



# Analyse harmonique et 1-cohomologie réduite des groupes localement compacts

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Neuchâtel  
pour l'obtention du grade de Docteur ès Sciences,  
Mention Mathématiques

par  
Florian Martin.

Université de Neuchâtel  
Institut de Mathématiques  
Rue Emile-Argand 13  
CH-2007 Neuchâtel



IMPRIMATUR POUR LA THESE

**Analyse harmonique et 1-cohomologie réduite des  
groupes localement compacts**

de M. Florian Martin

---

UNIVERSITE DE NEUCHATEL

FACULTE DES SCIENCES


La Faculté des sciences de l'Université de  
Neuchâtel sur le rapport des membres du jury,

MM. A. Valette (directeur de thèse),  
B. Colbois, P. Jolissaint, B. Bekka (Metz F)  
et D. Gaboriau (Lyon F)

autorise l'impression de la présente thèse.

Neuchâtel, le 31 janvier 2003

Le doyen:

A handwritten signature in black ink, consisting of several loops and a long horizontal stroke, representing the name F. Zwahlen.

F. Zwahlen



*A Roby.*



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Rappels théoriques</b>	<b>11</b>
1.1 Représentations unitaires . . . . .	11
1.2 1-cohomologie . . . . .	12
1.2.1 Premières définitions et propriétés . . . . .	12
1.2.2 Les actions par isométries affines . . . . .	14
1.2.3 Quelques résultats connus . . . . .	15
1.3 La propriété (T) de Kazhdan . . . . .	16
1.3.1 Définition et propriétés de base . . . . .	16
1.3.2 Propriété (T), fonctions conditionnellement de type négatif et 1-cohomologie . . . . .	17
1.4 La propriété de Haagerup . . . . .	19
1.4.1 La propriété de Haagerup pour les groupes localement compacts . . . . .	19
1.4.2 La propriété de Haagerup des algèbres de von Neumann . . . . .	20
1.5 Cohomologie- $L^2$ . . . . .	21
1.5.1 $\Gamma$ -dimension et nombres de Betti- $L^2$ . . . . .	23
<b>2 <math>\overline{H^1}(\Gamma, \ell^2(\Gamma))</math> et <math>b_{(2)}^1(\Gamma)</math></b>	<b>25</b>
2.1 Introduction . . . . .	25
2.1.1 Applications . . . . .	29
2.2 Quelques résultats d'annulation . . . . .	33
2.3 Un phénomène de rigidité . . . . .	34
<b>3 <math>\overline{H^1}(G, \pi)</math> et applications</b>	<b>41</b>
3.1 Introduction . . . . .	41
3.2 $\overline{H^1}(G, L^2(G))$ et moyennabilité . . . . .	43
3.3 $\overline{H^1}(G, \pi)$ des groupes connexes moyennables . . . . .	49

3.4	$\overline{H^1}(G, \pi)$ et la propriété de Haagerup . . . . .	53
3.5	$\overline{H^1}(G, \pi)$ et la propriété (T) relative . . . . .	55
3.6	$\overline{H^1}(G, \pi)$ des groupes localement compacts connexes . . . . .	55
3.7	Application en analyse harmonique . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Produits amalgamés et extensions <math>HNN</math></b>	<b>63</b>
4.1	Introduction . . . . .	63
4.2	1-cohomologie des produits amalgamés . . . . .	64
4.3	1-cohomologie des extensions $HNN$ . . . . .	67
4.4	Actions sur des arbres . . . . .	70
4.5	Propriété (T) et produits amalgamés . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Groupes hypercentraux</b>	<b>73</b>
5.1	Introduction . . . . .	73
5.2	L'annulation de l'espace $\overline{H^1}(G, 1)$ . . . . .	76
5.3	Les groupes hypercentraux . . . . .	78
5.4	Le cas des groupes discrets localement nilpotents . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Espaces à murs mesurés</b>	<b>85</b>
6.1	Introduction . . . . .	85
6.2	Preuves des théorèmes 6.1.6. et 6.1.7. . . . .	88
6.3	Exemples et applications . . . . .	91
6.3.1	Espaces à murs et arbres réels . . . . .	91
6.3.2	Produits restreints d'espace à murs mesurés et produit en couronne de groupes . . . . .	95
<b>7</b>	<b>AVN et propriété de Haagerup</b>	<b>99</b>
7.1	Introduction . . . . .	99
7.2	Preliminaires . . . . .	100
7.3	Le théorème principal . . . . .	107
7.4	Sur le générateur du semi-groupe . . . . .	113
	<b>Bibliographie</b>	<b>117</b>

# Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse, Alain Valette. La disponibilité et la gentillesse dont il a fait preuve à mon égard ont grandement contribué à l'aboutissement de ce travail. Je tiens à le remercier sincèrement de la confiance qu'il a placée en moi. Durant les années de recherche précédant cette thèse, il a su m'accorder beaucoup de liberté, mais également beaucoup de son temps et de sa patience pour apporter des réponses à mes questions (qui n'étaient d'ailleurs pas toujours très profondes).

J'adresse également ma gratitude à Bachir Bekka, Bruno Colbois, Damien Gaboriau et Paul Jolissaint pour avoir accepté de faire partie de mon jury, pour leurs remarques constructives et leurs conseils avisés.

Je tiens à remercier tout particulièrement Pierre-Alain Cherix, pour les innombrables discussions que nous avons eues (mathématiques et autres). Je le remercie pour ses conseils, ses encouragements et son écoute attentive.

Je remercie du fond du coeur Marie-Estelle. Son soutien, ses encouragements et son affection ont été de merveilleux alliés pour franchir les difficultés rencontrées. Le bonheur qu'elle a apporté dans ma vie m'a donné la force d'aller au bout des choses.

Je remercie également mes parents pour leur soutien et la confiance qu'ils m'ont témoignée tout au long de mes études ; ils m'ont appris à positiver les échecs et à toujours aller de l'avant.

Finalement je remercie mon collègue de bureau, Stéphane Perret, qui a supporté mes questions et mes humeurs pendant plus de quatre ans. Je le remercie également pour son aide informatique lors de la rédaction de ce travail.



# Introduction

Pour comprendre la structure d'un groupe localement compact, il est souvent intéressant d'étudier ses diverses actions.

Plusieurs aspects de la dynamique d'un groupe peuvent être considérés. On peut s'intéresser aux actions sur des espaces mesurés, sur des complexes simpliciaux, sur des espaces métriques etc. Comme souvent en mathématiques, l'approche linéaire est attirante, de par son apparente simplicité. Les actions par isométries affines sur des espaces de Hilbert font partie de cette approche. Cependant, elles se révèlent être bien plus redoutables que ce qu'on aurait pu imaginer, mais également très riches. En effet, la dynamique linéaire d'un groupe renferme une multitude d'informations sur la structure de celui-ci. Ceci est dû au fait que beaucoup d'actions peuvent être "linéarisées" par l'intermédiaire d'une représentation unitaire. Par exemple si un groupe agit sur un espace mesuré  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ , cette action fournit tout naturellement une représentation unitaire sur  $L^2(X, \mu)$ ; ou encore, l'action d'un groupe sur un complexe simplicial  $Y$  donne lieu (si  $Y^k$  désigne le  $k$ -squelette de  $Y$ ) à une représentation unitaire sur  $\bigoplus_{k \geq 0} l^2(Y^k)$ .

Etant donné une représentation  $\pi$  d'un groupe localement compact  $G$ , on peut étudier le comportement de  $G$  face aux actions affines dont la partie linéaire est  $\pi$  et en particulier essayer de détecter certaines formes de rigidité. Une forme de rigidité forte s'exprime par le fait que toutes ces actions ont un point fixe et une forme de rigidité un peu plus faible est donnée par le fait que toutes ces actions ont presque un point fixe. Tout ceci peut être traduit en termes cohomologiques en considérant la 1-cohomologie  $H^1(G, \pi)$  et la 1-cohomologie réduite  $\overline{H}^1(G, \pi)$ .

L'annulation de  $H^1(G, \pi)$  traduit la première forme de rigidité et l'annulation de  $\overline{H}^1(G, \pi)$  la forme un peu plus faible.

Même si les définitions originales ne mentionnent pas nécessairement les ac-

tions affines, deux propriétés des groupes localement compacts peuvent être caractérisées en termes d'actions affines : la propriété (T) de Kazhdan, apparue en 1967 et la propriété de Haagerup, apparue en 1979.

P.Delorme et A.Guichardet ont montré (voir par exemple [28]) que la propriété (T) est équivalente à l'annulation de l'espace  $H^1(G, \pi)$  pour toutes les représentations unitaires de  $G$  ; c'est donc une forme de rigidité du groupe face aux actions affines. Plus récemment, Y.Shalom ([51]) a montré que la propriété (T) est également équivalente, pour les groupes compactement engendrés, à l'annulation de l'espace  $\overline{H^1}(G, \pi)$  pour toutes les représentations unitaires de  $G$ .

La propriété de Haagerup est, quant à elle, équivalente à l'existence d'une action par isométries affines métriquement propre (c'est l'a-T-menabilité au sens de Gromov [15]). Par opposition à la propriété (T), les groupes ayant la propriété de Haagerup peuvent être considérés comme étant fortement non rigides.

Etant donné un groupe localement compact  $G$ , une représentation se présente d'elle-même comme une source d'information importante : la représentation régulière.

L'étude des actions affines dont la partie linéaire est la représentation régulière est étroitement liée, dans le cas des groupes de Lie connexes unimodulaires, à l'existence de certaines fonctions harmoniques ; et dans le cas discret, elle est liée à l'annulation d'un invariant topologique : le premier nombre de Betti- $L^2$ .

C'est autour du caractère dynamique et géométrique des actions affines d'un groupe que ce travail s'est développé.

Le premier chapitre est entièrement consacré aux rappels des définitions importantes et à l'exposé de certains résultats connus qui seront fréquemment utilisés dans la suite.

Dans le deuxième chapitre, nous établissons le lien entre l'annulation du premier nombre de Betti- $L^2$  d'un groupe de type fini  $\Gamma$ , l'annulation de  $\overline{H^1}(\Gamma, l^2(\Gamma))$  et l'absence de fonctions harmoniques d'énergie finie sur le graphe de Cayley de  $\Gamma$ . Comme premier corollaire de cette équivalence nous obtenons que si  $\Gamma$  est un groupe discret moyennable alors  $\overline{H^1}(\Gamma, l^2(\Gamma)) = 0$  (Théorème 2.1.8.).

Divers résultats sont alors établis.

**Corollaire 2.2.3.** *Soit  $H_1, H_2$  des groupes discrets infinis et soit  $N \triangleleft H_1 \times H_2$  un sous-groupe normal tel que  $N \cap (H_1 \times \{1\})$  (resp.  $N \cap (\{1\} \times H_2)$ ) est d'indice infini dans  $H_1 \times \{1\}$  (resp.  $\{1\} \times H_2$ ). Si  $\overline{H^1}(\Gamma, l^2(\Gamma)) \neq 0$ , alors  $\Gamma$  n'est ni quasi-isométrique, ni mesurablement équivalent (ME) à  $(H_1 \times H_2)/N$ .*

Dans la dernière section, nous nous intéressons au théorème de Schreier sur les groupes libres : Un sous-groupe normal infini de type fini d'un groupe libre est d'indice fini.

D.Gaboriau ([14]) a établi la généralisation de ce résultat pour tous les groupes discrets ayant un premier nombre de Betti- $L^2$  non nul.

Nous établissons une forme plus faible de ce théorème, en nous basant sur des techniques d'analyse harmonique.

Dans la première section du troisième chapitre, nous établissons l'annulation de  $\overline{H^1}(G, L^2(G))$  pour les groupes presque connexes moyennables (Théorème 3.2.8).

Dans la deuxième section, nous nous intéressons au défaut cohomologique de propriété (T) des groupes localement compacts connexes.

Plus précisément, comme la propriété (T) pour un tel groupe  $G$  est équivalente à l'annulation de  $\overline{H^1}(G, \pi)$  pour toutes représentations unitaires irréductibles (voir le Théorème 1.3.8), on se demande s'il y a beaucoup de représentations irréductibles avec  $\overline{H^1}(G, \pi) \neq 0$  et quelles sont les éventuelles particularités de ces représentations. Nous montrons (Théorème 3.6.4) qu'il n'y a qu'un nombre fini de telles représentations et que

- si  $G$  est nilpotent, la seule représentation irréductible avec  $\overline{H^1}(G, \pi) \neq 0$  est la représentation triviale ;
- si  $G$  est résoluble, ces représentations irréductibles sont de dimension 1 (pour les groupes de Lie résolubles connexes, ce résultat est dû à Delorme) ;
- si  $G$  est moyennable, ces représentations irréductibles sont de dimension finie.

Finalement dans la dernière section de ce chapitre, comme application, nous établissons un lien entre l'annulation de la 1-cohomologie réduite d'un groupe de Lie connexe unimodulaire à valeurs dans une représentation associée à une

”bonne” action de ce groupe sur une variété et l’absence de certaines fonctions ”harmoniques” sur cette même variété.

Plus précisément, soit  $G$  un groupe de Lie connexe unimodulaire et soit  $(M, \nu)$  une variété lisse connexe non-compacte sur laquelle  $G$  agit transitivement en préservant une mesure ( $\sigma$ -finie)  $\nu$ . Si  $\mu$  désigne une mesure de probabilité sur  $G$ , nous dirons qu’une fonction lisse  $f$  sur  $M$  est  $\mu$ -harmonique si  $f(x) = \int_G f(q^{-1} \cdot x) d\mu(q)$  (où  $\cdot$  désigne l’action de  $G$  sur  $M$ ).

Rappelons encore que, si  $(X_1, \dots, X_n)$  est un système de Hörmander de champs de vecteurs lisses  $G$ -invariants, alors le gradient d’une fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  est défini par  $\nabla f = (X_1 f, \dots, X_n f)$  et que  $|\nabla f| = \left( \sum_{i=1}^n |X_i f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ .

Sur  $G$ , il existe toujours un système de Hörmander  $G$ -invariant pour la multiplication à droite. Ainsi puisque  $G$  agit différenciablement et transitivement, on en déduit un système de Hörmander  $G$ -invariant sur  $M$ .

Finalement,  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  est dite d’intégrale de Dirichlet finie, si  $\|\nabla f\|_{L^2(M, \nu)} < \infty$ . Dans la cas où  $\mu$  est une mesure de probabilité à support compact symétrique engendrant  $G$ , nous montrons le

**Théorème 3.7.3.** *Si  $\overline{H^1}(G, L^2(M, \nu)) = 0$ , alors les seules fonctions lisses sur  $M$  d’intégrale de Dirichlet finie qui sont  $\mu$ -harmoniques sont les constantes.*

Dans le quatrième chapitre, nous nous intéressons à la 1-cohomologie des produits amalgamés et des extensions HNN de groupes discrets. Des résultats sur le premier nombre de Betti- $L^2$  découlent de cette étude. Citons le

**Théorème 4.4.1.** *Soit  $\Gamma$  un groupe discret agissant (sans inversion) sur un arbre avec stabilisateurs des arêtes infinis. Si les stabilisateurs des sommets ont un premier nombre de Betti- $L^2$  nul, alors  $\Gamma$  aussi.*

Finalement, nous décrivons le défaut cohomologique d’un produit amalgamé de deux groupes ayant la propriété (T). Nous montrons :

**Théorème 4.5.1.** *Soit  $\Gamma_1, \Gamma_2$  deux groupes discrets ayant la propriété (T), soit  $A$  un sous-groupe s’injectant dans ces deux groupes et soit  $\pi$  une représentation du produit amalgamé  $\Gamma_1 *_A \Gamma_2$ . On a alors la classification suivante :*

- i) *Si  $\pi|_A$  n’a pas de vecteur invariant non nul, alors  $H^1(\Gamma_1 *_A \Gamma_2, \pi) = 0$*
- ii) *Si  $\pi|_A$  a des vecteurs invariants non nuls, alors*

$$H^1(\Gamma_1 *_A \Gamma_2, \pi) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{H}_A = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$$

où  $\mathcal{H}_A$  désigne l'espace des vecteurs  $A$ -invariants et  $\mathcal{H}_i$  désigne l'espace des vecteurs  $\Gamma_i$ -invariants. Si de plus  $\pi$  n'a pas de vecteurs invariants non nuls, cette somme est une somme directe (pas nécessairement orthogonale).

Dans le cinquième chapitre, nous nous intéressons à la propriété d'annulation de la 1-cohomologie réduite pour toutes les représentations unitaires  $\pi$  de  $G$ . Lorsque  $G$  est compactement engendré, un résultat de Y. Shalom ([51]) affirme que cette propriété est équivalente à la propriété (T). Il est facile de voir que l'hypothèse de génération compacte est nécessaire. Nous conjecturons :

**Conjecture 5.1.7.** *Soit  $G$  un groupe localement compact. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) Pour toute représentation unitaire  $\pi$  de  $G$ ,  $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$*
- ii)  $G$  est réunion croissante de sous-groupes ouverts ayant la propriété (T).*

Cette conjecture sera démontrée dans quelques cas particuliers.

Dans le sixième chapitre, un résultat obtenu en commun avec P.-A. Cherix et A. Valette nous permet de décrire la propriété de Haagerup en termes plus géométriques grâce à l'introduction de la notion d'espaces à murs mesurés. Il est démontré qu'un groupe discret a la propriété de Haagerup si et seulement s'il admet une action propre sur un tel espace. Nous montrons que les arbres réels portent une structure canonique d'espaces à murs mesurés.

Dans le septième chapitre, obtenu en collaboration avec P. Jolissaint, nous décrivons la propriété de Haagerup des algèbres de von Neumann finies en termes de semi-groupes  $\|\cdot\|_2$ -continus d'applications complètement positives uniales préservant la trace et  $L^2$ -compactes. Plus précisément :

**Théorème 7.3.1.** *Soit  $(M, \tau)$  une algèbre de von Neumann finie à préduel séparable. On a l'équivalence entre :*

- i)  $M$  a la propriété de Haagerup.*
- ii) Il existe un semi-groupe  $\|\cdot\|_2$ -continu,  $(\theta_t)_{t \geq 0}$ , d'applications complètement positives uniales préservant la trace  $L^2$ -compactes avec  $\theta_t^* = \theta_t$  pour tout  $t > 0$ .*

où  $\theta_t^*$  est donnée par la proposition suivante :

**Proposition 7.2.2.** *Soit  $M$  une algèbre de von Neumann finie, munie d'une trace normale, finie, fidèle normalisée  $\tau$ .*

*Soit  $\Phi : M \rightarrow M$  une application complètement positive, normale, telle que  $\tau \circ \Phi \leq \tau$ . Alors il existe une unique application linéaire  $\Phi^* : M \rightarrow M$  telle que :*

- i)  $\tau(\Phi^*(x)y) = \tau(x\Phi(y))$ , pour tout  $x, y \in M$  ;*
- ii)  $\Phi^*$  est complètement positive ;*
- iii)  $\tau \circ \Phi^* \leq \|\Phi(1)\|\tau$  et en particulier  $\Phi^*$  est normale ;*
- iv) Le prolongement  $T_{\Phi^*}$  de  $\Phi^*$  à  $L^2(M, \tau)$  satisfait à  $T_{\Phi^*} = (T_{\Phi})^*$ .*

# Chapitre 1

## Rappels théoriques

### 1.1 Représentations unitaires

La notion de représentation joue un rôle essentiel dans ce travail, c'est pourquoi nous la rappelons brièvement.

**Définition 1.1.1.** *Soit  $G$  un groupe localement compact. Une représentation unitaire de  $G$  est un homomorphisme fortement continu  $\pi : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ , où  $\mathcal{H}_\pi$  est un espace de Hilbert, appelé espace de représentation et  $\mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$  est l'ensemble des opérateurs unitaires sur  $\mathcal{H}_\pi$ .*

Une telle représentation est dite *irréductible* si les seuls sous-espaces invariants fermés de  $\mathcal{H}_\pi$  sont  $\{0\}$  et  $\mathcal{H}_\pi$ .

$\pi$  a des vecteurs invariants non-nuls s'il existe un vecteur non nul  $\xi$  de  $\mathcal{H}_\pi$  tel que  $\pi(g)\xi = \xi$ , pour tout  $g \in G$ .

Une notion plus faible est donnée par la

**Définition 1.1.2.**

*i) Soit  $\pi$  une représentation de  $G$ ,  $K$  un compact de  $G$  et  $\varepsilon > 0$ . Un vecteur non-nul de  $\mathcal{H}_\pi$  est  $(\varepsilon, K)$ -invariant si  $\max_{k \in K} \|\pi(k)\xi - \xi\| < \varepsilon \|\xi\|$ .*

*ii)  $\pi$  a des vecteurs presque invariants si pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout compact  $K$ , il existe un vecteur  $(\varepsilon, K)$ -invariant.*

Rappelons finalement que deux représentations sont dites *équivalentes* s'il existe un opérateur d'entrelacement unitaire.

## 1.2 1-cohomologie

### 1.2.1 Premières définitions et propriétés

Soit  $G$  un groupe localement compact  $\sigma$ -compact et soit  $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$  une représentation unitaire de  $G$ .

#### Définition 1.2.1.

- i) Une application continue  $b : G \rightarrow \mathcal{H}_\pi$  est un cocycle (par rapport à  $\pi$ ) si  $b$  vérifie la relation*

$$b(gh) = b(g) + \pi(g)b(h) \quad (*)$$

*pour tout  $g, h \in G$ .*

*L'ensemble des cocycles muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts est un espace de Fréchet, noté  $Z^1(G, \pi)$ .*

- ii) Un cocycle  $b$  est un cobord s'il existe un vecteur  $\xi \in \mathcal{H}_\pi$  tel que  $b(g) = \pi(g)\xi - \xi$ . L'ensemble des cobords est un sous-espace de  $Z^1(G, \pi)$  noté  $B^1(G, \pi)$ . L'adhérence des cobords dans  $Z^1(G, \pi)$  sera notée  $\overline{B^1}(G, \pi)$ . On dira qu'un élément de cet espace est presque un cobord.*
- iii) La 1-cohomologie de  $G$  à coefficients dans  $\pi$  est l'espace défini par*

$$H^1(G, \pi) = Z^1(G, \pi) / B^1(G, \pi).$$

- iv) La 1-cohomologie réduite de  $G$  à coefficients dans  $\pi$  est l'espace défini par*

$$\overline{H^1}(G, \pi) = Z^1(G, \pi) / \overline{B^1}(G, \pi).$$

#### Remarque 1.2.2.

- i) Si  $E$  est un  $G$ -espace vectoriel quelconque on définit  $H^1(G, E)$  de manière similaire.*
- ii) Si deux représentations sont équivalentes alors les espaces de cohomologie associés sont isomorphes.*

Citons tout d'abord les résultats techniques suivants ([16])

#### Lemme 1.2.3.

- i) Lorsque  $\mathcal{H}_\pi$  est séparable, une application faiblement mesurable qui vérifie la propriété (\*) est un cocycle.*
- ii) Si une suite de cocycles converge ponctuellement vers un élément de  $Z^1(G, \pi)$ , alors elle converge dans  $Z^1(G, \pi)$ .*

Une des premières questions qu'on peut se poser est de savoir quand la 1-cohomologie réduite est égale à la 1-cohomologie. La réponse est donnée par Guichardet ([16]) dans la proposition suivante :

**Proposition 1.2.4.** *Soit  $\pi$  une représentation unitaire de  $G$  sans vecteurs invariants non-nuls. Sont équivalents :*

- i)  $\pi$  ne possède pas de vecteurs presque invariants ;*
- ii)  $B^1(G, \pi)$  est fermé dans  $Z^1(G, \pi)$  ;*
- iii)  $H^1(G, \pi) = \overline{H^1(G, \pi)}$  (c.-à-d.  $H^1(G, \pi)$  est séparé).*

Le cas où  $\pi$  a des vecteurs invariants non-nuls se traite alors en décomposant la représentation en somme de deux représentations sous la forme  $1 \oplus \pi_0$  où  $1$  désigne la représentation triviale sur l'ensemble des vecteurs invariants  $\mathcal{H}_\pi^G$  et  $\pi_0$  est la représentation sans vecteurs invariants non-nuls obtenue en restreignant  $\pi$  à l'orthogonal de  $\mathcal{H}_\pi^G$ . D'une part, lorsque l'action est triviale,  $B^1(G, 1) = 0$  et d'autre part, on a la propriété ([19]) :

**Lemme 1.2.5.** *Soit  $\pi_i, i = 1, \dots, n$  une famille finie de représentations unitaires de  $G$ . Alors*

$$H^1(G, \bigoplus_{i=1}^n \pi_i) = \bigoplus_{i=1}^n H^1(G, \pi_i).$$

Ainsi, lorsque  $\pi$  a des vecteurs invariants non-nuls, la 1-cohomologie réduite est égale à la 1-cohomologie si et seulement si  $\pi_0$  ne possède pas de vecteurs presque invariants.

Le lemme précédent est faux pour une famille infinie de représentations. On a toutefois le résultat suivant ([7]) :

**Lemme 1.2.6.** *Soit  $\pi$  une représentation unitaire sans vecteurs invariants non-nuls d'un groupe localement compact séparable  $G$ . Sont équivalents :*

- i)  $H^1(G, \pi) = 0$  ;*
- ii)  $H^1(G, \infty \cdot \pi) = 0$ .*

La 1-cohomologie réduite se comporte beaucoup mieux de ce point de vue ([19]) :

**Proposition 1.2.7.** *Soit  $\pi$  une représentation s'écrivant comme intégrale directe hilbertienne de représentations unitaires,  $\int_X^\oplus \pi_x d\mu(x)$ . Si  $\overline{H^1(G, \pi_x)} = 0$  pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ , alors  $\overline{H^1(G, \pi)} = 0$ .*

### 1.2.2 Les actions par isométries affines

Nous allons donner une interprétation plus géométrique de l'annulation des espaces de 1-cohomologie et de 1-cohomologie réduite.

**Définition 1.2.8.** *Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert affine et  $G$  un groupe topologique. Une action par isométries affines de  $G$  sur  $\mathcal{H}$  est un morphisme  $\alpha$  de  $G$  dans le groupe  $Is(\mathcal{H})$  des isométries affines de  $\mathcal{H}$  tel que l'application*

$$G \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, (g, \xi) \mapsto \alpha(g)(\xi)$$

*est continue.*

Si  $\alpha$  est une action par isométries affines, alors pour tout  $g \in G$ , on peut écrire  $\alpha(g)\xi = \pi(g)\xi + b(g)$  où  $\pi$  est une représentation unitaire de  $G$  et  $b \in Z^1(G, \pi)$  (car  $\alpha$  est un homomorphisme). Réciproquement, la donnée d'une représentation  $\pi$  et d'un cocycle  $b \in Z^1(G, \pi)$  fournit une action par isométries affines dont la partie linéaire est donnée par  $\pi$  et la partie de translation est donnée par  $b$ . Par abus de notation, nous noterons  $\alpha = \pi + b$ . De plus,  $b$  est un cobord si et seulement si  $\alpha$  a un point fixe.

**Définition 1.2.9.** *Soit  $\alpha$  une action par isométries affines d'un groupe localement compact  $G$ . On dit que  $\alpha$  a presque des points fixes, si pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout compact  $K$  de  $G$  il existe  $\xi \in \mathcal{H}$  tel que*

$$\max_{k \in K} \|\alpha(k)\xi - \xi\| < \varepsilon$$

On remarque que  $\alpha = \pi + b$  a presque des points fixes si et seulement si  $b$  est presque un cobord.

On obtient alors :

**Proposition 1.2.10.** *Soit  $G$  un groupe localement compact et soit  $\pi$  une représentation unitaire de  $G$ . Alors :*

- i)  $H^1(G, \pi) = 0$  si et seulement si toute action par isométries affines de partie linéaire  $\pi$  admet un point fixe.*
- ii)  $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$  si et seulement si toute action par isométries affines de partie linéaire  $\pi$  a presque des points fixes.*

Une application du lemme du centre (voir par exemple [28], Chapitre 3) fournit :

**Lemme 1.2.11.** *Soit  $\alpha$  une action par isométries affines d'un groupe topologique  $G$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i)  $\alpha$  possède un point fixe ;*
- ii)  $\alpha$  possède une orbite bornée ;*
- iii) Toute orbite de  $\alpha$  est bornée.*

Ce lemme a pour conséquence l'équivalence suivante :

Soit  $b \in Z^1(G, \pi)$  un cocycle. Alors  $b$  est un cobord si et seulement si  $b$  est borné.

### 1.2.3 Quelques résultats connus

Le lemme suivant est un résultat de A.Guichardet ([16]). Nous le formulons différemment et en donnons une preuve plus géométrique. (Dans le chapitre 2, la proposition 2.3.1. renforcera ce lemme).

**Lemme 1.2.12.** *Soit  $G$  un groupe localement compact,  $N$  un sous-groupe normal et  $\pi$  une représentation sans vecteurs  $N$ -invariants non-nuls.*

*Alors l'application de restriction  $H^1(G, \pi) \rightarrow H^1(N, \pi|_N)$  est injective.*

*En particulier :*

- i) Si  $H^1(N, \pi|_N) = 0$  alors  $H^1(G, \pi) = 0$  ;*
- ii) Si l'application de restriction est identiquement nulle, alors  $H^1(G, \pi) = 0$ .*

**Preuve.** Soit  $\alpha$  une action affine de partie linéaire  $\pi$ , telle que la restriction de  $\alpha$  à  $N$  possède un point  $N$ -fixe et montrons qu'elle possède un point fixe par  $G$ .

Notons  $\mathcal{H}^N$  l'ensemble des points  $\alpha(N)$ -fixes. Si  $\xi, \eta \in \mathcal{H}^N$ , alors  $\xi - \eta = \alpha(n)\xi - \alpha(n)\eta = \pi(n)(\xi - \eta)$ . Mais par hypothèse,  $\pi$  n'a pas de vecteurs  $N$ -invariants non-nuls ; on conclut alors que  $\mathcal{H}^N$  est réduit à un point. Il suffit donc de montrer que  $\mathcal{H}^N$  est  $\alpha(G)$ -invariant.

Par normalité, on a, pour tout  $g \in G$ , tout  $n \in N$  et pour  $\xi \in \mathcal{H}^N$  :  
 $\alpha(n)(\alpha(g)\xi) = \alpha(g)(\alpha(g^{-1}ng)\xi) = \alpha(g)\xi$ . ■

Dans [51], Y.Shalom démontre le résultat d'annulation suivant :

**Théorème 1.2.13.** *Soit  $G_1, G_2$  deux groupes localement compacts et  $\pi$  une représentation du produit  $G_1 \times G_2$ . Alors soit  $\overline{H^1}(G_1 \times G_2, \pi) = 0$ , soit  $\pi$  a des vecteurs non-nuls  $G_i$ -invariants pour un  $i$ .*

Finalement, nous utiliserons par la suite le résultat d'annulation suivant :

**Lemme 1.2.14.** *Soit  $\Gamma$  un groupe discret et soit  $\mathcal{F}(\Gamma)$  l'ensemble des fonctions de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{C}$ . Si on considère sur  $\mathcal{F}(\Gamma)$  la structure de  $\Gamma$ -module induite par la multiplication à droite, alors  $H^1(\Gamma, \mathcal{F}(\Gamma)) = 0$ .*

**Preuve.** Soit  $b$  un cocycle de  $Z^1(\Gamma, \mathcal{F}(\Gamma))$ . Alors pour  $f \in \mathcal{F}(\Gamma)$  définie par  $f(\gamma) = b(\gamma)(1)$ , on a  $b(\gamma) = \gamma \cdot f - f$ . ■

## 1.3 La propriété (T) de Kazhdan

### 1.3.1 Définition et propriétés de base

**Définition 1.3.1.** *Soit  $G$  un groupe localement compact.  $G$  possède la propriété (T) de Kazhdan si toute représentation de  $G$  ayant des vecteurs presque invariants a un vecteur invariant non-nul.*

Les groupes ayant la propriété (T) sont nécessairement compactement engendrés et l'abélianisé d'un tel groupe est compact ([28]). Il est de plus aisé de voir que tout quotient d'un groupe ayant la propriété (T) a la propriété (T).

**Exemple 1.3.2.** *Les groupes  $SL_n(\mathbb{Z})$  et  $SL_n(\mathbb{R})$  pour  $n \geq 3$  ont la propriété (T) de Kazhdan (voir par exemple [28]). Plus généralement, tous les groupes de Lie simples de rang réel plus grand ou égal à 2, et leurs réseaux, ont la propriété (T) ([25], [56]).*

Il existe une notion un peu plus faible qui est reliée à la propriété (T); il s'agit de la propriété (T) relative :

**Définition 1.3.3.** *Soit  $G$  un groupe localement compact et  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$ . La paire  $(G, H)$  a la propriété (T) relative si une des assertions équivalentes suivantes est satisfaite :*

- i) Toute représentation de  $G$  ayant des vecteurs presque invariants a un vecteur  $H$ -invariant non-nul;*
- ii) Toute action de  $G$  par isométries affines sur un Hilbert a un point  $H$ -fixe;*
- iii) Pour toute représentation  $\pi$  de  $G$ , l'application de restriction  $H^1(G, \pi) \rightarrow H^1(H, \pi|_H)$  est identiquement nulle.*

Bien entendu si  $G = H$ , on retrouve la propriété (T). Des exemples triviaux sont donnés en considérant les cas où le sous-groupe  $H$  a la propriété (T). Un exemple beaucoup moins évident est donné par  $(\mathbb{R}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}^2)$  (c'est cette observation qui permet de montrer la propriété (T) pour les groupes  $SL_n(\mathbb{R})$  ( $n \geq 3$ )(voir [28])).

### 1.3.2 Propriété (T), fonctions conditionnellement de type négatif et 1-cohomologie

**Définition 1.3.4.** Soit  $G$  un groupe localement compact. Une application continue  $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}^+$  est conditionnellement de type négatif, si  $\psi(g) = \psi(g^{-1})$  pour tout  $g \in G$ ,  $\psi(1) = 0$  et si pour tout  $g_1, \dots, g_n \in G$  et tout  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  avec  $\sum_{i=1}^n a_i = 0$  :

$$\sum_{i,j} \bar{a}_i a_j \psi(g_i^{-1} g_j) \leq 0.$$

Un théorème de P.Delorme et A.Guichardet ([10] et [16]) établit le lien avec la propriété (T) :

**Théorème 1.3.5.** Soit  $G$  un groupe localement compact  $\sigma$ -compact.  $G$  a la propriété (T) si et seulement si toute fonction conditionnellement de type négatif sur  $G$  est bornée.

Le lien avec les cocycles est donné par l'exemple suivant :

**Exemple 1.3.6.** Soit  $\pi$  une représentation d'un groupe localement compact  $G$  et soit  $b \in Z^1(G, \pi)$ . Alors  $g \mapsto \|b(g)\|^2$  est une fonction conditionnellement de type négatif sur  $G$ .

Cet exemple est en fait universel, dans le sens suivant :

**Proposition 1.3.7.** Soit  $G$  un groupe localement compact et  $\psi$  une fonction conditionnellement de type négatif sur  $G$ . Il existe un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_\psi$ , une représentation  $\pi_\psi$  de  $G$  sur  $\mathcal{H}_\psi$  et un cocycle  $b_\psi \in Z^1(G, \pi_\psi)$  tel que  $\psi(g) = \|b_\psi(g)\|^2$ , pour tout  $g \in G$ .

On a les caractérisations suivantes de la propriété (T) :

**Théorème 1.3.8.** *Soit  $G$  un groupe localement compact  $\sigma$ -compact. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i)  $G$  a la propriété (T);*
- ii)  $H^1(G, \pi) = 0$  pour toute représentation  $\pi$  de  $G$ ;*
- iii) Toute action par isométries affines sur un Hilbert possède un point fixe.*

*Si de plus  $G$  est compactement engendré et séparable, alors les énoncés ci-dessus sont encore équivalents à :*

- iv)  $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$  pour toute représentation  $\pi$  de  $G$ ;*
- v)  $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$  pour toute représentation irréductible  $\pi$  de  $G$ .*

L'équivalence entre *ii)* et *iii)* découle immédiatement de la proposition 1.2.10. L'implication *ii)  $\Rightarrow$  i)* découle du raisonnement suivant :

Si  $\pi$  est une représentation de  $G$  sans vecteurs invariants non-nuls, alors comme  $H^1(G, \pi) = 0$  la proposition 1.2.4. nous assure que  $\pi$  n'a pas de vecteurs presque invariants.

Pour l'implication réciproque, le lecteur pourra se référer à [28].

L'équivalence avec l'assertion *iv)* est un remarquable résultat de Y. Shalom (voir [51]). Finalement l'équivalence entre *iv)* et *v)* découle de la proposition 1.2.7.

**Remarque 1.3.9.** *L'hypothèse de génération compacte pour les points *iv)* et *v)* est immédiate lorsque l'on suppose le groupe connexe.*

Le théorème précédent nous amène tout naturellement à la considération suivante : pour un groupe compactement engendré (par exemple un groupe localement compact connexe) séparable  $G$  n'ayant pas la propriété (T), quelles sont les représentations (irréductibles) de  $G$  qui ont une 1-cohomologie réduite non-triviale ?

Ce genre de considération apparaîtra à plusieurs reprises. La première étape est de comprendre le cas des groupes moyennables (non-compacts).

**Définition 1.3.10.** *Soit  $G$  un groupe localement compact.  $G$  est moyennable s'il existe une forme linéaire  $G$ -invariante  $m : L_{\mathbb{R}}^{\infty}(G) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\text{essinf}(f) \leq m(f) \leq \text{esssup}(f)$  (une telle application est appelée moyenne  $G$ -invariante).*

**Proposition 1.3.11.** *Soit  $G$  un groupe localement compact. Alors  $G$  est moyennable si et seulement si la représentation régulière de  $G$  a des vecteurs presque invariants.*

Observons que la représentation régulière a des vecteurs invariants non-nuls si et seulement si  $G$  est compact. D'où la proposition :

**Proposition 1.3.12.** *Soit  $G$  un groupe localement compact. Alors  $G$  est moyennable et possède la propriété (T) si et seulement s'il est compact.*

Une classe d'exemples de groupes moyennables est donnée par la famille des groupes résolubles.

