

**Etude historique et critique  
de la continuité mathématique  
de Cantor à Hilbert**

Thèse

présentée à la Faculté des Lettres  
de l'Université de Neuchâtel  
pour obtenir le grade de docteur ès lettres

par

**MAGDA SUTER-HIRT**

La Faculté des Lettres de l'Université de Neuchâtel, sur le rapport de M. Jean-Blaise Grize, professeur à l'Université de Neuchâtel, et de M. Ernst Specker, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich, autorise l'impression de la thèse présentée par M<sup>me</sup> Magda Suter, en laissant à l'auteur la responsabilité des opinions énoncées.

Neuchâtel, le 7 juillet 1966.

Le doyen :  
Jean-Blaise GRIZE

**Etude historique et critique  
de la continuité mathématique  
de Cantor à Hilbert**



## AVANT-PROPOS

*Retrocer l'évolution de la notion de continuité en mathématiques conduirait à remonter à l'origine même de la science hellénique, à revoir des œuvres de toutes les époques. Une étude historique et critique complète dépasserait donc de beaucoup le cadre d'une thèse. Du reste, bon nombre de textes ont été commentés, tant dans l'ouvrage de Moritz Cantor que dans les publications de Th. L. Heath, P. H. Michel, G. Milhaud, A. Rey, P. Tannery et H. G. Zeuthen (voir bibliographie). Il n'est pas dans notre intention d'approfondir l'étude des auteurs anciens, d'autant moins qu'une telle entreprise ne pourrait se justifier entièrement que par la découverte de textes nouveaux.*

*Par contre, nous avons constaté que pour la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle où le continu posait des problèmes multiples aux mathématiciens, des commentaires historiques et critiques font défaut.*

*Il est vrai que Schoenflies a résumé les découvertes des mathématiciens de son époque dans un ouvrage remarquable (Schoenflies) (1). Mais le problème du continu n'y a pas été spécialement pris en considération. De plus, des travaux plus récents, tels les Grundlagen der Geometrie de Hilbert, ont mis en évidence de nouveaux aspects de la question.*

*Nous nous sommes donc efforcée d'étudier les textes qui illustrent l'évolution de la continuité mathématique pendant l'époque relativement récente qui fut celle de Georg Cantor, Dedekind, Fréchet, Veronese, Hilbert, époque pendant laquelle de profondes transformations dans la pensée mathématique ont remis en question la plupart des notions de base.*

*Notre entreprise est double :*

- 1<sup>o</sup> trouver les textes qui ont une importance primordiale pour le développement de la notion de continuité en mathématiques ;*
- 2<sup>o</sup> montrer les influences des différents auteurs les uns sur les autres.*

*Nous avons ainsi été amenée à mettre en évidence certaines constantes qui se retrouvent à travers les siècles depuis l'Antiquité. Ce fait nous a incitée à faire précéder notre étude principale d'une introduction qui doit aider, nous l'espérons, à mieux faire ressortir certaines lignes directrices. Si nous avons introduit au cours de notre chapitre préliminaire quelques réflexions personnelles, nous ne*

*prétendons nullement avoir épuisé le sujet. En revanche, nous croyons avoir signalé les principaux auteurs qui ont influencé l'époque que nous avons étudiée plus spécialement.*

*Le plan choisi n'est pas sans inconvénients : plus d'une fois, le maintien de la chronologie nous oblige à nous répéter. Mais nous croyons ces inconvénients compensés par le fait que la gestation des idées des auteurs et l'évolution historique peuvent être mieux suivies.*

*Pour justifier nos développements, nous avons cité un nombre de textes qui pourrait paraître excessif. Néanmoins ce procédé nous semble nécessaire pour faciliter la lecture de nos commentaires. Les fragments cités sont en effet dispersés dans un grand nombre d'œuvres.*

## CHAPITRE I

# INTRODUCTION

### § 1. L'antiquité

#### *a) Les Pythagoriciens et les Eléates.*

Nous ne nous attarderons pas sur ce que P. H. Michel (1) (p. 663) appelle « la controverse du V<sup>e</sup> siècle », controverse qui opposait les Eléates aux Pythagoriciens. En schématisant quelque peu la pensée des auteurs grecs, nous aimerions simplement rappeler que les Pythagoriciens avaient déjà réalisé une certaine synthèse de l'arithmétique et de la géométrie ; ce fut au prix d'une décomposition de l'espace en atomes, qu'impliquait un monde physique « non continu ». La découverte des nombres irrationnels allait fortement ébranler les théories pythagoriciennes et permettre aux Eléates de défendre les leurs. Rappelons ici que c'est Héraclite qui a introduit le « flux », notion reprise plus tard par les premiers analystes.

C'est certainement Zénon qui a le plus contribué à renverser les positions des Pythagoriciens. On peut même se demander si ce ne sont pas les « paradoxes de Zénon » qui ont incité les géomètres grecs à introduire une première axiomatique pour prévenir toute critique.

Résumons sommairement l'objection des Eléates :

Soit un « ensemble » composé d'unités indivisibles, par exemple un segment de droite. Ces indivisibles ne sauraient avoir une grandeur, car toute grandeur peut être soumise à des divisions réitérées. L'« ensemble » ne peut être modifié par l'adjonction ou la soustraction d'une unité sans grandeur. Or à lui seul, un « rien » ne modifie pas un « ensemble » quand on l'y ajoute ou qu'on l'en soustrait. Ainsi, d'une part, ces « unités » sont donc des « riens ».

D'autre part, ces « ensembles » ont une « grandeur » ; un segment a une longueur. Les « unités » n'ayant pas de « grandeur », il faut « quelque chose » qui constitue cette « grandeur », il faut donc qu'il y ait des « parties entre les unités ».

Cette idée de « parties entre » est un des problèmes essentiels que soulève l'idée d'un continu composé par des éléments.

Les « parties entre les unités » doivent avoir une grandeur, elles doivent être séparées par d'autres parties qui ont une grandeur, et ainsi de suite. L'« ensemble » envisagé qui, par hypothèse, devait être constitué par des « unités » indivisibles, est donc finalement composé par des parties qui, ayant une grandeur, sont par là même divisibles, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ.

Bolzano commentera d'ailleurs ces difficultés dans les *Paradoxien des Unendlichen* (Bolzano) (2).

Répétons enfin que ces raisonnements supposent l'acceptation de l'axiome d'Archimède — un segment a une longueur — et qu'ainsi la situation, à l'époque de la controverse du V<sup>e</sup> siècle paraît très semblable à celle devant laquelle se trouvera Georg Cantor dans la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle : la question de la continuité était certes discutée, mais nullement résolue encore.

Un exemple illustre bien le fait que les Grecs n'abordaient la continuité mathématique qu'avec la plus grande prudence : c'est celui de la cissoïde.

#### b) *La cissoïde.*

Au II<sup>e</sup> siècle av. J.-C., Dioclès avait fourni une construction de la cissoïde point par point. C'est pour cette raison que les Grecs ne considéraient pas cet « ensemble de points » comme une « courbe » ; pour eux une courbe devait en effet pouvoir être dessinée « d'un trait ». Ce fait a son importance en ce qu'il laisse entendre que les Grecs faisaient en quelque sorte une distinction analogue à celle de la « ponctuelle » et de la « droite-support ». Nous verrons qu'au XIX<sup>e</sup> siècle cette question sera reprise dans un autre contexte.

#### c) *Aristote.*

La controverse du V<sup>e</sup> siècle a été critique, mais non constructive. Elle a dénoncé les difficultés que soulève l'étude du continu, mais elle n'a donné aucune solution aux problèmes posés.

Aristote, tout en admettant les difficultés, alla de l'avant et donna des définitions formulées avec une rigueur certaine.

Rappelons l'essentiel de ses textes (*Physique*, V, 227 a).

Il définit d'abord la consécuitivité, donc ce que nous appelons la notion d'ordre. Définissant la contiguité, immédiatement après la consécuitivité, Aristote décrit ce qu'il entend par « contact ».

Contigu est ce qui, étant consécutif, est en outre en contact. Mais, comme tout changement suppose une opposition et que l'opposition est ou contrariété, ou contradiction, comme d'autre part les contradictoires n'admettent pas de milieu, c'est dans les contraires, on le voit, que sera l'intermédiaire.

On est tenté de faire un certain rapprochement entre la notion de densité et celle de la contiguïté d'Aristote. Toutefois, il faut alors admettre que les mots « en contact » donnent la possibilité d'envisager des voisinages arbitrairement petits, c'est-à-dire d'introduire la notion de point d'accumulation. Ce serait là une interprétation qu'il semble très difficile de maintenir dans le détail.

Citons maintenant sa définition de la continuité :

Le continu est dans le genre du contigu ; je dis qu'il y a continuité, quand les limites par où les deux choses se touchent ne sont qu'une seule et même chose, et, comme l'indique le nom, tiennent ensemble ; or cela ne peut se produire quand les extrémités sont deux. Une telle définition montre que le continu se trouve dans les choses dont la nature est de ne faire qu'une lorsqu'elles sont en contact. Et l'unité du tout sera celle du facteur éventuel de continuité, comme le clouage, le collage, l'assemblage, la greffe.

Soulignons qu'Aristote, pour passer de la contiguïté à la continuité doit utiliser des termes tels que « clouage », « greffe ». Ce passage constitue, comme nous le verrons tout au long de notre exposé, le problème crucial de la définition de la continuité : comment passer du discret au continu a priori ?

Retenons pour le moment qu'Aristote a introduit une « hiérarchie des notions » : consécutif — contigu — continu et qu'il a bien spécifié que la continuité entraîne et la consécutive et la contiguïté, les réciproques n'étant pas vraies.

Dans le livre VI de la *Physique* (231 a), il dit expressément :

— il est impossible qu'un continu soit formé d'indivisibles, par exemple qu'une ligne soit formée de points, s'il est vrai que la ligne soit un continu et le point un indivisible.

Aristote justifie son assertion en soulignant une difficulté discutée plus tard par Bolzano : comment admettre qu'on puisse juxtaposer des points pour constituer un « un », puisque les points n'ont pas d'extrémités (n'ayant pas de grandeur) qui puissent permettre une juxtaposition ?

Ici Aristote fait une distinction très semblable à celle que nous faisons aujourd'hui pour la droite entre « ponctuelle » et « droite-support ».

D'autre part, il relève que la relation d'ordre est indispensable pour définir un continu (*Physique*, VI, 231 a) :

— car le continu a des parties étrangères les unes aux autres et il se divise en parties qui se distinguent de cette façon, c'est-à-dire qui sont séparées quant au lieu.

Dans le même texte Aristote affirme également qu'aucun continu n'est divisible en « choses » sans parties et qu'il n'est pas possible qu'entre les points (de la droite) et les instants (du temps) il y ait un intermédiaire d'un genre différent, car cet intermédiaire devrait soit être divisible, soit indivisible ; or, les deux hypothèses mèneraient à des contradictions.

Il s'agit là de résultats importants puisque nous verrons que les idées de Cavalieri ne sont pas sans analogie avec ce texte et que de son côté, Veronese (voir chap. VI) éludera simplement le problème en alléguant le « mystère » du continu.

d) *L'axiome d'Archimède.*

Les définitions d'Aristote sont, comme nous venons de le constater brièvement, une étape importante dans l'étude de la continuité. Mais, c'est l'énoncé de l'axiome d'Archimède qui constitue sans aucun doute l'apport essentiel des Grecs dans ce domaine. Aristote a montré qu'une composition du continu par parties pouvait être envisagée. Ses commentaires montrent toutefois la complexité du procédé dont l'efficacité n'est nullement assurée par le « clouage » proposé.

L'axiome dit d'Archimède est indispensable pour fonder le calcul d'exhaustion puis, plus tard, l'analyse. Nous verrons en effet au cours des différents chapitres que l'axiome d'Archimède est introduit implicitement ou explicitement dans toute l'analyse classique, ce qui ne signifie pas que nous prétendions qu'une géométrie non archimédienne, telle que Veronese nous l'a proposée (voir chap. VI), puisse être simplement reléguée dans le domaine des curiosités mathématiques.

Dans la perspective grecque, Archimède postule la possibilité de « mesurer » un segment par un autre segment, *choisi arbitrairement* comme unité. Si le segment à mesurer et le « segment-unité » sont incommensurables, l'axiome d'Archimède permet une « mesure » par approximation.

Comme Rey, Heath (2) (p. 125-126) attribue l'axiome dit d'Archimède à Eudoxe, en s'appuyant sur Proclus. Ce dernier considérait du reste Eudoxe comme le fondateur de la méthode d'exhaustion.

Citons la définition 4 du livre V d'Euclide/Eudoxe, dans la traduction de Zeuthen (1) (p. 114) :

Deux quantités forment un rapport, si les multiples de chacune d'elles peuvent arriver à surpasser l'autre.

Nous retrouvons cette même proposition dans le livre X d'Euclide comme théorème I (Heiberg (1), t. II, p. 7) :

Soient deux grandeurs inégales AB et  $\Gamma$  dont la plus grande soit AB. Si de AB on soustrait plus de la moitié et du reste plus de la moitié et ainsi de suite, la grandeur qui restera sera finalement plus petite que  $\Gamma$ .

Dans les scolies de Proclus se trouvent plusieurs commentaires concernant la définition 4/V (Heiberg (1), t. V, p. 288), dont le suivant particulièrement significatif :

Il n'y a pas de rapport de l'infini avec l'infini ni du fini avec l'infini.

Si le début de cette phrase sera en quelque sorte contredit plus tard par la théorie des nombres transfinis, la seconde partie est d'une importance extrême : elle touche le fond même du problème : admettre la définition 4/V d'Euclide/Eudoxe permet d'éliminer le danger d'introduire l'infini dans le fini. La définition 4/V est toutefois susceptible d'être appliquée même dans l'infini ; elle évite alors de confondre des infinis d'ordres différents. Nous verrons (chap. III) que Georg Cantor a essayé de transformer la définition 4/V d'Euclide/Eudoxe en un théorème à l'aide de sa théorie des nombres transfinis.

Heath toujours (2) (tome II, p. 124), se référant à un certain Simon et à Zeuthen remarque qu'Euclide avait déjà défini l'équivalence de deux rapports de la même manière que Weierstrass définit l'égalité de deux nombres. De plus, il montre qu'il existe une correspondance étroite entre la définition 4/V d'Euclide/Eudoxe et celle des nombres irrationnels par le procédé de la coupure de Dedekind.

En général, la définition 4/V est appelée *axiome d'Archimède*. En effet, elle figure dans le livre I *De la sphère et du cylindre* sous la désignation postulat V (trad. Ver Eecke (1), p. 6) :

D'autre part, parmi les lignes, surfaces et solides inégaux, le plus grand excède le plus petit d'une grandeur telle que celle-ci étant ajoutée à elle-même, elle peut dépasser toute grandeur donnée ayant un rapport avec l'une ou l'autre des premières.

Archimède se réfère aussi à Eudoxe dans *La méthode mécanique* et *La quadrature de la parabole*. Notons qu'Eutocius a critiqué assez sévèrement les bases d'Archimède. D'après M. Cantor en effet, Eutocius aurait parlé de « stetige und unstetige Proportionen ». Il n'est pas dans notre intention de confirmer ou d'infirmer l'interprétation des textes d'Eutocius. M. Cantor a fait bien des réserves à leur sujet, mais nous nous contentons de souligner que le postulat V avait ainsi suscité des réflexions déjà à l'époque hellénique.

C'est certainement par prudence qu'Archimède a pris la précaution d'énoncer le postulat 4/V d'Euclide/Eudoxe au début de son ouvrage. Sachant probablement combien ses méthodes étaient audacieuses, il tenait à se mettre à l'abri des critiques qui pouvaient toucher les fondements de ses calculs, mais non ces derniers.

Par l'introduction de l'axiome d'Archimède, le calcul d'exhaustion est ainsi fondé ; le « mystère » de l'indivisible et de l'infiniment petit n'est plus à craindre (Zeuthen (1) p. 142).

Cependant et malgré les travaux d'Archimède, le calcul infinitésimal n'est pas né pour autant.

M. Cantor (1) (I, p. 217) pensait que les auteurs grecs avaient manqué d'audace, redoutant l'intervention d'un nouveau Zénon. Reconnaissons que les difficultés étaient rendues quasi insurmontables par une certaine intuition grecque de l'idée d'« élément mathématique ».

En effet, une droite était, pour les Grecs, un élément, un point en était un autre. Dès lors, ils ne pouvaient prendre des éléments « non droites » pour composer une droite « non-point ». Du reste, nous verrons que le passage d'un ensemble de points à l'entité droite incitera Georg Cantor à énoncer son axiome. Si Moritz Cantor accusa les Grecs de manquer d'audace, nous-même aimerions plutôt souligner leur finesse et leurs hautes exigences concernant les bases mathématiques.

Notons aussi que dès maintenant, nous nous trouvons en présence de deux conceptions différentes du continu : pour certains auteurs, le continu est un « continu un, a priori », tandis que pour d'autres il est composé par parties.

Nous pensons qu'il n'est pas abusif de considérer Zénon comme un représentant caractéristique du premier groupe. Aristote est le chef de file du second groupe jusqu'au XX<sup>e</sup> siècle. En composant le continu par parties, il désirait recréer le continu a priori, comme l'essayeront presque tous ses successeurs.

Les nécessités mathématiques réclamaient un compromis : un continu axiomatisé. En effet, un continu a priori non décomposable est inefficace en mathématiques. Mais, ce qui a été décomposé dans certaines circonstances doit pouvoir être recomposé dans d'autres. Nous savons aujourd'hui que le seul axiome d'Archimède est insuffisant pour définir un continu composé par parties. S'il nous permet de mesurer un segment par un autre sans nous heurter à un résultat paradoxal, il ne nous garantit pas l'existence de ce résultat dans l'ensemble où nous avons choisi le segment-unité, il n'exclut pas la présence d'une lacune et il faudra attendre les travaux de Dedekind (voir chap. IV) pour avoir une axiomatique excluant toute lacune.

Faut-il donc admettre que les Grecs, si subtils par ailleurs, aient pu commettre une omission de ce genre ? Cela nous semble impensable.

C'est plutôt dans l'attitude des Grecs vis-à-vis de la cissoïde que se trouve l'explication : une courbe n'est pas un ensemble de points, elle n'est pas composée, elle est une « ligne tracée », continue a priori. Même en envisageant un ensemble de points, donc des « principes de la droite », pour reprendre le terme de Platon (Milhaud (1), p. 340 et suiv.) nous ne « créons » pas une droite. Dès lors, la lacune n'existe pas, ne peut pas exister ; nous avons une courbe « complète » a priori.

Aristote fait-il exception ? Non, lui aussi refuse de composer une droite par des points.

S'il définit un continu composé par parties, les parties sont des parties de ce continu-là : seuls des segments de droite peuvent constituer une droite. Veronese (voir chap. VI) adoptera plus tard une attitude analogue.

La rigueur grecque rendait difficile la naissance du calcul infinitésimal dans lequel, à ses débuts, on ne se souciait pas outre mesure des éléments composant une courbe. Il fallut donc l'oubli de certaines des traditions grecques à travers le Moyen Age pour donner aux chercheurs l'audace, voire l'insouciance,

nécessaires à leurs travaux. Et si la définition d'Euclide/Eudoxe a toujours été appliquée implicitement, il fallut pourtant attendre que O. Stolz en soulignât l'importance réelle. Ce ne fut qu'en 1883 (voir chap. VI).

## § 2. De la fin de l'Antiquité au XVIII<sup>e</sup> siècle

Cette époque ne donna pas naissance à beaucoup d'ouvrages marquants dans le domaine qui nous intéresse plus particulièrement. Nous ne voulons pas dire par là que les mathématiciens du XIX<sup>e</sup> siècle ne soient pas les héritiers de tous les progrès antérieurs, mais nous devons constater qu'aucun des auteurs dont nous étudierons l'œuvre n'a cité explicitement des sources datant de cette époque. Soulignons toutefois qu'il n'en serait pas de même si nous nous occupions de la façon dont les premiers analystes ont envisagé le problème du continu. Il faudrait alors citer le *De Triangulis* de Jordanus Nemorarius (XII<sup>e</sup> siècle), le *De Beryllo* de Nicolas de Cues (XV<sup>e</sup> siècle), les travaux sur « l'angle de contingence » (l'« angle » que fait la tangente avec l'arc de cercle) traité entre autres par Viète (XVI<sup>e</sup> siècle), les remarques de Neper (XVII<sup>e</sup> siècle) (peut-être le véritable auteur de l'idée de « fluxus ») la *Stereometria dolorium* (1615) de Kepler, etc.

Nous voulons toutefois examiner très brièvement quelques textes de Bonaventura Cavalieri (Cavalieri, Cavaglieri), parus sous le nom de *Geometrica indivisibilibus continuorum nova quodam ratione promota* 1635 (2<sup>e</sup> édition 1653, Bologne.)

Disons d'emblée que cet examen ne sera pas approfondi ; en effet, nous nous bornerons à relever quelques lignes particulièrement intéressantes, négligeant d'autres questions, celle par exemple de l'origine du terme « indivisible » dont la définition manque totalement dans l'œuvre de Cavalieri (M. Cantor (I), II, p. 759).

La position de Cavalieri est étonnante, surtout si l'on considère l'époque où il vivait. Il évita en effet le problème du continu et il faudra attendre Veronese (voir chap. VI) pour retrouver une attitude quelque peu semblable.

Cavalieri se proposait de calculer des volumes et des aires. Par ses méthodes, il fut amené à devoir reconstituer à l'aide des « indivisibles » les corps et les surfaces considérés comme des continus a priori.

Nous verrons (chap. III) que Cantor se trouvera dans une situation analogue. Or, contrairement à celui-ci comme à d'autres mathématiciens, Cavalieri a simplement refusé d'envisager une discussion en montrant l'inutilité. Cela ne veut d'ailleurs pas dire que l'œuvre de Cavalieri soit sans intérêt. Il suffit pour s'en convaincre de rappeler l'avis — combien autorisé — de Pascal (lettre de M. Dettonville à M. Carcavi) :

... comme cela est visible par la doctrine des indivisibles, laquelle ne peut être rejetée par ceux qui prétendent avoir rang entre les géomètres.

Si nous résumons les idées de Cavalieri (1) (p. 104/105) (M. Cantor (1) vol. II, p. 760 et suiv.), nous pouvons dire :

De deux choses l'une : Ou le continu est composé d'indivisibles ou il ne l'est pas. Si le continu est composé d'indivisibles et si les ensembles d'indivisibles (congeries) ne peuvent pas être comparés entre eux, nous énonçons une contradiction, car nous savons comparer des volumes, donc des continus, entre eux.

Mais, si le continu n'est pas seulement composé d'indivisibles, c'est qu'il contient encore autre chose. Cet « autre chose » doit alors se trouver entre les indivisibles — (Nous retrouvons la pensée éléate) — et il est donc impossible de comparer des volumes (continus), car ce qui se trouve entre deux indivisibles ne nous est pas connu quant à son nombre. — Cavalieri a ici une certaine intuition de la notion de puissance d'un ensemble. — Or nous savons que ce serait un non-sens de prétendre que l'on ne peut pas comparer les droites et les plans constituant deux volumes.

Nous pouvons donc comparer les ensembles (congeries) d'indivisibles entre eux sans nous poser de question quant à la composition du continu.

Dans le texte de Cavalieri, on est tenté de retrouver des idées proches de celles de la théorie des ensembles : les indivisibles non définis peuvent être envisagés comme des « éléments ». Malgré la puissance — dirions-nous aujourd'hui — non déterminée de ses volumes, Cavalieri les trouvait comparables à des ensembles équipotents. Il parlait pour cela de la possibilité de calculer les rapports entre des continus et entre ce qu'il appelait des ensembles (congeries) d'indivisibles.

Mais, si nous croyons ces quelques points d'un grand intérêt, ils sortent de notre sujet. Il nous importe seulement de voir que la notion de continu a priori a été déjà jugée inefficace, voire superflue à l'époque de Cavalieri. Nous verrons (chap. III) que Cantor ne suivra cette voie qu'à contre-cœur et qu'il faudra attendre plus de deux siècles pour retrouver des mathématiciens prêts à se distancer du continu a priori, si puissamment ancré dans la tradition.

### § 3. La fonction continue

Ce sujet, très vaste et intéressant en soi, n'entre pas dans notre étude. En effet, Cantor et ses contemporains pouvaient déjà disposer de définitions telles que celle donnée par Cauchy dans le résumé des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique publié en 1823 (Cauchy (1), tome IV, p. 19) :

Lorsque la fonction  $f(x)$  admettant une valeur unique et finie pour toutes valeurs de  $x$  comprises entre deux limites données, la différence

$$f(x+i) - f(x)$$

est toujours entre ces limites une quantité infiniment petite, on dit que  $f(x)$  est *fonction continue* de la variable  $x$  entre les limites dont il s'agit. (Plus haut, l'auteur avait fait l'hypothèse :  $i$  est infiniment petit.)

Si l'élaboration de la notion fut longue, et pas toujours aisée, une circonstance a singulièrement facilité ce travail : dans l'idée de fonction ou d'application se trouve une idée de transformation. Newton déjà exprimait bel et bien une idée de « devenir » quand il introduisit le mot « fluxus ».

Il est évidemment facile de considérer une application comme étant en quelque sorte une action qui se déroule dans le temps, action qui peut être volontairement interrompue ou non. Elle définit le « passage » d'un élément à un autre, la « transformation » d'un élément en un autre. Or l'idée d'une transformation continue est si proche de notre « continuité temporelle intuitive » que la notion de fonction continue n'a guère été discutée.

De plus, si nous admettons la possibilité de travailler à l'aide de fonctions, nous avons déjà fait le pas décisif. Savoir qualifier une fonction de continue n'est alors plus qu'un problème technique et les analystes ont évidemment été satisfaits sitôt que la définition efficace a été trouvée.

Nous définissons donc l'action, l'application, la fonction continue ou discontinue. Par contre, si nous voulons décrire un continu que nous croyons « exister » en dehors de nous, le problème est tout autre. Nous ne pouvons plus nous permettre d'énoncer une définition arbitraire, même si elle se révèle efficace. Il faudrait trouver tout d'abord toutes les qualités essentielles de la notion donnée en dehors de nous et les formuler ensuite dans un langage mathématique. Nous verrons combien ce problème est ardu.

Il en va autrement pour la notion de fonction qui est une création abstraite. Dès lors, le mathématicien est libre de définir sa continuité dans le langage qu'il veut pourvu qu'il soit adéquat à son projet. La notion ne pouvait donc donner lieu à des critiques autres que techniques et il faut convenir que la fonction continue telle que Cauchy l'a définie ralliait et rallie encore les suffrages.

## CHAPITRE II

### BERNHARD BOLZANO

On ne saurait aborder les travaux de Cantor et de Dedekind sans avoir pris connaissance de certaines réflexions de Bolzano. L'œuvre de cet auteur établit une liaison entre la méthode des anciens analystes et les mathématiques qu'on pourrait qualifier de modernes. Ce penseur, désireux de voir les mathématiques munies de fondements logiquement inattaquables, reprenait ainsi la tradition des Grecs. Nous allons donc brièvement commenter les parties de l'œuvre de Bolzano qui touchent au problème de la continuité en mathématique.

Il est intéressant de constater que des lacunes et des confusions peuvent rester ignorées pendant des siècles. A propos de la continuité mathématique, la notion de flux, si efficace pour élaborer les débuts de l'analyse, était trop souvent utilisée pour décrire et même définir tant bien que mal le continu tout court. Georg Cantor démontrera même l'impossibilité de conclure à la continuité de l'« ensemble-support » du seul fait que les applications opérant sur l'ensemble sont continues.

Pourquoi fut-ce Bolzano — et non Gauss — qui, juste à ce moment-là, découvrit une lacune importante en analyse ? Il est difficile de répondre avec certitude à cette question. Il est toutefois probable que cela tient aux préoccupations de ces deux savants. Bolzano recherchait une certaine synthèse logique de la science mathématique, tandis que Gauss était davantage préoccupé par des problèmes techniques bien précis.

Toujours est-il que les deux auteurs avaient examiné le problème qui consiste à déterminer le nombre de zéros d'un polynôme. Gauss réussit à démontrer un théorème important : Toute fonction algébrique [à coefficients réels] rationnelle entière à une variable peut être décomposée en facteurs réels du premier et [ou] du second degré. Toutefois, c'est à Bolzano que revient le mérite d'avoir su le placer dans l'ordre logique des théorèmes lui servant de contexte. A cet effet, il dut démontrer le théorème qui porte encore son nom aujourd'hui. Occupons-nous de ce théorème, publié en 1817 à Prague.

**§ 1. Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege, Prag, 1817**

Une introduction, relativement longue comparée au volume de la publication, nous montre que la démonstration du théorème cité pouvait encore être considérée comme superflue par ses contemporains. Bolzano note que d'Alembert, Euler, Lagrange, Laplace, ne s'étaient pas préoccupés de le démontrer autrement que par quelques considérations géométriques. Par contre, Gauss et Bolzano désiraient établir une démonstration purement analytique.

Gauss démontra d'abord le théorème sur la décomposition d'une fonction algébrique que nous venons de citer. Il utilisa alors son résultat pour démontrer ce que nous appelons aujourd'hui le « théorème de Bolzano ». Gauss en publia trois démonstrations. La première était géométrique et n'avait pas dû satisfaire son auteur qui, en 1816, reprit la question et donna deux nouvelles démonstrations apparemment rigoureuses.

Or Bolzano montra que, même si les trois démonstrations étaient justes en elles-mêmes, le procédé de Gauss comportait néanmoins une grave lacune (1) (p. 11) : Pour démontrer le théorème de Gauss, sur la décomposition des fonctions algébriques, il fallait en effet avoir démontré celui dit de Bolzano ; Gauss qui avait voulu suivre le chemin inverse, se trouvait donc emprisonné dans un cercle vicieux. Pour défendre son point de vue, Bolzano reprit la dernière démonstration de Gauss et montra que son théorème y était tacitement admis.

Bolzano réfutait ainsi les démonstrations basées sur la géométrie : Dire que « Une ligne continue d'une courbure simple qui passe d'une ordonnée positive à une ordonnée négative doit nécessairement couper l'axe des abscisses en un point qui se trouve quelque part entre les deux ordonnées », c'est énoncer le théorème en question, mais ce n'est évidemment pas le démontrer.

Une fois engagé dans la critique des fondements, Bolzano s'attaqua à des notions étrangères aux mathématiques, mais qui s'y trouvent utilisées, telles que celles de temps et de mouvement. Ces deux notions avaient été à la base de certaines démonstrations du théorème, démonstrations qui comparaient deux fonctions et qui postulaient leur égalité « à un certain moment ». Citons un raisonnement du genre de ceux qui indignèrent, à juste titre, Bolzano (1) (p.6) :

Da aber beyde Functionen vermöge ihrer Stetigkeit erst alle mittleren Werthe durchgehen müssen, bevor sie zu einem höheren gelangen können; so muss es irgend einen mittleren Augenblick geben, in welchem beyde einander gleich waren.

Bolzano se défendait d'être puriste et il voulait bien admettre certaines notions étrangères comme des illustrations (Erläuterungen) concrètes. Il ne niait nullement leur efficacité pour faciliter la compréhension d'un exposé, mais il les récusait absolument en tant que chaînons d'une démonstration rigoureuse.

Refusant de s'appuyer sur la notion intuitive de flux, Bolzano reprit la définition de la continuité d'une fonction (1) (p. 7) :

- Nach einer richtigen Erklärung nämlich versteht man unter der Redensart, dass eine Function  $f(x)$  für alle Werthe von  $x$ , die inner- oder ausserhalb gewisser Grenzen liegen, nach dem Gesetze der Stetigkeit sich ändere, nur so viel, dass, wenn  $x$  irgend ein solcher Werth ist, der Unterschied  $f(x + w) - f(x)$  kleiner als jede gegebene Grösse gemacht werden könne, wenn man  $w$  so klein, als man nur immer will, annehmen kann.

Notons que l'expression « man ... kann » est défectueuse dans la perspective actuelle et que l'énoncé de Cauchy (chap. 1, § 3) ne présente pas ce défaut.

Il est fort intéressant d'étudier les commentaires de Jourdain (Bolzano (1) p. 41). Il compare les travaux de Bolzano et de Cauchy et prétend que la tradition attribuait à Cauchy les résultats de Bolzano, tels la définition moderne de la continuité d'une fonction et les critères de convergence. Si nous avons persisté dans cette voie, c'est que Cauchy a eu le mérite de donner à ces résultats (déjà énoncés par Bolzano) une forme apparemment plus efficace et qui connut peut-être une meilleure diffusion.

Sans vouloir entrer dans les détails de la démonstration que Bolzano donna de son théorème, citons-en un passage important (1) (§ 7, p. 21) :

Bolzano avait formé une suite de fonctions,  $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x), \dots, F_{n+r}(x)$ , tel que  $F_{n+r}(x) - F_n(x)$  soit arbitrairement petit pour  $n$  suffisamment grand. Il déduisait alors qu'il existe une valeur constante vers laquelle tendent les termes de la suite, mais, et ceci est essentiel, qu'il faut démontrer que cette limite est unique.

