

1435
UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
FACULTÉ DE DROIT ET DES SCIENCES ÉCONOMIQUES

Intervalle de confiance adaptatif pour la moyenne d'une population symétrique ou asymétrique

THÈSE

PRÉSENTÉE À LA FACULTÉ DE DROIT ET DES SCIENCES
ÉCONOMIQUES POUR L'OBTENTION DU GRADE DE
DOCTEUR ÈS SCIENCES ÉCONOMIQUES

par

Valentin Rousson

1999
Presses Académiques Neuchâtel

Le Conseil des professeurs de la Faculté de droit et des sciences économiques et sociales de l'Université de Neuchâtel, sur proposition du jury de thèse, sans se prononcer sur les opinions du candidat, autorise Monsieur Valentin ROUSSON à imprimer sa thèse de doctorat ès sciences économiques, soutenue en date du 30 septembre 1998 intitulée:

“Intervalle de confiance adaptatif pour la moyenne d'une population symétrique ou asymétrique”

Neuchâtel, le 15 octobre 1998

Le Doyen
de la Faculté de droit
et des sciences économiques

François Hainard

La mention très bien avec les félicitations du jury lui a été accordée.

Composition du jury de thèse:

Professeur Yadolah Dodge, directeur de thèse, Université de Neuchâtel

Professeur Jacques Savoy, Université de Neuchâtel

Professeur Anthony C. Davison, EPFL, Lausanne

Professeur Joe Whittaker, Université de Lancaster

Tous droits réservés. L'oeuvre et ses parties sont protégées par la loi.
Toute utilisation en dehors des limites de la loi demande l'accord préalable
de l'éditeur.

ISBN 2-88333-015-8

1999 by Presses Académiques Neuchâtel
Imprimé aux Pays-Bas

A ma famille qui m'a encouragé sur la voie des études.

Au Professeur Yadolah Dodge, mon directeur de thèse, pour la confiance et le soutien qu'il m'a accordé tout au long de ce travail.

Aux Professeurs Anthony Davison, Jacques Savoy et Joe Whittaker pour avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse.

A mes amis du Groupe de Statistique.

A mes amis de longue date.

Aux Frères Roger et Bernard, gardiens du Séminaire d'Ostwald.

Résumé

Le problème de la construction d'un intervalle de confiance exact pour la moyenne d'une population n'est résolu que dans le cas où la population est normalement distribuée. Dans les autres cas, on doit se contenter d'approximations. Si on utilise les intervalles de confiance traditionnels, basés sur les quantiles d'une loi de Student ou sur ceux d'une loi normale, on obtient une meilleure approximation lorsque la distribution de la population est symétrique que lorsqu'elle est asymétrique: dans le premier cas, on a un intervalle de confiance correct au second ordre, alors que dans le second cas, on a un intervalle de confiance correct au premier ordre.

Dans ce travail, on propose une nouvelle solution pour définir un intervalle de confiance pour la moyenne d'une population, correct au second ordre dans les cas symétriques comme dans les cas asymétriques. Notre intervalle est dit adaptatif dans le sens où sa définition dépend de l'asymétrie de la population. Par rapport aux autres solutions proposées dans la littérature pour résoudre le même problème, notre méthode a l'avantage de la simplicité. De plus, notre intervalle peut être utilisé à la fois en statistique inférentielle, pour un problème de test d'hypothèses, qu'en statistique descriptive, pour représenter un ensemble de données. Notre idée a été de traduire l'asymétrie de la population par une asymétrie de l'intervalle de confiance autour de la moyenne de l'échantillon. Cette moyenne ne se trouve au centre de notre intervalle que dans le cas où la distribution de la population est symétrique.

Abstract

The exact solution for the construction of a confidence interval for the mean of a population is known only if the population is normally distributed. In other cases, we only have approximations of the solution. If we use the traditional confidence intervals constructed with the quantiles of a Student or of the standard normal distribution, we have a better approximation if the distribution of the population is symmetric than if it is asymmetric: in the first case, we obtain a second order correct confidence interval, whereas in the second case, we obtain a first order correct confidence interval.

In the present research, we propose a new solution for the construction of a confidence interval for the mean of a population, which is second order correct in symmetric as well as in asymmetric cases. Our confidence interval is said to be adaptive as it depends on the skewness of the population. Comparing to other solutions proposed in the statistical literature for the same problem, our method is found to be very simple. Moreover, our interval can be used for an inferential purpose, in a hypothesis testing problem, as well as for a descriptive purpose, to summarize a data set. Our idea was to convert the skewness of the population into an unbalanced confidence interval around the mean of the sample. The center of our interval is the mean of the sample only if the distribution of the population is symmetric.

Table des matières

Résumé	vii
Abstract	ix
Notations	xv
1 Introduction	1
1.1 Probabilités et statistique	1
1.2 Tests d'hypothèse et intervalles de confiance	2
1.3 Intervalles de confiance pour une moyenne	6
1.4 Distribution de T	8
1.5 Intervalles de confiance corrects au second ordre	12
1.6 But et organisation de la thèse	13
2 Intervalles de confiance équilibrés	15
2.1 Introduction	15
2.2 Distribution normale de la population	17
2.3 Distribution non normale de la population	18
2.3.1 Distribution symétrique de la population	20
2.3.2 Distribution asymétrique de la population	20
2.4 Transformation de la variable T	21
2.5 Autres types d'intervalles de confiance	27
2.5.1 Méthodes bootstrap	27

2.5.2	Méthode de la vraisemblance empirique	30
2.5.3	Méthode des statistiques de comparaison	32
2.6	Conclusion	33
3	Propriétés d'un intervalle de confiance	35
3.1	Introduction	35
3.2	Propriétés désirées	35
3.3	Propriétés C1-C6 pour les intervalles IC_h	38
3.3.1	Propriétés C1-C3	39
3.3.2	Propriété C4	41
3.3.3	Propriétés C5-C6	43
3.4	Conclusion	45
4	Intervalle de confiance adaptatif	47
4.1	Introduction	47
4.2	Définition de l'intervalle IC_g	50
4.3	Equilibrage de l'intervalle IC_g	54
4.4	Propriétés C1-C6 pour l'intervalle IC_g	60
4.4.1	Propriétés C1-C3	60
4.4.2	Propriété C4	62
4.4.3	Propriétés C5-C6	63
4.5	Mesures d'asymétrie et paramètre g	63
4.5.1	Axiome A1	64
4.5.2	Axiome A2	64
4.5.3	Axiome A3	65
4.6	Mesures descriptive et intervalle IC_g	67
4.7	Conclusion	69
5	Tests d'hypothèses et population asymétrique	71
5.1	Introduction	71
5.2	Tests d'hypothèse avec les intervalles IC_h	74

5.2.1	Transformation h_1	75
5.2.2	Transformation h_2	77
5.2.3	Transformation h_3	80
5.2.4	Transformation h_4	81
5.2.5	Transformation h_5	83
5.3	Tests d'hypothèse avec l'intervalle IC_g	84
5.4	Tests d'hypothèse unilatéraux	89
5.4.1	Intervalles IC_h	89
5.4.2	Intervalle IC_g	90
5.5	Conclusion	91
6	Comparaison	93
6.1	Lois gammas	93
6.2	Autres lois	98
6.3	Comparaison avec le bootstrap	105
6.4	Conclusion	109
7	Exemples d'application	111
7.1	Cas d'une asymétrie positive	111
7.2	Cas d'une asymétrie négative	115
7.3	Tests d'hypothèse	117
	Conclusion	125
	Annexe 1: Résultats de la première simulation	129
	Annexe 2: Résultats de la deuxième simulation	143
	Annexe 3: Résultats de la troisième simulation	159
	Bibliographie	167

Notations

μ : moyenne de la population
 σ : écart-type de la population
 μ_3 : 3ème moment centré de la population
 γ : coefficient d'asymétrie de la population ($= \mu_3/\sigma^3$)

n : taille de l'échantillon
 X_i : observations formant l'échantillon ($i = 1, \dots, n$)
 \bar{X} : moyenne de l'échantillon
 S : écart-type de l'échantillon
 T : statistique de Student ($= \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S$)
 F_T : distribution de T
 M_3 : 3ème moment centré de l'échantillon
 $\hat{\gamma}$: estimateur de γ

x_i : valeurs de X_i ($i = 1, \dots, n$)
 \bar{x} : valeur de \bar{X}
 s : valeur de S
 t : valeur de T
 m_3 : valeur de M_3