## 1.4 La propriété de Haagerup

### 1.4.1 La propriété de Haagerup pour les groupes localement compacts

Cette notion est une forme faible de moyennabilité pour les groupes localement compacts. Pour de plus amples développements, on consultera [8].

**Définition 1.4.1.** *Soit  $G$  un groupe localement compact  $\sigma$ -compact.  $G$  a la propriété de Haagerup s'il vérifie une des conditions équivalentes suivantes :*

- i) Il existe une représentation unitaire  $\pi$  de  $G$  qui a presque des vecteurs invariants et dont tous les coefficients  $\phi_{\xi,\eta} : g \mapsto \langle \pi(g)\xi | \eta \rangle$  ( $\xi, \eta \in \mathcal{H}_\pi$ ) appartiennent à  $\mathcal{C}_0(G)$ .*
- ii) Il existe une action  $\alpha$  par isométries affines sur un Hilbert  $\mathcal{H}$  qui est propre (c.-à-d. que pour tous sous-ensembles bornés  $B, C$  de  $\mathcal{H}$ , l'ensemble  $\{g \in G | \alpha(g)B \cap C \neq \emptyset\}$  est relativement compact dans  $G$ ).*
- iii) Il existe une fonction conditionnellement de type négatif sur  $G$  qui est propre.*

#### Remarque 1.4.2.

- i) En comparant les définitions, on peut considérer la propriété de Haagerup comme une négation forte de la propriété (T) et on observe immédiatement que ces deux propriétés s'excluent mutuellement. Plus précisément, la famille des groupes qui possèdent ces deux propriétés est exactement celle des groupes compacts.*

- ii) De manière similaire, on observe que si  $G$  a la propriété de Haagerup et si  $H$  est un sous-groupe fermé tel que  $(G, H)$  a la propriété (T) relative, alors  $H$  doit être compact.

La classe des groupes possédant la propriété de Haagerup est passablement riche, comme le montrent les exemples suivants :

- 1) Comme les coefficients de la représentation régulière d'un groupe sont des fonctions  $C_0$  sur le groupe, un groupe moyennable possède la propriété de Haagerup.
- 2) Le groupe libre sur  $n$  générateurs a la propriété de Haagerup.
- 3) Le groupe  $F$  de Thompson a la propriété de Haagerup. ([12])
- 4) Les groupes de Lie  $SO(n, 1)$ ,  $SU(m, 1)$  ainsi que tous leurs sous-groupes fermés possèdent la propriété de Haagerup.

Dans le cas des groupes de Lie connexes, on a la remarquable classification suivante ([8], Chap.4, théorème 4.0.1.) :

**Théorème 1.4.3.** *Soit  $G$  un groupe de Lie connexe. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i)  $G$  a la propriété de Haagerup ;
- ii) Si  $H$  est un sous-groupe fermé tel que  $(G, H)$  a la propriété (T) relative alors  $H$  est compact,
- iii)  $G$  est localement isomorphe à un produit direct

$$M \times SO(n_1, 1) \times \dots \times SO(n_k, 1) \times SU(m_1, 1) \times \dots \times SU(m_l, 1)$$

où  $M$  est un groupe de Lie moyennable (c.-à-d. une extension d'un groupe résoluble par un groupe compact).

## 1.4.2 La propriété de Haagerup des algèbres de von Neumann

Dans [9], M.Choda a caractérisé la propriété de Haagerup d'un groupe discret dénombrable par l'existence d'une propriété d'approximation sur l'algèbre de von Neumann de ce groupe. Plus précisément,

**Théorème 1.4.4.** *Soit  $\Gamma$  un groupe discret dénombrable.*

$\Gamma$  a la propriété de Haagerup si et seulement s'il existe une suite  $(\Phi_n)_{n \geq 1}$  d'applications complètement positives sur l'algèbre de von Neumann  $L(\Gamma)$  du groupe satisfaisant :

- i)  $\tau \circ \Phi_n \leq \tau$  et  $\Phi_n$  s'étend en un opérateur compact sur  $l^2(\Gamma)$  ( $\tau$  désigne la trace naturelle sur  $L(\Gamma)$ );
- ii) Pour tout  $x \in L(\Gamma)$ ,  $\|\Phi_n(x) - x\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Or, certaines algèbres de von Neumann qui ne sont pas nécessairement des algèbres de von Neumann de groupes partagent ce type de propriété, (par exemple les algèbres de von Neumann AFD, voir également [4]).

D'où la définition :

**Définition 1.4.5.** Soit  $M$  une algèbre de von Neumann finie. Soit  $\tau$  une trace sur  $M$  finie, normale, normalisée et fidèle.  $M$  a la propriété de Haagerup par rapport à  $\tau$  s'il existe une suite  $(\Phi_n)_{n \geq 1}$  d'applications complètement positives de  $M$  dans lui-même telles que :

- i)  $\tau \circ \Phi_n \leq \tau$  et pour tout  $n$ ,  $\Phi_n$  est  $L^2$ -compacte (i.e. son prolongement naturel à  $L^2(M)$  est un opérateur compact);
- ii) pour tout  $x \in M$ ,  $\|\Phi_n(x) - x\|_{2,\tau} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

## 1.5 Cohomologie- $L^2$

Soit  $X$  un complexe simplicial orienté uniformément localement fini et notons  $\Sigma^p(X)$  l'ensemble des  $p$ -simplexes. Pour  $p \in \mathbb{N}$  on définit l'espace des  $p$ -cochaînes de  $X$  par

$$C^p(X) = \{f : \Sigma^p(X) \rightarrow \mathbb{C}\}$$

et l'opérateur cobord  $d_p^0 : C^p(X) \rightarrow C^{p+1}(X)$  par

$$d_p^0(f)(\sigma) = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j f(\sigma^j)$$

où  $\sigma^j$  désigne la  $j$ -ème face de  $\sigma$ . L'espace des  $p$ -cochaînes- $L^2$  est le sous-espace de  $C^p(X)$  défini par

$$C_{(2)}^p(X) = \{f : \Sigma^p(X) \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{\sigma \in \Sigma^p(X)} |f(\sigma)|^2 < \infty\}.$$

$C_{(2)}^p(X)$  n'est rien d'autre que l'espace de Hilbert  $l^2(\Sigma^p(X))$ . La restriction de  $d_p^0$  à  $C_{(2)}^p(X)$  fournit un opérateur borné  $d_p$  de  $C_{(2)}^p(X)$  dans  $C_{(2)}^{p+1}(X)$  satisfaisant  $d_p \circ d_{p-1} = 0$ .

**Définition 1.5.1.** *La  $p$ -cohomologie de  $X$  est l'espace*

$$H^p(X) = \ker(d_p^0) / \text{Im}(d_{p-1}^0)$$

*La  $p$ -cohomologie- $L^2$  réduite de  $X$  est l'espace de Hilbert*

$$\overline{H^p}_{(2)}(X) = \ker(d_p) / \overline{\text{Im}(d_{p-1})}$$

**Proposition 1.5.2.** *Pour  $p \in \mathbb{N}$ , notons  $\mathcal{H}_{(2)}^p(X) = \{f \in C_{(2)}^p(X) \mid d_p(f) = 0 \text{ et } d_{p-1}^*(f) = 0\}$ . On a alors la décomposition suivante, appelée décomposition de Hodge :*

$$C_{(2)}^p(X) = \overline{\text{Im}(d_p^*)} \oplus \mathcal{H}_{(2)}^p(X) \oplus \overline{\text{Im}(d_{p-1})}.$$

*En particulier,  $\overline{H^p}_{(2)}(X) \cong \mathcal{H}_{(2)}^p(X)$ .*

Le résultat suivant est dû à Dodziuk ([11])

**Théorème 1.5.3.** *Soit  $X_1, X_2$  des complexes simpliciaux finis et notons  $\widetilde{X}_i, i = 1, 2$ , leurs revêtements universels. Si  $X_1$  est homotope à  $X_2$ , alors les espaces  $\overline{H^p}_{(2)}(\widetilde{X}_i)$  sont isomorphes.*

Ce théorème a pour conséquence la définition suivante :

**Définition 1.5.4.** *Soit  $\Gamma$  un groupe discret agissant librement sur un complexe simplicial  $X$ , contractile et uniformément localement fini. La  $p$ -cohomologie- $L^2$  de  $\Gamma$  est*

$$\overline{H^p}_{(2)}(\Gamma) \doteq \overline{H^p}_{(2)}(X).$$

On obtient de manière naturelle une application de  $\overline{H^p}_{(2)}(X)$  dans  $H^p(X)$  dont le noyau, appelé  $p$ -cohomologie- $L^2$  exacte, sera noté  $\overline{H^p}_{(2),ex}(X)$ . On a alors :

**Lemme 1.5.5.**

$$\overline{H^1}_{(2),ex}(X) \cong \{\alpha \in C_{(2)}^1(X) \mid d_0^*(\alpha) = 0 \text{ et } \alpha \in \text{Im}(d_0^0)\}$$

Ce lemme montre que  $\overline{H^1}_{(2),ex}(X)$  ne dépend que du 1-squelette de  $X$  ; alors que  $\overline{H^1}_{(2)}(X)$  dépend également du 2-squelette. Par exemple, lorsque  $\Gamma$  est de type fini par  $S$  et lorsque  $X$  est le revêtement universel du 2-complexe de présentation,  $\Sigma^1(X)$  est le graphe de Cayley de  $\Gamma$  et on a

$$\overline{H^1}_{(2),ex}(X) = \{f \in \mathcal{D}(\Gamma) \mid \Delta(f) = 0\}$$

où

$$\mathcal{D}(\Gamma) = \{f \in \mathcal{F}(\Gamma) \mid \|\rho(s)f - f\|_2 < \infty \forall s \in S\}$$

et

$$\Delta(f) = \#S \cdot f - \sum_{s \in S} \rho(s)(f)$$

( $\rho$  désigne la translation à droite).

On a de plus la proposition suivante :

**Proposition 1.5.6.** *Soit  $X$  un complexe simplicial dont le 1-squelette est fini. Alors, si  $\tilde{X}$  désigne le revêtement universel de  $X$  :*

$$\overline{H^1}_{(2),ex}(\tilde{X}) = 0 \Leftrightarrow \overline{H^1}_{(2)}(\pi_1(X)) = 0$$

### 1.5.1 $\Gamma$ -dimension et nombres de Betti- $L^2$

**Définition 1.5.7.** *Un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  sur lequel un groupe discret  $\Gamma$  agit unitairement est un  $\Gamma$ -module de Hilbert (de type fini), s'il existe  $n \geq 1$  et une injection équivariante  $\theta : \mathcal{H} \rightarrow l^2(\Gamma)^n$  (où  $l^2(\Gamma)^n$  est muni de l'action de  $\Gamma$  par translation à gauche).*

*La  $\Gamma$ -dimension (ou dimension de von Neumann) d'un tel  $\Gamma$ -module  $\mathcal{H}$  est*

$$\dim_{\Gamma}(\mathcal{H}) = \sum_{i=0}^n \langle P_{ii}(\delta_e) \mid \delta_e \rangle$$

où  $P = (P_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  est la projection orthogonale de  $l^2(\Gamma)^n$  sur  $\overline{\theta(\mathcal{H})}$ .

On démontre aisément que  $\dim_{\Gamma}(\mathcal{H}) = 0$  implique  $\mathcal{H} = 0$ .

Si  $X$  est un complexe simplicial sur lequel  $\Gamma$  agit librement cocompactement alors l'espace de  $p$ -cohomologie- $L^2$  est un  $\Gamma$ -module de Hilbert.

**Définition 1.5.8.** Soit  $\Gamma$  et  $X$  comme ci dessus. Le  $p$ -ième nombre de Betti- $L^2$  de  $X$  est

$$b_{(2)}^p(X) = \dim_{\Gamma}(\overline{H^p}_{(2)}(X))$$

En particulier si  $X$  est le revêtement universel d'un  $K(\Gamma, 1)$  fini, on définit le  $p$ -ième nombre de Betti- $L^2$  de  $\Gamma$ ,  $b_{(2)}^p(\Gamma)$ , par  $b_{(2)}^p(X)$ .

# Chapitre 2

## $\overline{H^1}(\Gamma, l^2(\Gamma))$ et $b_{(2)}^1(\Gamma)$

### 2.1 Introduction

Dans [3], un isomorphisme est établi, pour un groupe de type fini *non-moyennable*  $(\Gamma, S)$ , entre l'espace  $H^1(\Gamma, l^2(\Gamma))$  et l'espace de cohomologie- $L^2$  exacte  $\overline{H^1}_{(2),ex}(\Gamma)$ . L'annulation de ce dernier est alors équivalente à l'annulation du premier nombre de Betti- $L^2$  du groupe  $\Gamma$ . D'autre part l'annulation d'un de ces espaces est encore équivalente au fait qu'il n'existe pas de fonction harmonique Dirichlet finie non constante sur le graphe de Cayley  $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ .

Dans cette section nous établissons un isomorphisme entre l'espace de cohomologie réduite  $\overline{H^1}(\Gamma, l^2(\Gamma))$  et l'espace de cohomologie- $L^2$  exacte  $\overline{H^1}_{(2),ex}(\Gamma)$ , sans supposer que le groupe  $\Gamma$  est non moyennable. L'intérêt de cette observation est d'exploiter l'annulation des nombres de Betti- $L^2$  des groupes moyennables et d'autres résultats de cohomologie- $L^2$ .

Dans un second temps, nous établirons divers résultats d'annulation de  $\overline{H^1}(\Gamma, l^2(\Gamma))$  (sans nécessairement supposer la génération finie des groupes).

Introduisons quelques notations. Soit  $\Gamma$  un groupe discret de type fini et  $S$  un système fini de générateurs. Nous noterons  $\mathcal{F}(\Gamma)$  l'ensemble des fonctions de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{C}$ .

#### Définition 2.1.1.

*i) L'espace des fonctions Dirichlet-finies est le sous-espace  $\mathcal{D}(\Gamma)$  de  $\mathcal{F}(\Gamma)$  défini par :*

$$\mathcal{D}(\Gamma) = \{f \in \mathcal{F}(\Gamma) \mid \|\rho(g)f - f\|_2 < \infty \forall g \in \Gamma\}.$$

Comme  $S$  engendre  $\Gamma$ , on a aussi

$$\mathcal{D}(\Gamma) = \{f \in \mathcal{F}(\Gamma) \mid \|\rho(s)f - f\|_2 < \infty \forall s \in S\}.$$

ii)  $\Delta$  est le Laplacien combinatoire associé à  $(\Gamma, S)$ . Plus précisément si  $f \in \mathcal{F}(\Gamma)$ , alors

$$\Delta(f) = \#S \cdot f - \sum_{s \in S} \rho(s)(f).$$

Une fonction  $f$  est harmonique si  $\Delta(f) = 0$ .

iii)  $HD(\Gamma)$  est l'espace des fonctions harmoniques Dirichlet-finies.

Rappelons la définition de l'espace de 1-cohomologie- $L^2$  exacte de  $\Gamma$  :  
On définit un opérateur de bord sur le graphe de Cayley (muni d'une orientation) :

$$d : \mathcal{F}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{G}(\Gamma, S)^1); f \mapsto [(\gamma, \gamma s) \mapsto f(\gamma s) - f(\gamma)]$$

et son adjoint formel :

$$d^* : \mathcal{F}(\mathcal{G}(\Gamma, S)^1) \rightarrow \mathcal{F}(\Gamma); \xi \mapsto [\gamma \mapsto \sum_{e: e^+ = \gamma} \xi(e) - \sum_{e: e^- = \gamma} \xi(e)].$$

Avec ces notations, la 1-cohomologie- $L^2$  exacte de  $\Gamma$  est

$$\overline{H^1}_{(2),ex}(\Gamma) = \{\xi \in l^2(\mathcal{G}(\Gamma, S)^1) \mid d^*(\xi) = 0 \text{ et } \xi \in d(\mathcal{F}(\Gamma))\}.$$

On a le :

**Théorème 2.1.2.** *Soit  $\Gamma$  un groupe discret et  $S$  un système fini de générateurs, symétrique. Les espaces suivants sont isomorphes :*

- i)  $\overline{H^1}(\Gamma, l^2(\Gamma))$  ( $\Gamma$  agit via la représentation régulière droite,  $\rho$ );
- ii)  $HD(\Gamma)/\mathbb{C}$ ;
- iii)  $\overline{H^1}_{(2),ex}(\Gamma)$ .

De plus l'annulation de l'un de ces espaces est équivalente à  $b_{(2)}^1(\Gamma) = 0$ .

**Preuve.** Dans le cas où  $\Gamma$  est fini, toutes ces assertions sont évidemment vérifiées. Nous supposons donc que  $\Gamma$  est infini.

L'isomorphisme entre ii) et iii) est immédiate car l'égalité  $\Delta = d^*d$  nous permet d'identifier canoniquement l'espace  $HD(\Gamma)/\mathbb{C}$  et l'espace de 1-cohomologie- $L^2$  exacte de  $\Gamma$ .

Etablissons alors un isomorphisme entre  $\overline{H^1}(\Gamma, l^2(\Gamma))$  et  $HD(\Gamma)/\mathbb{C}$ .

On définit tout d'abord une semi-norme sur  $\mathcal{D}(\Gamma)$  par

$$\|f\|_{\mathcal{D}(\Gamma)} = \sum_{s \in S} \|\rho(s)f - f\|_2. \text{ Comme } S \text{ est une partie génératrice du groupe,}$$

le noyau de cette semi-norme est constitué des fonctions constantes et donc induit une norme sur  $\mathcal{D}(\Gamma)/\mathbb{C}$ . En fait,  $\mathcal{D}(\Gamma)/\mathbb{C}$  muni de cette norme est un espace de Hilbert pour le produit scalaire donné par

$$\langle f|g \rangle = \sum_{s \in S} \langle \rho(s)f - f | \rho(s)g - g \rangle_2$$

En effet, si  $(f_n + \mathbb{C})_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy de  $\mathcal{D}(\Gamma)/\mathbb{C}$ , alors  $(\rho(\gamma)f_n - f_n)_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy dans  $l^2(\Gamma)$ , pour tout  $\gamma \in \Gamma$  (puisque si  $\gamma$  s'écrit  $s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_l}$  ( $s_{i_j} \in S$ ,  $j = 1, \dots, l$ ), alors  $\|\rho(\gamma)(f_n - f_m) - (f_n - f_m)\|_2 \leq \sum_{j=1}^l \|\rho(s_{i_j})(f_n - f_m) - (f_n - f_m)\|_2$ ). Ainsi pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,  $(\rho(\gamma)f_n - f_n)_{n \geq 1}$  converge vers un élément de  $l^2(\Gamma)$ , noté  $\xi_\gamma$ . L'application  $\gamma \mapsto \xi_\gamma$  définit alors un cocycle de  $Z^1(\Gamma, l^2(\Gamma))$ . Donc par le lemme 1.2.14, il existe  $f \in \mathcal{F}(\Gamma)$ , telle que  $\xi_\gamma = \rho(\gamma)f - f$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$  (et donc  $f \in \mathcal{D}(\Gamma)$ ). La classe de  $f$  dans  $\mathcal{D}(\Gamma)/\mathbb{C}$  est donc la limite de la suite  $(f_n + \mathbb{C})_{n \geq 1}$ .

On définit alors une application linéaire  $\alpha : \mathcal{D}(\Gamma) \rightarrow Z^1(\Gamma, l^2(\Gamma))$  par  $\alpha(f)(\gamma) = \rho(\gamma)f - f$ . Par le lemme 1.2.14,  $\alpha$  est surjective et de plus son noyau est donné par les fonctions constantes. On obtient donc un isomorphisme linéaire, encore noté  $\alpha$  entre  $\mathcal{D}(\Gamma)/\mathbb{C}$  et  $Z^1(\Gamma, l^2(\Gamma))$ . Montrons alors que  $\alpha$  est bicontinue :

- 1)  $\alpha$  est continue : Soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  une suite de  $\mathcal{D}(\Gamma)/\mathbb{C}$  telle que  $\|f_n\|_{\mathcal{D}(\Gamma)/\mathbb{C}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  et montrons que pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\|\alpha(f_n)(\gamma)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Par hypothèse,  $\sum_{s \in S} \|\rho(s)f_n - f_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ; en particulier,  $\|\rho(s)f_n - f_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , pour tout  $s \in S$ . Ainsi, si  $\gamma$  s'écrit  $s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_l}$ , alors

$$\|\rho(\gamma)f_n - f_n\|_2 \leq \sum_{j=1}^l \|\rho(s_{i_j})f_n - f_n\|_2$$

Et donc,  $\|\alpha(f_n)(\gamma)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

- 2)  $\alpha^{-1}$  est continue : La continuité séquentielle de  $\alpha^{-1}$  est immédiate puisque la topologie de  $Z^1(\Gamma, l^2(\Gamma))$  est celle de la convergence ponctuelle.

Comme  $\Gamma$  est infini, on remarque que  $l^2(\Gamma)$  s'injecte canoniquement dans  $\mathcal{D}(\Gamma)/\mathbb{C}$ ; nous noterons cette injection par  $i$ .

Par définition,  $\alpha(i(l^2(\Gamma))) = B^1(\Gamma, l^2(\Gamma))$  et comme  $\alpha$  est un isomorphisme topologique,

$$\alpha(\overline{i(l^2(\Gamma))}) = \overline{B^1(\Gamma, l^2(\Gamma))}.$$

Par projection orthogonale, on a la décomposition

$$\mathcal{D}(\Gamma)/\mathbb{C} = \overline{i(l^2(\Gamma))} \oplus i(l^2(\Gamma))^\perp$$

Mais  $i(l^2(\Gamma))^\perp$  n'est rien d'autre que  $HD(\Gamma)/\mathbb{C}$ . En effet :

$$\begin{aligned} f \in i(l^2(\Gamma))^\perp &\Leftrightarrow \sum_{s \in S} \langle \rho(s)f - f | \rho(s)i(\xi) - i(\xi) \rangle_2 = 0, \forall \xi \in l^2(\Gamma) \\ &\Leftrightarrow \sum_{s \in S} \langle \rho(s)f - f | \rho(s)i(\xi) \rangle_2 \\ &\quad - \sum_{s \in S} \langle \rho(s)f - f | i(\xi) \rangle_2 = 0, \forall \xi \in l^2(\Gamma) \\ &\Leftrightarrow \sum_{s \in S} \langle f - \rho(s^{-1})f | i(\xi) \rangle_2 \\ &\quad - \sum_{s \in S} \langle \rho(s)f - f | i(\xi) \rangle_2 = 0, \forall \xi \in l^2(\Gamma) \\ &\stackrel{\Leftrightarrow_{S=S^{-1}}}{\Leftrightarrow} -2 \sum_{s \in S} \langle \rho(s)f - f | i(\xi) \rangle_2 = 0, \forall \xi \in l^2(\Gamma) \\ &\Leftrightarrow \langle \sum_{s \in S} (\rho(s)f - f) | i(\xi) \rangle_2 = 0, \forall \xi \in l^2(\Gamma) \\ &\Leftrightarrow \sum_{s \in S} (\rho(s)f - f) = 0 \\ &\Leftrightarrow \Delta(f) = 0 \\ &\Leftrightarrow f \in HD(\Gamma)/\mathbb{C} \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{D}(\Gamma)/\mathbb{C} = \overline{i(l^2(\Gamma))} \oplus HD(\Gamma)/\mathbb{C}$ , d'où  $\alpha(\mathcal{D}(\Gamma)/\mathbb{C}) = \alpha(\overline{i(l^2(\Gamma))}) \oplus \alpha(HD(\Gamma)/\mathbb{C})$ . On conclut alors que

$$Z^1(\Gamma, l^2(\Gamma)) = \overline{B^1(\Gamma, l^2(\Gamma))} \oplus \alpha(HD(\Gamma)/\mathbb{C}).$$

Et donc

$$\overline{H^1}(\Gamma, l^2(\Gamma)) \cong HD(\Gamma)/\mathbb{C}.$$

Finalement, l'annulation de l'un de ces espaces est équivalente à l'annulation de  $b_{(2)}^1(\Gamma)$  puisque  $\overline{H^1}_{(2),ex}(\Gamma)$  s'annule si et seulement si  $b_{(2)}^1(\Gamma) = 0$  (proposition 1.5.6.). ■

**Exemple 2.1.3.** *Tout groupe  $\Gamma$  ayant la propriété (T) annule les espaces du théorème. Plus généralement si  $N$  est un sous-groupe normal infini de  $\Gamma$  tel que la paire  $(\Gamma, N)$  a la propriété (T) relative alors  $H^1(\Gamma, l^2(\Gamma)) = 0$  par le lemme 1.2.12. et la définition 1.3.3 iii).*

### 2.1.1 Applications

Grâce à l'équivalence entre l'annulation du premier nombre de Betti- $l^2$  d'un groupe de type fini  $\Gamma$  et l'annulation de  $\overline{H}^1(\Gamma, l^2(\Gamma))$ , nous pouvons reformuler le théorème de Cheeger-Gromov (voir [6]).

**Théorème 2.1.4.** *Soit  $\Gamma$  un groupe discret de type fini.*

- i) *Si  $\Gamma$  est moyennable, alors  $\overline{H}^1(\Gamma, l^2(\Gamma)) = 0$ .*
- ii) *Si  $\Gamma$  contient un sous-groupe normal infini moyennable, alors  $\overline{H}^1(\Gamma, l^2(\Gamma)) = 0$ .*

**Remarque 2.1.5.** *Un autre preuve de l'assertion i) de ce résultat peut être donnée par le théorème 4.75 de [52] et en utilisant l'équivalence entre les assertions i) et ii) du théorème 2.1.2.*

*Cependant, une preuve directe de l'annulation de  $\overline{H}^1(\Gamma, l^2(\Gamma))$  pour un groupe moyennable de type fini n'est pas immédiate. Si  $b$  est un cocycle de  $Z^1(\Gamma, l^2(\Gamma))$ , alors il s'écrit en vertu du lemme 1.2.14. comme  $b(\cdot) = \lambda_\Gamma(\cdot)f - f$  avec  $f \in \mathcal{F}(\Gamma)$ . Par hypothèse, il existe une suite de Følner  $(A_n)_{n \geq 1}$  dans  $\Gamma$  et on peut supposer (voir [39], théorème 4.16) que cette suite est croissante et que  $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \Gamma$ .*

*On pourrait alors espérer que la suite de cobords définie par  $(\lambda_\Gamma(\cdot)f|_{A_n} - f|_{A_n})_{n \geq 1}$  converge vers  $b$ . Mais il n'en n'est rien. En effet, considérons sur  $\mathbb{Z}$  la suite de Følner canonique  $(\{-n, \dots, n\})_{n \geq 1}$ .*

*Alors, pour  $f$  définie par*

$$f(n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*on a :*

- 1)  *$b$  défini par  $\lambda_{\mathbb{Z}}(\cdot)f - f$  est un cocycle de  $Z^1(\mathbb{Z}, l^2(\mathbb{Z}))$ . En effet,*

$$\|\lambda_{\mathbb{Z}}(-1)f - f\|_2^2 = \sum_{i \geq 1} \left| \frac{1}{i} \right|^2 < \infty$$

*et donc  $\lambda_{\mathbb{Z}}(m)f - f \in l^2(\mathbb{Z})$ , pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ .*

2) Mais  $\|b(-1) - (\lambda_{\mathbb{Z}}(-1)f|_{A_n} - f|_{A_n})\|_2^2$  ne converge pas vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $\infty$ . En effet cette quantité est minorée par :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n |(f - f|_{A_n})(k+1) - (f - f|_{A_n})(k)|^2 \\ &= |(f - f|_{A_n})(n+1) - (f - f|_{A_n})(n)|^2 \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} \right|^2 \end{aligned}$$

qui diverge.

Nous allons alors voir que nous pouvons nous passer de l'hypothèse de génération finie dans l'assertion *i*).

**Proposition 2.1.6.** *Soit  $\Gamma$  un groupe discret s'écrivant comme réunion croissante de sous-groupes,  $\Gamma_n$ ,  $n \geq 1$ .*

*Si  $\overline{H^1}(\Gamma_n, l^2(\Gamma_n)) = 0$  pour tout  $n \geq 1$  alors  $\overline{H^1}(\Gamma, l^2(\Gamma)) = 0$ .*

**Preuve.** Soit  $\alpha$  une action affine de  $\Gamma$  de partie linéaire  $\lambda_\Gamma$  et de cocycle  $b$ , soit  $F$  une partie finie de  $\Gamma$  et soit  $\varepsilon > 0$ . Fixons  $n$  tel que  $\Gamma_n \supset F$ . Comme  $l^2(\Gamma) = \bigoplus_{x \in X} l^2(\Gamma_n x)$  (où  $X$  est un système de représentants de  $\Gamma_n \backslash \Gamma$ ),

$\alpha(\gamma) = (\alpha_x(\gamma))_{x \in X}$ , où  $\alpha_x(\gamma) = \lambda_{\Gamma_n}(\gamma) + b_x(\gamma)$ ,  $\forall \gamma \in \Gamma_n$ .

Soit alors  $S \subset X$  une partie finie telle que  $\sum_{x \notin S} \|b_x(\gamma)\|^2 < \frac{\varepsilon}{2}$ , pour tout

$\gamma \in F$ . Par hypothèse, il existe pour tout  $x \in X$  un vecteur  $\xi_x$  tel que  $\|\alpha_x(\gamma)\xi_x - \xi_x\| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\#S}}$ ,  $\forall \gamma \in F$ . On a alors, pour  $\xi = \bigoplus_{x \in S} \xi_x$  et  $\gamma \in F$  :

$$\begin{aligned} \|\alpha(\gamma)\xi - \xi\|^2 &= \sum_{x \in X} \|\alpha_x(\gamma)\xi_x - \xi_x\|^2 \\ &= \sum_{x \in S} \|\alpha_x(\gamma)\xi_x - \xi_x\|^2 + \sum_{x \notin S} \|b_x(\gamma)\|^2 \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Ce qui prouve que  $\alpha$  a un point  $(F, \varepsilon)$ -fixe. ■

Ce résultat peut être également obtenu comme une conséquence (via le lemme 1.2.6.) du résultat général suivant :

**Proposition 2.1.7.** *Soit  $G$  un groupe localement compact s'écrivant comme réunion croissante de sous-groupes ouverts,  $G_n$ ,  $n \geq 1$ . Soit encore  $\pi$  une représentation de  $G$ .*

*Si  $\overline{H^1}(G_n, \pi|_{G_n}) = 0$  pour tout  $n \geq 1$  alors  $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$ .*

**Preuve.** Soit  $\alpha$  une action affine de  $\Gamma$  de partie linéaire  $\pi$  et soit  $K$  un compact de  $G$  et  $\varepsilon > 0$  fixé. Il existe un  $n_0$  tel que  $K \subset G_{n_0}$  et comme  $\alpha|_{G_{n_0}}$  a presque des points fixes, il existe  $\xi$  tel que

$$\sup_{k \in K} \|\alpha(k)\xi - \xi\| < \varepsilon$$

On conclut donc que  $\alpha$  a presque des points fixes. ■

D'où le théorème :

**Théorème 2.1.8.** *Soit  $\Gamma$  un groupe discret moyennable. Alors*

$$\overline{H^1}(\Gamma, l^2(\Gamma)) = 0$$

**Preuve.** Il suffit d'observer que  $\Gamma$  s'écrit comme réunion croissante de sous-groupes de type fini. On conclut alors par le théorème 2.1.4. et la proposition précédente. ■

En combinant les théorèmes 2.1.4. et le lemme 1.2.6. on obtient alors :

**Corollaire 2.1.9.** *Soit  $\Gamma$  un groupe discret de type fini et  $N$  un sous-groupe normal infini. Alors*

$$\overline{H^1}(N, l^2(N)) = 0 \Rightarrow \overline{H^1}(\Gamma, l^2(\Gamma)) = 0.$$

**Preuve.** Si  $N$  est non-moyennable alors la cohomologie réduite  $\overline{H^1}(N, l^2(N))$  et la cohomologie  $H^1(N, l^2(N))$  coïncident (proposition 1.2.4.) et on fait appel au lemme 1.2.12.

Si  $N$  est moyennable alors d'une part  $\overline{H^1}(N, l^2(N)) = 0$  par le théorème précédent et d'autre part  $\overline{H^1}(\Gamma, l^2(\Gamma)) = 0$  par le théorème 2.1.4. ■

Dans [16], A.Guichardet après avoir établi le résultat du lemme 1.2.12, pose la question suivante :

"Si  $G$  est un groupe localement compact,  $N$  un sous-groupe normal fermé et  $\pi$  une représentation de  $G$  sans vecteurs  $N$ -invariant non nuls a-t-on l'implication :  $\overline{H^1}(N, \pi|_N) = 0 \Rightarrow \overline{H^1}(G, \pi) = 0$  ?" (\*)

Il y a plusieurs cas où la réponse est positive :

- i) Comme nous venons de le voir, pour les groupes discrets, cette affirmation est vérifiée en ce qui concerne la représentation régulière.
- ii) La proposition 3.2.4. apportera une réponse positive à cette question dans le cas où  $N$  est cocompact.

Cependant, cette assertion est fautive en toute généralité.

Afin de construire des contre-exemples, nous aurons besoin d'une conséquence immédiate du théorème 6.3.10., à savoir le :

**Théorème 2.1.10.** *Soit  $H, \Gamma$  deux groupes discrets dénombrables. Si  $\Gamma$  est infini, alors le produit en couronne  $H \wr \Gamma$  (qui est par définition le produit semi-direct  $\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} H \rtimes \Gamma$ , où l'action est donnée par le shift à gauche sur les indices) n'a pas la propriété (T).*

**Corollaire 2.1.11.** *Soit  $\Gamma$  un groupe discret infini ayant la propriété (T) et  $H$  un groupe discret de type fini tel que  $\text{Hom}(H, \mathbb{C}) = 0$ . Alors il existe une représentation irréductible  $\pi_0$  de  $H \wr \Gamma$ , sans vecteurs  $\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} H$ -invariants non nuls, telle que  $\overline{H^1}(H \wr \Gamma, \pi_0) \neq 0$ . Si de plus  $H$  a la propriété (T), ceci fournit un contre-exemple à l'assertion (\*) (pour  $N = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} H$ ).*

**Preuve.** Comme  $H \wr \Gamma$  est de type fini et ne possède pas la propriété (T) (par le théorème précédent), le théorème 1.3.8 *v)* nous assure l'existence d'une représentation irréductible de  $H \wr \Gamma$  telle que  $\overline{H^1}(H \wr \Gamma, \pi) \neq 0$ . Il suffit alors de remarquer que cette représentation ne peut pas avoir des vecteurs  $\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} H$ -invariants non nuls, car si tel était le cas,  $\pi$  factoriserait en une représentation de  $\Gamma$  et on aurait  $\overline{H^1}(H \wr \Gamma, \pi) = \overline{H^1}(\Gamma, \hat{\pi}) = 0$ . Finalement, si  $H$  a la propriété (T),  $\overline{H^1}(\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} H, \pi|_{\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} H}) = 0$  par la proposition 2.1.7. D'où un contre-exemple à l'assertion (\*). ■

## 2.2 Quelques résultats d'annulation

Dans cette section, nous allons établir quelques résultats d'annulation de l'espace  $\overline{H}^1(G, L^2(G))$ .

**Proposition 2.2.1.** *Soit  $H, \Gamma$  deux groupes discrets. Alors*

$$\overline{H}^1(H \wr \Gamma, l^2(H \wr \Gamma)) = 0.$$

**Preuve.** Si  $H$  et  $\Gamma$  sont finis, alors  $H \wr \Gamma$  est fini et le résultat est trivial. Lorsque  $H$  est infini ou lorsque  $\Gamma$  est infini, on a  $\overline{H}^1(\oplus_{i=1}^n H, l^2(\oplus_{i=1}^n H)) = 0$ , et 2.1.9. s'applique. ■

**Proposition 2.2.2.** *Soit  $H_1, H_2$  des groupes localement compacts non compacts et soit  $N \triangleleft H_1 \times H_2$  un sous-groupe normal fermé tel que  $N \cap (H_1 \times \{1\})$  (resp.  $N \cap (\{1\} \times H_2)$ ) n'est pas cocompact dans  $H_1 \times \{1\}$  (resp.  $\{1\} \times H_2$ ). Si  $G = (H_1 \times H_2)/N$ , alors  $\overline{H}^1(G, L^2(G)) = 0$ .*

**Preuve.** Regardons  $\lambda_G$  comme une représentation du produit  $H_1 \times H_2$ . Par l'absurde, si on suppose que  $\overline{H}^1(G, \lambda_G) \neq 0$  alors  $\overline{H}^1(H_1 \times H_2, \lambda_G) \neq 0$ . Par la proposition 3.2 de Y. Shalom ([51]), ceci nous assure l'existence d'un vecteur non nul de  $L^2(G)$  invariant soit par  $H_1 \times \{1\}$  soit par  $\{1\} \times H_2$ . Et donc ce vecteur est invariant par de  $H_i/(N \cap H_i)$  ( $i = 1$  ou  $2$ ). Par hypothèse,  $H_i/(N \cap H_i)$  n'est pas compact et donc cette fonction est nulle; d'où une contradiction. ■

**Corollaire 2.2.3.** *Soit  $H_1, H_2$  des groupes discrets infinis et soit  $N \triangleleft H_1 \times H_2$  un sous-groupe normal tel que  $N \cap (H_1 \times \{1\})$  (resp.  $N \cap (\{1\} \times H_2)$ ) est d'indice infini dans  $H_1 \times \{1\}$  (resp.  $\{1\} \times H_2$ ). Si  $\overline{H}^1(\Gamma, l^2(\Gamma)) \neq 0$ , alors  $\Gamma$  n'est ni quasi-isométrique, ni mesurablement équivalent (ME) à  $(H_1 \times H_2)/N$ .*

**Preuve.** La proposition précédente nous assure l'annulation de l'espace  $\overline{H}^1((H_1 \times H_2)/N, L^2((H_1 \times H_2)/N))$ . On conclut alors en utilisant le fait que l'annulation du premier nombre de Betti- $l^2$  est un invariant de quasi-isométrie ([52] ou [38]) et de ME (voir D. Gaboriau [14]). ■

**Corollaire 2.2.4.** *Soit  $G$  un groupe localement compact dont le centre n'est pas compact. Alors  $\overline{H^1}(G, L^2(G)) = 0$ .*

**Preuve.** Considérons l'homomorphisme surjectif  $\theta : G \times \mathcal{Z}(G) \rightarrow G$  donné par  $(g, z) \mapsto gz$ .