Jourdain (Bolzano (1) p. 42) a souligné dans son commentaire que Bolzano, par son raisonnement *ab absurdo*, avait démontré que l'existence de la valeur limite n'entraîne pas de contradiction, mais que l'existence elle-même de la valeur n'était en fait pas établie : Bolzano avait admis implicitement l'existence des nombres réels.

C'est la découverte de cette lacune importante qui provoqua les recherches bien connues du XIX<sup>e</sup> siècle sur les nombres réels.

Cauchy donna une définition des nombres réels en 1821, mais il commit encore une erreur. Nous ne pouvons dire simplement : un nombre réel est égal à la limite de la  $n^{\text{ième}}$  somme partielle d'une série infinie, ou : un nombre réel est égal à la somme d'une série infinie ; il faut avoir défini au préalable un ensemble de nombres dans lequel cette limite ou cette somme puisse être exprimée.

## § 2. Paradoxien des Unendlichen, Leipzig 1851

Disons en passant que les paradoxes de Bolzano sont des antinomies, des contradictions leur étant intrinsèquement liées. Sans doute, le terme allemand prête-t-il à confusion : *Paradoxie* = bizarrerie, autant que paradoxe.

F. Prihonsky, collaborateur de Bolzano, n'a édité cet ouvrage qu'après la mort du maître. Dans sa préface, il déclare qu'il s'est contenté d'ordonner au mieux les écrits laissés par Bolzano. C'est probablement cet aveu de l'éditeur qui permit à Fraenkel d'accuser Prihonsky d'avoir modifié le manuscrit, à moins que Fraenkel n'ait eu connaissance de faits qu'il ne relate pas (Fraenkel (1) p. 10).

Nous n'essayerons pas d'approfondir cette question, qui n'a d'intérêt que pour un historien de Bolzano. Ce qui importe, c'est de connaître l'ouvrage qui a directement inspiré Cantor, même si cet ouvrage ne devait pas toujours être absolument conforme au manuscrit de l'auteur.

Ne soyons donc pas ingrats envers Prihonsky. Son initiative a permis aux mathématiciens de prendre connaissance de réflexions qui renfermaient bien des idées remarquables. Nous nous bornons toutefois à examiner les paragraphes qui concernent la notion de continuité.

Dans le § 38, Bolzano cherche tout d'abord un modèle du continu, afin de rendre son étude plus concrète. Il constatera immédiatement que ni le temps, ni l'espace ou la matière (l'époque de Bolzano justifie ce dernier terme) ne sont des exemples utiles, car leur étude paraît aussi complexe que celle du continu mathématique. Plus exactement, l'étude des exemples concrets cités n'est possible qu'à partir d'un continu bien défini ou réciproquement.

Bolzano relève dès le début de son étude les difficultés majeures que l'on rencontre dans la composition d'un continu à l'aide de parties. Il rappelle que dès l'Antiquité, on a reconnu que tout continu (*Ausgedehntes*), pour être utilisable en mathématiques, devait être composable par parties. Mais, en même temps, il est impossible d'envisager la composition d'un continu à l'aide de parties n'ayant pas de grandeur. Cette hypothèse mène à un cercle vicieux comme nous l'avons vu dans le chapitre I. Admettre un continu composé de parties ayant une grandeur ne fait que déplacer la question ; en effet, de telles parties sont à leur tour des continus et le même problème se pose à leur propos. Nous verrons que Veronese reprendra cette idée (chap. VI).

Bolzano soulève aussi la question d'un continu ayant une dimension, mais composé par hypothèse de parties sans dimension, de points, par exemple. C'est alors qu'il fait une remarque qui exprime son attitude et qui résout, à ses yeux, le paradoxe.

Pourquoi le continu, donc le tout, n'aurait-il pas une qualité que ne possède point la partie ?

— Eine Beschaffenheit, die allen Teilen mangelt, soll auch dem Ganzen nicht zukommen dürfen ? Gerade umgekehrt ! Jedes Ganze hat und muss gar manche Eigenschaft haben, welche den Teilen mangeln. (2) (p. 72).

Bolzano ayant écarté la question embarrassante des dimensions se met alors à examiner un continu composé de points. Pour que des points constituent un continu à ses yeux, il exige la propriété suivante : Chaque point du continu

doit avoir un voisin et ce dernier doit pouvoir être choisi aussi proche que l'on veut. Il faut donc que l'ensemble des points soit, comme on dit aujourd'hui, dense en soi.

Ensuite, Bolzano donne, sans toutefois introduire le terme, la définition de ce que nous appelons un point d'accumulation. Il demande au surplus qu'aucun point d'accumulation ne soit un point isolé.

Nous verrons (chap. III) que Cantor reprochera à Bolzano de ne pas avoir postulé un continu « sans lacune » au sens de Dedekind, reproche peut-être suggéré par la déclaration suivante (2) (p. 74) :

Denn was noch sonst wollten wir verlangen ?

«Dieses», erwidert man, «dass jeder Punct einen habe, den er unmittelbar berührt.»

Bolzano dit avoir renoncé à cette exigence en alléguant les mêmes raisons qu'Aristote.

Il pressent le problème de la puissance du continu quand il écrit (2) (p. 74) :

Wie unbegreiflich ist es, sich der kleinsten Linie noch eine Anhäufung von unendlich vielen Puncten, ja eine unendliche Menge solcher Anhäufungen von Puncten vorzustellen, wie man dies alles nach der gewöhnlichen Lehre thun muss.

L'auteur réintroduit également l'axiome d'Archimède que les mathématiciens avaient oublié depuis longtemps et il l'énonce sous une forme qui dérive directement du théorème I du livre X d'Euclide (2) (p. 74) :

Denn selbst die kleinste Linie soll man ja noch in eine unendliche Menge anderer Linien zerlegen können, indem man sie erst in zwei Hälften, dann diese abermals in Hälften und so ohne Ende fort zerlegt !

Si l'on résume la pensée de Bolzano, on peut dire que d'une part, dans les conditions énoncées plus haut, des points peuvent former un continu, mais que, d'autre part, une division quelconque du continu n'aboutit jamais aux points eux-mêmes.

Bolzano soulève ici le problème primordial du continu : le continu a priori et le continu construit par parties sont différents. Le « clouage » d'Aristote restait encore à trouver !

Le § 39 (2) (p. 78) est consacré à la notion de temps. Bolzano considère le temps comme une notion abstraite, comme le milieu dans lequel se déroulent les actions variables. Le temps chez Bolzano est donc fixe, il n'y a pas trace du devenir, du « flux » de Newton.

Notons en passant que l'auteur discute dans le § 40 le problème de l'espace. A l'époque de Bolzano on admettait la théorie de l'éther. Il était donc naturel que, pour Bolzano, l'espace fût un « support » continu, de la même façon que

la théorie de l'éther incitait à considérer le continu comme une donnée a priori.

Notion abstraite comme le temps, l'espace était conçu comme le lieu où s'opèrent les transformations qui se produisent dans le temps.

Ainsi, Bolzano repousse comme autant de faux problèmes (Scheinwidersprüche) les difficultés que pouvait soulever un espace concret, par exemple la question du « contact » des points de l'espace.

Quand Bolzano dit dans le § 41 (2) (p. 83) :

Bei einem Paar Raumdungen, welche einander vollkommen ähnlich sind, müssen sich auch die Mengen ihrer Punkte genau wie ihre Grössen verhalten.

il pressent une fois de plus le problème de la puissance d'un ensemble. Dans le § 49 (2) (p. 103) nous retrouvons encore des préoccupations du même genre : Un ensemble contenant une infinité de points n'est pas nécessairement un continu. Le nombre (Menge) des points ne détermine pas un continu. Si deux grandeurs (Ausdehnungen) sont jugées équivalentes (gleichgross), l'une ne peut contenir une infinité de points de plus ou de moins que l'autre.

Les *Paradoxien des Unendlichen* contiennent ainsi les ébauches de bon nombre d'idées qui joueront un rôle essentiel dans l'évolution des mathématiques au XIX<sup>e</sup> siècle, mais nous n'avons cité que celles qui ont influencé l'élaboration du continu. Rappelons encore une fois que le texte n'a pas été publié du vivant de l'auteur et qu'il est possible que Bolzano eût désiré y apporter encore des précisions. Aurait-il ainsi échappé aux critiques de Georg Cantor ?

### § 3. Conclusion

On ne soulignera jamais assez le rôle considérable que Bolzano a joué en mathématiques. Son œuvre contient l'ébauche de maintes notions modernes, telles celles de puissance et de classe d'un ensemble.

Un autre mérite incontestable de Bolzano est d'avoir signalé l'existence de lacunes dans l'édifice logique de l'analyse. Il a montré combien il est dangereux d'énoncer et de démontrer des théorèmes isolés sans contrôler les théorèmes leur servant de base et sans examiner très soigneusement leur ordre logique. Bolzano avait comblé une lacune importante. Mais son théorème, à son tour en fit apparaître une nouvelle qui lui avait cette fois-ci échappé : le théorème exige une définition rigoureuse de l'ensemble des nombres réels (voir chap. IV). Mais la lacune même de l'œuvre de Bolzano devait être fructueuse ; elle est à l'origine des recherches sur l'ensemble des nombres réels, qui allaient débiter incessamment.

## CHAPITRE III

### GEORG CANTOR (1845—1918)

L'époque dont nous allons nous occuper est particulièrement riche en résultats. Si Dedekind a mis au point le continu arithmétique par sa définition de l'ensemble des nombres réels à l'aide du procédé de la coupure (voir chap. IV), le mérite d'avoir discuté le problème du continu dans toute sa généralité revient plutôt à Cantor. Ce dernier s'est occupé des difficultés mises en lumière par les *Paradoxien des Unendlichen* de Bolzano. Pour Fraenkel (1) (p. 101), c'est Cantor qui a réussi à jeter un pont sur l'abîme séparant le discret et le continu. Cette affirmation signifie sans doute que Cantor a su donner des définitions mathématiquement satisfaisantes et du discret et du continu à l'aide de la seule théorie des ensembles. Nous verrons dans ce chapitre qu'à son grand regret, Cantor n'a pas réussi à trouver un passage du discret au continu a priori. Mais, avant d'aborder ses travaux, montrons l'influence de Weierstrass sur son élève Cantor.

#### § 1. Karl Weierstrass (1815-1897)

Cantor a emprunté à Weierstrass la notion de « zusammenhängend ». Nous renonçons à traduire ce mot, car nous verrons (chap. V) que le terme a été utilisé différemment par Hausdorff et que l'interprétation que ce dernier en donne est entrée dans la terminologie moderne avec le terme français de « connexe ». Weierstrass, occupé à des recherches sur le prolongement d'une fonction analytique, fit paraître le 12 août 1880 dans le *Monatsbericht der Königlichen Akademie der Wissenschaften, Berlin*, un article intitulé *Zur Funktionenlehre*. Weierstrass y définissait un ensemble  $A$  (Gesamtheit) de domaines de convergence (Convergenzbereiche) formant une variété à deux dimensions. C'est à ce propos qu'il introduisit le terme de « zusammenhängend ». Il n'en donna malheureusement aucune définition, d'où les différentes interprétations possibles.

Il est probable que Weierstrass comprenait le mot « zusammenhängend » dans le sens des Grecs : « d'un seul trait, d'un seul morceau ». Il jugeait par là la notion probablement trop courante et suffisamment intuitive pour mériter des commentaires. Vu le contexte, il nous semble que la définition de Hausdorff répondra mieux à ce qu'entendait Weierstrass par « zusammenhängend » que celle énoncée par Cantor.

Weierstrass parlait également d'un continu (Continuum) sans spécifier ce qu'il entendait par ce terme. Il est possible qu'il ne se soit pas posé de question à ce sujet. Il étudiait en effet dans ce texte les fonctions analytiques et il n'est pas exclu qu'il ait simplement transposé la continuité d'une fonction à la continuité de l'ensemble sur lequel opère cette fonction. Il semble bien que la transposition soit intuitivement évidente.

Mais nous verrons qu'il faudra justement les travaux de Georg Cantor pour que les mathématiciens abandonnent cette manière de faire un peu simpliste.

## § 2. L'axiome de Cantor

Avec les travaux de Georg Cantor, nous allons aborder une époque durant laquelle l'élaboration du continu mathématique a été un sujet de préoccupation constante pour les mathématiciens. Afin de bien comprendre combien ce travail était ardu, nous suivrons son évolution à travers les textes, dans l'ordre de leur parution.

En essayant de suivre l'évolution de la notion de continuité, nous espérons signaler toutes les réflexions que Cantor a faites au sujet de ce problème et déceler les causes des fluctuations de ses idées.

La continuité d'un ensemble a été un des « leitmotiv » des travaux de Cantor, le drame même de sa vie. Comme nous allons le montrer, Cantor, penseur, n'a jamais été entièrement satisfait par la solution du problème du continu donnée par Cantor mathématicien. C'est sans doute pour cette raison qu'il parle à toute occasion du continu, de ce problème qui allait finalement devenir pour lui une hantise.

Soulignons que Cantor n'a écrit aucun traité. Il a publié ses résultats sous forme d'articles parus dans diverses revues, d'où certaines redites, reprises et mêmes confusions dans la terminologie employée.

Au fur et à mesure des résultats obtenus, il introduisait des commentaires intercalés souvent entre l'énoncé d'un théorème et sa démonstration. Sortir de leur contexte ces lignes si spontanément écrites pour les analyser à part serait trahir sa pensée.

Suivons maintenant les travaux de Cantor :

En 1872, il publia dans les *Mathematische Annalen* vol. 5 (p. 123-132) une étude intitulée *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*.

C'est à cette occasion qu'il sentit la nécessité de définir les nombres réels. La construction des nombres réels n'appartient pas directement à notre sujet et nous noterons seulement que Cantor procédait d'une manière analogue à celle de Weierstrass et admettait comme seul fondement valable le livre X d'Euclide. Ce qui nous intéresse, c'est l'application géométrique qu'elle suggéra à son auteur.

Ayant défini les nombres réels, Cantor tenta immédiatement d'établir un lien étroit entre l'arithmétique et la géométrie : Après avoir défini l'abscisse d'un point sur un axe, il reconnut aussitôt les difficultés que représente l'établissement d'une correspondance bijective entre les nombres réels et les points d'un axe. Aucun auteur avant lui n'avait perçu cette lacune de la géométrie analytique et, par là, de toute l'analyse. Citons son texte. (1) (97) :

Um aber den in diesem § dargelegten Zusammenhang der Gebiete der in § I definierten Zahlengrößen mit der Geometrie der geraden Linie vollständig zu machen, ist nur noch ein *Axiom* hinzuzufügen, welches einfach darin besteht, dass auch umgekehrt zu jeder Zahlengröße ein bestimmter Punkt der Geraden gehört, dessen Koordinate gleich ist jener Zahlengröße, und zwar in dem Sinne gleich, wie solches in diesem § erklärt wird.

Cantor avait donc reconnu — et en cela il était probablement le premier — que la bijection entre l'ensemble des points d'un axe et l'ensemble des nombres réels exige une base axiomatique. La chose est importante puisque cette bijection sert de fondement à la géométrie analytique, utilisée par tous les analystes. Nous pouvons nous demander pourquoi ce rôle devait échoir à Cantor et pourquoi ses prédécesseurs avaient passé outre. En fait nous pensons qu'on doit l'axiome de Cantor en grande partie à Bolzano, ce dernier ayant mis en évidence la nécessité d'une complète rigueur dans l'élaboration des bases.

L'article que nous venons de citer ne contient pas seulement l'axiome qui porte aujourd'hui le nom d'« axiome de Cantor », mais aussi la plupart des notions importantes pour élaborer le continu : puissance d'un ensemble (terme que Cantor attribua à Steiner), ensemble dérivé d'un ensemble (ensemble des points d'accumulation d'un ensemble), notions d'ailleurs devenues classiques.

C'est sans doute pourquoi Zermelo (1) (p. 102) a pensé que cet article était à l'origine même de la théorie des ensembles.

### § 3. La réduction du continu à n-dimensions à l'intervalle ouvert ]0-1 [

En 1878, Cantor fit paraître dans le *Journal de Crelle*, vol. 84 (p. 242-258) *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre* (1) (p. 119 et suiv.).

Dans cet article, Cantor introduisait une relation d'équivalence : deux ensembles sont en relation d'équivalence si l'on peut établir une bijection de l'un sur l'autre. On dit alors qu'ils ont même puissance.

Mais le sujet principal de cet écrit est la réduction du continu à  $n$  dimensions  $R_n$ , au continu linéaire de l'intervalle ]0-1 [.

Cantor commence par l'examen d'ensembles infinis pour en étudier la puissance. Il énonce la proposition suivante : la puissance de l'ensemble des nombres entiers positifs est la plus petite possible.

Cantor décide alors d'étudier la puissance d'autres ensembles infinis, tel le continu qu'il envisageait à ce moment comme composé par parties. Il importe ici de faire remarquer que toute l'étude du continu par la théorie des ensembles a débuté à ce moment-là : ayant défini la puissance d'un ensemble, Cantor désirait appliquer sa nouvelle notion à tous les ensembles connus. Après l'étude des ensembles dénombrables, celle des ensembles non dénombrables, tel celui des nombres réels, s'imposait alors tout naturellement.

Cantor n'est pas satisfait par les travaux de Riemann, Helmholtz et d'autres mathématiciens contemporains (Riemann und Helmholtz und nach ihnen andere). En effet, tous ces auteurs ont considéré un ensemble continu de dimension  $n$ , dont les éléments dépendent de  $n$  variables indépendantes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Cantor remarque tout de suite qu'ils ont sous-entendu une correspondance bijective continue entre les éléments et les variables en ce sens qu'à une très petite variation des uns correspondait également une très petite variation des autres.

Cantor ne peut se déclarer d'accord avec cette façon de faire et il décide donc de mettre au point la notion de la continuité d'un ensemble. Il reconnaît que ses confrères confondent, sans exception, ce que nous nommons aujourd'hui une « application continue » et un « ensemble continu », ou plutôt « compact » (voir chap. V).

Cantor veut examiner si la continuité d'un ensemble est impliquée par l'existence d'une bijection établie entre l'ensemble en question et l'ensemble des nombres réels.

Pour cela il se propose tout d'abord de montrer qu'un continu de dimension  $n$  dépend du choix de  $n$  variables indépendantes. Il y échoue et démontre au contraire que tout continu, quelle que soit sa dimension, peut être bijectivement appliqué sur le continu linéaire de l'intervalle ]0-1 [ ; il suffit de choisir une seule variable indépendante  $t$ .

Qu'un continu de dimension  $n$  soit de même puissance que celui de l'intervalle ]0-1 [, cela semblait paradoxal à l'époque, même à Cantor. Ce dernier avait soumis une première démonstration de ce théorème à Dedekind (lettre du 20 juin 1877). Il la modifia ensuite en remplaçant certaines fractions décimales par des fractions continues, ce qui demandait un remaniement complet. Cette seconde démonstration contient la méthode graphique bien connue.

Le 29 juin 1877, Cantor écrivit de nouveau à Dedekind, car il était impatient de connaître son opinion au sujet de sa seconde démonstration. C'est en français qu'il exprima son étonnement à propos du résultat obtenu : « Je le vois, mais je ne le crois pas. »

Dedekind, dans sa lettre du 2 juillet, répondit qu'il trouvait la démonstration rigoureuse, mais que le théorème heurtait son intuition. Le fait que des mathématiciens comme Gauss, Riemann et Helmholtz avaient toujours admis tacitement qu'un continu de dimension  $n$  dépendait de  $n$  variables indépendantes rendait Dedekind très prudent. Il conseilla donc à Cantor de ne pas entreprendre de polémique publique « contre les articles de foi admis jusqu'à présent ». (Cavaillès (1) p. 216). Signalons que la crainte d'une controverse passionnée était fondée ; Cantor, dans son enthousiasme, parlait de « déductions philosophiques ou mathématiques qui utilisaient cette hypothèse erronée, inadmissible ». Dedekind avait du reste mal interprété les intentions de Cantor en croyant que ce dernier voulait remettre en question le concept même d'un continu à  $n$  dimensions. A cette occasion, il signala la lacune réelle contenue dans les théories émises à l'époque : les auteurs admettaient implicitement que la bijection entre l'ensemble des anciennes coordonnées déterminant l'ensemble continu à  $n$  dimensions et l'ensemble des nouvelles coordonnées était une fonction continue et c'est Dedekind qui souligna que Cantor, dans la démonstration de son théorème, utilisait une fonction discontinue. Cantor finit par rassurer son prudent correspondant dans une lettre du 4 juillet 1877.

Répetons que Cantor avait trouvé l'énoncé de ce théorème presque accidentellement. Son intention première n'était que de rechercher les propriétés d'un ensemble continu, afin d'en examiner la puissance. Le problème toutefois avait déjà attiré son attention.

Fraenkel, dans sa biographie (Cantor (1) p. 452-483) note, en effet, que Cantor s'occupait de la réduction du continu de dimension  $n$  depuis 1874.

Après les échanges de vue avec Dedekind, le travail intitulé « Eine nach  $n$  Dimensionen ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit lässt sich eindeutig und vollständig einer stetigen Mannigfaltigkeit von einer Dimension zuordnen », fut déposé au *Journal de Crelle* le 12 juillet 1877. Il ne fut publié qu'en 1878. Ce retard affligea Cantor, qui y vit l'effet de la malveillance de Kronecker, un de ses maîtres et Fraenkel pense que tel fut effectivement le cas.

Soulignons encore l'importance du résultat de Cantor. Son théorème ramène l'étude d'un continu de toute dimension à l'étude d'un continu à une dimension. Mais il faut reconnaître qu'intuitivement, il reste encore aujourd'hui assez difficile d'admettre que l'on puisse négliger sans plus les dimensions dans un problème mathématique.

#### § 4. L'idée d'un espace discontinu

Cantor fit paraître dans les *Mathematische Annalen* (vol. 15 (1879), vol. 17 (1880), vol. 20 (1882), vol. 21 (1883), vol. 23 (1884) un texte intitulé *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*. Nous ne relevons ici que ce qui concerne notre sujet.

Il semble bien que les résultats intéressants déjà obtenus l'aient encouragé à poursuivre l'étude du continu.

Tout d'abord, il introduit la notion d'ensemble dérivé (Ableitung) en signalant tout de suite qu'elle va être primordiale dans son étude (1) (p. 139).

Relevons en passant qu'il y définit des ensembles de premier et deuxième type (erster und zweiter Gattung): Si l'on calcule les dérivées successives d'un ensemble de premier type, il en existe une telle que  $P^{(n)} \equiv 0$ ; si tel n'est pas le cas, l'ensemble est dit de second type.

Plus loin (1) (p. 140), Cantor note que la comparaison d'un ensemble de points avec l'intervalle continu ]0-1 [ de la droite — il prend ici le continu a priori — peut donner des résultats intéressants. Il se base ainsi sur le modèle quasi concret de la droite-support. Comme nous le verrons, il récusera plus tard tout modèle concret du continu, par exemple celui de l'espace, représentable pourtant par l'intervalle ]0-1 [ de la droite. Nous trouvons ici peut-être une des raisons qui ont incité Cantor à rechercher plus tard une définition du continu aussi parfaite que possible. Notons pour son importance la définition d'un ensemble ponctuel partout dense dans un intervalle (überalldicht in einem gegebenen Intervalle):

Liegt P teilweise oder ganz im Intervalle ( $\alpha \dots \beta$ ) so kann der bemerkenswerte Fall eintreten, dass jedes noch so kleine in ( $\alpha \dots \beta$ ) enthaltene Intervall ( $\gamma \dots \delta$ ) Punkte von P enthält. In einem solchen Falle wollen wir sagen, dass P im Intervalle ( $\alpha \dots \beta$ ) überall-dicht (partout dense) sei. (1) (140).

Cantor rappelle ensuite quelques définitions données antérieurement, telle celle de la puissance d'un ensemble. Il répartit les ensembles de même puissance dans une même classe: le dénombrable constitue la première de ces classes, l'ensemble des nombres réels de l'intervalle ]0-1 [ est un représentant de la deuxième classe. Pour justifier cette idée, Cantor revient à son théorème sur la non-dénombrabilité de l'ensemble des nombres réels, énoncé en 1874.

A la page 143, Cantor démontre ce qui suit:

Soit un ensemble E partout dense dans l'intervalle  $[a - b]$ . Tout intervalle  $[c - d]$ , contenu dans  $[a - b]$ , arbitrairement petit, contient des nombres faisant partie de E. Alors on peut montrer qu'il existe des nombres  $n$  dans  $[a - b]$  non éléments de E.

Ce théorème souligne donc la différence qui existe entre la densité et la continuité. Mais ce n'est pas tout. Cantor reprend ici une vieille idée: on doit pouvoir compléter un ensemble partout dense, afin de le rendre continu.

Citons encore quelques résultats intéressant notre étude: On groupe les ensembles de même puissance dans une même classe. En fait, Cantor proposait en quelque sorte une partition des ensembles en classes d'équivalence d'ensembles équipotents. Les ensembles équipotents sont dits du même type ou appartenant à la même classe. Les ensembles du premier type sont définis par  $P^{(\infty)} \equiv 0$  et Cantor affirme, sans donner de raison, que le deuxième type ne saurait être décrit aussi simplement.

Il a, à cette époque, pleinement pris conscience du rôle joué par la théorie des ensembles dans l'étude du continu et a reconnu que sa théorie pouvait servir à décrire aussi bien le discontinu que le continu et qu'elle donnait, au surplus, la possibilité de les distinguer l'un de l'autre (1) (p. 152) :

*Unstetiges und Stetiges findet sich solcherweise von demselben Gesichtspunkt aus betrachtet und mit gemeinschaftlichem Mass gemessen.*

Plus loin, il donne encore des résultats d'une importance primordiale :

Soit un domaine  $A$  continu et un ensemble ponctuel  $M$  dénombrable et partout dense par rapport à ce continu. Dans le domaine restant  $\int_A^M$  il est encore possible de relier deux points par une ligne continue dont tous les points appartiennent à  $A$  sans qu'elle rencontre aucun point de  $M$ .

Ce théorème exprime une propriété importante du calcul des alephs, dont Cantor parlera quand il aura introduit les nombres cardinaux. Il met déjà en évidence que  $\aleph_1 - \aleph_0 = \aleph_1$ .

Il montre aussi que le fait de soustraire un ensemble dénombrable d'un continu crée relativement peu de lacunes dans ce continu, si peu même que des applications continues sont encore possibles sur lui. Ce résultat sera étayé par un second théorème :

Soit  $A$  une partie continue et « zusammenhängend » du plan infini,  $M$  un ensemble de points partout dense dans  $A$  et dénombrable. Soient  $N$  et  $N'$  deux points de  $A$ , non de  $M$ . Joignons  $N$  et  $N'$  par une courbe continue  $l$  dans  $A$ .  $l$  peut être remplacée (ersetzt werden kann) par une autre courbe  $l'$  qui relie  $N$  et  $N'$  d'une manière continue et qui ne passe par aucun point de  $M$ .

Comme nous l'avons fait pour Weierstrass, nous renonçons à traduire « zusammenhängend » dans les textes de Cantor. Cette notion lui est propre et elle est également trop différente du « connexe » moderne introduit par Hausdorff (voir chap. V). Du reste, Cantor utilise ici les mots « stetig » et « zusammenhängend » sans les avoir encore définis.

Par ailleurs, Cantor avait remarqué qu'il devait préciser davantage la notion de continu et il en donne sinon une définition prédicative, du moins quelques commentaires (1) (p. 156 et suiv.).

Il pense que ses théorèmes doivent aider à concevoir l'espace à trois dimensions, notion dont nous nous servons pour expliquer le monde coneret et ses phénomènes naturels. D'après lui, notre espace, par les formes (Formen) que nous y trouvons comme par les mouvements que nous y voyons, semble être un continu a priori. Or, les études de Dedekind (Cantor cite *Stetigkeit und irrationale Zahlen*), comme aussi ses propres travaux, ont montré que l'hypothèse de la continuité de l'espace à trois dimensions en implique une autre

selon laquelle chaque point donné dans un système de coordonnées rectangulaires par trois nombres  $x$ ,  $y$  et  $z$ , c'est-à-dire trois éléments de l'ensemble des nombres réels, fait partie de l'espace continu à trois dimensions.

Cantor souligne qu'admettre ce fait est un acte arbitraire (ein freier Akt unserer gedanklichen Konstruktionsfähigkeit). Nous savons du reste que le « freier Akt » est consacré par l'acceptation de l'axiome de Cantor. Ainsi il écrit (1) (p. 156) :

*Die Hypothese der Stetigkeit des Raumes ist also nichts anderes, als die an sich willkürliche Voraussetzung der vollständigen, gegenseitig-eindeutigen Korrespondenz zwischen dem dreidimensionalen rein arithmetischen Kontinuum ( $x.y.z.$ ) und dem der Erscheinungswelt zugrunde gelegten Raume.*

Cantor relève immédiatement que rien ne nous empêche d'envisager un espace à trois dimensions dont nous aurions soustrait certains points, donc de concevoir un espace discontinu. Et c'est ici qu'il se désolidarise de ses prédécesseurs et d'un bon nombre de ses contemporains pour lesquels l'analyse était en quelque sorte supportée par un continu.

Cantor a privé le continu de son rôle prépondérant. A l'aide des théorèmes cités il a montré que le mouvement continu, le flux, ne nécessite pas de « support » continu. Il n'est donc pas possible de conclure à la continuité du « support d'un mouvement » de la seule continuité du mouvement.

Rappelons qu'Aristote, dans ses définitions et ses commentaires, avait déjà séparé l'espace et le mouvement. Comme nous l'avons dit aussi, une certaine insouciance avait été fructueuse au début de l'analyse, mais la théorie des ensembles devait presque automatiquement nécessiter une révision complète des fondements.

Nous ne saurions assez insister sur l'originalité de la pensée de Cantor. En effet, aujourd'hui « héritiers » de Cantor, il nous semble évident qu'une application peut se faire d'une manière continue, même si les ensembles de départ et d'arrivée sont discontinus, que l'application est une chose et l'ensemble une autre. D'ailleurs, dans la notion d'application continue, nous avons gardé une certaine continuité intuitive qui soutient la notion abstraite.

Mais pour les contemporains de Cantor, cette différence entre l'application continue et les ensembles-support n'était nullement acquise, l'un étant intuitivement substitué à l'autre. Dans cette perspective, on comprend que les théorèmes de Cantor devaient heurter plus d'un mathématicien de l'époque.

Notons encore que Cantor, comme Bolzano, considérait l'espace continu comme une création mathématique, comme une « willkürliche Voraussetzung » pour reprendre ses propres termes. Or, plus tard il en viendra à nier toute création mathématique et il considérera ses résultats comme des « découvertes », c'est-à-dire comme la prise de conscience de certains éléments réels et préexistants. Est-ce une influence fortuite de Dedekind qui lui avait fait admettre le terme de « création » ? Cela n'est pas exclu. Mais n'oublions pas que c'est la défense

de l'« existence réelle » des nombres transfinis qui a poussé Cantor à rejeter plus tard toute idée de « création » en mathématiques. Dans ce texte-ci, n'ayant pas à défendre l'existence du continu a priori, Cantor ne semble pas redouter la « création » d'un continu mathématique à l'aide d'une définition efficace.

Le continu dont Cantor parle dans ses commentaires n'est rien d'autre que l'espace ponctuel, image de l'ensemble des nombres réels. Cet espace est continu pour autant que l'ensemble des nombres réels le soit. Au moment où Cantor écrivait ces lignes, il était encore entièrement d'accord avec Dedekind ; il ne le restera pas sans réserve, comme nous le verrons bientôt.

Il est fort probable que Cantor a emprunté les termes « continu arithmétique » à Dedekind. Le « continu arithmétique » est un continu composé par parties. Soulignons le fait, car Cantor ne reparlera plus jamais d'ensemble continu, mais de domaine continu, ce qui aura son importance.

En résumé, nous pouvons dire que Cantor a, par ses articles publiés de 1878 à 1882, précisé la notion de continuité en arithmétique en insistant sur la distinction à faire entre la continuité d'une application et celle d'un ensemble et en montrant que la première n'implique pas la seconde. Du même coup, il suggérait qu'un espace discontinu n'était pas à reléguer parmi les curiosités mathématiques, mais qu'il pouvait jouer un rôle utile en analyse.

Toutefois, hormis quelques commentaires, nous ne savons pas encore ce que Cantor entend par un continu ; il ne nous a pas encore donné sa propre définition. Tout au plus a-t-il introduit l'axiome qui offre une possibilité de définir le continu, possibilité qui est peut-être une des plus efficaces que nous connaissions en analyse. Une application bijective peut être établie entre l'ensemble des points d'un espace ponctuel et l'ensemble des nombres réels.

## § 5. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883 (Math. Annalen, vol. 21)

### *a) Cantor et la « réalité mathématique » des nombres.*

L'article cité fait partie de « Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten », mais il porte un sous-titre autonome. Dans son introduction, Cantor souligne qu'il est bien conscient de la nouveauté du sujet et des méthodes mises en jeu. Pour nous, ces pages sont précieuses, car plus d'une fois Cantor y précise ses intentions, indique ses sources et cherche des comparaisons concrètes.

S'il y reprend des définitions et des résultats contenus dans ses travaux antérieurs, il n'en reste pas là.

