

965



SOUS - GROUPES MAXIMAUX DE GROUPES CLASSIQUES

ASSOCIES AUX C^* -ALGÈBRES

Thèse présentée à la Faculté des Sciences
de l'Université de Neuchâtel
pour obtenir le grade de docteur ès sciences
par

Sylvie Griener

IMPRIMATUR POUR LA THÈSE

*Sous-groupes maximaux de groupes classiques
associés aux C^* -algèbres*

de M^{lle} *Sylvie Griener*

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

FACULTÉ DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel,
sur le rapport des membres du jury,

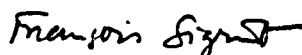
Messieurs A. Robert, R. Bader et

P. de la Harpe (Genève)

autorise l'impression de la présente thèse.

Neuchâtel, le *19 novembre 1985*

Le doyen:



François Sigrist

TABLE DES MATIERES

<u>INTRODUCTION</u>	3
<u>CHAPITRE 1</u> : QUELQUES SOUS-GROUPES MAXIMAUX DU GROUPE DES INVERSIBLES D'UNE C^* -ALGÈBRE	9
1.1. Lemmes préliminaires	9
1.2. Maximalité de G'	11
1.3. Etude des normalisateurs	12
1.4. Maximalité de $N_G(G^\alpha)$ lorsque $p \sim q$	15
1.5. Une généralisation aux C^* -algèbres non simples	17
<u>CHAPITRE 2</u> : QUELQUES SOUS-GROUPES MAXIMAUX DU GROUPE UNITAIRE D'UNE C^* -ALGÈBRE A.F. OU D'UN FACTEUR	19
2.1. Lemmes préliminaires	20
2.2. Sous-groupes maximaux du groupe unitaire d'un facteur	23
2.2.1. Etude du normalisateur de U_K^α	24
2.2.2. Maximalité de $N_U(U_K^\alpha)$ lorsque $p \sim q$	25
2.2.3. Maximalité de U^α lorsque $p \not\sim q$	28
2.3. Sous-groupes maximaux du groupe unitaire d'une C^* -algèbre A.F. simple	31

2.3.1. Maximalité de $N_U(U^{\alpha})$ lorsque $p \sim q$	32
2.3.2. Maximalité de U^{α} lorsque $p \not\sim q$	38
2.4. Une généralisation de 2.3 aux C^* -algèbres A.F. non simples	42

CHAPITRE 3 : POSITION DU GROUPE UNITAIRE DANS LE GROUPE
DES INVERSIBLES D'UN FACTEUR OU D'UNE
 C^* -ALGÈBRE A.F

43

3.1. Etude du normalisateur de U dans G	43
3.2. Lemmes préliminaires	44
3.3. Maximalité de $N_G(G(U+K))$ dans le groupe des inversibles d'un facteur	47
3.4. Maximalité de $N_G(U)$ dans le groupe des éléments inversibles d'une C^* -algèbre U.H.F.	52

SYMBOLES ET NOTATIONS

59

BIBLIOGRAPHIE

61

INTRODUCTION

E.B.Dynkin est l'un des initiateurs de la description des sous-groupes maximaux des groupes classiques comme $GL_n(\mathbb{C})$ et $U_n(\mathbb{C})$ ([Dy]). Cet auteur étudie les sous-groupes maximaux réductibles ou irréductibles des groupes de Lie classiques à l'aide de techniques utilisant la finitude de la dimension de l'espace sous-jacent.

Soient A une C^* -algèbre avec unité, $G = GL(A)^0$ (resp. $U = U(A)^0$) la composante connexe neutre du groupe formé des éléments inversibles (resp. unitaires) de A . Dans ce travail nous nous sommes intéressés à montrer la maximalité de sous-groupes paraboliques et de certains sous-groupes irréductibles de G et de U .

Plus précisément, soient p et q deux projecteurs non nuls de A de somme 1. On dit que deux projecteurs p et q sont équivalents lorsqu'il existe $v, w \in A$ avec $p = vw$, $q = wv$, $v = pvq$ et $w = qwp$. Cette relation d'équivalence est notée $p \sim q$ (sa négation $p \not\sim q$).

Pour tout $x \in A$ nous avons $x = pxp + pxq + qxp + qxq$ (l'écriture a été introduite par C.S. Peirce en 1870) que nous noterons $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ avec $x_1 = pxp$, $x_2 = pxq$, $x_3 = qxp$, $x_4 = qxq$.

Dans le chapitre 1 nous étudions des sous-groupes paraboliques de G et démontrons :

Théorème 1.1 : Soient A une C^* -algèbre simple avec unité et p, q deux projecteurs non nuls de A , de somme 1. Alors $G' = \{ x \in G ; qxp = 0, qx^{-1}p = 0 \}$ est un sous-groupe maximal dans G .

Rappelons qu'une C^* -algèbre avec unité est simple si elle ne possède pas d'idéal bilatère non trivial.

Soit $\alpha_{p,q}$ l'automorphisme intérieur de A défini par : $\alpha_{p,q}(x) = JxJ^{-1}$ pour tout $x \in A$, où J est l'involution $p - q$.

Considérons les sous-groupes formés des points fixes de

$$\alpha_{p,q} :$$

$$G^\alpha = \{ x \in G ; \alpha_{p,q}(x) = x \}$$

$$U^\alpha = G^\alpha \cap U$$

Désignons par $N_G(G^\alpha)$ (resp. $N_U(U^\alpha)$) le normalisateur de G^α dans G (resp. de U^α dans U).

Nous démontrons alors :

Théorème 1.2 : Soient A une C^* -algèbre simple avec unité, p et q deux projecteurs équivalents de A de somme 1. Alors G^α est d'indice 2 dans $N_G(G^\alpha)$ et $N_G(G^\alpha)$ est un sous-groupe maximal dans G .

Par contre lorsque les projecteurs p et q sont non équivalents, $N_G(G^\alpha) = G^\alpha$ (Prop.1.1) est contenu dans le groupe parabolique G du théorème 1.1 et n'est donc pas un sous-groupe maximal de G .

Si A est une C^* -algèbre avec unité, K un idéal bilatère de A tel que A/K soit une algèbre simple non nulle, π la projection canonique $A \longrightarrow A/K$, nous définissons :

$$G'_K = \{ x \in G ; qxp \in K, qx^{-1}p \in K \}$$

$$G_K^\alpha = \{ x \in G ; \alpha_{p,q}(x) - x \in K \} ; U_K^\alpha = G_K^\alpha \cap U$$

$$N_G(G_K^\alpha) \text{ le normalisateur de } G_K^\alpha \text{ dans } G ;$$

$$N_U(U_K^\alpha) = N_G(G_K^\alpha) \cap U$$

Les théorèmes 1.1 et 1.2 peuvent se généraliser comme suit :

Généralisation 1.1 : Soient A et K comme ci-dessus, p et q deux projecteurs de somme 1 et n'appartenant pas à K . Alors G'_K est un sous-groupe maximal dans G .

Généralisation 1.2 : Soient A, K, π comme ci-dessus, p et q deux projecteurs de A de somme 1 tels que $\pi(p) \sim \pi(q)$.

Alors G_K^α est d'indice 2 dans $N_G(G_K^\alpha)$ et $N_G(G_K^\alpha)$ est un sous-groupe maximal dans G .

Dans le chapitre 2 nous nous intéressons à la maximalité du groupe unitaire des points fixes par l'automorphisme $\alpha_{p,q}$ dans U .

Rappelons que si A est un facteur de type I_∞ , tous les automorphismes α involutifs (i.e. $\alpha^2 = 1$) de A sont

conjugués à des automorphismes de la forme $\alpha'_{p,q}$
 ([H], lemme 5).

Une motivation de ce travail était de comprendre la position du groupe des points fixes par un automorphisme involutif (modulo les opérateurs compacts) dans le groupe unitaire d'un facteur de type 1_∞ .

Les théorèmes suivants donnent en particulier une réponse à cette question :

Théorèmes 2.1 et 2.2 : Soient M un facteur , p et q deux projecteurs non nuls de somme 1.

Si $p \sim q : U_{\mathcal{K}}^\alpha$ est d'indice 2 dans $N_U(U_{\mathcal{K}}^\alpha)$ et $N_U(U_{\mathcal{K}}^\alpha)$ est un sous-groupe maximal du groupe unitaire U de M .

Si $p \not\sim q : N_U(U^\alpha) = U^\alpha$ est un sous-groupe maximal dans U

Nous démontrons aussi un résultat analogue lorsque le facteur M est remplacé par une C^* -algèbre A de type A.F.

Rappelons que A est A.F. (approximately finite) si A est la fermeture normique d'une réunion croissante d' $*$ -sous-algèbres de dimension finie.

Théorèmes 2.3 et 2.4 : Soient A une C^* -algèbre A.F. simple avec unité, p et q deux projecteurs non nuls de A , de somme 1.

Si $p \sim q : U^\alpha$ est d'indice 2 dans $N_U(U^\alpha)$ et $N_U(U^\alpha)$ est un sous-groupe maximal du groupe unitaire U de M .

Si $p \not\sim q : N_U(U^\alpha) = U^\alpha$ est un sous-groupe maximal dans U .

Une extension des théorèmes ci-dessus étant :

Généralisation 2.1 : Soient A, K, π définis comme avant, p et q deux projecteurs de somme 1 appartenant à $A-K$.

Si $\pi(p) \sim \pi(q)$: U_K^α est d'indice 2 dans $N_U(U_K^\alpha)$ et $N_U(U_K^\alpha)$ est un sous-groupe maximal dans U .

Si $\pi(p) \not\sim \pi(q)$: $N_U(U_K^\alpha) = U_K^\alpha$ est un sous-groupe maximal dans U .

Le chapitre 3 est consacré à l'étude de la position du groupe unitaire dans le groupe des éléments inversibles de certaines C^* -algèbres.

Finalement définissons :

$G(U+K) = \{ x \in G ; x = u + k \text{ avec } u \in U \text{ et } k \in K \}$, nous obtenons alors les résultats suivants :

Théorème 3.1 : Soit M un facteur, alors $N_G(G(U+K)) = C^*G(U+K)$ est un sous-groupe maximal dans G .

Théorème 3.2 : Soit A une C^* -algèbre U.H.F. (uniformly hyperfinite) avec unité, alors $N_G(U) = C^*U$ est un sous-groupe maximal dans G .

* * * * *

Je tiens à remercier sincèrement toutes les personnes qui m'ont permis de mener à bien ce travail de recherche.

Monsieur le professeur A.Robert a porté une attention toute particulière à cette étude ; l'intérêt qu'il a manifesté pour ce sujet m'a fortement encouragée.

Monsieur le professeur R.Bader s'est vivement intéressé à ce travail ; sa lecture attentive du manuscrit m'a beaucoup apporté.

Au cours de fructueuses discussions, Monsieur P.de la Harpe a su orienter judicieusement cette recherche ; sa disponibilité ainsi que ses nombreux conseils m'ont été extrêmement précieux.

Mes camarades O.Besson , T.Giordano et G.Skandalis m'ont fait bénéficier de leur expérience et de leurs conseils avec autant de patience que d'humour.

Ce travail a été réalisé en partie grâce au soutien du Fonds national suisse de la recherche scientifique (requête n 2.717-0.85)

CHAPITRE 1

QUELQUES SOUS-GROUPES MAXIMAUX DU GROUPE DES INVERSIBLES D'UNE C^* -ALGÈBRE

1.1 LEMES PRELIMINAIRES

Lemme 1.1 : Soient A une C^* -algèbre avec unité, p et q deux projecteurs non nuls de somme 1. Posons

$$G_1 = \{x \in G ; x-1 \in qAp\} , G_2 = \{x \in G ; x-1 \in pAq\} ,$$

$$G_3 = \{x \in G ; qxp = pxq = 0\} ,$$

alors $\langle G_1, G_2, G_3 \rangle = G$.

Preuve : Soit $z \in G$ avec $\|z-1\| < \frac{1}{2}$; on a

$$z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ z_3 z_1^{-1} & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_4 - z_3 z_1^{-1} z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & z_1^{-1} z_2 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

qui appartient à $\langle G_1, G_2, G_3 \rangle$. Le groupe G étant connexe nous obtenons la conclusion cherchée.

Lemme 1.2 ; Soient B un anneau simple avec unité, p et q deux idempotents non nuls de B, alors qBp est non nul et simple comme $B_q \otimes B_p^{opp}$ -module à gauche (B_p^{opp} dénote l'anneau opposé).

Remarque: (1) Si B est une C^* -algèbre simple alors B_p l'est aussi.

(2) Si B est une C^* -algèbre simple alors qBp est simple comme $GL(B_q)^0 \otimes GL(B_p^{opp})^0$ -module à gauche (car tout élément de B_q est somme de deux éléments de $GL(B_q)^0$).

Preuve : Soit I l'idéal engendré par p, comme B est simple nous avons $I = B$. Il existe donc a_i, b_i ($i=1, \dots, N$) appartenant à B tels que $1 = \sum_{i=1}^N a_i p b_i$ donc $0 \neq q = \sum_{i=1}^N q a_i p b_i$. Il existe alors $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $q a_i p \neq 0$, d'où $qBp \neq 0$. Montrons que qBp est simple : Soient Y un $B_q \otimes B_p^{opp}$ -sous-module non nul de qBp et $y \in Y$, y non nul. Comme B est simple, l'idéal bilatère engendré par y est égal à B, donc pour tout $x \in B$, il existe des éléments α_i, β_i ($i=1, \dots, k$) appartenant à B tels que $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i y \beta_i$. En particulier si $x \in qBp$, en posant $a_i = q \alpha_i q \in B_q$ et $b_i = p \beta_i p \in B_p$, on a $x = qxp = \sum_{i=1}^k a_i y b_i \in Y$ donc $Y = qBp$.

Lemme 1.3 : Soient A une C^* -algèbre avec unité, $a, b \in A$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$.

Si $aub = 0$ pour tout $u \in U$ avec $\|u-1\| < k$ alors $azb = 0$ pour tout $z \in A$.

Si de plus A est simple ou A est un facteur alors : $a = 0$ ou $b = 0$.

Preuve : Il existe $\delta > 0$ suffisamment petit tel que, pour tout $x = x^* \in A$ avec $\|x\| < \delta$, on ait $u = -ix + \sqrt{1-x^2} \in U$ et $\|u-1\| < k$. On a donc $axb = a \frac{1}{2i} (u^* - u) b = 0$.

Tout élément de A étant somme de deux éléments autoadjoints de A nous avons $azb = 0$, pour tout $z \in A$.

Si A est simple le lemme 8.1 de [H-S,2] nous donne $a = 0$ ou $b = 0$.

Si A est un facteur :

Supposons $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Il existe r et $s \in A$ tels que aa^*r et sb^*b soient des projecteurs non nuls. Soient deux projecteurs e et f non nuls équivalents tels que $e \leq aa^*r$, $f \leq sb^*b$. Il existe donc $v, w \in A$ avec $e = vw$, $f = wv$, $v = evf$, $w = fwe$. Soit $x = a^*rvsb^*$ on a $axb = aa^*rvsb^*b = v \neq 0$ ce qui contredit l'hypothèse du lemme.