Son noyau est  $N = \{(z^{-1}, z) \mid z \in \mathcal{Z}(G)\}$  et donc  $G \cong (G \times \mathcal{Z}(G))/N$ . Supposons  $\overline{H^1}(G, L^2(G)) \neq 0$ . Par la proposition 2.2.2, soit  $G$  soit  $\mathcal{Z}(G)$  est compact. Dans les deux cas,  $\mathcal{Z}(G)$  est compact. ■

**Corollaire 2.2.5.** *Soit  $\Gamma$  un groupe discret tel que  $\overline{H^1}(\Gamma, l^2(\Gamma)) \neq 0$ . Si  $\gamma \in \Gamma$  a une classe de conjugaison finie, alors  $\gamma$  est d'ordre fini.*

**Preuve.** Par la proposition 2.1.6, on peut supposer que  $\Gamma$  est de type fini. Comme le centralisateur de  $\gamma$  dans  $\Gamma$ , noté  $\mathcal{Z}_\Gamma(\gamma)$ , est d'indice fini dans  $\Gamma$ ,  $\overline{H^1}(\mathcal{Z}_\Gamma(\gamma), l^2(\mathcal{Z}_\Gamma(\gamma))) \neq 0$  (par Cheeger-Gromov [6]). Puisque  $\gamma$  est central dans  $\mathcal{Z}_\Gamma(\gamma)$ , le corollaire précédent permet de conclure. ■

Ce corollaire nous amène à nous poser la question suivante : est-il vrai que, sous les hypothèses du corollaire 2.2.5, le sous-groupe des éléments de  $\Gamma$  à classe de conjugaison finie soit fini ?

## 2.3 Un phénomène de rigidité

Le lemme 1.2.12, nous assure l'annulation de  $H^1(\Gamma, l^2(\Gamma))$  s'il existe un sous-groupe normal infini  $N$  avec  $H^1(N, l^2(N)) = 0$ . On s'intéresse ici à affaiblir la condition sur  $H^1(N, l^2(N))$ . Nous allons alors appliquer ces résultats pour établir l'annulation de  $H^1(\Gamma, l^2(\Gamma))$  sous la seule condition qu'il existe un sous-groupe normal non moyennable infini de type fini dont le centralisateur dans  $\Gamma$  est infini.

Observons alors que si  $N$  est un sous-groupe normal d'un groupe  $\Gamma$ , on a une action naturelle de  $\Gamma$  sur  $Z^1(N, \pi|_N)$  donnée par

$$\gamma \cdot b(n) = \pi(\gamma)b(\gamma^{-1}n\gamma).$$

Remarquons de plus que cette action factorise en une action du groupe  $\Gamma$  sur  $H^1(N, \pi|_N)$  (et même sur  $\overline{H^1}(N, \pi|_N)$ ) qui est triviale sur  $N$  et donc l'action est en fait une action de  $\Gamma/N$ . Nous allons établir un renforcement du lemme 1.2.12. du chapitre 1 :

**Proposition 2.3.1.** *Soit  $N$  un sous-groupe normal d'un groupe discret  $\Gamma$  et soit  $\pi$  une représentation de  $\Gamma$  telle que  $\pi|_N$  n'a pas de vecteurs invariants non nuls. Alors l'application de restriction  $Res : H^1(\Gamma, \pi) \longrightarrow H^1(N, \pi|_N)^\Gamma$  est un isomorphisme.*

**Preuve.**

On remarque dans un premier temps que l'image de l'application de restriction est contenue dans  $H^1(N, \pi|_N)^\Gamma$ . En effet, si  $b \in Z^1(\Gamma, \pi)$  et  $\gamma \in \Gamma$ , alors

$$\begin{aligned} \gamma \cdot b(n) &= \pi(\gamma)[- \pi(\gamma^{-1})b(\gamma) + \pi(\gamma^{-1})b(n) + \pi(\gamma^{-1}n)b(\gamma)] \\ &= b(n) + [\pi(n)b(\gamma) - b(\gamma)]. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque  $b(\gamma) \in \mathcal{H}_\pi$ , on conclut que  $\gamma \cdot b$  est cohomologue à  $b$  dans  $Z^1(N, \pi|_N)$ .

Il suffit alors de montrer que  $\theta$  est injective (pour une preuve plus géométrique, voir la preuve du lemme 1.2.12) :

Soit  $b \in Z^1(\Gamma, \pi)$  tel que sa restriction à  $N$  soit un cobord (i.e. il existe  $\xi \in \mathcal{H}_\pi$  tel que  $b(\cdot) = \pi(\cdot)\xi - \xi$ .) Alors comme  $b(\gamma n \gamma^{-1}) = b(\gamma) + \pi(\gamma)b(n) - \pi(\gamma n \gamma^{-1})b(\gamma)$ ,  $\forall \gamma \in \Gamma$ ,  $\forall n \in N$ , on obtient que  $\pi(\gamma n \gamma^{-1})[b(\gamma) - \pi(\gamma)\xi + \xi] = b(\gamma) - \pi(\gamma)\xi + \xi$ ,  $\forall \gamma \in \Gamma$ ,  $\forall n \in N$ . Ainsi comme  $\pi|_N$  n'a pas de vecteurs invariants non nuls, on conclut que  $b = \pi(\cdot)\xi - \xi$ . Donc  $b$  est un cobord.

Voyons alors que  $Res$  est surjective. Soit  $b \in Z^1(N, \pi|_N)$  tel que pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\gamma \cdot b - b \in B^1(N, \pi|_N)$ . Ainsi, pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , il existe  $\xi_\gamma \in \mathcal{H}_\pi$  tel que  $\pi(\gamma)b(\gamma^{-1}n\gamma) - b(n) = \pi(n)\xi_\gamma - \xi_\gamma$ , pour tout  $n \in N$ . Comme  $\pi|_N$  n'a pas de vecteurs invariants non nuls, un tel  $\xi_\gamma$  est unique. On peut donc définir une application  $\xi : \Gamma \rightarrow \mathcal{H}_\pi$  par  $\gamma \mapsto \xi_\gamma$ . Or cette application est un cocycle de  $Z^1(\Gamma, \pi)$ . En effet, pour  $n \in N$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$  :

$$\begin{aligned} &\pi(n)(\xi_{\gamma_1} + \pi(\gamma_1)\xi_{\gamma_2}) - (\xi_{\gamma_1} + \pi(\gamma_1)\xi_{\gamma_2}) \\ &= \pi(n)\xi_{\gamma_1} - \xi_{\gamma_1} + \pi(n)\pi(\gamma_1)\xi_{\gamma_2} - \pi(\gamma_1)\xi_{\gamma_2} \\ &= \pi(\gamma_1)b(\gamma_1^{-1}n\gamma_1) - b(n) + \pi(\gamma_1)[\pi(\gamma_2)b(\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}n\gamma_1\gamma_2) - b(\gamma_1^{-1}n\gamma_1)] \\ &= \pi(\gamma_1\gamma_2)b((\gamma_1\gamma_2)^{-1}n(\gamma_1\gamma_2)) - b(n). \end{aligned}$$

Donc par unicité  $\xi_{\gamma_1\gamma_2} = \xi_{\gamma_1} + \pi(\gamma_1)\xi_{\gamma_2}$ .

On a :

$$\begin{aligned}
\pi(n_0)b(n_0^{-1}nn_0) - b(n) &= \pi(n_0)[b(n_0^{-1}) + \pi(n_0)^{-1}b(n) + \pi(n_0^{-1}n)b(n_0)] \\
&\quad - b(n) \\
&= \pi(n_0)[- \pi(n_0^{-1})b(n_0) + \pi(n_0)^{-1}b(n) \\
&\quad + \pi(n_0^{-1}n)b(n_0)] - b(n) \\
&= \pi(n)b(n_0) - b(n_0)
\end{aligned}$$

Ainsi par définition du cocycle  $\xi$ ,  $Res(\xi) = b$ . Ce qui prouve la surjectivité. ■

**Remarque 2.3.2.** *Ce résultat s'étend in extenso au cadre des groupes localement compacts.*

Etablissons alors un lemme similaire a 1.2.14, plus approprié à notre contexte.

**Lemme 2.3.3.** *Soit  $N$  un sous-groupe normal d'un groupe discret  $\Gamma$ . Alors  $H^1(N, \mathcal{F}(\Gamma)) = 0$  (où la structure de  $N$ -module sur  $\mathcal{F}(\Gamma)$  est celle induite par la multiplication à droite).*

**Preuve.** Si  $X$  est un système de représentants de  $\Gamma/N$  on a la décomposition  $\mathcal{F}(\Gamma) = \prod_{x \in X} \mathcal{F}(xN)$ . Cette identification est  $N$ -équivariante pour l'action de  $N$  sur  $\prod_{x \in X} \mathcal{F}(xN)$  donnée par  $n \cdot (f(xn_0))_{x \in X} = (f(xn_0n))_{x \in X}$ . Par [19] 4.1, on a :

$$H^1(N, \mathcal{F}(\Gamma)) = \prod_{x \in X} H^1(N, \mathcal{F}(xN))$$

Or le lemme 1.2.14, nous assure l'annulation de  $H^1(N, \mathcal{F}(xN))$ . ■

Dans ce qui suit, nous supposerons que le sous-groupe normal  $N$  de  $\Gamma$  est infini et de type fini. Nous noterons  $S$  une partie génératrice finie, que nous supposerons symétrique.

**Définition 2.3.4.**

i) L'espace de Dirichlet relatif  $\mathcal{D}(\Gamma, N)$  est le sous-espace de  $\mathcal{F}(\Gamma)$  défini par :

$$\mathcal{D}(\Gamma, N) = \{f \in \mathcal{F}(\Gamma) \mid \|\rho(n)f - f\|_2 < \infty \forall n \in N\}.$$

En d'autres termes,

$$\mathcal{D}(\Gamma, N) = \{f \in \mathcal{F}(\Gamma) \mid \|\rho(s)f - f\|_2 < \infty \forall s \in S\}.$$

où  $\rho$  désigne l'action par translation à droite.

ii)  $\Delta_N$  est le Laplacien combinatoire relatif associé à  $(N, S)$ . Plus précisément si  $f \in \mathcal{F}(\Gamma)$ , alors

$$\Delta_N(f) = \#S \cdot f - \sum_{s \in S} \rho(s)(f).$$

Une fonction  $f$  est  $N$ -harmonique si  $\Delta_N(f) = 0$ .

$\mathcal{D}(\Gamma, N)$  est muni de la semi-norme

$$\|f\|_{\mathcal{D}(\Gamma, N)}^2 = \sum_{s \in S} \|\rho(s)f - f\|_2^2.$$

Il en découle alors une structure d'espace de Hilbert sur  $\mathcal{D}(\Gamma, N)/\mathcal{D}(\Gamma, N)_0$ , où  $\mathcal{D}(\Gamma, N)_0$  est le noyau de cette semi-norme. Notons que  $\mathcal{D}(\Gamma, N)_0 = \{f \in \mathcal{F}(\Gamma) \mid f \text{ constantes sur les classes latérales de } N \text{ dans } \Gamma\}$ . Nous noterons le quotient  $\mathbf{D}(\Gamma, N)$ . Remarquons que l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{D}(\Gamma, N)$  factorise en une action sur  $\mathbf{D}(\Gamma, N)$  que nous noterons encore  $\rho$ .

On définit alors  $\alpha : \mathcal{D}(\Gamma, N) \rightarrow Z^1(N, \rho_\Gamma|_N)$  par  $\alpha(f) = \rho(\cdot)f - f$ . Comme son noyau est  $\mathcal{D}(\Gamma, N)_0$ , cette application factorise en une application injective, encore notée  $\alpha$ , sur  $\mathbf{D}(\Gamma, N)$ .

**Lemme 2.3.5.**  $\alpha$  est un isomorphisme topologique  $\Gamma$ -équivariant.

**Preuve.** Par le lemme 2.3.3,  $\alpha$  est surjective. La bicontinuité est évidente puisque  $S$  engendre  $N$  (on peut se reporter à la preuve du théorème 2.1.2.). On a de plus pour tout  $\gamma \in \Gamma$  :

$$\begin{aligned} \gamma \cdot (\rho(n)f - f) &= \rho(\gamma)(\rho(\gamma^{-1}n\gamma)f - f) \\ &= \rho(n)(\rho(\gamma)f) - \rho(\gamma)f \\ &= \alpha(\rho(\gamma)f). \end{aligned}$$

Ce qui prouve que cette application est  $\Gamma$ -équivariante. ■

Nous noterons  $i$  l'injection canonique de  $l^2(\Gamma)$  dans  $\mathbf{D}(\Gamma, N)$  et remarquons que l'on a  $\alpha(\overline{i(l^2(\Gamma))}) = \overline{B^1(N, \rho_{\Gamma|N})}$ .

Comme  $\mathbf{D}(\Gamma, N) = \overline{i(l^2(\Gamma))} \oplus i(l^2(\Gamma))^\perp$ , on a la décomposition en somme directe suivante :

$$Z^1(N, \rho_{\Gamma|N}) = \overline{B^1(N, \rho_{\Gamma|N})} \oplus \alpha(i(l^2(\Gamma))^\perp).$$

Donc  $\overline{H^1}(N, \rho_{\Gamma|N}) \cong \alpha(i(l^2(\Gamma))^\perp)$ , mais cet isomorphisme n'est a priori **pas** équivariant pour les actions considérées. On a cependant la

**Proposition 2.3.6.** *La projection orthogonale  $P$  de  $\mathbf{D}(\Gamma, N)$  sur  $\overline{i(l^2(\Gamma))}$  est  $\mathcal{Z}_\Gamma(N)$ -équivariante.*

**Preuve.** Soit  $f \in \mathbf{D}(\Gamma, N)$  et soit  $\gamma \in \mathcal{Z}_\Gamma(N)$ .

Pour un tel  $\gamma$ ,  $\rho(\gamma)$  est un opérateur unitaire de  $\mathbf{D}(\Gamma, N)$ . En effet si  $g \in \mathbf{D}(\Gamma, N)$  :

$$\begin{aligned} \langle \rho(\gamma)f | g \rangle_{\mathbf{D}(\Gamma, N)} &= \sum_{s \in S} \langle \rho(s)\rho(\gamma)f - \rho(\gamma)f | \rho(s)g - g \rangle_2 \\ &= \sum_{s \in S} \langle \rho(\gamma)(\rho(s)f - f) | \rho(s)g - g \rangle_2 \\ &= \sum_{s \in S} \langle \rho(s)f - f | \rho(\gamma^{-1})(\rho(s)g - g) \rangle_2 \\ &= \sum_{s \in S} \langle \rho(s)f - f | \rho(s)\rho(\gamma^{-1})g - \rho(\gamma^{-1})g \rangle_2 \\ &= \langle f | \rho(\gamma^{-1})g \rangle_{\mathbf{D}(\Gamma, N)}. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} &\langle f - Pf | i(\xi) \rangle_{\mathbf{D}(\Gamma, N)} = 0, \forall \xi \in l^2(\Gamma) \\ \Leftrightarrow &\langle f - Pf | \rho(\gamma^{-1})i(\xi) \rangle_{\mathbf{D}(\Gamma, N)} = 0, \forall \xi \in l^2(\Gamma) \\ \Leftrightarrow &\langle \rho(\gamma)(f - Pf) | i(\xi) \rangle_{\mathbf{D}(\Gamma, N)} = 0, \forall \xi \in l^2(\Gamma) \\ \Leftrightarrow &\langle P(\rho(\gamma)f) - \rho(\gamma)(Pf) | i(\xi) \rangle_{\mathbf{D}(\Gamma, N)} = 0, \forall \xi \in l^2(\Gamma). \end{aligned}$$

Mais comme  $P(\rho(\gamma)f) - \rho(\gamma)(Pf)$  appartient à  $i(l^2(\Gamma))$ , on conclut que  $P$  est  $\mathcal{Z}_\Gamma(N)$ -équivariante. ■

On est alors en mesure de prouver le :

**Théorème 2.3.7.** *Soit  $\Gamma$  un groupe discret. Si il existe deux sous-groupes normaux infinis  $N_1, N_2$  commutant l'un à l'autre, avec  $N_1$  de type fini, alors  $\overline{H^1}(\Gamma, l^2(\Gamma)) = 0$ .*

**Preuve.** Si  $N_1$  est moyennable, le résultat est donné par l'assertion ii) du théorème 2.1.4.. Nous supposons donc que  $N_1$  est non moyennable.

Remarquons tout d'abord que  $N_2 \subset \mathcal{Z}_\Gamma(N_1)$  et montrons alors que l'espace  $(i(l^2(\Gamma))^\perp)^{\mathcal{Z}_\Gamma(N_1)}$  est nul.

Par la proposition précédente, l'action de  $\mathcal{Z}_\Gamma(N_1)$  est bien définie et pour  $f \in \mathbf{D}(\Gamma, N_1)^{\mathcal{Z}_\Gamma(N_1)}$ , on a (en notant  $f_0 \in \mathcal{F}(\Gamma)$  un représentant de  $f$ ) :  $\rho(\gamma)f_0 - f_0 \in \mathcal{D}(\Gamma, N_1)_0$ , pour tout  $\gamma \in \mathcal{Z}_\Gamma(N_1)$ .

Ceci signifie par définition, que, pour tout  $\gamma \in \mathcal{Z}_\Gamma(N_1)$  et tout  $n \in N_1$ ,  $\rho(n)(\rho(\gamma)f_0 - f_0) = \rho(\gamma)f_0 - f_0$ . Comme  $\gamma$  est dans le centralisateur de  $N_1$  dans  $\Gamma$ , ceci est équivalent à

$$\rho(\gamma)(\rho(n)f_0 - f_0) = \rho(n)f_0 - f_0$$

pour tout  $\gamma \in \mathcal{Z}_\Gamma(N_1)$  et tout  $n \in N_1$ . Par définition  $\rho(n)f_0 - f_0 \in l^2(\Gamma)$  et comme  $\mathcal{Z}_\Gamma(N_1)$  est infini (il contient  $N_2$ ), on conclut que  $\rho(n)f_0 - f_0 = 0$  i.e  $f = 0$ . Ainsi,  $(i(l^2(\Gamma))^\perp)^{\mathcal{Z}_\Gamma(N_1)} = 0$ .

Par la proposition précédente, l'isomorphisme entre les espaces  $\overline{H^1}(N_1, \rho_\Gamma|_{N_1})$  et  $\alpha(i(l^2(\Gamma))^\perp)^{\mathcal{Z}_\Gamma(N_1)}$  est  $\mathcal{Z}_\Gamma(N_1)$ -équivariant. Donc  $\overline{H^1}(N_1, \rho_\Gamma|_{N_1})^{\mathcal{Z}_\Gamma(N_1)} = 0$  et comme  $N_1$  n'est pas moyennable, ceci signifie :

$$H^1(N_1, \rho_\Gamma|_{N_1})^{\mathcal{Z}_\Gamma(N_1)} = 0$$

On conclut donc que  $H^1(N_1, \rho_\Gamma|_{N_1})^\Gamma = 0$  et par la proposition 2.3.1, on obtient  $H^1(\Gamma, \rho_\Gamma) = 0$ . ■

**Remarque 2.3.8.** *Dans [14], D.Gaboriau établit le résultat plus général suivant :*

*Si  $N$  est un sous-groupe normal infini de type fini d'indice infini d'un groupe  $\Gamma$ , alors  $\overline{H^1}(\Gamma, l^2(\Gamma)) = 0$ .*

On obtient alors comme corollaire :

**Corollaire 2.3.9.** *Soit  $\Gamma = N_1 \times N_2$  un produit de deux groupes infinis. Alors  $\overline{H^1}(\Gamma, l^2(\Gamma)) = 0$ .*

**Preuve.** On peut écrire  $N_1$  comme réunion croissante de sous-groupes de type fini,  $H_i$ ,  $i \geq 1$ . Comme  $H_i \times \{1\}$  est normal dans  $H_i \times N_2$  et que  $\{1\} \times N_2$  est un sous-groupe infini qui centralise  $H_i \times \{1\}$ , le théorème nous livre l'annulation de  $H^1(H_i \times N_2, l^2(H_i \times N_2))$ . On conclut alors en appliquant la proposition 2.1.6. ■

Une application directe de ce corollaire et du lemme 1.2.12. livre le

**Corollaire 2.3.10.** *Soit  $\Gamma$  un produit semi-direct de la forme  $N \rtimes_{\alpha} H$  avec  $N$  infini et non-moyennable. Si  $\text{Ker}(\alpha)$  est infini, alors  $H^1(\Gamma, l^2(\Gamma)) = 0$ .*

Le théorème 2.3.7. permet de retrouver le résultat suivant :

**Proposition 2.3.11.** *La propriété des groupes de type fini "être un produit de deux groupes hyperboliques" n'est pas un invariant de quasi-isométrie.*

**Preuve.** Considérons l'extension centrale

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \widetilde{Sl_2(\mathbb{R})} \xrightarrow{p} Sl_2(\mathbb{R}) \rightarrow 1.$$

Si  $\Gamma_g$  ( $g \geq 2$ ) désigne le groupe fondamental d'une surface de genre  $g$ , vu comme sous-groupe de  $Sl_2(\mathbb{R})$ , nous noterons  $\widetilde{\Gamma}_g$  le terme central de l'extension

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \widetilde{\Gamma}_g \xrightarrow{p} \Gamma_g \rightarrow 1 (*).$$

Alors  $\widetilde{\Gamma}_g$  n'est pas un produit non trivial de deux groupes. En effet, supposons par l'absurde que  $\widetilde{\Gamma}_g = H_1 \times H_2$  avec  $H_1$  et  $H_2$  infinis, alors  $\Gamma_g = p(H_1)p(H_2)$  et les deux facteurs commutent.

Si  $p(H_i) = 1$  pour un  $i$ , alors  $H_i = \text{Ker}(p) = \mathbb{Z}$  et ceci signifie que l'extension (\*) est scindée, ce qui est impossible. Ainsi  $p(H_i) \neq 1$  pour  $i = 1, 2$ . Mais alors  $p(H_1), p(H_2)$  sont deux sous-groupes normaux infinis de type finis de  $\Gamma_g$  qui commutent entre eux. Alors par le théorème 2.1.7., le premier nombre de Betti- $L^2$  de  $\Gamma_g$  serait nul. Ceci fournit une contradiction, puisque  $b_{(2)}^1(\Gamma_g) = 2g - 2$ .

Ainsi,  $\widetilde{\Gamma}_g$  n'est pas un produit de deux groupes. Cependant,  $\widetilde{\Gamma}_g$  est quasi-isométrique à  $\Gamma_g \times \mathbb{Z}$  (voir [33]). ■

# Chapitre 3

## Groupes moyennables, $\overline{H^1}(G, \pi)$ et applications.

### 3.1 Introduction

Nous étudions dans ce chapitre la 1-cohomologie réduite,  $\overline{H^1}(G, \pi)$ , à coefficients dans les représentations unitaires,  $\pi$ , pour des groupes localement compacts connexes  $G$ . L'annulation de ces espaces de cohomologie pour toute représentation unitaire, pour les groupes compactement engendrés, caractérise la propriété (T) de Kazhdan (Y. Shalom [51]). Pour les groupes de Lie réels résolubles connexes, P. Delorme établit le théorème suivant ([10]) :

**Théorème 3.1.1.** *(Delorme) Pour toute représentation unitaire factorielle distincte d'un multiple d'un caractère d'un groupe de Lie réel résoluble connexe, la 1-cohomologie réduite associée s'annule.*

Comme les groupes résolubles n'ont pas la propriété (T), on peut interpréter ce résultat en disant que le défaut de propriété (T) de tels groupes est, d'un point de vue cohomologique, concentré dans les représentations de dimension un.

Une plus large classe de groupes qui n'ont pas la propriété (T), et pour lesquels il serait intéressant de comprendre le défaut cohomologique de propriété (T), est la classe des groupes moyennables. Pour ces groupes, une représentation joue un rôle privilégié : la représentation régulière. Comme toutes les représentations unitaires d'un groupe  $G$  localement compact moyennable sont faiblement contenues dans la représentation régulière  $L^2(G)$  et que l'annulation de la 1-cohomologie réduite se comporte bien par intégrale directe (voir [19]), on soupçonne l'espace  $\overline{H^1}(G, L^2(G))$  de contenir de l'information cohomologique sur les espaces de cohomologie réduite des autres

représentations de  $G$ .

Dans cet état d'esprit, si ce dernier espace s'annule pour un groupe localement compact moyennable, on peut s'attendre à ce que le défaut de propriété (T) soit concentré dans une "petite" classe de représentations. Heuristiquement, un tel résultat peut être considéré comme un résultat "à la Delorme" ...

Dans la première section, nous établissons ce résultat d'annulation pour les groupes localement compacts moyennables presque connexes.

Au théorème 2.1.8, nous avons démontré que, pour un groupe discret moyennable  $\Gamma$ ,  $\overline{H^1}(\Gamma, l^2(\Gamma)) = 0$ .

Il paraît donc naturel de conjecturer :

**Conjecture 3.1.2.** *Soit  $G$  un groupe localement compact moyennable, alors  $\overline{H^1}(G, L^2(G)) = 0$ .*

Une méthode pour prouver cet énoncé serait de montrer, puisque la composante connexe du neutre dans un groupe est un sous-groupe normal, que si  $N$  est un sous-groupe normal non compact dans un groupe  $G$  et  $\overline{H^1}(N, L^2(N)) = 0$  alors  $\overline{H^1}(G, L^2(G)) = 0$ .

Cette assertion est vraie dans le cas des groupes discrets de type fini (voir le corollaire 2.1.9.) ; mais nous ne savons pas ce qu'il en est dans le cas général.

Dans la deuxième section, nous démontrerons l'analogie du théorème 3.1.1. pour les groupes localement compacts connexes moyennables.

Plus précisément, nous démontrons que si  $G$  est un groupe localement compact connexe moyennable, alors les seules représentations irréductibles  $\pi$  de  $G$ , pour lesquelles  $\overline{H^1}(G, \pi) \neq 0$  sont de dimension finie et en nombre fini.

Dans la section suivante, un résultat analogue est établi pour les groupes localement compacts connexes ayant la propriété de Haagerup, mais dans ce cas les représentations irréductibles ayant de la 1-cohomologie réduite non-triviale ne sont pas nécessairement de dimension finie. Finalement, nous établissons ce résultat d'annulation dans le cas général des groupes localement compacts connexes.

L'étude des représentations irréductibles,  $\pi$ , d'un groupe  $G$  pour lesquelles  $H^1(G, \pi) \neq 0$  est motivée par le théorème de Vershik-Karpushev (voir [57] et [30]). Rappelons que le support d'une représentation  $\pi$  d'un groupe  $G$  est l'ensemble des représentations irréductibles de  $G$  qui sont faiblement contenues dans  $\pi$  et que le cortex du groupe  $G$ ,  $\text{Cor}(G)$ , est l'ensemble des représentations irréductibles qui sont non-séparées de la représentation triviale pour la topologie de Fell-Jacobson sur le dual  $\widehat{G}$  (voir [30] pour plus de précisions).

**Théorème 3.1.3.** (Vershik-Karpushev)

Soit  $\pi$  une représentation unitaire factorielle d'un groupe localement compact séparable  $G$ . Si  $H^1(G, \pi) \neq 0$  alors  $\text{supp } \pi \subset \text{Cor}(G)$ .

L'étude des représentations irréductibles,  $\pi$ , d'un groupe  $G$  pour lesquelles  $\overline{H^1}(G, \pi) \neq 0$  est également motivée par la propriété (P) de Guichardet (voir [18]) :

*Un groupe localement compact  $G$  possède la propriété (P) si l'ensemble des représentations irréductibles  $\pi$  pour lesquelles  $\overline{H^1}(G, \pi) \neq 0$  est fini et formé de points fermés de  $\widehat{G}$ .*

Dans la définition originale de la propriété (P), il est également demandé que ces représentations soient non-séparées de la représentation triviale. Comme cette condition est une conséquence du théorème de Vershik-Karpushev nous l'avons omise de la définition.

Dans la dernière section, nous appliquons ces résultats d'annulation à l'étude des fonctions lisses  $\mu$ -harmoniques d'intégrale de Dirichlet finie sur des variétés lisses mesurées qui sont des espaces homogènes de groupes de Lie connexes unimodulaires. Nous montrons que si  $G$  est un groupe de Lie connexe unimodulaire agissant transitivement sur une variété lisse  $M$  connexe non-compacte telle que  $\overline{H^1}(G, L^2(M)) = 0$  et si  $\mu$  est une mesure de probabilité symétrique sur  $G$  dont le support est compact et engendre  $G$ , alors les seules fonctions lisses sur  $M$  d'intégrale de Dirichlet finie qui sont  $\mu$ -harmoniques sont les constantes. Ce résultat s'applique par exemple dans le cas où  $G$  agit sur lui-même par multiplication. Dans [32], les auteurs démontrent l'analogie de cet exemple dans le cas des groupes discrets. Dans [2], G.Alexopoulos démontre ce type de résultat pour les fonctions bornées sur des groupes discrets polycycliques.

**3.2  $\overline{H^1}(G, L^2(G))$  et moyennabilité**

Commençons par quelques lemmes préparatoires :

**Lemme 3.2.1.** *Soit  $K$  un sous-groupe normal compact d'un groupe  $G$  localement compact et soit  $\pi$  une représentation de  $G$  telle que  $\pi|_K = 1$ . Alors :*

$$H^1(G, \pi) \cong H^1(G/K, \pi)$$

et

$$\overline{H^1}(G, \pi) \cong \overline{H^1}(G/K, \pi).$$

**Preuve.** *Preuve 1 :* Par Guichardet ([16]), on a les isomorphismes suivants :

$$H^1(G, \pi) \cong H^1(G/N, \dot{\pi}) \oplus A(G, N, \pi)$$

et

$$\overline{H^1}(G, \pi) \cong \overline{H^1}(G/N, \dot{\pi}) \oplus A(G, N, \pi).$$

où  $A(K, G, \pi)$  est l'image de l'application de restriction de  $Z^1(G, \pi)$  dans  $Z^1(K, \pi|_K)$ . On conclut alors en observant que la compacité de  $K$  nous assure l'annulation de ce dernier espace.

*Preuve 2 :* Comme  $K$  est compact, on se convainc aisément du résultat, en argumentant que  $Z^1(G, \pi) = Z^1(G/K, \pi)$ . En effet, par compacité de  $K$ , si  $b \in Z^1(G, \pi)$ , alors  $b|_K = 0$  (puisque  $b|_K$  n'est, par hypothèse sur  $\pi$ , rien d'autre qu'un homomorphisme de  $K$  dans l'espace de représentation  $H_\pi$ ). Donc  $b(gk) = b(g)$ ,  $\forall k \in K, g \in G$ . ■

**Lemme 3.2.2.** *Soit  $G$  un groupe localement compact et  $\pi$  une représentation de  $G$  sans vecteurs invariants non-nuls. Si l'espace de représentation  $H_\pi$  s'écrit  $H_\pi = \bigcup_{i \in I} \overline{H_i}$  où les  $H_i$  forment une famille filtrante de sous-espaces fermés invariants par  $\pi$  et si  $\overline{H^1}(G, H_i) = 0, \forall i \in I$ , alors  $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$ .*

**Preuve.** Soit  $b \in Z^1(G, \pi)$  et notons  $P_i$  la projection orthogonale sur  $H_i$ .  $P_i$  est équivariante et donc  $P_i \circ b \in Z^1(G, H_i)$ . Par hypothèse,  $P_i \circ b$  est presque un cobord. De plus, la famille de presque cobords  $P_i \circ b$  converge ponctuellement vers  $b$  et donc cette famille converge uniformément sur les compacts (voir [16]). On conclut donc que  $b \in \overline{B^1}(G, \pi)$ . ■

**Lemme 3.2.3.** *Soit  $G$  localement compact. Si pour tout voisinage  $V$  du neutre, il existe un sous-groupe compact normal  $K$  contenu dans  $V$  tel que  $\overline{H^1}(G/K, \lambda_{G/K}) = 0$ , alors  $\overline{H^1}(G, \lambda_G) = 0$ .*

**Preuve.** Soit  $b \in Z^1(G, \lambda_G)$ . Pour tout sous-groupe compact normal  $K$  définissons un cocycle de  $Z^1(G, L^2(G)^K)$  ( $L^2(G)^K$  est l'ensemble des éléments de  $L^2(G)$   $K$ -invariants à droite) par :

$$(b^K(g))(h) = \int_K b(g)(hk) dk$$

( $dk$  désigne la mesure de Haar normalisée sur  $K$ ). On a alors :

$$\begin{aligned} \|b^K(g) - b(g)\|_2^2 &= \int_G |b^K(g)(h) - b(g)(h)|^2 dh \\ &= \int_G \left| \int_K (b(g)(hk) - b(g)(h)) dk \right|^2 dh \\ &\leq \int_G \int_K |b(g)(hk) - b(g)(h)|^2 dk dh \\ &= \int_K \int_G |b(g)(hk) - b(g)(h)|^2 dh dk \\ &= \int_K \|\rho(k)b(g) - b(g)\|_2^2 dk. \end{aligned}$$

Or, par continuité forte de la représentation régulière droite,  $\rho$ , au neutre, pour tout  $\varepsilon > 0$ , tout  $Q$  compact de  $G$ , il existe un voisinage  $V$  du neutre tel que  $\|\rho(k)b(g) - b(g)\|_2 \leq \varepsilon$ ,  $\forall g \in Q$ ,  $\forall k \in V$ . On conclut alors aisément la preuve en utilisant l'hypothèse d'annulation cohomologique. ■

Nous aurons encore besoin de la proposition suivante : (comparer avec le lemme 1.2.12.)

**Proposition 3.2.4.** *Soit  $G$  un groupe localement compact et  $N$  un sous-groupe normal fermé cocompact dans  $G$ , et soit  $\pi$  une représentation de  $G$ . Alors l'application de restriction  $\text{Res} : \overline{H^1}(G, \pi) \rightarrow \overline{H^1}(N, \pi|_N)$  est injective. En particulier si  $\overline{H^1}(N, \pi|_N) = 0$  alors  $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$ .*

**Preuve.** Par [26], il existe une section borélienne régulière  $s : G/N \rightarrow G$  d'image relativement compacte. Pour tout  $x \in G/N$ , et tout  $g \in G$ ,  $gs(x)$  et  $s(gx)$  ont la même image par la projection canonique dans  $G/N$ . On définit alors un cocycle ("à la Zimmer")  $\sigma : G/N \times G \rightarrow N$  en posant  $\sigma(x, g) = (s(gx)^{-1}gs(x))^{-1}$ . Alors  $\sigma(x, g)$  est l'unique élément de  $N$  tel que  $gs(x)\sigma(x, g) \in s(G/N)$ . Remarquons encore que  $\sigma(G/N, K)$  est relativement

compact si  $K$  est un compact de  $G$ .

Considérons alors une action  $\alpha$  par isométries affines de  $G$  telle que  $\alpha|_N$  possède presque des points fixes et montrons que cette action a presque des points fixes par  $G$ .

Soit  $K$  un compact de  $G$ , alors il est contenu dans un compact de la forme  $K_0 \overline{s(G/N)}$ , où  $K_0$  est un compact de  $N$ . Notons alors  $K_X$  le compact de  $N$  (par normalité) défini par :

$$\text{Adh}_N \{s(x)^{-1}ns(x)\sigma(x, x_0^{-1}) \mid n \in K_0, x \in G/N, x_0 \in G\}.$$

Ainsi, pour  $\varepsilon > 0$  fixé, il existe un vecteur  $\xi$  tel que

$$\sup_{n \in K_X} \|\alpha(n)\xi - \xi\| < \varepsilon.$$

Notons encore  $dx$  la mesure finie  $G$ -invariante normalisée (pour l'action  $g \cdot s(x) = gs(x)\sigma(x, g)$ ) induite par la mesure de Haar sur  $G/N$ .