Tout d'abord, il défend sa notion de transfini contre de très nombreuses attaques. L'introduction d'un calcul qui utilisait systématiquement la notion d'infini n'allait pas sans choquer tant les mathématiciens que les philosophes,

voire les théologiens. Cantor prospecta les œuvres des mathématiciens et philosophes grecs pour y trouver des arguments qui pourraient appuyer sa notion de « *eigentlich Unendliches* », notion mal comprise à l'époque. Notons en passant qu'il appliqua le « principe de la continuité » de Poncelet, principe qui permet d'affirmer que dans une certaine mesure une fonction jouit à l'infini d'une propriété qu'elle possède dans le fini.

D'autre part, il reprend la question de la puissance d'un ensemble. Il annonce (1) (p. 167) qu'il démontrera ultérieurement que la puissance de la seconde classe non seulement est différente de celle de la première, mais encore qu'il n'y en a point d'intermédiaire.

Au début du § 4 (1) (p. 171), se trouve un passage intéressant :

Die erweiterte Zahlenreihe kann, wenn es die Zwecke fordern, ohne weiteres zu einer kontinuierlichen Zahlenmenge vervollständigt werden, indem man zu jeder ganzen Zahl  $\alpha$  alle reellen Zahlen  $x$ , die grösser als Null sind und kleiner als Eins hinzufügt.

Cantor reprend ici l'idée de « compléter » le discontinu afin de le rendre continu. Il se pose alors une question qui occupa aussi Hermann Weyl (1).

Ayant obtenu une certaine extension « vers le haut » des nombres réels (Erweiterung des reellen Zahlengebietes), peut-on intercaler des nombres « hyper-réels » entre les nombres réels déjà obtenus à l'aide des nombres rationnels ?

Autrement dit, y a-t-il des nombres contenus « entre » les réels, de la même façon que les nombres irrationnels le sont entre les nombres rationnels ? Y aurait-il des lacunes (mutmassliche Zwischenstellen) dans l'ensemble des nombres réels ? Cet ensemble ne serait-il donc pas complet ?

Ici, Cantor mettait même en question le bien-fondé de son propre axiome ; une fois de plus, il ne se refusait pas à discuter les fondements les mieux acceptés. Et cela montre que, pour lui, un axiome pouvait, devait même être abandonné dès qu'il ne répondait plus à la « réalité mathématique ». Par cette attitude, Cantor est assez proche de Veronese (voir chap. VI), mais non de Dedekind (voir chap. IV).

A vrai dire, il ne donna jamais de réponse à sa question, mais en la posant, il témoignait n'avoir pas admis sans autre que les nombres réels « couvrent » le continu a priori, la droite-support. Dans les lignes qui suivent, Cantor défend la nécessité de bien distinguer entre « *eigentlich- und uneigentlich Unendliches* », notions confondues jusque-là. Il attaque également les mathématiciens qui tenaient à fonder les nombres réels sur des nombres entiers et pour lesquels les nombres irrationnels n'avaient qu'une signification formelle ; il leur reproche l'inexactitude de leur procédé. Mais ne perdons pas de vue que Cantor écrit ces lignes pour la défense de ses nombres transfinis qu'il veut « réels, existants ».

Cantor n'a pas résisté à la tentation de tous les auteurs qui s'occupent du problème du continu et il écrit aussi des considérations sur le monde physique.

Il nous dit ne pas croire aux atomes, « chemisch-physikalisches Atom, Demokritisches ». Il ne croit pas à leur existence, mais les tient cependant pour une fiction (Fiktion) utile.

Nous constatons une fois de plus combien Cantor tenait au continu a priori et nous y trouvons la raison pour laquelle il se souciait tant de sauvegarder ce continu qu'il jugeait indispensable en tant qu'homme, sinon en tant que mathématicien.

Comme on le voit, les *Paradoxien des Unendlichen* ont beaucoup occupé la pensée de Cantor ; Bolzano demeure l'instigateur de la théorie des ensembles. Mais il restait beaucoup à faire. Bolzano ne confondait-il pas encore, comme le relève Cantor, « Anzahl » et « Mächtigkeit » ?

La position de Cantor face à la métaphysique nous est également connue (1) (p. 183). Il trouve dangereux que les mathématiques puissent être soumises préalablement à son contrôle ; elles risquent de devenir stériles. Il revendique pour elles une liberté totale : « ... denn das Wesen der Mathematik liegt gerade in ihrer Freiheit. » Il demande toutefois une certaine prudence lorsqu'il s'agit de recherches en mathématiques appliquées.

Si Cantor refusait un contrôle métaphysique, il ne se prive pas de l'exercer lui-même ; il exige une liberté totale pour les mathématiques, mais recherche constamment la « réalité mathématique ». Il y a ici une certaine contradiction peut-être due à son attitude passionnée. Dans ses théories sur les nombres transfinis, Cantor est amené à reparler de la définition des nombres réels. Il signale que Weierstrass est le premier à avoir renoncé à définir l'ensemble des nombres réels comme l'ensemble des sommes des séries convergentes à termes rationnels, évitant ainsi une vieille erreur. Il critique par contre la coupure de Dedekind en utilisant un argument repris depuis par certains intuitionnistes : tout en admettant l'efficacité de la coupure, il lui reproche de ne pas donner une vue d'ensemble des nombres réels. En effet, le procédé permet bien de définir n'importe quel nombre réel et de le calculer par approximation, mais il n'indique pas comment obtenir d'une manière simple et efficace tout l'ensemble des nombres réels.

Pour définir l'ensemble des nombres réels, Cantor applique la théorie des suites fondamentales que Heine avait utilisée également. Nous en reparlerons (voir chap. IV). Pour Cantor, si dans une suite fondamentale  $\sum a_n = b$  existe,  $b$  n'est pas « construit » par ce procédé, mais seulement « décrit ». Un nombre irrationnel existe indépendamment de sa construction ; il existe de façon intrinsèque, aussi bien qu'un nombre naturel et ce n'est nullement le calcul qui le crée. Cela lui permet de revendiquer le même degré de « réalité » pour ses nombres transfinis si discutés à l'époque.

Une fois de plus, tout en revendiquant une liberté théorique, Cantor voulait néanmoins construire ses théories de telle sorte qu'elles atteignent la « réalité ».

En formulant son axiome, il prenait la droite comme modèle de l'ensemble des nombres réels. Les lacunes de l'ensemble des nombres rationnels ne sont

alors pas comblées par le travail des mathématiciens créateurs des nombres irrationnels, mais uniquement par ce que Cantor appelait « la réalité mathématique ». Pour lui, non seulement les nombres irrationnels existent, mais ils préexistent à toute activité mathématique.

Techniquement, il définit des suites fondamentales de premier ordre et il indique un procédé pour former des suites analogues d'ordre supérieur. Il remarque, en réfutant une critique de Dedekind qui l'avait mal compris, que ces suites fondamentales aboutissent également à des nombres réels et non à des nombres d'une nouvelle espèce encore inconnue. Non sans surprise d'ailleurs, puisqu'il considère comme bizarre (*merkwürdiger Umstand*) le fait que des suites fondamentales ayant un nombre ordinal de la troisième classe n'existent pas. Autrement dit, les nombres de la première et de la seconde classe épuisent toutes les possibilités de construction de nombres imaginables à l'aide des suites fondamentales et applicables en analyse : il n'y aurait donc pas de nombres « hyper-réels » dans une analyse cohérente. La démonstration de cet énoncé ne fut jamais donnée.

Enfin Cantor souligne qu'il n'a pas eu besoin, comme Weierstrass, de la commutativité dans ses calculs, ce qui lui a permis de généraliser sa méthode pour les nombres transfinis.

#### *b) Quelques considérations générales sur le continu.*

Dans le § 10 des *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, Cantor reprend la question du continu pour la discuter plus à fond. Pourquoi à cet endroit-ci ? Nous pensons y voir l'influence de Dedekind qui avait mis en rapport la définition des nombres réels avec le continu arithmétique dans *Stetigkeit und irrationale Zahlen* en 1872 déjà. Nous venons de le voir, Cantor avait repris dans son § 9 la notion de nombre réel et celle de nombre transfini. Comme Dedekind, il allait commenter la notion de continuité.

Cantor commence le § 10 par ces mots (1) (p. 190) :

Der Begriff des Kontinuums hat in der Entwicklung der Wissenschaften überall nicht nur eine bedeutende Rolle gespielt, sondern auch stets die grössten Meinungsverschiedenheiten und sogar heftige Streitigkeiten hervorgerufen.

Il est donc prêt à se lancer dans ce qu'il appelle « heftige Streitigkeiten ». Il estime que la différence des points de vue est due à une mauvaise transmission de la notion à travers les siècles. Au surplus, il trouve que les Grecs ont manqué de clarté dans leurs définitions qu'il qualifie d'incomplètes.

D'après l'interprétation de Cantor, Leucippe, Démocrite et Aristote envisagent le continu composé de parties — nommées atomes chez Démocrite — divisibles indéfiniment. Par contre, Epicure et Lucrèce considèrent le continu composé d'atomes indivisibles.

Remarquons que cette différence de conception soulignée par Cantor n'a guère influencé les mathématiciens, mais plutôt les philosophes.  
Cantor écrit (1) (p. 190-191) :

— ; andere wieder statuierten, um diesem Streit fern zu bleiben, mit *Thomas von Aquino*, dass das Kontinuum weder aus unendlich vielen, noch aus einer endlichen Anzahl von Teilen, sondern aus *gar keinen* Teilen bestehe ; diese letztere Meinung scheint mir weniger eine Sacherklärung als das stillschweigende Bekenntnis zu enthalten, dass man der Sache nicht auf den Grund gekommen ist und es vorzieht, ihr vornehm aus dem Wege zu gehen. Hier sehen wir den *mittelalterlich-scholastischen Ursprung* einer Ansicht, die wir noch heutigentages vertreten finden, wonach das Kontinuum ein unzerlegbarer Begriff oder auch, wie andere sich ausdrücken, eine reine *apriorische* Anschauung sei, die kaum einer Bestimmung durch Begriffe zugänglich wäre ; jeder arithmetische Determinationsversuch dieses *Mysteriums* wird als ein unerlaubter Eingriff angesehen und mit gehörigem Nachdruck zurückgewiesen ; schüchterne Naturen empfangen dabei den Eindruck, als ob es sich bei dem « Kontinuum » nicht um einen *mathematisch-logischen Begriff*, sondern viel eher um ein *religiöses Dogma* handle.

Il faut insister sur ces lignes : l'auteur condamne le continu a priori comme inefficace. Il pense même que le continu a priori non composé, non composable, n'est qu'une manière d'ignorer le problème, donc une attitude négative qui doit aboutir à un échec. Il faut donc, tel Aristote, composer ce continu. Mais nous verrons que, si Dedekind a été conséquent, Cantor ne l'est pas toujours. Ce dernier, tout en composant le continu par parties, a un but idéal, jamais atteint, un « but limite », le continu a priori, le continu linéaire de l'intervalle ]0-1 [. Cantor refuse le « mystère du continu a priori » et il s'oppose par là à Veronese (voir chap. VI). Mais nous devons avouer qu'il ne saura pas éclaircir complètement ce « mystère », qu'il se contentera finalement d'une solution efficace. Cantor dit ne pas vouloir rouvrir la controverse ; il recherche une hypothèse de travail qu'il n'a pu trouver chez aucun auteur, hypothèse nécessaire qu'il veut « logisch-nüchtern », mathématique et applicable en théorie des ensembles.

Dans les lignes qui suivent, nous retrouvons les *Paradoxien des Unendlichen* de Bolzano, non seulement les idées, mais encore leur enchaînement et leur développement.

Cantor cherche, comme presque tous les auteurs, un modèle concret du continu. Il reprend la notion de temps et remarque tout de suite que sa description nécessite la notion de continuité. Le temps admis a priori n'est pas une substance ni un concept objectif. En le désignant comme un « Hilfs- und Beziehungsbegriff », Cantor lui refuse tout statut objectif et absolu.

Fidèle à Bolzano, Cantor examine aussi l'espace comme modèle possible du continu a priori. Ici aussi, la continuité lui semble indispensable à la description de ce concept.

Pour mieux comprendre les idées de Cantor et montrer jusqu'à quel point sa vision mathématique était englobante, anticipons sur ses publications ultérieures : Cantor fera paraître un travail intitulé *Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume  $G_n$* , (zweite Mitteilung, *Acta Mathematica*, vol. 7, 1885) (1) (p. 261).

Il y expose ses vues sur le monde concret. Nous y trouvons quelques réminiscences pythagoriciennes. L'auteur espère arriver un jour à expliquer les phénomènes de la nature à l'aide de la théorie des ensembles en utilisant surtout la notion de puissance. Il n'est pas satisfait des théories émises jusqu'alors. Il ne peut, par exemple, accepter que les atomes (sogenannte Atome) aient un certain volume, si petit soit-il. Il est persuadé que les éléments de la matière sont strictement sans dimension (streng punktuell) et en nombre infini (aktual-unendlich). Cantor se dit inspiré par Faraday, Ampère, Weber et Cauchy (1) (p. 275). Il est probable qu'il pense aux théories des corpuscules électriques et il affirme sans plus que pour entreprendre des recherches plus approfondies encore, il considère les résultats de ses propres travaux comme indispensables.

Suivant la tradition de Leibniz, Cantor nomme des monades ou unités (Mona-den oder Einheiten) les « éléments » de la matière. L'ayant rejeté auparavant, il ne pouvait pas reprendre le terme d'« atome ». Il distingue deux matières différentes : la matière des corps composée par des « Körpereinheiten » et la matière de l'éther « Aethermaterie ». Tout phénomène doit être explicable par la différence des puissances des ensembles d'éléments des deux matières. Sans donner de précisions, Cantor affirme que la matière des corps doit être un ensemble de la première puissance, celle de l'éther un ensemble de la seconde.

Il utilise donc l'opposition entre le dénombrable et le non-dénombrable. Il ne s'agit pas d'un simple jeu puisqu'il annonce — sans d'ailleurs la donner — une justification de ces théories assez déconcertantes. Des définitions telles que celles de « décomposition en adhérences, cohérences et inhérences » furent considérées comme infructueuses en mathématiques par Zermelo (1) (p. 277). Mais Cantor n'avait-il pas ébauché ces théories pour construire un système de la matière, sans se préoccuper particulièrement des applications éventuelles en mathématiques ? Il restait bien ainsi dans la tradition de certains mathématiciens : en s'occupant de la continuité, il émettait ses propres hypothèses pour tenter de donner une explication mathématique du monde physique.

Relevons encore que Cantor répéta dans cet article, § 3 (1) (p. 271) :

— dies wird erst dann sichergestellt sein, wenn wir gezeigt haben werden, dass bei den Punktmengen innerhalb  $G_n$  keine höhere Mächtigkeit vorkommen kann als die zweite ;

Nous trouvons ici le premier énoncé de l'hypothèse du continu (Cantorsche Vermutung) sur laquelle il reviendra souvent.

c) *La définition mathématique du continu.*

Après avoir exposé ses réflexions et ses réserves, Cantor se résigne, comme Eudoxe, à procéder d'autorité (1) (p. 192) :

Somit bleibt mir nichts anderes übrig, als mit Hilfe der in § 9 definierten reellen Zahlenbegriffe einen möglichst allgemeinen rein arithmetischen Begriff eines Punktkontinuums zu versuchen. Als Grundlage dient mir hierbei, wie dies nicht anders sein kann (pour les travaux de Cantor !) der *n*-dimensionale ebene arithmetische Raum  $G_n$ , d. h. der Inbegriff aller Wertsysteme  $(x_1 / x_2 \dots / x_n)$ , in welchen jedes  $x$  unabhängig von den anderen *alle reellen* Zahlenwerte von  $-\infty$  bis  $+\infty$  erhalten kann.

Cantor prend donc des systèmes de nombres réels,  $x_1, \dots, x_n$ . Chacun est appelé point de  $G_n$  et la distance entre deux de ces points est donnée par la formule :

$$\sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + \dots + (x_n' - x_n)^2}$$

Il rappelle qu'il suffit d'examiner le continu linéaire de l'intervalle ] 0-1 [, sa puissance étant celle d'un continu de dimension  $n$  quelconque.

Permettons-nous une remarque : la métrique de Cantor est celle de ce continu linéaire. Déjà en parlant de l'espace ponctuel, image de l'ensemble des nombres naturels (voir § 4) il admettait une base orthonormée ; or, un système d'axes affines aurait été suffisant, mais n'était pas encore courant à l'époque (les idées de Klein ne sont apparues qu'en 1872 dans le programme d'Erlangen). Dans le continu conçu par Cantor, l'axiome d'Archimède est vérifié ; en envisageant une base orthonormée, il introduisait une méthode globale. En fait, on pourrait travailler avec des hypothèses moins fortes en se référant à une base affine, ce qui implique alors  $n$  métriques unidimensionnelles, une sur chaque axe, sans relation l'une avec l'autre. Or dans l'espace  $G_n$ , elles pourraient effectivement être différentes dans chaque direction fondamentale de la base choisie. Nous pourrions donc travailler en géométrie affine archimédienne.

Afin de mieux comprendre la suite des idées de Cantor, suivons ses textes, même au risque d'un exposé peu systématique.

Cantor se pose la question suivante : Que faut-il pour qu'un ensemble de points  $P$  contenu dans  $G_n$  soit un continu ?

Avant de répondre, Cantor nous fait part de résultats plus ou moins fondés : Il formule la remarque que le continu doit avoir la puissance 2 si le dénombrable a la puissance 1. Il en promet une démonstration qu'il chercha sa vie durant, sans parvenir à un résultat. Malgré les travaux en cours, la démonstration complète manque toujours et l'énoncé subsiste encore sous le nom de « Cantorsche Vermutung », l'« hypothèse du continu ».

L'hypothèse du continu une fois admise, Cantor affirme que :

1) les ensembles infinis de points sont de la première ou de la seconde classe ;

- 2) l'ensemble de toutes les fonctions qui peuvent être représentées par une série infinie n'a que la deuxième puissance ; il est « dénombrable » par les nombres de la troisième classe ;
- 3) un ensemble infini est toujours « dénombrable » (dans le sens généralisé de Cantor) par la classe des nombres qui lui est supérieure.

Ces affirmations ne sont pas démontrées.

Dans la note 10 de la page 207, Cantor va encore plus loin en supposant que :

- 1) l'ensemble de toutes les fonctions continues et de toutes les fonctions intégrables pourrait avoir la puissance 2 ;
- 2) l'ensemble de toutes les fonctions continues et discontinues pourrait avoir la puissance 3.

Dans ses commentaires (8) (1) (p. 209), Zermelo considérait ces affirmations comme des extensions de l'hypothèse du continu.

Cantor découvre encore (1) (p. 237) que tous les ensembles parfaits ont même puissance : celle du continu linéaire ]0-1 [.

Poursuivant ses recherches (1) (p. 193) :

Um nun dem allgemeinen Begriff eines innerhalb  $G_n$  gelegenen Kontinuums näher zu kommen...

Cantor part donc de  $G_n$  défini auparavant, espace arithmétique à  $n$  dimensions contenant un continu. Cela était nouveau. Jusqu'alors, le continu avait toujours été considéré comme un « contenant » ; le voilà « contenu » dans un espace. Tout d'abord Cantor définit, à l'aide des ensembles dérivés, la notion d'ensemble « parfait » : un ensemble est dit « parfait » s'il contient tous ses points d'accumulation.

Ensuite, il montre : Si  $P^{(1)}$  est de puissance 2, l'ensemble se compose d'un sous-ensemble réductible (ensemble dont l'ensemble dérivé  $R^{(1)} \equiv 0$ ) et d'un sous-ensemble parfait. Il note immédiatement que « réductible » n'est pas synonyme de « parfait » ni « imparfait » d'« irréductible ». Il souligne également qu'un ensemble de points « parfait » n'est pas nécessairement « dense partout ».

La première qualité que possède le continu de Cantor est d'être « parfait ». Cette condition semble lui être nécessaire, mais elle est insuffisante. Notons que, dans un ensemble parfait, il est possible de définir une limite.

La deuxième qualité requise est celle de « zusammenhängend », notion que Cantor va enfin définir : Un ensemble de points  $T$  est « zusammenhängend » si pour deux points quelconques  $t$  et  $t'$ , points appartenant à  $T$ , il se trouve toujours et pour chaque  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petit un nombre fini de points  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , tous éléments de  $T$  et que l'on peut choisir de différentes manières, de telle sorte que les distances  $\overline{tt_1}, \overline{t_1t_2}, \dots, \overline{t_n t'}$  soient toutes inférieures à  $\varepsilon$ .

Comme Zermelo le nota (1) (p. 194) immédiatement, dans le texte même de Cantor, il s'agit d'une propriété métrique du continu.

Hausdorff appellera « Lückenlosigkeit » ce que Cantor nomme « parfait » et Hilbert en fera l'axiome  $V_2$ .

« Zusammenhängend » dans la perspective de Cantor équivaut à l'axiome d'Archimède, axiome qui est à la base de tout procédé de mesure.

Cantor résume sa définition ainsi :

— und [ich] definiere daher ein Punktkontinuum innerhalb  $G_n$  als eine perfekte, zusammenhängende Menge.

Il relève qu'il a enfin obtenu les définitions rigoureuses des concepts « parfait » et « zusammenhängend » et qu'il ne s'agit pas de « mots » seulement (blosse Worte). Sans doute craint-il que sa définition du continu ne subisse le sort de celles de ses prédécesseurs.

Comme chaque fois que Cantor a donné une définition, il en entreprend la défense. A cette occasion, il critique Bolzano et prétend que la définition de ce

dernier est encore satisfaite, si l'on considère  $\int_{G_n} P$ , où  $G_n$  est l'espace arithmé-

tique de dimension  $n$  et  $P$  un ensemble de points isolés, éléments de  $G_n$ . De même, remarque-t-il, des continus séparés les uns des autres répondraient à la définition de Bolzano.

En prenant le texte de Bolzano à la lettre, les réserves de Cantor se justifient. Mais, il est difficile de savoir si Bolzano aurait été d'accord avec l'interprétation que donne Cantor de son texte. Il se peut que l'absence d'une terminologie adéquate ait empêché Bolzano d'exprimer mieux son idée.

Relevons que dans  $\int_{G_n} P$  une application peut être continue. Bolzano s'était-il

donc contenté d'un « continu » qui permettait la chose essentielle à l'époque ? C'est fort possible, car rappelons-nous que Cantor a été le premier à reconnaître que la continuité d'une application n'entraîne par la continuité d'un ensemble sur lequel on opère.

Cantor critique ensuite le continu de Dedekind, tel qu'il l'a défini dans « Stetigkeit und irrationale Zahlen ». Pour Cantor, le continu de Dedekind n'est que « parfait » et Zermelo note, dans son édition des œuvres de Cantor, dans le texte même, « also Lückenlosigkeit bei Hausdorff ».

Cantor dit que le continu de Bolzano jouit d'une des propriétés nécessaires et celui de Dedekind de l'autre. Pour Cantor, le continu de Bolzano ne serait donc pas « complet », mais « zusammenhängend », tandis que celui de Dedekind serait « complet » mais non « zusammenhängend ».

Ces remarques de Cantor sont assez troublantes. Il faut bien avouer que Bolzano n'a pas été très clair en parlant des « points isolés » et des points d'accumulation.

Quant à Dedekind, il n'a pas spécifié, il est vrai, que son continu arithmétique était « *zusammenhängend* ». Nous pouvons donc nous demander si nous avons le droit de parler d'un « continu de Bolzano » ? Nous ne le pensons pas. Bolzano, homme d'une autre époque, n'a jamais prétendu définir le continu ; il s'est contenté de l'analyser. Il en énuméra certaines propriétés et souligna diverses contradictions. On peut supposer qu'il parlait d'un continu a priori dans lequel il admettait « des points ». Un « mystère » subsistait pour lui quand il affirmait que le tout pouvait avoir une propriété dont la partie était dépourvue. Cette dernière réserve permet de réfuter bien des critiques. Enfin rappelons une fois de plus que Bolzano n'a pas publié son texte lui-même.

Nous avons vu que Cantor, lors de sa première description du continu, était d'accord avec Dedekind. Comment donc fut-il amené à élever des critiques ?

Cantor ne se sent pas lié par sa suggestion d'envisager la définition du continu par la simple bijection entre l'ensemble de l'espace ponctuel et l'ensemble des nombres réels quand il écrit (1) (p. 208) :

Ich weiss sehr wohl, dass das Wort « *Kontinuum* » in der Mathematik eine feste Bedeutung bisher nicht angenommen hat ; es wird daher meine Definition desselben von einigen als zu *eng*, von anderen als zu *weit* beurteilt werden, hoffentlich ist es mir gelungen, dabei die *richtige Mitte* zu finden.

Zermelo a relevé d'ailleurs plusieurs inexactitudes dans la terminologie de Cantor, dues vraisemblablement à l'évolution de sa théorie. Rappelons que Cantor n'a pas écrit de traité, mais une suite d'articles. Signalons par exemple qu'il employait dans *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (*Math. Annalen* : vol. 46, 1895, vol. 49, 1897) le terme « abgeschlossen » non dans le sens de « fermé » comme auparavant, sens conservé jusqu'à aujourd'hui, mais dans une signification bien différente : dans un ensemble dit « abgeschlossen », les points limites sont tous du même type d'ordre. Il y a évidemment une différence assez considérable entre ces deux acceptions.

Cela nous montre que Cantor pouvait fort bien reprendre un concept, le définir à nouveau, en négligeant purement et simplement sa première manière de voir. Il pouvait aussi avoir oublié l'approbation donnée à la notion de continuité de Dedekind. En outre depuis ses premières considérations sur le continu, sa pensée avait évolué. Il avait publié ses travaux sur les nombres transfinis où il avait renoncé, nous l'avons vu, à toute idée de « création mathématique ». La « *willkürliche Voraussetzung* » d'un continu créé par la bijection entre l'ensemble des points de l'espace et l'ensemble des nombres réels n'était plus conforme à ses vues. Cantor, refusant toute création abstraite pour n'admettre que la découverte mathématique, ne voulait pas abandonner le continu a priori, intuitif ; il lui fallait trouver un critère de comparaison entre un ensemble de points (*Punktmannigfaltigkeit*) et ce continu idéal qui reste « un ». Nous avons vu comment Bolzano avait résolu, ou plutôt refusé de résoudre le dilemme : le tout n'a pas toujours les mêmes propriétés que la partie. Mais

Cantor ne voulait pas se résoudre à adopter la même attitude. Et il était, ici, très conséquent avec lui-même : quand il se refusait à admettre que le « tout » n'a pas d'autres propriétés que la partie, il raisonnait exclusivement en théorie des ensembles, où ce point de vue-là est le seul possible.

Or, depuis Aristote, le problème était resté entier : entre le continu a priori et le continu composé par parties, il restait à trouver le « clouage ».

Les critiques que Cantor fit à Dedekind sont apparemment injustifiées, si « *zusammenhängend* » équivaut à l'axiome d'Archimède, ce dernier étant, comme nous le verrons, contenu dans la définition de Dedekind. Faut-il donc prendre le concept de « *zusammenhängend* » dans sa forme stricte ? Pour Cantor, « *zusammenhängend* » signifie alors deux choses à la fois : l'axiome d'Archimède et la connexité dans le sens moderne du terme, telle que Hausdorff l'a définie. Vue sous cet angle, la définition du continu de Cantor est donc plus massive que celle de Dedekind et on peut admettre que Cantor a mieux réussi la composition du continu par parties que n'importe qui.

Mais cette définition massive, composée des propriétés exprimées par « *zusammenhängend* » et « parfait » est-elle efficace ? Les mathématiciens ne l'ont pas reprise, bien que l'on doive considérer les travaux de Cantor comme fondamentaux dans ce domaine. Le concept de « compact » est bien plus précis et il est détaché de toute tradition compromettante.

La terminologie ne pouvait être créée par un seul auteur, d'autant moins que Cantor n'était pas toujours très systématique. Il faudra attendre Fréchet et Hausdorff pour reprendre la question.

## § 6. Quelques commentaires de Zermelo

Cantor publia les *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* dans les *Mathematische Annalen* (vol. 46, 1895 et vol. 49, 1897).

Zermelo considérait que le § 11 de cette publication, *Der Ordnungstypus  $\Theta$  des Linearkontinuums  $X$*  marque le sommet de l'œuvre de Cantor (1) (p. 351).

Celui-ci y montre qu'un ensemble  $M$  est du type d'ordre du continu linéaire  $\Theta$  si cet ensemble  $M$  satisfait aux conditions suivantes :

- 1) l'ensemble doit être parfait ;
- 2) il doit posséder un sous-ensemble  $S$  dont le nombre cardinal  $\bar{S}$  est  $\aleph_0$  ; entre des éléments quelconques  $m_1$  et  $m_2$  de  $M$ , il y a des éléments de  $S$  dans leur ordre.

D'après Zermelo, la propriété 2, c'est-à-dire l'existence d'un sous-ensemble partout dense dans  $M$ , est une des découvertes les plus importantes de Cantor. Par contre, il n'est pas nécessaire d'exiger que l'ensemble  $M$  soit « parfait » ; la fermeture de  $M$  aurait suffi puisque la propriété 2 implique le « dense en soi ».

Zermelo suggère de remplacer la propriété 1 par l'exigence de continu (stetig) dans le sens de Dedekind, ce qui allégerait la démonstration. Nous savons toutefois qu'à cette époque Cantor ne voulait plus utiliser la continuité de Dedekind.

Ce point présente une certaine importance pour nous : Zermelo trouve que la notion de « parfait » est une exigence plus forte que celle de « stetig » de Dedekind ou de « lückenlos » de Hausdorff. Or, ce qui vaut pour le type d'ordre vaut aussi pour le continu au sujet duquel Zermelo n'a pas formulé d'objections.

Si Zermelo avait eu raison, Cantor aurait énoncé une axiomatisation plus riche. Dans le § 16 (1) (p. 331) du même article, Cantor montre que la puissance de la seconde classe est égale à  $\aleph_1$ , second nombre cardinal. Cette découverte fait une fois de plus ressortir l'importance de l'hypothèse du continu et la lacune de l'œuvre de Cantor :  $\aleph_1$  est-il le nombre cardinal du continu ?

### § 7. Essai d'une démonstration de l'axiome d'Archimède

En 1888, dans *Zeitschrift für philosophische Kritik* (vol. 91/92), Cantor publia un certain nombre de mémoires et de lettres.

Il attaque en particulier les méthodes que Kronecker, son maître devenu son adversaire irréductible, décrivait dans le *Journal de Crelle* (vol. 92). Cantor insiste surtout sur le fait qu'on ne peut pas décrire d'une manière simple et exacte sa notion d'« aktual-unendlicher Punktvorrat des räumlichen und zeitlichen Kontinuums » à l'aide du « ideellen Vorrat » que certains défendaient. La puissance du continu est en effet plus grande que celle de l'ensemble des nombres entiers. A notre connaissance, c'est la seule fois que Cantor mena une attaque précise à propos du continu et non des notions du transfini.

Le terme « provision de points » (Punktvorrat) du continu nous confirme que Cantor n'a jamais réellement renoncé au continu a priori ; le « Punktvorrat » est « sur » ce continu a priori, qui en reste le support. Cela nous montre une fois de plus les raisons profondes de la critique que Cantor adressa à Dedekind.

Nous n'insisterons pas sur la longue et pénible défense que Cantor avait entreprise pour imposer les nombres transfinis, défense qui le conduisit à envisager même des problèmes théologiques. Souvenons-nous seulement que pour lui, les nombres transfinis existent dans leur « réalité mathématique ».

Dans l'alinéa VI, Cantor résume deux lettres, soit celles qu'il adressa le 13 mai 1887 à F. Goldschneider à Berlin et le 16 mai 1887 à Weierstrass. A cette occasion, il énonce un théorème qui met en question l'axiome d'Archimède comme tel (1) (p. 407) :

*Von Null verschiedene lineare Zahlengrößen (d. h. kurz gesagt, solche Zahlengrößen, welche sich unter dem Bilde begrenzter geradeliniger stetiger Strecken vorstellen lassen), welche kleiner wären als jede noch so kleine endliche Zahlengröße, gibt es nicht, d. h. sie widersprechen dem Begriff der linearen Zahlengröße.*

Cantor ne publie pas la démonstration de cet énoncé mais ce qu'il appelle un « Gedankengang meines Beweises ». De plus, il ne spécifie pas ce qu'il entend par « lineare Zahlengrößen ».

Der Gedankengang meines Beweises ist einfach folgender :

Ich gehe von der Voraussetzung einer linearen Grösse  $\xi$  aus, die so klein ist, dass ihr  $n$ -faches  $\xi \cdot n$  für jede noch so grosse endliche ganze Zahl  $n$  kleiner ist als die Einheit und bewise nun aus dem Begriff der linearen Grösse mit Hilfe gewisser Sätze der transfiniten Zahlenlehre, dass alsdann auch  $\xi \cdot \nu$  kleiner ist als jede noch so kleine endliche Grösse, wenn  $\nu$  irgendeine noch so grosse transfinite Ordnungszahl aus irgendeiner noch so hohen Zahlenklasse bedeutet.