- $1 - \alpha$: niveau d'un intervalle de confiance
 α : seuil de signification d'un test d'hypothèse
 p : valeur p
 z_α : $(1 - \alpha)$ -quantile d'une loi normale standard
 $t_{\alpha, v}$: $(1 - \alpha)$ -quantile d'une loi de Student avec v d.l.
 Φ : fonction de répartition de la loi normale standard
 ϕ : fonction de densité de la loi normale standard
 Φ_v : fonction de répartition de la loi de Student avec v d.l.
- h : transformation de la variable T
 g : paramètre définissant l'intervalle introduit dans cette thèse
 g^* : mesure d'asymétrie de l'échantillon ($= g - 1/2$)
 λ : valeur possible pour g
 IC_z : intervalle de confiance calculé avec les quantiles $z_{\alpha/2}$
 IC_t : intervalle de confiance calculé avec les quantiles $t_{\alpha/2, n-1}$
 IC_h : intervalle de confiance défini par la transformation h
 IC_g : intervalle de confiance adaptatif défini par le paramètre g
 IC_λ : intervalle de confiance défini par le paramètre λ

- $O(n^{-r})$ désigne une quantité $x(n)$ dépendant de n , telle que $x(n)/n^{-r}$ est borné lorsque $n \rightarrow \infty$, c'est-à-dire telle que

$$\exists k < \infty \text{ et } n_0 : \forall n > n_0 \quad \frac{|x(n)|}{n^{-r}} < k.$$

- $O_p(n^{-r})$ désigne une quantité aléatoire $X(n)$ dépendant de n , telle que $X(n)/n^{-r}$ est borné en probabilité, c'est-à-dire telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k(\varepsilon) < \infty \text{ et } n_0(\varepsilon) : \forall n > n_0(\varepsilon) \quad \Pr \left\{ \frac{|X(n)|}{n^{-r}} < k(\varepsilon) \right\} > 1 - \varepsilon.$$

Chapitre 1

Introduction

1.1 Probabilités et statistique

La statistique est une science étroitement liée au calcul des probabilités dont l'origine remonte à la théorie des jeux. Un des problèmes typiques du 17ème siècle était de considérer une urne contenant des boules rouges et des boules noires. Le calcul des probabilités permettait de répondre à la question suivante:

(Q1) Si l'urne contient une proportion π de boules rouges, quelle est la probabilité que parmi n boules tirées au hasard de l'urne, K soient des boules rouges?

Le but de la statistique est de répondre à une autre question:

(Q2) Comment peut-on déduire la proportion π de boules rouges contenues dans l'urne si parmi n boules tirées au hasard de l'urne, K sont des boules rouges?

Le premier qui aurait pu répondre à cette deuxième question est Jacques Bernoulli (1654-1705). Au même titre que "le plus stupide des hommes" (Bernoulli dixit), il était convaincu que plus le nombre n était élevé, moins il y avait de risque que la proportion K/n de boules rouges tirées ne s'écarte

de la vraie proportion π , mais ce fut le premier à quantifier cette intuition en utilisant une approche mathématique. Dans son ouvrage *Ars Conjectandi* publié après sa mort en 1713, il s'intéressa au nombre n minimal de boules qu'il convenait de tirer de l'urne afin que la proportion K/n de boules rouges tirées soit égale à π (à une approximation ε près) avec une certitude morale. Par certitude morale, il voulait dire que la probabilité que cette égalité ne soit pas respectée devait être extrêmement petite (par exemple, plus petite que $\alpha = 1/1000$). Après un calcul ingénieux, il trouva que dans le cas où $\pi = 3/5$ et $\varepsilon = 1/50$, son problème était résolu pour un nombre $n = 25'500$ (voir Stigler, 1986, pp. 67-69). Cela signifiait qu'il fallait tirer au moins 25'500 boules de l'urne (contenant une infinité de boules) pour être moralement certain de connaître π avec une précision de $1/50$.

Ce résultat décourageant s'explique par deux raisons. D'une part, Bernoulli ne connaissait pas le théorème central limite - établi initialement en 1733 pour la loi binomiale par Abraham de Moivre (1667-1754) - qui permet de montrer qu'un nombre n plus petit que 25'500 convient pour ce problème et, d'autre part, il n'est pas toujours raisonnable, statistiquement parlant, d'exiger une telle certitude morale à propos d'un paramètre inconnu. Il est d'usage aujourd'hui d'admettre une incertitude de $\alpha = 1/20$ bien plus grande que $\alpha = 1/1000$. A l'aide du théorème central limite et avec cette nouvelle valeur de α , on trouve comme solution au problème de Bernoulli un nombre $n = 2305$ qui est déjà plus abordable d'un point de vue pratique.

1.2 Tests d'hypothèse et intervalles de confiance

En utilisant une notation moderne, le problème de Bernoulli consiste à chercher le nombre n minimal tel que l'on ait

$$\Pr \left\{ \left| \frac{K}{n} - \pi \right| > \varepsilon \right\} < \alpha.$$

De manière équivalente, il s'agit de trouver le nombre n tel que

$$\Pr \left\{ \frac{K}{n} \in [\pi - \varepsilon; \pi + \varepsilon] \right\} = 1 - \alpha, \quad (1.1)$$

ε et α étant fixés. Nicolas Bernoulli (1695-1726), le neveu de Jacques, considéra un problème similaire (publié en 1713 par Montmort) mais avec ε et n fixés et calcula une borne pour α . Le théorème central limite permet aussi de fixer n et α , et de déterminer le ε afin que (1.1) soit vérifié. Dans ces trois cas, la proportion π est considérée comme fixe, et on reste donc dans le domaine de la question (Q1) posée ci-dessus: étant donné une proportion π (par exemple $\pi = 3/5$), on tire des enseignements sur la proportion empirique K/n .

Cette démarche va aboutir à la procédure des *tests d'hypothèse*, systématisée dès 1900 par Karl Pearson (1857-1936). Elle consiste à utiliser l'équation (1.1) dans un raisonnement logique du type

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{non } B \Rightarrow \text{non } A).$$

En posant

$$\begin{aligned} A &: \pi = 3/5 \\ B &: \frac{K}{n} \in [3/5 - \varepsilon; 3/5 + \varepsilon], \end{aligned}$$

le raisonnement est alors le suivant:

- Si la proportion empirique K/n ne se trouve pas dans l'intervalle $[3/5 - \varepsilon; 3/5 + \varepsilon]$ où elle devrait se trouver (avec une grande probabilité) si la vraie proportion π était égale à $3/5$, on en conclut que π n'est pas égale à $3/5$. On rejette ainsi l'hypothèse $\pi = 3/5$.

- Si la proportion empirique K/n se trouve dans l'intervalle $[3/5 - \varepsilon; 3/5 + \varepsilon]$, on ne peut pas rejeter l'hypothèse $\pi = 3/5$. On dit ainsi que la vraie proportion π n'est pas significativement différente de $3/5$.

La notion d'*intervalle de confiance* va pour sa part naître de l'"inversion de la probabilité" décrite par (1.1). C'est en 1812, dans sa *Théorie Analytique*

des *Probabilités*, que pour la première fois Pierre Simon Laplace (1749-1827) considéra une équation du type

$$\Pr \left\{ \pi \in \left[\frac{K}{n} - \varepsilon; \frac{K}{n} + \varepsilon \right] \right\} = 1 - \alpha. \quad (1.2)$$

Il conclut d'une telle équation qu'il y avait une probabilité de $1 - \alpha$ pour que la vraie proportion π soit dans l'intervalle $[K/n - \varepsilon; K/n + \varepsilon]$, répondant par là à la question (Q2) posée ci-dessus (déduire des enseignements sur π à partir de K/n). Il considérait les bornes de l'intervalle comme fixes et π comme une variable aléatoire (et non comme un paramètre fixe) qui a une probabilité $1 - \alpha$ de se réaliser à l'intérieur de cet intervalle. Il s'agissait donc d'une approche *bayésienne* de la statistique dont Laplace est souvent cité comme l'un des précurseurs (voir, par exemple, Seidenfeld, 1979, p. 1).

D'après Lehman (1986, p. 126), ce n'est qu'avec Edwin Bidwell Wilson (1879-1964) qu'apparut une interprétation *fréquentiste* de l'équation (1.2). Au contraire de Laplace, Wilson (1927) considéra la proportion π comme fixe bien qu'inconnue. En conséquence, la probabilité que π soit dans un intervalle fixe est égale à 0 (au cas où elle n'y appartient pas) ou à 1 (au cas où elle y appartient), mais en aucun cas à une quantité $1 - \alpha$ comprise strictement entre 0 et 1. Wilson considéra plutôt les bornes de l'intervalle $K/n - \varepsilon$ et $K/n + \varepsilon$ comme des variables aléatoires car elles dépendent du tirage. Il conclut que si on répétait l'expérience un grand nombre de fois, la proportion inconnue π appartiendrait à l'intervalle $[K/n - \varepsilon; K/n + \varepsilon]$ dans $(1 - \alpha)\%$ des cas. Cette interprétation fréquentiste de la statistique est la plus répandue de nos jours et c'est également l'approche utilisée dans cette thèse.

