5.2 renseigne à propos du nombre d'éléments par unité de surface relativement à la longueur du canal. Le nombre d'éléments par mm^2 est déduit par division de cette grandeur par la longueur de grille L_g , exprimée en μm .

Afin de comparer différentes techniques de filtrage avec les filtres quasi-continus, nous évaluons maintenant les surfaces intégrées d'une structure numérique et d'un filtre quasi-continu de performances comparables. Pour cette raison, il convient d'établir une démarche de comparaison cohérente qui tienne compte d'une estimation de paramètres fondamentaux identiques dans les deux réalisations.

En premier lieu, nous choisissons la technique d'intégration dite MOS-complémentaire à haute vitesse (High-Speed CMOS) comme référence de base, ce qui fixe la fréquence maximale d'horloge qui peut être utilisée dans des systèmes utilisant cette technologie:

$$f_H = 20 \text{ MHz} \quad (5.1)$$

Dans le filtre quasi-continu que nous allons estimer, nous admettons que la longueur de mot n_v des variables prises en contre-réaction et que la longueur de mot significative n_c^S des coefficients sont données par:

$$n_v = n_c^S = 8 \text{ bits} \quad (5.2)$$

Les deux grandeurs précédentes f_H et n_v déterminent la fréquence d'é-

chantillonnage maximale des systèmes numériques à évaluer, ceci d'après la relation (2.11) du second chapitre:

$$f_s = \frac{f_H}{2^{n_v}} \cong 80 \text{ kHz} \quad (5.3)$$

En ce qui concerne la longueur de mot totale n_a des différents coefficients et des variables du filtre numérique, une première estimation dans le cas d'une structure sélective porte ce paramètre à une valeur voisine ou inférieure à 20. Il en découle, si l'on utilise un multiplieur de type série-parallèle, que la période de temps T_{op} nécessaire à une opération de multiplication vaut:

$$T_{op} = \frac{\text{nombre d'opérations élémentaires}}{f_H} \cong 1 \mu\text{s} \quad (5.4)$$

Ce filtre numérique est réalisé avantageusement avec un processeur de traitement des signaux, comprenant ainsi un unique multiplieur de type série-parallèle utilisé en multiplex de temps, et d'autres éléments indispensables tels que un additionneur, des mémoires pour les variables et les coefficients ainsi qu'un système de séquençement.

Le degré du filtre numérique basé sur un processeur de traitement des signaux avec cette limitation du temps d'opération T_{op} donné en (5.4) est déduit du nombre de multiplications N_m réalisables dans la période $T = 1/f_s$:

$$N_m = \frac{T}{T_{op}} \cong 12 \quad (5.5)$$

C'est un filtre numérique de 5ème ordre général qui possède approximativement ce nombre de multiplications élémentaires. En effet, un tel système est constitué d'une cascade de deux structures de deuxième ordre et d'une structure de premier ordre. Quatre multiplications sont nécessaires par filtre de second ordre, alors que deux multiplications par des coefficients fixes suffisent dans un premier ordre. Enfin, le facteur d'amplification est fixé par une multiplication supplémentaire.

Le calcul de la complexité de ce filtre numérique de 5ème ordre réalisé avec un processeur de traitement des signaux donne, en fonction des paramètres longueur de grille L_g et longueurs de mot n_v et n_c^0 :

$$S_{Si_{FN}} \cong 0,306 L_g (n_c^0 + n_v) \quad [nm^2] \quad (5.6)$$

La complexité d'une structure quasi-continue de 5ème ordre de performances identiques au filtre numérique précédent est estimée avec des paramètres comparables. Dans le filtre quasi-continu, lorsque la sélectivité augmente (représentée ici par n_c^0), la longueur de mot n_v des variables appliquées sur les multiplicateurs à taux programmables reste constante. Notons que cela n'est pas le cas dans les filtres numériques où la longueur de mot des variables est donnée par $n_a = n_c^0 + n_v$ bits. Ce fait entraîne un accroissement de la complexité plus fort dans les structures numériques que dans les filtres quasi-continus lorsque la sélectivité augmente. La surface intégrée sur Silicium S_{Si} d'un système quasi-continu de 5ème ordre vaut ainsi approximativement:

$$S_{Si_{FQC}} \cong 0,1375 L_g n_c^0 + 0,5545 L_g n_v \quad [\text{mm}^2] \quad (5.7)$$

Les deux équations (5.6) et (5.7) permettent d'établir des graphiques de comparaison des complexités respectives lorsque la sélectivité augmente (figure 5.3) et lorsque la longueur de grille diminue (figure 5.4).

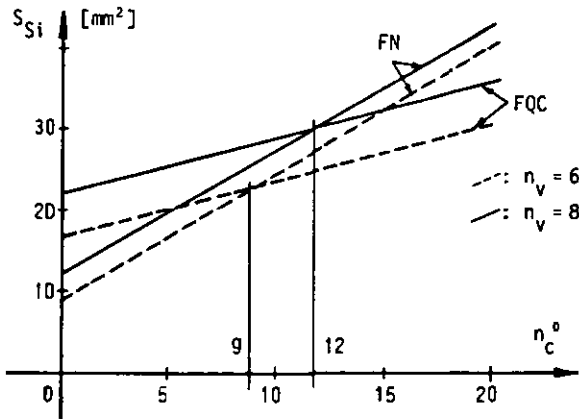


Fig.5.3 : Complexité d'intégration d'un filtre numérique (FN) avec processeur de traitement de signaux et d'un filtre quasi-continu (FQC) en fonction de la sélectivité (ici n_c^0); cas d'un 5ème ordre; longueur de mot des variables n_v comme paramètre.

Dans la mesure où une telle comparaison reste valable, nous ajoutons à la figure 5.4 les complexités respectives de deux systèmes de filtrage

supplémentaires. Il s'agit d'un filtre analogique échantillonné à capacités commutées de 5ème ordre et d'une structure numérique basée sur un processeur de traitement de signaux mise au point par les laboratoires Bell, aux États-Unis [41]. De tels filtres sont utilisés dans le domaine de la téléphonie.