1.2 MAXIMALITE DE G'

Théorème 1.1 : Soient A une C^* -algèbre simple avec unité et p, q deux projecteurs non nuls de A , de somme 1. Alors $G' = \{x \in G ; xqp = 0, qx^{-1}p = 0\}$ est un sous-groupe maximal dans G .

Preuve : Soit $g \in G - G'$; on peut supposer $qgp \neq 0$ (sinon on considère g^{-1}). Comme pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{r}g \in \langle G', g \rangle$, nous pouvons supposer de plus que $g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix}$ avec $\|g_i\| < 1$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.

Soit $N = \{y \in qAp ; 1+y \in \langle G', g \rangle\}$. L'égalité :

$$\begin{pmatrix} (p+g_1)^{-1} & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+g_1 & g_2 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1' & g_2' \\ g_3' & g_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ g_3 & q \end{pmatrix}$$

où $g^{-1} = \begin{pmatrix} g_1' & g_2' \\ g_3' & g_4' \end{pmatrix}$, implique $g_3 \in N$, avec $g_3 \neq 0$.

N a les propriétés suivantes:

a) $N \pm N \subset N$

b) Pour tout $x \in N$ pour tout $a \in GL(A_p)^0$ on a $xa \in N$ car:

$$\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ x & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ xa & q \end{pmatrix}$$

De même $bx \in N$ pour tout $x \in N$ et $b \in GL(A_q)^0$.

N est donc un $GL(A_q)^0 \otimes GL(A_p^{opp})^0$ -sous module à gauche non nul de qAp , donc $N = qAp$ par la remarque (2) suivant le lemme

1.2. Par suite tout élément $x \in G$ avec $x^{-1} \in qAp$ appartient à $\langle G', g \rangle$. Comme les groupes G_1, G_2, G_3 définis au lemme 1.1 appartiennent à $\langle G', g \rangle$ nous obtenons $G = \langle G', g \rangle$.

1.3 ETUDE DES NORMALISATEURS

Lemme 1.4 : Soient A une C^* -algèbre avec unité, p et q deux projecteurs non nuls de somme 1. On a les équivalences suivantes :

(a) $p \sim q$

(b) il existe un élément x inversible appartenant à $qAp + pAq$.

Preuve : (a) \Rightarrow (b) : Il existe $v, w \in A$ tels que $p = vw$ et $q = wv$ avec $v = pvq$, $w = qwv$ alors $x = v + w$ convient.

(b) \implies (a) : Soit $\begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ x_3 & 0 \end{pmatrix}$ un élément inversible dans $qAp + pAq$ et d'inverse $\begin{pmatrix} 0 & x_1' \\ x_3' & 0 \end{pmatrix}$. Alors $x_2 x_3' = p$ et $x_3' x_2 = q$, donc p et q sont équivalents.

Dans la proposition suivante, étant donnés deux projecteurs p et q de somme 1 dans la C^* -algèbre A , on note :

$$G^\alpha = \{x \in G ; pxq = 0 ; qxp = 0\} ; U^\alpha = U \cap G^\alpha$$

$$TG^\alpha = \{x \in G ; pxp = 0 ; qxq = 0\} ; TU^\alpha = U \cap TG^\alpha$$

S'il existe une isométrie partielle E_{pq} de projecteur initial q et de projecteur final p , on peut aussi écrire

$$TG^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & E_{pq} \\ E_{qp} & 0 \end{pmatrix} G^\alpha.$$

Proposition 1.1 : Soit A une C^* -algèbre simple avec unité ou un facteur et soient p, q deux projecteurs non nuls de A de somme 1.

Alors : (a) $N_G(G^\alpha) = G^\alpha \cup TG^\alpha$; $N_U(U^\alpha) = U^\alpha \cup TU^\alpha$

(b) Si $p \sim q$, alors $TG^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & E_{pq} \\ E_{qp} & 0 \end{pmatrix} G^\alpha$ comme ci-dessus ;

Si $p \not\sim q$, alors $TG^\alpha = \emptyset$

(c) $N_G(N_G(G^\alpha)) = N_G(G^\alpha)$; $N_U(N_U(U^\alpha)) = N_U(U^\alpha)$.

Preuve : (a). Soit $g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix} \in N_G(G^\alpha)$ et posons

$g^{-1} = \begin{pmatrix} g_1' & g_2' \\ g_3' & g_4' \end{pmatrix}$. Pour tout $a \in U(A_p)^\circ$ et $d \in U(A_q)^\circ$ on a $g(a \pm d)g^{-1} \in G^\alpha$, donc $g_3 a g_1', g_4 d g_3', g_1 a g_2', g_2 d g_4'$ sont tous nuls.

Le lemme 1.3 nous donne deux possibilités pour g :

- Soit $g_2 = 0$ et $g_3 = 0$; c'est-à-dire $g \in G^\alpha$

- Soit $g_1 = 0$ et $g_4 = 0$; c'est-à-dire $g \in TG^\alpha$
 donc $N_G(G^\alpha) \subset G^\alpha \cap TG^\alpha$. L'inclusion inverse étant triviale on
 a l'égalité. La démonstration est identique pour
 $N_U(U^\alpha) = N_G(G^\alpha) \cap U$.

(b). Résulte du lemme 1.4.

(c). Se déduit du lemme 1.5 ci-dessous.

Lemme 1.5 : Soient A une C^* -algèbre simple avec unité
 ou un facteur, p et q deux projecteurs non nuls de A de
 somme 1. Soient $g \in G$ et $\delta \in \mathbb{R}$ avec $0 < \delta < 1 / \|g\| \|g^{-1}\|$.
 Si $g(a+d)g^{-1} \in N_G(G^\alpha)$ pour tout $a \in U(A_p)^0$ et $d \in U(A_q)^0$ tels
 que $\|a - p\| < \delta$, $\|d - q\| < \delta$, alors $g \in N_G(G^\alpha)$.

Preuve : Soit $g \in G$ avec $g(a+d)g^{-1} \in N_G(G^\alpha) = G^\alpha \cup TG^\alpha$
 (Prop 1.1) pour tout a et d comme dans l'énoncé. Alors
 $g(a+d)g^{-1}$ appartient à la composante connexe de 1 dans
 $N_G(G^\alpha)$ c'est-à-dire $g(a+d)g^{-1} \in G^\alpha$. On a donc
 $g_3 a g_1' + g_4 d g_3' = 0$ et $g_1 a g_2' + g_2 d g_4' = 0$ pour tout a et d
 comme dans l'énoncé ($g^{-1} = \begin{pmatrix} g_1' & g_2' \\ g_3' & g_4' \end{pmatrix}$).

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\varphi \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$ on ait
 $\|ae^{i\varphi} - p\| < \delta$.

Nous avons donc $g_3 a e^{i\varphi} g_1' + g_4 d g_3' = 0$

et $g_1 a e^{i\varphi} g_2' + g_2 d g_4' = 0$

ce qui implique : $g_3 a g_1' = 0$, $g_4 d g_3' = 0$

et $g_1 a g_2' = 0$, $g_2 d g_4' = 0$

Le lemme 1.3 nous donne : soit $g \in G^\alpha$, soit $g \in TG^\alpha$. Le
 lemme 1.4 et la proposition 1.1 nous permettent de conclure.

Remarque : Nous pouvons remplacer dans l'énoncé du lemme 1.5 G par U et G^α par U^α .

1.4 MAXIMALITE DE $N_G(G^\alpha)$ LORSQUE $p \sim q$

Théorème 1.2 : Soient A une C^* -algèbre simple avec unité, p et q deux projecteurs équivalents de A de somme 1. Alors G^α est d'indice 2 dans $N_G(G^\alpha)$ et $N_G(G^\alpha)$ est un sous-groupe maximal dans G .

Preuve ; La première affirmation résulte de la proposition 1.1.

Soit $g \in G - N_G(G^\alpha)$ (non vide par le lemme 1.2). Pour tout $0 < \delta < 1 / \|g\| \|g^{-1}\|$, il existe par le lemme 1.5 deux unitaires $a \in U(A_p)^0$, $d \in U(A_q)^0$ avec $\|a - p\| < \delta$, $\|d - q\| < \delta$ tels que $\tilde{g} = g(a + d)g^{-1} \in \langle N_G(G^\alpha), g \rangle - N_G(G^\alpha)$ donc :

$\tilde{g}((p\tilde{g}p)^{-1} + (q\tilde{g}q)^{-1}) = p + p\tilde{g}q(q\tilde{g}q)^{-1} + q\tilde{g}p(p\tilde{g}p)^{-1} + q$
 appartient à $\langle N_G(G^\alpha), g \rangle - N_G(G^\alpha)$. En prenant δ suffisamment petit, on peut donc supposer que g est un élément de la forme $\begin{pmatrix} p & g_2 \\ g_3 & q \end{pmatrix}$ avec $\|g^{-1}\|$ petit.

Soit $N = \{y \in qA_p \text{ tel que } 1 + y \in \langle N_G(G^\alpha), g \rangle\}$.

1) Montrons que N est non nul :

1^{er} cas : Si $g_2 = 0$; alors $g_3 \in N$ et $g_3 \neq 0$ (car $g \notin N_G(G^\alpha)$).

2^{ème} cas : Si $g_3 = 0$; p et q étant des projecteurs équivalents, il existe $v, w \in A$ tels que $p = vw$, $q = wv$,

$$v = pvq, w = qwp.$$

Comme

$$\begin{pmatrix} 0 & v \\ w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & g_2 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & v \\ w & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ wg_2w & q \end{pmatrix}$$

appartient à $\langle N_G(G^\alpha), g \rangle$ alors $0 \neq wg_2w \in N$ (car $g \notin N_G(G^\alpha)$).

3^{ème} cas : Si $g_2 \neq 0$ et $g_3 \neq 0$; alors

$$\begin{pmatrix} p & g_2 \\ g_3 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}p & 0 \\ 0 & (q+g_3g_2)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & g_2 \\ g_3 & q \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$$

où $x = -\frac{1}{2}(p + g_2g_3) + 2g_2(q + g_3g_2)^{-1}g_3$ est inversible dans A_p

$z = q - g_3g_2$ est inversible dans A_q

$y = -\frac{1}{2}g_3(p + g_2g_3) + 2(q + g_3g_2)^{-1}g_3 \neq 0$

(sinon $(q + g_3g_2)g_3(p + g_2g_3) = 4g_3$ et donc $g_3 = 0$)

On a alors

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ yx^{-1} & q \end{pmatrix} \in \langle N_G(G^\alpha), g \rangle$$

ce qui implique $yx^{-1} \in N$ où $yx^{-1} \neq 0$.

2) Montrons que $N = qAp$.

De même que dans la démonstration du théorème 1.1, N est un $GL(A_q)^0 \otimes GL(A_p^{opp})^0$ -sous module à gauche de qAp et par le point 1) N est non nul. La remarque (2) suivant le lemme 1.2 nous permet de conclure $N = qAp$.

Les projecteurs p et q étant équivalents nous voyons donc que les trois groupes G_1, G_2, G_3 définis au lemme 1.1 appartiennent à $\langle N_G(G^\alpha), g \rangle$ et donc $G = \langle N_G(G^\alpha), g \rangle$.

1.5 UNE GENERALISATION AUX C^* -ALGÈBRES NON SIMPLÉS

Soient A une C^* -algèbre avec unité, K un idéal bilatère de A tel que A/K soit une C^* -algèbre simple non nulle, $\pi : A \rightarrow A/K$ la projection canonique ($\pi(1) = 1$), p et q deux projecteurs de A/K de somme 1.

Soient $G'_K = \{ x \in G ; qx \in K, x^{-1}p \in K \}$
 $G^\alpha_K = \{ x \in G ; pxq \in K, x \in K \}$; $U^\alpha_K = G^\alpha_K \cap U$

Remarque : On a $pAq \not\subset K$ (lemme 1.2).

Lemme 1.6 : Avec les notations ci-dessus :

$$GL(\pi(A))^0 = \pi(GL(A)^0) ;$$

$$U(\pi(A))^0 = \pi(U(A)^0)$$

Preuve : Tout $x \in GL(\pi(A))^0$ suffisamment proche de 1 a une décomposition polaire de la forme $e^y e^s$ où $y, s \in \pi(A)$ avec $y^* = -y$, $s^* = s$. Soient $r, t \in A$ tels que $r^* = -r$, $t^* = t$, $\pi(r) = y$, $\pi(t) = s$, alors $x = \pi(e^r e^t) \in \pi(GL(A)^0)$. L'inclusion inverse est facile. La preuve vaut pour U .

Proposition 1.2 : Soient A, K, π comme ci-dessus.

Si H est un sous-groupe de $GL(A)^0$ contenant $\{ x \in GL(A)^0 ; x - 1 \in K \}$ tel que $\pi(H)$ soit un sous-groupe maximal dans $GL(\pi(A))^0$ alors H est un sous-groupe maximal dans $GL(A)^0$.

Preuve : Il y a une correspondance bijective entre les

sous-groupes de $GL(\pi(A))^{\circ}$ et ceux de $GL(A)^{\circ}$ contenant le noyau de $\pi: GL(A)^{\circ} \rightarrow GL(\pi(A))^{\circ}$ ([Bo], Alg IV, Livre II, Ch 1, § 6, n° 13, Th 6).

Généralisation 1.1 : Soient A et K comme ci-dessus, p et q deux projecteurs de A de somme 1 et n'appartenant pas à K.

Alors G'_{κ} est un sous-groupe maximal dans G.

Preuve : Résulte du théorème 1.1 appliqué à $\pi(A)$, du lemme 1.6 et de la proposition 1.2.

Généralisation 1.2 : Soient A, K, π comme ci-dessus, p et q deux projecteurs de A de somme 1 tels que $\pi(p) \sim \pi(q)$.

Alors G^{α}_{κ} est d'indice 2 dans $N_G(G^{\alpha}_{\kappa})$ et $N_G(G^{\alpha}_{\kappa})$ est un sous-groupe maximal dans G.

Preuve : Résulte de la proposition 1.1 et du théorème 1.2 appliqués à $\pi(A)$ et du lemme 1.6 et de la proposition 1.2.

CHAPITRE 2

QUELQUES SOUS-GROUPES MAXIMAUX DU GROUPE UNITAIRE D'UNE C^* -ALGÈBRE A.F. OU D'UN FACTEUR

Notations :

Soient A une C^* -algèbre avec unité, p et q deux projecteurs non nuls de A de somme 1.

- Si p est équivalent à q dans A alors il existe un élément dans pAq que nous notons $E_{pq} = (E_{qp})^*$ tel que $p = E_{pq}(E_{pq})^*$, $q = (E_{pq})^*E_{pq}$ (pour l'existence d'un tel élément : [Go] Prop. 19.1 p 147).

- $p \prec q$ signifie que p est équivalent dans A à un sous-projecteur de q .

- $G(p) = GL(A_p)^0$ et $U(p) = U(A_p)^0$.