La façon dont Wilson calcula son intervalle de confiance est très intéressante si on la compare à ce qu'a fait Laplace. Par le théorème central limite, on a que le ratio

$$\frac{\sqrt{n}(K/n) - \pi}{\sqrt{\pi(1 - \pi)}}$$

suit approximativement une loi normale centrée réduite et on obtient comme solution à (1.1) et (1.2)

$$\varepsilon = \varepsilon(\pi) = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} \quad (1.3)$$

où $z_{\alpha/2}$ est le $(1 - \alpha/2)$ -quantile d'une loi normale centrée réduite. La valeur de ε a donc la particularité de dépendre de π . L'équation (1.1) devient

$$\Pr \left\{ \frac{K}{n} \in [\pi - \varepsilon(\pi); \pi + \varepsilon(\pi)] \right\} = 1 - \alpha \quad (1.4)$$

et l'équation (1.2)

$$\Pr \left\{ \pi \in \left[\frac{K}{n} - \varepsilon(\pi); \frac{K}{n} + \varepsilon(\pi) \right] \right\} = 1 - \alpha. \quad (1.5)$$

Si (1.4) peut bel et bien être utilisé pour un problème de test d'hypothèse (où on fixe π), il n'en va pas de même de (1.5) pour calculer un intervalle de confiance (où on ne connaît pas π) car les bornes de l'intervalle dépendent de la valeur de π . Pour surmonter cet obstacle, on utilise habituellement l'approximation $\pi = K/n$ pour calculer $\varepsilon(\pi)$ dans (1.5) et on aboutit à l'intervalle de confiance pour π

$$K/n \pm \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{(K/n)(1 - K/n)} \quad (1.6)$$

à peu de chose près égal à celui obtenu par Laplace.

La solution proposée par Wilson est de considérer comme intervalle de confiance pour le paramètre π l'ensemble de toutes les valeurs π_0 qui sont trouvées non significativement différentes de la proportion π selon la procédure d'un test d'hypothèse décrite ci-dessus. Il obtint ainsi l'intervalle de confiance pour π

$$\frac{K/n + z_{\alpha/2}^2/(2n)}{1 + z_{\alpha/2}^2/n} \pm \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{(K/n)(1 - K/n) + z_{\alpha/2}^2/(4n)}}{1 + z_{\alpha/2}^2/n}$$

qui diffère quelque peu de l'approximation (1.6). Cette démarche va être généralisée par Jerzy Neyman (1894-1981) et Egon Sharpe Pearson (1895-1980) qui fondèrent les bases de la statistique moderne, celle qui unifie les tests d'hypothèse et les intervalles de confiance, et ainsi les questions (Q1) et (Q2) énoncées en début d'introduction (voir en particulier Neyman et Pearson, 1933; Neyman, 1937).

1.3 Intervalles de confiance pour une moyenne

L'exemple de Wilson nous montre que l'on ne peut pas toujours obtenir un intervalle de confiance par simple inversion de l'équation (1.1) en (1.2). D'autres problèmes le permettent cependant. Si la proportion π est remplacée par la moyenne μ d'une population, et si la proportion empirique K/n est remplacée par la moyenne \bar{X} d'un échantillon de n observations provenant de cette population, on a par le théorème central limite que le ratio

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$$

suit approximativement une loi normale centrée réduite et, par conséquent, on trouve comme solution à (1.1) et (1.2)

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (1.7)$$

où σ est l'écart-type de la population. Contrairement à ce que l'on avait dans (1.3), ε ne dépend pas du paramètre inconnu μ dans (1.7). Les équations (1.1) et (1.2) deviennent ainsi

$$\Pr \left\{ \bar{X} \in \left[\mu - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \mu + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \right\} = 1 - \alpha. \quad (1.8)$$

et

$$\Pr \left\{ \mu \in \left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \right\} = 1 - \alpha. \quad (1.9)$$

On a ici une symétrie totale entre μ et \bar{X} . En échangeant les rôles de μ et \bar{X} dans (1.8), on obtient (1.9) et inversement. L'ensemble des valeurs μ_0 tels que \bar{X} appartienne à l'intervalle

$$\left[\mu_0 - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

est donc le même que l'ensemble des μ_0 appartenant à l'intervalle

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

et de ce fait, l'intervalle de confiance pour μ peut être directement tiré de (1.9) et ne doit pas être recalculé comme l'a fait Wilson pour π .

Un autre problème survient toutefois ici: en général, l'écart-type de la population σ est tout autant inconnu que la moyenne μ . En pratique, il est remplacé dans (1.7), (1.8) et (1.9) par l'écart-type S de l'échantillon, ce qui nous amène à une approximation d'un intervalle de confiance pour μ

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]. \quad (1.10)$$

Cette approximation n'est plus tout à fait valable lorsque la taille n de l'échantillon est petite, car S est tout comme \bar{X} une variable aléatoire et est donc sujette à des variations (sa valeur dépend de l'échantillon tiré).

C'est ainsi que William Sealy Gosset (1876-1937), plus connu sous le pseudonyme de "Student", étudia la distribution du ratio

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S}.$$

Dans un article célèbre publié en 1908, il calcula la distribution de T dans le cas où la population est normalement distribuée (plus précisément, il calcula la distribution d'un ratio Z qui est égal à $T/\sqrt{n-1}$ si l'écart-type S est calculé avec un dénominateur $n-1$). Cette distribution est appelée aujourd'hui

la loi de Student. On peut ainsi calculer un intervalle de confiance pour μ de la forme

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \right] \quad (1.11)$$

où $t_{\alpha/2, n-1}$ est le $(1 - \alpha/2)$ -quantile de la loi de Student avec $n - 1$ degrés de liberté. D'après Pearson, Plackett et Barnard (1990, p. 83), un tel intervalle a été calculé pour la première fois par un certain Waclaw Pitkowski en 1932.

1.4 Distribution de T

La recherche de la distribution de T lorsque la population n'est pas normalement distribuée a fait l'objet de nombreuses recherches depuis 1908. Peu de résultats exacts sont disponibles. Rider (1929) calcula la distribution de T lorsque $n = 2$ dans le cas où la distribution de la population est uniforme. Perlo (1933) en fit de même lorsque $n = 3$. Enfin Laderman (1939) calcula une expression générale pour la distribution de T lorsque $n = 2$, qui dépend de la distribution de la population.

De nombreuses études furent toutefois empiriques. Sophister (1928) montra que l'on peut utiliser la loi de Student pour T si la distribution de la population n'est pas trop asymétrique. Neyman et Pearson (1928), Pearson et Adyanthaya (1929) et Nair (1941) constatèrent pour leur part qu'une asymétrie positive de la distribution de la population entraîne une asymétrie négative de T et vice versa. Ce constat a été confirmé par Geary (1936) qui calcula des approximations des quatre premiers moments de T en utilisant une méthode suggérée par Fisher (1928). Il obtint notamment

$$\begin{aligned} \mu(F_T) &= -\frac{\gamma}{2\sqrt{n}} + O(n^{-1}) \\ \sigma^2(F_T) &= 1 + O(n^{-1}) \\ \mu_3(F_T) &= -\frac{2\gamma}{\sqrt{n}} + O(n^{-1}) \end{aligned}$$

où $\mu(F_T)$, $\sigma^2(F_T)$, $\mu_3(F_T)$ sont respectivement l'espérance, la variance et le

3ème moment centré de la distribution de T , où $\gamma = \mu_3/\sigma^3$ est le coefficient d'asymétrie de la population (μ_3 étant le 3ème moment centré de la population) et où $O(n^{-r})$ désigne une quantité plus petite en valeur absolue qu'un multiple de n^{-r} . La troisième de ces formules prouve en effet que les signes de $\mu_3(T)$ et γ sont opposés.

La fonction de répartition $F_T(x)$ de la variable aléatoire T a pour sa part été approximée par des sommes partielles de séries infinies de type

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_i(x)}{\sqrt{n^i}}. \quad (1.12)$$

De telles séries sont dites des expansions asymptotiques de $F_T(x)$ en séries de puissances de $1/\sqrt{n}$. Une expansion de type (1.12) est dite valide à l'ordre $r + 1$ si l'erreur commise en approximant $F_T(x)$ par les r premiers termes de la série est de l'ordre du premier terme négligé en $1/\sqrt{n}$. Les fonctions $A_i(x)$ dans (1.12) sont donc déterminées de telle sorte que l'on ait pour tout x

$$\left| F_T(x) - \sum_{i=0}^r \frac{A_i(x)}{\sqrt{n^i}} \right| = O\left(n^{-\frac{r+1}{2}}\right).$$

Par exemple, le théorème central limite nous donne une approximation de $F_T(x)$ valide à l'ordre 1. On peut montrer en effet que

$$|F_T(x) - \Phi(x)| = O(n^{-1/2})$$

où $\Phi(x)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Pour de plus amples informations, on se référera à Wallace (1958) qui passe en revue les différents types d'expansions asymptotiques.