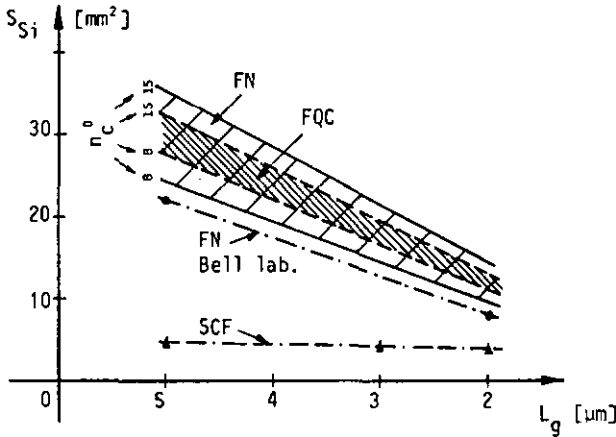


Fig.5.4 : Surface intégrée sur Silicium de systèmes de 5ème ordre en fonction de la longueur de grille L_g : \diagdown filtre numérique CMOS, \diagup filtre quasi-continu CMOS, \dashrightarrow filtre numérique des laboratoires Bell, \cdots filtre à capacités commutées.

Les structures à capacités commutées présentent des possibilités d'intégration beaucoup plus fortes que les filtres numériques conventionnels ou quasi-continus, comme le montre la figure 5.4. Cet avantage diminue au fur et à mesure de l'amélioration de l'état de la technologie, représenté par la longueur de canal des transistors MOS dans ce graphique. Ceci s'explique par le fait que le processeur numérique de traitement des signaux dont on a recours dans le filtre numérique est composé au moins d'un multiplieur très performant; l'intégration de ce processeur devient plus aisée au fur et à mesure de l'état d'avancement des techniques. En revanche, une structure à capacités commutées est formée d'amplificateurs opérationnels, de commutateurs et de capacités. Ces dernières occuperont pratiquement toujours la plus grande partie de la surface d'intégration, pour n'importe quelle longueur de grille L_g .

Dans la figure 5.3, il apparaît une valeur critique de n_c^0 (qui représente ici la sélectivité) telle que si la sélectivité augmente encore, une structure quasi-continue devient plus avantageuse à réaliser que la structure numérique correspondante. Les filtres numériques quasi-continus sont comparables en complexité aux systèmes numériques conventionnels plutôt qu'aux filtres à capacités commutées (figure 5.4).

Un regard objectif sur les performances respectives de ces trois structures ne serait pas apporté si seule la complexité à l'intégration était examinée ici. Pour rendre mieux compte de ces performances, nous dressons à la figure 5.5 un tableau comparatif des propriétés principales des différentes structures énumérées auparavant ainsi que des filtres analogiques actifs. Dans ce tableau qualitatif, outre les valeurs relatives des surfaces intégrées sur une puce, nous comparons des facteurs comme l'universalité du principe du filtrage considéré, les puissances dissipées moyennes, les valeurs extrémales des fréquences de coupure ainsi que le rapport fréquence d'échantillonnage à fréquence de coupure. Par structure universelle, nous entendons ici un système capable, à partir du même circuit, de réaliser n'importe quel discriminateur de fréquence. Cela signifie que les coefficients du filtre peuvent être introduits par une manipulation extérieure au circuit, de façon à déterminer non seulement le type de filtre choisi, mais également ses spécifications précises. Ainsi, un filtre numérique conventionnel de deuxième degré possède cinq coefficients, tous placés dans des mémoires vives ou reprogrammables, qui peuvent être changés à volonté. Un circuit à capacités commutées est en revanche mis en oeuvre avec des capacités intégrées sur une puce, et le rapport entre ces capacités prises deux à deux fixe ces différents coefficients. Il apparaît alors clairement que les filtres à capacités commutées, contrairement aux filtres numériques, ne sont pas des structures universelles.

Il est intéressant de remarquer que les filtres monolithiques considérés présentent des performances de filtrage distinctes en ce qui concerne leur fréquence de coupure f_c et leur sélectivité. Les circuits à capacités commutées sont limités dans les basses fréquences de coupure du fait de la surface limitée des capacités implantables sur une puce. Les systèmes quasi-continus trouvent d'intéressantes applications lorsque la fréquence

Type de filtre Argument	Filtres actifs	Filtres à capacités commutées	Filtres numériques	Filtres numériques quasi-cont.
Traitement des signaux	analogique, continu	analogique, discret	numérique, discret	numérique, discret
Possibilité d'intégration	non	oui	oui	oui
Surface intégrée S_{Si}	—	faible	élevée	élevée
Puissance dissipée P_d	très grande	grande	faible	faible
Structure universelle	non	non	oui	oui
Fréquence de coupure f_c	peut être grande	$f_c \geq 100$ Hz $f_c \leq 50$ kHz	≤ 200 kHz	≤ 10 kHz
Rapport r $r = f_s/f_c$	—	moyen	faible (typiqu.)	élevé

Fig. 5.5 : Comparaison des performances de différents types de filtre.

de coupure est très faible et si la sélectivité (ici fixée par le rapport r entre les fréquences d'échantillonnage et de coupure) est élevée, comme indiqué à la dernière ligne du tableau de la figure 5.5. Remarquons qu'un filtre numérique conventionnel présentant un rapport r plus élevé est possible. Il existe naturellement en pratique d'autres circonstances où l'un ou l'autre type de filtrage apparaît plus adéquat. Citons par exemple le cas où le signal à traiter est déjà sous une forme analogique ou numérique, dans lequel la solution de filtrage choisie est du même type.

5.2. Expérimentation d'une structure quasi-continue programmable.

La description des phénomènes des chapitres précédents est vérifiée par la mise au point de circuits numériques quasi-continus et par leur expérimentation. Un système qui peut réaliser tous les types de filtre par programmation des coefficients présente une forme globale complexe. Le schéma de principe d'un système quasi-continu programmable est imaginé et décrit à la figure 5.6. Un tel appareil permet de définir librement les degrés de liberté dus à la structure programmable retenue et d'effectuer une étude expérimentale de cette structure. Deux parties distinctes constituent le système entier: la première partie s'identifie avec le microprocesseur de commande des opérations, entouré des périphériques d'entrée-sortie comme le clavier et l'écran cathodique (CRT), ainsi que les portes de sortie qui transmettent les valeurs de commande à la seconde partie. La deuxième partie du système concerne l'élément propre de filtrage. Cet élément est constitué d'un convertisseur analogique-numérique et d'un convertisseur numérique-analogique de douze chiffres binaires chacun, entre lesquels sont insérés les filtres quasi-continus proprement dits. Ces filtres quasi-continus comprennent des signaux d'entrée et de sortie de type numérique, identiques au cas du filtre quasi-continu de première forme de la figure 1.32 (chapitre 1). Une solution duale pour une telle structure (figure 1.33) aurait été possible par le choix de convertisseurs tension-fréquence et fréquence-tension comme éléments d'entrée-sortie des signaux analogiques. Dans un tel cas, les variables d'entrée et de sortie seraient des fréquences, tout comme dans le filtre quasi-continu de seconde forme de la figure 1.33. La première solution est préférée ici par le fait que la technologie des convertisseurs analogique-numérique et numérique-analogique connaît un développement plus marqué que l'autre technique de conversion, par son utilisation courante dans les développements à microprocesseurs.