- $U(p) \times U(q) = \{ x \in U(p+q) ; x = u + v, u \in U(p), v \in U(q) \}$

2.1. LEMES PRELIMINAIRES

Dans ce paragraphe A est une C^* -algèbre avec unité, p et q deux projecteurs non nuls, $U^\alpha = \{x \in U; qxpx = 0, pxq = 0\}$

Lemme 2.1 : Soient p et q deux projecteurs de A de somme 1, $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in U$ avec $x_1 \in G(p)$, $x_4 \in G(q)$. Alors il existe deux unitaires $u \in U(p)$, $v \in U(q)$ tels que :

$$\begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & v^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p - x_3^* x_3} & -x_3^* \\ x_3 & \sqrt{q - x_3 x_3^*} \end{pmatrix}$$

appartienne au groupe engendré par U^α et x .

Notation : Si $p + q = 1$, $y \in qAp$ avec $\|y\| < 1$ nous désignons par $V(y)$ ou parfois $V_{pq}(y)$ l'unitaire :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{p - y^* y} & -y^* \\ y & \sqrt{q - y y^*} \end{pmatrix}$$

Preuve : L'élément x étant unitaire on a $x_4^* x_1 = p - x_3^* x_3$ et comme x_1 est inversible il existe $u \in U(p)$ tel que $x_1 = u \sqrt{x_1^* x_1} = u \sqrt{p - x_3^* x_3}$. De même il existe $v \in U(q)$ tel que $x_4 = v \sqrt{q - x_2^* x_2}$.

L'égalité $q = x_3 x_3^* + x_4 x_4^* = x_3 x_3^* + v(q - x_2^* x_2)v^*$ implique $x_2^* x_2 = v^* x_3 x_3^* v$.

La relation $x_2^* x_4 + x_4^* x_3 = 0$ nous donne :

$$\begin{aligned} x_2 &= -(x_1^{-1})^* x_3^* x_4 \\ &= -u(p - x_3^* x_3)^{-1/2} x_3^* v \sqrt{q - (x_3^* v)^* (x_3^* v)} \\ &= -u(p - x_3^* x_3)^{-1/2} \sqrt{p - (x_3^* v)(x_3^* v)^*} x_3^* v \\ &= -u x_3^* v \end{aligned}$$

$$\text{et } x_4 = v \sqrt{q - x_2^* x_2} = v \sqrt{q - v^* x_3 x_3^* v} = \sqrt{q - x_3 x_3^*} v.$$

On a alors :

$$\begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & v^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p-x_3^*x_3} & -x_3^* \\ x_3 & \sqrt{q-x_3x_3^*} \end{pmatrix}$$

Lemme 2.2 : Soient p et q des projecteurs de A de somme 1, alors $\langle U^{\alpha}, v(E_{qp} \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle = U$.

Preuve : Soit $\tilde{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} p & iE_{pq} \\ E_{qp} & -iq \end{pmatrix} = \sigma(p-iq)$ où $\sigma = v(E_{qp} \frac{1}{\sqrt{2}})$.

1) Soit x un élément autoadjoint de A_p de norme strictement inférieure à 1 alors $u = \sqrt{p-x^2} + ix \in U(p)$ et

$$\tilde{\sigma}^{-1} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & E_{qp} u^* E_{pq} \end{pmatrix} \tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sqrt{p-x^2} & -x E_{pq} \\ E_{qp} x & E_{qp} \sqrt{p-x^2} E_{pq} \end{pmatrix} = v(E_{qp} x)$$

appartient à $\langle U^{\alpha}, \sigma \rangle$.

2) Soit $y \in A_p$ avec $\|y\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors

$$\tilde{\sigma} v(E_{qp} y) \tilde{\sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} a & c E_{pq} \\ E_{qp} b & E_{qp} a^* E_{pq} \end{pmatrix}$$

où $a = \frac{1}{2} (\sqrt{p-y^*y} + iy + iy^* + \sqrt{p-yy^*}) \in G(p)$

car $\|y\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$b = \frac{1}{2} (\sqrt{p-y^*y} - iy + iy^* - \sqrt{p-yy^*}) = b^*$, $\|b\| < 1$.

Le lemme 2.1 donne l'existence de deux unitaires $u \in A_p$, $v \in A_q$ tels que

$$\begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c E_{pq} \\ E_{qp} b & E_{qp} a^* E_{pq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & v^* \end{pmatrix} = v(E_{qp} b)$$

Comme b est autoadjoint le point 1) implique $v(E_{qp} b) \in \langle U^{\alpha}, \sigma \rangle$ et donc $v(E_{qp} y) \in \langle U^{\alpha}, \sigma \rangle$. Le lemme 2.1 montre alors que tout élément unitaire suffisamment proche de l'identité appartient à $\langle U^{\alpha}, \sigma \rangle$. Le groupe U étant

connexe nous avons la conclusion $\langle U^\alpha, \sigma \rangle = U$.

Lemme 2.3 : Soient p et q des projecteurs équivalents de A de somme 1. Soient e un sous-projecteur non nul de p ($e \in A$) et c un élément inversible dans A_e tel que $\|c\| < \frac{2}{3}$, alors :

$$V(E_{qp} \frac{1}{\sqrt{2}} e) \in \langle U^\alpha, V(E_{qp} c) \rangle$$

Preuve : Soit $c = ux$ la décomposition polaire de c , où $u \in U(A_e)$ et $x = (c^*c)^{1/2} \in A_e$ avec $\|x\| < \frac{2}{3}$. On a :

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & E_{qp}(u^*+p-e)E_{pq} \end{pmatrix} V(E_{qp}c) \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & E_{qp}(u+p-e)E_{pq} \end{pmatrix} = V(E_{qp}x)$$

qui appartient à $\langle U^\alpha, V(E_{qp}c) \rangle$.

Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $v = \sin \frac{\pi}{4^m}$ et $v e < 4x(p-x^2)^{1/2}$. Alors $a = \frac{1}{2}(x)_e^{-1}(p-x^2)^{1/2} [(4x^2(p-x^2) - v^2e)^{1/2} + 1]ve + p - e$ est un unitaire de A_p .

On a :

$$-i V(E_{qp}x) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & E_{qp}a^*E_{pq} \end{pmatrix} [V(E_{qp}x)]^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & \beta E_{pq} \\ E_{qp} \gamma & E_{qp} \delta^* E_{pq} \end{pmatrix}$$

où $\delta = -i(\sqrt{p-x^2} a \sqrt{p-x^2} + xa^*x) \in G(p)$

$$\gamma = -i(xa \sqrt{p-x^2} - \sqrt{p-x^2} a^*x) = \sin \frac{\pi}{4^m} e \in A_e.$$

Le lemme 2.1 montre que $V(E_{qp} \sin \frac{\pi}{4^m} e) \in \langle U^\alpha, V(E_{qp}c) \rangle$ et donc $V(E_{qp} \frac{1}{\sqrt{2}} e) = [V(E_{qp} \sin \frac{\pi}{4^m} e)]^m \in \langle U^\alpha, V(E_{qp}c) \rangle$.

Lemme 2.4 : Soient p, q', q'' trois projecteurs non nuls de A , orthogonaux et de somme 1 tels que $p \sim q'$ et soit $H = \langle U(p) \times U(q' + q''), U(p + q') \times U(q'') \rangle$, alors $H = U$.

Preuve : Soit $q = q' + q''$: Grâce au lemme 2.1 et à la connexité de U il suffit de montrer que $V(z)$ appartient à H, ceci pour tout $z \in qAp$ où $\|z\|$ est petit.

Soient $x = q'zp$, $y = q''zp$, $t = y(\sqrt{p-x^*x})_p^{-1}$ et X, Y, W comme suit (dans la décomposition $p + q' + q'' = 1$):

$$X = \begin{pmatrix} \sqrt{p-x^*x} & -x^* & 0 \\ x & \sqrt{q'-xx^*} & 0 \\ 0 & 0 & q'' \end{pmatrix} \in H$$

$$Y = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & E_{q'p} \sqrt{p-t^*t} E_{pq'} & -E_{q'p} t^* \\ 0 & t E_{pq'} & \sqrt{q''-tt^*} \end{pmatrix} \in H$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & E_{pq'} & 0 \\ E_{q'p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q'' \end{pmatrix} \in H$$

Donc $WYW^*X = \begin{pmatrix} * & * & * \\ x & * & * \\ y & * & * \end{pmatrix} \in H$ et dans la décomposition $p + q = 1$:

$$WYW^*X = \begin{pmatrix} * & * \\ z & * \end{pmatrix}$$

est un élément de H qui est proche de 1 si $\|z\|$ est petit. Grâce au lemme 2.1 nous pouvons conclure que $V(z)$ appartient à H.

2.2 SOUS-GROUPES MAXIMAUX DU GROUPE UNITAIRE D'UN FACTEUR

Dans ce paragraphe: M désigne un facteur (à préduel

séparable), U le groupe unitaire de M (U est connexe, [Ru] Th.12.37), p et q deux projecteurs non nuls de M de somme 1.

Définitions:

1. Si M est un facteur infini semi-fini muni d'une trace τ normale semi-finie fidèle, soient:

$$F = \left\{ x \in M ; \text{il existe un projecteur } E \in M \text{ tel que } \tau(E) < \infty \text{ et } x = ExE \right\}$$

F est l'idéal des éléments de rang fini dans M

$$K = \begin{cases} 0 & \text{si } M \text{ est un facteur de type } I_n, II_\lambda \text{ ou III} \\ \text{adhérence normique de } F & \text{si } M \text{ est un facteur de type } I_\infty \\ & \text{ou } II_\infty \end{cases}$$

K est l'idéal bilatère maximal formé des éléments compacts de M , M/K est donc une algèbre simple.

2. Si $g \in M$, $Sp(g)$ désigne le spectre de g et $Sp_e(g)$ désigne le spectre essentiel de g , c'est-à-dire le spectre de la projection de g dans l'algèbre de Caikin M/K .

$$3. U^\alpha = \{ x \in U ; pxq = 0, qxp = 0 \}$$

$$U_K^\alpha = \{ x \in U ; pxq \in K, qxp \in K \}$$

$$N_U(U_K^\alpha) \text{ le normalisateur de } U_K^\alpha \text{ dans } U.$$

2.2.1 Etude du normalisateur de U_K^α

Proposition 2.1 : Soient M un facteur, p et q deux projecteurs non nuls de M , équivalents et de somme 1, alors

$$N_U(U_K^\alpha) = U_K^\alpha \cup TU_K^\alpha$$

$$\text{où } TU_K^\alpha = \{ x \in U ; pxp \in K, qxq \in K \}$$

Preuve : C'est en fait un corollaire de la proposition 1.1.

2.2.2 Maximalité de $N_u(U_K^w)$ lorsque $p \sim q$

Lemme 2.5 : Soient M un facteur et e un projecteur de M tel que $e \neq 1$ et $e \notin K$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ et des projecteurs e_i non nuls orthogonaux équivalents de M ($i = 0, 1, \dots, N$) tels que $1 - e_0 = \sum_{i=1}^N e_i$ avec $e_0 \leq e$, $e_0 \notin K$ et $1 - e_0 \notin K$.

Preuve : (1) Si M est de type I_n ou II_1 muni d'une trace τ normale finie fidèle normalisée :

Il existe $m \in \mathbb{N}$ ($m = n$ si M est de type I_n) et un sous-projecteur e_0 de e tel que $\tau(e_0) = \frac{\tau(1)}{m} < \tau(e)$. Nous avons $\tau(1 - e_0) = (m - 1) \frac{\tau(1)}{m}$ donc $1 - e_0$ est la somme de $m - 1$ projecteurs orthogonaux e_i de trace $\frac{\tau(1)}{m}$ donc équivalents à e_0 ($N = m - 1$).

(2) Si M est de type I_∞ ou II_∞ :

Le projecteur e est la somme de deux projecteurs équivalents orthogonaux e_0 et e'_0 où $e_0, e'_0 \notin K$ ([D1] Ch.III, §1, n°2, Cor.3). Nous avons $e'_0 \leq 1 - e_0$ donc $1 - e_0 \notin K$ et $1 - e_0$ est alors un projecteur équivalent à e_0 , car tous deux de trace infinie ([D1] Ch.III, §8, n°6, Cor.5).

(3) Si M est de type III :

On peut choisir $e_0 = e$ et comme $1 - e_0 = 1 - e \neq 0$ nous avons donc $1 - e_0 \sim e_0$ ($N = 1$).

Lemme 2.6 : Soient p et q deux projecteurs équivalents de somme 1 d'un facteur M , et e un sous-projecteur non nul de p vérifiant $e \notin K$, alors $\langle U^{\alpha}, V(E_{qp} \frac{1}{\sqrt{2}} e) \rangle = U$.

Preuve : Si $e = p$; le lemme 2.2 permet de conclure.

Si $e \neq p$; soient N et e_0, e_1, \dots, e_N comme au lemme 2.5 (appliqué à M_p). Le lemme 2.2 appliqué à

$M_e + E_{qp} e E_{pq}$ implique :

$$\langle U^{\alpha}, V(E_{qp} \frac{1}{\sqrt{2}} e) \rangle \supset U(e + E_{qp} e E_{pq}) \times U(p - e) \times U(E_{qp}(p - e)E_{pq}).$$

Nous avons alors : $V(E_{qp} \frac{1}{\sqrt{2}} e_0) \in \langle U^{\alpha}, V(E_{qp} \frac{1}{\sqrt{2}} e) \rangle$.

Soient $E_{0j} = (E_{j0})^*$ des isométries partielles de M reliant e_0 et e_j

et $W_j = E_{0j} + E_{j0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N E_{ii} + E_{qp}(E_{0j} + E_{j0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N E_{ii})E_{pq}$ qui

appartient à U^{α} ($j = 1, \dots, N$). Alors

$$V(E_{qp} \frac{1}{\sqrt{2}} e_0) W_1 V(E_{qp} \frac{1}{\sqrt{2}} e_0) W_1^* \dots W_N V(E_{qp} \frac{1}{\sqrt{2}} e_0) W_N^* = V(E_{qp} \frac{1}{\sqrt{2}} e)$$

appartient aussi à $\langle U^{\alpha}, V(E_{qp} \frac{1}{\sqrt{2}} e) \rangle$.

Grâce au lemme 2.2 nous obtenons la conclusion cherchée.

Lemme 2.7 : Soit M un facteur et $z = z^* \in M-K$ avec $\|z\| < 1$. Alors il existe un projecteur $e \in M-K$ tel que $ze \sqrt{1 - z^2}$ soit un élément inversible dans M_e .

Preuve : Soient $z = \int_{S_p(z)} \lambda dE(\lambda)$ la décomposition spectrale de z et λ' la plus grande valeur spectrale (essentielle si M est de type I_{∞} ou II_{∞}) en module de z . Soient $\varepsilon > 0$ tel que $0 < |\lambda' - \varepsilon| < |\lambda'| < |\lambda' + \varepsilon| < 1$ et $e = E([\lambda' - \varepsilon, \lambda' + \varepsilon])$. L'élément $ze \sqrt{1 - z^2} = \int_{[\lambda' - \varepsilon, \lambda' + \varepsilon]} \lambda \sqrt{1 - \lambda^2} dE(\lambda)$ est inversible dans M_e .