Les premiers à calculer de telles expansions asymptotiques pour une fonction de répartition quelconque $F(x)$ furent Chebyshev (1860, 1890), Gram (1883), Edgeworth (1896, 1905) et Charlier (1905, 1906). Ils construisirent leurs expansions de telle sorte que $A_0(x) = \Phi(x)$ et obtinrent ainsi des améliorations du théorème central limite. Chebyshev et Charlier calculèrent

des expansions formelles dites des *expansions Gram-Charlier de type A*. Les premiers termes de ces expansions sont donnés par

$$F(x) = \Phi(x) - \mu(F)\Phi'(x) + \frac{\sigma^2(F) - 1}{2}\Phi''(x) - \frac{\mu_3(F)}{6}\Phi'''(x) + \dots \quad (1.13)$$

où $\mu(F)$, $\sigma^2(F)$ et $\mu_3(F)$ sont respectivement l'espérance, la variance et le 3ème moment centré de la distribution de fonction de répartition $F(x)$. L'idée de Francis Ysidro Edgeworth (1845-1926) a été de réarranger ces termes en fonction des différentes puissances de $1/\sqrt{n}$ qui apparaissent dans (1.13) lorsque $F(x)$ dépend de la taille n d'un échantillon. Les expansions asymptotiques de type (1.12) avec $A_0(x) = \Phi(x)$ sont ainsi dites des *expansions d'Edgeworth*.

Les premiers termes de l'expansion d'Edgeworth de la fonction de répartition $F_T(x)$ sont donnés par

$$F_T(x) = \Pr \left\{ \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \leq x \right\} = \Phi(x) + \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} \phi(x) (2x^2 + 1) + \dots \quad (1.14)$$

où $\phi(x) = \Phi'(x)$ est la fonction de densité de la loi normale centrée réduite. En comparaison, les premiers termes de l'expansion d'Edgeworth de la fonction de répartition de la variable aléatoire $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$ sont donnés par

$$\Pr \left\{ \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \leq x \right\} = \Phi(x) - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} \phi(x) (x^2 - 1) + \dots$$

Pour le calcul d'un nombre important de termes de l'expansion (1.14), voir par exemple Withers (1983, 1984). Chung (1946) a montré que l'expansion d'Edgeworth de $F_T(x)$ est valide à n'importe quel ordre, pourvu qu'un nombre suffisant de moments existent dans la distribution de la population et que celle-ci ne soit pas singulière. Pour des conditions plus précises sur la validité d'une expansion d'Edgeworth, voir par exemple Bhattacharya et Ghosh (1978).

D'autres auteurs ont considéré des expansions asymptotiques de $F_T(x)$ en posant $A_0(x) = \Phi_{n-1}(x)$ dans (1.12), où $\Phi_{n-1}(x)$ est la fonction de répartition

de la loi de Student avec $n - 1$ degrés de liberté. Un exemple d'une telle expansion a été obtenu par Bartlett (1935) et Geary (1947). Pour une étude de la qualité des approximations obtenues en utilisant cette expansion, voir Bowman, Beauchamp et Shenton (1977). Une autre expansion du même type, plus satisfaisante selon Wallace (1958), a été calculée par Geary (1936) et Gayen (1949). Les premiers termes sont donnés par

$$F_T(x) = \Phi_{n-1}(x) + \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{2n-1}{n-1} x^2\right) + \dots$$

Il est également possible d'inverser l'expansion d'Edgeworth (1.14) afin d'obtenir une expansion pour les quantiles $x_\alpha = F_T^{-1}(1 - \alpha)$ de T . L'idée est d'approximer x_α par des sommes partielles de séries infinies de type

$$z_\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(z_\alpha)}{\sqrt{n^i}}$$

où les fonctions $a_i(z_\alpha)$ sont déterminées de telle sorte que

$$F_T\left(z_\alpha + \sum_{i=1}^r \frac{a_i(z_\alpha)}{\sqrt{n^i}}\right) = (1 - \alpha) + O\left(n^{-\frac{r+1}{2}}\right).$$

De telles expansions sont dites des *expansions de Cornish-Fisher* et sont dues à Cornish et Fisher (1937). Pour le calcul de l'expansion de Cornish-Fisher des quantiles x_α de T , voir par exemple Withers (1983, 1984). Les premiers termes sont donnés par

$$x_\alpha = z_\alpha - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} (2z_\alpha^2 + 1) + \dots$$

de telle sorte que l'on a

$$F_T\left(z_\alpha - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} (2z_\alpha^2 + 1)\right) = (1 - \alpha) + O\left(n^{-1}\right). \quad (1.15)$$

1.5 Intervalles de confiance corrects au second ordre

Johnson (1978) eut l'idée d'exploiter le résultat (1.15) pour construire un intervalle de confiance pour la moyenne μ d'une population qui tient compte de l'asymétrie de la population. Sa procédure revient à transformer la variable T dans le but de rendre sa distribution plus proche d'une loi normale. Le résultat (1.15) lui suggère la transformation

$$h(T) = T + \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} (2T^2 + 1)$$

de telle sorte que

$$\Pr \{h(T) \leq x\} = \Phi(x) + O(n^{-1}).$$

Il élimine ainsi le terme en $O(n^{-1/2})$ que l'on a dans (1.14). Malheureusement, ce type de transformation ne lui permet pas de calculer directement un intervalle de confiance car la fonction h n'est pas inversible. Si cette fonction avait été inversible, on aurait eu

$$\Pr \{T \leq h^{-1}(x)\} = F_T(h^{-1}(x)) = \Phi(x) + O(n^{-1})$$

et on en aurait déduit l'intervalle de confiance pour μ

$$\left[\bar{X} - h^{-1}(z_{\alpha/2}) \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} - h^{-1}(-z_{\alpha/2}) \frac{S}{\sqrt{n}} \right]. \quad (1.16)$$

Pfanzagl (1979), Hall (1983), Abramovitch et Singh (1985), et Hall (1992a, 1992b) ont ainsi proposé des transformations inversibles h de la variable T qui mènent à des intervalles de confiance de type (1.16). Ces intervalles de confiance ont la particularité de tenir compte de l'asymétrie de la population, ce qui a pour effet de les rendre *équilibrés jusqu'à l'ordre* $O(n^{-1})$, c'est-à-dire que l'on a

$$\Pr \left\{ \mu < \bar{X} - h^{-1}(z_{\alpha/2}) \frac{S}{\sqrt{n}} \right\} = \alpha/2 + O(n^{-1})$$

et

$$\Pr \left\{ \mu > \bar{X} - h^{-1} \left(-z_{\alpha/2} \right) \frac{S}{\sqrt{n}} \right\} = \alpha/2 + O(n^{-1}).$$

En ce sens, ce sont des améliorations des intervalles de confiance de type (1.10) ou (1.11) qui ne sont équilibrés que jusqu'à l'ordre $O(n^{-1/2})$. Les intervalles de type (1.16) sont ainsi dits *corrects au second ordre* ou *corrects pour l'asymétrie* alors que les intervalles de type (1.10) ou (1.11) ne sont que *corrects au premier ordre*. On verra toutefois que certains intervalles de type (1.16) ont parfois des comportements aberrants (lorsque α est petit par exemple).

Les méthodes *bootstrap* introduites il y a une vingtaine d'années permettent également de produire des intervalles de confiance corrects au second ordre (ou même d'avantage). Ces méthodes, basées sur le concept de rééchantillonnage, nécessitent toutefois un grand nombre de calculs. On se référera en particulier à Efron (1981, 1982, 1987), Hall (1988, 1992b), Efron et Tibshirani (1993) et Davison et Hinkley (1997).

Parmi les intervalles de confiance corrects au second ordre, on citera encore les intervalles de confiance définis à partir de la *vraisemblance empirique*, introduits par Owen (1988) et étudiés par Owen (1990), Hall (1990) et Hall et La Scala (1990) ainsi qu'une méthode qui utilise une statistique de comparaison proposée par Hall (1985).