Aux éléments déjà énumérés, nous ajoutons encore une logique de commande des différents filtres ainsi qu'un système complet de synchronisation. La logique de commande comprend des circuits qui constituent les fréquences correspondantes aux coefficients du filtre (cf. figure 1.32). Notons encore

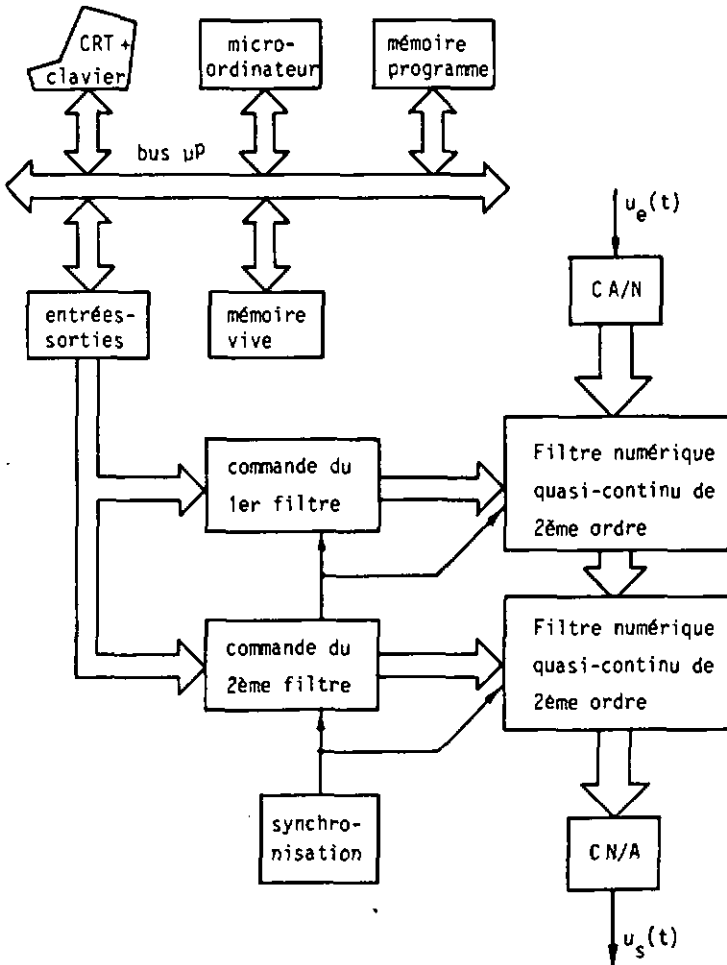


Fig.5.6 : Principe de réalisation du filtre quasi-continu global programmable.

que l'appareil réalisé, dont le schéma est donné à la figure 5.6, prévoit l'introduction possible de jusqu'à une cascade de cinq étages de filtre de second degré. Le schéma, par mesure de clarté, ne montre qu'une cascade de deux filtres de deuxième ordre.

L'appareil proposé convient parfaitement, en tant que système universel

Parmi les degrés de liberté liés à la structure programmable, nous distinguons ainsi:

- le nombre d'étages de structures du second ordre quasi-continues mis en cascade; ce nombre peut varier entre un et cinq.
- le type de filtre à réaliser dans l'élément de premier ou de deuxième ordre sous considération, c'est-à-dire passe-bas, passe-haut ou passe-bande (élément de deuxième ordre).
- la longueur de mot des variables internes, cette longueur prend une valeur raisonnable comprise entre $n_v = 4$ et $n_v = 12$ (cas de la longueur de mot de la variable d'entrée depuis le convertisseur analogique-numérique).
- la longueur de mot significative des coefficients, variant de $n_c^S = 0$ à $n_c^S = 12$, cette dernière valeur étant la longueur de mot maximale dans l'appareil.
- le rapport entre la fréquence de travail maximale (confondue à la fréquence d'échantillonnage d'un filtre numérique conventionnel) et la fréquence de coupure f_c . Il convient pour cela de pouvoir agir sur la fréquence maximale de fonctionnement de l'appareil.

L'appareil réalisé offre, par sa structure modulaire et ses spécifications programmables, la possibilité d'une étude expérimentale des propriétés des filtres quasi-continus, comme par exemple:

- la vérification du fonctionnement global des systèmes quasi-continus, avec le décalage des variables dans le domaine positif et le contrôle de validité des hypothèses développées précédemment.
- la réponse à des excitations particulières (réponse impulsionnelle, régime sinusoïdal, etc).
- le bruit dû à la quantification des opérations, ainsi que la sensibilité du filtre aux coefficients.
- les non-linéarités de ces systèmes lorsque la fréquence du signal d'entrée est plus élevée que la fréquence de coupure et lorsqu'elle tend vers la demi-fréquence d'échantillonnage.
- enfin, différentes topologies de filtrage peuvent être envisagées et

testées, comme les structures ordinateur analogique, à boucles imbriquées ou autres.

- de plus, la mise en oeuvre de multiplicateurs programmables de principes distincts est aussi possible, ce qui ouvre la voie à l'étude expérimentale de cet élément.

5.3. Conclusions.

Les filtres numériques caractérisés par un traitement quasi-continu de l'information sont parcourus par des signaux discrets dans le temps et en amplitude. Dans ces cellules, l'opération de multiplication d'un signal par un coefficient constant est effectuée par une modulation d'impulsions en densité, transformant l'information en amplitude (de type numérique "parallèle") en densité d'impulsions temporelle (de type "sérielle"). Une nature "parallèle" est ensuite rendue à cette information au niveau des mémoires des compteurs. Lorsque la fréquence de fonctionnement de ces filtres est élevée en regard de la fréquence maximale du signal à traiter, l'idéalisation de ces systèmes conduit à la notion de filtrage fréquentiel, où les signaux sont supposés continus dans le temps et en amplitude. Cette idéalisation permet de vérifier le fonctionnement général des filtres quasi-continus.