Pour  $g_0 \in G$ , il existe un unique  $x_0 \in s(G/N)$  et un unique  $n_0 \in N$  tels que  $g_0 = n_0x_0$ . On a alors, pour  $g_0 \in K$  :

$$\begin{aligned} & \left\| \alpha(g_0) \int_{G/N} \alpha(s(x))\xi dx - \int_{G/N} \alpha(s(x))\xi dx \right\| \\ &= \left\| \alpha(n_0x_0) \int_{G/N} \alpha(s(x))\xi dx - \int_{G/N} \alpha(s(x))\xi dx \right\| \\ &= \left\| \alpha(n_0) \int_{G/N} \alpha(x_0s(x)\sigma(x, x_0)\sigma(x, x_0)^{-1})\xi dx - \int_{G/N} \alpha(s(x))\xi dx \right\| \\ &= \left\| \alpha(n_0) \int_{G/N} \alpha(x_0 \cdot s(x)\sigma(x, x_0)^{-1})\xi dx - \int_{G/N} \alpha(s(x))\xi dx \right\| \\ &= \left\| \alpha(n_0) \int_{G/N} \alpha(s(x)\sigma(x_0^{-1} \cdot x, x_0)^{-1})\xi dx - \int_{G/N} \alpha(s(x))\xi dx \right\| \\ &= \left\| \alpha(n_0) \int_{G/N} \alpha(s(x)\sigma(x, x_0^{-1}))\xi dx - \int_{G/N} \alpha(s(x))\xi dx \right\| \\ &= \left\| \int_{G/N} \alpha(n_0s(x)\sigma(x, x_0^{-1}))\xi dx - \int_{G/N} \alpha(s(x))\xi dx \right\| \\ &= \left\| \int_{G/N} \alpha(n_0s(x)\sigma(x, x_0^{-1}))\xi - \alpha(s(x))\xi dx \right\| \\ &\leq \sup_{x \in G/N} \|\alpha(n_0s(x)\sigma(x, x_0^{-1}))\xi - \alpha(s(x))\xi\| \\ &= \sup_{x \in G/N} \|\alpha(s(x)^{-1}n_0s(x)\sigma(x, x_0^{-1}))\xi - \xi\|. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sup_{g_0 \in K} \left\| \alpha(g_0) \int_{G/N} \alpha(s(x)) \xi dx - \int_{G/N} \alpha(s(x)) \xi dx \right\| \leq \sup_{n \in K_X} \left\| \alpha(n) \xi - \xi \right\| < \varepsilon.$$

■

Rappelons alors : (proposition 1.2.7.)

**Proposition 3.2.5.** *Soit  $\pi = \int_X^\oplus \pi_\xi d\mu(\xi)$  une représentation d'un groupe localement compact qui s'écrit comme intégrale hilbertienne. Si pour  $\mu$ -presque tout  $\xi \in X$ ,  $\overline{H^1}(G, \pi_\xi) = 0$ , alors  $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$ .*

**Corollaire 3.2.6.** *Soit  $G$  et  $N$  comme dans la proposition 3.2.4, alors pour toute représentation de  $N$  :*

$$\overline{H^1}(N, \pi) = 0 \Rightarrow \overline{H^1}(G, \text{Ind}_N^G \pi) = 0.$$

**Preuve.** Il suffit de remarquer que  $(\text{Ind}_N^G \pi)|_N = \infty \pi$ .  
Décrivons la représentation induite :

$$\mathcal{H}_{\text{Ind}_N^G \pi} = \left\{ f : G \rightarrow \mathcal{H}_\pi \mid f(gn) = \pi(n^{-1})f(g), \forall n \in N, \right. \\ \left. \text{pour presque tout } g \in G, \text{ et } \int_{G/N} \|f(g)\|^2 d\mu(g) < \infty \right\}$$

où  $d\mu$  est la mesure de Haar sur  $G/N$ .  $\text{Ind}_N^G \pi$  est alors donnée par l'action à gauche naturelle sur  $\mathcal{H}_{\text{Ind}_N^G \pi}$ . Si  $f \in \mathcal{H}_{\text{Ind}_N^G \pi}$ ,  $n \in N$ , on a par normalité de  $N$ ,  $\text{Ind}_N^G \pi(n)f(g) = f(n^{-1}g) = f(g(g^{-1}n^{-1}g)) = \pi(g^{-1}ng)f(g)$ . On a alors :

$$(\text{Ind}_N^G \pi)|_N \cong \int_{G/N}^\oplus \pi dx$$

(où  $dx$  dénote, comme dans la preuve de la proposition 3.2.4, la mesure  $G$ -invariante normalisée induite par la mesure de Haar sur  $G/N$ ). Ainsi, si  $\overline{H^1}(N, \pi) = 0$ , alors  $\overline{H^1}(N, (\text{Ind}_N^G \pi)|_N) = 0$  par la proposition précédente. La conclusion est immédiate en appliquant la proposition 3.2.4. ■

Rappelons encore un résultat classique ([34]) :

**Théorème 3.2.7.** (*Montgomery-Zippin*)

Soit  $G$  un groupe localement compact connexe. Alors pour tout voisinage  $V$  de l'élément neutre, il existe un sous-groupe  $K_V$ , normal compact de  $G$ , contenu dans  $V$ , tel que  $G/K_V$  soit un groupe de Lie réel.

Nous sommes alors en mesure de démontrer le résultat principal de cette section.

**Théorème 3.2.8.** *Soit  $G$  un groupe localement compact presque connexe. Si  $G$  est moyennable, alors  $\overline{H^1}(G, L^2(G)) = 0$ .*

**Preuve.** Rappelons que si  $N$  est un sous-groupe fermé de  $G$ , alors  $\lambda_G|_N = [G : N] \cdot \lambda_N$  et que  $\overline{H^1}(N, \lambda_G|_N) = 0 \Leftrightarrow \overline{H^1}(N, \lambda_N) = 0$ . Ainsi, grâce à la proposition 3.2.4, on peut supposer  $G$  connexe (car la composante connexe du neutre est un sous-groupe normal de  $G$ ) et non compact.

Alors par 14.14 de l'ouvrage de J.-P. Pier ([41]), il existe dans  $G$  un sous-groupe normal fermé connexe résoluble cocompact,  $N$ . Il suffira alors de montrer (grâce à nouveau à la proposition 3.2.4.) que  $\overline{H^1}(N, \lambda_N) = 0$ .

En appliquant le théorème de Montgomery-Zippin, il existe dans chaque voisinage du neutre  $V$  de  $N$ , un sous-groupe normal compact,  $K_V$ , tel que  $N/K_V$  soit un groupe de Lie. Donc  $N/K_V$  est un groupe de Lie résoluble connexe. Comme un ensemble fini de caractères ne peut pas apparaître de manière discrete dans la décomposition de la représentation régulière de  $N/K_V$  comme intégrale hilbertienne de représentations irréductibles, le théorème 3.1.1. et la proposition 1.2.7. impliquent que  $\overline{H^1}(N/K_V, \lambda_{N/K_V}) = 0$ . Par le lemme 3.2.1,  $\overline{H^1}(N, \lambda_{N/K_V}) = 0$ . Etant donné que  $L^2(N) = \overline{\cup_V L^2(N/K_V)}$ , et que la famille  $\{L^2(N/K_V)\}_V$  satisfait aux hypothèse du lemme 3.2.2, on obtient alors que  $\overline{H^1}(N, \lambda_N) = 0$ . On peut également conclure en utilisant le lemme 3.2.3. ■

**Remarque 3.2.9.** *En vue des propriétés de la cohomologie réduite, on pourrait croire, à tort, que si  $H$  est un sous-groupe propre dense d'un groupe  $G$ , tel que  $\overline{H^1}(H, L^2(H)) = 0$  alors  $\overline{H^1}(G, L^2(G)) = 0$ . Mais il n'en est rien, comme le montre l'exemple suivant.*

Considérons  $\Gamma$  un réseau cocompact irréductible de  $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$ . Notons  $p_1$  la projection sur le premier facteur (le noyau de  $p_1$  est fini et comme  $\Gamma$  est irréductible, son image est dense). Rappelons alors que si  $\Gamma$  est un réseau cocompact dans un groupe de Lie,  $\overline{H^1}(\Gamma, \pi)$  est isomorphe à  $\overline{H^1}(G, \text{Ind}_{\Gamma}^G \pi)$

(voir J.Pichaud [40]).

De plus, par la proposition 3.2 de Y.Shalom [51] :

$$\overline{H^1}(SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R}), L^2(SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R}))) = 0$$

et donc  $\overline{H^1}(\Gamma, l^2(\Gamma)) = 0$  et on a alors  $\overline{H^1}(p_1(\Gamma), l^2(p_1(\Gamma))) = 0$ .

Finalement,  $\overline{H^1}(SL_2(\mathbb{R}), L^2(SL_2(\mathbb{R}))) \neq 0$  car le réseau  $SL_2(\mathbb{Z})$  est virtuellement libre de rang 2 et  $\overline{H^1}(\mathbb{F}_2, l^2(\mathbb{F}_2)) = H^1(\mathbb{F}_2, l^2(\mathbb{F}_2)) \neq 0$  (voir le lemme 5.1.4.) implique que  $\overline{H^1}(SL_2(\mathbb{Z}), l^2(SL_2(\mathbb{Z}))) \neq 0$ .

### 3.3 $\overline{H^1}(G, \pi)$ des groupes connexes moyennables

Dans cette section, nous allons établir un analogue du théorème de Delorme (3.1.1.) pour les groupes localement compacts connexes moyennables. Plus précisément, nous allons montrer que la 1-cohomologie réduite d'un tel groupe à valeurs dans une représentation irréductible est nulle sauf pour un nombre fini de représentations irréductibles de dimension finie.

Rappelons tout d'abord un lemme classique :

**Lemme 3.3.1.** *Soit  $G$  un groupe localement compact et soit  $\pi, \rho$  deux représentations de  $G$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i)  $\pi \otimes \rho$  a des vecteurs invariants non-nuls.

ii)  $\pi$  et  $\bar{\rho}$  ont des sous-représentations de dimension finie équivalentes .

La preuve est un résultat standard de théorie des représentations (on peut par exemple se référer à [33], chapitre 1).

Rappelons encore plusieurs résultats de Guichardet ([16]).

**Théorème 3.3.2.** *Soit  $G$  un groupe localement compact,  $N$  un sous-groupe normal fermé de  $G$  et  $\pi$  une représentation de  $G$  telle que  $\pi|_N = 1$ .*

Alors :

i) Si  $A(G, N, \pi)$  désigne l'image de l'application de restriction de  $Z^1(G, \pi)$  dans  $Z^1(N, 1)$ , on a l'isomorphisme :

$$\overline{H^1}(G, \pi) \cong \overline{H^1}(G/N, \bar{\pi}) \oplus A(G, N, \pi).$$

Notons que  $A(G, N, \pi)$  est contenu dans l'ensemble  $\text{Hom}_G(N, \pi)$  des homomorphismes  $G$ -équivariants de  $N$  dans  $\mathcal{H}_\pi$ .

ii) Si  $N$  admet un supplémentaire topologique dans  $G$  (i.e. un sous-groupe fermé  $H$  de  $G$  tel que  $G$  s'écrive comme le produit semi-direct  $N \rtimes H$ ), alors  $A(G, N, \pi) = \text{Hom}_G(N, \pi)$  et donc

$$\overline{H^1}(G, \pi) \cong \overline{H^1}(G/N, \dot{\pi}) \oplus \text{Hom}_G(N, \pi).$$

Si  $K$  désigne le sous-groupe normal fermé engendré par l'adhérence de la réunion des sous-groupes compacts de  $N/[N, N]$ , notons  $V = (N/[N, N])/K$ . Le groupe  $G$  agit par conjugaison sur  $N$  et fournit ainsi une action naturelle de  $G$  sur  $V$ . Cette dernière factorise en une action de  $G/N$  sur  $V$  que l'on notera  $\sigma$ . Comme tout morphisme continu  $f$  de  $N$  dans  $\mathcal{H}_\pi$  factorise en un morphisme continu  $\tilde{f}$  de  $V$  dans  $\mathcal{H}_\pi$ ,  $f$  appartient à  $\text{Hom}_G(N, \pi)$  si et seulement si  $\tilde{f}$  vérifie

$$\tilde{f}(\sigma(g)(v)) = \pi(g)(\tilde{f}(v))$$

pour tout  $g \in G/N$  et pour tout  $v \in V$ .

Dans le cas où  $N$  est un groupe de Lie connexe,  $N/[N, N]$  s'identifie à un groupe  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^k$  et par conséquent  $V = \mathbb{R}^n$ . Dans ce cas,  $\sigma$  est une représentation réelle (non nécessairement unitaire) de  $G/N$  de dimension finie. On a obtenu ([16]) :

**Proposition 3.3.3.** *Si  $N$  est un groupe de Lie connexe,  $\text{Hom}_G(N, \pi)$  est isomorphe à l'espace des applications  $\mathbb{R}$ -linéaires de  $V$  dans  $\mathcal{H}_\pi$  qui entrelacent  $\sigma$  et  $\pi$ .*

*Si  $(\sigma^\mathbb{C}, V^\mathbb{C})$  désigne la complexifiée de  $(\sigma, V)$ , on peut également identifier  $\text{Hom}_G(N, \pi)$  à l'espace des applications  $\mathbb{C}$ -linéaires de  $V^\mathbb{C}$  dans  $\mathcal{H}_\pi$  qui entrelacent  $\sigma^\mathbb{C}$  et  $\pi$ .*

On en déduit alors sous les hypothèses de la proposition précédente (voir [16], proposition 7 ii) et [37], Chap.I §2.VI)

**Lemme 3.3.4.** *Si  $\pi$  est une représentation irréductible d'un groupe localement compact  $G$ , alors  $\text{Hom}_G(N, \pi)$  est non nul si et seulement si  $\pi$  est une sous-représentation de  $\sigma^\mathbb{C}$ . En particulier, il n'y a qu'un nombre fini de telles représentations.*

**Lemme 3.3.5.** *Soit  $\pi$  une représentation irréductible non-triviale de  $G$ . Si  $\overline{H^1}(G, \pi) \neq 0$ , alors  $\pi|_{\mathcal{Z}(G)} = 1$  et  $\overline{H^1}(G, \pi) \cong \overline{H^1}(G/\mathcal{Z}(G), \dot{\pi})$ .*

**Preuve.** On considère  $\pi$  comme une représentation du produit  $G \times \mathcal{Z}(G)$ . Alors par le théorème 1.2.13,  $\pi$  a des vecteurs  $\mathcal{Z}(G)$ -invariants et donc par irréductibilité,  $\pi$  est triviale sur le centre. On conclut en utilisant le théorème 3.3.2, et la proposition 3.3.3. ■

On est alors en mesure de démontrer le résultat principal de cette section :

**Théorème 3.3.6.** *Soit  $G$  un groupe de Lie connexe moyennable.*

*Les représentations irréductibles  $\pi$  de  $G$  pour lesquelles  $\overline{H^1}(G, \pi) \neq 0$  sont en nombre fini et de dimension finie, plus petite que la dimension (réelle) du radical de  $G$ .*

**Preuve.** Soit  $\pi$  une représentation irréductible de  $G$  telle que  $\overline{H^1}(G, \pi) \neq 0$ . Dans un premier temps, montrons que  $\pi$  est nécessairement de dimension finie.

Considérons  $RS$  la décomposition de Lévi de  $G$  :  $R$  est le radical et  $S$  est semisimple (et donc compact par moyennabilité de  $G$ ). Supposons par contraposée que  $\pi$  est de dimension infinie. Alors la restriction  $\pi|_R$  n'a pas de sous-représentation de dimension finie. En effet, s'il existait  $\chi$  une sous-représentation de dimension finie alors, par le lemme 3.3.1, on aurait  $\pi|_{R \otimes \overline{\chi}} \supset 1$ . Par conséquent,  $\text{Ind}_R^G(\pi|_R \otimes \overline{\chi}) = \pi \otimes \text{Ind}_R^G \overline{\chi} \supset \lambda_{G/R}$ . Comme  $G/R$  est compact, la représentation quasi-régulière  $\lambda_{G/R}$  a des vecteurs invariants non-nuls. Alors par le lemme 3.3.1,  $\pi$  serait de dimension finie (car  $\pi$  est irréductible).

Comme  $R$  est un groupe de Lie connexe résoluble et que  $\pi|_R$  n'a pas de sous-représentation de dimension finie,  $\overline{H^1}(R, \pi|_R) = 0$  par le théorème 3.1.1. et la proposition 1.2.7. Comme  $\pi|_R$  n'a pas de vecteurs invariants non-nuls, la proposition 3.2.4. implique que  $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$ .

Voyons alors qu'il n'y a qu'un nombre fini de représentations irréductibles de dimension finie pour lesquelles  $\overline{H^1}(G, \pi) \neq 0$ .

Soit  $\tilde{G}$  le revêtement universel de  $G$ . Si  $\pi$  est une représentation de  $G$  et si  $\tilde{\pi}$  est la représentation de  $\tilde{G}$  obtenue par relèvement, alors  $\overline{H^1}(G, \pi) \cong \overline{H^1}(\tilde{G}, \tilde{\pi})$  (voir [10]).

On peut donc supposer que  $G$  est simplement connexe. La décomposition de Lévi de  $G$  est un produit semi-direct  $R \rtimes S$ . Soit alors  $\pi$  une représentation irréductible de dimension finie de  $G$ . Par le théorème de Lie,  $\pi|_{[R, R]} = 1$ . Comme  $[R, R]$  est normal dans  $G$ , le théorème 3.3.2. *i*) s'applique et livre

$$\overline{H^1}(G, \pi) \cong \overline{H^1}(G/[R, R], \dot{\pi}) \oplus A(G, [R, R], \pi).$$

Par le lemme 3.3.4,  $A(G, [R, R], \pi)$  est non nul seulement pour un nombre fini de représentations  $\pi$ .

Il reste donc à voir que  $\overline{H^1}(G/[R, R], \dot{\pi})$  est non nul seulement pour un nombre fini de représentations irréductibles de dimension finie.

On a  $G/[R, R] = (\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^k) \rtimes S$  car  $R$  est connexe. Si  $\dot{\pi}$  n'a pas de vecteurs non-nuls  $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^k)$ -invariants, alors par la proposition 3.2.4. et par le fait que  $\overline{H^1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^k, \sigma) = 0$  pour toute représentation sans vecteurs invariants non-nuls (voir [19]), on a  $\overline{H^1}(G/[R, R], \dot{\pi}) = 0$ .

Dans l'alternative où  $\dot{\pi}$  a des vecteurs  $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^k)$ -invariants non-nuls, on a, par irréductibilité, que  $\dot{\pi}|_{(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^k)} = 1$ .

Alors à nouveau par le théorème 3.3.2. *i*), on a

$$\overline{H^1}(G/[R, R], \dot{\pi}) \cong \overline{H^1}(S, \dot{\pi}) \oplus A(G/[R, R], (\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^k), \dot{\pi}).$$

Or, comme  $S$  est compact  $\overline{H^1}(S, \dot{\pi}) = 0$  et par le lemme 3.3.4, l'espace  $A(G/[R, R], (\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^k), \dot{\pi})$  est non-nul seulement pour un nombre fini de représentations irréductibles de dimension finie, dont la dimension est plus petite que la dimension réelle du radical  $R$ . ■

**Exemple 3.3.7.** Soit  $G = \mathbb{C}^n \rtimes U(n)$  le groupe des déplacements de  $\mathbb{C}^n$ ; notons  $\pi$  la représentation irréductible de  $G$  dans  $\mathbb{C}^n$  donnée par

$$\pi(x, g) = g.$$

Posons  $b(x, g) = x$  alors  $b$  définit un cocycle de  $Z^1(G, \pi)$ . En effet :

$$\begin{aligned} b((x, g)(y, h)) &= b(x + g(y), gh) = x + g(y) \\ &= b(x, g) + \pi(x, g)b(y, h). \end{aligned}$$

Or, ce cocycle ne peut pas être limite de cobords, et donc  $\overline{H^1}(G, \pi) \neq 0$ .

Cet exemple montre que, dans le théorème, la borne sur la dimension des représentations irréductibles ayant de la 1-cohomologie réduite non-nulle est optimale.

**Théorème 3.3.8.** Soit  $G$  un groupe localement compact connexe moyennable. Alors les représentations irréductibles pour lesquelles  $\overline{H^1}(G, \pi) \neq 0$  sont en nombre fini et de dimension finie.

**Preuve.** Par le théorème de Montgomery-Zippin (3.2.7.), il existe un sous-groupe compact normal  $K$  de  $G$  tel que  $G/K$  soit un groupe de Lie. Si  $\pi$  est une représentation irréductible de  $G$ , alors à nouveau deux cas se présentent :

- i) Si  $\pi|_K$  n'a pas de vecteurs invariants non-nuls, alors comme  $K$  est compact  $H^1(K, \pi|_K) = 0$  et par le lemme 1.2.12,  $H^1(G, \pi) = 0$ . Donc  $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$ .
- ii) Si  $\pi|_K$  a des vecteurs invariants non-nuls, alors par irréductibilité,  $\pi|_K = 1$  et par le lemme 3.2.1,  $\overline{H^1}(G, \pi) = \overline{H^1}(G/K, \dot{\pi})$ . On conclut alors par le théorème précédent.

■

### 3.4 $\overline{H^1}(G, \pi)$ et la propriété de Haagerup

Dans [8], les auteurs obtiennent une classification des groupes de Lie connexes qui possèdent la propriété de Haagerup. Ils démontrent qu'un tel groupe est nécessairement localement isomorphe à un produit de la forme  $M \times SO(n_1, 1) \times \dots \times SO(n_k, 1) \times SU(m_1, 1) \times \dots \times SU(m_l, 1)$ , où  $M$  est un groupe de Lie moyennable. En utilisant le résultat précédent et les résultats de Delorme ([10]) sur la 1-cohomologie des groupes  $SO(n, 1)$  et  $SU(m, 1)$ , nous allons classifier les représentations irréductibles d'un groupe de Lie connexe ayant la propriété de Haagerup qui possèdent une 1-cohomologie réduite non-nulle.

Nous aurons besoin du résultat suivant (Delorme [10]) :

**Proposition 3.4.1.** *Soit  $G$  un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{so}(n, 1)$  ou  $\mathfrak{su}(n, 1)$ . Alors il existe au moins une représentation irréductible et au plus deux ayant une 1-cohomologie non triviale.*

En particulier, il existe au plus deux représentations irréductibles de  $SO(n, 1)$  (resp.  $SU(n, 1)$ ) pour lesquelles la 1-cohomologie réduite est non-triviale. On obtient alors :

**Théorème 3.4.2.** *Soit  $G$  un groupe de Lie connexe ayant la propriété de Haagerup. Alors  $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$  pour toute représentation irréductible sauf un nombre fini.*

**Preuve.** Comme dans le théorème 3.3.6, on peut supposer  $G$  simplement connexe. Comme de plus  $G$  a la propriété de Haagerup, il est isomorphe à un produit de la forme ([8])

$$M \times \widetilde{SO}(n_1, 1) \times \dots \times \widetilde{SO}(n_k, 1) \times \widetilde{SU}(m_1, 1) \times \dots \times \widetilde{SU}(m_l, 1).$$

Démontrons le résultat par récurrence sur le nombre de facteurs du produit. Si il n'y en a qu'un, le résultat découle du théorème 3.3.6. et de la proposition 3.4.1. Supposons qu'il y a  $n$  facteurs dans la décomposition de  $G$  en produit et soit  $\pi$  une représentation irréductible de  $G$ .

Si  $\pi$  n'a pas de vecteurs invariants non-nuls pour aucun des facteurs, alors  $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$  par le théorème 1.2.13. Dans l'alternative où  $\pi$  a des vecteurs invariants non-nuls par un au moins des facteurs, notons  $N$  le produit des facteurs où  $\pi$  a des vecteurs invariants non-nuls. Par irréductibilité,  $\pi|_N = 1$  et donc par le théorème 3.3.2.

$$\overline{H^1}(G, \pi) = \overline{H^1}(G/N, \dot{\pi}) \oplus \text{Hom}_G(N, \pi).$$

On conclut alors par hypothèse de récurrence et par le lemme 3.3.4. ■

On peut alors, grâce au théorème 3.2.7, étendre sans peine ce résultat au cas des groupes localement compacts connexes ayant la propriété de Haagerup.

**Théorème 3.4.3.** *Soit  $G$  un groupe localement compact connexe ayant la propriété de Haagerup. Alors les représentations irréductibles pour lesquelles  $\overline{H^1}(G, \pi) \neq 0$  sont en nombre fini.*

**Preuve.** Par le théorème de Montgomery-Zippin (3.2.7.), il existe un sous-groupe compact normal  $K$  de  $G$  tel que  $G/K$  soit un groupe de Lie. Si  $\pi$  est une représentation irréductible de  $G$ , alors à nouveau deux cas se présentent :

- i) Si  $\pi|_K$  n'a pas de vecteurs invariants non-nuls, alors comme  $K$  est compact  $H^1(K, \pi|_K) = 0$  et par le lemme 1.2.12,  $H^1(G, \pi) = 0$ . Donc  $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$ .
- ii) Si  $\pi|_K$  a des vecteurs invariants non-nuls, alors par irréductibilité,  $\pi|_K = 1$  et par le lemme 3.2.1,  $\overline{H^1}(G, \pi) = \overline{H^1}(G/K, \dot{\pi})$ . On conclut alors par le théorème précédent. ■

### 3.5 $\overline{H^1}(G, \pi)$ et la propriété (T) relative

Dans cette section, nous allons étudier la 1-cohomologie et la 1-cohomologie réduite à valeurs dans les représentations irréductibles des groupes localement compacts  $G$  possédant un sous-groupe normal fermé  $N$  tel que la paire  $(G, N)$  a la propriété (T) relative.

**Proposition 3.5.1.** *Soit  $G$  un groupe localement compact et  $N$  un sous-groupe normal fermé tel que  $(G, N)$  a la propriété (T) relative. Soit encore  $\pi$  une représentation irréductible de  $G$ . Alors on a l'alternative :*

- i) ou bien  $\pi|_N$  n'a pas de vecteurs invariants non-nuls, et  $H^1(G, \pi) = \overline{H^1}(G, \pi) = 0$  ;
- ii) ou bien  $\pi|_N = 1$  et on a les isomorphismes  $H^1(G, \pi) \cong H^1(G/N, \pi)$ ,  $\overline{H^1}(G, \pi) \cong \overline{H^1}(G/N, \pi)$ .

**Preuve.** Par définition de la propriété (T) relative, l'application de restriction  $Res : H^1(G, \pi) \rightarrow H^1(N, \pi|_N)$  est identiquement nulle. Donc si  $\pi|_N$  n'a pas de vecteurs invariants non-nuls, le lemme 1.2.12. nous livre  $H^1(G, \pi) = 0$ . Si  $\pi|_N$  a des vecteurs invariants non-nuls alors par irréductibilité,  $\pi|_N = 1$ , et on applique le théorème 3.3.2. qui nous livre les isomorphismes :

$$H^1(G, \pi) \cong H^1(G/N, \pi) \oplus Im(Res : H^1(G, \pi) \rightarrow H^1(N, 1))$$

$$\overline{H^1}(G, \pi) \cong \overline{H^1}(G/N, \pi) \oplus Im(Res : H^1(G, \pi) \rightarrow H^1(N, 1)).$$

Mais par hypothèse le second sommand des membres de droite est nul. (voir 1.3.3.) ■

**Remarque 3.5.2.** *En particulier, nous retrouvons le résultat bien connu ([28]) : si  $G/N$  a la propriété (T) et  $(G, N)$  a la propriété (T) relative alors  $G$  a la propriété (T).*

### 3.6 $\overline{H^1}(G, \pi)$ des groupes localement compacts connexes

Pour étudier la 1-cohomologie réduite des groupes localement compacts connexes, nous allons dans un premier temps étudier les groupes de Lie connexes et utiliser le théorème 1.4.3. sous la forme :

**Théorème 3.6.1.** *Soit  $G$  un groupe de Lie connexe non compact. Alors soit  $G$  a la propriété de Haagerup soit il existe un sous-groupe normal fermé non compact connexe  $N$  tel que la paire  $(G, N)$  a la propriété (T) relative et ces deux propriétés s'excluent mutuellement.*

**Remarque 3.6.2.** *Dans [8] théorème 4.0.1, dans l'alternative où  $G$  n'a pas la propriété de Haagerup, il n'est pas précisé que le sous-groupe fermé  $N$  tel que  $(G, N)$  a la propriété (T) relative est normal et connexe. Cependant un examen attentif de la preuve (4.1.3.) montre que le sous-groupe construit par les auteurs satisfait à ces propriétés.*

On est en mesure d'obtenir :

**Théorème 3.6.3.** *Soit  $G$  un groupe de Lie connexe. Alors  $\overline{H^1}(G, \pi)$  est nul pour toutes les représentations irréductibles sauf un nombre fini.*

**Preuve.** Si  $G$  est compact alors il a la propriété (T) et l'assertion est évidente. Supposons donc  $G$  non-compact et raisonnons par récurrence sur la dimension de  $G$ . Si  $G$  a la propriété de Haagerup, on conclut par le théorème 3.4.2. Dans le cas contraire, le théorème 3.6.1. nous assure l'existence d'un sous-groupe normal non compact  $N$  tel que  $(G, N)$  a la propriété (T) relative. Par la proposition 3.5.1, les représentations irréductibles  $\pi$  de  $G$  susceptibles d'avoir de la 1-cohomologie réduite non-triviale, satisfont  $\pi|_N = 1$  et dans ce cas on a, par la proposition 3.5.1. :

$$\overline{H^1}(G, \pi) \cong \overline{H^1}(G/N, \pi).$$

On conclut alors en raisonnant par récurrence grâce à la connexité de  $N$ . ■

En utilisant le théorème de Montgomery-Zippin (3.2.7.) et en argumentant exactement comme dans la preuve du théorème 3.4.3, on obtient le

**Théorème 3.6.4.** *Soit  $G$  un groupe localement compact connexe. Alors les représentations irréductibles pour lesquelles  $\overline{H^1}(G, \pi) \neq 0$  sont en nombre fini.*

**Preuve.** Par le théorème de Montgomery-Zippin (3.2.7.), il existe un sous-groupe compact normal  $K$  de  $G$  tel que  $G/K$  soit un groupe de Lie. Si  $\pi$  est une représentation irréductible de  $G$ , alors deux cas se présentent :

### 3.6. $\overline{H}^1(G, \pi)$ DES GROUPE LOCALEMENT COMPACTS CONNEXES 57

- i) Si  $\pi|_K$  n'a pas de vecteurs invariants non-nuls, alors comme  $K$  est compact  $H^1(K, \pi|_K) = 0$  et par le lemme 1.2.12,  $H^1(G, \pi) = 0$ . Donc  $\overline{H}^1(G, \pi) = 0$ .
- ii) Si  $\pi|_K$  a des vecteurs invariants non-nuls, alors par irréductibilité,  $\pi|_K = 1$  et par le lemme 3.2.1,  $\overline{H}^1(G, \pi) = \overline{H}^1(G/K, \dot{\pi})$ . On conclut alors par le théorème précédent.

■

De cette étude, on obtient le :

**Théorème 3.6.5.** *Soit  $G$  un groupe localement compact connexe.*

*Supposons que  $G$  n'a pas la propriété (T). Alors il existe une représentation irréductible  $\pi$  avec  $\overline{H}^1(G, \pi) \neq 0$ .*

*De plus, toute représentation irréductible non triviale  $\pi$  satisfaisant à cette propriété factorise en une représentation irréductible  $\sigma$  d'un groupe  $H$  isomorphe à  $PO(n, 1)$ ,  $PU(m, 1)$  ou à un groupe moyennable non-compact et non-nilpotent telle que  $\overline{H}^1(H, \sigma) \cong \overline{H}^1(G, \pi) \neq 0$ .*

**Preuve.** L'existence d'une telle représentation provient du théorème 1.3.8. Si la seule représentation irréductible ayant une 1-cohomologie réduite non triviale est la représentation triviale alors on s'arrête ici (voir le chapitre 5 pour comprendre l'annulation de  $\overline{H}^1(G, 1) = H^1(G, 1)$ ). Soit alors  $\pi$  une représentation irréductible non-triviale de  $G$  avec  $\overline{H}^1(G, \pi) \neq 0$ . Par le théorème de Montgomery-Zippin, il existe un sous-groupe  $K$  normal compact de  $G$  tel que  $G_0 \doteq G/K$  est un groupe de Lie. Comme  $\overline{H}^1(G, \pi) \neq 0$ ,  $\pi$  factorise par  $G_0$  et  $\overline{H}^1(G, \pi) \cong \overline{H}^1(G_0, \pi) \neq 0$ . Comme  $G_0$  est un groupe de Lie connexe qui n'a pas la propriété (T), il existe un sous-groupe normal fermé non cocompact  $N$  tel que  $G_N \doteq G_0/N$  possède la propriété de Haagerup,  $\pi|_N = 1$ , et  $\overline{H}^1(G_N, \pi) \cong \overline{H}^1(G_0, \pi) \neq 0$ .

En effet, si  $G_0$  a la propriété de Haagerup, l'assertion est claire. Sinon, il existe un sous-groupe normal fermé connexe  $N_0$  de  $G_0$  tel que  $(G_0, N_0)$  a la propriété (T) relative. Par la proposition 3.5.1,  $\pi|_{N_0} = 1$  et  $\overline{H}^1(G_0/N_0, \pi) \cong \overline{H}^1(G_0, \pi) \neq 0$ . Si  $G_0/N_0$  a la propriété de Haagerup, on s'arrête. Sinon, comme  $G_0/N_0$  n'a pas la propriété (T), on applique les mêmes raisonnements que ceux ci-dessus. Puisque la dimension diminue à chaque étape ( $N_0$  est connexe), le procédé s'arrête et le quotient final ne peut pas avoir la propriété (T), donc est non compact.

Notons  $\tilde{\pi}$  la représentation définie sur le revêtement universel de  $G_N$ ,  $\widetilde{G}_N$ . Par [10],  $\overline{H}^1(\widetilde{G}_N, \tilde{\pi}) \cong \overline{H}^1(G_N, \pi) \neq 0$ . Par le théorème de classification 1.4.3,

$\widetilde{G}_N$  est un produit de groupes  $\widetilde{SO}(n, 1)$ , et/ou  $\widetilde{SU}(n, 1)$  et/ou moyennables (simplement connexes). Par le théorème 1.2.13,  $\pi$  est triviale sur au moins un facteur. Mais par la proposition 3.3.3. (appliquée ici à  $\sigma^{\mathbb{C}} = 1$ ), comme  $\widetilde{\pi}$  n'est pas la représentation triviale,  $\widetilde{\pi}$  est triviale sur tous les facteurs sauf un, que l'on notera  $\widetilde{H}$ . On a de plus  $\overline{H^1}(G, \pi) \cong \overline{H^1}(\widetilde{H}, \widetilde{\pi}) \neq 0$ . Cependant, (lemme 3.3.5.),  $\widetilde{\pi}$  est triviale sur le centre de  $\widetilde{H}$ . Notons alors  $H = \widetilde{H}/\mathcal{Z}(\widetilde{H})$ . A nouveau par 3.3.3, on conclut que  $\overline{H^1}(H, \widetilde{\pi}) \cong \overline{H^1}(\widetilde{H}, \widetilde{\pi}) \neq 0$ . Comme  $\widetilde{\pi}$  est irréductible et non-triviale,  $H$  ne peut pas être nilpotent.

Par construction,  $G$  se surjecte sur  $H$ , et  $\pi$  est triviale sur le noyau de cette surjection ; de plus  $\pi$  et  $\widetilde{\pi}$  coïncident sur  $H$ . Ainsi  $\overline{H^1}(G_N, \pi) \cong \overline{H^1}(H, \pi) \neq 0$  et par construction,  $H$  est isomorphe soit à un  $PO(n, 1)$ ,  $PU(n, 1)$  ou à un groupe moyennable. ■

### 3.7 Application en analyse harmonique

Soit  $G$  un groupe de Lie connexe unimodulaire et soit  $(M, \nu)$  une variété lisse connexe non-compacte sur laquelle  $G$  agit différemment transitivement en respectant une mesure ( $\sigma$ -finie)  $\nu$ . Si  $\mu$  désigne une mesure de probabilité sur  $G$ , nous dirons qu'une fonction lisse  $f$  sur  $M$  est  $\mu$ -harmonique si  $f(x) = \int_G f(q^{-1} \cdot x) d\mu(q)$  (où  $\cdot$  désigne l'action de  $G$  sur  $M$ ).

Rappelons que, si  $(X_1, \dots, X_n)$  est un système de Hörmander de champs de vecteurs lisses  $G$ -invariants (c.-à-d. une famille de champs de vecteurs lisses telle que en tout point, l'algèbre de Lie qu'ils engendrent est l'espace tangent tout entier), alors le gradient d'une fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  est défini par

$$\nabla f = (X_1 f, \dots, X_n f) \text{ et que } |\nabla f| = \left( \sum_{i=1}^n |X_i f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sur  $G$ , il existe toujours un système de Hörmander  $G$ -invariant pour la multiplication à droite. Ainsi puisque  $G$  agit différemment et transitivement, on en déduit un système de Hörmander  $G$ -invariant sur  $M$ .

**Lemme 3.7.1.** *Soit  $M$  une variété,  $(X_1, \dots, X_n)$  un système de Hörmander et  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  un chemin différentiable sur  $M$  tangent au système de Hörmander avec  $\|\gamma'(t)\| \leq 1$ . Pour  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , on a l'inégalité suivante :*

$$|f(\gamma(a)) - f(\gamma(0))| \leq \int_0^a |\nabla f(\gamma(t))| dt.$$

**Preuve.** On a, pour  $t \in [0, a]$  :

$$\begin{aligned} |f(\gamma(a)) - f(\gamma(0))| &= \left| \int_0^a \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt \right| \\ &\leq \int_0^a |df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))| dt. \end{aligned}$$

De plus, si on écrit  $\gamma'(t) = \sum_{i=0}^k a_i(t) X_i(\gamma(t))$ , on a, puisque  $df_{\gamma(t)}(X_i(\gamma(t))) = X_i f(\gamma(t))$  :

$$\begin{aligned} |df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))| &= \left| \sum_{i=0}^k a_i(t) X_i f(\gamma(t)) \right| \\ &\stackrel{C-S}{\leq} \|\gamma'(t)\| \|\nabla f(\gamma(t))\| \\ &\leq \|\nabla f(\gamma(t))\| \end{aligned}$$

D'où la conclusion. ■

Finalement,  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  est dite d'intégrale de Dirichlet finie, si  $\|\nabla f\|_{L^2(M,\nu)} < \infty$ . Nous désignerons par  $\pi$  l'action de  $G$  sur  $\mathcal{C}^\infty(M)$  définie par  $\pi(g)f(x) = f(g^{-1} \cdot x)$ .