Lemme 2.8 : Soient M un facteur, p et q deux projecteurs de M équivalents de somme 1, $z = z^* \in M_p$ avec $z \notin K$ et $\|z\| < \frac{1}{3}$, alors $\langle U^{\alpha}, V(E_{qp} z) \rangle = U$.

Preuve : Soient e comme au lemme 2.7 et $J = 1 - 2e \in U^{\alpha}$. Le produit $JV(E_{qp} z)J^{-1}\{V(E_{qp} z)\}^{-1}$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a & bE_{pq} \\ E_{qp}c & E_{qp}dE_{pq} \end{pmatrix}$$

où a et d sont inversibles dans M_p car $\|z\| < \frac{1}{3}$ et $c = -2ze\sqrt{1-z^2}$ est aussi inversible dans M_e . Par le lemme 2.1 on a $V(E_{qp}c) \in \langle U^{\alpha}, V(E_{qp} z) \rangle$ et les lemmes 2.3 et 2.6 nous permettent de conclure.

Lemme 2.9 : Soient M un facteur, p et q deux projecteurs équivalents de M de somme 1. Si $x \in M_p$ vérifie $x \notin K$ et $\|x\| < \frac{1}{6}$, il existe $z \in M_p$ avec $z = z^* \notin K$ et $\|z\| < \frac{1}{3}$ tel que $V(E_{qp} z) \in \langle N_{\alpha}(U_K^{\alpha}), V(E_{qp} x) \rangle$.

Preuve : Soient $J = E_{pq} - E_{qp}$, $L = E_{pq} + E_{qp}$ et $Z_1 = V(E_{qp} x)JV(E_{qp} x)J^*$, $Z_2 = iV(E_{qp} x)LV(E_{qp} x)L^*$ ($J, L \in N_{\alpha}(U_K^{\alpha})$).

Nous avons : $\|Z_1 - 1\| < 2\|V(E_{qp} x) - 1\| < 1$ car $\|x\| < \frac{1}{6}$, de même $\|Z_2 - 1\| < 1$.

$$\text{Alors : } qZ_1p = E_{qp}(\sqrt{p - xx^*}x^* + x\sqrt{p - xx^*}) = E_{qp}z_1$$

$$qZ_2p = E_{qp}(-i\sqrt{p - xx^*}x^* + ix\sqrt{p - xx^*}) = E_{qp}z_2$$

$$\text{où } z_j = z_j^* \in M_p \text{ avec } \|z_j\| < \frac{1}{3} \quad (j = 1, 2).$$

Nous ne pouvons avoir z_1 et z_2 dans K sinon $z_1 - iz_2 = 2x\sqrt{p - xx^*} \in K$ ce qui implique $x \in K$.

Il existe donc $Z \in \langle N_{\alpha}(U_K^{\alpha}), V(E_{qp} x) \rangle$ (Z est soit Z_1 soit Z_2)

de la forme $\begin{pmatrix} * & * \\ E_{qp} z & * \end{pmatrix}$ avec $\|z - 1\| < 1$, $z = z^* \notin K$ et $\|z\| < \frac{1}{3}$.

Le lemme 2.1 nous permet de conclure $V(E_{qp} z) \in \langle N_u(U_K^\alpha), V(E_{qp} x) \rangle$.

Théorème 2.1 : Soient M un facteur, p et q deux projecteurs de M , équivalents de somme 1.

Alors U_K^α est d'indice 2 dans $N_u(U_K^\alpha)$ et $N_u(U_K^\alpha)$ est un sous-groupe maximal du groupe unitaire U de M .

Preuve : La proposition 1.1 donne la première affirmation.

Soient $g \in U - N_u(U_K^\alpha)$ et π la projection canonique $M \rightarrow M/K$ ($\pi(A)$ est alors une C^* -algèbre simple et $U(\pi(A))^0 = \pi(U(A))$ par le lemme 1.6).

Le lemme 1.5 appliqué à $\pi(A)$ montre l'existence de $a \in U(p)$ et $d \in U(q)$ avec $\|a - p\| < \frac{1}{6}$ et $\|d - q\| < \frac{1}{6}$ tels que $x = g(a + d)g^{-1} \in \langle N_u(U_K^\alpha), g \rangle - N_u(U_K^\alpha)$.

Alors x est un élément de la forme $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ où $\|x - 1\| < \frac{1}{6}$, et on peut supposer de plus que $x_3 \notin K$ (sinon on considère x^*). Le lemme 2.1 donne alors $V(x_3) \in \langle U^\alpha, x \rangle$.

Comme $x_3 \notin K$ et $\|x_3\| < \frac{1}{6}$ nous pouvons appliquer successivement les lemmes 2.9 et 2.8, d'où $\langle N_u(U_K^\alpha), V(x_3) \rangle = U$.

2.2.3 Maximalité de U^α lorsque $p \not\sim q$

Lemme 2.10 : Soient M un facteur fini et $c \in M$, alors il existe un unitaire $u \in M$ tel que cu soit un élément

autoadjoint.

Preuve : Soit $c = v|c|$ la décomposition polaire de c où $v, |c| \in M$. Les projecteurs finis v^*v et vv^* étant équivalents, il existe une isométrie partielle $w \in M$ telle que $w^*w = 1 - v^*v$, $ww^* = 1 - vv^*$ ([D1], Ch.III, § 2, n°3, Prop.6). Soit l'unitaire $u = v^* + w^* \in M$ alors $cu = u^*c^*$.

Lemme 2.11 : Soient M un facteur semi-fini continu (resp. discret) muni d'une trace τ normale semi-finie fidèle (resp. avec la trace des projecteurs minimaux valant 1), un projecteur q non nul de M , un opérateur positif P de M_q tel que $P \neq q$.

Soit d un nombre réel (resp. entier) tel que $0 < d \leq \tau(q)$, alors il existe un sous-projecteur q' de q , commutant à P tel que $\tau(q') = d$ et $q'Pq' \neq q'$.

Preuve : Soient $(q_j)_{j=1..n}$ des projecteurs orthogonaux équivalents de somme q , commutant à P tels que $\tau(q_j) \leq d$ (n pouvant être infini). Si $q'Pq' = q'$ pour tout projecteur q' commutant à P avec $\tau(q') = d$ alors $\tilde{q}P\tilde{q} = \tilde{q}$ pour tout projecteur \tilde{q} commutant à P avec $\tau(\tilde{q}) \leq d$. On a donc $q_jPq_j = q_j$ ($\forall j = 1, \dots, n$) ce qui implique $qPq = q$ contrairement à l'hypothèse.

Théorème 2.2 : Soient M un facteur, p et q deux projecteurs non nuls de M , non équivalents et de somme 1. Alors $N_U(U^\alpha) = U^\alpha$ est un sous-groupe maximal du groupe unitaire U .

Preuve : L'égalité $N_u(U^\alpha) = U^\alpha$ résulte de la Proposition 1.1.

Comme $p \neq q$ nous supposons par exemple $p \prec q$. Soit $g \in U - U^\alpha$. La remarque suivant le lemme 1.5 nous donne l'existence de deux unitaires $a \in U(p)$ et $d \in U(q)$ avec $\|a - p\| < \frac{1}{6}$ et $\|d - q\| < \frac{1}{6}$ tels que $x = g(a + d)g^{-1} \in \langle U^\alpha, g \rangle - U^\alpha$ avec $\|x - 1\| < \frac{1}{6}$.

Nous pouvons supposer que $y = qxp \neq 0$ (sinon on considère x^*). Le lemme 2.1 implique alors $V(y) \in \langle U^\alpha, g \rangle$ où $0 < \|y\| < \frac{1}{6}$.

L'opérateur $\sqrt{q - yy^*}$ étant positif ($\neq q$) il existe un sous-projecteur q' de q , équivalent à p , commutant à $\sqrt{q - yy^*}$ tel que $q' \sqrt{q - yy^*} q' \neq q'$ (lemme 2.11).

Soient $q'' = q - q'$, $y_1 = q'yp$, $y_2 = q''yp$

$$d_1 = q' \sqrt{q - yy^*} q', \quad d_2 = q'' \sqrt{q - yy^*} q''$$

L'élément $V(y)$ dans la décomposition $p + q' + q'' = 1$ a la forme :

$$V(y) = \begin{pmatrix} \sqrt{p - y_1 y_1^* - y_2 y_2^*} & -y_1^* & -y_2^* \\ y_1 & d_1 & 0 \\ y_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

Les conditions d'unitarité de $V(y)$ donnent :

$$d_1 = \sqrt{q' - y_1 y_1^*}$$

$$d_2 = \sqrt{q'' - y_2 y_2^*}$$

$$y_2 y_1^* = 0$$

Remarquons que $y_1 \neq 0$ car $d_1 \neq q'$.

Soit $J = p + q' - q'' \in U^\alpha$. Grâce aux conditions d'unitarité, nous avons :

$$V(y)JV(y)J^* = \begin{pmatrix} p - 2y_1^* y_1 & -2\sqrt{p - y_1^* y_1} y_1^* & 0 \\ 2y_1 \sqrt{p - y_1^* y_1} & q' - 2y_1 y_1^* & 0 \\ 0 & 0 & q'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ E_{q'p}^1 c & * & 0 \\ 0 & 0 & q'' \end{pmatrix}$$

avec $\|V(y)JV(y)J^* - 1\| \leq 2\|V(y) - 1\| < 1$

et $c = E_{p q'}^1 2y_1 \sqrt{p - y_1^* y_1} \neq 0$, $\|c\| < \frac{1}{3}$.

Soit $u \in U(M_p)$ tel que $z = cu$ soit un élément autoadjoint de M_p (lemme 2.10). Nous avons alors :

$$V(y)JV(y)J^*(u + q' + q'') = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ E_{q'p}^1 z & * & 0 \\ 0 & 0 & q'' \end{pmatrix} \in \langle U^{\alpha}, g \rangle$$

et grâce au lemme 2.1 :

$$z = \begin{pmatrix} \sqrt{p - z^2} & -zE_{p q'}^1 & 0 \\ E_{q'p}^1 z & E_{q'p}^1 \sqrt{p - z^2} E_{p q'}^1 & 0 \\ 0 & 0 & q'' \end{pmatrix} \in \langle U^{\alpha}, g \rangle$$

où $z = z^* \in M_p$, $z \neq 0$, $\|z\| < \frac{1}{3}$.

Par le lemme 2.8 on a : $\langle U^{\alpha}, z \rangle \supset U(p + q') \times U(q'')$.

Donc $U(p + q') \times U(q'')$ et $U(p) \times U(q' + q'')$ sont des sous-groupes de $\langle U^{\alpha}, g \rangle$ qui engendrent U (lemme 2.4), alors $\langle U^{\alpha}, g \rangle = U$.

2.3. SOUS-GROUPES MAXIMAUX DU GROUPE UNITAIRE D'UNE C^* -ALGÈBRE A.F. SIMPLE

Dans ce paragraphe A est une C^* -algèbre A.F. simple avec unité; A est donc la fermeture normique d'une réunion croissante de $*$ -sous-algèbres de dimension finie A_n de A contenant toutes l'unité de A .

Nous notefons $A = \overline{\bigcup_{n \geq 1} A_n}$ où $A_n \cong \bigoplus_{j=1}^{r(n)} M_{n(j)}(\mathbb{C})$.

L'homomorphisme injectif unital $\varphi_n : \bigoplus_{j=1}^{r(n)} M_{n(j)}(\mathbb{C}) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{r(n+1)} M_{n+1(j)}(\mathbb{C})$ est décrit par une matrice $r(n+1)$ -fois- $r(n)$ d'entiers (κ_{ij}^n) . ([Go], Prop. 17.2, p 131).

Soient p et q deux projecteurs non nuls de A de somme 1.

Définitions : (1) Un projecteur $e \in A_m$ est plein dans A_m si $e = \bigoplus_{j=1}^{r(m)} e_{m,j}$ avec $0 \neq e_{m,j} \in M_{m(j)}(\mathbb{C})$ pour tout $j = 1, \dots, r(m)$.

(2) Un homomorphisme $\varphi_m : A_m \longrightarrow A_{m+1}$ est plein si $\varphi_m = (\kappa_{ij}^m)$ avec $\kappa_{ij}^m \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, r(m+1)$, $j = 1, \dots, r(m)$:

Dans toute la suite on se limite sans perte de généralité au cas d'une suite $A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} \dots$ où tous les φ_n sont pleins ([E] lemme A4.5 p 29).

Remarques : (1) Pour tout entier m et pour tout projecteur non nul $e \in A_m$, e est plein dans A_{m+1} .

(2) Le groupe $U(A)$ est connexe car

$$U(A) = \overline{\bigcup_{n \geq 1} U(A_n)}.$$

(3) L'algèbre A_p est aussi une C^* -algèbre A.F. simple ([E] lemme 9.4 p 60 et remarque (1) suivant le lemme 1.2).

2.3.1. Maximalité de $N_U(U^{\#})$ lorsque $p \sim q$

Lemme 2.12 : Soient B une $*$ -algèbre sur \mathbb{C} avec unité,

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & x_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & x_7 & x_8 \end{pmatrix} \in U_4(B) ; x_k \in B (k = 1, \dots, 8) \right\}$$

$$\text{et } \gamma = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in U_4(B),$$

alors

$$\langle D, \gamma \rangle = \langle D, \gamma D \gamma^{-1} \rangle \text{ et } \langle \bigoplus_{j=1}^n D_j, \bigoplus_{j=1}^n \gamma_j \rangle = \bigoplus_{j=1}^n \langle D_j, \delta_j \rangle$$

où $D_j = D, \delta_j = \gamma$ pour tout $j = 1, \dots, n$.

Preuve : Soient $J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in D$ et $R = \begin{pmatrix} e^{i\pi/4} & & & \\ & 1 & & \\ & & e^{-i\pi/4} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in D$.

Le produit $\gamma = J \gamma^{-1} R \gamma J^{-1}$ donne $\langle D, \gamma \rangle = \langle D, \gamma D \gamma^{-1} \rangle$. Le groupe $\langle \bigoplus_j D_j, \bigoplus_j \gamma_j \rangle$ contient $(\bigoplus_j \gamma_j)(D_A \oplus 1 \oplus \dots \oplus 1)(\bigoplus_j \gamma_j)^{-1}$ et $D_A \oplus 1 \oplus \dots \oplus 1$ donc aussi le groupe $\langle D_A, \delta_A \rangle \oplus 1 \oplus \dots \oplus 1$. En faisant varier j , nous obtenons la conclusion cherchée.

Lemme 2.13 : Soient A une C^* -algèbre A.F. simple avec unité, m un entier ≥ 1 , deux projecteurs équivalents p et q de A_m , de somme 1. Soient e un sous-projecteur non nul de p appartenant à A_m et $H = \langle U(p) \times U(q), V_{pq} (\frac{1}{\sqrt{2}} E_{qp} e) \rangle$, alors $H = U$.

Preuve : La C^* -algèbre A_p est A.F. simple avec unité p et e un projecteur plein dans $pA_{m+1}p$ (remarque (3) et (1) ci-dessus).