Il pense démontrer en même temps l'impossibilité de l'existence des « aktual-unendlich kleine Grössen », ce qui l'incite à critiquer les travaux de O. Stolz et de Dubois-Reymond, travaux qui faisaient entrevoir la possibilité d'une géométrie non archimédienne.

Dans son texte, Cantor prétend (1) (p. 408) qu'Archimède aurait remarqué la nécessité de donner une démonstration de son axiome. C'est pour cela qu'il aurait utilisé le terme de postulat plutôt que celui d'axiome.

Cantor écrit en conclusion :

Aber aus dem oben von mir aufgeführten Satze folgt, wenn er auf geradlinige Strecken angewendet wird, unmittelbar die Notwendigkeit der Euklidischen Annahme. Also ist das sogenannte « Archimedisches Axiom » gar kein Axiom, sondern ein, aus dem linearen Grössenbegriff mit logischem Zwang folgender Satz.

Dans ses commentaires (1) (p. 439) Zermelo intervient à ce propos et il nous rappelle que les travaux de Hilbert montrent bien qu'un axiome ne doit pas être sorti de son contexte.

## § 8. L'hypothèse du continu (Cantorsche Vermutung)

Comme nous avons pu le constater, en 1884, compte tenu des travaux de Cantor, le problème du continu était presque au point ; la lacune qui subsiste est encore un sujet de recherche aujourd'hui. La démonstration de l'hypothèse du continu, de la « Cantorsche Vermutung »,  $\aleph_1$  est la puissance du continu, semble difficile, voire problématique. Cantor ne s'est jamais résigné à abandonner le problème, drame de sa vie, faille dans son œuvre si critiquée par ailleurs.

En 1900, à Paris, dans son exposé au Congrès des Mathématiciens, Hilbert désignait le problème du continu comme le premier problème à résoudre. Dans les *Göttinger Nachrichten* (vol. 1900), il avait déjà écrit un article à ce propos, article qu'il compléta pour son exposé. Un compte rendu s'en trouve dans les procès-verbaux du congrès, rédigé en français par L. Laugel.

Cantor fut impressionné, flatté même, de l'importance attribuée à son travail, mais aussi dépité de n'avoir réussi à jeter ce que Hilbert nommait « le nouveau pont entre les ensembles dénombrables et le continu ». Relevons que Hilbert parlait de l'idée d'ordre et de la notion de « bien ordonné », et qu'il dénonçait l'impossibilité momentanée de montrer que le continu est bien ordonné en ces termes (texte publié en français par L. Laugel) :

Il me semble extrêmement désirable d'obtenir une démonstration directe de cette remarquable affirmation de M. Cantor, en assignant par exemple effectivement un ordre des nombres, tel que dans tout ensemble partiel on puisse assigner un nombre précédant tous les autres.

Depuis les travaux de Russell et de Zermelo, nous savons que l'introduction de l'axiome du choix allait être nécessaire.

Il va sans dire que l'exposé de Hilbert suscita de nouveaux travaux. Schoenflies (Cantor (1) p. 473) (Schoenflies, *Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver.* 31, 1922) rapporte que Cantor fut fortement impressionné (aufregendes Erlebnis) par la communication faite par Julius Koenig, en 1904, au Congrès international de Mathématiques à Heidelberg. Koenig prétendait avoir démontré que la puissance du continu ne pouvait être égale à un aleph. Comme Cantor, le monde mathématique ressentit une forte impression. Une fois de plus, Cantor se remit au travail. Il montra qu'un lemme de Bernstein, nécessaire dans la démonstration de Koenig, avait été mal interprété par ce dernier. L'affirmation de Koenig s'écroula, la « Cantorsche Vermutung » restait une hypothèse.

## § 9. Bilan provisoire

Cavaillès qualifiait Cantor de « Romantiker » et Dedekind de « Klassiker ». Nous avons relevé que Cantor, dont on loue si souvent la « création », voulait être un « explorateur » et non un « créateur ». Citons à cet effet une lettre de Cantor à Mittag-Leffler, datée du 26 janvier 1884, lettre que Cavaillès (1) (p. 183) traduisait de la façon suivante :

Si l'essence de la mathématique est la liberté, le mathématicien ne fait que découvrir un monde, immanent à son esprit, résidant en soi dans une objectivité absolue — je ne suis quant au contenu de mes travaux que rédacteur et fonctionnaire (Berichterstatter und Beamter).

Ce point de vue impliquait pour Cantor un continu idéal, a priori. L'auteur se plaçait donc sur le même plan que les Eléates : le continu étant un tout, un élément unique, comment pourrait-on le recréer à l'aide d'autres éléments pour le rendre « un » ?

Si nous ne considérons que le texte de la définition du continu de Cantor, nous ne le trouvons guère différent du continu arithmétique. Mais, si nous tenons

compte des critiques que fit Cantor à Dedekind et à Bolzano, nous devons admettre que le continu de Cantor était un continu idéal donné a priori. Sa définition, extraite du contexte des commentaires, ne peut exprimer la pensée de son auteur.

Pour le créateur de la théorie des ensembles, théorie du « décomposé », le désir d'atteindre cet idéal d'un continu « un, a priori » tel qu'Aristote espérait le recréer par le « clouage », devait mener à un dilemme psychologique. Une contradiction demeure, celle qui se trouve entre le modèle et le schéma proposé, le modèle étant trop exigeant.

Mais Cantor lui-même dut finalement se contenter d'un schéma mathématiquement efficace, utile à ses travaux, sinon parfait. Un continu d'un seul tenant est trop peu maniable, comme nous l'avons vu par l'exemple grec et comme nous pourrons encore le vérifier plus tard ; il paraît inefficace. Or les mathématiciens doivent pouvoir disposer d'un instrument qui leur permette non seulement la synthèse, mais aussi et surtout l'analyse.

La correspondance Cantor-Dedekind (chap. IV) nous fera mieux comprendre encore les idées du premier.

## CHAPITRE IV

# DEDEKIND ET L'ÉLABORATION DU CONTINU ARITHMÉTIQUE

Un grand nombre de mathématiciens se sont efforcés simultanément de doter l'analyse de fondements solides. Nous pensons que l'œuvre de Bolzano y est pour beaucoup. Mais la rigueur exigée par ce dernier allait maintenant être appliquée à son propre théorème ! Dans le chapitre II, nous avons vu que la démonstration de Bolzano présente une faille, si l'on ne dispose pas au préalable d'une définition inattaquable de l'ensemble des nombres réels. C'est pourquoi, dès cette époque, les analystes se sont efforcés de définir les nombres réels au début de leur traité ou de leurs cours universitaires.

C'est à Dedekind que revient le mérite d'avoir donné la définition adoptée finalement par la plupart des mathématiciens à l'exception des seuls intuitionnistes.

Nous avons déjà cité (voir chap. III) le texte dans lequel Weierstrass utilise la notion de « *zusammenhängend* ». Dans ces pages, Weierstrass proposait également de répartir l'ensemble des « grandeurs mathématiques » — sans spécifier ce qu'il entendait par cette notion — en deux classes. Il admettait que ces « grandeurs mathématiques » forment un ensemble totalement ordonné. Il utilisait la notion d'agrégat, terme qui désignait le résultat de la sommation des « éléments constituant le nombre ». Heine et Cantor remplacèrent la « somme » par des suites convergentes appelées suites fondamentales. Leurs publications parurent presque simultanément en 1872. Il n'est pas dans notre intention d'examiner laquelle d'entre elles eut la priorité. Il se peut que Weierstrass ait été le premier à donner une définition inattaquable des nombres réels, si l'on tient compte de ses cours universitaires dont la plupart n'ont malheureusement pas été publiés (Cavaillès (1) p. 39).

## § 1. Eduard Heine (1821-1881)

Heine a été très près d'élaborer la notion de coupure et il a été par là un précurseur de Dedekind. Soulignons qu'il se considérait comme un disciple de Weierstrass et reconnaissait avoir été influencé par les travaux de Cantor.

En 1872, dans le *Journal für reine und angewandte Mathematik (Fortsetzung Crelle's Journal)*, vol. 74, Heine publia un article intitulé *Die Elemente der Funktionentheorie* où il manifestait le désir de donner des fondements à l'analyse, de combler la lacune qui rendait illusoire la démonstration du théorème de Bolzano : En fait il cherchait à définir les nombres réels (1) (p. 172).

Die Wahrheit [der Analyse] beruht aber auf den nicht völlig feststehenden Definitionen der irrationalen Zahlen, bei welcher Vorstellungen der Geometrie, nämlich über die Erzeugung einer Linie durch Bewegung oft verwirrend eingewirkt haben.

Notons que le mot « Wahrheit » est moins restrictif en allemand qu'en français. Il peut recouvrir aussi bien la notion de « validité » que celle de « bien-fondé ». Vu l'époque dont nous nous occupons nous sommes enclin à croire que Heine recherchait bel et bien une mathématique « vraie », « réelle ».

Notons aussi qu'il distinguait la continuité d'une application de celle de l'ensemble sur lequel elle opère.

Une analyse approfondie du travail de Heine sort de notre sujet, mais nous désirons, comme nous l'avons dit, mettre en évidence qu'il contient l'idée de coupure de Dedekind (1) (A, § 2, spécialement p. 177).

Si une suite de nombres rationnels converge vers une valeur, on dit qu'il s'agit d'une suite fondamentale (Elementarreihe), qui désigne ce nombre. Le nombre défini par la suite convergente possède un « Zahlzeichen ». Tout nombre rationnel est confondu avec son « Zahlzeichen ». D'après Heine, nos calculs se font à l'aide des seuls « Zahlzeichen », désignés par A, B, C, etc. tandis que les nombres rationnels comme tels sont notés  $a, b, c$ , etc. Pour Heine donc, l'ensemble des nombres rationnels aurait un « degré de réalité » plus grand que l'ensemble des nombres réels.

Heine introduit alors sa définition 3 :

$A > B$  si  $a_n - b_n$  est toujours supérieur à 0, à partir d'un certain  $n$  ;

$A < B$  si  $a_n - b_n$  est toujours inférieur à 0, à partir d'un certain  $n$ .

Une explication (Erläuterung) fait suite à cette définition :

L'égalité exclut tout accroissement ou diminution, car si  $A = B$ , les termes  $a_n$  et  $b_n$  font partie d'une même suite fondamentale ; mais, si  $A \neq B$ , alors  $a_n$  et  $b_n$  n'appartiennent pas à la même suite fondamentale ; donc  $a_n - b_n \neq 0$  et nous en déduisons soit  $A > B$  soit  $A < B$ .

Ailleurs, nous trouvons des réflexions analogues à celles de Cantor :

« Les nombres généraux » (allgemeine Zahlen), même s'ils sont parfois rationnels, sont dits « nombres irrationnels du premier ordre ». En utilisant ces nombres irrationnels de la même manière que les nombres rationnels pour la formation de  $A$ , il est possible de construire des « nombres irrationnels » du deuxième ordre,  $A'$ ; à l'aide de  $A'$  on peut de même définir des nombres irrationnels  $A''$  du troisième ordre et ainsi de suite, des nombres  $A^{(m)}$  de l'ordre  $m + 1$ .

Mais Heine fait tout de suite la remarque suivante : les nombres irrationnels de l'ordre  $m + 2$  ne sont pas de « nouveaux nombres » (neue); ils sont identiques aux nombres du premier ordre.

Heine obtient donc des suites fondamentales plus fines tout en étant bien conscient de n'avoir pas défini de « nouveaux nombres irrationnels ». Son ensemble est donc complet.

Dans le même paragraphe, alinéa B, il énonce la définition de la continuité d'une fonction, définition devenue classique depuis Bolzano; nous l'avons citée dans le chapitre II.

Le § 3 (1) (p. 185) porte le titre *Eigenschaften kontinuierlicher Funktionen* et il contient notamment l'affirmation suivante :

Soit  $a$  un nombre entier qui n'est pas un carré parfait. La solution de l'équation  $x^2 - a = 0$  n'est donc pas un nombre entier, ni, en conséquence, un nombre rationnel. Mais, selon la valeur attribuée à  $x$ , on peut trouver  $x^2 - a > 0$  ou  $x^2 - a < 0$ ; il existe donc une solution de l'équation  $x^2 - a = 0$ . Comme nous venons de le dire, elle ne peut être rationnelle et l'existence des nombres irrationnels est ainsi démontrée.

Heine a donc appliqué le théorème de Bolzano pour démontrer l'existence des nombres irrationnels. Or nous venons de dire que la démonstration de ce théorème implique la connaissance des nombres irrationnels. Son procédé qui devait assurer la construction des nombres réels, constitue en réalité un cercle vicieux.

Il vaut la peine de rappeler que Heine a publié son travail en 1872, année où Dedekind a également fait paraître sa célèbre étude *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Comme nous le verrons, ce dernier fit allusion à la publication de Heine, tout en revendiquant la priorité de l'idée de la coupure. Il semble bien que cette question de priorité ait finalement décidé Dedekind à publier son travail, esquissé déjà en 1858. Il n'y a aucune raison de douter de sa bonne foi. Constatons seulement que si Heine a conçu de son côté, indépendamment de Dedekind, la possibilité de définir un nombre réel à l'aide du procédé de la coupure, en revanche, il n'a pas su éviter le cercle vicieux cité plus haut. Ce parallélisme dans la naissance d'une même idée sera expliqué par Dedekind dans *Was sind und was sollen die Zahlen*.

## § 2. Richard Dedekind (1831-1916)

Dedekind publiait souvent ses travaux bien après leur première rédaction. Nous venons de voir que cette manière de faire l'obligea à revendiquer ensuite la priorité pour certaines de ses idées. Une querelle Dedekind-Heine aurait été tout aussi possible que celle qui s'éleva entre Newton et Leibniz.

En lisant les écrits de Dedekind, on constate aisément que ses habitudes ne présentaient pas que des inconvénients, en ce sens qu'il ne publiait que des textes dont il était sûr. Il soumettait volontiers ses travaux au contrôle de ses collègues, entre autres à Georg Cantor, ce qui nous a valu une correspondance des plus précieuses. Nous y reviendrons encore. Si les publications de Cantor sont souvent d'une richesse déconcertante et nous livrent des réflexions multiples, celles de Dedekind sont dépouillées de toute idée sortant tant soit peu du sujet traité. Les écrits de Dedekind sont remarquablement systématiques et rigoureux dans leur terminologie. Cela n'est peut-être pas étranger à leur autorité aussi immédiate que durable.

### a) *Stetigkeit und irrationale Zahlen.*

(première édition en 1872, Vieweg, Braunschweig) (1) (p. 315 et suiv.).

Dans l'introduction, Dedekind nous dit pour quelle raison il a entrepris ses recherches sur l'ensemble des nombres réels. Il rapporte qu'en automne 1858, il devait préparer un cours d'analyse pour l'Ecole Polytechnique fédérale de Zurich. Soucieux de bases solides, il constate alors la fragilité des fondements des mathématiques.

Comme Cantor, c'est en vain qu'il a cherché chez ses contemporains une définition satisfaisante du continu, notion qui se trouvait pourtant dans tous les traités de l'époque. Il trouve cette lacune d'autant plus grave que chacun est d'accord pour considérer l'étude des « grandeurs continues » comme l'un des objets principaux du calcul différentiel. Mais dès qu'ils abordent la continuité, les traités se fondent plus ou moins implicitement sur une simple intuition géométrique (*geomctrische Vorstellungen*) pour justifier leurs affirmations ou bien ils basent leurs démonstrations sur des affirmations arithmétiques non démontrées.

Dedekind précise que les origines de son travail remontent au 24 novembre 1858. Soutenant ainsi l'antériorité de ses recherches, il formule, d'autre part, des critiques sur le travail de Heine. Il signale également qu'il vient de prendre connaissance d'un article de Cantor, reçu le 20 mars 1872, et intitulé *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, texte qui contient l'« axiome de Cantor ».

Dedekind constate que cet axiome est équivalent à ce qu'il considère comme l'« essence de la continuité » (*Wesen der Stetigkeit*) et qu'il va exposer dans le § 3 de sa publication. Soulignons que Dedekind se dit d'accord avec Cantor,

sans restriction aucune, tandis que ce dernier, nous l'avons vu, faisait des réserves sur les idées de Dedekind.

Le but de Dedekind était de soustraire l'analyse hors du cercle vicieux contenu dans l'œuvre de Bolzano ; il recherche donc une définition efficace et rigoureuse de l'ensemble des nombres réels. Mais cela ne revenait pas nécessairement à donner la définition générale d'un continu, objectif de Cantor. Celui de Dedekind est donc plus modeste.

Pour bien fonder le théorème de Bolzano, il fallait prouver que, dans l'ensemble des nombres réels, il ne peut y avoir de lacunes. C'est ce problème qui a déterminé la recherche de Dedekind et c'est pourquoi son continu est le « continu arithmétique » dont la propriété essentielle est précisément d'être sans lacune : « lückenlos ». C'est sans doute une des raisons pour lesquelles Cantor ne pouvait adhérer sans réserve aux idées de Dedekind. Du reste, aujourd'hui encore, quand il s'agit de spécifier qu'un ensemble est complet, sans lacunes, on parle de « Lückenlosigkeit » ou même de « continu au sens de Dedekind ».

Dans le § 1 (1) (p. 317) Dedekind commence par rappeler quelques propriétés des nombres rationnels et par introduire une relation d'ordre. Citant le travail de Heine, il précise les notions de « plus petit que », de « plus grand que » et de « entre ». Il se sert ici, sans plus, de l'intuition géométrique (ohne Scheu vor dem Anklang an geometrische Vorstellungen), point de vue qu'il récusera bientôt.

Dans le § 2 (1) (p. 319), intitulé *Vergleichung der rationalen Zahlen mit den Punkten einer geraden Linie*, il n'explique pas ce qu'il entend par « extensive Grössen », notion qu'il dit utilisée couramment dans les définitions contemporaines des nombres réels. S'agissait-il de la notion géométrique de grandeur, d'une métrique quasi axiomatisée ? C'est probable, car il cite comme exemple les nombres complexes, mal définissables à l'aide des « extensives Grössen ».

Si Dedekind refuse ainsi de donner une définition de la notion de grandeur, il refuse également d'utiliser des rapports de grandeur. Ce n'est qu'après avoir défini les nombres irrationnels qu'il accepta d'introduire cette notion. La raison invoquée pour justifier ces refus était la nécessité de se baser sur la seule intuition géométrique. Il nous semble que Dedekind ne s'est pas embarrassé d'autant de scrupules pour introduire sa notion d'ordre.

Mais ce qu'il faut finalement retenir, c'est que Dedekind voulait définir les nombres réels en partant des nombres rationnels et cela sans devoir recourir à la géométrie. Il considérait du reste les nombres rationnels comme une extension des nombres naturels. Notons en passant qu'à propos de sa construction essentiellement arithmétique de l'ensemble des nombres réels, il parlait de « création » (freie Schöpfung), ce qui de nouveau l'oppose à Cantor.

Remarquons aussi qu'en admettant comme bien-fondé l'ensemble des nombres rationnels, Dedekind utilisait implicitement l'axiome d'Archimède.

Dans ce § 2, où Dedekind se proposait donc d'examiner la possibilité d'une relation bijective entre l'ensemble des points d'une droite et l'ensemble des

nombres réels, il définissait la position des points sur la ponctuelle. Il choisissait une origine et une unité de longueur. Cette métrique introduite, il était alors possible de construire les points correspondants aux nombres rationnels. Dans le § 3 (1) (p. 320), *Stetigkeit der geraden Linie*, Dedekind remarque immédiatement que tous les points de la droite n'ont pu être atteints par le procédé indiqué au § 2 ; il n'existe pas de bijection entre l'ensemble des nombres rationnels et l'ensemble des points d'une droite (1) (p. 321) :

Die Gerade ist unendlich viel reicher an Punktindividuen, als das Gebiet  $R$  der rationalen Zahlen an Zahlenindividuen.

(Dedekind désigne l'ensemble des nombres rationnels par la lettre  $R$ ).

Il se contente, pour justifier cette affirmation, de rappeler qu'il y a une infinité de nombres qui ne peuvent être exprimés à l'aide de l'unité.

Soulignons que Dedekind dit que la droite est « riche en points » ; elle « possède » donc des points. De plus, il met l'accent sur l'existence de « lacunes ».

Il note aussi que, jusqu'ici, il n'a rien introduit dans son texte qui ne fût pas déjà connu des Grecs. Toutefois, il considère son exposé comme une récapitulation utile et nécessaire à la suite de son développement.

Enfin citons le texte qui est en quelque sorte la conclusion du § 3 (1) (p. 322) :

Die obige Vergleichung des Gebietes  $R$  der rationalen Zahlen mit einer Geraden hat zu der Erkenntnis der Lückenhaftigkeit, Unvollständigkeit oder Unstetigkeit des ersteren geführt, während wir der Geraden Vollständigkeit, Lückenlosigkeit oder Stetigkeit zuschreiben.

Après ces considérations, Dedekind énonce l'axiome qui confère, d'après lui, la continuité à la ponctuelle (1) (p. 322) :

Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Klassen von der Art, dass jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkte der zweiten Klasse liegt. so existiert ein und nur ein Punkt, welcher diese Einteilung aller Punkte in zwei Klassen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt.

Comme Cantor avant lui, il craint que son axiome ne soit également considéré comme trivial par bien des lecteurs. Et comme Cantor, Dedekind refuse expressément de se satisfaire de considérations vagues telles que « ununterbrochener Zusammenhang in den kleinsten Teilen » pour qualifier un continu.

Dedekind fait ensuite une constatation très importante : si l'espace avait une existence réelle, il ne serait pas nécessairement continu. Mais d'innombrables propriétés resteraient tout de même valables. Si, en revanche, l'espace était discontinu, rien ne nous empêcherait de le « compléter » par la pensée. Relevons que ces lignes ont été écrites avant le théorème de Cantor, dont nous avons parlé plus haut, théorème publié en 1879 et qui permet d'envisager un mouvement continu dans un espace discontinu. Nous y reviendrons.

Dans les § 4 et § 5 (1) (p. 323-329) de ce même ouvrage, Dedekind décrit le procédé de la coupure qu'il a imaginé pour définir l'ensemble des nombres réels. Il conclut qu'il avait obtenu un ensemble bien ordonné (wohlgeordnet) et unidimensionnel, et qu'il a « complété le domaine discontinu » des nombres rationnels. Mais il insiste sur la nécessité de doter encore l'ensemble des nombres réels d'une propriété que la coupure ne lui a pas conférée : il faut en assurer la continuité (1) (p. 328) :

Ausser diesen Eigenschaften besitzt aber das Gebiet  $\mathcal{R}$  auch Stetigkeit, d. h. es gilt folgender Satz: IV. Zerfällt das System  $\mathcal{R}$  aller reellen Zahlen in zwei Klassen  $A_1, A_2$ , von der Art, dass jede Zahl  $a_1$  der Klasse  $A_1$  kleiner ist als jede Zahl  $a_2$  der Klasse  $A_2$ , so existiert eine und nur eine Zahl  $a$ , durch welche diese Zerlegung hervorgebracht wird.

Il démontre ensuite que l'on peut toujours effectuer une coupure dans l'ensemble des nombres réels, celle-ci ne définissant jamais qu'un seul de ces nombres réels. Il en conclut : l'ensemble des nombres réels est continu.

Ainsi, pour Dedekind, la continuité est équivalente au caractère interne du processus de la coupure.

Ce qui est de la plus grande importance, c'est qu'on peut donc affirmer que l'ensemble des nombres réels est continu par définition ou encore qu'une certaine continuité, la continuité de Dedekind, caractérise cet ensemble.

Dans le § 7 *Infinitesimal-Analysis* (1) (p. 332), il applique la même méthode de la coupure pour démontrer que :

Wächst eine Grösse  $x$  beständig, aber nicht über alle Grenzen, so nähert sie sich einem Grenzwert.

Dedekind considère cette affirmation comme équivalente au principe de la continuité ; il souligne qu'elle n'est plus valable dès qu'on enlève ne serait-ce qu'un seul nombre à l'ensemble des nombres réels. Il note que cette affirmation garantit donc aussi la validité du *Satz IV* § 5. Il en énonce d'ailleurs encore une autre forme équivalente (1) (p. 332) :

Lässt sich in dem Aenderungsprozesse einer Grösse  $x$  für jede gegebene positive Grösse  $\delta$  auch eine entsprechende Stelle angeben, von welcher ab  $x$  sich um weniger als  $\delta$  ändert, so nähert sich  $x$  einem Grenzwert.

La démonstration se fonde sur la coupure.

En dernière analyse, la continuité de Dedekind postule l'absence de lacune dans l'ensemble des nombres réels et donc la possibilité d'établir une bijection entre l'ensemble des nombres réels et l'ensemble des points de la droite. C'est ce que Cantor avait exigé par son axiome.

b) *Was sind und was sollen die Zahlen?*

C'est en 1888 que Dedekind fit paraître cet ouvrage qui eut six éditions dont la dernière date de 1930. Cela témoigne de sa qualité et de son actualité. Nous n'en discutons ici qu'un des aspects, à savoir les idées qui concernent la continuité mathématique.

Dedekind n'avait pas été seul à s'occuper de l'ensemble des nombres réels. En 1873, E. Schröder avait fait paraître à Leipzig un *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*; de leur côté Kronecker et Helmholtz avaient publié en 1887 à Leipzig dans *Sammlung der an E. Zeller gerichteten philosophischen Aufsätze: Über den Zahlbegriff und über Zählen und Messen.* « Les travaux de ces divers auteurs ne satisfaisaient nullement Dedekind.

Tout en leur accordant une certaine valeur il fait bien des réserves, insistant sur l'originalité de son propre travail qu'il déclare expressément avoir entrepris afin de préciser son propre point de vue (1) (p. 335). Si ce dernier ne s'oppose pas nettement à ceux de ses contemporains, il l'estime toutefois fort différent.

Ces remarques, comme on le voit, sont nuancées et c'est ainsi qu'il évite d'indisposer des mathématiciens tels que Kronecker et Helmholtz, tout en récusant leur point de vue. Cantor n'eut pas cette sagesse.

Dedekind publia donc cet article pour critiquer certains travaux contemporains tout en pensant corroborer sa publication de 1872. Novateur, il ne pouvait plus admettre certaines idées qui avaient cours et par là se trouvaient dans la même situation que Georg Cantor.

Dans l'introduction, (1) (p. 335), Dedekind affirme qu'il faut créer l'arithmétique (*Zahlenwissenschaft*) à l'aide de la logique pure, afin de pouvoir examiner nos conceptions de l'espace et du temps à l'aide de l'ensemble continu des nombres (*stetiges Zahlenreich*) ainsi obtenu. Il veut donc sciemment construire une théorie abstraite pour analyser le monde concret. Soulignons les mots « créer » et « analyser » et rappelons que Cantor parlait plutôt de « découvrir » et d'« expliquer ».

Après ces généralités, destinées à justifier l'opportunité d'une nouvelle publication, Dedekind expose les idées exprimées dans *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Il défend tout d'abord l'efficacité de son procédé de la coupure. Il estime sa définition des nombres réels plus simple que celles de Weierstrass et de Cantor, mais ne dit pas en quel sens. Il insiste sur l'importance qu'il attribue à la continuité (1) (p. 339).

Sie gipfelt in dem Beweis der Stetigkeit des neuen Gebietes der reellen Zahlen.

En même temps, Dedekind saisit l'occasion de répondre à des critiques suscitées par la parution de *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. C'est ainsi qu'il a jugé par exemple nécessaire de se défendre contre U. Dini. Ce dernier, dans son ouvrage *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali* (Pise 1878) avait cité le nom de Dedekind dans son chapitre sur les grandeurs mesurables.

Mais Dedekind estime que son nom est cité à une place qui peut induire en erreur. En effet, Dini ne nomme pas Dedekind en décrivant le procédé de la coupure, mais un peu plus loin, lors de la démonstration de l'existence d'une grandeur mesurable qui correspond à la coupure. Or, nous avons vu que Dedekind refusait d'admettre que la notion de grandeur était à la base de la définition des nombres réels. En rectifiant ainsi la maladresse de Dini, Dedekind montre combien il juge ce fait important.

Cette mise au point nous vaut, du reste, l'exposé d'une idée très intéressante : C'est en relevant l'inexactitude de U. Dini que Dedekind propose un modèle discontinu sur lequel toutes les constructions d'Euclide sont possibles ; il suffit d'envisager trois points A, B, C, non alignés et tels que les rapports des distances AB, AC et BC soient des nombres algébriques, et un point M du plan ABC tel que les distances AM, BM, CM soient dans un rapport non algébrique. Dedekind poursuit par ce passage que nous rapportons parce qu'il « condense » en quelque sorte sa pensée (1) (p. 340) :

Wenn mir aber jemand sagt, wir könnten uns den Raum gar nicht anders als stetig denken, so möchte ich das bezweifeln und darauf aufmerksam machen, eine wie weit vorgeschrittene, feine wissenschaftliche Bildung erforderlich ist, um nur das Wesen der Stetigkeit deutlich zu erkennen und um zu begreifen, dass ausser den rationalen Grössenverhältnissen auch irrationale, ausser den algebraischen auch transzendente denkbar sind. Umso schöner erscheint mir, dass der Mensch ohne jede Vorstellung von messbaren Grössen, und zwar durch ein endliches System einfacher Denkschritte sich zur Schöpfung des reinen, stetigen Zahlenreiches aufschwingen kann ; und erst mit diesem Hilfsmittel wird es ihm nach meiner Ansicht möglich, die Vorstellung vom stetigen Raume zu einer deutlichen auszubilden.

Dans ce texte, Dedekind admet la possibilité d'imaginer un continu a priori, mais conseille de s'en détacher au besoin.

Il pense ainsi avoir créé un continu satisfaisant par sa construction des nombres réels, ce que Cantor, comme nous l'avons vu, ne cessera de contester.

Si Dedekind critique certains ouvrages, il tient également à donner son plein accord à d'autres. Nous l'avons vu revendiquer la priorité du procédé de la coupure en parlant de l'ouvrage de Heine que nous avons cité au § 1 de ce chapitre. Or, Dedekind admet ici que J. Tannery avait, de son côté, élaboré la théorie de la coupure dans son *Introduction à la théorie des Fonctions d'une Variable*, publiée à Paris en 1886. Tannery s'était référé à la 8<sup>e</sup> édition de 1885 du *Traité d'arithmétique* de J. Bertrand. En effet, ce dernier utilisait également une certaine « coupure » lorsqu'il considérait tous les nombres rationnels plus petits et plus grands que le nombre à définir.

En confrontant les différents travaux en cours, nous voyons qu'il y aurait eu matière à une belle querelle de priorité, et cela entre plusieurs auteurs.

Mais, sans doute, Dedekind est-il bien inspiré quand il souligne qu'un certain procédé analogue à celui de la coupure a été appliqué depuis des siècles par

un grand nombre de mathématiciens comme moyen de calcul approximatif. Pour lui, le procédé décrit par Bertrand est basé sur la définition 4/V d'Euclide ; il ajouta (1) (p. 341) :

Eben diese uralte Überzeugung ist nun gewiss die Quelle meiner Theorie, wie derjenigen des Herrn Bertrand und mancher anderen, mehr oder weniger durchgeführten Versuche gewesen, die Einführung der irrationalen Zahlen in die Arithmetik zu begründen.

Mais, si Dedekind admet qu'une certaine coupure a été utilisée depuis fort longtemps déjà, il insiste alors sur la différence essentielle qu'il y a entre son procédé et celui des anciens ou celui des mathématiciens contemporains : Dedekind avait refusé d'appliquer les « grandeurs mesurables » dès le début de son entreprise, parce qu'il ne disposait pas alors d'une définition suffisante des « grandeurs mesurables ». Remarquons en passant que le refus de considérer ces grandeurs n'implique pas le rejet définitif de toute métrique. Nous avons déjà vu que Dedekind admet comme bien-fondés les nombres rationnels et par là la validité de l'axiome d'Archimède. Nous savons du reste que les travaux visant l'élaboration de l'ensemble des nombres naturels, base de tout l'édifice arithmétique, sont assez récents.

Notons encore que Dedekind, dans sa construction, « atteint » le nombre à définir. En ajoutant à une valeur donnée de petites valeurs, même arbitrairement petites, il « dépasse » en quelque sorte la valeur initiale. Nous verrons que Veronese, tout en admettant une certaine notion de coupure, rejettera ces vues.

Dans le § 6 de *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1) (p. 330), Dedekind signale qu'il a été le premier à avoir démontré rigoureusement que  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ . En effet, personne avant lui n'avait montré que le procédé de la coupure permet d'assurer que les opérations internes sont partout définies dans l'ensemble des nombres réels. Nous verrons que cette priorité lui a été contestée par Lipschitz, qui fit d'autres réserves encore sur l'œuvre de Dedekind.

### § 3. Les critiques de Rudolph Lipschitz (1832-1903)

Examinons maintenant les critiques que Lipschitz fit à Dedekind. Si elles soulignent bien l'originalité des publications de ce dernier, elles nous montrent surtout que certains contemporains de Dedekind fondaient encore leurs conceptions sur les traditions grecques et cela non sans rigidité.