L'analyse des filtres numériques quasi-continus réels s'effectue avec des modèles mathématiques qui permettent une comparaison avec les filtres analogiques et numériques conventionnels. En partant du filtre numérique de structure directe canonique dont une transformation topologique fournit le système numérique à récursion double, il est possible de déduire le filtre quasi-continu. Pour cela, nous utilisons le filtre à arithmétique incrémentale à variables internes bloquées, qui présente une arithmétique à virgule flottante proche de celle qui apparaît dans le filtre numérique à récursion double. Cette arithmétique est de type simple précision dans le filtre à arithmétique incrémentale alors qu'elle est à double précision pour la cellule à récursion double. Le filtre quasi-continu s'obtient par déblocage des variables internes de la structure à arithmétique incrémentale et a les propriétés suivantes: arithmétique à virgule flottante particulière et fréquence de fonctionnement maximale limitée. Le filtre quasi-continu apparaît de complexité similaire aux autres filtres numériques. Cette complexité relative est plus faible lorsque le filtre quasi-continu est très sélectif.

Le comportement des cellules numériques quasi-continues, tenant compte de l'aspect quantifié des phénomènes est analysé mathématiquement avec un

système d'équations paramétriques. Ces équations permettent d'expliquer théoriquement les effets non-linéaires les plus importants dus à la modulation d'impulsions en densité temporelle. Ces effets d'atténuation maximale et de déplacement de la fréquence de coupure maximale apparaissent après introduction du développement en série de Taylor et de la méthode des approximations successives (première approximation) dans les équations paramétriques.

Les erreurs de quantification des coefficients des cellules quasi-continues sont comparées à la sensibilité des coefficients des filtres numériques à structure directe canonique. Au voisinage du point $z = +1$ du plan complexe, la structure quasi-continue est beaucoup moins sensible à une erreur de quantification que la cellule numérique conventionnelle correspondante. Par conséquent, un filtre sélectif (c'est-à-dire avec un grand rapport fréquence d'échantillonnage à fréquence de coupure) demande des longueurs de mot des coefficients beaucoup plus petites dans une structure quasi-continue que dans une cellule numérique directe canonique.

La partie expérimentale de l'étude consiste en la réalisation d'un système quasi-continu programmable, dont les coefficients et les différents paramètres sont choisis de manière interactive. D'autre part, la simulation sur ordinateur des filtres numériques quasi-continus par leurs équations paramétriques apporte une solution numérique complète. Les effets non-linéaires de modulation d'impulsions en densité sont mis en évidence dans l'appareil programmable ainsi que lors de la simulation sur ordinateur. La limite de linéarité dépend de paramètres comme le rapport fréquence de travail maximale à fréquence maximale du signal d'entrée, ou encore de la valeur de l'amplitude du signal d'entrée relative à sa valeur maximale.

L'analyse par transformée de Fourier rapide TFR des signaux d'excitation et de réponse de ces systèmes constitue un prolongement naturel à ce travail. Les effets non-linéaires liés aux éléments tels que les multiplicateurs à taux programmables peuvent être mis en évidence de façon numérique par une telle analyse. Notons que la modulation d'impulsions en densité étant à l'origine des effets non-linéaires importants détectés pour certaines valeurs critiques des paramètres, l'étude analytique appro-

fondie des multiplicateurs programmables paraît indispensable. Enfin, de nouvelles topologies de filtres numériques caractérisés par un traitement quasi-continu de l'information est possible, comme celles basées sur les filtres numériques d'onde.

ANNEXE A - Justification du modèle de fonctionnement des multiplicateurs à taux programmables.

Rappelons en premier lieu l'hypothèse de description du multiplicateur programmable utilisée pour l'établissement des équations paramétriques apparaissant dans le chapitre 3: l'échantillonnage du signal d'entrée du multiplicateur à taux programmable est effectué chaque fois qu'une impulsion est produite à la sortie de cet élément; cette valeur échantillonnée détermine l'intervalle de temps jusqu'à l'impulsion suivante. Nous allons démontrer que le processus de fonctionnement retenu est adéquat. En effet, si l'on applique un signal d'entrée périodique et de valeur moyenne égale à la valeur d'équilibre, le nombre d'impulsions n produites dans la période T est égal à celui qui est fourni dans le même laps de temps si le signal d'entrée est constant. Cette condition est indispensable pour assurer le bon fonctionnement de la cellule élémentaire formée d'un compteur réversible et de deux multiplicateurs à taux programmables, ceci afin de produire de façon discrète l'opération d'intégration effectuée sur le filtre analogique.

Considérons un signal d'entrée du multiplicateur à taux programmable formé par un signal rectangulaire dont l'amplitude prend la valeur (x_0+x_1) sur l'intervalle de temps T_1 et (x_0-x_2) sur l'intervalle de temps T_2 , comme l'indique la figure A1.

Le signal périodique d'entrée devant être de valeur moyenne égale à la valeur d'équilibre impose:

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 \\ x_1 T_1 &= x_2 T_2 \end{aligned} \tag{A1}$$

Ces équations (A1) permettent en effet de vérifier la condition sur le signal périodique:

$$\int_0^T u(\tau) d\tau = x_0 T \tag{A2}$$

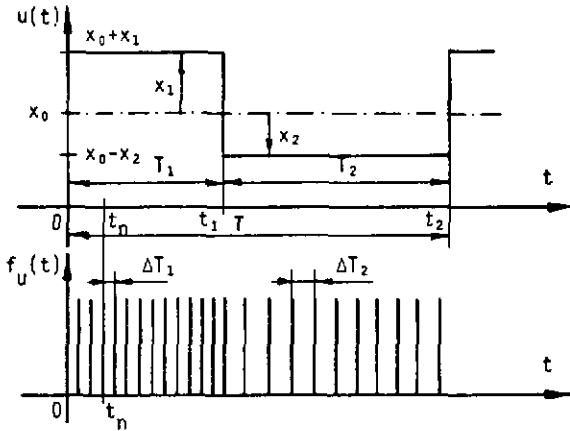


Fig. A1 : Signaux d'entrée $u(t)$ rectangulaire et de sortie correspondant sur un multiplicateur programmable. L'échantillonnage de l'entrée est effectuée à chaque impulsion produite en sortie.