Pour $n = m+1$, soient $p = \bigoplus_{j=1}^{r(n)} p_{n,j}$ et $e = \bigoplus_{j=1}^{r(n)} e_{n,j} \in \bigoplus_{j=1}^{r(n)} M_{n(j)}(C)$, où $e_{n,j} \neq 0$ pour tout $j = 1, \dots, r(n)$ et soit ψ l'isomorphisme :

$$\psi \left\{ \begin{array}{l} U(A_{p+q}) \longrightarrow U_2(A_p) \\ \begin{pmatrix} a & b E_{pq} \\ E_{qp} c & E_{qp} d E_{pq} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Posons $D_j = U(P_{n,j} M_{n(j)} P_{n,j}) \times U(P_{n,j} M_{n(j)} P_{n,j})$ et

$$\gamma_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e_{n,j} + P_{n,j} - e_{n,j} & -\frac{1}{\sqrt{2}} e_{n,j} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e_{n,j} & \frac{1}{\sqrt{2}} e_{n,j} + P_{n,j} - e_{n,j} \end{pmatrix} \in U_2(A_p)$$

pour $j = 1, \dots, r(n)$.

Comme $A_p \supset \bigoplus_j P_{n,j} M_{n(j)} P_{n,j}$ alors l'image par ψ de H contient $\langle \bigoplus_j D_j, \bigoplus_j \gamma_j \rangle$ et donc $\bigoplus_j \langle D_j, \gamma_j \rangle$ (lemme 2.12).

Le lemme 2.6 appliqué pour chaque j au facteur $M_2(P_{n,j} M_{n(j)} P_{n,j})$ donne l'appartenance de :

$$\bigoplus_{j=1}^{r(n)} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} P_{n,j} & -\frac{1}{\sqrt{2}} P_{n,j} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} P_{n,j} & \frac{1}{\sqrt{2}} P_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} P & -\frac{1}{\sqrt{2}} P \\ \frac{1}{\sqrt{2}} P & \frac{1}{\sqrt{2}} P \end{pmatrix}$$

à $\psi(H)$. Ainsi $\bigvee_{p,q} (\frac{1}{\sqrt{2}} E_{qp}) \in H$, et $H = U$ par le lemme 2.2.

Lemme 2.14 : Soient A une C^* -algèbre A.F. avec unité, k un entier ≥ 1 , p et q deux projecteurs non nuls de A_k et $z \in qp$ avec $0 < \|z\| < 1$.

Alors il existe $m \in \mathbb{N}$, $m \geq k$, deux projecteurs non nuls e_1, e_2 équivalents de A_m tels que $e_1 \leq p$, $e_2 \leq q$, et deux unitaires $u_1 \in U(p)$, $u_2 \in U(q)$ avec la propriété suivante :

Il existe un élément inversible $c \in A_{e_1}$ tel que $u_2 z e_1 \sqrt{p - z^* z} u_1^* = E_{21} c$ où $E_{21} = (E_{12})^*$ est une isométrie partielle de A_m reliant e_1 et e_2 .

Si $p = q$ on peut choisir E_{21} unitaire dans $(A_m)_p$.

Preuve : Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $m \in \mathbb{N}$, $m \geq k$ et $a \in A_m$ tel que $\|z - a\| < \varepsilon$, $\|a\| = \|z\|$; alors si $z' = qp$ on a

$\|z - z'\| < \xi$ et $z' \in A_m$. Soit e_4 le projecteur spectral de z'^*z' correspondant à une valeur propre λ' de z'^*z' telle que $\lambda' = \|z'^*z'\|$ ($0 < \lambda' < 1$).

Soient $x = ze_4 \sqrt{p - z^*z}$; $x' = z'e_4 \sqrt{p - z'^*z'}$ $\in A_m$

f_4 (resp. f_2) le support initial (resp. final) de x

e_4 (resp. e_2) le support initial (resp. final) de x'

($e_4, e_2 \in A_m$ et $e_4 \leq p, e_2 \leq q$).

1) Par choix de ξ nous avons :

$\|e_4 z^* z e_4 (e_4 z'^* z' e_4)^{-1/2} - e_4\| < 1$ donc $e_4 z^* z e_4$ est inversible dans A_{e_4} .

2) Montrons que f_2 (resp. f_4) est arbitrairement proche de e_2 (resp. e_4) par choix de ξ :

Soient $v = ze_4 (e_4 z^* z e_4)^{-1/2}$ et $v' = z'e_4 (e_4 z'^* z' e_4)^{-1/2} \in A_m$ (v existe par 1)), alors :

$$v^*v = e_4, vv^* = \text{support final de } ze_4 = f_2$$

$$v'^*v' = e_4, v'v'^* = \text{support final de } z'e_4 = e_2$$

donc $f_2 = vv^*$ est arbitrairement proche de $v'v'^* = e_2$ par choix de ξ .

Soient $w = (e_4(p - z^*z)e_4)^{-1/2} e_4 \sqrt{p - z^*z}$ et

$$w' = (e_4(p - z'^*z')e_4)^{-1/2} e_4 \sqrt{p - z'^*z'}$$

alors $w w^* = e_4$, $w^*w = \text{support initial de } e_4 \sqrt{p - z^*z} = f_4$

$$w' w'^* = e_4, w'^*w' = \text{support initial de } e_4 \sqrt{p - z'^*z'} = e_4$$

donc $f_4 = w^*w$ est arbitrairement proche de $w'^*w' = e_4$ par choix de ξ .

3) Définissons les unitaires $u_4 \in U(p)$, $u_2 \in U(q)$:

Par le point 2) on a $\|f_4 - e_4\| < 1$, $\|f_2 - e_2\| < 1$ donc il existe deux unitaires $u_4 \in U(p)$ et $u_2 \in U(q)$ tels que $u_4 f_4 u_4^* = e_4$, $u_2 f_2 u_2^* = e_2$ ([E] Cor.A8.3 p 58).

Si $p = q$ alors e_4 et e_2 étant des projecteurs équivalents

dans $pA_m p \subset A_m$ sont unitairement équivalents ([D1] Prop.6, p 243); soit $u \in U(pA_m p)$ tel que $ue_1 u^* = e_2$.

Définissons $E_{2,4} = E_{A_2} = \begin{cases} v' & \text{si } p \neq q \\ u & \text{si } p = q \end{cases} \quad (E_{2,4} \in A_m)$

Nous avons $(E_{2,1})^* u_2 x u_1^* = E_{2,1}^* u_2 f_2 x f_1 u_1^* = E_{2,1}^* e_2 u_2 x u_1^* e_1 \in A_{e_4}$

4) Montrons que $E_{2,1}^* u_2 x u_1^*$ est inversible dans A_{e_4} :

L'élément xx^* est arbitrairement proche de $x'x'^* = (1 - \lambda')z'e_1 z'^* = (1 - \lambda')\lambda' e_2$ qui est inversible dans A_{e_2} . Donc par choix de ε nous avons :

$$\|u_2 xx^* u_2^* ((1 - \lambda')\lambda' e_2)^{-1} - e_2\| \leq \|u_2 (xx^* - (1 - \lambda')\lambda' e_2) u_2^*\| \frac{1}{(1 - \lambda')\lambda'}$$

$$\leq (\|xx^* - x'x'^*\| + (1 - \lambda')\lambda' \|e_2 - f_2\|) \frac{1}{(1 - \lambda')\lambda'} < 1$$

donc $u_2 xx^* u_2^*$ est inversible dans A_{e_2} .

L'inverse de $E_{2,1}^* u_2 x u_1^*$ est alors $u_1 x^* u_2^* (u_2 xx^* u_2^*)^{-1} E_{2,4} \in A_{e_4}$.

Lemme 2.15 : Soient A une C^* -algèbre A.F. simple avec unité, p et q deux projecteurs de A équivalents de somme 1. Si $z \in A_p$ vérifie $0 < \|z\| < \frac{1}{3}$, alors $\langle U^m, V(E_{qp} z) \rangle = U$.

Preuve : Il existe $k \in \mathbb{N}$ et un projecteur $\tilde{p} \in A_k$ tel que $\|p - \tilde{p}\| < 1$ et donc un unitaire $u \in A$ tel que $upu^* = \tilde{p}$ ([E] Cor.A8.3 p 58).

Notons $\tilde{q} = 1 - \tilde{p} \in A_k$ et $E_{\tilde{q}\tilde{p}} = (E_{\tilde{p}\tilde{q}})^*$ l'isométrie partielle $uE_{qp} u^*$ reliant \tilde{p} et \tilde{q} .

Posons $z' = uzu^* \in A_{\tilde{p}}$.

(Nous avons $uV(E_{qp} z)u^* = V_{\tilde{p}\tilde{q}}(E_{\tilde{q}\tilde{p}} uz'u^*) = V_{\tilde{p}\tilde{q}}(E_{\tilde{q}\tilde{p}} z')$).

Nous allons montrer que le groupe :

$u \langle U^m, V(E_{qp} z) \rangle u^* = \langle U(\tilde{p}) \times U(\tilde{q}), V_{\tilde{p}\tilde{q}}(E_{\tilde{q}\tilde{p}} z') \rangle$ est égal au groupe U .

Grâce au lemme 2.14, il existe $m \in \mathbb{N}$, $m \geq k$ et deux

projecteurs e_1 et e_2 non nuls équivalents de A_m , tels que $e_1 \in \tilde{p}$, $e_2 \in \tilde{p}$ et deux unitaires $u_1, u_2 \in U(A_{\tilde{p}})$ tels que $-2u_2 z' e_1 \sqrt{\tilde{p} - z'' z'} u_1^* = wc$ où c est inversible dans A_{e_1} avec $\|c\| < \frac{2}{3}$ et $w \in U((A_m)_{\tilde{p}})$.

Soient $W = u_1 + E_{\tilde{p}} w^* u_2 E_{\tilde{q}}$ et $J = \tilde{p} - 2e_1 + \tilde{q}$ ($\in U(\tilde{p}) \times U(\tilde{q})$), alors $W J V_{\tilde{q}}(E_{\tilde{p}} z') J^* V_{\tilde{p}}(E_{\tilde{q}} z'') W^*$ est un élément de $\langle U(\tilde{p}) \times U(\tilde{q}), V_{\tilde{q}}(E_{\tilde{p}} z') \rangle$ de la forme :

$$\begin{pmatrix} s & b E_{\tilde{p}} \tilde{q} \\ E_{\tilde{q}} c & E_{\tilde{q}} d E_{\tilde{p}} \tilde{q} \end{pmatrix}$$

où s et d sont inversibles dans $A_{\tilde{p}}$ car $\|z'\| < \frac{1}{3}$.

Le lemme 2.1 implique :

$$V_{\tilde{q}}(E_{\tilde{p}} c) \in \langle U(\tilde{p}) \times U(\tilde{q}), V_{\tilde{q}}(E_{\tilde{p}} z') \rangle.$$

Les lemmes 2.3 et 2.13 nous permettent de conclure $\langle U(\tilde{p}) \times U(\tilde{q}), V_{\tilde{q}}(E_{\tilde{p}} z') \rangle = U(\tilde{p} + \tilde{q})$.

Théorème 2.3 : Soient A une C^* -algèbre A.F. simple avec unité, p et q deux projecteurs équivalents de A , de somme 1.

Alors U^α est d'indice 2 dans $N_u(U^\alpha)$ et $N_u(U^\alpha)$ est un sous-groupe maximal dans U .

Preuve : L'égalité $N_u(U^\alpha) = U^\alpha \cup T U^\alpha$ résulte de la proposition 1.1. Soit $g \in U - N_u(U^\alpha)$.

La remarque suivant le lemme 1.5 nous donne l'existence de deux unitaires $a \in U(p)$, $d \in U(q)$ avec $\|a - p\| < \frac{1}{3}$ et $\|d - q\| < \frac{1}{3}$ tels que $x = g(a + d)g^{-1} \notin N_u(U^\alpha)$.

Nous avons $\|x - 1\| < \frac{1}{3}$ et $qxp = E_{q_p} z$ avec $z \in A_p$, $\|z\| < \frac{1}{3}$. On peut supposer z non nul (sinon on considère x^*) et nous obtenons $V(E_{q_p} z) \in \langle N_u(U^\alpha), g \rangle$

(lemme 2.1).

Le lemme 2.15 nous permet alors de conclure
 $\langle N_u(U^k), g \rangle = U$.

2.3.2. Maximalité de U^k lorsque $p \neq q$

Lemme 2.16 : Soient A une C^* -algèbre A.F. simple avec unité, k un entier ≥ 1 , p et q deux projecteurs non nuls de A_k de somme 1 et non équivalents.

Si H est un sous-groupe de U contenant strictement $U(p) \times U(q)$, alors H contient le sous-groupe dense $\bigcup_n U(A_n)$ de U .

Preuve : Grâce au lemme 1.5 et à la proposition 1.1 il existe dans $H - U(p) \times U(q)$ un élément de la forme $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ dans la décomposition $p + q = 1$, qui soit arbitrairement proche de l'identité. Nous avons alors $V_{pq}(z) \in H - U(p) \times U(q)$ (lemme 2.1).

Grâce au lemme 2.14 il existe $m \in \mathbb{N}$, $m \geq k$, deux projecteurs non nuls équivalents e_1 et e_2 de A_m tels que $e_1 \leq p$, $e_2 \leq q$ et deux unitaires $u_1 \in U(p)$, $u_2 \in U(q)$ tels que $-2u_2 z e_1 \sqrt{p - z^* z} u_1^* = E_{2,1} c$ où c est inversible dans A_{e_1} et $E_{2,1} = (E_{1,2})^*$ une isométrie partielle de A_m reliant e_1 et e_2 . Soient $W = u_1 + u_2$, $J = p - 2e_1 + q$ deux unitaires de $U(p) \times U(q)$ alors $WJV_{pq}(z)J^*V_{pq}(z)^*W^* = \begin{pmatrix} * & * \\ E_{2,1}c & * \end{pmatrix} \in H$ et est un élément proche de 1 si $\|z\|$ est suffisamment petit. Nous avons donc $V_{pq}(E_{2,1}c) \in H$ (lemme 2.1) et le lemme 2.3 donne :

$v_{e_1 e_2} (\frac{1}{\sqrt{2}} E_{2,1} e_1) \in \langle U(e_1) \times U(e_2), v_{e_1 e_2} (E_{2,1} c) \rangle \subset U(e_1 + e_2)$.

Comme $v_{pq} (E_{2,1} c) = v_{e_1 e_2} (E_{2,1} c) + p - e_1 + q - e_2$, l'élément :

$\gamma = v_{pq} (\frac{1}{\sqrt{2}} E_{2,1} e_1) = v_{e_1 e_2} (\frac{1}{\sqrt{2}} E_{2,1} e_1) + p - e_1 + q - e_2$
appartient à $\langle U(p) \times U(q), v_{pq} (E_{2,1} c) \rangle \subset H$ et $\gamma \in U(A_m)$.

Nous avons alors $\langle U(p) \times U(q), \gamma \rangle \subset H$ où e_1 est un projecteur plein dans A_{m+1} (remarque (1) § 2.3).