Pour mieux comprendre le point de vue de Lipschitz, nous allons brièvement examiner l'ouvrage qu'il entend défendre.

a) *Grundlagen der Analysis*. (Bonn, 1877).

Dès les premières pages, Lipschitz parle des nombres irrationnels. A ses yeux, le nombre entier résulte de l'action de « compter » et c'est la composition des

opérations fondamentales de l'arithmétique qui crée les nombres rationnels et irrationnels (1) (p. 37 et suiv.). Une grandeur irrationnelle est alors la limite d'une suite de nombres rationnels. Chacun de ces nombres répond aussi exactement qu'on peut le désirer (mit beliebiger Genauigkeit) à un certain critère (gewisse Forderung), que l'on ne saurait satisfaire d'une manière rigoureuse (in aller Strenge). Les grandeurs rationnelles et irrationnelles sont bien déterminées, car ce que l'on ne peut pas confondre est bien déterminé.

Cette déclaration de Lipschitz nous met mal à l'aise ; nous nous attendions à plus de rigueur de la part de ce mathématicien qui nous a laissé des travaux d'une valeur incontestable. Des termes tels que « gewisse Forderung, nicht in aller Strenge » nous semblent, après la lecture de l'œuvre de Dedekind, appartenir à une époque révolue depuis longtemps.

En revanche l'autorité de Lipschitz s'impose dès qu'il définit l'application continue ; ses textes sont alors parfaitement rigoureux.

Dans le tome II (1) (p. 4) de son ouvrage, il quitte l'arithmétique pour la géométrie. Il choisit alors comme unité « une portion de droite, d'espace ou de temps », unité qu'il tient pour indéfiniment divisible. Dans ce travail qui considère les grandeurs concrètes, Lipschitz observe une grande rigueur.

Nous devons donc constater que Lipschitz, rigoureux par ailleurs, n'a simplement pas réussi à donner une définition satisfaisante des nombres réels. Mais ce que nous tenons pour un échec n'était nullement considéré comme tel par Lipschitz. Non seulement il repoussa toute critique faite à son travail, mais il dénia même toute valeur aux travaux de Dedekind. Ce fait déconcertant trouvera plus loin une certaine explication.

#### *b) La correspondance Dedekind-Lipschitz.*

Les lettres de Lipschitz et de Dedekind dénoncent les points de vue de deux antagonistes irréductibles. Il serait faux de croire que Lipschitz n'était qu'un mathématicien s'accrochant aux idées d'une époque révolue et déniait tout mérite à un jeune collègue à seule fin de défendre son traité d'analyse. Un examen superficiel des lettres pourrait, en effet, faire naître de tels soupçons. Mais Lipschitz était plutôt un des derniers défenseurs de la conception grecque du continu. Hilbert fut, pendant peu de temps il est vrai, dans le même cas.

Le texte de la première lettre que Lipschitz écrivit à Dedekind ne nous est malheureusement pas parvenu. De la réponse de Dedekind, datée du 6 juin 1876 (1) (p. 467), on peut déduire que Lipschitz avait critiqué la définition des nombres irrationnels par le procédé de la coupure et qu'il trouvait l'axiome d'Archimède tout à fait suffisant pour la construction du continu arithmétique. En bref, à ses yeux, Dedekind n'avait rien créé de nouveau. Lipschitz contesta également que Dedekind eût été le premier à avoir démontré d'une manière rigoureuse que  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ . En fait Lipschitz estimait qu'il n'y avait aucun problème, aucune difficulté à étendre les définitions et les propriétés des

opérations internes partout définies dans l'ensemble des nombres rationnels au sur-ensemble des nombres réels. Par contre, et nous le savons, Dedekind était conscient qu'il s'agissait d'un problème primordial et il essayait d'en convaincre Lipschitz.

Toujours conciliant, Dedekind se déclare d'ailleurs d'accord de changer la forme de certaines de ses définitions. Pour ne pas considérer le nombre irrationnel comme un nouveau type de nombres « définis » par la coupure, il propose à Lipschitz ceci, par exemple (1) (p. 471) :

Das System aller Schnitte in dem für sich un stetigen Gebiete der rationalen Zahlen bildet eine stetige Mannigfaltigkeit.

Pour montrer l'utilité de ses publications, Dedekind dénonce une fois de plus le cercle vicieux dans lequel se trouve l'analyse en l'absence d'une bonne définition des nombres réels. Quiconque ne veut pas se résoudre à être rigoureux sur ce point doit avouer franchement l'insuffisance des bases au lieu d'accepter de travailler d'une manière aussi peu scientifique (nicht wissenschaftlich).

Dedekind (1) (p. 472) discute le problème de la suffisance de l'axiome d'Archimède. Il répète qu'il se refuse à utiliser en arithmétique des « grandeurs » mal définies. Pour obtenir l'ensemble des nombres réels, il faut introduire, outre l'axiome d'Archimède déjà cité dans Euclide, l'exigence du « complet », essence de la continuité, « Kernpunkt » de son § 3.

Dedekind exige donc le contenu de ce que Hilbert appellera plus tard les axiomes  $V_1$  et  $V_2$ . Lipschitz de son côté se contente de l'axiome d'Archimède ou de l'axiome  $V_1$  de Hilbert.

Il est intéressant de citer l'axiome d'Archimède dans la forme que lui donne Dedekind (1) (p. 472) :

Die gleichartigen Grössen A, B, haben dasselbe Verhältnis wie die gleichartigen Grössen  $A_1, B_1$ , wenn für jedes Paar von ganzen rationalen Zahlen  $m, n$  entweder gleichzeitig  $nA < mB$  und  $nA_1 < mB_1$ , oder gleichzeitig  $nA = mB$  und  $nA_1 = mB_1$ , oder  $nA > mB$  und  $nA_1 > mB_1$  ist.

Dedekind estime que cet axiome affirme deux choses :

1) De deux grandeurs différentes, mais de même nature, l'une est considérée comme étant plus petite, la seconde plus grande que l'autre, ce qui montre l'importance de la relation d'ordre.

2) Soit A une grandeur et  $n$  un nombre entier. Il existe toujours une grandeur  $nA$ , de même nature que A, qui est le  $n^{\text{ème}}$  multiple de A.

Dedekind souligne que rien dans le texte cité ne laisse prévoir que l'on puisse « étendre » le domaine des grandeurs. La définition ne parle que de « individus présents » (vorhandene Individuen), nous dirons plutôt : de « éléments connus, donnés a priori » et du rapport de ces « individus » entre eux. Comme Lipschitz le désirait, Dedekind est d'accord de considérer un nombre comme un rapport,

tout en précisant qu'Euclide n'a jamais procédé de la sorte. De même, il veut bien admettre que si l'on peut — encore faut-il le faire — définir une grandeur  $A$ , les multiples de  $A$  vérifieraient l'axiome d'Archimède. Dedekind prétend que dans l'œuvre d'Euclide, on ne peut pas trouver la moindre allusion à l'existence de domaines plus complets que l'ensemble des nombres rationnels.

« Augmenter la diversité des rapports commensurables » ne saurait équivaloir à « compléter l'ensemble des nombres rationnels ». On ne pourrait atteindre par cette voie que : « eine sehr respektable Mannigfaltigkeit der Grössen-Abstufungen », donc construire un ensemble très fin. Dedekind prétend qu'il n'est pas évident du tout que l'on puisse construire des ensembles plus complets que celui des nombres rationnels (— und es würde so leicht kein Mensch darauf kommen, noch vollständigere Gebiete zu verlangen). Jamais on ne pourra quitter l'ensemble des nombres rationnels en procédant de la sorte.

D'après Dedekind, on pourrait estimer qu'Euclide a pris bien des précautions pour ne construire finalement que les nombres rationnels. Il pense qu'Euclide a peut-être désiré aller plus loin. En effet, les « incommensurables » se trouvent bien dans son livre X. De plus, il fait remarquer expressément que ni Euclide, ni aucun auteur après lui, n'ont formulé la continuité arithmétique, donc le concept d'un « domaine de grandeurs complètes » (— denkbar vollständigsten). Notons ici le superlatif « vollständigsten » qui montre que Dedekind identifie bien la notion de « complet » avec celle de « continu ».

Dedekind précise ce qu'il faut ajouter aux *Eléments d'Euclide* (1) (p. 473) :

Zerfallen alle Grössen eines stetig abgestuften Grössen-Gebietes in zwei Klassen von der Art, dass jede Grösse der ersten Klasse kleiner ist als jede Grösse der zweiten Klasse, so existiert entweder in der ersten Klasse eine grösste, oder in der zweiten Klasse eine kleinste Grösse.

Dedekind répète que si cette propriété n'est pas mentionnée expressément, l'ensemble des nombres envisagé n'est pas complet. Il est alors impossible de donner des définitions générales valables pour les opérations arithmétiques, car il se pourrait qu'une somme, une différence, etc. de nombres rationnels n'existe pas dans l'ensemble.

Il précise donc bien qu'il s'agit d'obtenir un ensemble plus riche en « complétant » l'ensemble des nombres rationnels. Dans l'ensemble de nombres ainsi obtenu, les opérations arithmétiques sont toujours internes et partout définies ; elles jouissent des mêmes propriétés que dans l'ensemble des nombres rationnels.

Pour illustrer son point de vue — et non sans un accès de mauvaise humeur — Dedekind propose à Lipschitz de décréter simplement que «  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$  c.q.f.d. », au lieu de vouloir à tout prix introduire des pseudo-démonstrations qui feraient appel aux seuls nombres rationnels.

Dedekind poursuit en affirmant une fois de plus que sa théorie des nombres irrationnels permet d'éviter de tels décrets. L'ensemble ainsi obtenu est

l'exemple parfait d'un domaine continu (das vollkommene Muster eines stetigen Gebietes); n'importe quel rapport peut être exprimé à l'aide d'un élément de cet ensemble.

Tous ces arguments n'ont pas désarmé Lipschitz. Une nouvelle lettre de Dedekind, datée du 27 juillet 1876, nous fait connaître d'autres arguments de Lipschitz et en cite des extraits (1) (p. 474), où l'on voit que Lipschitz prétendait que les Grecs avaient déjà exprimé le fait que  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ ; la coupure n'apportait donc rien de nouveau. Quant à ce que Dedekind appelait « complet » (Vollständigkeit des Gebietes), ce n'était qu'une propriété fondamentale de la « ligne » (Linie). Du reste, personne ne pouvait se représenter une « ligne » sans en même temps la considérer comme étant complète.

Lipschitz nous livre ainsi le fond de sa pensée. Pour lui aussi, la ligne est dessinée « d'un trait ». Elle est donc sans lacune par définition. Il reprend cette tradition grecque que nous avons essayé d'illustrer dans le cas de la cissoïde. Pas un instant, il ne pense à la possibilité d'envisager une ponctuelle.

Mais Lipschitz est contemporain de Dedekind; c'est un analyste qui, dans ses calculs, utilise les points des courbes. Comment a-t-il donc pu méconnaître dans une telle mesure la nécessité d'introduire un ensemble de nombres plus complet que celui dont disposaient les Grecs? Nous pensons que Lipschitz, par le fait même qu'il était analyste, raisonnait avant tout en utilisant la notion d'application et non celle d'ensemble. Dès lors, toute courbe était en devenir; progressant dans l'espace, elle passait d'une position à une autre; elle existait en soi, dans son flux et sans aucune lacune possible; elle n'avait pas besoin d'un « support ». Pour étudier une courbe, les nombres rationnels sont un outil satisfaisant, ils permettent le calcul par approximation. Que le résultat d'un tel calcul puisse éventuellement ne pas exister, cela semblait impossible à Lipschitz, car sa courbe, elle, existait bel et bien. Et c'est l'existence de cette courbe qui assure ainsi l'existence du résultat des calculs.

Nous voyons donc en Lipschitz un mathématicien qui refusait absolument d'envisager l'ensemble à partir duquel l'application opère, point de vue qui peut se défendre. Toutefois, il confondait délibérément la notion d'ensemble et celle d'application et il était convaincu que sa manière de voir était la seule bonne.

Pour confondre Lipschitz, il aurait peut-être fallu lui soumettre le théorème de Cantor démontrant la possibilité d'envisager une application continue sur un ensemble discontinu. Mais l'aurait-il tenu pour bien-fondé?

Nous voyons ici combien Cantor et Dedekind étaient des novateurs audacieux. Après avoir ainsi situé les difficultés que Dedekind eut à surmonter pour essayer de convaincre Lipschitz, poursuivons l'examen de cette correspondance qui força Dedekind à préciser sa pensée.

Ce dernier avait dû s'apercevoir que Lipschitz était sensible aux arguments basés sur les applications. Il se dit donc persuadé que sa notion à lui de la continuité revient à ce qui suit :

Si une grandeur croît indéfiniment, mais sans dépasser une certaine limite (über alle Grenzen), elle atteint cette limite. Dedekind n'a pas omis de répéter à cette occasion que bien des fautes sont dues à l'utilisation de la notion de grandeur non ou mal définie.

Il prétend en même temps n'avoir rien dit de nouveau en écrivant :

Zerfallen alle Punkte ... in zwei Stücke hervorbringt (abréviation Dedekind).

Il s'était néanmoins passé de la notion de grandeur et sa notion de continuité était assez analogue à celles de Cantor et de Heine.

La seconde lettre de Dedekind nous montre que la première n'avait nullement convaincu Lipschitz. Ce dernier avait répété ses attaques et avait continué de soutenir que toute la théorie de Dedekind était exposée dans les livres d'Euclide. Dans une certaine perspective ce point de vue est défendable ; nous y reviendrons (chap. VI).

Dedekind reprend donc son argumentation : Euclide se représente toute grandeur comme la mesure d'une ligne strictement définie (scharf definierte Linie). Il peut alors utiliser des lignes qui soient dans un rapport non exprimable par deux nombres entiers, donc irrationnels : Euclide parle en effet de la diagonale du carré. Ainsi, et sans le faire explicitement, Euclide a bel et bien utilisé des nombres irrationnels, quoi qu'en puisse dire Lipschitz. Dedekind se fâche ; il dit connaître Euclide depuis l'âge de 14 ans ; il n'admet en aucune façon être en contradiction avec le géomètre grec.

Du reste les théories d'Euclide ne sont valables que pour les grandeurs qu'il admettait explicitement ; les « grandeurs évidentes ». Tout ce qu'on peut dire, c'est qu'à elles seules, elles ne permettent pas de construire l'ensemble des nombres réels. Mais une telle construction n'a jamais été le but d'Euclide.

Pour illustrer les dires de Dedekind, en termes modernes, remarquons qu'en effet, on ne peut pas tirer du calcul des éléments d'un espace vectoriel des renseignements sur le corps des opérateurs. Les opérations sur celui-ci doivent être fondées au préalable.

Dedekind fait encore remarquer à Lipschitz que la « Vollständigkeit » du concept de nombre dépend de la « Vollständigkeit » du concept de grandeur. Mais, comme la continuité des nombres réels est indispensable pour constituer une base scientifique de l'arithmétique, il est nécessaire de savoir au préalable comment est faite la « Vollständigkeit » dans le domaine des grandeurs. Car rien n'est plus dangereux en mathématiques que de supposer l'existence d'une chose sans la démontrer, pour ensuite essayer de revoir la question lorsqu'on est placé devant l'obligation de le faire. Comment s'assurer de l'existence d'une grandeur A, double de B et en même temps triple de la moitié de B ? Veut-on simplement attendre pour revoir le problème que des contradictions nous y obligent ? Si Euclide avait voulu aller plus loin, s'il avait voulu travailler dans des domaines nécessitant la continuité, et s'il avait lui-même déjà introduit la

continuité sous la forme de celle proposée par Dedekind, personne n'aurait trouvé le passage superflu. Dans cette éventualité, il y aurait certainement eu quelqu'un pour reconnaître qu'Euclide avait donné le concept de grandeur « complète » permettant de fonder les nombres réels d'une manière rigoureuse. Dedekind pense que nous aurions eu alors le meilleur manuel d'arithmétique que l'on pouvait désirer. Mais puisque Euclide est muet sur ce sujet, Dedekind ne peut pas être d'accord avec Lipschitz : il ne peut pas considérer les livres d'Euclide comme une base suffisante. (Nous verrons que Hilbert donnera les raisons qui incitaient Dedekind à soutenir ce point de vue).

Dedekind reprend encore l'exemple de la « ligne », cité par Lipschitz. Ce dernier trouvait que personne ne pouvait s'imaginer la « ligne » autrement que continue. Dedekind réplique que lui-même peut très bien s'imaginer que l'espace tout entier et chaque ligne qui s'y trouve sont discontinus. Il n'est pas le seul, Cantor est dans la même situation. Dedekind pense donc que « tout le monde » pourrait le faire aisément : si on peut s'imaginer un espace continu, on peut tout aussi bien en imaginer un discontinu. Pourquoi s'obstiner à dire que : « Si on pense « espace », on pense « continu » ? » Dedekind considère que le concept d'espace est dissociable de celui de continu. Cet argument aurait pu inciter Lipschitz à voir la nécessité d'un « support » pour la ligne, l'espace par exemple.

Pour démontrer qu'Euclide n'exige pas implicitement l'utilisation de l'ensemble des nombres réels, Dedekind propose d'analyser toutes les hypothèses explicites ou implicites qui se trouvent dans les livres d'Euclide et d'admettre le bien-fondé de toutes ces affirmations et de toutes ces constructions. (Pour entreprendre cette analyse, il suggère de remplacer les termes utilisés par des mots « nouveaux », sans signification préalable.) Jamais on ne trouvera dans les *Éléments d'Euclide* la continuité comme une condition sine qua non. Dedekind affirme que la géométrie d'Euclide est rigoureuse tout en se passant de la notion de continuité ! Il ajoute (1) (p. 479) :

— ein Resultat, das gewiss für Viele überraschend ist und mir deshalb wohl erwähnenswert schien.

Nous ne connaissons pas les réactions de Lipschitz ; il semble bien qu'il n'a plus repris la controverse.

A notre avis, ni Dedekind, ni Lipschitz n'ont entièrement tort, ni entièrement raison.

En tant que défenseur d'Euclide, Lipschitz est dans le vrai. Nous verrons encore (chap. VI) que la géométrie d'Euclide est une géométrie « complète a priori ». Mais pour qu'elle le reste, il ne faut pas dépasser le stade d'Euclide. Introduire dans cette géométrie purement synthétique la géométrie analytique et son corps d'opérateurs, soit l'ensemble des nombres réels, c'est courir le risque d'introduire des lacunes, à moins que l'on ait pris toutes les précautions pour rendre

l'ensemble de ces nombres réels « complet ». Or c'est là l'erreur que commet Lipschitz. Ayant reconnu peut-être intuitivement seulement à l'aide de la « courbe dessinée d'un trait » la continuité de la géométrie d'Euclide, il applique néanmoins l'analyse à cette géométrie.

Notons que Dedekind ne nous promet pas une géométrie du discontinu basée sur Euclide. Il dit seulement que la continuité — et nous devons comprendre par là l'existence d'un axiome garantissant l'absence de lacune — n'est pas une condition sine qua non d'une géométrie. S'il avait considéré la géométrie qui utilise « la ligne continue a priori », il aurait eu tort, vu la présence de l'axiome d'Archimède dans le livre d'Euclide. Mais, connaissant le but de Dedekind, l'établissement des fondements de l'analyse et le texte dans lequel il considère la géométrie d'Euclide comme parfaite dans une certaine perspective, nous devons aussi donner raison à Dedekind. En effet, il refuse la suffisance de l'axiome d'Archimède au moment d'introduire les nombres réels. Il a reconnu que si l'ensemble des nombres réels devait être le corps d'opérateurs de la géométrie analytique, il fallait qu'il fût continu selon son idée. Alors, la continuité d'une ligne telle que les Grecs l'avaient envisagée pouvait être sauvegardée par une bijection entre l'ensemble de ses points et l'ensemble des nombres réels.

Pour conclure, nous pouvons donc dire qu'il y a eu méprise au départ : les deux auteurs ne parlent pas de la même chose ; si Dedekind l'a bien remarqué en se déclarant d'accord avec la géométrie d'Euclide, il n'a pas réussi, malgré ses efforts, à montrer à son collègue que la question était ailleurs, que l'introduction de « l'arithmétique » (Arithmetik) en géométrie soulevait le problème de la notion de « complet ».

L'incompréhension de Lipschitz provient, répétons-le, de la confusion qui régnait alors entre la notion d'ensemble et celle d'application. Pour Lipschitz, la continuité d'un axe entraînait celle de l'ensemble des nombres réels, puisque, selon lui, une bijection pouvait être établie sans difficulté.

Le hasard seul a voulu que Lipschitz entreprit la critique de la coupure de Dedekind. Vu son attitude il aurait tout aussi bien pu attaquer l'axiome de Cantor.

#### § 4. Conclusion: Cantor et Dedekind

Nous avons déjà signalé plus haut que Fraenkel (Cantor (1) p. 456) traite Cantor de « Romantiker » et Dedekind de « Klassiker ». A propos de Cantor, il évoque même le « Sturm und Drang » de Schiller. Cavailles (2) (p. 184) relève un passage de Dedekind dans lequel ce dernier s'attribue un « Treppenverstand ».

La correspondance Cantor-Dedekind illustre bien les deux caractères. Cantor publie spontanément, quitte à modifier ses définitions et ses théories pour les

présenter généralisées et épurées des maladresses primitives dans une seconde rédaction. Par contre, Dedekind reprend ses résultats pour ne les publier que dans leur forme définitive.

La définition du continu arithmétique de Dedekind n'a subi aucune modification à travers son œuvre. Dedekind a créé le continu des nombres réels. Rien ne l'empêchait, s'il le juge opportun, d'envisager un « espace discontinu en soi » qu'il ne faut pas se représenter comme un « espace troué par rapport à l'espace idéal », espace continu a priori.

Comme Cantor l'a remarqué, le continu de Dedekind est avant tout « complet ». Il se distingue nettement du continu a priori. Dedekind ne cherche pas à « souder » les éléments, comme Aristote, il ne parle jamais d'éléments qui doivent « se toucher », difficulté remarquée par Bolzano. Dedekind n'a jamais recherché un modèle concret de son continu. Il a approuvé l'introduction de l'axiome de Cantor proposant la bijection entre les points d'une droite et l'ensemble des nombres réels. Mais peu lui importe que la droite en question soit une ponctuelle ou la droite-support elle-même. Il se contente d'appeler continu l'ensemble des nombres réels. Réciproquement, les propriétés de cet ensemble deviennent alors le critère de sa notion de continuité.

Les critiques de Cantor, mentionnées plus haut, sont-elles justifiées ? Oui, à coup sûr, pour les tenants du continu a priori, du continu « un ».

Si nous ne considérons que la définition du continu de Cantor, sans tenir compte de ses commentaires, la continuité de Dedekind semble bien lui être pratiquement équivalente : l'ensemble des nombres réels est parfait, car il est complet ; il est aussi « zusammenhängend », si nous comprenons ce terme dans son seul sens mathématique.

Les critiques que Cantor fait à Dedekind montrent que Cantor n'a jamais su exprimer mathématiquement son concept idéal de « zusammenhängend ». Aucune expression mathématique n'a été trouvée pour traduire le « clouage » d'Aristote. D'ailleurs Cantor a adhéré quelque temps sans réserve aux idées de Dedekind sur le continu arithmétique.

Il se peut que la principale cause de la critique que Cantor adresse à Dedekind se trouve dans le texte que nous avons déjà cité plus haut (p. 88) :

— während wir der Geraden Vollständigkeit, Lückenlosigkeit oder Stetigkeit zuschreiben.

Le mot « oder » fait donc des synonymes de « lückenlos » et de « stetig » et, par conséquent, de « complet » et de « continu ».

Notons que le terme de « lückenlos », plutôt intuitif au début, est devenu dès lors un terme technique. Toutefois, nous devons constater que le terme de « continu », malgré tous les efforts des mathématiciens (voir conclusion) fait encore appel à l'intuition spatiale ; il en est de même du mot « lückenlos ». Dedekind lui-même n'a pas réussi à libérer tout à fait son continu de l'intuition

spatiale. Soulignons-le, Dedekind était bien conscient que l'intuition, une certaine prise de conscience géométrique, jouait un rôle effectif dans son œuvre. Dans le texte cité, il dit en effet : « — zur Erkenntnis geführt — » ; nous constatons les propriétés des nombres rationnels.

A la fin de sa phrase, pour caractériser la continuité, Dedekind emploie le terme « *zuschreiben* » ; nous attribuons une propriété à la droite, la continuité.

Il y a une nuance appréciable entre les deux verbes : nous *constatons* ce qui est a priori, telles les lacunes que contient l'ensemble des nombres rationnels par rapport aux nombres réels, mais nous *attribuons*, à notre gré, la continuité à la droite.

Dedekind examine cette continuité « attribuée » à la droite et note qu'elle suffit à définir la continuité de tous les domaines (*aller stetigen Gebiete*). Il tient donc intuitivement compte du théorème de Cantor qui permet la réduction d'un continu de dimension  $n$  au continu de dimension 1. Notons que le travail de Dedekind a été publié en 1872 et celui de Cantor en 1878. Dans leur correspondance datant de 1877, Dedekind n'évoque jamais la remarque que nous venons de citer et de son côté, Cantor ne fait aucune allusion qui pourrait laisser penser à une influence mutuelle.

On peut donc attribuer à Dedekind la primauté de l'idée d'un espace discontinu. Du reste, il nous semble que cette idée est plutôt imputable à un « créateur » comme Dedekind qu'à un « explorateur » tel que voulait l'être Cantor. La « recherche du réel » pratiquée par Cantor est plus éloignée du concept d'espace discontinu que la création abstraite de Dedekind, création qui ne vise aucun modèle.

A ce propos, il est significatif que Dedekind ne se soit jamais proposé de faire une analyse historique du continu, qu'il n'ait fait aucune considération philosophique et qu'il n'ait pas essayé davantage d'établir une théorie de monde physique. Il occupe donc une position exceptionnelle parmi les auteurs qui ont examiné le problème du continu.

L'intention de Dedekind fut, dès le début, bien délimitée : donner des bases solides à l'analyse en partant du théorème de Bolzano. L'étude de la continuité de l'ensemble des nombres réels était pour lui une étape et non un but. Peu lui importait que la droite fût le support d'un continu idéal ou d'un continu composé par parties. Il cherchait une définition de la continuité de la droite qui garantissait l'existence de points d'intersection d'une courbe avec l'axe des abscisses. Il lui suffisait donc d'entendre par le mot « axe » un système « complet » de points. L'efficacité mathématique de la théorie allait être primordiale.

Si Dedekind ne semblait pas rechercher le continu a priori et restait satisfait du continu par parties, il fut néanmoins dans l'élaboration de ce que nous appelons encore le continu arithmétique d'une rigueur qui n'a jamais été contestée jusqu'à nos jours.

Dans une lettre du 17 mai 1877 (Cavaillès (1) (p. 198)), Cantor, tout en se déclarant d'accord avec la définition des nombres réels donnée par Dedekind, fait

encore des réserves explicites quant à la définition de la continuité. En particulier, il ne veut pas admettre que la propriété IV (la possibilité d'effectuer la coupure) soit l'« essence » de la continuité. Nous avons vu que Dedekind avait considéré cette propriété comme équivalente à l'axiome de Cantor. Or, Cantor remarque que la propriété IV est aussi satisfaite dans l'ensemble des nombres naturels, donc dans un ensemble discret. Dans son post-scriptum, Cantor reconnaît que la propriété IV est la propriété essentielle de l'ensemble des nombres réels, propriété qui le différencie de l'ensemble des nombres rationnels. Et pourtant, il affirme derechef que la continuité ne lui semble nullement garantie par le seul fait que la coupure soit possible dans un ensemble.

C'est que Cantor commet une erreur : il isole la propriété IV. Or, Dedekind la veut dans le contexte des propriétés I (ordre), II (densité en soi) et III (coupure). Dans un ensemble « connexe », ce terme étant compris dans le sens moderne, la propriété IV est toujours satisfaite. Il est alors évident que « connexe » n'est pas l'équivalent de « continu », ou, comme nous disons aujourd'hui, de « compact ». Pour que la propriété IV soit l'« essence de la continuité », il faut que les trois premières exigences soient satisfaites.

Dans une lettre du 11 mai 1877, Dedekind avait répondu une première fois aux objections de Cantor. Le texte de ce dernier, daté du 10 mai, est malheureusement perdu. L'attitude de Cantor, dans sa lettre du 17 mai, montre qu'il n'était pas facile à convaincre et c'est pour cette raison que le 18 mai 1877 (Cavaillès (1) p. 199), Dedekind reprend ses arguments du 11 mai.

Cantor aurait préféré qu'on remplaçât : « les domaines qui possèdent les propriétés I et II sont dits continus s'ils possèdent aussi la propriété IV » par : « les domaines dont les éléments se distinguent conformément à I, sont dits continus s'ils possèdent en même temps les propriétés II et IV ». Cantor craignait que l'accent porté sur la propriété IV ne donne lieu à des confusions, mais cette fois-ci Dedekind refuse de remanier sa définition. Il considère que la propriété IV est celle qui distingue l'ensemble des nombres réels de l'ensemble des nombres rationnels et il légitime par là son point de vue.

Par contre, si pour des raisons pratiques le texte proposé par Cantor devait se montrer préférable, Dedekind ne voit pas d'inconvénient à l'adopter. Il souligne toutefois qu'il n'y a aucune nécessité à changer quoi que ce soit à sa définition, pour le moment tout au moins.

Dedekind se pose encore la question de savoir s'il est souhaitable de faire de la propriété I une propriété non seulement relative, mais conditionnelle. On voit une fois de plus, toute l'importance qu'il attribue à l'ordre. Il ne poursuit pas son idée et termine sa lettre en remarquant que le débat porte sur « ce qui convient le mieux » et non sur « ce qui est nécessaire ». Dès lors la discussion lui paraît inutile. Quant à lui, Cantor considérait Dedekind comme son aîné et il ne revint plus sur la question.

Cantor, cherchant une définition parfaite du continu a priori, guettait la moindre faille dans les textes de Dedekind. Tout d'abord satisfait de la définition

du continu arithmétique de Dedekind, il changea de point de vue lorsqu'il fut amené à définir la continuité d'un ensemble ponctuel. A ce moment-là, il adressa des critiques beaucoup plus sévères à Dedekind ; on peut même dire qu'il refusa sa définition, prétendant n'y trouver qu'une seule des propriétés requises pour un ensemble continu : celle d'être « complet ».

Les points de vue de Cantor et de Dedekind, tout en se rapprochant, n'étaient néanmoins pas absolument identiques. Ils appartenaient à chacune des deux tendances qui opposaient depuis toujours ceux pour qui le continu est a priori et ceux qui admettent un continu constitué par parties.

Quand Cantor était amené à composer un continu par parties, il ne le faisait qu'à regret. Pour lui, le continu était une notion idéale qui préexistait, une « réalité mathématique ». Cela ne l'empêchait d'ailleurs nullement de travailler dans le discontinu qui, lui, existe par rapport au « continu idéal ». N'oublions pas qu'il avait créé en partie cette théorie des ensembles qui devait précisément contribuer à faire disparaître la prépondérance du continu. Mais, ce « Romantiker » ne pouvait se détacher de l'idéal qu'il portait en lui. Ayant décomposé le continu idéal, il essayait encore de le reconstituer dans son entité.

Dedekind en revanche se sentait libre de toute contrainte imposée par une « réalité extérieure ». Il s'était proposé de définir l'ensemble des nombres réels. Or, celui-ci se trouve posséder une propriété caractéristique nommée « la continuité arithmétique », propriété indispensable à la représentation graphique de l'analyse, lorsqu'on envisage l'axiome de Cantor.

En commentant son axiome, Cantor avait exprimé son accord avec Dedekind, nous l'avons vu plus haut. Les deux auteurs poursuivaient alors le même but : établir une bijection entre l'ensemble des nombres réels et l'espace ponctuel. Mais, lorsque Cantor voulut s'occuper de la continuité éventuelle de l'espace ponctuel et que, dans son esprit, la géométrie prit le pas sur l'arithmétique, il fut conduit à augmenter considérablement ses exigences. C'est en abordant ce problème, qu'il abandonna définitivement la conception de Dedekind et c'est alors aussi qu'il fit des critiques bien plus profondes que celles qui touchaient aux questions de forme et qui se trouvent dans les lettres citées.

Que choisir ? Le continu idéal de Cantor qui nécessite une définition commentée ou le continu arithmétique de Dedekind qui est « mal cloué », pour reprendre une fois de plus le terme d'Aristote ?

Nous devons reconnaître que Cantor, tout en gardant une attitude plus traditionaliste envers les modèles de la géométrie, a été finalement plus près de constituer par des parties ce continu qui se dérobaît et se dérobera peut-être toujours.

## CHAPITRE V

# LA TERMINOLOGIE DE FRÉCHET

On pouvait espérer que les travaux de Cantor et de Dedekind donneraient une solution au problème du continu. Il n'en fut rien.

Les deux auteurs ont doté les mathématiques de notions nouvelles qui ont permis de mieux circonscrire les difficultés rencontrés par les Anciens.

Mais Cantor n'a pas réussi à exprimer mathématiquement son continu idéal. De plus, il a montré lui-même qu'il subsistait une lacune dans son édifice : l'hypothèse du continu.