**Lemme 3.7.2.** *Soit  $f$  une fonction lisse sur  $M$  d'intégrale de Dirichlet finie. Alors, pour tout  $h \in G$ , il existe  $a = a(h) > 0$  telle que*

$$\|\pi(h)f - f\|_{L^2(M,\nu)} \leq a \cdot \|\nabla f\|_{L^2(M,\nu)}.$$

**Preuve.** Soit  $h \in G$  et soit  $\gamma : [0, a] \rightarrow G$  un chemin absolument continu tel que  $\gamma(0) = e$ ,  $\gamma(a) = h$ , et  $\gamma'(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) X_i(\gamma(t))$  p.p. avec  $\sum_{i=1}^n a_i^2(t) \leq 1$  (existe toujours; voir [55] III.4). Comme l'action est différentiable et par invariance du système de Hörmander on applique le lemme au chemin  $t \mapsto \gamma(t)^{-1} \cdot x$  et on obtient l'inégalité :

$$|f(h^{-1} \cdot x) - f(x)| \leq \int_0^a |\nabla f(\gamma(t)^{-1} \cdot x)| dt.$$

Ainsi, par Cauchy-Schwarz,  $|f(h^{-1} \cdot x) - f(x)|^2 \leq a \int_0^a |\nabla f(\gamma(t)^{-1} \cdot x)|^2 dt$ .

Soit alors  $(K_n)_{n \geq 1}$  une suite croissante de compacts telle que  $\bigcup_{n \geq 1} K_n = M$ .

On a, pour tout  $n$  :

$$\begin{aligned} \int_{K_n} |f(h^{-1} \cdot x) - f(x)|^2 dx &\leq a \int_{K_n} \int_0^a |\nabla f(\gamma(t)^{-1} \cdot x)|^2 dt d\nu(x) \\ &\leq a \int_M \int_0^a |\nabla f(\gamma(t)^{-1} \cdot x)|^2 dt d\nu(x) \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{\leq} a \int_0^a \int_M |\nabla f(\gamma(t)^{-1} \cdot x)|^2 d\nu(x) dt \\ &\leq a \int_0^a \int_M |\nabla f(x)|^2 d\nu(x) dt \\ &\leq a^2 \|\nabla f\|_2^2. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut conclure que  $\|\pi(h)f - f\|_2 \leq a \cdot \|\nabla f\|_2$ . ■

**Théorème 3.7.3.** *Soit  $G$  un groupe de Lie connexe unimodulaire agissant transitivement différentiablement sur une variété  $M$  connexe non-compacte lisse munie d'une mesure  $\nu$  ( $\sigma$ -finie) en préservant la mesure et soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $G$  à support compact symétrique engendrant  $G$ . Si  $\overline{H^1}(G, L^2(M, \nu)) = 0$ , alors les seules fonctions lisses sur  $M$  d'intégrale de Dirichlet finie qui sont  $\mu$ -harmoniques sont les constantes.*

**Preuve.** Notons  $L^2(M) = L^2(M, \nu)$ . Soit  $\mathcal{D}(M)$  l'espace quotient suivant :  $\{f \in \mathcal{C}^\infty(M) \mid \|\pi(g)f - f\|_2 < \infty \forall g \in G\} / \mathbb{C}$

Considérons la structure pré-hilbertienne sur  $\mathcal{D}(M)$  donnée par  $\|f\|_{\mathcal{D}(M)}^2 = \int_G \|\pi(q)f - f\|_{L^2(M)}^2 d\mu(q)$ . Notons que  $\mathcal{D}(M)$  est séparé car  $\|f\|_{\mathcal{D}(M)}^2 = 0$  si et seulement si  $\pi(g)f = f$ ,  $\forall g \in \text{supp}(\mu)$ , si et seulement si  $\pi(g)f = f$ ,  $\forall g \in G$  (car  $\text{supp}(\mu)$  engendre  $G$ ), si et seulement si  $f$  est constante (car l'action est transitive).

Soit  $i$  l'injection canonique de  $\mathcal{C}^\infty(M) \cap L^2(M)$  dans  $\mathcal{D}(M)$ . Pour tout  $f \in \mathcal{D}(M)$ , nous noterons par  $\theta(f)$  le cocycle algébrique donné par  $g \mapsto \pi(g)f - f$ . Ce cocycle est faiblement mesurable, et donc par [16], il est continu pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact (on utilise ici le fait que  $G$  est séparable).

Par hypothèse,  $\theta(f)$  est presque un cobord. Comme  $\mathcal{C}^\infty(M) \cap L^2(M)$  est

$\| \cdot \|_2$ -dense dans  $L^2(M)$ , il existe une suite  $(\xi_n)_{n \geq 1}$  de  $\mathcal{C}^\infty(M) \cap L^2(M)$  telle que  $\theta(f)(g) = \lim_{n \rightarrow \infty}^{u.s.t.c} \pi(g)\xi_n - \xi_n$ . Ainsi,  $\int_G \|\pi(q)(f - \xi_n) - (f - \xi_n)\|_{L^2(M)} d\mu(q) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  et on conclut que  $i(\xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  dans  $\mathcal{D}(M)$ . En d'autres termes,  $i(\mathcal{C}^\infty(M) \cap L^2(M))$  est dense dans  $\mathcal{D}(M)$ .  
Donc  $i(\mathcal{C}^\infty(M) \cap L^2(M))^\perp = 0$ , car  $\mathcal{D}(M)$  est séparé.

Calculons cet orthogonal :

$$\begin{aligned}
& f \in i(\mathcal{C}^\infty(M) \cap L^2(M))^\perp \\
\Leftrightarrow & \int_G \langle \rho(q)f - f | \rho(q)\xi - \xi \rangle_2 d\mu(q) = 0, \forall \xi \in \mathcal{C}^\infty(M) \cap L^2(M) \\
\Leftrightarrow & \int_G \langle \rho(q)f - f | \rho(q)\xi \rangle_2 d\mu(q) - \int_G \langle \rho(q)f - f | \xi \rangle_2 d\mu(q) = 0, \\
& \quad \forall \xi \in \mathcal{C}^\infty(M) \cap L^2(M) \\
\Leftrightarrow & \int_G \langle f - \rho(q^{-1})f | \xi \rangle_2 d\mu(q) - \int_G \langle \rho(q)f - f | \xi \rangle_2 d\mu(q) = 0, \\
& \quad \forall \xi \in \mathcal{C}^\infty(M) \cap L^2(M) \\
\Leftrightarrow & -2 \int_G \langle \rho(q)f - f | \xi \rangle_2 d\mu(q) = 0, \forall \xi \in \mathcal{C}^\infty(M) \cap L^2(M) (\mu \text{ symétrique}) \\
\Leftrightarrow & \int_G \langle \rho(q)f - f | \xi \rangle_2 d\mu(q) = 0, \forall \xi \in \mathcal{C}^\infty(M) \cap L^2(M) \\
\Leftrightarrow & \int_G (\rho(q)f - f) d\mu(q) = 0 \\
\Leftrightarrow & \int_G \rho(q)f d\mu(q) = f \\
\Leftrightarrow & \int_G f(q^{-1} \cdot x) d\mu(q) = f(x), \forall x \in M
\end{aligned}$$

L'orthogonal de  $i(\mathcal{C}^\infty(M) \cap L^2(M))$  n'est donc rien d'autre que les fonctions de  $\mathcal{D}(M)$  qui sont  $\mu$ -harmoniques.

Soit alors  $f$  une fonction lisse d'intégrale de Dirichlet finie. Par le lemme,

$$\|\pi(g)f - f\|_{L^2(M)} \leq a(g)\|\nabla f\|_{L^2(M)}, \forall g \in G.$$

Ainsi, une telle  $f$  est (modulo les constantes) dans  $\mathcal{D}(M)$ . Donc si  $f$  est  $\mu$ -harmonique et d'intégrale de Dirichlet finie, alors elle est constante. ■

On obtient le corollaire suivant :

**Corollaire 3.7.4.** *Si  $G$  est un groupe de Lie connexe ayant la propriété (T) agissant transitivement différentiablement sur une variété  $M$  connexe non-compacte lisse munie d'une mesure invariante  $\nu$  et si  $\mu$  est une mesure de probabilité à support compact symétrique engendrant  $G$ , alors les seules fonctions lisses sur  $M$  d'intégrale de Dirichlet finie qui sont  $\mu$ -harmoniques sont les constantes.*

Dans le cas où  $G$  agit par translation sur lui-même, on obtient :

**Corollaire 3.7.5.** *Soit  $G$  un groupe de Lie connexe unimodulaire tel que  $\overline{H^1}(G, L^2(G)) = 0$  et soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $G$  à support compact symétrique engendrant  $G$ .*

*Alors les seules fonctions lisses sur  $G$  d'intégrale de Dirichlet finie qui sont  $\mu$ -harmoniques sont les constantes.*

En utilisant le théorème 3.2.9, on a encore :

**Corollaire 3.7.6.** *Si  $G$  est un groupe de Lie connexe unimodulaire moyennable, et si  $\mu$  est une mesure de probabilité à support compact symétrique engendrant  $G$ , alors les seules fonctions lisses d'intégrale de Dirichlet finie qui sont  $\mu$ -harmoniques sont les constantes.*

# Chapitre 4

## 1-cohomologie des produits amalgamés et des extensions HNN

### 4.1 Introduction

Nous nous intéressons ici à la cohomologie non-réduite de produits amalgamés de groupes discrets de la forme  $\Gamma = \Gamma_1 *_A \Gamma_2$ . Cette étude est motivée, en vue du lien entre le premier nombre de Betti- $L^2$  d'un groupe discret et l'espace de 1-cohomologie réduite à valeurs dans la représentation régulière, par le théorème suivant ([6]) :

**Théorème 4.1.1.** *Soit  $\Gamma_1 *_A \Gamma_2$  un produit amalgamé. Si  $b_{(2)}^0(A) = 0$  (i.e.  $A$  est infini) et si  $b_{(2)}^1(\Gamma_1) = b_{(2)}^1(\Gamma_2) = 0$  alors  $b_{(2)}^1(\Gamma_1 *_A \Gamma_2) = 0$ .*

Dans le paragraphe suivant, nous allons étudier de manière plus générale la cohomologie des produits amalgamés. Il en découlera une preuve très simple du théorème 4.1.1. dans le cas où les groupes  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) ne sont pas moyennables. Nous nous intéresserons ensuite au cas des extensions HNN et des actions sur les arbres.

Dans le dernier paragraphe, nous allons décrire le défaut cohomologique de propriété (T) d'un produit amalgamé de deux groupes de Kazhdan. Ceci est motivé par les considérations suivantes.

**Définition 4.1.2.** *Un groupe localement compact  $G$  possède la propriété (FA) si toute action sans inversion de  $G$  sur un arbre  $\mathcal{T}$  possède un point*

fixe.

On a la caractérisation suivante, due à J.-P. Serre :

**Proposition 4.1.3.** *Un groupe dénombrable  $\Gamma$  a la propriété (FA) si et seulement si*

- i)  $\Gamma$  n'est pas un amalgame ;*
- ii) l'abélianisé  $\Gamma^{ab}$  est fini ;*
- iii)  $\Gamma$  est de type fini.*

De plus, Y. Watatani ([58]) a montré que tout groupe possédant la propriété (T) a la propriété (FA). Pour une autre preuve de ce résultat on pourra se référer au chapitre 6, théorème 6.3.3. On en déduit alors immédiatement qu'un produit amalgamé n'a pas la propriété (T).

## 4.2 1-cohomologie des produits amalgamés

**Proposition 4.2.1.** *Soit  $\Gamma_1, \Gamma_2$  deux groupes discrets et  $A$  un groupe s'injectant dans  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) par les homomorphismes  $\theta_i$  ( $i = 1, 2$ ) et soit  $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$  une représentation de  $\Gamma_1 *_A \Gamma_2$  telle que  $\pi|_A$  n'a pas de vecteurs invariants non nuls.*

*Si  $H^1(\Gamma_i, \pi|_{\Gamma_i}) = 0$  pour  $i = 1, 2$  alors  $H^1(\Gamma_1 *_A \Gamma_2, \pi) = 0$ .*

**Preuve.** Soit  $b$  un cocycle de  $Z^1(\Gamma_1 *_A \Gamma_2, \pi)$  ; montrons que c'est un cobord. Par hypothèse, la restriction de  $b$  au sous-groupe  $\Gamma_1$  (resp.  $\Gamma_2$ ) est un cobord. En d'autres termes, il existe  $\xi$  (resp.  $\eta$ ) dans  $\mathcal{H}_\pi$  tel que :

$$b|_{\Gamma_1}(\gamma) = \pi(\gamma)\xi - \xi, \quad \forall \gamma \in \Gamma_1$$

et

$$b|_{\Gamma_2}(\gamma) = \pi(\gamma)\eta - \eta, \quad \forall \gamma \in \Gamma_2.$$

De plus, comme  $\theta_1(a) = \theta_2(a)$  dans  $\Gamma_1 *_A \Gamma_2$ , on a pour tout  $a \in A$ ,  $b(\theta_1(a)) = b(\theta_2(a))$  et donc  $\pi(\theta_1(a))(\xi - \eta) - (\xi - \eta) = 0, \forall a \in A$ .

Par hypothèse,  $\pi|_A$  n'a pas de vecteurs invariants et donc  $\xi = \eta$ . On conclut donc que  $b(\gamma) = \pi(\gamma)\xi - \xi$ , pour tout  $\gamma \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Or,  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  engendre  $\Gamma_1 *_A \Gamma_2$ , et donc  $b$  est un cobord. ■

**Corollaire 4.2.2.** *Soit  $\Gamma_1, \Gamma_2$  deux groupes discrets de type fini non moyennables et  $A$  un groupe infini s'injectant dans  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) par les homomorphismes  $\theta_i$  ( $i = 1, 2$ ).*

*Si  $b_{(2)}^1(\Gamma_1) = b_{(2)}^1(\Gamma_2) = 0$  alors  $b_{(2)}^1(\Gamma_1 *_A \Gamma_2) = 0$ .*

**Preuve.** Comme les groupes  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , sont non moyennables, l'hypothèse implique que  $H^1(\Gamma_i, \lambda_{\Gamma_i}) = 0$  pour  $i = 1, 2$  et donc  $H^1(\Gamma_i, \lambda_{\Gamma_1 *_A \Gamma_2}|_{\Gamma_i}) = 0$  pour  $i = 1, 2$ . Grâce au fait que  $A$  est infini, on peut appliquer la proposition précédente et conclure. ■

**Remarque 4.2.3.** *Le théorème 4.1.1. se reformule, en vue du théorème 2.1.2, de la manière suivante :*

Soit  $\Gamma_1, \Gamma_2$  deux groupes discrets de type fini et  $A$  un groupe infini s'injectant dans  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) par les homomorphismes  $\theta_i$  ( $i = 1, 2$ ). Si  $\overline{H}^1(\Gamma_i, \lambda_{\Gamma_i}) = 0$  pour  $i = 1, 2$  alors  $\overline{H}^1(\Gamma_1 *_A \Gamma_2, \lambda_{\Gamma_1 *_A \Gamma_2}) = 0$ .

*Cependant, la preuve que nous avons présentée ne s'adapte a priori pas à la cohomologie réduite.*

**Remarque 4.2.4.** *La réciproque du corollaire précédent est fautive. En effet, considérons  $SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$  vu comme réseau dans  $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{Q}_p)$ .*

*Par la proposition 3.2 de [51],  $H^1(SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{Q}_p), \lambda_{SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{Q}_p)}) = 0$  et donc  $H^1(SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]), \lambda_{SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])}) = 0$ . Or on a l'écriture :*

$$SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]) = SL_2(\mathbb{Z}) *_A SL_2(\mathbb{Z})$$

où  $A$  est le sous-groupe infini des matrices  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  telles que  $c \equiv 0 \pmod{p}$ .

Mais  $H^1(SL_2(\mathbb{Z}), \lambda_{SL_2(\mathbb{Z})}) \neq 0$  car ce groupe est virtuellement libre (voir lemme 5.1.4.).

On a toutefois le résultat suivant :

**Proposition 4.2.5.** *Soit  $\pi$  une représentation du produit amalgamé*

*$\Gamma_1 *_A \Gamma_2$  telle que  $H^1(A, \pi|_A) = 0$ .*

*Si  $H^1(\Gamma_1 *_A \Gamma_2, \pi) = 0$  alors  $H^1(\Gamma_1, \pi|_{\Gamma_1}) = H^1(\Gamma_2, \pi|_{\Gamma_2}) = 0$ .*

**Preuve.** Par contraposée, supposons sans nuire à la généralité que  $H^1(\Gamma_1, \pi|_{\Gamma_1}) \neq 0$ . Soit alors  $b \in Z^1(\Gamma_1, \pi|_{\Gamma_1}) \setminus B^1(\Gamma_1, \pi|_{\Gamma_1})$ . Par hypothèse, il

existe un vecteur  $\xi$  dans l'espace de représentation tel que  $b(a) = \pi(a)\xi - \xi$ ,  $\forall a \in A$ . Définissons :

$$\tilde{b}(g) = \begin{cases} b(g) & \forall g \in \Gamma_1 \\ \pi(g)\xi - \xi & \forall g \in \Gamma_2 \end{cases}$$

$\tilde{b}$  est alors un cocycle de  $Z^1(\Gamma_1 *_A \Gamma_2, \pi)$ , qui ne sera pas un cobord puisque  $b$  n'en était pas un. Ainsi,  $H^1(\Gamma_1 *_A \Gamma_2, \pi) \neq 0$  ■

D'où :

**Corollaire 4.2.6.** *Soit  $A$  un groupe dont l'abélianisé contient un élément sans torsion et soit  $\pi$  une représentation du produit amalgamé  $\Gamma_1 *_A \Gamma_2$  telle que  $H^1(A, \pi|_A) = 0$ . Alors :*

$$H^1(\Gamma_1 *_A \Gamma_2, \pi) = 0 \Leftrightarrow H^1(\Gamma_1, \pi|_{\Gamma_1}) = H^1(\Gamma_2, \pi|_{\Gamma_2}) = 0.$$

**Preuve.**

" $\Rightarrow$ " Immédiat par la proposition précédente.

" $\Leftarrow$ " On utilise la proposition 4.2.1. car les hypothèses impliquent que  $\pi|_A$  n'a pas de vecteurs invariants. En effet, si  $\pi|_A$  avait des vecteurs invariants non nuls, on pourrait écrire  $\pi|_A = 1 \oplus \sigma$ . Mais alors,  $H^1(A, \pi|_A) = H^1(A, \sigma) \oplus H^1(A, 1) \neq 0$  car l'hypothèse sur  $A$  implique que  $H^1(A, 1) \neq 0$  (voir proposition 5.2.2.) ■

La proposition 4.2.5. et le corollaire 4.2.2. impliquent :

**Corollaire 4.2.7.** *Soit  $\Gamma_1, \Gamma_2$  deux groupes discrets de type fini non moyennables et soit  $A$  un groupe de type fini non moyennable tel que  $b_{(2)}^1(A) = 0$ . Alors :*

$$b_{(2)}^1(\Gamma_1 *_A \Gamma_2) = 0 \Leftrightarrow b_{(2)}^1(\Gamma_1) = b_{(2)}^1(\Gamma_2) = 0.$$

Remarquons de plus que, dans le corollaire 4.2.2, l'hypothèse " $A$  infini" est nécessaire. En effet, un groupe de type fini qui s'écrit comme produit amalgamé au-dessus d'un sous-groupe propre fini possède au moins deux bouts (voir par exemple [27]). On conclut alors par le corollaire 1 de [3], que la 1-cohomologie à valeurs dans la représentation régulière d'un tel groupe n'est jamais nulle.

Ceci démontre le :

**Corollaire 4.2.8.** *Soit  $\Gamma$  un produit amalgamé de la forme  $\Gamma_1 *_A \Gamma_2$ , avec  $H^1(\Gamma_i, \lambda_{\Gamma_i}) = 0$ , ( $i = 1, 2$ ). Alors :*

$$H^1(\Gamma, \lambda_\Gamma) = 0 \Leftrightarrow A \text{ infini.}$$

*Dans le cas où  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) sont de type fini et non moyennables, ceci est équivalent à :*

*Si  $b_{(2)}^1(\Gamma_1) = b_{(2)}^1(\Gamma_2) = 0$  alors*

$$b_{(2)}^1(\Gamma) = 0 \Leftrightarrow A \text{ infini.}$$

Ce résultat se généralise de la manière suivante :

**Proposition 4.2.9.** *Soit  $\pi$  une représentation du produit amalgamé  $\Gamma_1 *_A \Gamma_2$  telle que  $H^1(\Gamma_i, \pi|_{\Gamma_i}) = 0$ , ( $i = 1, 2$ ) et telle que  $\pi|_{\Gamma_i}$  n'a pas de vecteurs invariants non nuls ( $i = 1, 2$ ). Alors*

$$H^1(\Gamma_1 *_A \Gamma_2, \pi) = 0 \Leftrightarrow \pi|_A \text{ n'a pas de vecteurs invariants non nuls.}$$

**Preuve.**

" $\Leftarrow$ " Immédiat par la proposition 4.2.1.

" $\Rightarrow$ " Par contraposée : Soit  $\xi$  un vecteur invariant non nul pour  $\pi|_A$ . On définit alors un cocycle de  $Z^1(\Gamma_1 *_A \Gamma_2, \pi)$  par

$$b(g) = \begin{cases} \pi(g)\xi - \xi & \forall g \in \Gamma_1 \\ 0 & \forall g \in \Gamma_2 \end{cases}$$

Alors  $b$  ainsi défini ne peut pas être un cobord. En effet, s'il existe  $\eta$  tel que  $b(g) = \pi(g)\eta - \eta$ , alors les hypothèses sur  $\pi$  impliquent que  $\eta = \xi$  d'une part, et  $\eta = 0$  d'autre part. Mais  $\xi$  est non nul. Donc  $H^1(\Gamma_1 *_A \Gamma_2, \pi) \neq 0$ . ■

## 4.3 1-cohomologie des extensions HNN

**Proposition 4.3.1.** *Soit  $A$  un sous groupe d'un groupe  $\Gamma$  et soit  $\theta : A \rightarrow \theta(A) \subset \Gamma$  un monomorphisme. Soit encore  $\pi$  une représentation de  $HNN(\Gamma, A, \theta)$  telle que  $\pi|_A$  n'a pas de vecteurs invariants non nuls. Si  $H^1(\Gamma, \pi|_\Gamma) = 0$  alors  $H^1(HNN(\Gamma, A, \theta), \pi) = 0$ .*

**Preuve.** Notons  $t$  la lettre stable de l'extension HNN (i.e  $\theta(a) = tat^{-1}$ ,  $\forall a \in A$ ). Soit  $b \in Z^1(HNN(\Gamma, A, \theta), \pi)$ .

Par hypothèse, la restriction de  $b$  à  $\Gamma$  est un cobord. Il existe donc un vecteur  $\xi \in \mathcal{H}_\pi$  tel que

$$b(\gamma) = \pi(\gamma)\xi - \xi, \forall \gamma \in \Gamma.$$

Comme  $b(\theta(a)) = b(tat^{-1})$ ,  $\forall a \in A$ , on obtient en utilisant la relation de cocycle que, pour tout  $a \in A$ ,

$$(1 - \pi(\theta(a)))b(t) = (1 - \pi(\theta(a)))(\pi(t)\xi - \xi).$$

Ainsi comme  $\pi|_A \not\equiv 1$ , on conclut que  $b(t) = \pi(t)\xi - \xi$ . Et donc, comme  $\{t\} \cup \Gamma$  engendre l'extension HNN,  $b$  est un cobord. ■

Grâce à la reformulation du théorème 4.1.1, ce résultat reste valable en cohomologie réduite pour la représentation régulière. Plus précisément :

**Proposition 4.3.2.** *Soit  $A$  un sous groupe infini d'un groupe  $\Gamma$  de type fini et soit  $\theta : A \rightarrow \theta(A) \subset \Gamma$  un monomorphisme.*

*Si  $\overline{H}^1(\Gamma, \lambda_\Gamma) = 0$  alors  $\overline{H}^1(HNN(\Gamma, A, \theta), \lambda_{HNN(\Gamma, A, \theta)}) = 0$ .*

**Preuve.** Si l'extension HNN est moyennable, on fera appel au théorème 2.1.8. Dans le cas contraire, on peut écrire l'extension HNN comme produit semi-direct  $G \rtimes \mathbb{Z}$  avec  $G$  non moyennable, où  $G$  est limite inductive des groupes  $\Gamma_0 *_A \Gamma_1, \Gamma_{-1} *_A (\Gamma_0 *_A \Gamma_1), (\Gamma_{-1} *_A (\Gamma_0 *_A \Gamma_1)) *_A \Gamma_2$ , etc... Ici  $\Gamma_i = \Gamma$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ . En utilisant le théorème 4.1.1. et le théorème 2.1.2, on obtient, puisque  $G$  est non moyennable,  $H^1(G, \lambda_{HNN|_G}) = 0$ . Comme  $G$  est normal dans le produit semi-direct, on conclut par la proposition 1.2.12, que  $H^1((HNN(\Gamma, A, \theta), \lambda_{HNN(\Gamma, A, \theta)}) = \overline{H}^1(HNN(\Gamma, A, \theta), \lambda_{HNN(\Gamma, A, \theta)}) = 0$  ■

Tout ceci se reformule grâce au théorème 2.1.8. :

**Corollaire 4.3.3.** *Soit  $A$  un sous-groupe infini d'un groupe  $\Gamma$  de type fini et soit  $\theta : A \rightarrow \theta(A) \subset \Gamma$  un isomorphisme.*

*Si  $b_{(2)}^1(\Gamma) = 0$  alors  $b_{(2)}^1(HNN(\Gamma, A, \theta)) = 0$ .*

Remarquons que la réciproque de ce corollaire est fautive. En effet, considérons  $M$  un variété hyperbolique compacte de dimension trois qui fibre sur le cercle ( $\Sigma \hookrightarrow M \rightarrow \mathbb{S}^1$ ) et soit  $\Lambda = \pi_1(M)$ ,  $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$ . On a la suite exacte  $1 \rightarrow \Gamma \rightarrow \Lambda \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$  et  $\Lambda = HNN(\Gamma, \Gamma, \theta) = \Gamma \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ . Alors  $b_{(2)}^1(\Lambda) = 0$  et  $b_{(2)}^1(\Gamma) \neq 0$ .

La proposition suivante établit sous des hypothèses plus fortes, la réciproque de la proposition 4.3.1.

**Proposition 4.3.4.** *Soit  $A, \Gamma, \theta$  comme dans la proposition précédente et  $\pi$  une représentation de l'extension HNN associée.*

*Si  $\pi|_{A \cap \theta(A)}$  n'a pas de vecteurs invariants non nuls et si  $H^1(A, \pi|_A) = 0$ , alors*

$$H^1(\Gamma, \pi|_\Gamma) = 0 \Leftrightarrow H^1(\text{HNN}(\Gamma, A, \theta), \pi) = 0.$$

**Preuve.**

" $\Rightarrow$ " Immédiat par la proposition 4.3.1.

" $\Leftarrow$ " Montrons que  $H^1(\Gamma, \pi|_\Gamma) = 0$ . Soit donc  $b \in Z^1(\Gamma, \pi|_\Gamma)$ . Par hypothèse, il existe un vecteur  $\xi$  tel que  $b(a) = \lambda(a)\xi - \xi$ , pour tout  $a \in A$ . De plus l'hypothèse implique que  $H^1(\theta(A), \pi|_{\theta(A)}) = 0$ . Il existe donc  $\eta$  tel que  $b(\theta(a)) = \pi(\theta(a))\eta - \eta$ . Or, pour tout  $\alpha \in A \cap \theta(A)$ ,  $\pi(\alpha)(\xi - \eta) - (\xi - \eta) = 0$ . Donc,  $\xi = \eta$ .

Définissons alors un cocycle de  $Z^1(\text{HNN}(\Gamma, A, \theta), \pi)$  par

$$\tilde{b}(g) = \begin{cases} b(g) & \forall g \in \Gamma \\ \pi(t)\xi - \xi & \text{si } g = t \end{cases}$$

En effet, l'action affine  $\tilde{\alpha}$  associée à  $\tilde{b}$ , satisfait bien :  $\tilde{\alpha}(\theta(a)) = \tilde{\alpha}(tat^{-1})$ ,  $\forall a \in A$ .

Par hypothèse, ce cocycle est un cobord et donc  $b$  est un cobord de  $Z^1(\Gamma, \pi|_\Gamma)$ .

■

A nouveau, on peut reformuler :

**Corollaire 4.3.5.** *Soit  $A, \Gamma, \theta$  comme dans la proposition précédente avec  $\Gamma$  et  $A$  de type fini .*

*Si  $A \cap \theta(A)$  est infini,  $A$  est non moyennable et  $b_{(2)}^1(A) = 0$ , alors*

$$b_{(2)}^1(\Gamma) = 0 \Leftrightarrow b_{(2)}^1(\text{HNN}(\Gamma, A, \theta)) = 0.$$

## 4.4 Actions sur des arbres

En vue de la théorie de Bass-Serre, les résultats des sections précédentes nous amènent au :

**Théorème 4.4.1.** *Soit  $\Gamma$  un groupe discret de type fini agissant (sans inversion) sur un arbre avec stabilisateurs des arêtes infinis. Si les stabilisateurs des sommets ont un premier nombre de Betti- $L^2$  nul, alors  $\Gamma$  aussi.*

**Preuve.** Par la théorie de Bass-Serre,  $\Gamma$  est le groupe fondamental d'un graphe de groupe  $(\mathcal{G}, Y)$ .  $Y$  est un graphe et  $\mathcal{G}$  un système de groupes tel que les groupes des arêtes sont infinis et les groupes des sommets ont un premier nombre de Betti- $L^2$  nul. Distinguons :

- 1) Si  $Y$  est un segment, alors  $\Gamma$  est un produit amalgamé satisfaisant les hypothèses du théorème 4.1.1. On en conclut donc que  $b_{(2)}^1(\Gamma) = 0$ .
- 2) Si  $Y$  est une boucle, alors  $\Gamma$  est une extension HNN satisfaisant aux hypothèses du corollaire 4.3.3. et à nouveau,  $b_{(2)}^1(\Gamma) = 0$ .
- 3) Si  $Y$  est fini. On argumente alors par induction sur le nombre  $n$  d'arêtes. Pour  $n > 0$ , on choisit une arête et on la contracte. Plus précisément : Si cette arête est un segment, de groupes de sommets  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et de groupe d'arête  $A$ , on la remplace par un sommet de groupe associé  $\Gamma_1 *_A \Gamma_2$  et si cette arête est une boucle, de groupe de sommet  $\Gamma$ , et de groupe d'arête  $A$ , on la remplace par un sommet de groupe associé  $HNN(\Gamma, A, \theta)$ . Cette opération laisse invariant le groupe fondamental et on obtient un graphe à une arête de moins. On utilise alors l'hypothèse d'induction et les items 1) et 2) pour conclure.
- 4) Dans le cas général  $Y$  est réunion croissante de sous-graphes finis et on utilise la proposition 2.1.6. pour conclure.

■

## 4.5 Le défaut cohomologique de propriété (T) des produits amalgamés

Nous allons dans ce paragraphe décrire les représentations d'un produit amalgamé de deux groupes ayant la propriété (T) qui ont un espace de 1-cohomologie non nul.

**Théorème 4.5.1.** *Soit  $\Gamma_1, \Gamma_2$  deux groupes ayant la propriété (T), soit  $A$  un sous-groupe s'injectant dans ces deux groupes et soit  $\pi$  une représentation du produit amalgamé  $\Gamma_1 *_A \Gamma_2$ . On a alors la classification suivante :*

- i) *Si  $\pi|_A$  n'a pas de vecteur invariant non nul, alors  $H^1(\Gamma_1 *_A \Gamma_2, \pi) = 0$  ;*
- ii) *Si  $\pi|_A$  a des vecteurs invariants non nuls, alors*

$$H^1(\Gamma_1 *_A \Gamma_2, \pi) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{H}_A = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$$

*où  $\mathcal{H}_A$  désigne l'espace des vecteurs  $A$ -invariants et  $\mathcal{H}_i$  désigne l'espace des vecteurs  $\Gamma_i$ -invariants. Si de plus  $\pi$  elle-même n'a pas de vecteurs invariants non nuls, cette somme est une somme directe (non-orthogonale).*

**Preuve.**

- i) Ce n'est rien d'autre que la proposition 4.2.1.
- ii) "  $\Rightarrow$  " Soit  $\xi$  un vecteur non nul de  $\mathcal{H}_A$  et définissons un cocycle de  $Z^1(\Gamma_1 *_A \Gamma_2, \pi)$  par :

$$b(g) = \begin{cases} 0 & \forall g \in \Gamma_1 \\ \pi(g)\xi - \xi & \forall g \in \Gamma_2 \end{cases}$$

Par hypothèse, il existe  $\eta$  tel que  $b(g) = \pi(g)\eta - \eta, \forall g \in \Gamma_1 *_A \Gamma_2$ . Ainsi,  $\eta \in \mathcal{H}_1$  et  $\xi - \eta \in \mathcal{H}_2$ . Ce qui conclut car  $\xi = \eta + (\xi - \eta)$ . Si  $\pi$  n'a pas de vecteurs invariants non-nuls alors  $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$  ; d'où l'unicité d'une telle décomposition.

- "  $\Leftarrow$  " Soit  $b \in Z^1(\Gamma_1 *_A \Gamma_2, \pi)$ . Comme les facteurs ont la propriété (T), il existe  $\xi_i$  tel que  $b(g) = \pi(g)\xi_i - \xi_i, \forall g \in \Gamma_i (i = 1, 2)$ . Alors  $\xi_1 - \xi_2$  est  $A$ -invariant. Donc, on peut écrire :  $\xi_1 - \xi_2 = \theta_1 + \theta_2$  avec  $\theta_i \in \mathcal{H}_i (i = 1, 2)$ .

Posons  $\eta = \xi_2 + \theta_2$ . Alors  $\pi(g)(\xi_i - \eta) - (\xi_i - \eta) = 0$ , pour tout  $g \in \Gamma_i (i = 1, 2)$ . On conclut donc que  $b$  s'écrit comme le cobord  $\pi(\cdot)\eta - \eta$ . D'où  $H^1(\Gamma_1 *_A \Gamma_2, \pi) = 0$

■



# Chapitre 5

## 1-cohomologie réduite et groupes hypercentraux

### 5.1 Introduction

Une caractérisation de la propriété (T) pour un groupe localement compact peut être donnée en terme d'annulation des espaces de 1-cohomologie à coefficients dans une représentation unitaire sur un Hilbert. Plus précisément, rappelons le théorème de Delorme-Guichardet :

**Théorème 5.1.1.** *Soit  $G$  un groupe localement compact  $\sigma$ -compact. Alors  $G$  a la propriété (T) de Kazhdan si et seulement si  $H^1(G, \pi) = 0$ , pour toute représentation unitaire  $\pi$  de  $G$*

De cette caractérisation surgit une question naturelle : A-t-on la caractérisation suivante :  $G$  a la propriété (T) si et seulement si  $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$  pour toute représentation unitaire  $\pi$  de  $G$  ?

Bien entendu, puisque  $H^1(G, \pi) = 0$  implique que  $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$  quelle que soit la représentation  $\pi$ , une des implications est évidente.

Par contre la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple bien connu suivant :

**Exemple 5.1.2.** *Considérons le groupe*

$$\Gamma = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Ce groupe est abélien et on a, pour toute représentation  $\pi$  de  $\Gamma$ ,  $\overline{H^1}(\Gamma, \pi) = 0$ . En effet, soit  $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$  une représentation de  $\Gamma$  et  $b \in Z^1(\Gamma, \pi)$  un cocycle et montrons que  $b$  est presque un cobord.

On peut écrire  $\Gamma$  comme réunion croissante des sous-groupes  $\Gamma_n = \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ). Puisqu'ils sont finis, tous les  $\Gamma_i$  ont la propriété (T) et donc la restriction de  $b$  à  $\Gamma_n$  est un cobord. Plus précisément, comme  $H^1(\Gamma_n, \pi|_{\Gamma_n}) = 0$ , il existe  $\xi_n \in \mathcal{H}_\pi$  tel que  $b(g) = \pi(g)\xi_n - \xi_n, \forall g \in \Gamma_n$ . Notons  $b_n$  le cobord de  $B^1(\Gamma, \pi)$  donné par  $\xi_n$ . On a alors

$$\|b(g) - b_n(g)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Et donc  $b \in \overline{B^1}(\Gamma, \pi)$ .

Cependant on rappelle le remarquable résultat de Y. Shalom ([51]) suivant :

**Théorème 5.1.3.** *Soit  $G$  un groupe localement compact séparable et compactement engendré. Alors  $G$  a la propriété (T) si et seulement si  $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$ , pour toute représentation unitaire  $\pi$  de  $G$ .*

Ce résultat répond à une conjecture de Vershik-Karpushev ([57]). Remarquons toutefois que la cohomologie réduite se comporte différemment de la cohomologie non réduite, comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple :**

Considérons le groupe libre de rang 2,  $\mathbb{F}_2 = \langle x, y \rangle$ , alors :

**Lemme 5.1.4.** ([16]) *Pour toute représentation unitaire  $\pi$ ,  $H^1(\mathbb{F}_2, \pi) \neq 0$ .*

**Preuve.** En effet, une représentation du groupe libre  $\pi$  est la donnée de deux unitaires,  $\pi(x), \pi(y)$ , sur un même espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . On a alors un isomorphisme bicontinu entre l'espace des cocycles  $Z^1(\mathbb{F}_2, \pi)$  et  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$  donné par  $b \mapsto (b(x), b(y))$  (voir [16]). Ainsi,  $B^1(\mathbb{F}_2, \pi)$  s'identifie à l'image de l'application  $\psi_\pi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \xi \mapsto (\pi(x)\xi - \xi, \pi(y)\xi - \xi)$ . Donc  $H^1(\mathbb{F}_2, \pi) = 0$  si et seulement si  $\psi_\pi$  est surjective. Supposons alors par l'absurde que  $\psi$  est surjective. Alors, pour tout  $\eta \in \mathcal{H}$  non nul, il existerait  $\xi \in \mathcal{H}$  (non nul) tel que  $\pi(x)\xi - \xi = \eta$ . De plus,  $\pi(y)\xi - \xi \neq 0$ , car la surjectivité de  $\psi$  implique l'injectivité de  $\pi(y) - 1$  :

$$\begin{aligned} \pi(y)\xi - \xi = 0 &\Rightarrow \langle \xi | \pi(y^{-1})\zeta - \zeta \rangle = 0, \forall \zeta \in \mathcal{H} \\ &\Rightarrow \xi = 0 \text{ par surjectivité de } \psi \end{aligned}$$

Ainsi,  $(\eta, 0)$  ne peut pas être dans l'image de  $\psi$ . ■

D'autre part :

**Lemme 5.1.5.** *Il existe une représentation  $\pi$  de  $\mathbb{F}_2$  avec  $\overline{H^1}(\mathbb{F}_2, \pi) = 0$ .*

**Preuve.** En effet, en reprenant les notations de la preuve du lemme précédent, il suffit de trouver deux opérateurs unitaires  $\pi(x)$ ,  $\pi(y)$  tels que l'image de l'application  $\psi$  soit dense dans  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ . Ceci est équivalent à demander :  $(\pi(x)^{-1} - 1)\eta = (\pi(y)^{-1} - 1)\xi \Rightarrow \eta = \xi = 0$ .