1.6 But et organisation de la thèse

Le but de cette thèse est de proposer un nouveau type d'intervalle de confiance, correct au second ordre, pour la moyenne d'une population dont on ne connaît pas la distribution. On parlera d'*intervalle de confiance adaptatif* dans le sens où sa définition s'"adapte" à l'asymétrie de cette distribution. Au même titre que les intervalles de type (1.16), notre intervalle de confiance a l'avantage d'être calculable explicitement à partir des données, sans nécessiter de rééchantillonnage. Par rapport aux intervalles de type (1.16), on

verra que notre intervalle a l'avantage de ne pas partager certains de leurs comportements aberrants.

La thèse est organisée comme suit: au chapitre 2, on passe en revue les différents types d'intervalles de confiance corrects au second ordre proposés dans la littérature. Au chapitre 3, on définit d'autres propriétés que se doivent de satisfaire un intervalle de confiance. On verra ainsi que les intervalles de type (1.16) ne satisfont pas toutes ces propriétés. Notre intervalle de confiance est ensuite introduit et étudié au chapitre 4. On verra entre autre qu'il satisfait bien les propriétés définies au chapitre 3. On a vu dans cette introduction que les intervalles de confiance et les tests d'hypothèses sont intimement liés; on va voir ainsi au chapitre 5 comment notre intervalle de confiance peut être utilisé dans une procédure de test d'hypothèse. Au chapitre 6, on donne les résultats d'une simulation qui confirme les résultats théoriques des chapitres précédents et le bon comportement de notre intervalle. Enfin, quelques exemples concrets d'utilisation de notre intervalle sont présentés au chapitre 7.

Chapitre 2

Intervalles de confiance équilibrés

2.1 Introduction

On considère un échantillon de n observations indépendantes X_1, \dots, X_n provenant d'une population de moyenne inconnue (et finie) μ . Généralement, on estime μ par la moyenne de l'échantillon

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

Il est évidemment très improbable que \bar{X} coïncide avec μ (la probabilité est même nulle au sens de Lebesgue). Dans le but d'augmenter notre certitude par rapport à μ , il est d'usage de construire autour de l'estimateur \bar{X} un *intervalle de confiance pour μ au niveau $1 - \alpha$* de la forme

$$IC_{\alpha,b} = \left[\bar{X} - a(\alpha) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} - b(\alpha) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right] \quad (2.1)$$

où $a(\alpha)$ et $b(\alpha)$ sont deux nombres dépendant de α ($0 \leq \alpha \leq 1$) et où

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}}$$

est l'estimateur habituel de l'écart-type σ de la population (on suppose σ fini). Ces intervalles sont construits de telle sorte que la probabilité qu'ils contiennent μ (selon une approche fréquentiste des probabilités) est égale à $1 - \alpha$. Ainsi on doit avoir

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \Pr \{ \mu \in IC_{a,b} \} \\ &= \Pr \left\{ \bar{X} - a(\alpha) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} - b(\alpha) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right\} \\ &= \Pr \left\{ b(\alpha) \leq \frac{(\bar{X} - \mu)}{S/\sqrt{n}} \leq a(\alpha) \right\}. \end{aligned}$$

En posant

$$T = \sqrt{n} \frac{(\bar{X} - \mu)}{S},$$

et en supposant cette variable aléatoire T absolument continue, de telle sorte que l'on ait pour la fonction de répartition $F_T(x)$ de T

$$F_T(x) = \Pr \{ T \leq x \} = \Pr \{ T < x \},$$

on doit donc avoir

$$1 - \alpha = F_T(a(\alpha)) - F_T(b(\alpha)). \quad (2.2)$$

Si en plus de (2.2), on désire avoir un intervalle de confiance *équilibré*¹, c'est-à-dire répartir équitablement l'incertitude α de part et d'autre de l'intervalle tel que

$$\Pr \{ \mu < IC_{a,b} \} = F_T(b(\alpha)) = \alpha/2$$

et

$$\Pr \{ \mu > IC_{a,b} \} = 1 - F_T(a(\alpha)) = \alpha/2$$

¹On a choisi de traduire en français par *équilibré* le terme anglais *equal-tailed* utilisé dans la littérature pour désigner de tels intervalles.

on doit alors poser

$$\begin{aligned} a(\alpha) &= F_T^{-1}(1 - \alpha/2) \\ b(\alpha) &= F_T^{-1}(\alpha/2). \end{aligned}$$

Autrement dit, $a(\alpha)$ et $b(\alpha)$ sont respectivement le $(1 - \alpha/2)$ - et le $(\alpha/2)$ -quantile de la distribution de T .

2.2 Distribution normale de la population

Lorsque la population de laquelle provient l'échantillon est normalement distribuée, on a rappelé au chapitre 1 que le ratio T suit une *loi de Student* avec $n - 1$ degrés de liberté (voir Student, 1908). En posant

$$\begin{aligned} a(\alpha) &= t_{\alpha/2, n-1} \\ b(\alpha) &= t_{(1-\alpha/2), n-1} = -t_{\alpha/2, n-1} \end{aligned}$$

où $t_{\alpha, \nu}$ désigne le $(1 - \alpha)$ -quantile de la loi de Student avec ν degrés de liberté, on obtient comme intervalle de confiance pour μ équilibré au niveau $1 - \alpha$

$$IC_t = \left[\bar{X} - t_{\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t_{\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]. \quad (2.3)$$

On a donc

$$\Pr \{ \mu \in IC_t \} = 1 - \alpha$$

avec en outre

$$\Pr \{ \mu < IC_t \} = \Pr \{ \mu > IC_t \} = \alpha/2.$$

Lorsque le nombre de degrés de liberté ν d'une loi de Student augmente, sa fonction de répartition s'approche de celle d'une loi normale centrée réduite. C'est pourquoi il est également très courant de poser

$$\begin{aligned} a(\alpha) &= z_{\alpha/2} \\ b(\alpha) &= z_{(1-\alpha/2)} = -z_{\alpha/2} \end{aligned}$$

où z_α désigne le $(1 - \alpha)$ -quantile de la loi normale centrée réduite, et d'obtenir l'intervalle de confiance

$$IC_z = \left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]. \quad (2.4)$$

Or, on a que (voir par exemple Hall, 1992b, p. 13)

$$\Phi_{n-1}(x) = \Phi(x) + O(n^{-1}) \quad (2.5)$$

où $\Phi(x)$ et $\Phi_{n-1}(x)$ sont respectivement les fonctions de répartition de la loi normale centrée réduite et de la loi de Student avec $n - 1$ degrés de liberté, et où $O(n^{-r})$ désigne une quantité plus petite en valeur absolue que $k \cdot n^{-r}$ pour une constante k indépendante de n . On peut donc mesurer la qualité de l'approximation (2.4) par rapport au résultat exact (2.3). Ainsi

$$\Pr \{ \mu < IC_z \} = 1 - \Phi_{n-1}(z_{\alpha/2}) = 1 - \Phi(z_{\alpha/2}) + O(n^{-1}) = \alpha/2 + O(n^{-1})$$

et

$$\Pr \{ \mu > IC_z \} = \Phi_{n-1}(-z_{\alpha/2}) = \Phi(-z_{\alpha/2}) + O(n^{-1}) = \alpha/2 + O(n^{-1})$$

de même que

$$\begin{aligned} \Pr \{ \mu \in IC_z \} &= 1 - \Pr \{ \mu < IC_z \} - \Pr \{ \mu > IC_z \} \\ &= 1 - \alpha/2 + O(n^{-1}) - \alpha/2 + O(n^{-1}) \\ &= 1 - \alpha + O(n^{-1}). \end{aligned}$$

Par conséquent IC_z est dit un intervalle de confiance pour μ équilibré au niveau $1 - \alpha$ jusqu'à l'ordre $O(n^{-1})$.

2.3 Distribution non normale de la population

Lorsque la distribution de la population n'est pas normale, les résultats donnés dans la section précédente ne sont plus toujours valables et doivent être remplacés par ceux donnés dans cette section.

Si les quatre premiers moments de la distribution de la population sont finis, et si cette distribution satisfait la condition de Cramér (ce qui est le cas, par exemple, pour une distribution absolument continue)

$$\limsup_{|t| \rightarrow \infty} |\Psi(t)| < 1$$

où $\Psi(t)$ désigne sa fonction caractéristique, on a en utilisant les premiers termes de l'expansion d'Edgeworth de T (voir par exemple Hall, 1992b, pp. 45-46)

$$F_T(x) = \Phi(x) + \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(2x^2 + 1)\phi(x)}{6} + O(n^{-1}) \quad (2.6)$$

uniformément en x , où $\phi(x) = \Phi'(x)$ est la fonction de densité de la loi normale centrée réduite et où γ est le coefficient d'asymétrie de la population, c'est-à-dire

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

où μ_3 est le 3ème moment centré de la population. Notons que par (2.5) et (2.6), on a par ailleurs

$$F_T(x) = \Phi_{n-1}(x) + \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(2x^2 + 1)\phi(x)}{6} + O(n^{-1}). \quad (2.7)$$

On va utiliser ces résultats (2.6) et (2.7) pour mesurer la qualité des approximations des intervalles IC_z et IC_t dans le cas d'une distribution non normale de la population. On distinguera les cas où cette distribution est symétrique et les cas où elle est asymétrique.