Pour tout $n \geq m + 1$, soient :

$$p = \bigoplus_{j=1}^{r(n)} p_{n,j} ; q = \bigoplus_{j=1}^{r(n)} q_{n,j}$$

$$e = \bigoplus_{j=1}^{r(n)} f_{n,j} \text{ où } f_{n,j} \neq 0 \quad (j = 1, \dots, r(n))$$

$$E_{2,1} = \bigoplus_{j=1}^{r(n)} E_{n,j}$$

appartenant tous à $\bigoplus_{j=1}^{r(n)} M_{n(j)}(\mathbb{C})$.

Posons $D_j = U(p_{n,j} M_{n(j)} p_{n,j}) \times U(q_{n,j} M_{n(j)} q_{n,j})$ et

$$\gamma_j = v_{p_{n,j} q_{n,j}} (\frac{1}{\sqrt{2}} E_{n,j} f_{n,j}) \text{ pour tout } j = 1, \dots, r(n).$$

Pour tout $n \geq m + 1$, H contient $\langle \bigoplus_{j=1}^{r(n)} D_j, \bigoplus_{j=1}^{r(n)} \gamma_j \rangle$ et donc $\bigoplus_{j=1}^{r(n)} \langle D_j, \gamma_j \rangle$ (lemme 2.12).

Pour chaque $j \in \{1, \dots, r(n)\}$, $(M_{n(j)})$ étant un facteur le lemme 2.6 ou le théorème 2.2 (suivant que $p_{n,j}$ est équivalent ou non à $q_{n,j}$) implique $\bigoplus_{j=1}^{r(n)} U(M_{n(j)}) = U(A_n)$ qui est contenu dans H . Ceci étant pour tout $n \geq m + 1$, nous avons donc

$$\bigcup_{n \geq 1} U(A_n) \subset H.$$

Lemme 2.17 : Soient A une C^* -algèbre A.F. simple avec unité, e et f deux projecteurs de A , équivalents de somme 1. Si H est un sous-groupe de U contenant $U(e) \times U(f)$ et un sous-ensemble dense D dans U , alors $H = U$.

Preuve : Dans la décomposition $e + f = 1$, il existe $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in D$ n'appartenant pas à $U(e) \times U(f)$, tel que $\|Y - 1\| < \frac{4}{3}$ (car D est dense). Nous pouvons supposer $z \neq 0$ (sinon on considère Y^*).

Grâce au lemme 2.1 nous avons $V_{ef}(z) \in H$ où $\|z\| < \frac{4}{3}$, et comme les projecteurs e et f sont équivalents le lemme 2.15 nous permet de conclure :

$$\langle U(e) \times U(f), V_{ef}(z) \rangle = U \text{ et donc } H = U.$$

Lemme 2.18 : Soient A une C^* -algèbre A.F. simple avec unité, k un entier ≥ 1 , p et q deux projecteurs non nuls de A_k de somme 1 et q' un projecteur de A_k équivalent à p tel que $q' < q$, $q' \neq q$.

Alors $U(p) \times U(q)$ est un sous-groupe maximal dans U .

Preuve : Soient $U(p) \times U(q) \subsetneq H \subset U$ et $q'' = q - q' \in A_k$.

Le lemme 2.16 donne $\bigcup_{n \geq k} U(A_n) \subset H$ et donc $\bigcup_{n \geq k} U((A_n)_{p+q'}) \subset H \cap U(p + q')$. Comme $H \cap U(p + q')$ contient $U(p) \times U(q')$ et le sous-ensemble $\bigcup_{n \geq k} U((A_n)_{p+q'})$ qui est dense dans $U(p + q')$, le lemme 2.17 nous donne $H \cap U(p + q') = U(p + q')$ c'est-à-dire $U(p + q') \times U(q'') \subset H$. Les projecteurs p et q' étant équivalents le lemme 2.4 nous permet de conclure $H = U$.

Théorème 2.4 : Soient A une C^* -algèbre A.F. simple avec unité, p et q deux projecteurs non nuls, non équivalents de A , de somme 1.

Alors $N_U(U^{\#}) = U^{\#}$ est un sous-groupe maximal dans U .

Preuve : L'égalité $N_u(U^{\alpha}) = U^{\alpha}$ résulte de la proposition 1.1.

Il existe $m \in \mathbb{N}$ et un projecteur $\tilde{p} \in A_{m-1}$ plein dans A_m tels que $\|p - \tilde{p}\| < 1$, donc il existe un unitaire $u \in A$ tel que $upu^{\#} = \tilde{p}$ ([E] Cor.A8.3, p 58). Soit $\tilde{q} = 1 - \tilde{p} \in A_m$.

Il existe une décomposition de \tilde{q} en n projecteurs orthogonaux non nuls $\tilde{q}_j \in A_m$ avec $\tilde{q}_j \perp \tilde{p}$ dans A_m .

Posons $\tilde{p}_0 = \tilde{p}$

$$\tilde{p}_j = \tilde{p} + \tilde{q}_1 + \dots + \tilde{q}_j \quad j = 1, \dots, n \quad (\tilde{p}_n = \tilde{p} + \tilde{q})$$

Soit $uU^{\alpha}u^{\#} = U(\tilde{p}) \times U(\tilde{q}) \not\subseteq H \subset U$ et montrons que $H = U$.

Pour cela montrons que si $U(\tilde{p}_j) \times U(1 - \tilde{p}_j) \not\subseteq H$ pour tout $j = 0, \dots, k$, $k < n$ (ceci étant vrai pour $j = 0$) alors $U(\tilde{p}_{j+1}) \times U(1 - \tilde{p}_{j+1}) \subset H$ pour $j = 0, \dots, k$ (l'inclusion étant stricte si $k < n - 1$).

Par le lemme 2.16 nous avons $\bigcup_{n \geq 1} U(A_n) \subset H$ donc $D = \bigcup_n U((A_n)_{\tilde{p}_j + \tilde{q}_{j+1}})$ est un sous-ensemble dense dans $U(\tilde{p}_j + \tilde{q}_{j+1})$ tel que $D \subset H \cap U(\tilde{p}_j + \tilde{q}_{j+1})$.

1^{er} cas : Si $\tilde{q}_{j+1} \sim \tilde{p}_j$ alors $H \cap U(\tilde{p}_j + \tilde{q}_{j+1})$ contient $U(\tilde{p}_j) \times U(\tilde{q}_{j+1})$ et l'ensemble dense D . Le lemme 2.17 donne $H \cap U(\tilde{p}_j + \tilde{q}_{j+1}) = U(\tilde{p}_j + \tilde{q}_{j+1})$.

2^{eme} cas : Si $\tilde{q}_{j+1} \not\sim \tilde{p}_j$ alors $H \cap U(\tilde{p}_j + \tilde{q}_{j+1})$ contient strictement $U(\tilde{p}_j) \times U(\tilde{q}_{j+1})$. Le lemme 2.18 donne $H \cap U(\tilde{p}_j + \tilde{q}_{j+1}) = U(\tilde{p}_j + \tilde{q}_{j+1})$.

Dans les deux cas nous avons $U(\tilde{p}_{j+1}) \times U(1 - \tilde{p}_{j+1}) \subset H$ pour $j = 0, \dots, k$ (si $k < n - 1$ l'inclusion est stricte car $U(\tilde{p}) \times U(\tilde{q}) \subset H$).

Par induction sur k nous obtenons $U(\tilde{p}_n) = U(\tilde{p} + \tilde{q}) = H$ donc $H = U$.

2.4. UNE GENERALISATION DE 2.3 AUX C^* -ALGÈBRES A.F. NON
SIMPLES

Soient A une C^* -algèbre A.F. avec unité, K un idéal bilatère de A tel que A/K soit une C^* -algèbre simple non nulle, $\pi : A \longrightarrow A/K$ la projection canonique, p et q deux projecteurs de $A-K$ de somme 1 et $U_K^\alpha = \{ x \in U ; pxq \in K, qxp \in K \}$.

Généralisation 2.1 : Soient A, K, π, p et q comme ci-dessus.

Alors U_K^α est d'indice 2 (resp. 1) dans $N_U(U_K^\alpha)$ si $\pi(p) \sim \pi(q)$ (resp. $\pi(p) \not\sim \pi(q)$) et $N_U(U_K^\alpha)$ est un sous-groupe maximal dans U .

Preuve : Résulte de la proposition 1.2 et du théorème 2.3 (resp. 2.4) appliqués à $\pi(A)$, du lemme 1.6 et de la proposition 1.2.

CHAPITRE 3

POSITION DU GROUPE UNITAIRE DANS LE GROUPE DES INVERSIBLES D'UN FACTEUR OU D'UNE C^* -ALGÈBRE U.H.F

Nous reprenons les mêmes notations qu'au chapitre 2.

3.1. ETUDE DU NORMALISATEUR DE U DANS G.

Soient A une C^* -algèbre avec unité, K un idéal bilatère de A tel que A/K soit une C^* -algèbre simple non nulle,

$\pi : A \rightarrow A/K$ la projection canonique. Nous notons :

$$G(1+K) = \{ x \in G ; x - 1 \in K \}$$

$$G(U+K) = \{ x \in G ; x = u + k \text{ avec } u \in U, k \in K \} = U \cdot G(1+K)$$

Remarque : Si $K = 0$ on a $G(1+K) = 1$

et $G(U+K) = U$.

Lemme 3.1 : Avec les notations ci-dessus :

$$N_G(G(U+K)) = \mathbb{C}^*G(U+K).$$

Preuve : Soit $g \in N_G(G(U+K))$. Alors pour tout $u \in U$ on a $gug^{-1} \in G(U+K)$, c'est-à-dire $gug^{-1}g^{-1}u^ng^{-1} - 1 \in K$ et donc $g^ng u - ug^ng \in K$. Comme tout élément de A est une combinaison linéaire de 4 unitaires, $\pi(g^ng)$ appartient au centre de $\pi(A)$ donc à \mathbb{C} (car $\pi(A)$ est une \mathbb{C}^* -algèbre simple avec unité). Nous obtenons donc $g \in \mathbb{C}^*G(U+K)$.

3.2. LEMES PRELIMINAIRES.

Lemme 3.2 : Soit T un espace compact et $GL(2, T)$ (resp. $U(2, T)$) le groupe des fonctions continues de T dans $GL_2(\mathbb{C})$ (resp. $U_2(\mathbb{C})$). Soit $F \in GL(2, T)$ de la forme :

$$F(t) = \begin{pmatrix} f(t) & 0 \\ 0 & f(t)^{-1} \end{pmatrix} \text{ avec } f(t) > 1 \text{ pour tout } t \in T.$$

Alors pour tout $H \in GL(2, T)$ de la forme $\begin{pmatrix} h(t) & 0 \\ 0 & h(t)^{-1} \end{pmatrix}$

tel que $h(t) \geq 1$ pour tout $t \in T$, on a $H \in \langle U(2, T), F \rangle$.

Preuve : Soient F et H comme dans l'énoncé. Par compacité de T il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $h(t) < f(t)^{4n}$ pour tout $t \in T$.

Posons $\theta(t) = \arcsin \frac{h(t)^{1/2} - h(t)^{-1/2}}{f(t)^{2n} - f(t)^{-2n}}$ (θ est une fonction

continue sur T), et soient :

$$R_{\theta}(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{pmatrix}$$

$$S(t) = F(t)^n R_{\theta}(t)^{-1} F(t)^{-n} F(t)^{-n} R_{\theta}(t) F(t)^n \\ = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta(t) + f(t)^{4n} \sin^2 \theta(t) & \sin \theta(t) \cos \theta(t) [f(t)^{2n} - f(t)^{-2n}] \\ \sin \theta(t) \cos \theta(t) [f(t)^{2n} - f(t)^{-2n}] & \cos^2 \theta(t) + f(t)^{-4n} \sin^2 \theta(t) \end{pmatrix}$$

L'élément S appartient à $\langle U(2, T), F \rangle$, S(t) est positif de déterminant 1 pour tout $t \in T$ et

$$\text{trace } S(t) = 2 + \sin^2 \theta(t) (f(t)^{2n} - f(t)^{-2n})^2 = h(t) + h(t)^{-1}$$

L'élément S(t) a donc $h(t)$ et $h(t)^{-1}$ pour valeurs propres.

$$\text{Soient } \begin{cases} x(t) = -\frac{2 \cos \theta(t)}{h(t)^{1/2} + h(t)^{-1/2}} \\ \alpha(t) = \frac{1}{2} \arcsin x(t) \end{cases}$$

Si $V(t) = \begin{pmatrix} \cos \alpha(t) & -\sin \alpha(t) \\ \sin \alpha(t) & \cos \alpha(t) \end{pmatrix}$, alors $V \in U(2, T)$ et on vérifie par un calcul simple mais fastidieux l'égalité

$$\begin{pmatrix} h(t) & 0 \\ 0 & h(t)^{-1} \end{pmatrix} = V(t) S(t) V(t)^{-1}$$

qui donne la condition cherchée.

Lemme 3.3 : Soient A une C^* -algèbre avec unité, des projecteurs p_1, p_2, p_3 orthogonaux de A de somme 1 tels que $p_1 \sim p_2 \neq 0$. Si a est un opérateur positif de A_{p_1} avec $\text{Sp}(a) \subset]1, +\infty[$ alors pour tout $\gamma \geq 1$, on a :

$$r = \begin{pmatrix} \gamma p_1 & & \\ & \gamma^{-1} p_2 & \\ & & p_3 \end{pmatrix} \in \langle U, \begin{pmatrix} a & & \\ & E_{A_2} a^{-1} E_{A_1} & \\ & & p_3 \end{pmatrix} \rangle$$

($\text{Sp}(a)$ désigne le spectre de a . Nous notons $E_{12} = E_{24}^{\#}$ une isométrie partielle reliant p_1 et p_2).

Preuve : La C^* -algèbre avec unité engendrée par a peut être identifiée à l'espace $C(T)$ des fonctions continues sur le spectre T de a . Soit φ l'isomorphisme de $GL_2(C(T))$ sur une sous-algèbre de $G(p_1 + p_2)$ défini par :

$$\varphi : \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \longmapsto x + yE_{12} + E_{12}^{\#}z + E_{12}^{\#}wE_{12}$$

Grâce au lemme 3.2, si $H(t) = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix}$ pour tout $t \in T$ et $\delta \geq 1$ alors $H \in \langle U(2, T), \varphi^{-1}(a + E_{12}^{\#}aE_{12}) \rangle$ donc

$\begin{pmatrix} \delta p_1 & 0 \\ 0 & \delta^{-1} p_2 \end{pmatrix} \in \langle U(p_1 + p_2), \begin{pmatrix} a & \\ & E_{12}^{\#} a^{-1} E_{12} \end{pmatrix} \rangle$, d'où la conclusion cherchée.

Lemme 3.4 : Soient A une C^* -algèbre avec unité, des projecteurs p_1, p_2, p_3 orthogonaux de A de somme 1, tels que $p_1 \sim p_2 \neq 0$ et soit $\delta > 1$. Alors pour tout $x, y \in G(p_1)$,

$$\begin{pmatrix} x & & \\ & E_{12}^{\#} x^{-1} E_{12} & \\ & & p_3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} xy x^{-1} y^{-1} & & \\ & p_2 & \\ & & p_3 \end{pmatrix}$$

appartiennent à $\langle U, \Gamma = \begin{pmatrix} \delta p_1 & & \\ & \delta^{-1} p_2 & \\ & & p_3 \end{pmatrix} \rangle$.