La partie inférieure de la figure A1 illustre le signal de sortie du multiplicateur: il s'agit d'un train d'impulsions dont l'intervalle de temps entre les impulsions est inversement proportionnel à la valeur du signal d'entrée selon la relation suivante:

$$\Delta t_n = \frac{k_1}{u(t_n)} \quad + \quad \begin{cases} \Delta T_1 = k_1 / (x_0 + x_1) & \text{si } 0 \leq t < t_1 \\ \Delta T_2 = k_1 / (x_0 - x_2) & \text{si } t_1 \leq t < t_2 \end{cases} \quad (A3)$$

Pendant la durée T_1 , le signal d'entrée est égal à $(x_0 + x_1)$ et l'on suppose qu'un nombre entier n_1 d'impulsions distantes de ΔT_1 sont créées, alors que le nombre entier n_2 d'impulsions distantes de ΔT_2 peuvent être insérées durant l'intervalle T_2 (signal égal à $(x_0 - x_2)$):

$$n_1 \Delta T_1 = T_1 \quad \text{et} \quad n_2 \Delta T_2 = T_2 \quad , \quad n_1 \text{ et } n_2 \in \mathbb{N} \quad (A4)$$

Le nombre total d'impulsions produites doit être identique, si le signal d'entrée a la forme rectangulaire de la figure A1 ou s'il présente une amplitude constante (égale à x_0) pendant une période T . Ceci s'écrit:

$$n_1 + n_2 = n \quad (A5)$$

avec, pour un signal d'entrée d'amplitude constante x_0 :

$$n \Delta T = T \quad \text{où :} \quad \Delta T = \frac{k_1}{x_0} \quad (A6)$$

Il faut donc vérifier l'équation (A5) à l'aide des autres relations pour démontrer, dans le cas du signal d'entrée de la figure A1, la validité du modèle de fonctionnement du multiplicateur à taux programmable. Partons de (A5) en utilisant (A4), puis (A3) et (A1):

$$n_1 + n_2 = \frac{T_1}{\Delta T_1} + \frac{T_2}{\Delta T_2} = \frac{x_0}{k_1} \underbrace{(T_1 + T_2)}_T + \frac{1}{k_1} \underbrace{(x_1 T_1 - x_2 T_2)}_0 \quad (A7)$$

Enfin, à l'aide de (A6), l'identité (A5) est retrouvée.

Cette démonstration peut s'étendre au cas d'un signal d'entrée périodique quelconque, mais qui remplit cependant la condition (A2) concernant la valeur moyenne de ce signal. Pour cela, il suffit de rappeler que n'importe quel signal peut être approché par une somme d'impulsions rectangulaires de largeur suffisamment petite. La figure (A2) présente un signal périodique remplissant ces conditions.

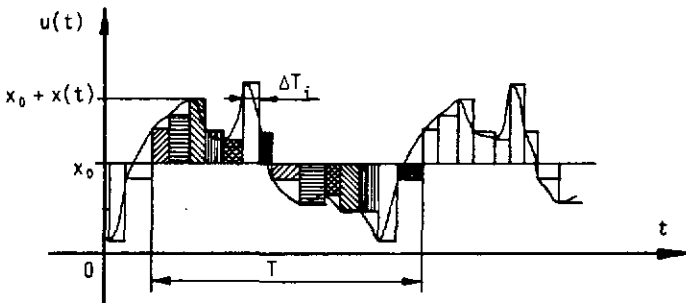


Fig. A2 : Signal périodique de valeur moyenne égale à la valeur d'équilibre x_0 et son approche par une somme d'impulsions.

Il suffit de décomposer le signal périodique selon une somme d'impulsions rectangulaires et d'appairer ces impulsions rectangulaires de façon à définir des signaux rectangulaires de même nature que celui défini précédemment à la figure A1.

Cette démonstration trouve une confirmation expérimentale par une simulation sur ordinateur des équations paramétriques qui décrivent le modèle de fonctionnement adapté décrit. L'exemple d'un signal d'entrée de type sinusoidal vérifie l'exactitude du raisonnement développé.

Par opposition, il est possible de montrer analytiquement et par simulation sur ordinateur que le deuxième modèle, illustré à la figure 3.2 b) et dans lequel l'échantillonnage du signal d'entrée est régulier, ne possède pas cette propriété de conservation du nombre d'impulsions sur une période. On obtiendrait une valeur dépendant de l'amplitude du signal d'entrée.

Le modèle de fonctionnement adopté, caractérisé par un échantillonnage irrégulier du signal d'entrée, est raisonnable et correct.

ANNEXE B - Considération concernant le calcul des coefficients d'un filtre numérique de simulation d'un filtre analogique.

Dans le paragraphe 2.3 du chapitre 2, il a été rappelé une solution analytique particulière du problème de la simulation d'un filtre analogique par un filtre numérique. La solution s'exprime par une fonction de transfert dans le domaine de la transformation en z . Ses coefficients c_i et d_i sont exprimés en (2.39) en fonction des coefficients a_i de la fonction de transfert analogique initiale, ainsi qu'avec les pôles λ_2 et λ_3 de cette fonction, qui dépendent des coefficients b_i . Ces pôles sont en général caractérisés par des grandeurs complexes. Les formules (2.39) qui donnent les coefficients du système numérique de simulation c_i et d_i font donc intervenir des valeurs de forme complexe.

Lorsque les coefficients c_i et d_i tendent vers les valeurs limites (cas d'un rapport élevé entre les fréquences d'échantillonnage et de coupure du circuit numérique), des problèmes de précision de calcul surgissent, semblables à ceux relevés dans le chapitre 4 au paragraphe 4.3. Il se peut en effet qu'une différence entre deux valeurs élevées très voisines doive se calculer avec une précision portant au moins sur la quinzième décimale de ces valeurs. Dans cette situation, les valeurs de forme complexe ne peuvent être traitées sur ordinateur, car elles ne possèdent pas la précision de calcul requise.

Cependant, les coefficients c_i et d_i prennent en définitive des valeurs bien réelles. Cela signifie que les équations (2.39) peuvent être encore transformées de manière à ce que les variables internes y apparaissant soient réelles, afin de faciliter le traitement numérique en double précision sur l'ordinateur.