Les analystes ont facilement adopté, et cela jusqu'à nos jours, le « continu de Dedekind ». Mais il faut souligner cette terminologie ; il ne s'agit pas de parler du « continu » tout court.

Si les géomètres ont partiellement conservé ou essayé de conserver le continu a priori, les analystes, eux, ont adopté le continu composé par parties qui s'est révélé particulièrement efficace.

### § 1. Maurice Fréchet (né en 1878)

La théorie des ensembles abstraits avait profondément influencé l'analyse. La discipline que Fréchet appellera *Analyse générale* allait naître. Cette analyse se voulait expressément abstraite. Une nouvelle terminologie devenait ainsi nécessaire. Son élaboration exigeait une revision des notions classiques. La notion de fonction même sera complétée par celle, plus générale, de relation fonctionnelle. Fréchet fit usage, dans une très large mesure, des notions créées par Cantor. Il reprit, en particulier, les notions d'ensemble fermé et d'ensemble séparé ; de même, il fit siennes également la notion d'ensemble complet de Dedekind et celle de convergence uniforme de Cauchy.

Nous utilisons ici les termes dans leur sens premier, sens qui subsiste dans l'interprétation moderne, plus particulièrement dans celle de N. Bourbaki.

En effet, si quelques définitions ont changé de forme, les notions elles-mêmes n'ont guère changé dans leur essence.

Mais, si la plupart des notions n'ont pas été retouchées, il y a pourtant eu des changements et des rectifications dans le domaine qui nous occupe. Cela est dû, sans doute, à la difficulté qu'implique la description du continu.

Nous allons voir que Fréchet, créateur de la notion d'« ensemble compact », modifia en cours de route sa propre définition au risque de créer des confusions. Cantor avait déjà procédé de même.

En 1904, Fréchet fit paraître dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, vol. 139, p. 848 et suiv. (1) (p. 175) (la pagination indiquée ici correspond à celle des *Pages choisies d'Analyse générale* par M. Fréchet, Monographies réunies par M<sup>me</sup> Destouches-Février, Paris 1953) un article dans lequel il se proposait de généraliser un théorème de Weierstrass : « Toute fonction continue dans un intervalle limité y atteint au moins une fois son maximum ».

Fréchet l'énonce comme suit :

Toute fonctionnelle  $U_A$  uniforme et continue dans un ensemble compact et fermé  $E$  :

1) est bornée dans  $E$ .

2) y atteint au moins une fois sa limite supérieure.

L'auteur rappelle d'ailleurs que les travaux de Dirichlet ont montré l'utilité de cet énoncé plus nuancé que l'original.

Après avoir défini la notion de limite en analyse générale, l'appartenance d'un élément  $A$  à un ensemble  $E$  et la notion d'ensemble fermé, Fréchet énonce une autre définition de la continuité d'une fonctionnelle :

Nous pouvons dire maintenant qu'une fonctionnelle  $U$  uniforme dans un ensemble fermé  $E$  est continue dans  $E$ , si les nombres  $U_{A_n}$  tendent toujours vers  $U_A$  lorsque la suite quelconque d'éléments de  $E : A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  a pour limite  $A$ , quel que soit l'élément limite  $A$  de  $E$ .

Il est évident que cette définition est finalement identique à celle de Weierstrass. Il a suffi à Fréchet de transposer cette dernière dans le nouveau langage adopté par l'analyse générale. Comme nous l'avons dit dans notre introduction, la définition de l'application continue, notion abstraite, ne posait pas et ne posera guère de problèmes.

Fréchet fait suivre la définition de la fonctionnelle continue de celle d'ensemble compact :

Enfin nous appellerons ensemble compact tout ensemble  $E$  tel qu'il existe toujours au moins un élément commun à une suite infinie quelconque d'ensembles  $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ , contenus dans  $E$  lorsque ceux-ci (possédant au moins un élément chacun) sont fermés et chacun contenu dans le précédent.

On ne saurait trop remarquer que Fréchet parle d'une « fonction ou fonctionnelle continue », mais, par contre, d'un ensemble compact, bien que ce dernier concept eût pu, par référence aux travaux de Cantor, être appelé « ensemble continu ». Fréchet ne nous en donne pas la raison. Craignait-il à juste titre une notion chargée de traditions ? Avait-il renoncé au terme de continu après avoir pris connaissance des réflexions que fit Cantor à ce sujet ? Cela nous semble assez plausible. Toutefois, nous verrons que Fréchet abandonna cette prudence quand il introduisit en 1926 le concept d'« ensemble continu », dont il énonça la définition indépendamment de son concept d'ensemble compact.

Examinons maintenant cette notion de compacité. Dans un ensemble compact, nous pouvons emboîter les intervalles et — ce qui est essentiel — ceux-ci se resserrent sur un élément appartenant à l'ensemble. La compacité de Fréchet implique donc que l'ensemble soit complet et séparable. Quant à la continuité de Dedekind, elle entraîne la compacité. Que dire de la compacité et de la continuité de Cantor ? Le continu de Cantor est évidemment compact. Mais, une certaine réserve s'impose avant d'affirmer la réciproque. De même que dans la comparaison entre la continuité selon Cantor et la continuité selon Dedekind, il importe ici de préciser si l'on tient compte uniquement des définitions ou aussi des commentaires de Cantor. Dans le second cas, nous pensons pouvoir affirmer que Cantor n'aurait pu admettre d'identifier « compact » et « continu ». Mais il est probable qu'il aurait été fort satisfait de l'introduction de la nouvelle notion de compacité qui s'accorde en quelque sorte avec son idéal intuitif du continu a priori.

Il faut y insister : le terme de compact pouvait mettre d'accord les partisans du continu a priori et ceux du continu par parties. Pour les premiers, le concept idéal était sauf — quoique abandonné — ; pour les seconds, il ne s'agissait que d'une question de terminologie d'autant plus justifiée que le terme « continu » restait utilisé pour qualifier certaines applications.

Mais nous devons constater que l'analyse s'est éloigné du continu a priori. L'ensemble « compact » est « séparé ». Nous devons donc pouvoir y distinguer des éléments. Le continu aristotélicien, « bien cloué » peut devenir « trop bien cloué ». Le continu a priori, idéal, inséparable est inefficace en analyse : il ne saurait être compact. Nous verrons plus loin comment Veronese allait envisager cette dernière question.

Tout de même, Fréchet ne peut résister à la tentation d'envisager un modèle en donnant un second énoncé de la compacité d'un ensemble. Il ne démontre pas l'équivalence des deux formes de définitions ; la trouve-t-il triviale ? Il estimait en tout cas la seconde forme plus efficace (1) (p. 176) :

— il y a lieu d'introduire les propriétés d'un tel ensemble [compact]. On y parvient plus facilement au moyen de la proposition suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble  $E$  soit compact est que tout ensemble  $E'$  formé d'une infinité d'éléments distincts contenus dans  $E$  donne lieu à un élément limite au moins.

Nous ne pouvons pas nous empêcher de trouver ici une certaine analogie avec le théorème de Weierstrass sur la continuité d'une fonction, théorème cité au début du travail de Fréchet. Que l'autorité dont jouissent la définition classique de la fonction continue et le théorème de Weierstrass ait poussé Fréchet à donner cette seconde définition d'un ensemble compact, cela est très plausible ; mais rien ne nous permet de dire s'il était conscient ou non de cette influence. Fréchet pense certainement aux figures géométriques quand il écrit :

La définition montre aussi que les ensembles compacts jouissent de propriétés analogues à celles des ensembles limités de points de l'espace. En particulier, tout ensemble formé d'un nombre fini d'ensembles compacts est lui-même compact, tout ensemble contenant un ensemble non compact est non compact.

Il approuve la continuité de Dedekind autant que l'axiome de Cantor quand il poursuit :

Ce rapprochement s'explique lorsqu'on remarque que, en prenant comme éléments les points d'une droite par exemple, et en adoptant la définition ordinaire de la limite d'une suite de points, on trouve que tout ensemble limité de points d'une droite (comprendons une ponctuelle) est un ensemble compact.

Dans son ouvrage *Espaces abstraits* (2) (p. 69), Fréchet introduit de nouvelles nuances de terminologie. Celles-ci ne sont pas toujours très heureuses, car elles entraînent quelques contradictions. En effet, Fréchet énonce une nouvelle définition de l'ensemble compact qui ne saurait être l'équivalente de la première :

Un ensemble  $E$  de points dans l'espace  $(D)$  est compact, si chacun de ses sous-ensembles infinis donne lieu à au moins un point d'accumulation. Mais il faut bien remarquer que ce point d'accumulation peut ou non appartenir à l'ensemble compact considéré. [!]

Les deux premières définitions de la « compacité », datant de 1904, sont équivalentes à celle de la « compacité en soi » dans l'ouvrage de 1926 :

Un ensemble  $E$  de points d'un espace  $(D)$  est compact en soi lorsque chacun de ses sous-ensembles infinis donne lieu à au moins un point d'accumulation appartenant à l'ensemble considéré  $E$ .

Ici, le changement de terminologie est bien intentionnel. Fréchet dit en effet expressément qu'il préfère la nouvelle définition de « compact », renforcée par la notion de « fermé », à la définition de « compact en soi », équivalente à l'ancienne définition qui exigeait explicitement la fermeture de l'ensemble. Fréchet n'a malheureusement pas été très prodigue de commentaires. Toutefois, nous trouvons quelques considérations intéressantes dans le texte d'une conférence publiée dans les *Extraits des Atti Congressi Internat. Math.* (vol. 1,

Bologne, 1928, p. 267-274). Il y insiste beaucoup (1) (p. 5) sur la nature abstraite des notions introduites en analyse générale. Il parle d'éléments « dont la nature est indéterminée » :

— dont on connaît parfaitement la nature, mais dont, provisoirement, on n'a pas besoin de faire entrer la nature en ligne de compte.

Il affirme également avec insistance (1) (p. 8), qu'on ne peut songer à donner une définition de la limite ou du voisinage d'éléments dont la nature nous est inconnue. Si donc il n'est pas possible de donner une définition constructive complète et générale, il faut tourner la difficulté en énonçant des définitions descriptives que l'on complètera au besoin.

Quelle différence de conception entre Cantor et Fréchet ! Loin de chercher à décrire exactement une notion idéale, Fréchet propose des définitions approximatives. Il souligne encore que l'analyse générale ne peut s'appuyer sur des connaissances intuitives telles que celles du continu linéaire ou spatial qui avaient pu suffire aux premiers analystes. Les définitions de la distance, de la limite et du voisinage devaient s'appuyer toutefois sur nos notions courantes.

On extraira des conditions auxquelles satisfont ces définitions.

Ces conditions devront pouvoir s'exprimer dans un langage indépendant de la nature des éléments et être celles mêmes que nécessitent les démonstrations. A l'appui de ces considérations, voici ce que Fréchet écrit au sujet du continu en analyse générale (1) (p. 9) :

Nous ne connaissons pas intuitivement les propriétés du continu fonctionnel, mais nous savons au moins que les éléments de ce continu sont des fonctions. Dans l'Analyse Générale, nous ne connaissons même pas la nature des éléments du continu à étudier !

Nous remarquons ici une fois encore combien, pour Fréchet, la notion de continuité est devenue abstraite, éloignée de tout modèle concret.

Toutefois, dans son traité *Espaces abstraits*, et malgré le titre, Fréchet revient à une expression plus concrète. Il est fort possible qu'il le fasse, en partie au moins, par souci didactique.

Dans cet ouvrage, Fréchet juge nécessaire d'introduire ce qu'il appelle brièvement « le continu ». Tout d'abord, il met au point la définition du « bien-enchaîné » ou « connexe » (dans le sens moderne). Il écrit ensuite (2) (p. 176) :

Un continu est un ensemble fermé, bien enchaîné et non réduit à un seul élément. D'après ce qui précède, on peut remplacer dans cette définition les mots bien enchaînés par « connexe ».

Relevons tout de même que Fréchet n'a pas dit : « Un ensemble est continu si ... » ; il a cherché les propriétés d'un continu, propriétés qui qualifient généralement un ensemble de ce genre. Il se peut donc que, finalement, Fréchet ait craint dans une certaine mesure d'utiliser les termes : « ensemble continu ». On peut même se demander s'il n'a pas été aussi quelque peu influencé par l'idée du continu a priori, d'autant plus qu'il dit avoir donné la définition du continu afin de pouvoir écrire (2) (p. 176) :

Pour que le contraste entre les ensembles ouverts et fermés ne soit pas purement verbal, il faut que l'espace soit un continu. Plus précisément : dans un espace (V), pour qu'un ensemble — sauf l'espace (V) tout entier — ne puisse pas être à la fois ouvert et fermé, il faut et il suffit que cet espace soit un continu.

Dans la perspective de Fréchet, le continu doit donc servir à donner une signification autre que « verbale » aux notions d'ensemble ouvert et d'ensemble fermé. L'auteur abandonne ici les mathématiques abstraites qu'il défendait au début de son œuvre, pour revenir à une « réalité mathématique » au sens de Cantor. Le continu, cette notion vague, réapparaît ici uniquement pour qu'il n'ait pas à admettre qu'un ensemble puisse être à la fois ouvert et fermé, perspective qui ne semble pas lui plaire.

Les termes « non réduit à un seul élément » méritent d'être remarqués. L'auteur veut-il éviter l'interprétation du continu telle que nous la verrons chez Veronese ? Ce qui est certain, c'est que le continu a priori, « un », n'est pas le continu de Fréchet. Le continu de Fréchet diffère également de celui de Dedekind en ce sens qu'il n'est pas nécessairement complet.

Fréchet ne commente pas son idée de continu ; il ne l'applique pas davantage. Il semble bien que la définition ait été donnée uniquement pour illustrer l'ouverture et la fermeture d'un ensemble.

Si N. Bourbaki a repris la plupart des termes de Fréchet, celui d'« ensemble continu » ne figure pas dans son œuvre, ni celui de « parfaitement compact », qui fait intervenir la puissance du voisinage d'un point (2) (p. 192).

En mathématiques modernes, la notion de compacité a remplacé celle de continuité d'un ensemble. Le modèle par excellence de la continuité des Anciens reste la droite-support, celui de la compacité est la ponctuelle. Pour passer du concept de « compacité » à celui de « continuité a priori », il faudrait changer de base, transformer l'ensemble des points de la ponctuelle en un tout : la droite-support.

Si l'on ne considère plus les mêmes éléments, ni des ensembles d'éléments de même nature, il n'est pas possible de comparer leurs propriétés respectives telles que la « compacité », d'une part, et la « continuité », a priori ou non, d'autre part.

Notons encore que, si dans l'état de nos connaissances, la compacité peut servir d'hypothèse de travail, la « continuité » d'un ensemble nous semble contenir une contradiction dans les termes. Le mot « ensemble » sous-entend la qualité

de « composé ». En effet, pour définir un ensemble mathématique, il faut savoir déterminer les éléments qui le composent. Or, si l'on veut conserver un continu idéal a priori, il n'est possible de l'envisager que comme un tout, qui serait alors le continu a priori lui-même. Nous nous trouvons donc dans un cercle vicieux. Nous savons combien cette question avait préoccupé Cantor et comment il avait dû, à regret, admettre un compromis. Le « clouage » souhaité par Aristote n'a toujours pas été trouvé, mais Fréchet a montré une voie qui permet de s'en passer.

## § 2. L'inventaire: Schoenflies (1853-1928)

Il est évident que les mathématiciens de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle rencontraient bien des difficultés quand ils désiraient s'informer des recherches récentes. Or, de grands progrès avaient été accomplis dans le seul domaine de la continuité.

Afin de faciliter le travail de ses membres, le « Deutscher Mathematiker-Verein » demanda à Arthur Schoenflies d'élaborer un compte rendu concernant les nouvelles tendances en mathématiques. Compileur habile, il publia son rapport en 1900. En 1913 parut une seconde édition que Schoenflies lui-même considéra comme une « Umarbeitung », et qu'il intitula *Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen*.

La tâche de Schoenflies était ardue : il devait réunir des publications parues dans des revues multiples, juger de leur importance actuelle et future et essayer de les condenser tout en les rendant compréhensibles à des mathématiciens qui n'étaient pas nécessairement habitués à la terminologie nouvelle.

Le fait même d'avoir été désigné pour entreprendre ce travail constitue une certaine garantie d'objectivité. Mais, par ses commentaires et par l'importance qu'il attribuait à tel auteur ou à tel théorème, Schoenflies ne donnait pas seulement le point de vue d'un contemporain. Il avait, par son mandat, la possibilité de préserver une publication de l'oubli, d'affirmer ou d'infirmer sa valeur.

L'œuvre de Schoenflies apparaît comme un compromis entre le traité et l'ouvrage historique, et ne se veut nullement originale. Mais tout compromis a ses écueils : simplifier certaines idées, éviter des citations directes, cela peut conduire à des imprécisions et à des interprétations erronées.

Relevons quelques passages qui montrent que les travaux de Cantor, de Dedekind et de Fréchet n'avaient pas encore éliminé toute confusion et coupé court à toute discussion.

Citons, par exemple, ce passage du *Zweiter Abschnitt, Theorie der Punktmengen* (1) (p. 229) :

Auf geometrischer Grundlage dagegen ruht der spezifische Inhalt, den diese Begriffe dadurch erhalten, dass die Punktmengen Bestandteile des stetig ausgedehnten Raumes sind und daher an allen Eigenschaften teilhaben, die der empirisch gegebene geometrische Stetigkeitsbegriff resp. die im Raum mögliche Massbestimmung besitzt.

Schoenflies veut donc considérer un ensemble de points « par rapport à l'espace ». Est-ce l'introduction tardive du « continu » dans l'œuvre de Fréchet qui le pousse à renoncer à des conceptions trop abstraites ? C'est difficile à dire, mais notons qu'il prend quelques précautions en parlant du continu, précautions peut-être suggérées par Cantor ; ainsi il écrit : « empirisch gegebener geometrischer Stetigkeitsbegriff » et non « Stetigkeit » tout court.

Schoenflies fait une remarque qui le met en contradiction avec un des résultats importants de Cantor (2) (p. 39) ; il prétend qu'un type d'ordre qui comporte des lacunes ne peut être désigné comme continu, alléguant qu'aucun mouvement ne serait possible dans un tel continu.

Schoenflies semble aussi redouter l'effort d'abstraction de Fréchet. Plus particulièrement, il se refuse à étudier chaque ensemble isolément pour lui-même : un ensemble de points est un sous-ensemble de l'espace ponctuel  $R_n$  ; on ne saurait l'en abstraire. Ces exemples nous montrent que les idées nouvelles se heurtaient à un certain conformisme qui désirait appuyer solidement les mathématiques sur le monde concret.

Des changements de terminologie sont également proposés par Schoenflies (2) (p. 283) : pour lui, un ensemble parfait doit être dense en soi, fermé et sans lacune (« nicht lückenhaft » dans le sens de Dedekind).

Après ce témoignage contemporain qu'est le travail de Schoenflies, nous devons constater que si les travaux de Cantor, Dedekind et Fréchet étaient certes estimés à leur juste valeur, le point de vue de ces auteurs n'était pas vraiment ni entièrement partagé par les mathématiciens de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle. De plus, le résumé de Schoenflies risquait de donner naissance à une terminologie non unifiée qui pouvait engendrer des malentendus multiples.

### § 3. La systématisation de Hausdorff (1868-1942)

La mise au point des nombreux résultats cités par Schoenflies fut faite par Felix Hausdorff. Ce dernier publia en 1914 les *Grundzüge der Mengenlehre*, traité qui allait devenir classique.

Certains commentaires et certaines bibliographies attribuent encore aujourd'hui une valeur actuelle à l'œuvre de Schoenflies, mais les mathématiques, en raison surtout de l'effort d'abstraction entrepris à l'époque, ne pouvaient se passer d'un vocabulaire clair et sans ambiguïté. Il est incontestable que l'ouvrage de Hausdorff répondait à cette exigence. Mais s'il a connu un grand succès, cela n'est pas dû à un besoin de l'époque. Hausdorff n'a pas seulement ordonné admirablement la matière de son traité, il a aussi su créer un lien entre certains résultats apparemment disparates de la théorie des ensembles. De plus — ceci est essentiel pour nous — il a imposé une terminologie bien déterminée.

Signalons d'abord que, pour qualifier un ensemble, Hausdorff n'emploie jamais le terme de continu sans nommer Dedekind. Il a hâte de préciser le

sens de ce terme de continu. Il est certain que les écrits de Cantor et de Dedekind sont à l'origine de cette prudence.

Par contre, Hausdorff définit d'une façon classique la continuité d'une fonction ou d'une application.

Dans le chapitre IV, *Geordnete Mengen*, § 5, *Stetigkeit* (1) (p. 90) après avoir décomposé un ensemble  $A$  en deux sous-ensembles  $P$  et  $Q$  (notations de Hausdorff), l'auteur donne les définitions suivantes : le saut (*Sprung*) :  $P$  a un dernier,  $Q$  un premier élément ; la coupure (*Schnitt*) :  $P$  a un dernier,  $Q$  n'a pas de premier élément ; la lacune (*Lücke*) :  $P$  n'a pas de dernier et  $Q$  pas de premier élément. Un ensemble dense est un ensemble qui n'a pas de saut, mais qui peut avoir des lacunes (par exemple l'ensemble des nombres rationnels). Hausdorff précise qu'un ensemble contenant plus d'un élément, sans lacune ni saut, permettant donc la coupure, est continu dans le sens de Dedekind. Il en déduit :

Eine stetige Menge ist also dicht und lückenlos.

Il spécifie que l'ensemble des nombres réels est continu et que les termes « continu arithmétique, puissance du continu » trouvent par là leur justification. Grâce au procédé de Dedekind les lacunes de l'ensemble des nombres rationnels sont comblées (*ausgefüllt*) par l'ensemble des nombres irrationnels.

Aussi longtemps que Hausdorff considère l'ensemble des nombres réels, il se sert du terme continu (*stetig*). Mais lorsqu'il passe aux ensembles abstraits, il n'utilise plus jamais le terme de continu, mais intitule par exemple le chapitre VII *Divergente, kompakte, konvergente Mengen* (1) (p. 209). Il aurait pu, du reste, ne jamais l'introduire dans son traité et, pour qualifier l'ensemble des nombres réels, ne parler que d'ensemble compact. A-t-il suivi une tradition déjà bien établie ou a-t-il voulu rendre hommage à Dedekind ? Nous ne pouvons le savoir. La première définition de la compacité est très générale (1) (p. 230) :

Eine unendliche Menge ohne Häufungspunkt nennt man divergent.

Eine Menge ohne divergente Teilmenge nennen wir (nach M. Fréchet) kompakt.

Hausdorff, comme Fréchet dans sa seconde définition, ne postule pas que les points d'accumulation d'un sous-ensemble infini contenu dans un ensemble compact fassent partie de l'ensemble :

Jede unendliche Teilmenge einer kompakten Menge hat also mindestens einen (nicht notwendig zu  $A$  gehörigen) Häufungspunkt.

Soulignons que Hausdorff définit la compacité par l'exclusion d'une propriété. Cet énoncé n'est pas sans analogie avec ce que Hilbert appellera l'axiome  $V_2$ , axiome dit de la « Vollständigkeit » (voir chapitre VI). Hilbert procédait aussi par l'exclusion d'éléments. Il semble ainsi qu'il est plus aisé d'exprimer ce que le continu n'est pas, que de formuler ce qu'il est.

L'auteur reprend la question dans le chapitre VIII, § 8 *Metrische Räume: Bedingungen für kompakte Mengen*. Il constate tout d'abord qu'un ensemble borné n'est pas nécessairement compact, mais que la réciproque est vraie, et il arrive à démontrer les deux thèses suivantes (1) (p. 314):

Damit jede total beschränkte Menge kompakt sei, ist die Konvergenz jeder Fundamentalmenge notwendig und hinreichend.

Damit jede total beschränkte Menge kompakt sei, ist die Konvergenz jeder Fundamentalfolge notwendig und hinreichend.

Notons que, pour introduire cette notion de compacité, Hausdorff utilise la métrique. Il ne définit plus ici la compacité par l'exclusion d'une propriété de l'ensemble en question, mais il reprend la première définition de Fréchet: les points d'accumulation de l'ensemble compact doivent être des éléments de ce dernier.

Il y a dans la manière dont Hausdorff utilise sa terminologie certains risques d'erreur: sa première définition est équivalente à la seconde de Fréchet. Dans la définition que nous venons de citer, les exigences plus fortes de la première définition de Fréchet sont satisfaites. Nous ne voulons pas prétendre par là que Hausdorff ait commis une erreur: il n'a pas dit: « Eine Menge ist kompakt, wenn sie total beschränkt ist und wenn... ». Il suffit cependant d'un léger changement dans la syntaxe de la phrase de Hausdorff pour revenir à la première définition de Fréchet. On ne saurait assez souligner de telles sources de confusions.

Hausdorff a repris de son côté le terme de « zusammenhängend », introduit par Weierstrass, comme nous l'avons vu plus haut. Il en donne toutefois une interprétation bien différente de celle de Cantor (1) (p. 244):

- Eine von Null verschiedene Menge  $A$  heisst zusammenhängend, wenn sie sich nicht in zwei fremde, von Null verschiedene, in  $A$  abgeschlossene Teilmengen spalten lässt.

Hausdorff est conscient que le mot « zusammenhängend » qualifie des idées différentes. Il précise dans une note (1) (p. 244) que sa définition de la notion « zusammenhängend » n'est équivalente à aucune de celles données jusqu'alors. Sa clarté et sa richesse confèrent à l'ouvrage de Hausdorff l'autorité d'un traité classique. Mais, comme nous l'avons montré, des interprétations différentes sont encore possibles.

La définition de « zusammenhängend » (connexe) telle que la donne Hausdorff est devenue classique et elle a supplanté l'interprétation de Cantor. Soulignons que connexe ne saurait être équivalent à « zusammenhängend » dans le sens de Cantor, « zusammenhängend » nécessitant en effet une métrique. Si un ensemble compact est nécessairement connexe dans le sens de Hausdorff, la réciproque ne saurait être vraie: l'ensemble des nombres entiers est connexe.

#### § 4. Conclusion

Si la continuité d'une fonction a été construite sans qu'il fût nécessaire de renoncer à un idéal préconçu, il n'en fut pas de même pour l'élaboration de la notion d'ensemble « continu ». Cantor s'était finalement résigné à donner une définition efficace, qui trahissait pourtant son idéal personnel. Dedekind, quoique satisfait de sa solution, n'a pas vraiment défini « le continu », mais un continu qui porte son nom : le continu arithmétique de Dedekind relatif à l'ensemble des nombres réels. Fréchet enfin, a adopté une solution extrême : l'abandon pur et simple de la notion d'ensemble continu au profit de celle d'ensemble compact ; nous ne pensons pas le trahir en considérant l'introduction furtive du « continu » dans son œuvre comme accidentelle.

L'effort principal en vue d'une mise au point — momentanée peut-être — de la question de la continuité mathématique a donc été fait par Cantor et Dedekind. Mais c'est le mérite de Fréchet, de Hausdorff et finalement de N. Bourbaki, d'avoir su classer et systématiser les résultats. Ces auteurs ont eu l'audace d'aller loin dans l'abstraction et de doter les mathématiques d'une terminologie qui évite, pour le moment au moins, toute controverse.

Soulignons cependant que la rigueur extrême des définitions n'a été obtenue qu'au prix de l'abandon total du continu a priori, idéal concrétisé pour bien des mathématiciens moins exigeants par l'espace ou par le temps.

## CHAPITRE VI

# LA CONTINUITÉ EN GÉOMÉTRIE

Les travaux de Cantor, Dedekind et Fréchet avaient donné une solution au problème du continu en analyse. Les géomètres, influencés par ces auteurs, allaient le résoudre de leur côté et dans leur propre perspective.

Ces recherches aboutirent à l'exposé systématique des axiomes  $V_1$  et  $V_2$  de Hilbert, d'une part, et aux vues originales de Veronese, d'autre part.

### § 1. Otto Stolz (1842-1905)

En 1883, Stolz fit paraître dans les *Mathematische Annalen*, N° 22 (p. 504-519), un article intitulé : *Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes*.

L'auteur désirait manifestement souligner l'importance de cet axiome dans la construction de la géométrie. Il est vrai que Cantor et Dedekind avaient cité l'axiome d'Archimède dans leurs travaux. Toutefois, dans leurs définitions de la continuité, aucun d'eux ne l'avait repris sous sa forme primitive et en se référant expressément à Archimède.

Stolz commence par mettre en évidence la nécessité de l'axiome en montrant que la définition de la notion de grandeur ne saurait le remplacer.

Désirant examiner la coupure de Dedekind et ses applications, il propose un énoncé intéressant (1) (p. 508) :

Das Grössensystem  $E$  heisst zwischen den Grenzen  $A$  und  $B$  stetig, dann und nur dann, wenn an den ihm zugehörigen Grössen überall-dichte Systeme  $\pi$  zwischen den genannten Grenzen gebildet werden können und wenn jeder Lücke erster Art eines solchen unzählig viele Grössen  $S$  aus  $E$  entsprechen, jede grösser als alle  $P_1$  und kleiner als  $P_2$ , jedem Schnitt aber eine und nur eine solche Grösse  $S$ . Nach der Definition der Lücke ist es selbstverständlich, dass die soeben erwähnten Grössen  $S$  nicht dem bezüglichen System angehören. [ $P_1$  et  $P_2$  sont les extrémités des lacunes].

Nous rencontrons donc ici une expression de la coupure de Dedekind où l'on voit particulièrement bien comment on peut engendrer l'ensemble des nombres réels à partir de l'ensemble des nombres rationnels.

Mais ce qui est important et original chez Stolz, ce sont les conclusions qu'il déduit de cette définition de la continuité.

Si l'on prend les hypothèses suivantes relatives à un ensemble  $E$  :

- 1) il existe une relation d'ordre strict dans  $E$ ,
- 2) l'addition est définie dans  $E$ ,
- 3) si  $A < B$ , on ne peut trouver qu'un seul  $X$ , élément de  $E$  tel que  $A + X = B$  et si l'on ajoute encore l'hypothèse de la continuité citée plus haut, on peut alors déduire :
  - a) on trouve dans  $E$  une seule grandeur  $X$  telle que  $nX = A$ ,
  - b) l'axiome d'Archimède existe dans  $E$ .

Ce résultat nous semble aujourd'hui banal, mais il était extrêmement neuf pour l'époque. Stolz ne s'est pas contenté de transformer la coupure de Dedekind, ce qui n'aurait eu qu'un intérêt limité. Mais il a fait voir que l'axiome d'Archimède est implicitement contenu dans le processus de la coupure de Dedekind. Veronese fut un des premiers à relever (1) (p. 95) ce fait important : C'est Stolz qui a trouvé que l'axiome d'Archimède est indispensable pour définir le continu de Dedekind. Quand l'axiome n'est pas explicitement cité, il est toujours contenu implicitement dans les autres axiomes choisis pour définir le continu arithmétique.

Plus précisément, Stolz admettait que l'axiome d'Archimède était valable sur n'importe quelle « droite », particulièrement sur ce que l'on peut désigner comme une « droite-support ». Comme nous allons le voir, c'est le refus de ce point de vue qui sera l'origine du travail de Veronese.

## § 2. Giuseppe Veronese (1854-1917)

L'ouvrage de Veronese intitulé *Fondamenti di Geometria* a été traduit par Adolf Schopp en 1894. Veronese a collaboré à cette édition allemande en apportant quelques modifications à son texte italien. Ces circonstances expliquent que Hilbert et bien d'autres se soient référés à cette édition-là. Comme elle a pris, en quelque sorte avec l'accord de l'auteur, le pas sur l'œuvre originale, nous nous y référons également.

Veronese fit suivre son ouvrage d'une annexe. Dans la première partie de celle-ci, nous pouvons constater l'influence marquée de Lobatchevsky. Si l'on peut construire en effet une géométrie non euclidienne, pourquoi ne pourrait-on pas aussi tenter de construire une géométrie non archimédienne ?

Dans sa préface, Veronese envisage des problèmes d'axiomatique : de tout axiome il exige qu'il ne soit pas contradictoire et qu'il ne heurte pas notre

conception intuitive de l'espace. Il demande donc davantage que la simple non-contradiction : il exige une adéquation convenable au « bon sens » ; il veut donc une axiomatique qui réponde à notre « intuition » logique et spatiale. Veronese attache ainsi une grande importance aux modèles qui concrétisent le schéma abstrait. Ainsi il estime qu'un axiome qui postulerait que le cercle n'est pas une ligne fermée nous choquerait. Veronese veut que l'espace soit un modèle intuitif acceptable de la construction abstraite. Il a en somme une conception assez proche de celle de Cantor.

Dans la note 2 (1) (p. XVII) Veronese donne raison à certains philosophes qui considèrent l'espace comme un concept et non comme une notion intuitive (*Anschauung*), car, selon lui, aucune considération abstraite, en particulier aucune considération arithmétique (*numerisch*) ne peut aboutir à la conception intuitive de l'espace (*Raumanschauung*).

Veronese exige une certaine efficacité. Il prétend par exemple avoir élaboré une géométrie non archimédienne à la seule fin de créer une théorie utilisable en analyse.