Il est peut-être utile ici de rappeler que l'on a

$$\text{distribution symétrique} \Rightarrow \gamma = 0$$

et que par conséquent

$$\gamma \neq 0 \Rightarrow \text{distribution asymétrique}$$

mais qu'il est possible d'avoir une distribution asymétrique avec $\gamma = 0$. Pour la simplicité de l'exposé, on dira toutefois dans ce qui suit "distribution symétrique" pour une distribution avec $\gamma = 0$ et "distribution asymétrique" pour une distribution avec $\gamma \neq 0$.

2.3.1 Distribution symétrique de la population

Pour une distribution symétrique de la population (c'est-à-dire telle que $\gamma = 0$) on a par (2.6)

$$\begin{aligned}\Pr\{\mu < IC_z\} &= 1 - F_T(z_{\alpha/2}) \\ &= 1 - \Phi(z_{\alpha/2}) + O(n^{-1}) \\ &= \alpha/2 + O(n^{-1})\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Pr\{\mu > IC_z\} &= F_T(-z_{\alpha/2}) \\ &= \Phi(-z_{\alpha/2}) + O(n^{-1}) \\ &= \alpha/2 + O(n^{-1})\end{aligned}$$

de même que

$$\Pr\{\mu \in IC_z\} = 1 - \alpha + O(n^{-1}).$$

Ainsi, l'intervalle IC_z reste dans le cas symétrique un intervalle de confiance pour μ équilibré au niveau $1 - \alpha$ jusqu'à l'ordre $O(n^{-1})$. Par (2.7), on a le même résultat pour l'intervalle IC_t (qui n'est cependant plus ici un intervalle de confiance exact).

2.3.2 Distribution asymétrique de la population

Pour une distribution asymétrique de la population (plus précisément lorsque $\gamma \neq 0$), on a par (2.6)

$$\Pr\{\mu < IC_z\} = \alpha/2 + O(n^{-1/2})$$

et

$$\Pr\{\mu > IC_z\} = \alpha/2 + O(n^{-1/2}).$$

Pourtant, on a tout de même que

$$\begin{aligned}
 \Pr \{ \mu \in IC_z \} &= 1 - \Pr \{ \mu < IC_z \} - \Pr \{ \mu > IC_z \} \\
 &= \left[\Phi(z_{\alpha/2}) + \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(2z_{\alpha/2}^2 + 1)\phi(z_{\alpha/2})}{6} + O(n^{-1}) \right] \\
 &\quad - \left[\Phi(-z_{\alpha/2}) + \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(2z_{\alpha/2}^2 + 1)\phi(-z_{\alpha/2})}{6} + O(n^{-1}) \right] \\
 &= \Phi(z_{\alpha/2}) - \Phi(-z_{\alpha/2}) + O(n^{-1}) \\
 &= 1 - \alpha + O(n^{-1})
 \end{aligned}$$

puisque $\phi(x)$ est une fonction paire. Ainsi IC_z est encore un intervalle de confiance pour μ au niveau $(1 - \alpha)$ jusqu'à l'ordre $O(n^{-1})$ mais il n'est équilibré que jusqu'à l'ordre $O(n^{-1/2})$ (les erreurs d'ordre $O(n^{-1/2})$ faites de part et d'autre de l'intervalle se compensent). Par (2.7), on a le même résultat pour l'intervalle IC_t .

2.4 Transformation de la variable T

Il est souhaitable de pouvoir définir des intervalles de confiance pour μ équilibrés jusqu'à l'ordre $O(n^{-1})$, d'une part afin d'obtenir une meilleure représentation des données utilisées, et d'autre part lorsque l'on utilise un intervalle de confiance dans une procédure de test d'hypothèse bilatéral ou unilatéral (voir chapitre 5). Dans ce qui suit, on dira des intervalles équilibrés jusqu'à l'ordre $O(n^{-1})$ qu'ils sont *corrects au second ordre*, par opposition aux intervalles équilibrés jusqu'à l'ordre $O(n^{-1/2})$ qui ne sont que *corrects au premier ordre*. Ainsi les intervalles IC_t et IC_z sont corrects au second ordre si la distribution de la population est symétrique, mais ne sont corrects qu'au premier ordre si la distribution de la population est asymétrique.

Dans le but d'obtenir des intervalles de confiance corrects au second ordre dans les cas symétriques comme dans les cas asymétriques, certains auteurs (voir ci-dessous) ont proposé de transformer la variable T par une

transformation h monotone et inversible telle que

$$\Pr \{h(T) \leq x\} = \Phi(x) + O(n^{-1}) \quad (2.8)$$

et par conséquent telle que

$$\Pr \{T \leq h^{-1}(x)\} = F_T(h^{-1}(x)) = \Phi(x) + O(n^{-1}).$$

On élimine ainsi le terme d'ordre $O(n^{-1/2})$ dans (2.6). Il suffit alors de poser

$$\begin{aligned} a(\alpha) &= h^{-1}(z_{\alpha/2}) \\ b(\alpha) &= h^{-1}(-z_{\alpha/2}) \end{aligned}$$

pour avoir un intervalle de la forme

$$IC_h = \left[\bar{X} - h^{-1}(z_{\alpha/2}) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} - h^{-1}(-z_{\alpha/2}) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]. \quad (2.9)$$

L'intervalle (2.9) est un intervalle de confiance pour μ au niveau $1 - \alpha$ correct au second ordre. En effet

$$\Pr \{\mu < IC_h\} = 1 - F_T(h^{-1}(z_{\alpha/2})) = 1 - \Phi(z_{\alpha/2}) + O(n^{-1}) = \alpha/2 + O(n^{-1})$$

et

$$\Pr \{\mu > IC_h\} = F_T(h^{-1}(-z_{\alpha/2})) = \Phi(-z_{\alpha/2}) + O(n^{-1}) = \alpha/2 + O(n^{-1})$$

et ainsi

$$\Pr \{\mu \in IC_h\} = 1 - \alpha + O(n^{-1}).$$

Notons que lorsque la transformation est définie par $h(T) = T$ on a $IC_h = IC_z$. Dans le cas d'une asymétrie nulle, on choisira ainsi la fonction identité pour h .

L'idée de Hall (1983) et d'Abramovitch et Singh (1985) a été d'utiliser une expansion de Cornish-Fisher pour déterminer h afin que (2.8) soit satisfait. Pfanzagl (1979) utilisa une méthode semblable pour arriver au même résultat.

En utilisant une expansion de Cornish-Fisher des quantiles de T , on obtient pour tout α (mais non uniformément en $0 < \alpha < 1$, voir par exemple Hall, 1992b, p. 70)

$$F_T \left(z_\alpha - \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(2z_\alpha^2 + 1)}{6} \right) = \Phi(z_\alpha) + O(n^{-1}) = 1 - \alpha + O(n^{-1}). \quad (2.10)$$

Lorsque γ est inconnu (ce qui arrive en pratique), il peut être estimé par

$$\hat{\gamma} = \frac{M_3}{S^3}$$

où M_3 est le 3ème moment centré de l'échantillon. Comme on a

$$\hat{\gamma} = \gamma + O_p(n^{-1/2})$$

c'est-à-dire que $\sqrt{n}|\hat{\gamma} - \gamma|$ est borné en probabilité, on aura toujours

$$F_T \left(z_\alpha - \frac{\hat{\gamma}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(2z_\alpha^2 + 1)}{6} \right) = 1 - \alpha + O(n^{-1})$$

en supposant toutefois que les six premiers moments de la distribution de la population sont finis (voir, par exemple, Abramovitch et Singh, 1985). Il s'en suit que les résultats que l'on donne dans ce chapitre (et dans les suivants) restent valables lorsque l'on remplace γ par $\hat{\gamma}$. Notons toutefois que la valeur de $\hat{\gamma}$ calculé sur un échantillon de taille n ne peut dépasser \sqrt{n} en valeur absolue, alors que la quantité γ n'est pas théoriquement bornée. Il en résulte que l'on a toujours $|\hat{\gamma}/\sqrt{n}| \leq 1$.