Soit le discriminant du dénominateur de la fonction de transfert du système analogique:

$$\Delta = \left(\frac{b_1}{2}\right)^2 - b_2 \quad , \quad (B1)$$

les coefficients du filtre numérique de simulation (2.39) deviennent, avec

des variables internes réelles:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= a_0 \\
 c_1 &= -a_0 - \frac{1}{2\alpha} \{ a_0 \gamma e^{-b_1 T/2} - 2a_1 \beta e^{-b_1 T/2} + \frac{a_2}{b_2} (\gamma e^{-b_1 T/2} - 2\alpha) \} \\
 c_2 &= -\frac{1}{2\alpha} \{ -a_0 \gamma e^{-b_1 T/2} + 2a_1 \beta e^{-b_1 T/2} + \frac{a_2}{b_2} (\zeta e^{-b_1 T/2} - 2\alpha e^{-b_1 T}) \} \quad (B2) \\
 d_1 &= -2\epsilon e^{-b_1 T/2} \\
 d_2 &= e^{-b_1 T}
 \end{aligned}$$

Les variables internes réelles α , β , γ , ϵ et ζ s'écrivent:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \sqrt{\left| \left(\frac{b_1}{2} \right)^2 - b_2 \right|} \\
 \beta &= \begin{cases} \sinh \alpha T & \text{si } \Delta > 0 \\ 0 & \text{si } \Delta = 0 \\ \sin \alpha T & \text{si } \Delta < 0 \end{cases} \\
 \gamma &= \begin{cases} b_1 \sinh \alpha T + 2\alpha \cosh \alpha T & \text{si } \Delta > 0 \\ 0 & \text{si } \Delta = 0 \\ b_1 \sin \alpha T + 2\alpha \cos \alpha T & \text{si } \Delta < 0 \end{cases} \\
 \epsilon &= \begin{cases} \cosh \alpha T & \text{si } \Delta > 0 \\ 0 & \text{si } \Delta = 0 \\ \cos \alpha T & \text{si } \Delta < 0 \end{cases} \\
 \zeta &= \begin{cases} -b_1 \sinh \alpha T + 2\alpha \cosh \alpha T & \text{si } \Delta > 0 \\ 0 & \text{si } \Delta = 0 \\ -b_1 \sin \alpha T + 2\alpha \cos \alpha T & \text{si } \Delta < 0 \end{cases} \quad (B3)
 \end{aligned}$$

ANNEXE C - Table d'explication des symboles utilisés dans ce travail.

- a_i : coefficient d'indice i du numérateur de la fonction de transfert du filtre analogique.
- A : amplitude et facteur d'amplification.
- A_f : affaiblissement.
- A_i : coefficient du numérateur de la fonction de transfert du filtre analogique à variables internes bloquées.
- b_i : coefficient d'indice i du dénominateur de la fonction de transfert du filtre analogique.
- B_i : coefficient du dénominateur de la fonction de transfert du filtre analogique à variables internes bloquées.
- c_i : coefficient d'indice i du numérateur de la fonction de transfert du filtre numérique de structure directe canonique.
- C : capacité d'un condensateur.
- C_i : coefficient d'indice i du numérateur de la fonction de transfert du modèle analogique linéarisé déduit des relations paramétriques.
- d_i : coefficient d'indice i du dénominateur de la fonction de transfert du filtre numérique de structure directe canonique.
- D_i : coefficient d'indice i du dénominateur de la fonction de transfert du modèle analogique linéarisé déduit des relations paramétriques.
- $f, f(t)$: fréquence variable dans le temps.
- f_c : fréquence de coupure d'une structure de filtre.
- f_s : fréquence d'échantillonnage du système numérique.
- f_e : fréquence d'entrée d'un système.
- f_H : fréquence d'horloge ou de travail d'un système.
- $f_u, f_v, f_w, f_x, f_y, f_z$: signaux correspondant à la modulation en fréquence ou en densité d'impulsions des signaux indicés.
- f_{z_i} : fréquence de référence d'indice i utilisée dans les filtres fréquentiels et les filtres quasi-continus.
- f_{o_i} : fréquence de référence d'indice i utilisée dans le modèle d'établissement des équations paramétriques.
- f_i^S : partie significative du coefficient f_i .
- f_+ : signal sur l'entrée avant (+) du compteur réversible.
- f_- : signal sur l'entrée arrière (-) du compteur réversible.
- g_i : coefficient d'indice i du numérateur du filtre numérique à récursion double.
- h_i : coefficient d'indice i du dénominateur du filtre numérique à récursion double.

- $H(s)$, $H(z)$: fonction de transfert dans le domaine de Laplace ou en z .
 i, j, k, l, m, n, p : indices de sommation.
- I_i : courant électrique d'indice i .
- $I(t)$: réponse idéale de la cellule quasi-continue.
- k_i : coefficient d'indice i utilisé dans le modèle paramétrique de la cellule de base quasi-continue.
- l_i : coefficient d'indice i du numérateur du filtre numérique à arithmétique incrémentale.
- L_i : inductance d'une bobine d'indice i .
- L_g : longueur de grille d'un transistor MOS.
- m_i : coefficient d'indice i du dénominateur du filtre numérique à arithmétique incrémentale.
- n : nombre de bits d'une valeur numérique.
- $n(t)$: grandeur numérique variable dans le temps.
- n_a : longueur de mot totale du compteur réversible.
- n_b : longueur de mot de la variable utilisée en contre-réaction.
- n_c : longueur de mot des coefficients.
- n_c^0 : longueur de la partie de bits nuls d'un coefficient.
- n_c^s : longueur de la partie significative de mot d'un coefficient.
- $n_u(t), n_v(t), n_w, n_x, n_y, n_z$: signaux numériques correspondants aux signaux indicés.
- n_v : longueur de mot des variables.
- $n_z^{i_0}$: valeurs d'équilibre se référant à la variable z d'indice i utilisées dans le filtre fréquentiel et le filtre quasi-continu de première forme.
- P : indice de sensibilité quadratique.
- P_i : coefficient d'indice i du numérateur du filtre quasi-continu de deuxième forme.
- $P(t)$: perturbation due à la discontinuité des signaux produite par la modulation d'impulsions en densité.
- Q : facteur de qualité ou coefficient de surtension.
- r : rapport entre la fréquence d'échantillonnage et la fréquence de coupure d'un système numérique.
- r_c : valeur critique du rapport r entre les fréquences d'échantillonnage et de coupure d'un système numérique quasi-continu.
- r_i : coefficient d'indice i du numérateur du filtre numérique à arithmétique incrémentale avec remise à l'équilibre du compteur réversible.
- R_i : résistance d'indice i .