Faisons néanmoins quelques réserves. Il est certain que Veronese était impressionné par le succès de la géométrie non euclidienne. A-t-il consciemment ou non, entrepris l'élaboration de sa géométrie non archimédienne comme une « spéculation de l'esprit » ? N'oublions pas en effet que l'ordre des axiomes des parallèles et de la continuité peut être interverti. Quoi de plus tentant dès lors que de créer une géométrie non archimédienne en s'inspirant des géométries non euclidiennes ? Comparant la solidité de son ouvrage à la fragilité des théories de la continuité — rappelons l'hypothèse du continu — Veronese a finalement préféré sa propre manière de voir à la conception traditionnelle.

Comme nous allons le voir, Veronese précise qu'il introduit également la continuité archimédienne sous le nom de « continuité relative », cas particulier de la « continuité absolue ». De plus, s'appuyant implicitement sur la communication de Cantor publiée en 1878, Veronese se borne à étudier le continu unidimensionnel.

Dans son introduction au chapitre IV, *Considérations empiriques sur le continu rectiligne concret* (1) (p. 52), l'auteur affirme que l'on peut se baser sur des concepts empiriques qui aident à concrétiser les connaissances mathématiques pour autant, naturellement, qu'on ne les utilise pas dans les démonstrations formalisées.

Pour illustrer le continu rectiligne, Veronese suggère le modèle du lieu (*Ort*) qu'un fil à plomb occupe à un certain instant donné (*Zeit*).

Cet emploi d'un modèle quasi concret est intéressant. C'est à notre avis un trait caractéristique de Veronese. De prime abord, il nous semble que la géométrie non archimédienne devrait aboutir à un schéma des plus abstraits. Or l'habileté de Veronese nous fait découvrir une géométrie pour laquelle il présente un modèle très simple, la droite, modèle identique à celui de la géométrie archimédienne. Il est vrai qu'il ne nous propose pas le fil à plomb lui-même comme

modèle, mais le lieu qu'il occupe dans l'espace à un moment donné. Mais c'est là une définition qui ne demande pas un grand effort d'abstraction. Veronese combine habilement ses considérations heuristiques et la construction formelle de sa géométrie. Si cette dernière ressort moins bien, son texte suit cependant une méthode didactique remarquable.

Pour examiner les propriétés du continu rectiligne, illustré ci-dessus par le lieu du fil à plomb, Veronese, notons-le en passant, lui fait reprendre la position traditionnelle, soit celle de l'axe des abscisses dans le plan.

Tout d'abord Veronese postula que le continu rectiligne est composé de parties identiques, alignées de gauche à droite. Il importe de retenir l'idée d'une composition par « parties identiques » ; cela signifie qu'une droite est composée par parties, mais que ces parties sont nécessairement des portions de droites et ne sont donc pas des points.

C'est par sa composition « de gauche à droite » que Veronese introduit la notion d'ordre. Dans la même perspective intuitive que représente l'indication « de gauche à droite », Veronese constate qu'entre deux segments consécutifs, on ne saurait en intercaler un autre. Toutefois, il n'utilise guère la notion de consécuitivité. Soulignons qu'il ne postule pas par là que la droite est un ensemble complet dans le sens de Dedekind.

Après la description du continu formant « un tout », Veronese entreprend l'examen de la division réitérée d'un segment de droite. Il admet alors qu'on doit finalement aboutir à une partie indivisible du continu, tel le moment pour le temps. Toutefois, cette partie indivisible doit être telle qu'on ne saurait pratiquement jamais l'atteindre par des divisions réitérées. Cette idée qui compromet peu son auteur élude le problème auquel s'achoppaient les Anciens. Elle permet en effet la division réitérée sans aucune restriction et elle ménage en même temps la conception des atomistes. Veronese, suivant son habitude, justifie immédiatement son affirmation par des considérations très concrètes. Si nous divisons un continu rectiligne, nous dépendons des possibilités de nos instruments qui ne nous permettront jamais d'aller au-delà d'un certain nombre de divisions. Théoriquement, le nombre des divisions pourra, par contre, toujours être augmenté en utilisant, par exemple, des instruments de plus en plus fins.

Après cette justification concrète, Veronese postule son continu composé par des indivisibles, en spécifiant une fois de plus que ces parties constituantes étaient de même nature que le continu lui-même. Rappelons que pour Veronese il n'est pas question de composer une droite par un ensemble de points.

Cette idée, que l'auteur partage avec les Eléates, est aussi celle des enfants. Piaget a en effet montré (1) (p. 156) que les enfants « voient » différemment les « points constituant un triangle, points triangulaires » et ceux « constituant un carré, points carrés. »

Après avoir introduit une notion d'ordre et la division réitérée, Veronese examine la nature d'un « lieu de la coupure » d'un continu. Il admet que ce

« lieu de la coupure » ne fait pas partie du continu ; il n'appartient ni à l'une ni à l'autre des deux classes.

Veronese ne contredit ainsi nullement Dedekind. Au contraire, si nous définissons un nombre irrationnel à l'aide de la coupure, il ne fait pas partie « de l'une ou de l'autre des deux classes ».

Il va sans dire que Veronese utilise d'autres arguments pour soutenir ses affirmations. Si l'on peint une partie d'un continu rectiligne en rouge, une autre en blanc, ce qui sépare le rouge du blanc ne saurait être ni rouge ni blanc. Cette « coupure » ni rouge ni blanche ne saurait donc être une partie du continu rouge ou blanc. De plus, Veronese estime qu'une telle « coupure » n'est qu'un symbole (Trennungszeichen).

Voici un autre exemple qui doit encore illustrer son idée. Si on divise un continu linéaire par un point A, ce dernier est entre une partie  $a$  à droite et une partie  $a'$  à gauche ; la division effectuée, A ne fait plus partie du continu tout en appartenant à  $a$  et à  $a'$ . Veronese arrive ainsi à une remarque très importante (1) (p. 54) (note 1) :

Die Hypothese, der Punkt sei nicht Teil des gradlinigen Continuums (und habe an sich auch keine Teile) bedeute, dass alle Punkte, die wir uns im Continuum denken können, soviel es auch seien, zusammen vereinigt, das Continuum nicht bilden. Und wählen wir einen so kleinen Teil (XX') des Gegenstandes, wie man nur will (bei der Zeit einen Augenblick) aus, welcher Teil somit unbestimmt ist (d. h. X und X' sind in unseren Gedanken nicht festliegend), so zeigt uns die Anschauung, dass derselbe immer kontinuierlich ist.

On voit donc se dégager peu à peu une des idées importantes de Veronese : le point n'est pas une partie constituante de la droite, mais un moyen de repère des différents segments, parties de la droite. Il réfute ainsi à sa manière par un compromis proposé d'autorité une des objections de Bolzano.

En utilisant désormais les points comme « moyens de repère », Veronese fait les constatations suivantes.

Si l'on dessine deux points, le continu rectiligne est divisé. Chaque partie déterminée par ces deux points peut être divisée à son tour par un nouveau point. L'originalité de Veronese est de prétendre que le procédé ne peut être répété indéfiniment.

Un continu non limité à droite ne l'est pas non plus à gauche. Le continu de Veronese est symétrique au sens de la symétrisation de la droite des nombres.

Entre deux points du continu mathématique, il y en a d'autres. Prenons un point X du continu et un segment AB contenant X. A et B peuvent se rapprocher de X sans jamais s'y confondre. Il y aura toujours en plus de X un autre point Y situé entre A et B. Nous verrons que cette propriété-là est celle que Veronese considérera comme caractéristique de sa définition du continu.

Ainsi les idées de Veronese s'écartent tout à fait de celles de Cantor et de Dedekind. Et pourtant ces trois auteurs sont partis du même modèle.

Tout en admettant que le modèle « droite » se prête à des spéculations presque contradictoires, et qu'il y a là peut-être un « mystère » qui ressortit finalement à la psychologie, Veronese fait une critique sévère des travaux de Cantor et de Dedekind (1) (p. 56). Ces deux auteurs ont été arbitraires, estime-t-il, en établissant une bijection entre l'ensemble des points porté par une droite et l'ensemble des nombres réels. Notons que Veronese n'a pas beaucoup approfondi les vues qu'il critique. Cantor et Dedekind savaient parfaitement que la bijection en question était arbitraire, puisqu'elle se fonde sur un axiome ; Veronese veut montrer que Cantor et Dedekind avaient tort de croire cette bijection indispensable à la construction de l'analyse.

Dans l'œuvre de Dedekind, Veronese n'admet pas l'élaboration du continu de l'espace à partir du continu arithmétique. Par là il se rapprochait un peu de Cantor ; mais malheureusement, les commentaires à ce sujet manquent totalement.

S'opposant à Cantor et à Dedekind, Veronese précise bien qu'il ne veut considérer que le continu rectiligne intuitif décrit plus haut et le point sans dimension, le continu arithmétique n'étant qu'un cas particulier de ses vues plus générales. De cette façon, il estime que les définitions contenues dans ses théories ne sont plus imposées par la contrainte (Zwang), mais se trouvent justifiées par le continu intuitif (Veronese appelle « continu intuitif » ou « continu concret » ce que nous avons nommé « continu a priori »).

En passant, l'auteur trouve remarquable qu'une notion aussi complexe que celle du continu arithmétique, notion fondée sur des symboles, puisse être en accord avec un modèle aussi primitif que simple : le continu linéaire. Il insiste sur le fait que le continu intuitif est indépendant d'un système de points.

Toutefois, il ajoute que le continu rectiligne peut, en géométrie, être représenté par un ensemble de points, bien que ces points ne soient pas les éléments du continu. Dans ce cas-là, le continu rectiligne reste composé de segments de droites reliant deux à deux les points qui les définissent.

Soulignons que Veronese ne décompose pas la droite en points, mais en segments délimités par des points. S'il prend en quelque sorte le chemin inverse de celui de Cantor, il n'admet pas non plus les vues de ce dernier. Partant du continu a priori, Veronese le décompose en choisissant comme éléments des segments de droites délimités par des points, tandis que Cantor avait cherché à constituer à l'aide de points un continu tel que la droite. La concession qui consiste, de la part de Veronese, à envisager un continu composé est donc toute théorique.

Du reste, il dit expressément que le mystère (Geheimnis) de la continuité de la droite se ramène au problème de la continuité d'une partie quelconque de la droite, partie qui peut être aussi petite que l'on voudra, mais toujours continue en elle-même. S'il n'est pas possible de pénétrer ce mystère, il est d'après lui inutile d'aller plus loin, même si ce mystère est lié à la notion de limite. En effet, le mystère de la continuité n'est pas gênant en mathématiques, puisqu'il

est toujours possible de construire un ensemble ordonné de points, construction arbitraire, mais efficace. Mais, il faut être conscient que l'on ne construit pas une droite, continu rectiligne, en faisant correspondre bijectivement l'ensemble des points qu'elle peut porter à l'ensemble des nombres réels.

Veronese écarte aussi la possibilité d'établir une bijection entre l'ensemble des nombres réels et celui des parties arbitrairement petites de la droite. Il considère qu'il est impossible de définir une bijection entre un ensemble aussi riche que celui des nombres rationnels — et, à plus forte raison, celui des nombres réels — et les parties d'une droite. Nous voyons donc qu'il ne commet jamais l'erreur qui consisterait à vouloir composer par des éléments, des points, un élément d'une autre nature, la droite. Il dit expressément que le continu concret ou a priori ne peut être formalisé simultanément à l'aide de concepts différents, tels que ceux de segments et de points; le point ne sert qu'à diviser le segment. A cet égard, la théorie des ensembles donne raison à Veronese, sans toutefois cautionner sa conception extrême qui consiste à rejeter l'axiome de Cantor.

En effet, Veronese refuse d'admettre que la droite puisse être composée par des points sans parties et définie par la bijection entre l'ensemble de ses points et un ensemble de nombres. Il affirme du reste que les parties constituant la droite ne forment pas un ensemble assez riche pour permettre une bijection entre l'ensemble de ses éléments et celui des nombres rationnels. A plus forte raison, il est impossible d'envisager une bijection entre l'ensemble des éléments de la droite et celui des nombres réels. Veronese remet donc en question l'équipotence de la ponctuelle et de l'ensemble des nombres réels. Il remarque en outre qu'en acceptant éventuellement une « droite » discontinue, on peut postuler qu'elle représente l'ensemble des points à abscisse algébrique, ou encore l'ensemble des points ayant comme abscisse un nombre réel. Ces hypothèses admises, la droite serait alors le modèle concret de deux constructions abstraites différentes. Les éléments de la première image sépareraient les éléments de la seconde image. Veronese se demande alors si l'on ne peut pas imaginer que l'ensemble des nombres réels est un sous-ensemble d'un ensemble de nombres plus riche dont les éléments seraient séparés par les nombres réels comme ces derniers le sont par les nombres algébriques. S'il devait en être ainsi, Veronese conclut que la droite ne changerait pas pour autant.

Veronese est donc un de ceux qui ont eu l'idée d'un ensemble de nombres « hyper-réels ». Mais cette hypothèse revenait à ne pas admettre l'introduction de l'axiome de Cantor ou d'un axiome équivalent.

Après ces critiques, Veronese se déclare toutefois d'accord d'introduire des nombres et des points, des repères en quelque sorte, afin que sa géométrie soit utilisable.

D'après lui, il faut admettre que toute partie de la droite contient au moins un point entre ses limites (extrémités). Par contre, les parties de la droite devraient rester indépendantes des nombres rationnels ou irrationnels. Comme toujours,

Veronese illustre sa pensée par un exemple concret :

Si un obus partant de A, se dirige vers B et parcourt la distance

$$\frac{AB}{2}, \frac{AB}{2} + \frac{AB}{2^2}, \frac{AB}{2} + \frac{AB}{2^2} + \frac{AB}{2^3}, \dots$$

il arrivera à X qui est aussi près que l'on veut de B, mais non à B lui-même. Pour satisfaire les exigences du monde concret, nous devons alors admettre l'existence d'un point C différent de B, mais qui peut être atteint par l'obus. Veronese estime ce raisonnement valable pour des parties de la droite de plus en plus grandes.

Cet exemple semble inspiré des paradoxes de Zénon. Nous savons que les Eléates, forts de cette argumentation, avaient rejeté l'idée d'un continu composé par parties, sans proposer de solution au problème. L'apparition du postulat d'Eudoxe dans l'œuvre d'Euclide avait ensuite permis de surmonter la difficulté.

Veronese, revenant aux arguments des Eléates, cherche une autre solution qu'il espère efficace en mathématiques. Comme il refuse l'axiome des Grecs, il lui substitue une affirmation dogmatique de nature axiomatique : Il admet que l'obus atteint le point C, C n'étant pas identique à B, mais « pratiquement confondu ». Il justifie cette affirmation par l'expérience que nous avons du monde concret (1) (p. 57).

On est tenté de prendre parti pour l'axiome d'Archimède contre les idées de Veronese. Nous sommes les élèves d'Euclide et il nous semble que la solution d'Eudoxe était la bonne. Nous pouvons manipuler des segments et « réaliser » l'axiome d'Archimède ; mais nous savons aussi que si C n'est pas identique à B, il est pratiquement confondu avec B : l'obus atteint bel et bien son but.

Nous avons dû apprendre à nous méfier des « vérités » traditionnelles. Il n'est pas dit que l'idée de Veronese de placer « C pratiquement en B » n'aurait pas pu donner un développement quasi identique à l'analyse ; or seule la forme — et non le fond — des théorèmes aurait changé. Veronese et Eudoxe se sont l'un et l'autre appuyés sur la réalité concrète « l'obus atteint le but ». Tous deux ont fait un acte d'autorité, posé un axiome. L'axiome d'Archimède, nous le savons, est plus fort que celui de Veronese. Mais il faut surtout retenir le fait que Veronese a été obligé d'introduire une affirmation non démontrable pour éviter que son système entre en contradiction flagrante avec le monde concret. C'est ainsi que l'introduction d'un axiome de la nature de celui d'Archimède lui est apparue nécessaire.

Après avoir développé ses vues sur le continu, Veronese passe à son élaboration formelle, dont nous donnons l'essentiel :

Hypothèse I (1) (p. 77) : Il existe une forme qui sert à la détermination de toutes les autres, la forme de base. Veronese introduit la possibilité de comparer des parties du continu entre elles.

Hypothèse II (I) (p. 78) : La forme de base est un système identique à toutes ses parties ; elle est de dimension un. Cette précaution exclut la confusion entre droite-support et ponctuelle.

Hypothèse III (I) (p. 90) : Dans un des sens de la forme de base, il existe au moins un élément qui, par rapport à tout segment-unité, est en dehors du domaine de l'échelle. Cet énoncé n'est pas sans analogie avec l'axiome d'Archimède.

Hypothèse VI (I) (p. 144) : Chaque segment fini, dont les extrémités varient toujours dans le sens opposé et qui tend à devenir arbitrairement petit, contient un élément différent de ses extrémités. L'hypothèse VI empêche que le segment devienne nul.

Cette hypothèse VI est considérée, par Veronese, comme l'essence de la continuité. Soulignons que l'auteur énonce cette condition essentielle, comme le fit déjà Dedekind. Rappelons aussi que l'hypothèse I de Dedekind introduisait les notions de « plus grand que, plus petit que », donc la comparaison ; les hypothèses II et III, la coupure ; l'hypothèse IV enfin décrétait que la coupure était un processus interne. L'influence de Dedekind sur Veronese semble évidente. Voulant établir une théorie de la continuité, Veronese a naturellement étudié à fond l'œuvre de son prédécesseur.

Veronese pose la définition suivante : Un système qui admet les hypothèses énoncées plus haut est homogène et continu par rapport à l'unité (de Veronese) choisie. Dans le cas contraire, le système est dit discontinu par rapport à cette unité.

L'auteur en déduit les propositions suivantes :

a) Dans chaque segment dont les extrémités varient toujours dans le sens opposé et qui devient arbitrairement petit par rapport à une unité choisie, il existe un domaine infiniment petit d'éléments qui se trouvent en dehors du domaine de variabilité des extrémités du segment. Il s'agit de garantir une fois de plus les intervalles emboîtés.

b) Chaque segment (XX') qui devient arbitrairement petit par rapport à une unité donnée et dont les extrémités varient dans le sens opposé, n'a pour limite qu'un élément unique [ce n'est pas un point], un domaine infiniment petit dans le sens absolu du terme.

Veronese montre donc qu'il a assuré la possibilité d'effectuer des passages à la limite.

Il va encore préciser son « continu absolu » dans l'hypothèse VIII (I) (p. 167) :

Tout segment (XX') dont les extrémités varient dans le sens opposé et qui devient infiniment petit dans le sens absolu contient un élément situé en dehors du domaine de variabilité de ses extrémités.

De l'hypothèse VIII, il déduit :

a) Il ne peut y avoir qu'un seul élément dans le segment (XX') si ce dernier satisfait l'hypothèse VIII.

b) L'hypothèse VIII entraîne l'hypothèse VI pour n'importe quelle unité. L'hypothèse VIII n'est évidemment qu'un énoncé amélioré de l'hypothèse VI, l'auteur précisant la notion d'« arbitrairement petit » et ce qu'il entend par « extrémité ».

Si nous trouvons dans les textes de Veronese des analogies frappantes avec les théories de Dedekind, on ne saurait assez souligner la différence essentielle entre le continu de Veronese et celui de Dedekind : le continu de Veronese n'est pas complet ; or, s'il n'est pas complet, des lacunes y sont possibles. Veronese ne garantit nulle part que les opérations définies dans son système d'axiomes soient des opérations internes partout définies : l'hypothèse VI postule que le segment ne devient pas nul, mais elle ne postule pas la valeur de la « limite ».

Il est assez étonnant que ce géomètre, défenseur du continu a priori, soit arrivé finalement à élaborer un « continu » comportant des lacunes, et cela malgré son refus d'introduire des parties d'une autre nature, tels les points sur la droite-support. Il a bien spécifié que l'on ne saurait intercaler un nouveau segment entre deux segments consécutifs. Mais dès que nous voulons effectuer les opérations usuelles de l'algèbre et de l'analyse dans le continu de Veronese, le problème de la « Lückenlosigkeit » se pose : l'existence des résultats n'est pas garantie. Que Veronese le veuille ou non, c'est l'introduction du corps des opérateurs, dans le cas de l'analyse des nombres réels, qui pose le problème le plus délicat des théories du continu mathématique. Refuser cette évidence revient à faire siens les arguments de Lipschitz dans un domaine qui dépasse la géométrie synthétique. Or, Hilbert montrera clairement que l'omission de l'axiome d'Archimède entraîne des lacunes dans un ensemble. Veronese, du reste, a bien reconnu que sa base axiomatique était plus faible que celle d'Archimède et que par là sa théorie était plus générale. La géométrie archimédienne, « relative » selon Veronese, est un cas particulier de la géométrie du continu qu'il appelle « absolue ». Pour passer de la géométrie non archimédienne à l'archimédienne, il suffit de choisir une « unité » adéquate. Il serait donc plus heureux d'appeler la géométrie de Veronese une géométrie d'Archimède généralisée que de la nommer non archimédienne. Les théories de Veronese nous laisseraient supposer que la notion de métrique, nécessaire pour les calculs d'approximations, a vraiment été à la base de l'énoncé d'Eudoxe.

Dans son ouvrage, Veronese soutient fermement, malheureusement sans donner de détails, que tous les essais qui tendent soit à démontrer l'existence de segments infiniment petits, soit à légitimer l'évidence de l'axiome d'Archimède, contiennent des cercles vicieux. Il pense même que les infiniments petits ne peuvent exister si l'axiome d'Archimède est valable. On ne pourrait envisager alors que des grandeurs « très petites ». Les Grecs auraient-ils reconnu ce fait ? Cela n'est pas impossible.

Veronese prétend aussi qu'il n'a jamais été démontré qu'il y ait des systèmes discontinus de points satisfaisant toutes les propriétés de l'espace. Même si l'on

trouvait de tels systèmes discontinus, cette découverte ne saurait démontrer quoi que ce soit contre la représentation concrète de l'espace continu.

Veronese parle du « mystère du continu », mystère qu'il ne veut pas pénétrer plus profondément. Cantor, rappelons-le, avait déjà renoncé à toute discussion métaphysique de ce concept. Mais ce mystère n'est-il pas créé par une certaine tradition qui se fonde sur une intuition assez grossière ? Quel serait le « continu » d'un homme capable de distinguer les molécules à l'œil nu ? Il est probable que Veronese s'est posé la question : le choix de son modèle, le lieu qu'occupe à un certain moment le fil à plomb, nous incitent à risquer cette affirmation. Mais ce modèle du continu rectiligne suppose toutefois que l'espace est un continu absolu et a priori. Et le mystère subsiste, son objet seul a changé.

Quoi qu'il en soit, les difficultés que suscite l'hypothèse du continu devraient nous engager à ne pas oublier ni abandonner définitivement les théories de Veronese.

### § 3. David Hilbert (1862-1943)

Hilbert est incontestablement le mathématicien qui a su le premier énoncer explicitement les deux aspects de l'axiomatisation du continu. On est tenté de croire qu'il a reconnu dès le début la nécessité d'introduire en géométrie l'axiome  $V_1$ , équivalent de l'axiome d'Archimède, et l'axiome  $V_2$  de la « Vollständigkeit ». Or, il n'en est rien.

Dans le *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* (vol. 8), 1900, Hilbert publia un travail intitulé *Über den Zahlenbegriff*, article qui devait prendre place dans les éditions successives des *Grundlagen der Geometrie* comme appendice VI.

Il y déclare expressément que les méthodes de l'arithmétique et de la géométrie ne sont pas les mêmes, malgré de nombreuses analogies. Il considère que la construction de l'arithmétique part du nombre 1, et que tout l'ensemble des nombres naturels se déduit par l'addition d'unités. Les quatre opérations fondamentales conduisent à l'introduction des nombres rationnels. L'ensemble des nombres relatifs est introduit par la condition que la soustraction soit toujours possible. L'existence des fractions (gebroschene Zahlen) permet la résolution de toute équation linéaire. La définition des nombres réels à l'aide de la coupure garantit l'existence d'un zéro relatif à toute fonction continue qui change de signe (c'est donc le théorème de Bolzano). Hilbert conclut alors que la méthode de l'arithmétique est plutôt « génétique ».

En revanche, la géométrie ne se construit pas de la même manière. Les éléments (Elemente) : points, droites, plans, existent a priori. Ces éléments sont mis en rapport par les axiomes d'incidence (Verknüpfung), d'ordre (Anordnung), de congruence (Kongruenz) et de continuité (Stetigkeit).

Malgré son souci pédagogique, Hilbert déclare indispensable de superposer à la méthode génétique et heuristique de l'arithmétique une construction

axiomatique qui seule pouvait garantir des fondements logiques à l'ensemble des nombres réels.

Il est très important pour nous de constater cette dualité dans la pensée de Hilbert : génétique en arithmétique — a prioriste en géométrie. Hilbert a donc clairement reconnu — et non pas seulement pour l'étude du continu — que deux points de vue sont possibles : celui de l'a priori, préféré par Cantor et celui de la création génétique, représenté par Dedekind. Il est, à notre avis, le premier qui ait eu une vue d'ensemble du problème et qui ne témoigna pas de parti pris pour une théorie plutôt que pour une autre. Nous ne pensons pas que cela soit dû à l'influence de ses prédécesseurs. Il est bien plus probable que ce mathématicien, qui nous a laissé une axiomatique aussi remarquable que les *Grundlagen der Geometrie* avait la rare capacité de savoir se détacher de son sujet afin de l'approcher en quelque sorte « de l'extérieur », sans parti pris, sans suivre de tradition et en refusant les solutions extrêmes telles que celles proposées par Veronese.

Voici les axiomes que pose Hilbert pour assurer la continuité de l'ensemble des nombres réels (1) (p. 240) :

IV<sub>1</sub>. (Archimedisches Axiom) Wenn  $a > 0$  und  $b > 0$  zwei beliebige Zahlen sind, so ist es stets möglich,  $a$  zu sich selbst so oft zu addieren, dass die entstehende Summe die Eigenschaft hat

$$a + a + \dots + a > b.$$

IV<sub>2</sub>. (Axiom der Vollständigkeit). Es ist nicht möglich, dem System der Zahlen ein anderes System von Dingen hinzuzufügen, so dass auch in dem durch Zusammensetzung entstehenden Systeme die Axiome I, II, III, IV<sub>1</sub> sämtlich erfüllt sind ; oder kurz : die Zahlen bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung sämtlicher Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist.

Dans le second de ces axiomes, Hilbert indique qu'il n'est pas possible d'introduire encore des « choses » (Dinge), si les autres groupes d'axiomes doivent subsister tels quels. En disant cela, il postule somme toute l'existence de « choses » qui n'entrent pas dans son continu. Nous retrouvons ici l'idée souvent rencontrée, d'un ensemble de nombres « hyper-réels » ou d'un système « hyper-complet ».

A la suite de ces deux axiomes, Hilbert fait la constatation suivante (1) (p. 241) :

Die Axiome IV<sub>1</sub> und IV<sub>2</sub> sind voneinander unabhängig ; sie enthalten keine Aussage über den Begriff der Konvergenz oder über die Existenz der Grenze, und dennoch folgt, wie man zeigen kann, aus ihnen der Bolzanosche Satz von der Existenz der Verdichtungsstelle.

Le mot « voneinander » (l'un de l'autre) réclame quelques commentaires. Plus tard, Hilbert a clairement montré qu'une géométrie non archimédienne ne peut postuler un ensemble complet : l'axiome V<sub>2</sub> n'est donc pas absolument « indépendant » de l'axiome V<sub>1</sub> (notation des axiomes de la continuité par Hilbert en géométrie). Comment comprendre ici les mots « voneinander

unabhängig » ? Une seule explication semble plausible : il faut les traduire par « doivent être introduits l'un aussi bien que l'autre ». De plus, l'énoncé de l'axiome  $IV_2$  exige explicitement celui de  $IV_1$ , qui doit donc le précéder. Par contre, l'axiome  $IV_1$ , premier énoncé, peut subsister sans être suivi de l'axiome  $IV_2$ . Nous y reviendrons à propos de l'axiomatisation de la géométrie.

En 1955, M. Bernays avait fait paraître dans la *Mathematische Zeitschrift* (vol. 63) (p. 219-229) un article intitulé *Betrachtungen über das Vollständigkeitsaxiom und verwandte Axiome*. Dans ce texte, nous trouvons une analyse remarquable des axiomes de la continuité de Hilbert, de Cantor et de Dedekind appliqués au corps des nombres réels.

Après l'axiomatisation de l'arithmétique, voyons maintenant ce que Hilbert postule en géométrie.

Il nous a semblé d'abord assez étonnant de n'avoir pu trouver une première édition d'un traité aussi célèbre que les *Grundlagen der Geometrie*. Nous devons à l'amabilité de M. P. Bernays d'en connaître la raison (lettre du 30 novembre 1963).

La première édition des *Grundlagen* a paru dans la *Festschrift zur Enthüllung des Göttinger Gauss-Weber-Denkmal*. Ce n'est que la deuxième édition qui prit la forme d'un traité. Or, la première ne comptait qu'un nombre restreint d'exemplaires diffusés surtout en Allemagne. Les destructions de bibliothèques allemandes, plus particulièrement celle de la bibliothèque universitaire de Goettingue, rendent l'ouvrage pratiquement introuvable.

M. P. Bernays nous a indiqué un commentaire de la première édition de Hilbert. Il s'agit d'une publication de Richard Baldus intitulée *Zur Axiomatik der Geometrie I über Hilberts Vollständigkeitsaxiom* (*Math. Annalen*, vol. 100, fasc. 3, 1928). Cet article fut écrit à la suite d'une conférence donnée par Baldus à la « Mathematikertagung » à Kissingen en septembre 1927.

Baldus nous donne un renseignement essentiel : Dans sa première édition de 1899, Hilbert introduisait un seul axiome pour la continuité, l'axiome V intitulé *Archimedisches Axiom*. Baldus note immédiatement que Hilbert n'obtenait pas ainsi ce que l'on qualifie de géométrie analytique (Baldus dit cartésienne).

C'est encore à M. P. Bernays, proche collaborateur de Hilbert, que nous devons une précision des plus importantes (lettre du 30 novembre 1963) :

Andererseits ist zu beachten, dass in der Hilbert'schen Abhandlung « Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte » (*Math. Annalen*, Band 46, hernach erschienen als « Anhang I » der « Grundlagen ») welche schon aus dem Jahre 1894 stammt, also älter ist als die erste Auflage der « Grundlagen », als « Axiom der Stetigkeit » das Prinzip der Existenz einer oberen Grenze (kleinste obere Schranke) für eine jede beschränkte (in einer Richtung aufsteigende) Folge von Punkten einer Geraden formuliert wird. Dieses Prinzip schliesst bereits die volle Stetigkeit in sich. Dieses, dem Dedekind'schen Axiom gleichwertige Axiom der Stetigkeit lässt sich zerlegen in das Archimedische Axiom und das Cantor'sche Stetigkeitsaxiom welches Sie in der Abhandlung von Baldus erwähnt finden.

L'axiome dont M. P. Bernays parle ici a la forme suivante :

3. *Das Axiom der Stetigkeit :*

Wenn  $A_1, A_2, A_3 \dots$  eine unendliche Reihe von Punkten einer Geraden  $a$  sind und  $B$  ein weiterer Punkt auf  $a$  ist, von der Art, dass allgemein  $A_i$  zwischen  $A_h$  und  $B$  liegt, sobald der Index  $h$  kleiner als  $i$  ist, so gibt es einen Punkt  $C$ , welcher folgende Eigenschaft besitzt : sämtliche Punkte der unendlichen Reihe  $A_2, A_3, A_4 \dots$  liegen zwischen  $A_1$  und  $C$  und jeder andere Punkt  $C'$ , für welchen dies ebenfalls zutrifft, liegt zwischen  $C$  und  $B$ .

Hilbert déduit de là l'axiome de Cantor sous la forme de la bijection entre les points de l'espace ponctuel et de l'ensemble-produit  $R_3$ ,  $R$  étant l'ensemble des nombres réels.

A nous en tenir aux phases principales de son évolution, nous devons constater que Hilbert a proposé dès le début de ses travaux une axiomatique de la continuité qui équivaut à celle de Dedekind. En 1899, il a introduit dans son axiomatique de la géométrie un seul axiome, celui d'Archimède. En 1900, nous l'avons vu, deux axiomes  $IV_1$  et  $IV_2$  sont énoncés afin de garantir la continuité de l'ensemble des nombres réels. C'est donc à ce moment-là que Hilbert a eu l'idée qu'on peut qualifier de géniale, de scinder les conditions de la continuité en deux axiomes bien déterminés s'appuyant l'un sur l'axiome d'Archimède et l'autre sur ce que Dedekind considérait comme étant le « Wesen der Stetigkeit », l'essence de la continuité.

Or, après avoir énoncé les axiomes  $IV_1$  et  $IV_2$  en arithmétique, Hilbert, dans sa seconde édition des *Grundlagen* datant de 1902, introduisit en géométrie aussi deux axiomes qu'il formula de la manière suivante (1) (p. 21) :

$V_1$  (*Axiom des Messens oder Archimedisches Axiom*).