Considérons l'espace de Hilbert  $L^2([0, 2\pi])$  et soit  $(e_n)_{n \geq 1}$  la base hilbertienne trigonométrique. En posant  $Ae_n = \exp(-n^2)e_n$ , on définit un opérateur borné autoadjoint sur  $L^2([0, 2\pi])$  dont l'image est constituée de restrictions de fonctions entières à l'intervalle  $[0, 2\pi]$ . Définissons alors un opérateur unitaire sur  $L^2([0, 2\pi])$  par :

$$V\xi(x) = \begin{cases} \xi(x) & \text{si } x \in [0, \pi] \\ -\xi(x) & \text{si } x \in ]\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Ainsi,  $Im(VAV^{-1}) \cap Im(A) = \{0\}$ .

Ces opérateurs étant autoadjoints, on considère les opérateurs unitaires  $\pi(x)^{-1}$  et  $\pi(y)^{-1}$  définis par leurs transformées de Cayley, c.-à-d.  $\pi(x)^{-1} = (1 - iA)(1 + iA)^{-1}$  et  $\pi(y)^{-1} = (1 - iVAV^{-1})(1 + iVAV^{-1})^{-1}$ . On aura alors :

$$Im(\pi(x)^{-1} - 1) \cap Im(\pi(y)^{-1} - 1) = Im(VAV^{-1}) \cap Im(A) = \{0\}$$

Ce qui implique  $\overline{H^1}(\mathbb{F}_2, \pi) = 0$ . ■

La question qu'on se pose alors est la suivante : Pour un groupe localement compact non-compactement engendré, quelle information nous livre la propriété " $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$ , pour toute représentation unitaire  $\pi$  de  $G$ " ?

Tout d'abord remarquons que l'exemple 5.1.2. se généralise :

**Lemme 5.1.6.** *Soit  $G$  un groupe localement compact qui s'écrit comme réunion croissante de sous-groupes ouverts  $G_n$  ( $n \geq 1$ ) ayant la propriété (T).*

*Alors pour toute représentation  $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$  de  $G$ ,  $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$ .*

**Preuve.** L'idée est la même que celle présentée dans l'exemple 5.1.2.

Si  $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$  est une représentation de  $G$  et  $b$  un cocycle de  $Z^1(G, \pi)$ , alors la restriction de ce cocycle aux sous-groupes  $G_n$  est un cobord ; i.e pour tout  $n$ , il existe  $\xi_n \in \mathcal{H}_\pi$  tel que  $b(g) = \pi(g)\xi_n - \xi_n, \forall g \in G_n$ . A nouveau, si  $b_n \in B^1(G, \pi)$  est donné par  $\xi_n$ , on a

$$\|b(g) - b_n(g)\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u.s.t.c.} 0$$

car tout compact  $K$  de  $G$  est contenu dans  $G_n$ , pour  $n$  assez grand. Et donc  $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$ . ■

Il est donc naturel de conjecturer :

**Conjecture 5.1.7.** *Soit  $G$  un groupe localement compact. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) *Pour toute représentation unitaire  $\pi$  de  $G$ ,  $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$  ;*
- ii)  *$G$  est réunion croissante de sous-groupes ouverts ayant la propriété (T).*

Remarquons que le cas où  $G$  est compactement engendré est couvert par le théorème 5.1.3. Lorsque  $G$  est moyennable, la seconde assertion de la conjecture est équivalente à dire que  $G$  est réunion de sous-groupes ouverts relativement compacts.

Nous allons démontrer en particulier cette conjecture pour les groupes hypercentraux discrets.

## 5.2 L'annulation de l'espace $\overline{H^1}(G, 1)$

Dans cette section, nous allons nous intéresser à l'espace  $\overline{H^1}(G, 1)$ . Remarquons qu'on a les égalités :

$$\overline{H^1}(G, 1) = H^1(G, 1) = \text{Hom}(G, \mathbb{C}) = \text{Hom}(G^{ab}, \mathbb{C}) = H^1(G^{ab}, 1)$$

où  $G^{ab}$  est l'abélianisé séparé de  $G$ , i.e. le quotient de  $G$  par la fermeture du sous-groupe engendré par les commutateurs. Dans ce qui suit  $A$  désignera un groupe localement compact abélien, et nous noterons la loi de composition additivement. De plus si  $S$  est un sous-ensemble de  $A$ ,  $\langle S \rangle$  désignera le sous-groupe engendré par  $S$  dans  $A$ .

**Lemme 5.2.1.** *Soit  $g \in A$ ,  $H_0$  un sous-groupe ouvert de  $A$  et  $\Phi_0 : H_0 \rightarrow \mathbb{R}$  un homomorphisme continu. Posons  $H = \langle H_0 \cup \{g\} \rangle$ . Alors il existe un homomorphisme continu  $\Phi : H \rightarrow \mathbb{R}$  qui prolonge  $\Phi_0$ .*

**Preuve.** On distingue deux cas :

- 1) Si  $\langle g \rangle \cap H_0 = \{0\}$ , alors tout élément de  $H$  peut être écrit de manière unique sous la forme  $h + ng$ , avec  $h \in H_0$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . Il suffit alors de poser  $\Phi(h + ng) = \Phi_0(h)$ .
- 2) Si  $\langle g \rangle \cap H_0 \neq \{0\}$ , soit  $k$  le plus petit entier positif tel que  $kg \in H_0$ . alors tout élément de  $H$  peut être écrit de manière unique sous la forme  $h + ng$  avec  $h \in H_0$  et  $0 \leq n \leq k - 1$ . On pose alors  $\Phi(h + ng) = \Phi_0(h) + \frac{n}{k}\Phi_0(kg)$ .

Dans les deux cas, on montre que  $\Phi$  ainsi défini sur  $H$  est un homomorphisme continu qui prolonge  $\Phi_0$ . ■

La proposition qui suit étend au cas des groupes localement compacts le fait bien connu suivant :

*Si  $\Gamma$  est un groupe discret alors :*

$$H^1(\Gamma, 1) = 0 \Leftrightarrow \Gamma^{ab} \text{ est un groupe de torsion.}$$

*Si de plus  $\Gamma$  est de type fini, ceci est équivalent à la finitude de  $\Gamma^{ab}$ .*

**Proposition 5.2.2.** *Soit  $A$  un groupe abélien localement compact. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) Tout sous-groupe cyclique de  $A$  est relativement compact ;*
- ii) Tout sous-groupe cyclique infini de  $A$  est non discret ;*
- iii)  $\text{Hom}(A, \mathbb{R}) = 0$  ;*
- iv)  $H^1(A, 1) = 0$ .*

*Si de plus  $A$  est compactement engendré, ceci est encore équivalent à :*

- v)  $A$  est compact.*

**Preuve.**

- i)  $\Rightarrow$  ii) Trivial.*
- ii)  $\Rightarrow$  iii) Montrons que tout homomorphisme continu  $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}$  est nul. Soit  $g \in A$  un élément de  $A$ . Si  $g$  est d'ordre fini alors clairement  $\Phi(g) = 0$ . Si  $g$  est d'ordre infini, notons  $H$  le sous-groupe fermé engendré par  $g$ .*

Par le théorème 2.3.2 de [49],  $H$  doit alors être compact. Ainsi  $\Phi(H) = 0$ , ce qui implique que  $\Phi(g) = 0$ .

*iii)  $\Rightarrow$  i)* Par contraposée, supposons qu'il existe  $g \in A$  engendrant un sous-groupe non-relativement compact. Soit alors  $K$  un voisinage compact du neutre dans  $A$  avec  $g \in K$ , et notons  $H_0 = \langle K \rangle$ . Alors  $H_0$  est un sous-groupe ouvert compactement engendré. Donc, par le théorème 9.8 de [22], il existe  $n, m$  entiers positifs tel que  $H_0$  soit topologiquement isomorphe au produit  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m \times F$  où  $F$  est un groupe compact abélien. Ainsi, il existe  $\Phi_0 : H_0 \rightarrow \mathbb{R}$  homomorphisme continu non-nul.

Soit alors  $\mathcal{E}$  l'ensemble des paires  $(H_i, \Phi_i)$ , où  $H_i$  est un sous-groupe ouvert contenant  $H_0$  et  $\Phi_i : H_i \rightarrow \mathbb{R}$  est un homomorphisme continu prolongeant  $\Phi_0$ . Cet ensemble est ordonné par la relation naturelle :  $(H_i, \Phi_i) \preceq (H_j, \Phi_j)$  si et seulement si le graphe de  $\Phi_i$  est contenu dans celui de  $\Phi_j$ .  $(\mathcal{E}, \preceq)$  est non-vide ordonné et inductif puisque la réunion croissante de sous-groupes ouverts est un sous-groupe ouvert. Ainsi, par le lemme de Zorn, il existe un élément maximal de  $\mathcal{E}$ , disons  $(H_{max}, \Phi_{max})$ . De plus le lemme 5.2.1 implique que  $H_{max}$  doit être  $A$  tout entier, et donc  $\text{Hom}(A, \mathbb{R}) \neq 0$

*iii)  $\Leftrightarrow$  iv)* Immédiat.

Finalement, si  $A$  est compact,  $A$  satisfait trivialement aux assertions *i)* à *iv)*. Si  $A$  est compactement engendré alors à nouveau par le théorème 9.8 de [22], il existe  $n, m$  entiers positifs tel que  $A$  soit topologiquement isomorphe au produit  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m \times F$  où  $F$  est un groupe compact abélien. Mais si  $A$  satisfait à *iii)*, alors nécessairement  $n$  et  $m$  sont nuls et  $A$  est compact. ■

### 5.3 Les groupes hypercentraux

Rappelons la notion de groupes hypercentraux :

Pour un groupe localement compact, on définit la *série centrale ascendante transfinie* par induction transfinie de la manière suivante :

- $N_0 = \{1\}$
- Soit  $\alpha$  un ordinal, et pour tout  $\beta < \alpha$ , notons  $p_\beta$  l'application quotient de  $G$  sur  $G/N_\beta$ . On définit alors :
  - + Si  $\alpha = \beta^+$ ,  $N_\alpha = p_\beta^{-1}(\mathcal{Z}(G/N_\beta))$ ;
  - + Si  $\alpha$  est un ordinal limite,  $N_\alpha = \overline{\bigcup_{\beta < \alpha} N_\beta}$ .

Remarquons que cette suite croissante se stabilise à partir d'un certain ordinal (qui dépend de la cardinalité de  $G$ ) et posons  $\mathcal{Z}\mathcal{Z}(G) = \bigcup_{\alpha} N_{\alpha}$ .

On a alors la définition :

**Définition 5.3.1.** *Un groupe localement compact  $G$  est hypercentral si et seulement si  $\mathcal{Z}\mathcal{Z}(G) = G$ .*

Citons une classe d'exemples importante :

**Exemple 5.3.2.** *Tout groupe nilpotent est hypercentral. Il suffit d'observer les définitions. Cet exemple justifie l'utilisation de la terminologie "groupes nilpotents généralisés" pour les groupes hypercentraux.*

D'autres exemples sont donnés par (voir [48]) :

**Exemple 5.3.3.**

1) Soit  $(N_j)_{j \geq 1}$  une famille dénombrable quelconque de groupes nilpotents.

Alors  $\bigoplus_{j \geq 1} N_j$  est hypercentral.

Remarquons qu'un tel groupe n'est pas nilpotent si les rangs de nilpotence des  $N_j$  croissent à l'infini.

2) Le 2-groupe localement diédral, qui est donné par le produit semi-direct

$\bigoplus_{j \geq 1} \mathbb{Z}/2^j\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , où l'action est donnée par le passage à l'inverse, est hypercentral.

**Proposition 5.3.4.** *Soit  $G$  un groupe localement compact et soit  $\pi$  une représentation irréductible de  $G$  telle que  $\pi|_{\mathcal{Z}\mathcal{Z}(G)} \neq 1$ . Alors  $H^1(G, \pi) = 0$ .*

**Preuve.** Soit  $\alpha = \min\{\gamma \text{ ordinaux} \mid \pi|_{N_{\gamma}} \neq 1\}$ . Alors  $\alpha$  n'est pas un ordinal limite par définition des  $N_{\gamma}$  et donc il existe un ordinal prédécesseur  $\beta$ , et on a  $\pi|_{N_{\beta}} = 1$ .

Soit alors  $b \in Z^1(G, \pi)$  et montrons par induction que  $b$  factorise par  $G/N_{\beta}$  (i.e  $b|_{N_{\beta}} \equiv 0$ ) :

- Si  $\beta$  est un ordinal limite, alors l'assertion est immédiate par continuité.
- Si  $\beta = \gamma^+$ , considérons  $z \in \mathcal{Z}(G/N_{\gamma})$  et  $g \in G/N_{\gamma}$ . Par hypothèse,  $b$  factorise par  $G/N_{\gamma}$ . On a alors

$$\pi(g)b(z) + b(g) = b(gz) = b(zg) = \pi(z)b(g) + b(z).$$

D'où l'égalité :  $\pi(g)b(z) - b(z) = \pi(z)b(g) - b(g)$ . Or, comme  $\pi|_{N_\beta} = 1$ , on a  $\pi(z) = 1$  et on conclut que  $b(z)$  est fixe par  $\pi$  et donc,  $b(z) = 0$  car  $\pi$  est irréductible et non triviale.

Ainsi,  $b|_{N_\beta} = 0$ .

Soit alors  $z_0 \in \mathcal{Z}(G/N_\beta)$  tel que  $\pi(z_0) \neq 1$ . On a, pour tout  $g \in G/N_\beta$ ,  $\pi(g)b(z_0) - b(z_0) = (\pi(z_0) - 1)b(g)$ . Or, comme  $\pi$  est irréductible, le lemme de Schur nous assure que  $\pi(z_0) - 1$  est un scalaire non-nul, et donc

$$b(g) = \pi(g) \left( \frac{b(z_0)}{\pi(z_0) - 1} \right) - \left( \frac{b(z_0)}{\pi(z_0) - 1} \right)$$

est un cobord. ■

D'où le corollaire :

**Corollaire 5.3.5.** *Soit  $G$  un groupe localement compact hypercentral. Sont équivalents :*

- i)  $H^1(G, \pi) = 0$  pour toute représentation irréductible ;*
- ii) Tout sous-groupe cyclique de  $G^{ab}$  est relativement compact.*

**Preuve.**

*i)  $\Rightarrow$  ii)* Immédiat par la proposition 5.2.2, et par le fait que  $H^1(G, 1) = H^1(G^{ab}, 1)$ .

*ii)  $\Rightarrow$  i)* Il suffit de combiner la proposition précédente et la proposition 5.2.2, en utilisant le fait que, sous notre hypothèse,  $\mathcal{ZZ}(G) = G$ . ■

**Remarque 5.3.6.** *En vue des résultats sur la cohomologie des intégrales directes de représentations ([16]), les assertions équivalentes de la proposition précédente sont, dans le cas où  $G$  est séparable (ce qui est vrai si on se restreint aux ordinaux dénombrables), encore équivalentes à : ii')  $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$  pour toute représentation.*

*Une autre approche est, en vue des résultats de [36], de supposer le groupe compactement engendré afin d'avoir l'équivalence avec l'assertion ii'). Mais cette hypothèse est bien trop restrictive ici.*

*Dans le cas où  $G$  est un groupe hypercentral discret nous verrons dans le paragraphe suivant (corollaire 5.4.8.) que l'assertion ii') est équivalente aux assertions i) et ii).*

## 5.4 Le cas des groupes discrets localement nilpotents

Rappelons tout d'abord :

**Définition 5.4.1.** *Un groupe discret  $\Gamma$  est localement nilpotent si tout sous-groupe de type fini de  $\Gamma$  est nilpotent.*

Des exemples évidents de groupes localement nilpotents sont donnés par les groupes nilpotents (non nécessairement de type finis). Une autre classe d'exemples moins évidents est donnée par la proposition suivante ([31]) :

**Proposition 5.4.2.** *Tout groupe discret hypercentral est localement nilpotent.*

Nous aurons besoin par la suite de deux propriétés des groupes localement nilpotents :

**Lemme 5.4.3.** *Soit  $\Gamma$  un groupe localement nilpotent et désignons par  $T$  l'ensemble de ses éléments de torsion. Alors  $T$  est un sous-groupe normal de  $\Gamma$  et le quotient  $\Gamma/T$  est un groupe sans torsion.*

**Preuve.** Le lemme est un fait bien connu dans le cas des groupes nilpotents (voir [24]). Dans notre cas, comme la seule assertion non évidente est le fait que  $T$  est un sous-groupe, il suffit de remarquer que :

Si  $g, h \in T$  alors le sous-groupe engendré par  $g$  et  $h$  est nilpotent, et donc  $gh$  est d'ordre fini. ■

Le lemme suivant est inspiré du lemme 4 de [47] :

**Lemme 5.4.4.** *Soit  $\Gamma$  un groupe localement nilpotent tel que  $\Gamma/\mathcal{Z}(\Gamma)$  a un centre non trivial.*

*Alors  $\Gamma^{ab}$  est un groupe de torsion si et seulement si  $\Gamma$  est un groupe de torsion.*

**Preuve.** La suffisance est évidente. Démontrons la nécessité par contraposée :

Par le lemme précédent, on peut supposer que  $\Gamma$  est sans torsion (quitte à quotienter par le sous-groupe des éléments de torsion). Notons  $p$  l'application quotient de  $\Gamma$  sur  $\Gamma/\mathcal{Z}(\Gamma)$ . Par hypothèse, il existe un élément  $g$  non central

du second centre  $p^{-1}(\mathcal{Z}(\Gamma/\mathcal{Z}(\Gamma)))$ . Alors l'application de  $\Gamma$  sur le centre  $\mathcal{Z}(\Gamma)$  donnée par  $x \rightarrow [x, g]$  est un homomorphisme non trivial qui factorise par l'abélianisé  $\Gamma^{ab}$ . Mais alors  $\Gamma^{ab}$  ne peut pas être un groupe de torsion puisque  $\mathcal{Z}(\Gamma)$  est sans torsion. ■

Rappelons alors une propriété cohomologique des groupes nilpotents ([16]) :

**Théorème 5.4.5.** *Soit  $\Gamma$  un groupe nilpotent et  $\pi$  une représentation unitaire sans vecteur invariant non nul. Alors  $\overline{H^1}(\Gamma, \pi) = 0$ .*

Remarquons que ce théorème est une conséquence de la proposition 5.3.4.

Le théorème suivant est une généralisation de ce résultat à la classe des groupes localement nilpotents :

**Théorème 5.4.6.** *Soit  $\Gamma$  un groupe localement nilpotent dénombrable et  $\pi$  une représentation unitaire de  $\Gamma$  telle qu'il existe un sous-groupe de type fini  $\Gamma_0$  avec  $\pi|_{\Gamma_0} \not\equiv 1$ . Alors  $\overline{H^1}(\Gamma, \pi) = 0$ .*

**Preuve.** Soit  $\Gamma_n$  ( $n \geq 0$ ) une suite croissante de sous-groupes de type fini avec  $\bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n = \Gamma$ . Alors par définition de  $\Gamma_0$ ,  $\pi|_{\Gamma_n} \not\equiv 1, \forall n \geq 0$ .

Par le théorème 5.4.5,  $\overline{H^1}(\Gamma_n, \pi|_{\Gamma_n}) = 0$ , pour tout  $n \geq 0$ . On conclut alors par la proposition 2.1.7. ■

Ce théorème nous permet d'établir un analogue du corollaire 5.3.5, pour une famille de groupes localement nilpotents :

**Théorème 5.4.7.** *Soit  $\Gamma$  un groupe localement nilpotent dénombrable tel que  $\mathcal{Z}(\Gamma/\mathcal{Z}(\Gamma))$  soit non trivial. Sont équivalents :*

- i)  $\overline{H^1}(\Gamma, \pi) = 0$ , pour toute représentation unitaire  $\pi$  ;*
- ii)  $\Gamma$  est localement fini ;*
- iii)  $\Gamma$  est un groupe de torsion.*

**Preuve.** Les assertions *ii)* et *iii)* sont équivalentes puisqu'un groupe nilpotent finiment engendré de torsion est nécessairement fini.

L'implication *ii)  $\Rightarrow$  i)* découle immédiatement du lemme 5.1.6. Supposons donc que  $\overline{H^1}(\Gamma, \pi) = 0$ , pour toute représentation unitaire  $\pi$ . En particulier,

$H^1(\Gamma, 1) = 0$ . Donc, par la proposition 5.2.2,  $\Gamma^{ab}$  est un groupe de torsion. On applique alors le lemme 5.4.4. pour conclure. ■

Comme un groupe hypercentral est localement nilpotent (proposition 5.4.2.), on en tire le :

**Corollaire 5.4.8.** *Soit  $\Gamma$  un groupe hypercentral dénombrable.*

*Sont équivalents :*

- i)  $H^1(\Gamma, \pi) = 0$  pour toute représentation unitaire irréductible.*
- ii)  $\overline{H^1}(\Gamma, \pi) = 0$ , pour toute représentation unitaire  $\pi$  ;*
- iii)  $\Gamma$  est localement fini ;*
- iv)  $\Gamma$  est un groupe de torsion.*

**Preuve.** Les trois dernières assertions sont équivalentes par le théorème précédent, puisque  $\Gamma$  est localement nilpotent et satisfait à l'hypothèse sur le second centre (à moins que le groupe ne soit abélien, au quel cas les équivalences sont évidentes).

L'équivalence entre *i)* et *iv)* découle du corollaire 5.3.4. et du lemme 5.4.4. ■

**Remarque 5.4.9.** *Toute la preuve repose sur le lemme 5.4.4. Dans le cas général (sans l'hypothèse sur le second centre), on ne peut pas espérer démontrer l'implication "i)  $\Rightarrow$  ii)" du théorème, en utilisant comme seule information cohomologique, le fait que  $H^1(\Gamma, 1) = 0$ . En effet, l'énoncé du lemme 5.4.4. n'est plus valable car il existe des groupes localement nilpotents parfaits sans torsion (et même à centre trivial). Citons les groupes de McLain (voir par exemple [48]) : Ce sont des analogues infinis des groupes de matrices triangulaires strictement supérieures. Donnons-en une brève description : Considérons l'espace de Hilbert complexe  $l^2(\mathbb{Q})$  et notons  $\{v_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{Q}}$  une base hilbertienne. Pour  $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ ,  $\lambda < \mu$ , on définit un opérateur  $e_{\lambda\mu}$  sur  $l^2(\mathbb{Q})$  par :*

$$e_{\lambda\mu}v_\nu = \begin{cases} v_\mu & \text{si } \nu = \lambda \\ 0 & \text{si } \nu \neq \lambda \end{cases}$$

*Le groupe de McLain  $M(\mathbb{C})$  est défini comme le groupe des transformations linéaires engendré par les éléments de la forme  $1 + ze_{\lambda\mu}$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$  et  $z \in \mathbb{C}$ . On sait que  $M(\mathbb{C})$  est un groupe localement nilpotent parfait sans torsion.*



# Chapitre 6

## Espaces à murs mesurés, propriété de Haagerup et propriété (T)

### 6.1 Introduction

Les résultats de ce chapitre ont été obtenus en commun avec P.-A. Cherix et A. Valette.

Un groupe localement compact  $G$  a la *propriété de Haagerup* s'il vérifie les propriétés équivalentes suivantes :

- $G$  possède une action isométrique, métriquement propre, sur un espace de Hilbert affine ;
- il existe une fonction continue  $\psi: G \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui est conditionnellement de type négatif et propre (c.-à-d.  $\lim_{g \rightarrow \infty} \psi(g) = \infty$ ).

Voir [8] pour d'autres caractérisations et de nombreux exemples de groupes ayant la propriété de Haagerup.

La notion d'espace à murs a été dégagée par Haglund et Paulin (dans [20]).

**Définition 6.1.1.** *Soit  $X$  un ensemble et  $\mathcal{M}$  une famille de parties de  $X$ . Pour  $M$  dans  $\mathcal{M}$ , on appelle mur la partition de  $X$  donnée par  $\{M, M^c\}$  où  $M^c$  est le complémentaire de  $M$  dans  $X$ .*

*Une partie de  $X$  est appelée demi-espace, si elle apparaît dans une des partitions décrite par  $\mathcal{M}$ . Nous noterons  $\mathcal{S}$  l'ensemble des demi-espaces.*

*Pour  $x$  et  $y$  dans  $X$ , on note  $\omega(x, y)$ , l'ensemble des demi-espaces de  $\mathcal{S}$  qui*

séparent  $x$  et  $y$ , c.-à-d.

$$\omega(x, y) = \{S \in \mathcal{S} \mid x \in S \text{ et } y \notin S, \text{ ou } y \in S \text{ et } x \notin S\}$$

Le couple  $(X, \mathcal{M})$  est un espace à murs si, pour toute paire  $x, y$  de points distincts de  $X$  :

$$0 < \#\omega(x, y) < \infty.$$

**Exemple 6.1.2.** Soit  $T = (V, E)$  un arbre. Toute arête orientée  $e$ , d'origine  $e_-$  et d'extrémité  $e_+$ , définit une partition de  $V$  en deux classes, à savoir

$$V_{e_-} = \{x \in V \mid d(x, e_-) < d(x, e_+)\}$$

et

$$V_{e_+} = \{x \in V \mid d(x, e_+) < d(x, e_-)\}.$$

On obtient alors une structure d'espace à murs, avec  $\omega(x, y) = 2d(x, y)$  pour tout  $x, y \in V$ .

Soit  $(X, \mathcal{M})$  un espace à murs et  $G$  un groupe localement compact. Munissons le groupe  $\Sigma_X$  des permutations de  $X$  de la topologie de la convergence simple. Une *action* de  $G$  sur  $(X, \mathcal{M})$  est un homomorphisme continu  $G \rightarrow \Sigma_X$  dont l'image laisse invariant l'ensemble  $\mathcal{S}$  des demi-espaces.

On dit que l'action de  $G$  sur  $(X, \mathcal{M})$  est *propre* s'il existe  $x_0 \in X$  tel que

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \#\omega(x_0, gx_0) = +\infty.$$

La proposition suivante, due à Haglund, Paulin et Valette ([8], pp 117-118) établit un lien entre les actions propres sur des espaces à murs et la propriété de Haagerup.

**Proposition 6.1.3.** Si un groupe localement compact  $G$  agit proprement sur un espace à murs alors  $G$  a la propriété de Haagerup.

Cette proposition sera redémontrée comme cas particulier du théorème 6.1.6. ci-dessous.

Une question ouverte est de savoir si la réciproque de la proposition 6.1.3. est vraie pour les groupes discrets. Ce problème, que nous ne résoudrons pas, nous a amené à généraliser la notion d'espaces à murs, et à introduire la notion d'espaces à murs mesurés. L'idée est de munir l'ensemble des demi-espaces d'une mesure réelle  $\mu$  (pas nécessairement finie) telle que pour tout  $x$  et  $y$  dans  $X$  la mesure de  $\omega(x, y)$  soit finie et non-nulle. Précisément :

**Définition 6.1.4.** *Un espace à murs mesurés est la donnée d'un ensemble  $X$ , d'une famille de murs  $\mathcal{M}$  sur  $X$ , et d'une structure  $(\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mu)$  d'espace mesuré sur l'ensemble  $\mathcal{S}$  des demi-espaces, telle que, pour toute paire de points distincts de  $X$  :*

$$\omega(x, y) \in \mathcal{B} \text{ et } 0 < \mu(\omega(x, y)) < \infty.$$

*Un groupe localement compact  $G$  agit sur l'espace à murs mesuré  $(X, \mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{B}, \mu)$  s'il existe un homomorphisme continu  $G \rightarrow \Sigma_X$  dont l'image laisse invariant l'ensemble  $\mathcal{S}$ , la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{B}$ , et la mesure  $\mu$ .*

Remarquons qu'un espace à murs mesurés  $(X, \mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{B}, \mu)$  est un espace métrique pour la distance

$$d_{\mathcal{M}}(x, y) = \mu(\omega(x, y))$$

(l'inégalité triangulaire résulte de  $\omega(x, y) \subset \omega(x, z) \cup \omega(z, y)$ ). Cette distance s'appelle *métrique des murs*. Nous dirons donc qu'une action de  $G$  sur  $(X, \mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{B}, \mu)$  est *propre* s'il existe  $x_0 \in X$  tel que

$$\lim_{g \rightarrow \infty} d_{\mathcal{M}}(x_0, gx_0) = +\infty$$

Un espace à murs au sens de la définition 6.1.1. est en particulier un espace à murs mesurés, où la mesure sur les demi-espaces est la mesure de comptage.

**Exemple 6.1.5.** *(Robertson [44]) Soit  $G = O(n, 1)$ . Alors  $G$  agit sur l'ensemble des sous-variétés totalement géodésiques de codimension 1 (hyperplans) de l'espace hyperbolique réel  $X = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ . Robertson démontre que l'espace des hyperplans est muni de manière naturelle d'une mesure  $G$ -invariante telle que, si  $[x, y]$  désigne l'unique segment géodésique de  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$  reliant  $x$  et  $y$ , la mesure des hyperplans coupant  $[x, y]$  est un multiple non nul de la distance entre  $x$  et  $y$ . (Cette égalité est appelée formule de Crofton). On définit alors les demi-espaces de manière évidente à partir des hyperplans (un hyperplan définissant de deux manières un demi-espace ouvert et un demi-espace fermé) et on munit cet ensemble de la mesure ( $G$ -invariante) induite par celle sur les hyperplans. La mesure des demi-espaces séparant deux points  $x$  et  $y$  est le double de la mesure de l'ensemble des hyperplans coupant  $[x, y]$ . On obtient donc une action propre de  $G$  sur un espace à murs mesurés.*

La notion d'espaces à murs mesurés permet d'établir le

**Théorème 6.1.6.** *Soit  $G$  un groupe localement compact.*

- i) Si  $G$  agit proprement sur un espace à murs mesurés, alors  $G$  a la propriété de Haagerup.*
- ii) Si  $G$  est discret, la réciproque est vraie.*

Rappelons qu'un groupe localement compact  $\sigma$ -compact  $G$  a la propriété (T) s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

- Toute action isométrique de  $G$  sur un espace de Hilbert affine possède un point fixe.
- Toute fonction continue, conditionnellement de type négatif sur  $G$  est bornée.

(voir [28] pour cette équivalence, d'autres caractérisations, et des exemples). Nous reformulons en terme d'actions sur des espaces à murs mesurés, la caractérisation dynamique de la propriété (T) due à Robertson et Steger [45].

**Théorème 6.1.7.** *Soit  $G$  un groupe localement compact  $\sigma$ -compact.*

- i) Si  $G$  a la propriété (T) alors toute action de  $G$  sur un espace à murs mesurés, a toutes ses orbites bornées pour la métrique des murs.*
- ii) Si  $G$  est discret, la réciproque est vraie.*

Les théorèmes 6.1.6. et 6.1.7. sont démontrés dans la section 6.2.

Dans la troisième section, nous montrons qu'un arbre réel porte naturellement une structure d'espace à murs mesurés (Proposition 6.3.3.). Nous redémontrons un résultat de point fixe pour les actions d'un groupe discret ayant la propriété (T) ([1],p.286) :

**Théorème 6.1.8.** *Si  $\Gamma$  est un groupe discret ayant la propriété (T), toute action isométrique de  $\Gamma$  sur un arbre réel  $X$ , possède un point fixe.*

Finalement, nous utiliserons le théorème 6.1.7. pour caractériser la propriété (T) d'un produit en couronne de deux groupes discrets.

## 6.2 Preuves des théorèmes 6.1.6. et 6.1.7.

Le lemme suivant est un cas particulier du lemme 6.2.1. de [8]. Nous en rappelons la courte preuve.

**Lemme 6.2.1.** *Soit  $\Gamma$  un groupe discret et  $\psi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction conditionnellement de type négatif. Il existe une fonction  $\psi' : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^+$ , conditionnellement de type négatif, telle que*

- i)  $\psi'(g) = 0$  si et seulement si  $g = 1$  ;
- ii)  $\psi' - \psi$  est bornée.

**Preuve.** Soit  $\lambda_\Gamma$  la représentation régulière gauche de  $\Gamma$  sur  $l^2(\Gamma)$ , et  $\delta_1$  la fonction caractéristique du neutre de  $\Gamma$ . La fonction

$$\psi'(g) = \psi(g) + \|\lambda_\Gamma(g)\delta_1 - \delta_1\|^2$$

fait l'affaire. ■

**Preuve du théorème 6.1.6. :**

- i) Soit  $(X, \mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{B}, \mu)$  un espace à murs mesurés sur lequel  $G$  agit proprement.

Soit  $x_0 \in X$ . Notons  $E_{x_0} = \{S \in \mathcal{S} \mid x_0 \in S\}$ . Si  $\chi_{E_{x_0}}$  désigne la fonction caractéristique de  $E_{x_0}$ , alors la fonction  $\psi$  définie sur  $G$  par :

$$\psi(g) = \|\chi_{E_{x_0}} - \chi_{E_{gx_0}}\|_{L^2(\mathcal{S}, \mu)}^2$$

vérifie  $\psi(g) = \mu(\omega(x_0, gx_0))$  donc, est une fonction conditionnellement de type négatif propre.

- ii) Si  $G$  est un groupe discret avec la propriété de Haagerup, par le lemme 6.2.1, il existe une fonction  $\psi$  conditionnellement de type négatif propre sur  $G$  telle que  $\psi(g) = 0$  si et seulement si  $g = 1$ . Soit alors

$\mathcal{S} \doteq \{0, 1\}^G \setminus \{(\dots, 0, 0, 0, \dots), (\dots, 1, 1, 1, \dots)\}$  l'ensemble des parties non vides et non pleines de  $G$ . Le point central de la preuve est donné par le résultat suivant de Robertson et Steger [45] : il existe sur  $\mathcal{S}$  une mesure  $\mu$ , borélienne régulière  $G$ -invariante telle que  $\mu(S_g \Delta S_h) = \sqrt{\psi(g^{-1}h)}$ , où  $S_g = \{(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \mathcal{S} \mid x_g = 1\}$ .

On définit une structure d'espace à murs mesurés sur  $G$  de la manière suivante : les murs seront donnés par  $\{A, A^c\}$  où  $A$  est une partie de  $G$ , non vide et non pleine. Les demi-espaces associés sont donnés exactement par les éléments de  $\mathcal{S}$ . Il suffit alors de remarquer que la différence symétrique  $S_g \Delta S_h$  est exactement l'ensemble  $\omega(g, h)$  des demi-espaces séparant  $g$  et  $h$ . De plus, comme  $\psi$  ne s'annule qu'au neutre,  $\mu(\omega(g, h))$  est non nul (et fini) pour tout  $g \neq h$  ( $g, h \in G$ ).

Finalement, l'action par translation de  $\Gamma$  sur lui-même préserve les

demi-espaces, et comme  $\psi$  est propre, on a  $\mu(\omega(x_0, gx_0)) \xrightarrow{g \rightarrow \infty} \infty$ .

D'où la conclusion. ■

**Remarque 6.2.2.** On sait qu'un groupe moyennable  $\sigma$ -compact a la propriété de Haagerup ([8], 1.2.6.). Le théorème 6.1.6. montre en particulier que tout groupe moyennable discret dénombrable agit proprement sur un espace à murs mesurés. Il n'est pas clair qu'un tel groupe agisse proprement sur un espace à murs.