Preuve : Soit $b \in G(p_1)$ positif inversible. Identifions la C^* -algèbre avec unité engendrée par b à l'espace des fonctions continues sur T . En appliquant le lemme 3.2

à $F = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix}$ et $H = \varphi^{-1} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & E_{12}^* b^{-1} E_{12} \end{pmatrix}$ où φ est défini

comme dans le lemme 3.3 nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & E_{12}^* b^{-1} E_{12} \end{pmatrix} \in \langle U(p_1 + p_2), \begin{pmatrix} \gamma p_1 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} p_2 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{et donc} \\ \begin{pmatrix} b & \\ & E_{12}^* b^{-1} E_{12} \\ & & p_3 \end{pmatrix} \in \langle U, \Gamma \rangle .$$

Pour tout $x \in G(p_1)$, soit $x = ub$ sa décomposition polaire ($b = |x|$) alors

$$\begin{pmatrix} x & \\ & E_{12}^* x^{-1} E_{12} \\ & & p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & \\ & p_2 \\ & & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & \\ & E_{12}^* b^{-1} E_{12} \\ & & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & \\ & E_{12}^* u^{-1} E_{12} \\ & & p_3 \end{pmatrix}$$

appartient à $\langle U, \Gamma \rangle$ et donc pour tout $x, y \in G(p_1)$:

$$\begin{pmatrix} xyx^{-1}y^{-1} & \\ & p_2 \\ & & p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & \\ & E_{12}^* x^{-1} E_{12} \\ & & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & \\ & E_{12}^* y^{-1} E_{12} \\ & & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (yx)^{-1} & \\ & E_{12}^* yx E_{12} \\ & & p_3 \end{pmatrix}$$

appartient aussi à $\langle U, \Gamma \rangle$.

3.3 MAXIMALITE DE $N_G(G(U+K))$ DANS LE GROUPE DES INVERSIBLES D'UN FACTEUR.

Dans ce paragraphe M désigne un facteur (à préduel séparable). Nous désignons par K l'idéal bilatère maximal de M défini au paragraphe 2.2 dont nous reprenons les notations.

Lemme 3.5 : Soit M un facteur de type I_∞, II ou III .
 Pour tout $g \in G - N_G(G(U+K))$, il existe un système d'unités
 matricielles $\{E_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$ et un opérateur positif $a \in M_{E_{44}}$ avec
 $Sp(a) \subset]1, +\infty[$ tels que

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & E_{42} a^{-1} E_{42} & \\ & & E_{33} \end{pmatrix} \in \langle N_G(G(U+K)), g \rangle.$$

Preuve : Soit $g \in G - N_G(G(U+K))$ et $g = ux$ sa
 décomposition polaire ($x = |g|$). Le lemme 3.1 implique
 $x \notin \mathbb{C}^\circ G(U+K)$. On a $\langle N_G(G(U+K)), g \rangle = \langle N_G(G(U+K)), x \rangle$.

Le spectre (resp. le spectre essentiel si M est de type I_∞
 ou II_∞) de x contient deux points λ et μ avec $0 < \lambda < \mu$.
 Soit $E(\cdot)$ la mesure spectrale associée à la décomposition de
 $x = \int_{Sp(x)} t dE(t)$. Si $\varepsilon > 0$ vérifie $\lambda + \varepsilon < \mu - \varepsilon$, alors les
 projecteurs $E([\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon])$ et $E([\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon])$ sont
 orthogonaux.

Considérons les cas suivants :

a) Le facteur M est de type I_∞, II_∞ ou III .

Le projecteur $E([\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon])$ étant infini ([Ka], Prop. 3.8),
 il est la somme de deux projecteurs E_{44} et F orthogonaux,
 équivalents et commutant à x .

Soient $E_{22} = E([\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon])$ et $E_{33} = 1 - E_{44} - E_{22}$.

$\{E_{ii}\}_{i=1,2,3}$ forment une partition de l'unité de M que l'on
 complète en un système d'unités matricielles (s.u.m.)

$\{E_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$. Alors $x = x_1 + x_2 + x_3$ où $x_i = E_{ii} x E_{ii}$ ($i = 1, 2, 3$),
 $Sp(x_1) \subset [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon] \cap Sp(x)$,

$Sp(x_2) = [\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon] \cap Sp(x)$.

Soit l'unitaire $v = E_{42} + E_{24} + E_{33}$, alors $B = v X v^{-1}$ est un

opérateur inversible de $\langle N_G(G(U+K)), x \rangle$ de la forme

$$\begin{pmatrix} b & & \\ E_{21} b^{-1} E_{12} & & \\ & & E_{33} \end{pmatrix} \quad \text{où } b = E_{12} x_2 E_{21} x_1^{-1} \in M_{E_{41}}.$$

Soit $b = wa$ la décomposition polaire de b ($a = |b|$).

Alors

$$\begin{pmatrix} a & & \\ E_{21} a^{-1} E_{12} & & \\ & & E_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^* & & \\ & E_{22} & \\ & & E_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & & \\ E_{21} b^{-1} E_{12} & & \\ & & E_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{41} & & \\ & E_{24} w E_{12} & \\ & & E_{33} \end{pmatrix}$$

appartient à $\langle N_G(G(U+K)), x \rangle$ et

$$\|a^{-1}\| \langle \|x_1\| \|x_2^{-1}\| \leq \frac{\lambda + \epsilon}{\lambda - \epsilon} < 1 \text{ donc } \text{Sp}(a) \subset]1, +\infty[.$$

b) Le facteur M est de type II_4 , muni d'une trace normale finie fidèle normalisée τ .

Il existe $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ et un sous-projetteur E_{44} (resp. E_{22}) de $E([\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon])$ (resp. de $E([\mu - \epsilon, \mu + \epsilon])$) commutant à x et de trace $\frac{1}{3k}$ ([Di], Ch III, § 2, Prop. 14).

Soient E_{33} un sous-projetteur de $1 - E_{44} - E_{22}$ de trace $\frac{1}{3k}$, commutant à x et $E_{12} = (E_{21})^*$ une isométrie partielle reliant E_{44} et E_{22} .

Soient $F = 1 - E_{44} - E_{22} - E_{33}$ et $x = x_1 + x_2 + x_3 + y$ où $x = E_{ii} x E_{ii}$ ($i = 1, 2, 3$), $y = Fx$. En construisant les éléments $V = E_{12} + E_{21} + E_{33} + F$ et $B = VxV^{-1}x^{-1}$, comme au point a) nous obtenons un élément de la forme

$$h = \begin{pmatrix} a & & \\ E_{21} a^{-1} E_{12} & & \\ & & E_{33} \\ & & & F \end{pmatrix} \text{ appartenant à } \langle N_G(U), x \rangle$$

et où $\text{Sp}(a) \subset]1, +\infty[$. Comme $\tau(F) = 3(k-1)\frac{1}{3k}$, on peut

décomposer F en somme de $3(k-1)$ projecteurs orthogonaux, commutant à x et de trace $\frac{1}{3k}$.

En effectuant un produit de $k-1$ conjugués (par des unitaires) de h nous obtenons la conclusion cherchée.

Lemme 3.6 : Soit M un facteur, alors tout opérateur inversible de M est un multiple scalaire d'un produit fini de commutateurs multiplicatifs.

Preuve : Si M est de type I_∞, II_∞ ou III , voir [Ha], Prob. 192, si M est de type II_n voir [F-H], Prop. 2.5 et si M est de type I_n il est bien connu que le groupe dérivé de $GL_n(\mathbb{C})$ est $SL_n(\mathbb{C})$. ([Ar], Ch. IV, Th. 4.7.).

Théorème 3.1 : Soit M un facteur, alors $N_G(G(U+K)) = \mathbb{C}^*G(U+K)$ est un sous-groupe maximal dans G .

Preuve : Si M est un facteur de type I_n , la démonstration est faite dans [No]. Supposons donc que M est un facteur I_∞, II ou III .

Soit $g \in G - N_G(G(U+K))$, alors les lemmes 3.5 et 3.3 donnent l'existence d'un s.u.m. $\{E_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$ tel que

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma E_{11} & & \\ & \gamma^{-1} E_{22} & \\ & & E_{33} \end{pmatrix}$$

appartient à $\langle N_G(G(U+K)), g \rangle$ pour tout $\gamma > 1$.

Nous allons montrer que $\langle N_G(G(U+K)), \Gamma \rangle = G$.

Soit $a \in G$ et $a = vB$ sa décomposition polaire où $v \in U$, $B = \sqrt{s^*a}$. Il existe un a.u.m. $\{\tilde{E}_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$ tel que

$$B = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 & & \\ & \tilde{b}_2 & \\ & & \tilde{b}_3 \end{pmatrix}$$

avec $\tilde{b}_j = \tilde{E}_{jj} B \tilde{E}_{jj}$ pour $j = 1, 2, 3$ et des isométries partielles U_j telles que $U_j U_j^* = E_{jj}$, $U_j^* U_j = \tilde{E}_{jj}$ pour $j = 1, 2, 3$.

Soit l'unitaire $U = U_1 + U_2 + U_3$, alors UBU^* a la forme

$$\begin{pmatrix} b_1 & & \\ & b_2 & \\ & & b_3 \end{pmatrix}$$

dans le s.u.m. $\{E_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$. Grâce au lemme 3.6 il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $b_1 = \lambda b_1'$ où $b_1' \in M_{E_{11}}$ est un produit fini de commutateurs multiplicatifs. Donc

$$\begin{pmatrix} b_1 & & \\ & E_{22} & \\ & & E_{33} \end{pmatrix} = \lambda^{1/3} \begin{pmatrix} b_1' & & \\ & E_{22} & \\ & & E_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{1/3} E_{11} & & \\ & \lambda^{-1/3} E_{22} & \\ & & E_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{1/3} E_{11} & & \\ & E_{22} & \\ & & \lambda^{-1/3} E_{33} \end{pmatrix}$$

appartient à $\langle N_G(G(U+K)), \Gamma \rangle$ (lemme 3.4).

Comme E_{11} , E_{22} et E_{33} sont des projecteurs équivalents,

$$\begin{pmatrix} E_{11} & & \\ & b_2 & \\ & & E_{33} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} E_{11} & & \\ & E_{22} & \\ & & b_3 \end{pmatrix} \text{ et donc } \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & b_2 & \\ & & b_3 \end{pmatrix}$$

appartiennent à $\langle N_G(G(U+K)), \Gamma \rangle$. Nous avons la conclusion cherchée car B et donc aussi a sont des éléments de $\langle N_G(G(U+K)), \Gamma \rangle$.

3.4. MAXIMALITE DE $N_G(U)$ DANS LE GROUPE DES ELEMENTS
INVERSIBLES D'UNE C^* -ALGEBRE U.H.F.

Dans ce paragraphe nous reprenons les notations du § 2.3.

Lemme 3.7 : Soit A une C^* -algèbre A.P. simple avec unité. Pour tout $g \in G-C^*U$, il existe un entier $n > 1$, des projecteurs non nuls orthogonaux $p_i \in A_n$ ($i = 1, 2, 3$) de somme 1 avec

p_1 et p_2 équivalents dans A_n

$p_1 + p_2$ équivalent à un sous-projecteur de p_3 dans A_n

ainsi qu'un élément positif $a \in A_{p_1}$ avec $Sp(a) \subset]1, +\infty[$

tels que

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & p_{21} a^{-1} p_{12} & \\ & & p_3 \end{pmatrix}$$

appartient à $\langle C^*U, g \rangle$

(où $p_{21} = p_{12}^*$ est une isométrie partielle reliant p_1 et p_2).

Preuve : Soit $g \in G-C^*U$ et $g = w|g|$ sa décomposition polaire, $|g| \notin C^*1$. On a $\langle C^*U, g \rangle = \langle C^*U, |g| \rangle$.

Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs spectrales de $|g|$ avec

$\lambda_1 < \lambda_2$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha < \min(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{3}, \frac{\lambda_1}{2})$. Soit

$0 < \varepsilon < \alpha$ et soient $m \in \mathbb{N}^*$ et y positif $\in GL(A_m)$ tel que

$\| |g| - y \| < \varepsilon$ et μ_1, μ_2 deux valeurs spectrales de y avec

$|\lambda_i - \mu_i| < \varepsilon$ pour $i = 1, 2$.

Soient p_1 et p_2 deux projecteurs de A_m tels que

$p_i y = y p_i = \mu_i p_i$ pour $i = 1, 2$. En remplaçant m par $m+k = n$

(où $k \in \mathbb{N}^*$) et p_1, p_2 par des projecteurs plus petits on peut supposer $p_1 \sim p_2$ (remarque (1), § 2.3) et $p_1 + p_2 < 1 - p_1 - p_2 = p_3$ (il suffit de choisir n tel que tout idéal bilatère minimal de A_n soit de la forme $M_r(\mathbb{C})$ avec $r \geq 4$).

Soient $p_{2,1} = p_{1,2}^*$ une isométrie partielle de A_n reliant p_1 et p_2 ; $u = p_{1,2} + p_{2,1} + p_3 \in U(A_n)$

et $h = |g|u|g|^{-1}u^{-1} \in \langle \mathbb{C}^*U, g \rangle$, alors

$$z = yuy^{-1}u^{-1} = \begin{pmatrix} \mu^{-1}p_1 & & \\ & \mu p_2 & \\ & & p_3 \end{pmatrix} \quad \text{où } \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1} > 1.$$

Par choix de ε , les éléments h et z et donc aussi $|h|$ et z sont arbitrairement proches.

On a $1 < a = \frac{\lambda_2 - \alpha}{\lambda_1 + \alpha} < \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1} < \frac{\lambda_2 + \alpha}{\alpha} = b$, et pour tout $0 < \delta < \min\left(\frac{1-a^{-1}}{2}, \frac{-1+b}{2}\right)$ on a

$$\mu^{-1} + \delta < 1 - \delta < 1 < 1 + \delta < \mu - \delta.$$

Il existe $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, $\varepsilon < \delta$ tel que si $\| |h| - z \| < \varepsilon$ alors $\text{Sp}(|h|) \subset B_\delta(\mu^{-1}) \cup B_\delta(\mu) \cup B_\delta(1)$ où $B_\delta(\mu^{-1}), B_\delta(\mu), B_\delta(1)$ sont des ouverts disjoints ($B_\delta(\mu) = \{ \lambda \in \mathbb{C}; |\lambda - \mu| < \delta \}$).

Soient q_1, q_2, q_3 les projecteurs spectraux de $|h|$ correspondant respectivement à ces 3 ouverts disjoints. On a donc

$$|h| = \begin{pmatrix} h_1 & & \\ & h_2 & \\ & & h_3 \end{pmatrix} \in \langle \mathbb{C}^*U, g \rangle$$

(dans la décomposition $q_1 + q_2 + q_3 = 1$).