Le résultat (2.10) donne donc immédiatement une solution pour la transformation h . Il s'agit de

$$h_1(T) = h_1(T, \alpha) = T + \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(2z_{\alpha/2}^2 + 1)}{6}$$

et donc

$$h_1^{-1}(T) = h_1^{-1}(T, \alpha) = T - \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(2z_{\alpha/2}^2 + 1)}{6}$$

Cette transformation h_1 a la particularité de dépendre de α ce qui, comme on va le voir dans le chapitre suivant, posera quelques problèmes.

Un peu auparavant, Johnson (1978) proposa la transformation

$$h_2(T) = T + \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(2T^2 + 1)}{6}$$

qui est similaire à h_1 sauf que $z_{\alpha/2}^2$ est remplacé par T^2 ce qui rend h_2 indépendant de α . Cette transformation n'est toutefois pas inversible et ne permet pas par conséquent de définir un intervalle de confiance de type (2.9). C'est pourquoi, Johnson (1978) considéra finalement la transformation

$$h_3(T) = T + \frac{\gamma}{6\sqrt{n}}$$

avec inverse

$$h_3^{-1}(T) = T - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}}$$

Cependant, cette transformation h_3 (au contraire de h_2) ne satisfait pas la condition (2.8) comme l'a remarqué Hall (1992a) et ne mène donc pas à un intervalle de confiance correct au second ordre.

En fait, suivant Hall (1992b, p. 126), une transformation h permettant de définir un intervalle de confiance pour μ , correct au second ordre, doit satisfaire

$$h(T) = h_2(T) + O_p(n^{-1}) \quad (2.11)$$

dans le but d'avoir

$$h(z_{\alpha/2}) = h_2(z_{\alpha/2}) + O(n^{-1}).$$

Rappelons que $O_p(n^{-r})$ est l'équivalent de $O(n^{-r})$ pour une quantité aléatoire. La définition exacte est la suivante: une quantité aléatoire $X(n)$ est dite d'ordre $O_p(n^{-r})$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k(\varepsilon) < \infty \text{ et } n_0(\varepsilon) : \forall n > n_0(\varepsilon) \quad \Pr \left\{ \frac{|X(n)|}{n^{-r}} < k(\varepsilon) \right\} > 1 - \varepsilon.$$

Dans le but d'obtenir une transformation inversible qui satisfait (2.11), Hall (1992a,b) proposa de considérer

$$h_4(T) = T + \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(2T^2 + 1)}{6} + \frac{\gamma^2}{n} \cdot \frac{T^3}{27}$$

avec inverse (lorsque $\gamma \neq 0$)

$$h_4^{-1}(T) = \frac{3\sqrt{n}}{\gamma} \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \left(T - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} \right) \right)^{1/3} - \frac{3\sqrt{n}}{\gamma}$$

Son idée a été d'ajouter un terme cubique à la transformation de Johnson (1978) de façon à la rendre inversible. Comme le terme additionnel est de l'ordre $O_p(n^{-1})$, elle satisfait (2.11). L'intervalle obtenu est donc bien un intervalle de confiance pour μ correct au second ordre.

Une autre transformation proposée par Hall (1992a,b), suivant en cela une idée de Mallows et Tukey (1982, p. 139), est de considérer (lorsque $\gamma \neq 0$)

$$h_5(T) = \frac{3\sqrt{n}}{2\gamma} \left(\exp \left(\frac{2\gamma}{3\sqrt{n}} T \right) - 1 \right) + \frac{\gamma}{6\sqrt{n}}$$

avec inverse

$$h_5^{-1}(T) = \frac{3\sqrt{n}}{2\gamma} \log \left(\frac{2\gamma}{3\sqrt{n}} \left(T - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} \right) + 1 \right). \quad (2.12)$$

Notons que dans Hall (1992a), cette transformation est donnée par

$$\frac{3\sqrt{n}}{2\gamma} \left(\exp \left(\frac{2\gamma}{3\sqrt{n}} T \right) - 1 \right) + \frac{\gamma}{6n}$$

alors que dans Hall (1992b), elle est donnée par

$$\frac{3n}{2\gamma} \left(\exp \left(\frac{2\gamma}{3n} T \right) - 1 \right) + \frac{\gamma}{6\sqrt{n}}$$

Il s'agit là cependant d'erreurs d'impression (Hall, 1998, communication personnelle).

La transformation h_5 ressemble fort à h_4 car on a

$$\exp\left(\frac{2\gamma}{3\sqrt{n}}T\right) = 1 + \frac{2\gamma}{3\sqrt{n}}T + \frac{4\gamma^2}{9n} \cdot \frac{T^2}{2} + \frac{8\gamma^3}{27n^{3/2}} \cdot \frac{T^3}{6} + O_p(n^{-2})$$

et donc

$$\begin{aligned} h_5(T) &= \frac{3\sqrt{n}}{2\gamma} \left(\frac{2\gamma}{3\sqrt{n}}T + \frac{4\gamma^2}{9n} \cdot \frac{T^2}{2} + \frac{8\gamma^3}{27n^{3/2}} \cdot \frac{T^3}{6} + O_p(n^{-2}) \right) + \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} \\ &= T + \frac{\gamma T^2}{3\sqrt{n}} + \frac{2\gamma^2 T^3}{27n} + \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} + O_p(n^{-3/2}) \\ &= T + \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(2T^2 + 1)}{6} + \frac{\gamma^2}{n} \cdot \frac{2T^3}{27} + O_p(n^{-3/2}). \end{aligned}$$

La transformation h_5 est ainsi la même que h_4 jusqu'à l'ordre $O_p(n^{-1})$ sauf que le terme cubique de h_5 est deux fois celui de h_4 .

Notons que $h_5^{-1}(-z_{\alpha/2})$ et $h_5^{-1}(z_{\alpha/2})$ ne sont définis que lorsque l'argument du logarithme dans (2.12) est strictement positif. Ceci est le cas pour $h_5^{-1}(-z_{\alpha/2})$ si

$$\frac{2\gamma}{3\sqrt{n}} \left(-z_{\alpha/2} - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} \right) + 1 > 0 \quad (2.13)$$

et pour $h_5^{-1}(z_{\alpha/2})$ si

$$\frac{2\gamma}{3\sqrt{n}} \left(z_{\alpha/2} - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} \right) + 1 > 0. \quad (2.14)$$

Les deux bornes de l'intervalle sont donc définies si les conditions (2.13) et (2.14) sont satisfaites, c'est-à-dire lorsque

$$\left| \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \right| < 3 |z_{\alpha/2}| + 3\sqrt{z_{\alpha/2}^2 + 1}. \quad (2.15)$$

Dans les cas contraires, la transformation h_5 ne permet pas d'obtenir un intervalle de confiance de type (2.9). En particulier, lorsque

$$\left| \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \right| \geq 3,$$

il est impossible de définir un intervalle de confiance en utilisant la transformation h_5 , et ceci quel que soit le niveau $1 - \alpha$ choisi. En effet, (2.15) ne peut pas alors être satisfait car on a pour tout α

$$|z_{\alpha/2}| + \sqrt{z_{\alpha/2}^2 + 1} \geq 1.$$

Dans les chapitres suivants, on notera par IC_{h_1} , IC_{h_3} , IC_{h_4} et IC_{h_5} les intervalles de confiance de type (2.9) obtenus avec respectivement les transformations h_1 , h_3 , h_4 et h_5 (on a vu que la transformation h_2 ne permet pas de définir un intervalle de confiance de ce type). De tels intervalles seront dits par ailleurs des intervalles de type IC_h .

2.5 Autres types d'intervalles de confiance

Dans cette section, on présente un rapide survol d'autres méthodes proposées dans la littérature statistique pour produire des intervalles de confiance pour une moyenne, corrects au second ordre.

2.5.1 Méthodes bootstrap

Les méthodes *bootstrap*, c'est-à-dire les méthodes basées sur le concept de rééchantillonnage, ont été introduites par Efron (1979). Elles permettent notamment de construire des intervalles de confiance de plusieurs manières différentes. On s'intéressera ici à trois types d'intervalles de confiance bootstrap pour une moyenne: l'intervalle bootstrap- t , l'intervalle percentile bootstrap et l'intervalle bootstrap BCa. Pour plus de détails, on se référera par exemple à Hall (1992b), Efron et Tibshirani (1993), ou Davison et Hinkley (1997).