- $R_{N+1}(t)$: reste de Lagrange du développement de degré $N+1$.
- s : fréquence complexe.
- s_i : coefficient d'indice i du dénominateur du filtre numérique à arithmétique incrémentale avec remise à l'équilibre du comp-
teur réversible.
- S_{Xk} : sensibilité par rapport au coefficient X_k .
- S_{Si} : surface de Silicium occupée après intégration.
- t, t_i : temps, temps d'indice i .
- t_{in}, t_{i1} : temps à variations discrètes d'indice i .
- T, T_s : période ou période d'échantillonnage.
- T_{op} : période nécessaire pour une opération de multiplication.
- T_0 : période du signal d'entrée.
- $u(t), v(t), w(t), x(t), y(t), z(t)$: variables.
- $x_0, y_0, z_0, z_{10}, z_{20}, z_{30}$: constantes, valeurs d'équilibre.
- X_k : coefficient d'indice k .
- $v_+(t)$: contribution séparée de l'entrée (+) du compteur réversible,
modèle par équations paramétriques.
- $v_-(t)$: contribution séparée de l'entrée (-) du compteur réversible,
modèle par équations paramétriques.
- v_{+0}, v_{-0} : valeurs constantes.
- $U(s), V(s), W(s), X(s), Y(s), Z(s)$: transformées de Laplace des variables
correspondantes.
- $U(z), V(z), W(z), X(z), Y(z), Z(z)$: transformées en z des variables
correspondantes.
- $u_{max}, v_{max}, w_{max}$: valeurs maximales des variables correspondantes.
- $u_{min}, v_{min}, w_{min}$: valeurs minimales des variables correspondantes.
- V_i : tension d'indice i .
- $V(t)$: fonction d'interpolation continue de $v(t_n)$ discontinue.
- $V_+(t)$: fonction d'interpolation continue de $v_+(t_n)$ discontinue.
- $V_-(t)$: fonction d'interpolation continue de $v_-(t_n)$ discontinue.
- z : fréquence complexe e^{-sT} .
- α : coefficient de la fonction de transfert du filtre à boucles
imbriquées.
- α_i : coefficient d'indice i du numérateur du filtre analogique
relatif à α_0 .
- β : coefficient de la fonction de transfert du filtre à boucles
imbriquées.
- γ_i : coefficient d'indice i du numérateur de la fonction de trans-
fert du filtre fréquentiel de première forme.
- Γ_i : coefficient d'indice i du numérateur de la fonction de trans-
fert du filtre quasi-continu de première forme.

- Γ_i : coefficient d'indice i du numérateur du filtre numérique de structure directe canonique relatif à c_0 .
- δ : distribution delta de Dirac.
- δ_i : coefficient d'indice i du dénominateur de la fonction de transfert du filtre fréquentiel de première forme.
- Δ_i : coefficient d'indice i du dénominateur de la fonction de transfert du filtre quasi-continu de première forme.
- Δx : variation de la grandeur x .
- ϵ : fréquence de référence dans les filtres fréquentiels.
- ϵ' : fréquence de référence dans les filtres quasi-continus.
- n : fréquence de référence dans les filtres fréquentiels de deuxième forme.
- n' : fréquence de référence dans les filtres quasi-continus de deuxième forme.
- θ_i : valeur à l'équilibre du compteur d'indice i dans le filtre fréquentiel de seconde forme.
- λ_i : pôle d'indice i de la fonction de transfert du filtre analogique.
- ξ : fréquence de référence du filtre fréquentiel de seconde forme.
- ξ' : fréquence de référence du filtre quasi-continu de seconde forme.
- ρ : rapport entre les fréquences de fonctionnement du multiplicateur programmable et du signal d'entrée.
- ρ_i : coefficient d'indice i du numérateur du filtre fréquentiel de deuxième forme.
- $\sigma_{\Delta A_f}$: écart quadratique moyen sur l'affaiblissement.
- τ : variable d'intégration ou constante de temps.
- u : fonction saut unité de Heaviside.
- ϕ : pulsation réduite ($= \omega T$).
- ϕ : phase de la fonction de transfert d'un système.
- ψ_i : coefficient d'indice i du dénominateur du filtre fréquentiel de deuxième ordre.
- ψ'_i : coefficient d'indice i du dénominateur du filtre quasi-continu de deuxième ordre.
- ω : pulsation.
- ω_c : fréquence de coupure circulaire.
- ω_0 : pulsation du signal d'entrée.
- Ω : pulsation normalisée à la fréquence de coupure circulaire.

Bibliographie.

- [1] J.-J. Monbaron et N. Peguiron, "*Etude des systèmes logiques séquentiels susceptibles d'être intégrés dans la montre pour la mesure de fréquence*", Institut de Microtechnique, Neuchâtel, Suisse, Rapport 13 I 02 - 002, Oéecembre 1977.
- [2] W. E. Heinlein and W. H. Holmes, *Active filters for integrated circuits*, Munich, RFA : R. Oldenbourg Verlag, 1974.
- [3] P.-A. Farine, "*Appareil de mesure de la tension artérielle*", Institut de Microtechnique, Neuchâtel, Suisse, Rapport 54 EC 02 001, Mars 1981.
- [4] J. Neirynek, "*Introduction aux principes du filtrage*", Proc. of modern filtering techniques, Journées d'électronique 1981, Lausanne, Suisse.
- [5] H. J. Orchard, "*Inductorless filters*", Electronics letters, vol.2, pp.224-225, June 1966.
- [6] L. T. Bruton, "*Network transfer functions using the concept of frequency-dependant negative resistance*", IEEE Trans., 1969, CT-16, pp. 406-408.
- [7] C. Nightingale, J. Rollet, "*Exact synthesis of active lowpass frequency-dependant negative-resistance filters*", Elec. Lett., vol.10, February 1974, pp.34-35.
- [8] A. Fettweis, "*Digital filters structure related to classical filter networks*", Arch. Elecktr. Ubertrag., 25, n^o2, feb.1971, pp-79-89.
- [9] R. Frosio, "*Filtrage numérique caractérisé par un traitement quasi-continu des signaux*", Institut de Microtechnique, Neuchâtel, Suisse, Travail de semestre, Nov.1981.
- [10] H. E. Rowe, *Signals and noise in communication systems*, New-York : Van Nostrand Reinhold, 1965.
- [11] W. D. Gregg, *Analog and digital communication*, New-York : John Wiley, 1977.
- [12] A. Papoulis, *Systems and transforms with application in optics*, New-York : Mc Graw-Hill, 1968.