Es sei  $A_1$  ein beliebiger Punkt auf einer Geraden zwischen den beliebig gegebenen Punkten  $A$  und  $B$ ; man konstruiere dann die Punkte  $A_2, A_3, A_4, \dots$ , so dass  $A_1$  zwischen  $A$  und  $A_2$ , ferner  $A_2$  zwischen  $A_1$  und  $A_3$ , ferner  $A_3$  zwischen  $A_2$  und  $A_4$  usw. liegt und überdies die Strecken

$AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$

einander gleich sind : dann gibt es in der Reihe der Punkte  $A_2, A_3, A_4, \dots$  stets einen solchen Punkt  $A_n$ , dass  $B$  zwischen  $A$  und  $A_n$  liegt.

$V_2$  (*Axiom der Vollständigkeit*). Die Elemente (Punkte, Geraden, Ebenen) der Geometrie bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung sämtlicher genannten Axiome keiner Erweiterung mehr fähig sind, d. h. : zu dem System der Punkte, Geraden, Ebenen ist es nicht möglich, ein anderes System von Dingen hinzuzufügen, sodass in dem durch Zusammensetzung entstehenden System sämtliche aufgeführte Axiome I - IV,  $V_1$  erfüllt sind.

Nous devons donc nous demander pourquoi Hilbert n'a pas introduit dès le début son axiome  $V_2$  bien qu'en 1894 déjà il ait donné en arithmétique une axiomatique équivalente aux axiomes  $V_1$  et  $V_2$ .

Pour comprendre Hilbert, il nous faut revenir à la controverse Dedekind-Lipschitz. A cette occasion, nous avons constaté qu'aussi longtemps que la

géométrie reste synthétique, qu'elle se passe du corps des opérateurs constitué par l'ensemble des nombres réels, il n'est nullement nécessaire d'introduire l'axiome  $V_2$ . Que la droite, le plan ou une portion d'espace soient continus ou non, cela dépend essentiellement de la définition de ces objets, définition qui précède toujours les énoncés des axiomes. L'axiome  $V_2$  est superflu. Mais, dès que l'axiomatique élaborée doit aussi servir de base à la géométrie analytique, l'axiome  $V_2$  est indispensable pour garantir l'existence du résultat de tout calcul. Malheureusement nous n'avons pu trouver aucun renseignement qui aurait pu nous éclairer sur les raisons qui ont incité Hilbert à introduire l'axiome  $V_2$  dans la seconde édition des *Grundlagen*. Nous ne pouvons donc faire qu'une supposition : c'est que Hilbert a probablement désiré étendre son axiomatique de telle manière qu'elle soit aussi bien valable en analyse qu'en géométrie.

Il faut du reste bien remarquer que dans le chapitre II, *Die Widerspruchlosigkeit und gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome*, Hilbert introduit des ensembles de nombres comme opérateurs.

Aussi, pour démontrer l'indépendance des axiomes  $V_1$  et  $V_2$  des autres groupes d'axiomes; Hilbert construit-il une « géométrie analytique » en définissant un ensemble de fonctions  $\Omega(t)$ , fonctions constituées par la composition des quatre opérations fondamentales de l'arithmétique et par l'opération  $\sqrt{1 + w^2}$ ,  $w$  étant déjà un élément de  $\Omega(t)$ . Soit  $c$  un élément de l'ensemble des fonctions  $\Omega(t)$ ;  $c$ , étant une fonction algébrique, possède un nombre fini de zéros (Hilbert applique ici le théorème de Gauss, donc la continuité de Dedekind). Pour des valeurs positives suffisamment grandes,  $t$  sera ou bien toujours positif, ou bien toujours négatif. Hilbert considère ensuite l'ensemble des fonctions  $\Omega(t)$  comme un ensemble muni d'une structure analogue à celle d'un ensemble de nombres. Il constate que cet ensemble est dénombrable et il y introduit une relation d'ordre. Hilbert remarque que les règles de calcul des inéquations y sont valables. Il montre alors qu'il est possible de trouver un nombre entier  $n$  positif tel que  $n < t$ , car  $(n - t)$ , fonction de  $t$ , sera toujours négatif pour  $t$  suffisamment grand. D'après ce qui précède, les « nombres » 1 et  $t$ , éléments de  $\Omega(t)$  sont alors deux nombres positifs tels que tous les multiples du premier sont plus petits que le second, ce qui exclut l'introduction de l'axiome d'Archimède.

Hilbert, utilisant l'ensemble  $\Omega(t)$  comme ensemble de « nombres » réussit ainsi à montrer que tous les axiomes, sauf les deux axiomes de la continuité, sont contenus dans sa géométrie non archimédienne.

Il construit également une géométrie dans laquelle il a exclu l'axiome  $V_2$ . Il définit d'abord un ensemble de nombres obtenus par le jeu des quatre opérations fondamentales de l'arithmétique et de l'opération  $\sqrt{1 + w^2}$  au nombre 1,  $w$  étant un autre nombre de l'ensemble à définir. L'ensemble de nombres ainsi défini est un sous-ensemble dénombrable de l'ensemble des nombres réels et admet une relation d'ordre. Il constate que tous les axiomes,

y compris l'axiome  $V_1$ , sont satisfaits, mais que, par contre, l'axiome  $V_2$  n'est pas valable dans cet ensemble de nombres, non « complet » par construction. Hilbert peut alors conclure qu'il est possible de construire une infinité de géométries archimédiennes dans lesquelles l'axiome  $V_2$  n'est pas valable, mais qu'il n'y en a qu'une seule, la géométrie cartésienne basée sur l'ensemble des nombres réels, dans laquelle les axiomes  $V_1$  et  $V_2$  sont adoptés en même temps.

Par contre, on n'obtient pas une axiomatique cohérente, si l'on énonce les axiomes I - IV et un axiome  $V_2'$  postulant le « complet ». (L'axiome  $V_2'$  est énoncé comme  $V_2$ , mais il ne mentionne pas  $V_1$  dans la liste des axiomes préalables.)

Hilbert (1) (p. 22-23) dit explicitement qu'une géométrie fondée sur les axiomes I - IV est nécessairement incomplète et que l'introduction d'un axiome  $V_2'$  entraîne par elle-même une contradiction. Cette dernière n'est évitée que si l'axiome  $V_1$  prépare l'énoncé de l'axiome  $V_2$ . Du reste, Hilbert voit dans son axiome de la « Vollständigkeit »  $V_2$  la « clef de voûte » (Schlusstein) du système, « clef de voûte » portée par l'axiome  $V_1$ .

Rappelons qu'avant Hilbert, Dedekind avait signalé à Lipschitz la possibilité de construire une géométrie euclidienne non complète. On peut ainsi conclure que la géométrie proposée par Euclide est une des géométries archimédiennes possibles, qu'elle reste axiomatiquement rigoureuse aussi longtemps que nous n'y introduisons aucun élément, aucune opération nouvelle, tels que la géométrie analytique en exige par exemple. L'édifice grec est donc sans faille, les Grecs n'ayant jamais procédé à une bijection entre l'ensemble des points d'une ponctuelle et celui des nombres réels.

Nous avons déjà vu dans les textes de Hausdorff des énoncés où la continuité était décrite par l'exclusion de propriétés. Or, l'axiome  $V_2$  est également énoncé sous une forme négative. De plus, Baldus avait fait la remarque que l'axiome  $V_2$  mentionne non seulement les concepts introduits, mais encore tous ceux qu'on aurait pu introduire. S'il limite en quelque sorte les éléments sur lesquels agit l'axiomatique établie, il souligne la possibilité de l'existence d'autres éléments étrangers à cette axiomatique. Le « Schlusstein » ferme le système.

#### § 4. Conclusion

Il importe de prendre conscience de l'immense contribution que la géométrie a apportée à la solution du problème du continu.

L'article de Stolz avait rappelé l'importance de l'axiome d'Archimède, et Veronese, en le récusant, en a encore souligné la portée.

Si l'apport de Veronese est assez déconcertant et peut paraître pour le moment peu efficace, celui de Hilbert ne saurait être surestimé. C'est grâce à ses publications que l'axiomatique du continu a trouvé une forme aussi claire. Une controverse comme celle de Dedekind et de Lipschitz aurait été singulièrement plus

constructive si les deux antagonistes avaient eu à disposition les *Grundlagen*. Parce qu'il a introduit des ensembles de nombres en géométrie, Hilbert a définitivement abandonné le point de vue synthétique au profit de la géométrie analytique. Sa décision est certainement due à l'efficacité incontestable que confère à cette géométrie analytique l'existence postulée d'une bijection entre un ensemble de points et un ensemble de nombres qui pourra même n'être pas toujours celui des nombres réels.

Le traité de Hilbert garde toute son actualité en ce qui concerne notre sujet. Des ouvrages plus récents, tels que *Les Fondements de la géométrie* publiés en 1937 par Béla Kerékjártó en hongrois et traduit en français par Frédéric Riesz, n'ont apporté aucun changement notable à l'axiomatique de Hilbert. Non seulement Kerékjártó maintient les groupes d'axiomes de Hilbert, mais il cite les axiomes dans le même ordre. L'auteur, cependant, a su introduire le langage de la topologie et de la théorie des ensembles.

Ce n'est donc pas seulement l'axiome  $V_2$ , mais le traité tout entier de Hilbert qui semble être, pour le moment, la clef de voûte de l'axiomatique du continu.

# CONCLUSION

## § 1. L'influence des Eléates

Pour mieux saisir l'influence éléate sur notre conception du continu mathématique, supposons un instant que la « controverse du V<sup>e</sup> siècle » n'ait pas eu lieu et que la conception pythagoricienne ait été adoptée par les mathématiciens grecs. Admettons encore que l'école pythagoricienne ait réussi à assimiler d'une manière satisfaisante la découverte des nombres irrationnels. Par voie de conséquence, il n'est pas invraisemblable que les premiers analystes auraient été enclins à attribuer au discontinu un rôle prédominant, au détriment du continu. A première vue, il est plausible de considérer la préférence donnée au continu a priori comme une conséquence directe de la victoire des Eléates sur les Pythagoriciens. Peu de mathématiciens, en effet, ont échappé à cette tendance ; Fréchet même, sans raison mathématique, a cru indispensable de parler du continu.

Essayons de comprendre la victoire quasi totale de l'école éléate. Est-elle uniquement due à la découverte de l'irrationnel, à l'argumentation élégante d'un Zénon d'Elée ?

Nous ne le pensons pas. La victoire éléate est une victoire du « bon sens » du géomètre sur la pensée plus abstraite de l'arithméticien. En effet, quand un géomètre postule l'existence de la droite, il a un modèle sous les yeux : la règle. Rappelons avec quel naturel Veronese, un maître de la géométrie, a choisi comme modèles des règles et des fils à plomb. En remontant aux origines, il ne faut pas oublier que les premiers « êtres géométriques » n'étaient nullement des notions abstraites, mais des outils de bâtisseur. L'arithmétique ne disposait pas de modèles aussi concrets que la géométrie. En effet, il faut déjà un certain effort d'abstraction pour concevoir un « ensemble » de nombres ou de points. On peut alors se demander ce qui serait advenu si les Pythagoriciens avaient disposé d'un microscope assez puissant pour faire « voir » un « ensemble composé par parties » ?

Poussons plus loin ces réflexions. Une victoire pythagoricienne aurait-elle donné naissance à une théorie des ensembles antérieure à l'analyse classique ? Ce n'est même pas impensable.

Victoire du « bon sens du géomètre » ou influence directe des Eléates, il faut bien constater que le continu a priori a facilement été admis sans définition aucune pendant des siècles. Cavalieri lui-même se sert de l'expression « un continu » pour désigner un volume. La théorie de l'éther, en plein XIX<sup>e</sup> siècle, confirme également cette prédominance intuitive du continu.

## § 2. L'ensemble « continu » et l'application continue

Cette prédominance reconnue, il est indéniable que le continu a joué un rôle considérable en mathématiques. Le mathématicien avait une tendance naturelle à admettre la continuité sans contrôle et sans définition. Il a fallu attendre les travaux du XIX<sup>e</sup> siècle pour que les mathématiciens renoncent à conclure de la continuité d'une application à celle de l'ensemble sur lequel elle opère. Aussi ne saurait-on trop souligner l'importance du fait que Georg Cantor a démontré l'existence d'applications continues sur des ensembles discontinus, et cela en cherchant à prouver précisément la thèse contraire.

Il semble bien plus facile de définir la continuité d'une application que celle d'un ensemble. Cela est dû, sans doute, à deux raisons :

1) Une application est une notion mathématique abstraite. Elle n'« existe » pas en dehors de sa création mathématique, pour reprendre les termes de Georg Cantor. Puisqu'elle est créée abstraitement, ses qualités le sont également. Nous pouvons donc la qualifier de continue ou de discontinue à notre gré, suivant le seul critère de l'efficacité mathématique. Il semble, de prime abord, qu'aucune notion intuitive ne nous impose une hypothèse plutôt qu'une autre. Notons à ce propos qu'Euler qualifie de continue toute courbe représentée par une seule expression algébrique dans l'intervalle considéré (M. Cantor (1), vol. IV, p. 79).

2) La notion de « fonction continue » n'est pas sans analogie avec notre notion intuitive de « transformation continue », de « devenir », d'« écoulement » du temps et de la vie. Il semble donc bien que ce « continu temporel » intuitif ait facilité considérablement l'acquisition de la notion de fonction continue. Nous avons vu que les Grecs admettaient comme continue toute ligne « tracée d'un trait » ; c'est l'action continue, « tracer d'un trait », qui créait le continu lui-même. Malgré leur subtilité, ils n'ont pas mis en question la continuité de l'action. Dans la perspective grecque, c'est l'action continue qui a créé le continu. La confusion entre la continuité de l'application et celle de l'ensemble sur lequel elle opère date donc bel et bien des mathématiciens grecs.

Que l'on nous permette de reprendre nos hypothèses du début : la continuité d'une application aurait-elle été plus difficile à concevoir intuitivement (mais non à définir abstraitement) dans un monde essentiellement pythagoricien ? Ce n'est pas impossible.

Finalement, nous devons bien constater que la confusion entre la continuité d'une application et celle de l'ensemble sur lequel elle opère n'a pas créé de difficultés aux analystes avant le XIX<sup>e</sup> siècle et qu'une certaine insouciance s'est révélée très fructueuse aux débuts de l'analyse.

### § 3. Une classification de quelques auteurs

Finalement, le continu pose un problème psychologique et métaphysique qui sort de nos préoccupations. Toutefois, il est intéressant de tenter une classification des auteurs dont nous avons commenté les œuvres, selon deux critères :

- 1) Les auteurs attachés à la notion de continu a priori.
- 2) Les mathématiciens adeptes d'un continu composé par parties.

Zénon d'Elée, Newton et Veronese appartiennent certainement au premier groupe. Par ses commentaires, Georg Cantor s'y rattache également ; nous savons quelles difficultés cet auteur a rencontrées pour enfin admettre un continu composé par parties, trahissant ainsi un idéal préconçu, mais mathématiquement efficace.

Dans le second groupe, nous pouvons placer Pythagore, Aristote, Archimède, Leibniz, Bolzano, Weierstrass, Dedekind. Ces auteurs ont davantage une vue « arithmétique » du monde mathématique.

Cavalieri et Hilbert occupent une place à part. Le premier a démontré la validité de sa théorie sur les indivisibles dans un monde continu a priori ou non. On serait assez tenté d'extrapoler sa pensée. Cavalieri aurait alors été le premier à effectuer une application continue (à l'aide de sa « regula ») sur un ensemble plutôt discontinu, c'est-à-dire sur un « continu » ayant des « parties autres » entre les « parties constituantes ».

A notre avis, c'est Hilbert qui a le mieux su montrer que le continu a priori et le continu composé par parties sont également plausibles. C'est lui qui a jeté le pont entre le continu du géomètre et celui du mathématicien préoccupé des fondements de l'arithmétique. Dans sa première édition des *Grundlagen*, l'absence de l'axiome  $V_2$ , dit de la « Vollständigkeit », montre nettement que son monde géométrique est complet a priori, continu a priori. Par contre, dans son axiomatique de l'arithmétique, Hilbert a introduit dès le début l'axiome  $IV_2$  (notation arithmétique), suivant ainsi les traces de Dedekind. En introduisant plus tard l'axiome  $V_2$  également dans son axiomatique de la géométrie, il a fait une concession à l'arithmétique, ce qui permet finalement de considérer ses *Grundlagen der Geometrie* comme valables aussi bien pour la géométrie analytique que pour la géométrie synthétique.

Hilbert, comme Cavalieri, a donc su échapper à cette emprise intuitive d'un continu a priori dont l'acceptation ou le refus partageaient les mathématiciens en deux écoles.

#### § 4. Le passage d'un continu composé au continu a priori

Cette classification suggère finalement une question : N'est-il donc pas possible de trouver un passage d'un continu composé à un continu a priori ou, autrement dit, peut-on par exemple transformer la définition d'un « ensemble compact » en définition d'un continu a priori ?

Il est évident qu'Aristote a assez bien réussi ce passage en expliquant qu'il fallait « coller », « greffer » les parties afin que les « fissures » s'effacent, que les parties deviennent « un ». Mais le texte d'Aristote est avant tout la description d'un idéal. La transcrire en termes mathématiques efficaces semble impossible. Nous avons vu que Cantor a abouti à un compromis entre sa conception idéale et les exigences de la rigueur mathématique.

Weyl (1) surtout a repris la question et a étudié tant la notion de continu temporel que celle de continu spatial. Il a finalement dû constater que ces deux notions intuitives ne sauraient être décrites si l'on ne disposait pas au préalable d'un critère mathématique. Malheureusement, l'établissement de ce dernier nécessite l'intuition des notions à décrire. Il subsiste donc une espèce de cercle vicieux qui s'oppose à toute solution simple.

Il faut bien admettre que la solution de Bolzano est celle de la sagesse : il faut reconnaître au « tout » des qualités qui ne conviennent pas à la « partie » et éliminer ainsi ce faux problème (Scheinproblem).

Poursuivons la voie indiquée par Bolzano : pourquoi vouloir atteindre cet idéal du continu a priori, puisque nous le savons inefficace en mathématiques ? Il semble bien que les mathématiciens y renoncent et qu'ils se détournent de plus en plus du problème que pose l'« ensemble continu ».

#### § 5. Une solution

Finalement, la confusion séculaire entre la continuité d'une application et celle d'un ensemble a montré aux mathématiciens une voie possible :

C'est l'application continue qui aide à décrire le continu, que ce dernier soit considéré comme donné a priori ou composé par parties, suivant les préférences subjectives des mathématiciens. Il y a probablement une antériorité de nature psychologique de la notion d'application continue par rapport à celle d'ensemble continu. En effet, l'axiome de Cantor qui assure la possibilité d'établir la bijection entre l'ensemble des points d'une ponctuelle et celui des nombres réels réconcilie les deux tendances. Que le mathématicien soit plutôt « géomètre » et que la droite supportant la ponctuelle soit pour lui continue a priori ou qu'il néglige la droite-support pour ne considérer que la ponctuelle, il pourra utiliser le même axiome pour exprimer algébriquement son continu géométrique.

Une réserve s'impose toutefois : l'acceptation de l'axiome de Cantor n'engage nullement le partisan du continu a priori à qualifier de continus la ponctuelle

ou l'ensemble des nombres réels. S'il désire appeler « discontinu de Dedekind » l'ensemble des nombres réels et considérer également comme discontinu l'ensemble des points d'une ponctuelle, son analyse ne change pas pour autant. Finalement, il n'y a ici qu'une question de terminologie et l'idée de ce changement nous semble bien inutile, absurde même. Mais Veronese n'a-t-il pas procédé de la sorte en introduisant des points de repère à l'aide de sa « scala » sur sa droite « continue a priori » ?

Le problème du continu mathématique se réduirait-il alors à des questions de terminologie auxquelles les auteurs auraient voué bien trop de temps et d'efforts ?

Cependant l'importance de la terminologie ne saurait être sous-estimée. Il fallait bel et bien trouver un critère pour distinguer le continu du discontinu.

Faut-il donc reprendre à notre compte le jugement de Georg Cantor et dire que la théorie des ensembles, comme déjà la scolastique, a simplement refusé d'envisager le problème du continu (« ist dem Problem vornehm aus dem Weg gegangen ») ?

Non, car le progrès accompli depuis le début du XIX<sup>e</sup> siècle est considérable. Les fondements élaborés semblent solides, même s'ils devaient dans l'avenir subir encore quelques modifications.

Dans l'étude du continu mathématique, les faits suivants peuvent être considérés comme les plus importants :

Le premier est sans doute l'introduction de l'axiome 4/V d'Euclide/Eudoxe, dit axiome d'Archimède. Cet axiome devait rendre insoutenable les paradoxes de Zénon. Par contre, nous pensons que la géométrie grecque, essentiellement synthétique, ne nécessitait pas l'introduction d'un autre axiome de continuité ; nous avons examiné ce point à propos de la controverse Dedekind-Lipschitz. Si Hilbert a montré qu'une géométrie non archimédienne est une géométrie du continu, du « non complet », il ne semble pas que les Grecs, dans la perspective qui était la leur, aient envisagé cet aspect de la question ; ils n'avaient pas de raisons de le faire.

Il faut attendre ensuite le XIX<sup>e</sup> siècle pour assister à des événements aussi importants.

C'est Georg Cantor qui, le premier, bouleversa les traditions en démontrant qu'une application continue peut opérer sur un ensemble discontinu ; ainsi il sépara définitivement le « continu temporel », le « flux », le « devenir », l'action de « tracer la courbe », du support représenté tantôt par le « continu spatial », tantôt par le dessin de la courbe tracée.

C'est encore Georg Cantor qui, par son axiome, conféra à l'ensemble des nombres réels la même « continuité » qu'à l'ensemble des points d'une ponctuelle. Toutefois, son résultat doit être complété par l'apport de Dedekind.

Le mérite de celui-ci est d'avoir défini l'ensemble des nombres réels à l'aide de son procédé de la coupure, créant ainsi le continu qui porte son nom. A ce moment-là, seule la bijection proposée par l'axiome de Cantor se trouvait

explicitée. Dès lors, le « continu de Dedekind » prend une signification bien précise pour le mathématicien ; le critère ainsi donné est sans ambiguïté.

Si l'apport de Fréchet est moins spectaculaire, il n'est toutefois pas sans importance. Fréchet a eu le courage d'abandonner délibérément une notion lourde de traditions, celle d'« ensemble continu », pour lui en substituer une nouvelle ne prêtant à aucune équivoque : la notion d'ensemble compact.

Nous avons vu que Hilbert enfin a su réconcilier la géométrie des Anciens et l'arithmétique des nombres réels conçue par Dedekind. Les *Grundlagen der Geometrie* servent de fondement aussi bien à la géométrie synthétique d'Euclide si âprement défendue par Lipschitz qu'à la géométrie analytique sur laquelle repose notre analyse. Hilbert a obtenu cette synthèse des fondements par la seule introduction de l'axiome  $V_2$ , dit de la « Vollständigkeit ». Il a su mettre à leur place l'apport des Anciens : l'axiome d'Archimède et l'apport plus récent : l'axiome de Dedekind. Notons que l'axiome  $V_2$  de Hilbert introduit l'arithmétique en géométrie, tandis que l'axiome de Cantor introduit une conception « ensembliste » en analyse. Dans les deux cas, il s'est agi de permettre l'utilisation de l'ensemble des nombres réels comme corps d'opérateurs, outil d'une efficacité incontestable.

## § 6. L'unicité éventuelle de la solution

Il faut enfin convenir que seule la théorie des ensembles a permis de considérer le problème de la continuité mathématique dans toute sa généralité.

Or la notion même d'ensemble implique une certaine idée de « composition ». Ainsi, le continu a priori est à proprement parler inexprimable dans une conception « ensembliste ». C'est pourquoi il est abandonné pour l'instant.

De même, la théorie des ensembles a mis en lumière les confusions qui s'étaient perpétuées au sujet des parties constituantes. Dorénavant, il faudra distinguer entre une « droite », ensemble de segments, et une ponctuelle, ensemble de points, à moins de vouloir, lorsque les circonstances le permettent, ne considérer que la droite-support et la traiter alors comme un continu a priori.

Mais notre solution actuelle : distinction entre droite-support et ponctuelle, notion d'ensemble compact, définition du continu de Dedekind, légitimation de la bijection entre ce continu et les points d'un axe, est-elle la seule possible ?

La question est évidemment délicate. D'une part, la solution actuelle est d'une efficacité incontestable. Mais, d'autre part, il semble difficile de refuser d'emblée cette autre possibilité entrevue par de nombreux auteurs et nommée « hyper-analyse » par Weyl.

A-t-on le droit de considérer la géométrie de Veronese, généralisation de la géométrie archimédienne, comme une simple et stérile bizarrerie ? Il se pourrait fort bien qu'une « hyper-analyse » conduisît à une géométrie comme celle de Veronese.

Il est difficile de répondre, car rien ne nous permet d'affirmer que l'hypothèse du continu ne puisse un jour se démontrer. Au moment où nous écrivons ces lignes, des résultats récents sont jugés prometteurs par les uns, accueillis avec scepticisme par d'autres, dans la bonne tradition des controverses que suscitent les travaux sur la continuité mathématique.

Si l'hypothèse du continu devait devenir un théorème, l'« hyper-analyse » serait condamnée. Et cela signifierait que la continuité mathématique aurait déjà trouvé l'expression la plus parfaite que l'on puisse désirer. Toutefois est-ce vraiment souhaitable ? Dans le doute, demandons à Jean Rostand (*Carnets d'un biologiste*) de conclure pour nous : « Certitude, servitude ».

## BIBLIOGRAPHIE

### ARCHIMÈDE.

- (1) Livre I, *De la Sphère et du Cylindre*, trad. Ver Eecke (Desclée-de Brouwer), Paris-Bruxelles, 1921.

### ARISTOTE.

- (1) *Physique*, trad. Henri Carteron, Paris, 1931.
- (2) *Métaphysique*, trad. J. Tricot, Paris, 1933.

### Richard BALDUS.

- (1) *Zur Axiomatik der Geometrie I über Hilberts Vollständigkeitsaxiom*, Math. Annalen, vol. 100, fasc. 3, p. 321-333, 1928.

### Paul BERNAYS.

- (1) *Betrachtungen über das Vollständigkeitsaxiom und verwandte Axiome*, Math. Zeitschrift, vol. 63 (p. 219-229), 1955.
- (2) Lettre du 30 novembre 1963.

### Bernhard BOLZANO.

- (1) *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes*, Prag, 1817. Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 153, Leipzig, 1905, annotations de P. E. B. Jourdain.
- (2) *Paradoxien des Unendlichen*, édité par Dr F. Prihonsky, C. H. Reclam sen., Leipzig, 1851.

### Nicolas BOURBAKI.

- (1) *Éléments de Mathématique*, Fascicule II, Première partie, Livre III, Topologie générale, Chapitre 1. Structures topologiques, chapitre 2. Structures uniformes, troisième édition entièrement refondue. Collection Actualités scientifiques et industrielles N° 1142, Hermann, Paris, 1961.
- (2) *Éléments d'histoire des mathématiques*, coll. Histoire de la pensée IV, Hermann, Paris, 1960.

### Georg CANTOR.

- (1) *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, édité par Ernst Zermelo, avec une biographie de Adolf Fraenkel. Freiburg i. Br., 1932, réimpression Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, 1962.

### Moritz CANTOR.

- (1) *Geschichte der Mathematik*, vol. I, II, III et IV. B. G. Teubner, Leipzig, 1880-1908.

### A. L. CAUCHY.

- (1) *Œuvres complètes*, 26 vol. Gauthier-Villars, Paris, 1882-1958.

J. CAVAILLÈS.

- (1) *Philosophie mathématique*, collection: Histoire de la pensée VI, Hermann, Paris, 1962.

B. CAVALIERI.

- (1) *Geometria indivisibilibus continuorum quadem ratione promota*, 2<sup>e</sup> éd. Bologne, 1653-1654.

R. DEDEKIND.

- (1) *Gesammelte Werke III*, édité par R. Fricke, E. Noether et O. Ore, Vieweg & Sohn AG, Braunschweig, 1932.

EUCLIDE.

- (1) *Euclidis Elementa*, éd. I. L. Heiberg, 8 vol., Teubner, Leipzig, 1883-1916.

A. FRAENKEL.

- (1) *Mengenlehre und Logik*, coll. Erfahrung und Denken, vol. 2, Duncker & Humboldt, Berlin, 1959.
- (2) *Einleitung in die Mengenlehre*, 2<sup>e</sup> éd. coll. Die Grundlehren der math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, vol. IX. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1923.

M. FRÉCHET.

- (1) *Pages choisies d'analyse générale*, Gauthier-Villars, Paris, E. Nauwelaerts Louvain, Collection de Logique math., Série A. Monographies réunies par M<sup>me</sup> Destouches-Février, Paris, 1953.
- (2) *Les Espaces abstraits*, Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>, Paris, 1928.

F. GONSETH.

- (1) *La géométrie et le problème de l'Espace*. Editions du Griffon. Neuchâtel, 1945-1955.

F. HAUSDORFF.

- (1) *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit u. Co. Leipzig, 1<sup>re</sup> éd. 1914, copie de la Chelsea Publishing Company, New York, 1949.

Th. HEATH.

- (1) *A Manuel of Greek Mathematics*, 2 vol., Oxford, 1921.
- (2) *The thirteen Books of Euclid's Elements*, 3 vol. 1<sup>re</sup> éd. Cambridge, 1908. 2<sup>e</sup> éd. New York, 1956.

E. HEINE.

- (1) *Die Elemente der Funktionentheorie*. Journal für reine und angew. Math., Fortsetzung Crelle's Journal, vol. 74, Berlin, 1872.

David HILBERT.

- (1) *Grundlagen der Geometrie*, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 2<sup>e</sup> édition 1903, 4<sup>e</sup> édition 1913.
- (2) *Sur les problèmes futurs des mathématiques*, discours prononcé au « Deuxième Congrès international des Mathématiciens », Paris, du 6 au 12 août 1900, traduit par M. L. Laugel dans le compte rendu procès-verbaux et communications, publiés par E. Duporcq, Gauthier-Villars, Paris, 1902.

Béla KERÉKJÁRTÓ.

- (1) *Les Fondements de la Géométrie*, tome I, traduction de Frédéric Riesz (original paru en 1937) Akadémia Kiado, Budapest, 1955.

R. LIPSCHITZ.

- (1) *Lehrbuch der Analysis*, 2 vol., tome I, Grundlagen der Analysis, Max Cohen & Sohn, Bonn, 1877.

P. H. MICHEL.

- (1) *De Pythagore à Euclide*. Soc. d'édition « Les Belles-Lettres », Paris, 1950.

G. MILHAUD.

- (1) *Philosophes-Géomètres de la Grèce*, Alcan, Paris, 1900.

F. MÜLLER.

- (1) *Das Problem der Continuität in Mathematik und Mechanik*, historische und Systematische Beiträge, Elwert, Marburg, 1886.

Jean PIAGET et Bärbel INHELDER.

- (1) *La représentation de l'espace chez l'enfant*, Bibl. de philosophie contemporaine, fondée par Félix Alcan. Psychologie et sociologie, dirigé par M. Pradines, Presses universitaires de France, Paris, 1948.

PLATON.

- (1) *Œuvres complètes*, trad. Léon Robin, NRF. Bibliothèque de la Pléiade, Paris, 1959.

L. PONTRJAGIN.

- (1) *Topological Groups*, translated from the Russian by Emma Lehmer, 1946. Princeton University Press, Princeton London : Humphrey Milford, Oxford University Press.

Abel REY.

- (1) *La Jeunesse de la Science grecque*, Paris, 1933.
- (2) *La Maturité de la Pensée scientifique en Grèce*, Paris, 1939.
- (3) *L'Apogée de la Science technique grecque*, Paris, 1946. Coll. l'Évolution de l'Humanité, Albin Michel, Paris.

A. SCHOENFLIES (Gemeinsam mit Hans HAHN).

- (1) *Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen*, Umarbeitung des im VIII. Bande des Jahresberichtes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erstatteten Berichts, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1913.

A. SCHOENFLIES.

- (2) *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, Bericht erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung B. G. Teubner, Leipzig, 1908.

Paul TANNERY.

- (1) *Pour l'histoire de la Science Hellène*, Alcan, Paris, 1887.

Giuseppe VERONESE.

- (1) *Grundzüge der Geometrie*, traduction de l'original « *Fondamenti di Geometria* », modifié par Veronese à l'occasion de la traduction faite par A. Schepp, B. G. Teubner, Leipzig, 1894.

K. WEIERSTRASS.

- (1) *Mathematische Werke*, 7 vol., Mayer und Müller, Berlin, 1894-1927.

Hermann WEYL.

- (1) *Das Kontinuum*, 1<sup>re</sup> édition 1917, copie de la Chelsea Publishing Company New York, Das Kontinuum und andere Monographien.

H. G. ZEUTHEN.

- (1) *Histoire des Mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen Age*, Gauthier-Villars, Paris, 1902.



LA BIBLIOTHÈQUE CENTRALE  
DE L'UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

*a l'honneur d'accuser réception du don que vous avez  
bien voulu lui faire et vous exprime ses remerciements  
les meilleurs.*

*La Direction*