Soient $s = (z - \mu^{-1})(z - \mu) - (|h| - \mu^{-1})(|h| - \mu)$ et

$$\text{et } r = (|h| - \mu^{-1})(|h| - \mu) - (1 - \mu^{-1})(1 - \mu)q_3$$

$$\begin{aligned} \text{alors } \|s\| &\leq \|z - \mu\| \|z - |h|\| + \| |h| - \mu^{-1} u \| \|z - |h|\| \leq \delta 5\mu \\ \|r\| &\leq \|h_1 - \mu^{-1} q_1\| \|h_1 - \mu q_1\| + \|h_2 - \mu^{-1} q_2\| \|h_2 - \mu q_2\| \\ &\quad + \|h_3 - q_3\| + \mu^{-1} \|h_3 - q_3\| + \mu \|h_3 - q_3\| \\ &\leq \delta (3 \| |h|\| + \mu + \mu^{-1} + 1 + \mu^{-1} + \mu) \leq \delta 11\mu \end{aligned}$$

(se rappeler : $\varepsilon < \delta$, $\mu^{-1} < 1$, $\| |h|\| < \mu + 1 < 2\mu$)

$$\text{donc } \|(1 - \mu^{-1})(1 - \mu)(p_3 - q_3)\| = \|a + r\| \leq \delta 16\mu .$$

$$\text{D'où } \|p_3 - q_3\| \leq \frac{\delta 16\mu}{(1 - \mu^{-1})(\mu - 1)} \leq \frac{\delta 16\mu^2}{(\mu - 1)^2} \leq \delta \frac{16b^2}{(a - 1)^2}$$

En choisissant δ suffisamment petit on obtient $\|p_3 - q_3\| < 1$ et donc les projecteurs p_3 et q_3 sont équivalents ([E], Cor.A8.3). De même p_i et q_i sont équivalents pour $i = 1, 2$ donc il existe $v_j \in A$ tels que $v_j v_j^* = p_j$, $v_j^* v_j = q_j$ ($j = 1, 2, 3$).

Soient $v = v_1 + v_2 + v_3 \in U$ et $x = v|h|v^*$; alors $x \in \langle \mathbb{C}^n U, g \rangle$ et est de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 & & \\ & x_2 & \\ & & x_3 \end{pmatrix} \quad \text{dans la décomposition } p_1 + p_2 + p_3 = 1,$$

où $\text{Sp}(x_1) \subset B_\delta(\mu^{-1})$, $\text{Sp}(x_2) \subset B_\delta(\mu)$, $\text{Sp}(x_3) \subset B_\delta(1)$ et x_j sont positifs dans $\text{GL}(A_{p_j})$ pour $j = 1, 2, 3$.

Soit w la décomposition polaire de $p_{12} x_2 p_{21} x_1^{-1}$ où $w \in U(A_{p_1})$ et a est positif, alors

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & p_{21} a^{-1} p_{12} & \\ & & p_3 \end{pmatrix} = w_1 u x u^{-1} x^{-1} w_2 \in \langle \mathbb{C}^* U, g \rangle$$

où $w_1 = w^* + p_2 + p_3 \in U$ et $w_2 = p_1 + p_{21} w p_{12} + p_3 \in U$.

Par choix de ε nous avons $\|p_{12} x_2 p_{21} x_1^{-1} - \mu^2\|$ et donc aussi $\|a - \mu^2\|$ qui est arbitrairement petit. Comme $\mu > 1$, on peut supposer que: $\text{Sp}(a) \subset]1, +\infty[$.

Lemme 3.8 : Soit A une \mathbb{C}^* -algèbre A.F. simple avec unité telle que deux projecteurs quelconques de A soient toujours comparables (au sens de Murray et von Neumann), alors

$$GL(A) \subset \mathbb{C}^* DGL(A)$$

où $DGL(A)$ est le groupe dérivé de $GL(A)$.

Preuve : Avec les hypothèses faites, A possède une unique trace positive normalisée τ et $GL(A)/DGL(A)$ peut s'identifier via le déterminant Δ_τ à un sous-groupe de \mathbb{C}^* , donc $GL(A) \subset \mathbb{C}^* DGL(A)$ (pour les notations et résultats [H-S, 1], p 194).

Lemme 3.9 : Soit A une \mathbb{C}^* -algèbre A.F. simple avec unité telle que deux projecteurs quelconques de A soient toujours comparables.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\epsilon > 0$ et p_1, p_2, p_3 des projecteurs orthogonaux non nuls de A_n , de somme 1 avec

p_1 et p_2 équivalents dans A_n

$p_1 + p_2$ équivalent à un sous-projecteur de p_3 dans A_n .

Alors il existe des projecteurs non nuls orthogonaux p_i' ($i = 1, 2, 3$) de somme 1, appartenant à A_n avec

$$p_1' \sim p_2'$$

$$p_3' < p_1' \text{ dans } A_n$$

tels que

$$\Gamma' = \left(\begin{array}{cc} \delta_{p_1'} & \delta_{p_2'} \\ & p_3' \end{array} \right) \in \langle U, \Gamma = \left(\begin{array}{cc} \delta_{p_1} & \delta_{p_2} \\ & p_3 \end{array} \right) \rangle$$

Preuve : Comme $p_1 + p_2 \prec p_3$ il existe des projecteurs orthogonaux q_j ($j = 3, \dots, k$) avec $k \geq 4$, tels que $p_3 = \sum_{j=3}^k q_j$ où $q_j \sim p_j$ pour tout $j = 3, \dots, k-1$ et $q_k \prec p_4$.

$$\text{Soient } p_1' = p_1 + q_3 + \dots + q_{2[\frac{k-1}{2}]} - 1$$

$$p_2' = p_2 + q_4 + \dots + q_{2[\frac{k-1}{2}]}$$

$$p_3' = 1 - p_1' - p_2'$$

Nous avons $p_1' \sim p_2'$ et $p_3' \prec p_1'$ dans A_n .

Soient E_{1j} et E_{2j} des isométries partielles reliant respectivement p_1 et q_j , p_2 et q_j ($j = 1, \dots, k-1$) et $U_{i\ell} = E_{1i} + E_{1i}^* + E_{2\ell} + E_{2\ell}^* + \sum_{\substack{j=3 \\ j \neq i, \ell}}^k q_j \in U$;

$i, \ell \in \{1, \dots, k-1\}$, $i \neq \ell$. Nous avons alors :

$\Gamma' = \Gamma U_{34} \Gamma U_{34}^* \dots U_{2[\frac{k-1}{2}-1, 2[\frac{k-1}{2}]} \Gamma U_{2[\frac{k-1}{2}-1, 2[\frac{k-1}{2}]}^*$ appartient à $\langle U, \Gamma \rangle$ ($[k]$ désigne la partie entière de k).

Définition : Une C^* -algèbre A avec unité est dite U.H.F. (uniformly hyperfinite) si A est la fermeture normique de la réunion d'une suite croissante d' $*$ -sous-algèbres A_n de A contenant l'unité de A , isomorphes à $M_{r(n)}(\mathbb{C})$.

Remarque : Une C^* -algèbre U.H.F. avec unité est simple ([Sa], Prop. 1.23.8)

Lemme 3.10 : Soient A une C^* -algèbre U.H.F. avec unité et $\delta > 1$, p_1' , p_2' , p_3' comme dans l'énoncé du lemme 3.9, alors

$$G(p_1') \times G(p_2') \times G(p_3') \subset \langle C^*U, \Gamma' = \begin{pmatrix} \delta p_1' & & \\ & \delta^{-1} p_2' & \\ & & p_3' \end{pmatrix} \rangle$$

Preuve : Comme $A_{p_1'}$ est une C^* -algèbre U.H.F. avec unité p_1' , alors pour tout $x \in G(p_1')$, il existe $\lambda \in C^*$ et $x' \in DGL(A_{p_1'})$ avec $x = \lambda x'$ (lemme 3.8). Grâce au théorème 3.1 appliqué au facteur A_n , nous avons $\langle C^*U(A_n), \Gamma' \rangle = GL(A_n)$ et donc

$$\begin{pmatrix} \lambda p_1' & & \\ & p_2' & \\ & & p_3' \end{pmatrix}$$

appartient à $\langle C^*U, \Gamma' \rangle$. Nous obtenons alors :

$$\begin{pmatrix} x & & \\ & p_2' & \\ & & p_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda p_1' & & \\ & p_2' & \\ & & p_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & & \\ & p_2' & \\ & & p_3' \end{pmatrix}$$

appartient aussi à $\langle C^*U, \Gamma' \rangle$ par le lemme 3.4.

Comme $p_1' \sim p_2'$ et $p_3' \prec p_1'$, nous avons la conclusion cherchée (en conjuguant par des unitaires).

Théorème 3.2 : Soit A une C^* -algèbre U.H.F. avec unité, alors $N_G(U) = C^*U$ est un sous-groupe maximal dans G .

Preuve : Le lemme 3.1 donne l'égalité $N_G(U) = C^*U$.

Soit $g \in G - C^*U$. En enchaînant les lemmes 3.7, 3.3 et 3.9 nous avons l'existence de $\delta > 1$ et de projecteurs $p_i' \in A_n$ ($i = 1, 2, 3$) décrits dans le lemme 3.9 tels que

$$\Gamma' = \begin{pmatrix} \delta p_1' & & \\ & \delta^{-1} p_2' & \\ & & p_3' \end{pmatrix} \in \langle C^*U, g \rangle.$$

Comme G est connexe il suffit de montrer que tout $x \in A$ arbitrairement proche de 1 appartient à $\langle C^*U, \Gamma' \rangle$. Pour un tel x , $\Gamma' x$ et $h = |\Gamma' x|$ sont proches de Γ' . Le spectre de h est contenu dans une réunion de trois ouverts disjoints

centrés en γ , γ^{-1} et 1. Soient q_1, q_2, q_3 les projecteurs spectraux de h correspondant à ces ouverts. Nous avons $\|q_i - p_i'\| < 1$ pour $i = 1, 2, 3$ (voir la démonstration du lemme 3.7 où Γ' joue le rôle de z).

Soient $v_i \in A$ tels que $v_i v_i^* = p_i'$ et $v_i^* v_i = q_i$ ($i = 1, 2, 3$) et $v = v_1 + v_2 + v_3 \in U$ ([E], Cor.A.8). L'élément vhv^* a alors la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 & & \\ & x_2 & \\ & & x_3 \end{pmatrix}$$

dans la décomposition $p_1' + p_2' + p_3' = 1$.

Grâce au lemme 3.10, vhv^* appartient à $\langle \mathbb{C}^*U, \Gamma' \rangle$; d'où h et $\Gamma'x$ et donc x sont dans $\langle \mathbb{C}^*U, \Gamma' \rangle$.

SYMBOLES ET NOTATIONS

\emptyset	: Ensemble vide.
\in	: Est inclus strictement.
\mathbb{N}	: $\{0, 1, 2, \dots\}$
\mathbb{R}^*	: $\mathbb{R} - \{0\}$
\mathbb{R}_+^*	: $]0, +\infty[$
\mathbb{C}^*	: $\mathbb{C} - \{0\}$
B^{opp}	: L'anneau opposé de l'anneau B.
$M_n(B)$: L'ensemble des matrices n-fois-n à coefficients dans B.
$U_n(B)$: L'ensemble des matrices unitaires de $M_n(B)$.
M_n	: $M_n(\mathbb{C})$
$GL_n(\mathbb{C}), SL_n(\mathbb{C}), U_n(\mathbb{C})$: L'ensemble des éléments de $M_n(\mathbb{C})$ qui sont respectivement inversibles, de déterminant 1, unitaires.
$C(T)$: L'ensemble des fonctions continues sur T à valeurs dans \mathbb{C} .
$GL(2, T)$: L'ensemble des fonctions continues de T dans $GL_2(\mathbb{C})$.
$U(2, T)$: L'ensemble des fonctions continues de T dans $U_2(\mathbb{C})$.

$G = GL(A)^0$: La composante connexe de l'identité du groupe des éléments inversibles de A.
$U = U(A)^0$: La composante connexe de l'identité du groupe des unitaires de A.
A_p	: L'algèbre réduite pA_p .
$G(p)$: $GL(A_p)^0$
$U(p)$: $U(A_p)^0$
$G(p) \times G(q)$: $\{x + y ; x \in G(p) , y \in G(q)\}$.
$U(p) \times U(q)$: $\{u + v ; u \in U(p) , v \in U(q)\}$.
$N_G(H)$: Le normalisateur du groupe H dans G.
$\langle H, g \rangle$: Le sous-groupe engendré par H et g.
$p \sim q$ (resp. $p \not\sim q$)	: Les projecteurs p et q sont équivalents (resp. non équivalents).
$p \prec q$: Le projecteur p est équivalent à un sous-projecteur de q.
$B_\delta(\mu)$: $\{\lambda \in \mathbb{C} ; \lambda - \mu < \delta\}$.
$[k]$: La partie entière de k.
G_n	: Le groupe des permutations de n éléments.
s.u.m.	: Système d'unités matricielles.
\cong	: Isomorphisme.
$ x $: $\sqrt{x^* x}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [Ar] : E. Artin, Algèbre géométrique, Gauthier-Villars
Paris, (1962).
- [Bo] : N. Bourbaki, Algèbre, Hermann, Paris, (1964).
- [Di] : J. Dixmier, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace
hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, (1957).
- [Dy] : E. B. Dynkin, The maximal subgroups of the classical
groups, Amer. Math. Soc. Transl. Série 2, Vol 6, (1957),
245-378.
- [E] : E. G. Effros, Dimensions and C^* -algebras,
in " Reg. Conf. Ser. Math., Vol 46 "
Amer. Math. Soc. Providence, R. I., (1981).
- [F-H] : T. Fack, P. de la Harpe, Sommes de commutateurs dans
les algèbres de von Neumann finies continues,
Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 30, 3, (1980), 49-73.
- [Go] : K. R. Goodearl, Notes on real and complex
 C^* -algebras Shiva Publishing Limited, Nantwich
(1982).
- [H] : P. de la Harpe, Simplicity of the projective unitary
groups defined by simple factors, Comment. Math.
Helveticæ, 54, (1979), 334-345.
- [H-S, 1] : P. de la Harpe, G. Skandalis, Produits finis de
commutateurs dans les C^* -algèbres, Ann. Inst.

Fourier, Grenoble, 34, 4, (1984), 169-202.

- [H-S, 2] : P. de la Harpe, G. Skandalia, Sur la simplicité
essentielle du groupe des inversibles et du groupe
unitaire dans une C^* -algèbre simple,
J. Funct. Anal., 62, 3, (1985), 354-378.
- [Ha] : P. R. Halmos, A Hilbert space problem book,
von Nostrand Company, INC, Princeton, (1967).
- [Ka] : V. Kaftal, On the theory of compact operators in
von Neumann algebras I, Indiana Univ. Math. J.,
26, (1977), n° 3, 447-457.
- [No] : W. Noll, Proof of the maximality of the orthogonal
group in the unimodular group, Arch. Rational. Mech.
Anal., Vol 18, (1965), 100-102.
- [Ru] : W. Rudin, Functional analysis, Mc Graw-Hill Book
Company, New York, (1973).
- [Sa] : S. Sakai, C^* and W^* -Algebras, Springer Verlag,
Bd 60, (1971).
- [S-Z] : S. Strătilă, L. Zsidó, Lectures on von Neumann
algebras, Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent,
(1979).