**Exemple 6.2.3.** *Un groupe localement fini dénombrable (un tel groupe est donc moyennable) agit proprement sur un espace à murs.*

*En effet, si  $G$  est la réunion strictement croissante de sous-groupes finis  $H_n$ , avec  $H_0 = \{1\}$ , on définit les murs comme les partitions  $\{gH_n, G \setminus gH_n\}$  ( $g \in G, n \geq 0$ ); donc, une classe latérale de  $H_n$ , et son complémentaire. Comme deux points  $x, y$  sont dans  $H_n$  pour  $n$  assez grand, il n'y a qu'un nombre fini de classes latérales de  $H_k$  ( $0 \leq k < n$ ) qui séparent  $x$  et  $y$ . Ce nombre est non nul car  $H_0 = \{1\}$ .*

*Enfin, comme la suite est strictement croissante, si  $g$  appartient à  $H_n \setminus H_{n-1}$ , il y a au moins  $n$  murs qui séparent  $1$  et  $g$ . Donc l'action est propre.*

**Remarque 6.2.4.** *La seconde partie du théorème 6.1.6. donne une caractérisation de la propriété de Haagerup pour les groupes discrets. Nous ne savons pas si celle-ci reste valable pour des groupes localement compacts  $\sigma$ -compacts arbitraires.*

**Preuve du théorème 6.1.7. :**

- i) Si  $G$  agit sur un espace à murs mesurés  $(X, \mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{B}, \mu)$ , on a vu dans la section précédente que  $\psi(g) \doteq \mu(\omega(x_0, gx_0))$ , pour  $x_0 \in X$ , définit une fonction conditionnellement de type négatif sur  $G$ . Comme  $G$  a la propriété (T), celle-ci est bornée, ce qui signifie exactement que l'orbite de  $x_0$  est bornée pour la métrique des murs.
- ii) Soit  $\psi$  une fonction conditionnellement de type négatif sur  $G$  et montrons qu'elle est bornée. Par le lemme 6.2.1, on peut supposer que  $\psi(g) > 0$  pour  $g \neq 1$ . Comme dans la preuve du théorème 6.1.6, il existe sur  $\{0, 1\}^G \setminus \{(\dots, 0, \dots), (\dots, 1, \dots)\}$  une mesure  $G$ -invariante  $\mu$  telle que  $\sqrt{\psi(g)} = \mu(S_{x_0} \Delta S_{gx_0})$  pour  $x_0 \in \Gamma$ . On se rappelle alors que  $S_g \Delta S_h = \omega(g, h)$  pour la structure d'espace à murs donnée par

toutes les parties non vides et non pleines de  $G$ . Grâce à l'hypothèse, on conclut donc que  $\psi$  est bornée. ■

## 6.3 Exemples et applications

### 6.3.1 Espaces à murs et arbres réels

Dans cette section nous commençons par décrire une structure d'espace à murs mesurés sur un arbre réel.

Rappelons tout d'abord quelques notions sur les arbres réels :

Un *arc* dans un espace métrique  $X$  est un sous-ensemble homéomorphe à un intervalle compact de  $\mathbb{R}$ . Un *segment* dans  $X$  est un sous-ensemble isométrique à un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

**Définition 6.3.1.** *Un arbre réel est un espace métrique  $(X, d)$  tel que deux points distincts  $x, y$  appartiennent à un unique arc  $[x, y]$ , qui de plus est un segment fermé.*

Dans tout ce qui suit,  $X$  désigne un arbre réel. Fixons  $x \in X$ . Parmi tous les segments ouverts  $]x, y[$  ( $y \in X$ ), définissons une relation  $\sim$  en posant

$$]x, y[ \sim ]x, z[ \Leftrightarrow ]x, y[ \cap ]x, z[ \neq \emptyset.$$

Ceci définit clairement une relation d'équivalence. Une classe pour cette relation est appelée *germe de segments en  $x$* .

Nous noterons  $TX$  l'ensemble des couples  $(x, \sigma)$  où  $x \in X$  et  $\sigma$  est un germe de segments en  $x$ . Soit  $\pi : TX \rightarrow X$ ,  $(x, \sigma) \mapsto x$  la projection canonique. Pour  $x$  et  $y$  dans  $X$ ,  $x \neq y$ , nous posons

$$I_{xy} = \{(z, \sigma) \in TX \mid z \in ]x, y[, ]z, y[ \in \sigma\}.$$

Nous appelons *section locale* un ensemble de la forme  $I_{xy}$  ; de plus nous dirons que  $d(x, y)$  est la *longueur* de  $I_{xy}$ .

Notons  $\mathcal{B}$  la  $\sigma$ -algèbre de parties de  $TX$  engendrées par les sections locales.

**Lemme 6.3.2.** *Il existe sur  $\mathcal{B}$  une mesure  $\mu$  telle que  $\mu(I_{xy}) = d(x, y)$  pour tout  $x, y \in X$ .*

**Preuve.** La preuve est très semblable à celle de l'existence de la "mesure de Lebesgue" sur  $X$ , définie sur la  $\sigma$ -algèbre engendrée par les segments de  $X$  (voir proposition 3 dans [54]). On considère l'anneau  $\mathcal{R}$  des parties de  $TX$ , engendré par les sections locales. C'est donc l'ensemble des réunions disjointes finies de sections locales. Si  $B \in \mathcal{R}$ , choisissons une dissection finie de  $B$  en sections locales, et définissons  $\mu(B)$  comme la somme des longueurs de ces sections locales. Cette définition est alors indépendante de la dissection choisie.

Si  $(B_n)_{n \geq 1}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{R}$ , deux à deux disjoints, avec  $\bigcup_{n \geq 1} B_n \in \mathcal{R}$ , les propriétés de la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  impliquent :

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} B_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(B_n).$$

Le théorème d'extension des mesures ([21], §13, A) permet alors d'étendre  $\mu$  de façon unique en une mesure  $\sigma$ -additive sur la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{B}$ . ■

Si  $(x, \sigma) \in TX$ , on construit une partition de  $X$  en deux classes, appelée *mur associé* à  $(x, \sigma)$  :

$$\begin{aligned} M_{(x, \sigma)} &= \{y \in X \mid ]x, y[ \in \sigma\} \\ M'_{(x, \sigma)} &= X \setminus M_{(x, \sigma)}. \end{aligned}$$

**Proposition 6.3.3.** *Soit  $X$  un arbre réel. L'ensemble  $TX$  muni de la mesure  $\mu$  définit sur  $X$  une structure d'espace à murs mesurés avec*

$$\mu(\omega(x, y)) = 2d(x, y).$$

**Preuve.** Soit  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ . Si  $M_{(z, \sigma)} \in \omega(x, y)$ , on a soit  $x \in M_{(z, \sigma)}$  et  $y \in M'_{(z, \sigma)}$  soit l'inverse. Analysons le premier cas. De la structure des triangles dans  $X$ , on voit que  $z \in ]y, x[$ , et en fait l'ensemble des  $(z, \sigma)$  tels que  $x \in M_{(z, \sigma)}$  et  $y \in M'_{(z, \sigma)}$  n'est autre que la section locale  $I_{xy}$ . Donc,  $\mu(\omega(x, y)) = \mu(I_{yx}) + \mu(I_{xy}) = 2d(x, y)$ . ■

Ceci fournit une nouvelle preuve du fait que la distance sur un arbre réel est un noyau conditionnellement de type négatif (voir [5], ou [28], proposition 9, chap. 6))

Comme la mesure  $\mu$  sur  $TX$  est clairement invariante par le groupe d'isométries

$Isom(X)$ , on déduit de ci-dessus que toute action d'un groupe de Kazhdan sur  $X$ , possède une orbite bornée. Si  $X$  est complet, on en tire l'existence d'un point fixe dans  $X$  ([28], proposition 11, chap. 6).

Dans un arbre réel, la notion de projection sur un sous-arbre fermé, découle de la proposition suivante (voir [53]) :

**Proposition 6.3.4.** *Soit  $T_1, T_2$  deux sous-arbres fermés d'un arbre réel  $X$ , dont l'intersection est formée d'au plus un point. Alors il existe un unique point  $x \in T_1$  et un unique point  $y \in T_2$ , tel que  $T_1 \cap [x, y] = \{x\}$  et  $T_2 \cap [x, y] = \{y\}$ .*

La projection de  $y$  sur un sous-arbre fermé  $T$  est alors définie en appliquant la proposition précédente à  $T_1 = T$  et  $T_2 = \{y\}$  : c'est l'unique point  $x$  de  $T$  tel que  $T \cap [x, y] = \{x\}$ .

Dans la fin de cette section, nous voulons montrer que si on s'intéresse aux actions d'un groupe de Kazhdan *discret*, on peut obtenir le même théorème de point fixe sans supposer  $X$  complet.

Rappelons que le complété  $\bar{X}$  d'un arbre réel  $X$  est encore un arbre réel ([35], Cor. 11.1.10). Pour  $g \in Isom(X)$  notons  $X^g$  (resp.  $\bar{X}^g$ ) l'ensemble des points fixes de  $g$  dans  $X$  (resp.  $\bar{X}$ ). Pour  $A \subset \bar{X}$ , on note  $Adh(A)$  l'adhérence de  $A$  dans  $\bar{X}$ .

**Lemme 6.3.5.** *Pour  $g \in Isom(X)$ ,  $\bar{X}^g = Adh(X^g)$ .*

**Preuve.**  $\bar{X}^g$  est fermé dans  $\bar{X}$  et contient  $X^g$ , donc  $\bar{X}^g \supset Adh(X^g)$ . Montrons la réciproque : soit  $y \in \bar{X}^g$ . Pour  $x \in X$ , soit  $z$  la projection de  $y$  sur le segment  $[x, gx]$  de  $X$ .

Comme  $g[y, x] = [y, gx]$ , on a  $d(x, z) = d(z, gx)$  et  $gz = z$ . Donc  $[z, y] \subset \bar{X}^g$ . Mais comme  $z \in X^g$ , on voit que  $y \in Adh(X^g)$  ■

**Lemme 6.3.6.** *Soit  $X_1, \dots, X_n$  des sous-arbres fermés de  $X$ . Sont équivalents :*

$$i) \bigcap_{i=1}^n X_i \neq \emptyset \quad ; \quad ii) \bigcap_{i=1}^n \text{Adh}(X_i) \neq \emptyset.$$

**Preuve.**  $i) \Rightarrow ii)$  : Trivial.

$ii) \Rightarrow i)$  : Soit  $x \in \bigcap_{i=1}^n \text{Adh}(X_i)$ . Fixons  $x_0 \in X$  et notons  $x_i$  la projection de  $x_0$  sur  $X_i$  (donc aussi sur  $\text{Adh}(X_i)$ ). Pour  $i = 1, \dots, n$ , on a  $[x_0, x_i] \subset [x_0, x]$ . Soit  $y$  celui des  $x_i$  qui est le plus proche de  $x$ . Comme  $[x_i, x] \subset \text{Adh}(X_i) \cap [x_0, x]$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , on a  $y \in \bigcap_{i=1}^n X_i$ . ■

**Proposition 6.3.7.** *Soit  $\Gamma$  un groupe de type fini agissant par isométries sur  $X$ . Sont équivalents :*

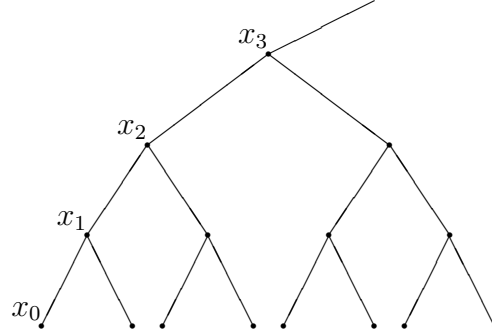
- i)  $\Gamma$  a un point fixe sur  $X$  ;*
- ii) Toute orbite de  $\Gamma$  sur  $X$  est bornée ;*
- iii) Une orbite de  $\Gamma$  sur  $X$  est bornée.*

**Preuve.**  $i) \Rightarrow ii)$  et  $ii) \Rightarrow iii)$  sont immédiats.

Il suffit donc de montrer que si une orbite de  $\Gamma$  est bornée alors  $\Gamma$  a un point fixe.

Soit  $S$  une partie génératrice finie de  $\Gamma$ . Comme  $\Gamma$  a une orbite bornée sur  $\overline{X}$ , l'ensemble des points fixes de  $\Gamma$  sur  $\overline{X}$  est non vide ([28], 10, chap.3). Ainsi,  $\emptyset \neq \overline{X}^\Gamma = \bigcap_{s \in S} \overline{X}^s = \bigcap_{s \in S} \text{Adh}(X^s)$  par le lemme 6.3.5. De plus, par le lemme 6.3.6, on a  $\bigcap_{s \in S} X^s \neq \emptyset$ . Comme  $S$  engendre  $\Gamma$  ceci implique que  $\Gamma$  a un point fixe sur  $X$ . ■

**Exemple 6.3.8.** *Soit  $X$  l'arbre réel suivant :*



La distance entre un sommet du niveau  $n$  et un sommet adjacent du niveau  $n+1$  vaut par définition  $2^{-n}$ . Notons  $X_n$  le sous-arbre obtenu en supprimant tous les descendants du sommet  $x_n$ .

Soit  $F_n = \{g \in \text{Isom}(X) \mid g(y) = y \forall y \in X_n\}$ ;  $F_n$  est un sous-groupe fini de  $\text{Isom}(X)$  et  $F_n \subset F_{n+1}$ . Soit  $\Gamma = \bigcup_{n \geq 0} F_n$ .

Toute orbite de  $\Gamma$  sur  $X$  est bornée (car en fait  $\text{diam}(X) = 4$ ), mais  $\Gamma$  n'a pas de point fixe global sur  $X$ .

Cet exemple montre que la proposition 6.3.7. devient fausse sans l'hypothèse que le groupe est de type fini.

#### Preuve du théorème 6.1.8. :

Le théorème 6.1.7. et la proposition 6.3.3. montrent que  $\Gamma$  a une orbite bornée sur  $X$ . Comme  $\Gamma$  est de type fini ([28], lemme 10 chap.1), la proposition 6.3.7. assure l'existence d'un point fixe. ■

### 6.3.2 Produits restreints d'espace à murs mesurés et produit en couronne de groupes

**Définition 6.3.9.** Soit  $(X_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{S}_i, \mu_i, x_i^0)$ ,  $i \geq 1$ , une famille d'espaces à murs mesurés pointés. Le produit restreint des ensembles  $X_i$  ( $i \geq 1$ ) est

$$X \doteq \{(x_i)_{i \geq 1} \in \prod_{i \geq 1} X_i \mid x_i = x_i^0 \text{ pour tout } i \text{ sauf un nombre fini}\}$$

Notons  $p_i : X \rightarrow X_i$  la projection sur le  $i$ -ème facteur. On définit un ensemble de murs sur  $X$  par :

$$\mathcal{M} = \prod_{i \geq 1} p_i^{-1}(\mathcal{M}_i).$$

Notons  $\mathcal{B}$  la  $\sigma$ -algèbre engendrée par  $\prod_{i \geq 1} \mathcal{B}_i$  et  $\mu$  l'unique mesure sur  $\mathcal{S}$  telle que  $\mu|_{p_i^{-1}(\mathcal{S}_i)} = \mu_i$  (où on identifie  $p_i^{-1}(\mathcal{S}_i)$  et  $\mathcal{S}_i$ ).

Alors  $(X, \mathcal{M}, \mathcal{B}, \mathcal{S}, \mu)$  est un espace à murs mesurés, appelé produit restreint des espaces à murs mesurés  $\{(X_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{B}_i, \mu_i, x_i^0)\}_{i \geq 1}$ .

Notons que pour  $x = (x_i)_{i \geq 1}$ ,  $y = (y_i)_{i \geq 1}$  deux points de  $X$ , on a

$$\mu(\omega(x, y)) = \sum_{i \geq 1} \mu_i(\omega_i(x_i, y_i))$$

(Remarquons que la somme de droite ne comprend qu'un nombre fini de termes non nuls.)

Soit  $\Gamma$ ,  $H$  deux groupes discrets infinis et considérons leur produit en couronne  $H \wr \Gamma \doteq \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} H \rtimes \Gamma$  (l'action est donnée par le shift à gauche sur les indices).

Supposons que  $H$  agisse non trivialement sur un espace à murs mesurés  $(X, \mathcal{M}_X, \mathcal{B}_X, \mathcal{S}_X, \mu_X)$  (une telle action existe toujours par le point *ii*) de la preuve du théorème 6.1.6.).

Soit  $x_0$  un point base de  $X$  qui n'est pas un point fixe et définissons une action de  $H \wr \Gamma$  sur le produit restreint

$$\{(x_\gamma)_\gamma \in \prod_{\Gamma} X \mid x_\gamma = x_0 \text{ p.p.t. } \gamma \in \Gamma\}$$

par

$$((h_\gamma)_\gamma, g) \cdot (x_\gamma)_\gamma = (h_\gamma \cdot x_{g\gamma})_\gamma.$$

On vérifie aisément que l'action préserve les murs du produit restreint et la mesure associée,  $\mu$ .

Grâce à cette construction, nous obtenons une caractérisation de la propriété (T) des produits en couronne :

**Théorème 6.3.10.** *Soit  $H$ ,  $\Gamma$  deux groupes discrets dénombrables. Alors :*

$$H \wr \Gamma \text{ a la propriété (T)} \Leftrightarrow H \text{ a la propriété (T)} \text{ et } \Gamma \text{ est fini}$$

**Preuve.** La suffisance étant évidente, montrons la nécessité en prouvant que  $H \wr \Gamma$  n'a pas la propriété (T) dès que  $\Gamma$  est infini. Pour ce faire, il suffit de se montrer que l'action du produit en couronne sur l'espace à murs mesurés construit précédemment possède une orbite non bornée. Considérons  $(B_n)_{n \geq 1}$  une suite croissante d'ensembles finis de  $\Gamma$  telle que  $\bigcup_n B_n = \Gamma$ .

Pour  $h \neq 1$ , définissons un élément  $(\delta_{B_n}(h), e)$  de  $H \wr \Gamma$  par :

$$(\delta_{B_n}(h))_g = \begin{cases} 1 & \text{si } g \notin B_n \\ h & \text{si } g \in B_n \end{cases}.$$

Alors, si  $h$  est tel que  $\mu_X(\omega_X(h \cdot x_0, x_0)) > 0$  :

$$\mu(\omega((\delta_{B_n}(h), e) \cdot (x_0)_\gamma)) \geq \sum_{B_n} \mu_X(\omega_X(h \cdot x_0, x_0)) = |B_n| \mu_X(\omega_X(h \cdot x_0, x_0)).$$

En se rappelant que  $\Gamma$  est infini et donc que  $|B_n| \nearrow \infty$ , on conclut que l'orbite de  $(x_0)_\gamma$  est non bornée. ■

**Remarque 6.3.11.** *Dans [33], les auteurs obtiennent ce résultat par des considérations faisant appel uniquement à la théorie des représentations.*



# Chapitre 7

## Algèbres de von Neumann finies ayant la propriété de Haagerup et semi-groupes

### 7.1 Introduction

Ce chapitre est le fruit d'une collaboration avec P-Jolissaint. Rappelons tout d'abord la définition de la propriété de Haagerup pour une algèbre de von Neumann finie :

**Définition 7.1.1.** *Soit  $M$  une algèbre de von Neumann finie. Soit  $\tau$  une trace sur  $M$  finie, normale, normalisée et fidèle.  $M$  a la propriété de Haagerup par rapport à  $\tau$  s'il existe une suite  $(\Phi_n)_{n \geq 1}$  d'applications complètement positives de  $M$  dans elle-même telles que :*

- i)  $\tau \circ \Phi_n \leq \tau$  et  $\Phi_n$  est  $L^2$ -compacte, pour tout  $n$  ;*
- ii) pour tout  $x \in M$ ,  $\|\Phi_n(x) - x\|_{2,\tau} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .*

A priori cette définition dépend du choix de la trace  $\tau$ , mais il n'en est rien. P.Jolissaint montre dans [23] que si  $\tau$  et  $\tau'$  sont deux traces finies, normales, normalisées et fidèles sur  $M$ , alors  $M$  a la propriété de Haagerup par rapport à  $\tau$  si et seulement si  $M$  a la propriété de Haagerup par rapport à  $\tau'$ .

On observe que, si  $\Gamma$  a la propriété de Haagerup, alors il existe sur  $L(\Gamma)$  un semi-groupe  $(\theta_t)_{t > 0}$   $\|\cdot\|_2$ -continu d'applications complètement positives sous-traciales ( $\tau \circ \theta_t \leq \tau$ )  $L^2$ -compactes. En effet, si  $\psi$  est une fonction sur  $\Gamma$  à valeurs réelles positives qui est conditionnellement de type négatif et propre, alors l'égalité  $\theta_t(\lambda(g)) = \exp(-t\psi(g)) \cdot \lambda(g)$  définit un semi-groupe ayant les propriétés requises. De plus le générateur infinitésimal de ce semi-groupe est

donné par l'opérateur de multiplication par  $\psi$ . On peut donc le comprendre comme un analogue sur l'algèbre de von Neumann de  $\Gamma$  de la fonction conditionnellement de type négatif et propre,  $\psi$ .

Le but ici est de montrer que, même si une algèbre de von Neumann finie  $M$  n'est pas une algèbre de von Neumann d'un groupe discret, alors la propriété de Haagerup pour  $M$  est toujours équivalente à l'existence d'un semi-groupe d'applications complètement positives sous-traciales,  $\|\cdot\|_2$ -continu et  $L^2$ -compact.

Notre construction du semi-groupe  $(\theta_t)_{t \geq 0}$  est adaptée de [50], où l'auteur construit un semi-groupe fortement continu sur une  $C^*$ -algèbre séparable; nous présentons ici une preuve détaillée de la construction pour le confort du lecteur.

## 7.2 Préliminaires

Introduisons quelques notations. Ici,  $M$  désigne une algèbre de von Neumann à préduel séparable. Lorsque  $M$  est finie, nous noterons  $\tau$  une trace finie normale normalisée et fidèle sur  $M$ .  $L^2(M, \tau)$  est l'espace de Hilbert standard associé à  $\tau$  par construction GNS et nous désignerons par  $\xi_0$  le vecteur cyclique de  $L^2(M, \tau)$  qui implémente la trace  $\tau$ . Pour  $x \in M$ , la norme  $\|x\|_2$  est  $\|x\xi_0\|_{L^2}$ . Toute application  $\Phi : M \rightarrow M$  complètement positive normale sous-traciale (i.e.  $\tau \circ \Phi \leq \tau$ ) s'étend alors naturellement en un opérateur contractant  $T_\Phi$  sur  $L^2(M, \tau)$  en posant  $T_\Phi(x\xi_0) = \Phi(x)\xi_0, \forall x \in M$ . Enfin,  $M_1$  désigne la boule unité de  $M$  pour la norme opérateur.

Avant d'énoncer le théorème principal (section 7.3), nous aurons besoin des observations suivantes :

**Proposition 7.2.1.** [23] *Soit  $M$  une algèbre de von Neumann finie ayant la propriété de Haagerup par rapport à  $\tau$ . Alors il existe une suite  $(\phi_n)_{n \geq 1}$  d'applications complètement positives sur  $M$  satisfaisant :*

- i')  $\tau \circ \phi_n = \tau, \phi_n(1) = 1$  et  $\phi_n$  est  $L^2$ -compacte pour tout  $n \geq 1$ .*
- ii') pour tout  $x \in M, \|\phi_n(x) - x\|_{2, \tau} \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .*

**Proposition 7.2.2.** *Soit  $M$  une algèbre de von Neumann finie, munie d'une trace normale, finie, fidèle normalisée  $\tau$ .*

*Soit  $\Phi : M \rightarrow M$  une application complètement positive, normale, telle que  $\tau \circ \Phi \leq \tau$ . Alors il existe une unique application linéaire  $\Phi^* : M \rightarrow M$  telle que :*

- i)  $\tau(\Phi^*(x)y) = \tau(x\Phi(y))$ , pour tout  $x, y \in M$  ;
- ii)  $\Phi^*$  est complètement positive ;
- iii)  $\tau \circ \Phi^* \leq \|\Phi(1)\|\tau$  et en particulier  $\Phi^*$  est normale ;
- iv) Le prolongement  $T_{\Phi^*}$  de  $\Phi^*$  à  $L^2(M, \tau)$  satisfait à  $T_{\Phi^*} = (T_{\Phi})^*$ .

**Preuve.** L'unicité de  $\Phi^*$  suit immédiatement de i). Démontrons alors l'existence d'une telle application :

Fixons  $x \in M$  et définissons la forme sesquilinéaire  $\sigma_x : M\xi_0 \rightarrow M\xi_0$  par :  $\sigma_x(y\xi_0, z\xi_0) = \tau(x\Phi(yz^*))$ . On a alors l'inégalité, pour tout  $y, z \in M$  :

$$|\sigma_x(y\xi_0, z\xi_0)| \leq 2\|x\|\|y\|_2\|z\|_2 \quad (*)$$

En effet, supposons d'abord que  $x = x^*$  et que  $y = z$ . Ecrivons  $x = x_+ - x_-$  avec  $x_-, x_+ \in M_+$ ,  $x_+x_- = 0$ ,  $\|x_{\pm}\| \leq \|x\|$ , on obtient :

$$\begin{aligned} |\sigma_x(y\xi_0, y\xi_0)| &= |\tau(x_+\Phi(yy^*)) - \tau(x_-\Phi(yy^*))| \\ &\leq \max\{\tau(x_+\Phi(yy^*)), \tau(x_-\Phi(yy^*))\} \\ &\leq \|x\|\tau(\Phi(yy^*)) \\ &\leq \|x\|\|y\|_2^2 \end{aligned}$$

Ensuite si  $x = x^*$  et si  $y, z$  sont arbitraires, on vérifie sans peine que  $\overline{\sigma_x(y\xi_0, z\xi_0)} = \sigma_x(z\xi_0, y\xi_0)$  et donc

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}(\sigma_x(y\xi_0, z\xi_0)) &= \sigma_x(y\xi_0, z\xi_0) + \sigma_x(z\xi_0, y\xi_0) \\ &= \frac{1}{2}[\sigma_x(y\xi_0 + z\xi_0, y\xi_0 + z\xi_0) - \sigma_x(y\xi_0 - z\xi_0, y\xi_0 - z\xi_0)] \end{aligned}$$

par polarisation. Il vient :

$$\begin{aligned} |2\operatorname{Re}(\sigma_x(y\xi_0, z\xi_0))| &\leq \frac{1}{2}\|x\|(\|y+z\|_2^2 + \|y-z\|_2^2) \\ &= \|x\|(\|y\|_2^2 + \|z\|_2^2) \end{aligned}$$

Ainsi,  $|\operatorname{Re}(\sigma_x(y\xi_0, z\xi_0))| \leq \|x\|$  si  $\|y\|_2, \|z\|_2 \leq 1$ , donc  $|\operatorname{Re}(\sigma_x(y\xi_0, z\xi_0))| \leq \|x\|\|y\|_2, \|z\|_2$ .

Or, il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $e^{i\theta}\sigma_x(y\xi_0, z\xi_0) = |\sigma_x(y\xi_0, z\xi_0)|$ , et donc :

$$|\sigma_x(y\xi_0, z\xi_0)| = \sigma_x(e^{i\theta}y\xi_0, z\xi_0) = \operatorname{Re}(\sigma_x(e^{i\theta}y\xi_0, z\xi_0)) \leq \|x\|\|y\|_2, \|z\|_2$$

Enfin, si  $x \in M$  est quelconque,  $x = x_1 + ix_2$  avec  $x_i^* = x_i$ ,  $\|x_i\| \leq \|x\|$ , ( $i = 1, 2$ ). Ainsi  $|\sigma_x(y\xi_0, z\xi_0)| \leq |\sigma_{x_1}(y\xi_0, z\xi_0)| + |\sigma_{x_2}(y\xi_0, z\xi_0)| \leq 2\|x\|\|y\|_2, \|z\|_2$ ; ce qui démontre (\*).

Puisque  $\sigma_x$  est une forme sesquilinéaire bornée sur  $M\xi_0 \times M\xi_0$ , elle se prolonge continûment à  $L^2(M, \tau) \times L^2(M, \tau)$  et elle définit un opérateur borné  $\Phi^*(x)$  sur  $L^2(M, \tau)$  caractérisé par

$$\langle \Phi^*(x)y\xi_0 | z\xi_0 \rangle = \tau(x\Phi(yz^*)), \forall y, z \in M \quad (**)$$

Vérifions que  $\Phi^*(x)$  appartient à  $M$  : pour cela, il suffit de montrer que :

$$\langle \Phi^*(x)Jw^*Jy\xi_0 | z\xi_0 \rangle = \langle Jw^*J\Phi^*(x)y\xi_0 | z\xi_0 \rangle$$

pour tout  $y, z, w \in M$  ( où  $J$  est définie par  $J(x\xi_0) = x^*\xi_0$ ). Or,

$$\begin{aligned} \langle \Phi^*(x)Jw^*Jy\xi_0 | z\xi_0 \rangle &= \langle \Phi^*(x)yw\xi_0 | z\xi_0 \rangle \\ &= \tau(x\Phi(ywz^*)) \\ &= \tau(x\Phi(y(zw^*)^*)) \\ &= \langle \Phi^*(x)y\xi_0 | JwJz\xi_0 \rangle \\ &= \langle Jw^*J\Phi^*(x)y\xi_0 | z\xi_0 \rangle \end{aligned}$$

Cela démontre la propriété *i*). Démontrons alors que  $\Phi^*$  possède les autres propriétés :

ii) Pour montrer que  $\Phi^*$  est complètement positive, considérons  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  et  $z$  dans  $M$  :

$$\begin{aligned} \langle \sum_{i,j=1}^n y_j^* \Phi^*(x_j^* x_i) y_i z \xi_0 | z \xi_0 \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \langle \Phi^*(x_j^* x_i) y_i z \xi_0 | y_j z \xi_0 \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \tau(x_j^* x_i \Phi(y_i z (y_j z)^*)) \\ &= \tau\left(\sum_{i,j=1}^n x_i \Phi(y_i z (y_j z)^*) x_j^*\right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

puisque  $\Phi$  est complètement positive.

iii) On a pour tout  $x \in M$  :

$$\tau \circ \Phi^*(x^*x) = \tau(x^*x\Phi(1)) \leq \|\Phi(1)\|\tau(x^*x)$$

iv) Rappelons que  $T_{\Phi^*}(x\xi_0) = \Phi^*(x)\xi_0$ , pour tout  $x \in M$ . Ainsi, si  $x, y \in M$  :

$$\langle T_{\Phi^*}(x\xi_0)|y\xi_0 \rangle = \tau(y^*\Phi^*(x)) = \tau(\Phi(y)^*x) = \langle x\xi_0|T_{\Phi}(y\xi_0) \rangle$$

Ce qui complète la preuve de la proposition. ■

**Corollaire 7.2.3.** *Soit  $M, \tau, \Phi$  et  $\Phi^*$  comme dans la proposition et supposons de plus que  $\|\Phi(1)\| \leq 1$ . Alors on a, pour tout  $x \in M$  :*

$$\|\Phi^*(x) - x\|_2^2 \leq 2\|x\|_2\|\Phi(x) - x\|_2$$

**Preuve.**

$$\begin{aligned} \|\Phi^*(x) - x\|_2 &= \|\Phi^*(x)\|_2^2 + \|x\|_2^2 - \tau(\Phi^*(x^*)x) - \tau(x^*\Phi^*(x)) \\ &\leq 2\|x\|_2^2 - \tau(x^*\Phi(x)) - \tau(\Phi(x^*)x) \\ &= 2\operatorname{Re}[\tau(x^*(x - \Phi(x)))] \\ &\leq 2\|x\|_2\|x - \Phi(x)\|_2. \end{aligned}$$

■

**Corollaire 7.2.4.** *Soit  $M$  une algèbre de von Neumann finie à préduel séparable ayant la propriété de Haagerup et soit  $\tau$  une trace sur  $M$  comme ci-dessus. Alors il existe une suite d'applications complètement positives unites normales  $\Phi_n : M \rightarrow M$  telle que*

- i)  $\tau \circ \Phi_n = \tau$  et  $\Phi_n^* = \Phi_n, \forall n \geq 1$  ;
- ii)  $T_{\Phi_n}$  est compact, pour tout  $n \geq 1$  ;
- iii) pour tout  $x \in M$ , on a  $\|\Phi_n(x) - x\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

**Preuve.** Observons que si  $\Phi$  est complètement positive uniale et si  $\tau \circ \Phi = \tau$  alors  $\Phi^*$  est uniale et  $\tau \circ \Phi^* = \tau$ .

Ainsi, si  $(\psi_n)_{n \geq 1}$  est une suite d'applications complètement positives uniales préservant la trace avec  $T_{\psi_n}$  compact et  $\|\psi_n(x) - x\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  pour tout  $x$ , on pose  $\Phi_n = \frac{1}{2}(\psi_n + \psi_n^*)$ .

La suite  $(\Phi_n)_{n \geq 1}$  ainsi définie satisfait aux conditions *i) – iii)*. ■

L'observation suivante est due à J.-L. Sauvageot [50] :

**Lemme 7.2.5.** *Il existe une constante universelle  $K$  telle que si  $E$  est un espace de Banach et  $T \in \mathbb{B}(E)$  satisfait  $\|T\| \leq 1$ , alors on a :*

$$\|(T - Id)\exp(t(T - Id))\| \leq K \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Finalement nous aurons besoin du :

**Lemme 7.2.6.** *Soit  $(\chi_n)_{n \geq 1}$  une suite d'applications c.p.u (complètement positives uniales) préservant la trace,  $L^2$ -compactes, telles que  $\chi_n \circ \chi_m = \chi_m \circ \chi_n, \forall n, m$ . Supposons que le sous-ensemble*

$$F = \{x \in M_1 \mid \sum_{n \geq 1} \|\chi_n(x) - x\|_2 < \infty\} \text{ soit dense dans } M_1.$$

*Alors il existe un semi-groupe  $(\theta_t)_{t \geq 0}$  d'applications c.p.u préservant la trace tel que, pour tout  $t > 0$ ,  $\{\exp(t(\chi_1 + \dots + \chi_n - nId))\}_{n \geq 1}$  converge en  $\|\cdot\|_2$  vers  $\theta_t$ . De plus, pour tout  $t > 0$ ,  $\sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|(Id - \frac{1}{n}(\chi_1 + \dots + \chi_n)\theta_t(x)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . En particulier,  $\theta_t$  est  $L^2$ -compact, pour tout  $t > 0$ .*

*Si de plus  $\chi_n^* = \chi_n$ , pour tout  $n \geq 1$ , alors les éléments du semi-groupe satisfont  $\theta_t^* = \theta_t$ , pour tout  $t > 0$ .*

**Preuve.** Posons  $\theta_t^n = \exp(t((\chi_1 + \dots + \chi_n) - nId))$ , pour tout  $t > 0$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $m, n \in \mathbb{N}^*, m > n$  posons  $\delta_{n,m} = (m - n)Id - (\chi_{n+1} + \dots + \chi_m)$ . Comme les  $\chi_i$  commutent,  $\theta_t^m = \theta_t^n \exp(-t\delta_{n,m})$ .

Pour  $x \in F$ , on a :

$$\begin{aligned} \|(\theta_t^m - \theta_t^n)x\|_2 &= \|\theta_t^n(\exp(-t\delta_{n,m})x - x)\|_2 \\ &\leq t\|\delta_{n,m}(x)\|_2 \end{aligned}$$

En effet, les  $\theta_t^n$  et  $\exp(-t\delta_{n,m})$  sont c.p.u et préservent la trace et on a :

$$\begin{aligned}
\|\exp(-t\delta_{n,m})x - x\|_2 &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds}(\exp(-ts\delta_{n,m})x) ds \right\|_2 \\
&= \left\| \int_0^1 -t\delta_{n,m} \exp(-ts\delta_{n,m})x ds \right\|_2 \\
&\leq t\|\delta_{n,m}(x)\|_2(\|\exp(-t\delta_{n,m})\| + 1) \\
&\leq 2t\|\delta_{n,m}(x)\|_2
\end{aligned}$$

car  $\exp(-t\delta_{n,m})$  est une contraction.

Or,

$$\begin{aligned}
\|\delta_{n,m}(x)\|_2 &= \|(m-n)Id - (\chi_{n+1} + \dots + \chi_m)(x)\|_2 \\
&= \|[(Id - \chi_{n+1}) + (Id - \chi_{n+2}) + \dots + (Id - \chi_m)](x)\|_2 \\
&\leq \sum_{i=n+1}^m \|\chi_i(x) - x\|_2 \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

car  $x \in F$ .

Donc, pour tout  $x \in F$ , la suite  $n \mapsto \theta_t^n(x)$  est une suite de Cauchy en  $\|\cdot\|_2$  de  $M_1$  (car  $F \subset M_1$ ). Ainsi, il existe un élément de  $M_1$ ,  $\theta_t(x)$ , tel que

$$\|\cdot\|_2\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_t^n(x) = \theta_t(x), \quad \forall x \in F$$

Par densité de  $F$ , on construit ainsi des applications c.p.u et préservant la trace,  $(\theta_t)_{t \geq 0}$ .

On obtient :

$$\begin{aligned}
\|\theta_t(x) - x\|_2 &= \|\cdot\|_2\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \|\theta_t^n(x) - x\|_2 \\
&\leq t \|\cdot\|_2\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \|[(\chi_1 + \dots + \chi_n) - nId](x)\|_2 \\
&\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0
\end{aligned}$$

car  $\|[(\chi_1 + \dots + \chi_n) - nId](x)\|_2$  est bornée (en effet pour tout  $x \in F$ ,

$$\begin{aligned} \|[(\chi_1 + \dots + \chi_n) - nId](x)\|_2 &= \|[(Id - \chi_1) + (Id - \chi_{n+2}) + \dots + (Id - \chi_n)](x)\|_2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|\chi_i(x) - x\|_2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\chi_i(x) - x\|_2 \\ &< \infty \end{aligned}$$

La propriété de semi-groupe est de plus vérifiée :

$$\theta_{s+t}(x) = \|\cdot\|_2\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_{s+t}^n(x) = \|\cdot\|_2\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_s^n \theta_t^n(x) = \theta_s \theta_t(x)$$

Pour  $n > 0$  fixé, considérons la suite  $(\exp(-t\delta_{n,m}))_{m>n}$ . Cette suite converge ponctuellement, pour  $n$  et  $t$  fixés, vers une application c.p.u, que l'on notera  $T_{n,t}$  :

Pour  $x \in M$ ,  $t > 0$  fixés, on a :

$$\|\exp(-t\delta_{n,m})(x) - T_{n,t}(x)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Montrons que pour tout  $t > 0$ ,  $n > 0$ , on a  $\theta_t = \theta_t^n T_{n,t}$ .