- [13] C. Arnoux, "Etude et simulation assistée par ordinateur de filtres numériques caractérisés par un traitement quasi-continu des signaux", Institut de Microtechnique, Neuchâtel, Suisse, Travail de diplôme, Hiver 1982/1983.
- [14] R. Soite et H. Leich, *Les filtres numériques, Analyse et synthèse des filtres unidimensionnels*, Paris : Masson, 1980.
- [15] E. I. Jury, *Theory and application of the z-transform method*, New-York : Robert E. Krieger, 1964, nouvelle édition 1973.
- [16] F. Pellandini, A. Deczky, F. Bonzanigo et F. Hemmer, "Synthèse des filtres digitaux avec contre-réaction dans le domaine des fréquences", AGEN n° 9, Zurich, 1969.
- [17] A. Antoniou, *Digital filters : Analysis and design*, New-York : Mac Graw-Hill, 1979.
- [18] S. Liu, "Effect of finite wordlength on the accuracy of digital filters - A review", IEEE Transactions on Circuit Theory, vol.CT-18, n°6, pp.670-677, Nov.1971.
- [19] A. V. Oppenheim, C. J. Weinstein, "Effects of finite register length in digital filtering and the fast Fourier transform", Proceedings of the IEEE, vol.60, n°8, pp.957-976, August 1972.
- [20] L. Burroughs, S. Colonna, M. Salerno, "Digital adaptive equalization by implementation of time-domain sensitivity functions", Florence conference on digital filtering, Italy, September 1972, pp.123-129.
- [21] T. A. Claasen, W. F. Mecklenbräuker, J. B. Peck, "Effects of quantization and overflow in recursive digital filters", IEEE Transactions on acoustics, speech and signal processing, vol.ASSP-24, n°6, Dezember 1976, pp.517-529.
- [22] A. I. Abu-El-Haija, A. M. Peterson, "Limit cycle oscillations in digital incremental computers", IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol.CAS-25, pp.902-908, Nov.1978.
- [23] R. C. Agarwal, C. S. Burrus, "New recursive digital filter structures having very low sensitivity and roundoff noise", IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol.CAS-22, n°12, pp.921-927, Dec.1975.

- [24] C. M. Rader, B. Gold, "Effects of parameter quantization on the poles of a digital filter", Proceedings IEEE (Lett.), vol.55, pp.688-689, May 1967.
- [25] E. Baumann et al., *Filtres digitaux, numéro spécial*, AGEN n°9, Zurich, Juillet 1969.
- [26] L. R. Rabiner, B. Gold, *Theory and application of digital signal processing*, Englewood Cliffs, USA : Prentice-Hall, 1975.
- [27] G. Oehner, dans Digital Signal Processing Committee IEEE ed., *Programs for digital signal processing*, New-York: IEEE press, 1979.
- [28] F. Hemmer, F. Pellandini, "Simulation d'un filtre analogique avec des filtres digitaux", AGEN n°9, Zurich, Juillet 1969.
- [29] F. Hemmer, "Inversion numérique de la transformée de Laplace", AGEN n°9, Zurich, Juillet 1969.
- [30] P.-A. Farine, "Solution analytique particulière de la simulation d'un filtre analogique par un filtre numérique de deuxième ordre", Institut de Microtechnique, Neuchâtel, Suisse, Rapport 129 IT 07/B4.
- [31] W. Schüssler, "Zur allgemeinen Theorie der Verzweigungnetze", AEU 22 [1968], pp.361-367.
- [32] W. Schüssler, "On structures for nonrecursive digital filters", AEU 26 [1972], pp.255-258.
- [33] A. I. Abu-El-Haija, K. Shenoi, A. M. Peterson, "Digital filter structures having low errors and simple hardware implementation", IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol.CAS-25, n°8, August 1978.
- [34] P.-A. Farine, "Représentation par transformation en z et en z modifiée d'un filtre analogique à variables internes bloquées", Institut de Microtechnique, Neuchâtel, Suisse, Rapport 130 IT 07/84.
- [35] P.-A. Farine, "Théorèmes sur les filtres numériques de simulation de filtres analogiques", Institut de Microtechnique, Neuchâtel, Suisse, Rapport 131 IT 07/B4.
- [36] J.-J. Monbaron, "Pulse-mètre à traitement quasi-continu", Institut de Microtechnique, Neuchâtel, Suisse, Rapport 47 IT 05/80.

- [37] P.-A. Farine, "*Appareil de mesure de la tension artérielle, partie technique*", Institut de microtechnique, Neuchâtel, Suisse, Rapport 132 IT 07/84.
- [38] T. R. H. Sizer, *The digital differential analyser - An incremental computer*, London, England: Chapman and Hall, 1968.
- [39] J. Florine, H. Lecocq, "*Introduction au calcul incrémental - étude de l'opération d'intégration*", Revue A, Vol X, No2, pp. 76-89, 1968.
- [40] A. Stauffer, "*Les oscillateurs incrémentaux*", AGEN No 12, Zurich, Août 1971.
- [41] N. Mokhoff, "*Communications - II. Integrated circuits*", IEEE spectrum, Jan. 1981, p.50.
- [42] U. Tietze, Ch. Schenk, *Advanced electronic circuits*, New-York: Springer-Verlag, 1978.
- [43] B. J. Hostika, "*MOS sampled data recursive filters using state variable techniques*", Memorandum No. ERL-M77/65, Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley, August 1977.
- [44] G. M. Jacobs, "*Practical design considerations for MOS switched capacitor ladder filters*", Memorandum No. UCB/ERL M77/69, Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley, Nov. 1977.
- [45] P. Schwob, "*A 2 μ m silicon-gate CMOS technology*", Proc. of limits to miniaturization, Journées d'électronique 1980, Lausanne, Suisse, octobre 1980.
- [46] A. I. Zverev, "*Handbook of filter synthesis*", New-York: John Wiley and Sons, 1967.
- [47] M. Bon, "*Les techniques de filtrage: éléments comparatifs et prospectifs*", Proc. of modern filtering techniques, Journées d'électronique 1981, Lausanne, Suisse.

Remerciements.

Cette étude a été réalisée à l'Institut de Microtechnique de l'Université de Neuchâtel sous la direction du Professeur F. Pellandini. Je lui exprime ma profonde reconnaissance pour les conseils et encouragements qu'il m'a donnés en permanence, ainsi que pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail. Sa très grande expérience et sa compétence dans ce domaine se sont révélées des aides précieuses au cours de cette recherche.

Pour leurs conseils, leurs très nombreuses remarques et suggestions lors de la rédaction du manuscrit, j'exprime aussi ma gratitude envers les membres du jury, Messieurs M. Bellanger, Professeur à l'ENST et à l'ISEP (Paris, France), A. Shah, Professeur à l'Université de Neuchâtel, F. Bonzanigo (Ecole Polytechnique Fédérale de Zürich) et A. G. Deczky (AT&T, Ottawa, Canada).

Enfin, je tiens également à remercier mes collègues de l'Institut de Microtechnique pour leur collaboration ainsi que pour l'ambiance chaleureuse dans laquelle ce travail a été accompli.

Une partie de ce travail a bénéficié du soutien financier de la Commission pour l'Encouragement de la Recherche Scientifique (CERS, projet No 1106) à Berne, et de Asulab S.A. à Neuchâtel, Laboratoires R & D du groupe SMH.