Soit  $x \in M$  et  $\varepsilon > 0$ ; alors il existe un entier  $m$  (dépendant de  $n, t, x, \varepsilon$ ) tel que :

- $\|\theta_t(x) - \theta_t^m(x)\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$
- $\|\exp(-t\delta_{n,m})(x) - T_{n,t}(x)\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Donc, comme  $\theta_t^m = \theta_t^n \exp(-t\delta_{n,m})$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \|\theta_t(x) - \theta_t^n T_{n,t}(x)\|_2 &\leq \|\theta_t(x) - \theta_t^m(x)\|_2 + \|\theta_t^n(\exp(-t\delta_{n,m})(x) - T_{n,t}(x))\|_2 \\ &\leq \|\theta_t(x) - \theta_t^m(x)\|_2 + \|\exp(-t\delta_{n,m})(x) - T_{n,t}(x)\|_2 \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Voyons alors qu'il existe une constante  $K$  telle que

$$\| [Id - \frac{1}{n}(\chi_1 + \dots + \chi_n)] \theta_t \|_{\mathbb{B}(L^2(M))} \leq \frac{K}{\sqrt{nt}}.$$

Comme  $T_{n,t}$  est une contraction, on a, dans un premier temps :

$$\| [Id - \frac{1}{n}(\chi_1 + \dots + \chi_n)] \theta_t \|_{\mathbb{B}(L^2(M))} \leq \| [Id - \frac{1}{n}(\chi_1 + \dots + \chi_n)] \theta_t^n \|_{\mathbb{B}(L^2(M))}$$

Posons  $S_n \doteq \frac{1}{n}(\chi_1 + \dots + \chi_n)$ . On a :  $\theta_t^n = \exp(nt(S_n - Id))$  et donc :

$$\begin{aligned} \left\| \left[ Id - \frac{1}{n}(\chi_1 + \dots + \chi_n) \right] \theta_t^n \right\|_{\mathbb{B}(L^2(M))} &= \left\| (Id - S_n) \exp(nt(S_n - Id)) \right\|_{\mathbb{B}(L^2(M))} \\ &\leq \frac{K}{\sqrt{nt}}, \end{aligned}$$

la dernière inégalité étant valable grâce au lemme 7.2.5.

Comme  $S_n$  est  $L^2$ -compact, et que l'on vient de voir que

$\|\theta_t - S_n \theta_t\|_{\mathbb{B}(L^2(M))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , on conclut que  $\theta_t$  est  $L^2$ -compact, pour tout  $t > 0$ .

Finalement, il est clair que si  $\chi_n^* = \chi_n$ , alors on a  $\theta_t^* = \theta_t$ , pour tout  $t > 0$ . ■

## 7.3 Le théorème principal

Le résultat principal est le suivant :

**Théorème 7.3.1.** *Soit  $(M, \tau)$  une algèbre de von Neumann finie à préduel séparable. On a l'équivalence entre :*

*i)  $M$  a la propriété de Haagerup.*

*ii) Il existe un semi-groupe  $\|\cdot\|_2$ -continu,  $(\theta_t)_{t \geq 0}$ , d'applications complètement positives uniales préservant la trace,  $L^2$ -compactes, avec  $\theta_t^* = \theta_t$  pour tout  $t > 0$ .*

**Preuve.** L'implication "ii)  $\Rightarrow$  i)" est immédiate. Montrons la réciproque : par le corollaire 7.2.4, il existe une suite  $(\psi_n)_{n \geq 1}$  d'applications complètement positives uniales (c.p.u) préservant la trace,  $L^2$ -compactes, telles que,  $\forall x \in M$ ,  $\|\psi_n(x) - x\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  et satisfaisant  $\psi_n = \psi_n^*$ . Soit encore  $(a_l)_{l \geq 1} \subset M_1$  une suite  $\|\cdot\|_2$ -dense de la boule unité fermée de  $M$ . Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que  $\|\psi_n(x) - x\|_2 \leq 2^{-n} \|x\|_2$  sur le sous-espace engendré par  $\{\psi_j^k(a_l) \mid 0 \leq j, l < n, k \leq n^2\}$ .

Posons  $\Delta_n = n Id - (\psi_1 + \dots + \psi_n)$  et  $\Phi_{t,n} = \exp(-t\Delta_n)$ ,  $\forall t > 0$ . Les  $\Phi_{t,n}$  sont c.p.u et préservent la trace et comme  $\Delta_n^* = \Delta_n$ , on a  $\Phi_{t,n}^* = \Phi_{t,n}$ , pour tout  $t, n$ . Pour tout  $\alpha > 0$  :

$$\alpha[\alpha Id + \Delta_n]^{-1} = \alpha \int_0^\infty \exp(-t\alpha) \Phi_{t,n} dt$$

Ainsi,  $[Id + \alpha\Delta_n]^{-1} = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \exp(-\frac{t}{\alpha}) \Phi_{t,n} dt$  et on conclut alors que  $[Id + \alpha\Delta_n]^{-1}$  est c.p.u et préserve la trace (car  $\tau$  et  $\int_0^\infty$  commutent). De plus,

$$([\alpha Id + \Delta_n]^{-1})^* = [\alpha Id + \Delta_n]^{-1}$$

Montrons alors que pour tout  $l$ , la suite  $n \mapsto [Id + \alpha\Delta_n]^{-1}(a_l)$  est une suite de Cauchy dans  $(M_1, \|\cdot\|_2)$ .

Posons  $\theta_n = \frac{1}{n}(\psi_1 + \dots + \psi_n)$ , (donc  $\Delta_n = n(Id - \theta_n)$ ). Alors pour  $n, p > 0$  et  $l \leq n$ , on a :

$$(Id - \psi_{n+p})[Id + \alpha\Delta_n]^{-1}(a_l) = (Id - \psi_{n+p}) \frac{1}{n\alpha + 1} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{n\alpha}{n\alpha + 1}\right)^k \theta_n^k(a_l)$$

$$\text{En effet, } \frac{1}{n\alpha + 1} \sum_{k \geq 0} \frac{n\alpha}{n\alpha + 1}^k \theta_n^k = \frac{1}{n\alpha + 1} (Id - \frac{n\alpha}{n\alpha + 1} \theta_n)^{-1} = [Id + \alpha\Delta_n]^{-1}.$$

Posons

$$\begin{aligned} A &= (Id - \psi_{n+p}) \frac{1}{n\alpha + 1} \sum_{k=0}^{(n+p)^2} \left(\frac{n\alpha}{n\alpha + 1}\right)^k \theta_n^k(a_l) \\ &= \frac{1}{n\alpha + 1} \sum_{k=0}^{(n+p)^2} \left(\frac{n\alpha}{n\alpha + 1}\right)^k (Id - \psi_{n+p}) \theta_n^k(a_l) \end{aligned}$$

et

$$B = (Id - \psi_{n+p}) \frac{1}{n\alpha + 1} \sum_{k > (n+p)^2} \left(\frac{n\alpha}{n\alpha + 1}\right)^k \theta_n^k(a_l).$$

Par hypothèse :

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &\leq \frac{1}{n\alpha + 1} \sum_{k=0}^{(n+p)^2} \left(\frac{n\alpha}{n\alpha + 1}\right)^k \|\theta_n^k(a_l)\|_2 2^{-(n+p)} \\ &\leq \frac{1}{n\alpha + 1} \frac{1 - \left(\frac{n\alpha}{n\alpha + 1}\right)^{(n+p)^2 + 1}}{1 - \frac{n\alpha}{1+n\alpha}} \|a_l\|_2 2^{-(n+p)} \\ &\leq 2^{-(n+p)} \|a_l\|_2. \end{aligned}$$

En effet :  $\|\frac{1}{n}(\psi_1 + \dots + \psi_n)(x)\|_2 \leq \|x\|_2$ , ce qui implique  $\|\theta_n^k\|_2(a_l) \leq \|a_l\|_2$ .  
De plus :

$$\begin{aligned} \|B\|_2 &\leq \frac{2}{n\alpha + 1} \sum_{k > (n+p)^2} \left(\frac{n\alpha}{n\alpha + 1}\right)^k \|\theta_n^k(a_l)\|_2 \\ &\leq 2 \left(\frac{n\alpha}{n\alpha + 1}\right)^{(n+p)^2} \|a_l\|_2. \end{aligned}$$

Soit alors  $\alpha_0 > 0$  et  $\alpha \in ]0, \alpha_0]$ ; pour  $n$  suffisamment grand,

$$\left(1 - \frac{1}{n\alpha + 1}\right)^n = \left(\frac{n\alpha}{n\alpha + 1}\right)^n \leq \exp\left(-\frac{1}{2\alpha_0}\right)$$

et

$$\left(\frac{n\alpha}{n\alpha + 1}\right)^{(n+p)^2} \leq \left(\frac{n\alpha}{n\alpha + 1}\right)^{n(n+p)} \leq \exp\left(-\frac{(n+p)}{2\alpha_0}\right)$$

(En effet :

$$\begin{aligned} \left(\frac{n\alpha}{n\alpha + 1}\right)^n &= \left(\frac{n\alpha + 1}{n\alpha}\right)^{-n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n\alpha}\right)^{-n} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{1}{\alpha}\right) \text{ en décroissant.} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \|(Id - \psi_{n+p})[Id + \alpha\Delta_n]^{-1}(a_l)\|_2 &\leq \left(2^{-(n+p)} + 2 \exp\left(-\frac{(n+p)}{2\alpha_0}\right)\right) \|a_l\|_2 \\ &\leq 2\left(2^{-(n+p)} + \exp\left(-\frac{(n+p)}{2\alpha_0}\right)\right) \|a_l\|_2 \end{aligned}$$

Donc, pour  $l$  fixé,  $n$  suffisamment grand et  $m > n$ , on a :

$$\|[Id + \alpha\Delta_m][Id + \alpha\Delta_n]^{-1}(a_l) - a_l\|_2 = \alpha \left\| \sum_{p=1}^{m-n} (Id - \psi_{n+p})[Id + \alpha\Delta_n]^{-1}(a_l) \right\|_2$$

puisque :

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{p=1}^{m-n} (Id - \psi_{n+p}) &= [Id + m\alpha Id - \alpha(\psi_1 + \dots + \psi_m)] - Id - n\alpha Id + \alpha\psi_1 + \dots + \psi_n \\ &= [Id + \alpha\Delta_m] - [Id + \alpha\Delta_n]. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \|[Id + \alpha\Delta_m][Id + \alpha\Delta_n]^{-1}(a_l) - a_l\|_2 &\leq 2\alpha \sum_{p=1}^{m-n} \left(2^{-(n+p)} + \exp\left(-\frac{(n+p)}{2\alpha_0}\right)\right) \|a_l\|_2 \\ &\leq 2\alpha \|a_l\|_2 \left(2^{-n} + \exp\left(-\frac{n}{2\alpha_0}\right)\right) \end{aligned}$$

Or comme  $[Id + \alpha\Delta_m]^{-1}$  est c.p.u, on peut conclure que

$$\|[Id + \alpha\Delta_n]^{-1}(a_l) - [Id + \alpha\Delta_m]^{-1}(a_l)\|_2 \leq C \left(2^{-n} + \exp\left(-\frac{n}{2\alpha_0}\right)\right)$$

où  $C$  est une constante ne dépendant que de  $a_l$  et  $\alpha$ .

Ainsi la suite  $n \mapsto [Id + \alpha\Delta_n]^{-1}(a_l)$  est une suite de Cauchy de  $M_1$  pour la  $\|\cdot\|_2$  et par densité de la suite des  $a_l$  on obtient la même conclusion pour la suite  $n \mapsto [Id + \alpha\Delta_n]^{-1}(x)$ , où  $x \in M_1$ . On pose alors :

$$\rho_\alpha(x) = \|\cdot\|_2\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} [Id + \alpha\Delta_n]^{-1}(x), \quad \forall x \in M_1$$

Comme  $M$  est une algèbre de von Neumann finie,  $(M_1, \|\cdot\|_2)$  est complète et on peut conclure que  $\rho_\alpha(x) \in M_1$ ,  $\forall x \in M_1$ .

Bien entendu, les  $\rho_\alpha$  sont c.p.u, préservent la trace et  $\rho_\alpha^* = \rho_\alpha$ .

Pour  $x = a_l$ , la convergence est uniforme sur  $]0, \alpha_0]$ , donc  $\|\cdot\|_2\text{-}\lim_{\alpha \rightarrow 0} \rho_\alpha(a_l) = a_l$ ,

ce qui implique que  $\|\cdot\|_2\text{-}\lim_{\alpha \rightarrow 0} \rho_\alpha(x) = x$ ,  $\forall x$ .

De plus, l'équation de la pseudo-résolvante fournit :

$$\alpha[Id + \alpha\Delta_n]^{-1}(x) - \beta[Id + \beta\Delta_n]^{-1}(x) = (\beta - \alpha)[Id + \alpha\Delta_n]^{-1}(x)[Id + \beta\Delta_n]^{-1}(x),$$

d'où :

$$\alpha\rho_\alpha - \beta\rho_\beta = (\beta - \alpha)\rho_\alpha\rho_\beta, \quad \forall \alpha, \beta > 0$$

Montrons alors que les  $\rho_\alpha$  sont  $L^2$ -compactes, pour tout  $\alpha > 0$ .

Pour  $n < m$ , posons à nouveau  $\theta_n = \frac{1}{n}(\psi_1 + \dots + \psi_n)$ ,  $\Delta_n = nId - (\psi_1 + \dots + \psi_n)$ ,  $\delta_{n,m} = \Delta_m - \Delta_n$  et  $y_{m,n} = [Id + \alpha\Delta_n]^{-1}[Id + \frac{\alpha}{n\alpha+1}\delta_{n,m}]^{-1}(x)$ .

Alors :

$$\begin{aligned} x &= [Id + \frac{\alpha}{n\alpha+1}\delta_{n,m}][Id + \alpha\Delta_n](y_{m,n}) \\ &= [(1 + n\alpha)Id + \alpha\delta_{n,m} - \alpha(\psi_1 + \dots + \psi_n) - \frac{\alpha^2 n}{n\alpha+1}\delta_{n,m}\theta_n](y_{m,n}) \\ &= [[Id + \alpha\Delta_n] + \alpha(\Delta_m - \Delta_n) - \frac{\alpha^2 n}{n\alpha+1}\delta_{n,m}\theta_n](y_{m,n}) \\ &= [[Id + \alpha\Delta_m] - \frac{\alpha^2 n}{n\alpha+1}\delta_{n,m}\theta_n](y_{m,n}) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} [Id + \alpha\Delta_m]^{-1}(x) &= y_{m,n} - [Id + \alpha\Delta_m]^{-1}[\frac{\alpha^2 n}{n\alpha+1}\delta_{n,m}\theta_n](y_{m,n}) \\ &= [Id + \alpha\Delta_n]^{-1}[Id + \frac{\alpha}{n\alpha+1}\delta_{n,m}]^{-1}(x) \\ &\quad - [Id + \alpha\Delta_m]^{-1}[\frac{\alpha^2 n}{n\alpha+1}\delta_{n,m}\theta_n][Id + \alpha\Delta_n]^{-1} \\ &\quad [Id + \frac{\alpha}{n\alpha+1}\delta_{n,m}]^{-1}(x) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
& [Id + \alpha\Delta_m]^{-1} - [Id + \alpha\Delta_n]^{-1}[Id + \frac{\alpha}{n\alpha + 1}\delta_{n,m}]^{-1} \\
&= -[Id + \alpha\Delta_m]^{-1}[\frac{\alpha^2 n}{n\alpha + 1}\delta_{n,m}\theta_n][Id + \alpha\Delta_n]^{-1}[Id + \frac{\alpha}{n\alpha + 1}\delta_{n,m}]^{-1} \\
&= -\frac{\alpha^2 n}{n\alpha + 1}[Id + \alpha\Delta_m]^{-1}(\Delta_m - \Delta_n)\theta_n[Id + \alpha\Delta_n]^{-1}[Id + \frac{\alpha}{n\alpha + 1}\delta_{n,m}]^{-1} \\
&= -\frac{\alpha^2 n}{n\alpha + 1}[Id + \alpha\Delta_m]^{-1}(\Delta_m - \Delta_n)[Id + \alpha\Delta_n]^{-1}\theta_n[Id + \frac{\alpha}{n\alpha + 1}\delta_{n,m}]^{-1} \\
&= -\frac{n\alpha}{n\alpha + 1}([Id + \alpha\Delta_n]^{-1} - [Id + \alpha\Delta_m]^{-1})\theta_n[Id + \frac{\alpha}{n\alpha + 1}\delta_{n,m}]^{-1}
\end{aligned}$$

On considère alors la suite  $\{\psi_n, \psi_{n+1}, \dots\}$  et on montre comme précédemment que la suite  $m \mapsto [Id + \frac{\alpha}{n\alpha+1}\delta_{n,m}]^{-1}(x)$  est de Cauchy dans  $(M_1, \|\cdot\|_2)$  et converge en  $\|\cdot\|_2$  vers disons  $\rho_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}}^{(n)}(x)$ ,  $\forall x \in M$ .

Par le calcul précédent et en passant à la  $\|\cdot\|_2$ -limite pour  $m \rightarrow \infty$ , on a pour  $x \in M$  fixé :

$$\rho_\alpha - [Id + \alpha\Delta_n]^{-1}\rho_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}}^{(n)} = \frac{n\alpha}{n\alpha + 1}(\rho_\alpha - [Id + \alpha\Delta_n]^{-1})\theta_n\rho_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}}^{(n)}$$

Par hypothèse, les  $\psi_n$  sont  $L^2$ -compactes et donc  $\theta_n$  aussi. Ainsi,  $-\frac{n\alpha}{n\alpha+1}(\rho_\alpha - [Id + \alpha\Delta_n]^{-1})\theta_n\rho_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}}^{(n)}$  est  $L^2$ -compacte.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\|(Id - \theta_n)[Id + \alpha\Delta_n]^{-1}(x)\|_2 &= \frac{1}{n\alpha}\|\alpha\Delta_n[Id + \alpha\Delta_n]^{-1}(x)\|_2 \\
&\leq \frac{1}{n\alpha}(\|[Id + \alpha\Delta_n]^{-1}(x)\|_2 + \|x\|_2) \\
&\leq \frac{2}{n\alpha}\|x\|_2
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\|(Id - \theta_n)[Id + \alpha\Delta_n]^{-1}\rho_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}}^{(n)}(x)\|_2 \leq \frac{2}{n\alpha}\|x\|_2$$

Or,

$$\begin{aligned}
& [\rho_\alpha - \theta_n[Id + \alpha\Delta_n]^{-1}\rho_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}}^{(n)} - \frac{n\alpha}{n\alpha + 1}(\rho_\alpha - [Id + \alpha\Delta_n]^{-1})\theta_n\rho_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}}^{(n)}](x) \\
&= [\rho_\alpha - \theta_n[Id + \alpha\Delta_n]^{-1}\rho_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}}^{(n)} - (\rho_\alpha - [Id + \alpha\Delta_n]^{-1}\rho_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}}^{(n)})](x) \\
&= (Id - \theta_n)[Id + \alpha\Delta_n]^{-1}\rho_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}}^{(n)}(x)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \|\rho_\alpha - \theta_n [Id + \alpha \Delta_n]^{-1} \rho_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}}^{(n)} - \frac{n\alpha}{n\alpha+1} (\rho_\alpha - [Id + \alpha \Delta_n]^{-1} \theta_n \rho_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}}^{(n)}) (x)\|_2 \\ \leq \frac{2}{n\alpha} \|x\|_2 \end{aligned}$$

On observe que  $\psi_{n,\alpha} \doteq \theta_n [Id + \alpha \Delta_n]^{-1} \rho_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}}^{(n)} + \frac{n\alpha}{n\alpha+1} (\rho_\alpha - [Id + \alpha \Delta_n]^{-1} \theta_n \rho_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}}^{(n)})$  est  $L^2$ -compacte car  $\theta_n$  l'est. (Bien entendu,  $\psi_{n,\alpha}$  préserve la trace).

La dernière égalité nous livre :

$$\|\rho_\alpha - \psi_{n,\alpha}\|_{\mathbb{B}(L^2(M))} \leq \frac{2}{n\alpha}$$

On conclut que, pour tout  $\alpha > 0$ ,  $\rho_\alpha$  est  $L^2$ -compacte.

Via l'équation de pseudo-résolvante que satisfont les  $\rho_\alpha$ , on conclut qu'ils commutent. Ainsi les  $\rho_{\frac{1}{n}} \doteq \chi_n$  forment une suite d'applications c.p.u préservant la trace,  $L^2$ -compactes telles que :

- i)  $\chi_n \circ \chi_m = \chi_m \circ \chi_n, \forall n, m.$
- ii)  $\|\chi_n(x) - x\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
- iii)  $\chi_n^* = \chi_n$  pour tout  $n \geq 1.$

Ces applications permettent de construire le semi-groupe cherché grâce au lemme 7.2.6. ■

Récemment, S. Popa a identifié dans [42] une classe remarquable de facteurs de type  $II_1$  en utilisant (entre autres) une version relative de la propriété de Haagerup. Avant d'en donner une définition, il est nécessaire de fixer quelques notations.

On considère une algèbre de von Neumann finie  $M$  à préduel séparable munie d'une trace normale, finie, fidèle, normalisée  $\tau$  et une sous-algèbre de von Neumann  $B$  de  $M$  contenant 1. On note  $E_B$  l'unique espérance conditionnelle de  $M$  sur  $B$  qui préserve  $\tau$ , et  $e_B$  le prolongement de  $E_B$  à  $L^2(M, \tau)$ , qui est la projection orthogonale de  $L^2(M, \tau)$  sur le sous-espace  $L^2(B, \tau)$ . On désigne par  $\langle M, B \rangle$  l'algèbre de von Neumann engendrée par  $M \cup \{e_B\}$ ; on a  $e_B x e_B = E_B(x) e_B$  pour tout  $x \in M$ , et l'ensemble des sommes finies d'éléments de la forme  $x e_B y$  est une sous-\*-algèbre faiblement dense dans  $\langle M, B \rangle$ , cf [42]. Enfin, on désigne par  $\mathcal{J}(\langle M, B \rangle)$  l'idéal normiquement fermé de  $\langle M, B \rangle$  engendré par les projections finies de  $\langle M, B \rangle$ , [42], [43]. Observons que lorsque  $B = \mathbb{C}$ , cet idéal est l'ensemble des opérateurs compacts sur  $L^2(M, \tau)$ .

Suivant [42], étant donné une paire  $1 \in B \subset M$  comme ci-dessus, on dit que  $M$  possède la *propriété de Haagerup relativement à  $B$*  s'il existe une trace  $\tau$

comme ci-dessus et une suite  $(\Phi_n)_{n \geq 1}$  d'applications complètement positives de  $M$  dans  $M$  telles que :

- (1)  $\tau \circ \Phi_n \leq \tau$  pour tout  $n \geq 1$  ;
- (2)  $\Phi_n$  est  $B$ -bilinéaire pour tout  $n$  :  $\Phi_n(b_1 x b_2) = b_1 \Phi_n(x) b_2$  pour tous  $x \in M$  et  $b_1, b_2 \in B$  ;
- (3) pour tout  $n$ , le prolongement  $T_{\Phi_n}$  de  $\Phi_n$  à  $L^2(M, \tau)$  appartient à l'idéal  $\mathcal{J}(\langle M, B \rangle)$  ;
- (4) pour tout  $x \in M$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi_n(x) - x\|_2 = 0$ .

Il est facile de vérifier que le théorème 7.3.1. s'étend à cette situation : si la paire  $B \subset M$  possède la propriété ci-dessus, alors il existe un semi-groupe  $(\theta_t)_{t \geq 0}$  d'applications complètement positives préservant  $\tau$  telles que

- (a)  $\theta_t(b_1 x b_2) = b_1 \theta_t(x) b_2$  pour tout  $t \geq 0$ , pour tous  $b_1, b_2 \in B$  et tout  $x \in M$  ;
- (b) pour tout  $t > 0$ , le prolongement de  $\theta_t$  à  $L^2(M, \tau)$  appartient à  $\mathcal{J}(\langle M, B \rangle)$  ;
- (c) pour tout  $x \in M$ , on a  $\lim_{t \rightarrow 0} \|\theta_t(x) - x\|_2 = 0$ .

## 7.4 Sur le générateur du semi-groupe

Soit  $M$  une algèbre de von Neumann fini ayant la propriété de Haagerup. Par le théorème précédent, il existe sur  $M$  un semi-groupe  $\|\cdot\|_2$ -continu,  $(\theta_t)_{t \geq 0}$ , d'applications complètement positives uniales préservant la trace et  $L^2$ -compactes. Le générateur infinitésimal  $\Delta$  de ce semi-groupe sera défini comme suit :

$$\mathcal{D}(\Delta) = \left\{ x \in M \mid \exists K \text{ t.q. } \|(\frac{\theta_t x - x}{t})\|_{op} < K, \forall t > 0 \text{ et } \|\cdot\|_2\text{-}\lim_{t \searrow 0} \frac{\theta_t x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

et définissons :

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{D}(\Delta) &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto \lim_{t \searrow 0} \frac{\theta_t x - x}{t}. \end{aligned}$$

On démontre alors :

**Proposition 7.4.1.**  $\Delta$  est un opérateur à domaine  $\|\cdot\|_2$ -dense.

**Preuve.** Soit  $x \in M$ . On définit  $\int_0^t \theta_s(x) \xi_0 ds$  par l'égalité :

$$< \int_0^t \theta_s(x) \xi_0 ds \mid \eta > = \int_0^t < \theta_s(x) \xi_0 \mid \eta > ds$$

pour tout  $\eta \in L^2(M)$ . Alors  $\int_0^t \theta_s(x) \xi_0 ds \in M \cdot \xi_0$ . En effet, comme un élément  $\eta \in L^2(M)$  appartient à  $M \cdot \xi_0$  si et seulement s'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\|Jy^* J\eta\|_{L^2(M)} \leq C\|y\|_2, \forall y \in M$  ( $J$  étant l'opérateur sur  $L^2(M)$  défini par  $J(x\xi_0) = x^*\xi_0$ ), on calcule :

$$\begin{aligned} \|Jy^* J(\int_0^t \theta_s(x) \xi_0 ds)\|_{L^2}^2 &= \int_0^t \int_0^t < Jy^* J\theta_s(x) \xi_0 \mid Jy^* J\theta_{s'}(x) \xi_0 > ds' ds \\ &\leq \int_0^t \int_0^t \|Jy^* J\theta_s(x) \xi_0\|_{L^2} \|Jy^* J\theta_{s'}(x) \xi_0\|_{L^2} ds' ds \\ &\leq \int_0^t \int_0^t \|\theta_s(x)\|_M \|y\|_2 \|\theta_{s'}(x)\|_M \|y\|_2 ds' ds \\ &\leq \int_0^t \int_0^t \|x\|_M^2 \|y\|_2^2 ds' ds \\ &= t^2 \|x\|_M^2 \|y\|_2^2. \end{aligned}$$

Ainsi :  $\int_0^t \theta_s(x) \xi_0 ds \in M \cdot \xi_0$ . Notons alors  $\int_0^t \theta_s(x) ds$  l'élément de  $M$  défini par l'égalité  $\int_0^t \theta_s(x) ds \xi_0 = \int_0^t \theta_s(x) \xi_0 ds$ .  
On a alors, par  $\|\cdot\|_2$ -continuité de  $\theta_s$  :

$$\left\| \frac{1}{t} \left( \int_0^t \theta_s(x) ds \xi_0 \right) - x \right\|_2 \xrightarrow[t \searrow 0]{} 0$$

(car  $\lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \theta_s(x) \xi_0 ds = x \xi_0$ ).

Posons  $x_t \doteq \int_0^t \theta_s(x) ds$ . On observe alors que  $x_t \in \mathcal{D}(\Delta)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\theta_\varepsilon - 1}{\varepsilon}(x_t) \xi_0 &= \frac{\theta_\varepsilon - 1}{\varepsilon} \left( \int_0^t \theta_s(x) \xi_0 ds \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \theta_{s+\varepsilon}(x) \xi_0 - \theta_s(x) \xi_0 ds \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} \theta_s(x) \xi_0 ds - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \theta_s(x) \xi_0 ds. \end{aligned}$$

Or cette dernière expression converge vers  $(\theta_t(x) - x) \xi_0$  par  $\|\cdot\|_2$ -continuité du semi-groupe  $(\theta_t)_{t>0}$ .

De plus,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\theta_\varepsilon - 1}{\varepsilon}(x_t) \right\|_{op} &= \sup_{\|y\|_2 \leq 1} \left\| \frac{\theta_\varepsilon - 1}{\varepsilon}(x_t) y \xi_0 \right\|_{L^2} \\ &= \sup_{\|y\|_2 \leq 1} \left\| \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} \theta_s(x) ds - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \theta_s(x) ds \right) y \xi_0 \right\|_{L^2} \\ &\leq \sup_{\|y\|_2 \leq 1} \left\| \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} \theta_s(x) ds \right\|_M + \left\| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \theta_s(x) ds \right\|_M \|y\|_2 \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} \|\theta_s(x)\|_M ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \|\theta_s(x)\|_M ds \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} \|x\|_M ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \|x\|_M ds \\ &\leq 2\|x\|_M. \end{aligned}$$

D'où la conclusion. ■

De plus, si  $\Delta'$  désigne le générateur infinitésimal du semi-groupe sur  $L^2(M)$  associé à  $(\theta_t)_{t>0}$ , alors  $\Delta'$  est une extension de  $\Delta$ .

Afin de montrer que  $\Delta$  est un analogue raisonnable des fonctions conditionnellement de type négatif propres sur un groupe ayant la propriété de Haagerup, il serait intéressant de se convaincre qu'il existe une sous- $*$ -algèbre dense dans  $\mathcal{D}(\Delta)$ . Un candidat pourrait être  $\mathcal{A} = \bigcap_{k \geq 0} \text{Dom}(\Delta^k)$ .



# Bibliographie

- [1] S.R. ADAMS and R.J.SPATZIER. Kazhdan groups, cocycles and trees. *American Journal of Math.*, (112 (1)) :271–287, 1990.
- [2] G. ALEXOPOULOS. Fonctions harmoniques bornées sur les groupes résolubles. *CRAS*, (305 (I)) :777–779, 1987.
- [3] M.B. BEKKA and A. VALETTE. Group cohomology, Harmonic functions and the first  $L^2$ -Betti number. *Potential analysis*, (6) :313–326, 1997.
- [4] F. BOCA. On the method of constructing irreducible finite index subfactors of Popa. *Pacific J. Math.*, (161 (2)) :201–231, 1993.
- [5] M. BOZEJKO. Positive definite kernels, length functions on groups and a noncommutative von Neumann inequality. *Studia. Math.*, (2) :107–118, 1989.
- [6] J. CHEEGER and M. GROMOV.  $L^2$ -cohomology and group cohomology. *Topology*, (25 N°2) :189–215, 1986.
- [7] P.-A. CHERIX. *Constantes de Kazhdan et rayons spectraux de marches aléatoires*. Thèse, Université de Neuchâtel, 1996.
- [8] P.-A. CHERIX, M. COWLING, P. JOLISSAINT, P. JULG, and A.VALETTE. *Groups with the Haagerup property (Gromov’s  $a$ - $T$ -menability)*. Number 197 in Progression Math. Birkhauser, 2001.
- [9] M. CHODA. Group factors of the Haagerup type. *Proc.Japan Acad.*, (59) :174–209, 1983.
- [10] P. DELORME. 1-cohomologie des représentations unitaires des groupe de Lie semi-simples et résolubles. Produits tensoriels continus de représentations. *Bull.Soc.Math. France*, (105) :281–336, 1977.
- [11] J. DODZIUK. De Rham-Hodge theory for  $L^2$ -cohomology of infinite coverings. *Topology*, (16) :157–165, 1977.
- [12] D.S. FARLEY. A proper Isometric Action of Thompson’s group  $V$  on Hilbert Space. Preprint.
- [13] H. FURSTENBERG. *Symmetric spaces, Short course presented at Washington University*. Pure and Applied Mathematics, 1972.

- [14] D. GABORIAU. Invariants  $L^2$  de relations d'équivalence et de groupes. 2002. Preprint.
- [15] M. GROMOV. Asymptotic invariants of infinite groups. *London Math. Soc. Lecture Notes*, (182) :1–295, 1993. In G.A Niblo and M.A. Roller, editors, Geometric group theory, Vol. 2.
- [16] A. GUICHARDET. Sur la cohomologie des groupes topologiques II. *Bull.Sc.Math.*, (96) :305–332, 1972.
- [17] A. GUICHARDET. Sur la cohomologie de certains groupes localement compacts. *CRAS.*, (282) :571–573, 1976.
- [18] A. GUICHARDET. Etude de la 1-cohomologie et de la topologie du dual pour les groupes de Lie à radical Abélien. *Math. Ann.*, (228) :215–232, 1977.
- [19] A. GUICHARDET. *Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie*. TextesMath. CEDIC, 1980.
- [20] F. HAGLUND and F.PAULIN. Simplicité de groupes d'automorphismes d'espaces à courbure négative. *Geom. Topol*, pages 181–248, 1998.
- [21] P.R. HALMOS. *Measure theory*. Van Nostrand, 1950.
- [22] E. HEWITT and H.A. ROSS. *Abstract harmonic analysis I*. Springer-Verlag, 1963.
- [23] P. JOLISSAINT. Haagerup Approximation property for finite von Neumann Algebras. To appear in Journal of Operator Th.
- [24] R.B. WARFIELD Jr. *Nilpotent groups*. Number 513 in Lecture notes in mathematics. 1976.
- [25] D. KAZHDAN. Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups. *Funct. Anal. and its Appl.*, (1) :63–65, 1967.
- [26] E.T. KEHLET. Cross sections for quotient maps of locally compact groups. *Math. Scand.*, (55) :152–162, 1984.
- [27] P.de la HARPE. *Topics in geometric group theory*. Chicago Lectures in Mathematics Series. 2000.
- [28] P.de la HARPE and A. VALETTE. *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts*. Number 175 in Astérisque. 1989.
- [29] W. LÜCK.  *$L^2$ -invariants and K-theory*. Studia. Math. Springer-Verlag. A paraître.
- [30] N. LOUVET. A propos d'un théorème de Vershik et Karpushev. *Enseignement Math.*, (47) :287–314, 2001.
- [31] A.I. MAL'CEV. Nilpotent torsion-free groups. *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.*, (13) :201–212, 1949.

- [32] F. MARTIN and A. VALETTE. 1-reduced cohomology, the first  $l^2$ -betti number and applications. En préparation.
- [33] M.B.BEKKA, P. DE LA HARPE, and A. VALETTE. *Kazhdan's property (T)*. To appear.
- [34] D. MONTGOMERY and L. ZIPPIN. *Topological transformation groups*. Number 1 in Interscience. 1955.
- [35] J.W. MORGAN and P.B. SHALEN. Valuation trees, and degenerations of hyperbolic structures I. *Annals of Math.*, (120) :401–476, 1984.
- [36] Y. STALDER N. LOUVET and A. VALETTE. Fonctions conditionnellement de type négatif, représentations irréductibles et propriété (T). A paraître.
- [37] M.A. NAIMARK and A.I. STERN. *Theory of group representations*. Springer-Verlag, 1982.
- [38] P. PANSU. Cohomologie  $l^p$  : invariance sous quasiisométrie. 1995. Preprint.
- [39] A.T. PATERSON. *Amenability*. Number 29 in Mathematical surveys and monographs. AMS, 1988.
- [40] J. PICHAUD. 1-cohomologie des représentations induites. *J. Math. Pures et appl.*, (56) :339–366, 1977.
- [41] J.-P. PIER. *Amenable locally compact groups*. Wiley-Interscience Publication, 1984.
- [42] S. POPA. On a class of type  $II_1$  factors with Betti numbers invariants. 2002. Preprint.
- [43] S. POPA and F. RADULESCU. Derivations of von Neumann algebras into the compact ideal space of a semifinite algebra. *Duke Math. Journal*, (57 No2) :485–518, 1988.
- [44] G. ROBERTSON. Crofton formulae and geodesic distance in hyperbolic spaces. *Journal of Lie theory*, (8 (1)) :161–173, 1998.
- [45] G. ROBERTSON and T. STEGER. Negative definite kernels and a dynamical characterization of property (T) for countable groups. *Ergodic Th. and Dynam. Systems*, (18 (1)) :247–263, 1998.
- [46] D.J.S. ROBINSON. *Finiteness condition and generalized soluble groups*. Springer-Verlag, 1972.
- [47] D.J.S. ROBINSON. On the homology of hypercentral groups. *Arch. Math. Vol.*, (32), 1979.
- [48] D.J.S. ROBINSON. *A course in the theory of groups*. Number 80 in Springer-Verlag. 1996.

- [49] W. RUDIN. *Fourier analysis on groups*. Interscience Publisher, 1962.
- [50] J.-L. SAUVAGEOT. Strong Feller semi-groups on  $C^*$ -algebras. *J. Operator Theory*, (42) :83–102, 1999.
- [51] Y. SHALOM. Rigidity of commensurators and irreducible lattices. *Inventiones Math.*, (141) :1–54, 2000.
- [52] P.M. SOARDI. *Potential Theory on Infinite Networks*. Number 1590 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1991.
- [53] J. TITS. A "theorem of Lie-Kolchin" for trees. Contributions to algebra. Academic Press, 1977.
- [54] A. VALETTE. Les représentations uniformément bornées associées à un arbre réel. *Bull. Soc. Math. Belg.*, (XLII) :747–759, 1990.
- [55] N.Th. VAROPOULOS, L. SALOFF-COSTE, and T. COUHLON. *Analysis and geometry on groups*. Cambridge university press, 1992.
- [56] L.N. VASERSTEIN. Group having the property (T). *Funct. Anal. and its Appl.*, (174 No2), 1968.
- [57] A.M. VERSHIK and S.I. KARPUSHEV. Cohomology of groups in unitary representations, the neighbourhood of the identity and conditionally positive definite functions. *Math. USSR Sbornnik*, (47) :513–526, 1984.
- [58] Y. WATATANI. Property (T) of Kazhdan implies property (FA) of Serre. *Math. Japan*, (27) :97–103, 1982.