Intervalle bootstrap- t

L'intervalle bootstrap- t est un intervalle de type (2.1) où les constantes $a(\alpha)$ et $b(\alpha)$ sont définies à partir des quantiles de $T^* = \sqrt{n}(\bar{X}^* - \bar{X})/S^*$ au lieu des

quantiles de $T = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S$. Les quantités \bar{X}^* et S^* désignent la moyenne et l'écart-type d'un échantillon de taille n tiré avec remise de l'échantillon initial (c'est-à-dire d'un échantillon d'observations indépendantes et identiquement distribuées selon la fonction de répartition empirique de l'échantillon initial). A partir de l'échantillon initial, on tire ainsi un certain nombre B sous-échantillons (par exemple $B = 1000$) et pour chacun d'eux, on calcule la statistique T^* . On pose alors

$$\begin{aligned} a(\alpha) &= \hat{F}_{T^*}^{-1}(1 - \alpha/2) \\ b(\alpha) &= \hat{F}_{T^*}^{-1}(\alpha/2) \end{aligned}$$

où \hat{F}_{T^*} est une estimation de la fonction de répartition de T^* obtenue à partir des B sous-échantillons. En d'autres termes, $a(\alpha)$ et $b(\alpha)$ sont respectivement la $B \cdot (1 - \alpha/2)^{\text{ème}}$ et la $B \cdot (\alpha/2)^{\text{ème}}$ plus grande valeur parmi les T^* obtenus. Lorsque $B \cdot (1 - \alpha/2)$ et $B \cdot (\alpha/2)$ ne sont pas des nombres entiers, on peut les remplacer par $(B + 1 - k)$ et k , où k est la partie entière de $(B + 1) \cdot (\alpha/2)$. Notons encore que S et S^* sont souvent calculés ici avec un dénominateur n plutôt que $n - 1$. L'intervalle bootstrap- t s'avère être correct au second ordre.

Intervalle percentile bootstrap

Pour la construction de l'intervalle percentile bootstrap, on procède de la même manière que pour l'intervalle bootstrap- t , sauf que l'on s'intéresse à la distribution de \bar{X}^* plutôt qu'à celle de T^* . L'intervalle percentile bootstrap est défini par

$$\left[\hat{F}_{\bar{X}^*}^{-1}(\alpha/2); \hat{F}_{\bar{X}^*}^{-1}(1 - \alpha/2) \right]$$

où $\hat{F}_{\bar{X}^*}$ est une estimation de la fonction de répartition de \bar{X}^* obtenue à partir des B sous-échantillons. Autrement dit, les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle percentile bootstrap sont respectivement la $B \cdot (\alpha/2)^{\text{ème}}$ et la $B \cdot (1 - \alpha/2)^{\text{ème}}$ plus grande valeur parmi les X^* obtenus. Lorsque $B \cdot (\alpha/2)$

et $B \cdot (1 - \alpha/2)$ ne sont pas des nombres entiers, on procède comme pour l'intervalle bootstrap- t . Notons toutefois que l'intervalle percentile bootstrap n'est correct qu'au premier ordre et, en ce sens, ne représente pas une amélioration des intervalles de confiance classiques: Cet intervalle a toutefois l'avantage d'être *équivariant par transformation monotone*, c'est-à-dire que si f est une fonction monotone et $[A; B]$ un intervalle de confiance pour μ , alors $[f(A); f(B)]$ est un intervalle de confiance approprié pour $f(\mu)$, et on peut ainsi s'intéresser à une fonction de la moyenne plutôt qu'à la moyenne. Cette propriété n'est pas partagée par les intervalles classiques ainsi que par les intervalles présentés dans cette thèse (pour plus de détails, voir par exemple Efron et Tibshirani, 1993, sections 12.6 et 13.6). Un autre avantage de cet intervalle est qu'il *préserve l'étendue*. Par exemple, lorsque la distribution de la population est exponentielle et que la moyenne est par définition positive, l'intervalle percentile bootstrap ne recouvrira que des valeurs positives.

Intervalle bootstrap BCa

L'intervalle bootstrap BCa (l'abréviation BCa désignant en anglais "Bias Corrected and accelerated") est une amélioration de l'intervalle percentile bootstrap en ce sens qu'il est correct au second ordre, tout en conservant la propriété d'équivariance décrite ci-dessus. L'intervalle bootstrap BCa est défini par

$$\left[\hat{F}_{\bar{X}}^{-1}(\alpha_1); \hat{F}_{\bar{X}}^{-1}(\alpha_2) \right]$$

c'est-à-dire que les bornes inférieures et supérieures sont respectivement la $B \cdot \alpha_1^{ème}$ et la $B \cdot \alpha_2^{ème}$ plus grande valeur parmi les X^* obtenus avec

$$\alpha_1 = \Phi \left(\hat{z}_0 + \frac{\hat{z}_0 - z_{\alpha/2}}{1 - \hat{a}(\hat{z}_0 - z_{\alpha/2})} \right)$$

$$\alpha_2 = \Phi \left(\hat{z}_0 + \frac{\hat{z}_0 + z_{\alpha/2}}{1 - \hat{a}(\hat{z}_0 + z_{\alpha/2})} \right)$$

et

$$\begin{aligned}\hat{z}_0 &= \Phi^{-1}\left(\hat{F}_{\bar{X}}(\bar{X})\right) \quad \left(= \frac{\hat{\gamma}}{6\sqrt{n}} + O_p(n^{-1})\right) \\ \hat{a} &= \frac{\hat{\gamma}}{6\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

L'estimateur \hat{z}_0 est dit un ajustement pour le biais, alors que \hat{a} est une estimation de ce que l'on appelle la constante d'accélération. Hall (1992b, section 3.10) montre que l'intervalle bootstrap BCa correspond à une translation de l'intervalle percentile bootstrap d'une quantité égale à

$$\frac{S\hat{\gamma}}{6n} \left(2 + z_{\alpha/2}^2\right) + O_p(n^{-3/2}) = \frac{S}{\sqrt{n}} \left[\left(2\hat{z}_0 + \hat{a}z_{\alpha/2}^2\right) + O_p(n^{-1})\right]$$

ce qui a le mérite de le rendre correct au second ordre. Le problème de tels intervalles est toutefois que leurs bornes ne sont pas toujours monotones en α .

2.5.2 Méthode de la vraisemblance empirique

La méthode de la vraisemblance empirique a été introduite par Owen (1988) et a été ensuite étudiée par Owen (1990), Hall (1990) et Hall et La Scala (1990). Elle s'inspire des méthodes de construction d'intervalles de confiance basées sur la fonction de vraisemblance. Lorsque l'on connaît la forme de la distribution $F = F(\cdot, \mu)$ de la population, excepté sa moyenne μ , il est possible de construire des intervalles de confiance à partir du rapport de vraisemblance

$$R(\mu_0) = \frac{L(\mu_0)}{L(\hat{\mu})}$$

où $L(\mu_0) = \prod_{i=1}^n dF(X_i, \mu_0)$ est la fonction de vraisemblance de l'échantillon pour $\mu = \mu_0$, et où $\hat{\mu}$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ . Lorsque $\mu = \mu_0$, la quantité $-2 \log R(\mu_0)$ suit en effet une loi du χ^2 avec 1 degré de liberté (sous certaines conditions, voir Wilks, 1938). Il s'en suit

que l'on peut définir un intervalle de confiance pour μ au niveau $1 - \alpha$ par l'ensemble

$$\left\{ \mu_0 : -2 \log R(\mu_0) \leq \chi_{\alpha,1}^2 \right\} = \left\{ \mu_0 : R(\mu_0) \geq \exp\left(-\chi_{\alpha,1}^2/2\right) \right\}$$

où $\chi_{\alpha,1}^2$ est le $(1 - \alpha)$ -quantile d'une loi du chi-deux avec 1 degré de liberté.

Lorsque l'on ne connaît pas la distribution de la population, on ne peut donc pas définir de vraisemblance $L(\mu_0)$. Owen (1988) propose de la remplacer par la *vraisemblance empirique* $L(F_0)$ où F_0 désigne une distribution de probabilité discrète avec les X_i de l'échantillon pour atomes. Si on note w_i la probabilité associée à X_i (pour $i = 1, \dots, n$), on a alors $L(F_0) = \prod_{i=1}^n w_i$ et

$$R(F_0) = \frac{L(F_0)}{L(\hat{F})} = \frac{\prod_{i=1}^n w_i}{\prod_{i=1}^n (1/n)} = \prod_{i=1}^n n w_i$$

où \hat{F} est l'estimateur du maximum de vraisemblance de la distribution F de la population, c'est-à-dire \hat{F} est la fonction de répartition empirique de l'échantillon. Owen (1988) définit un intervalle de confiance pour μ au niveau $1 - \alpha$ par l'ensemble des moyennes μ_0 des distributions F_0 pour lesquelles on a

$$R(F_0) \geq \exp\left(-\chi_{\alpha,1}^2/2\right).$$

Les bornes de l'intervalle de confiance sont donc données par

$$X_L = \sum_{i=1}^n w_{iL} X_i$$

et

$$X_U = \sum_{i=1}^n w_{iU} X_i$$

pour lesquelles on a

$$\prod_{i=1}^n n w_{iL} = \prod_{i=1}^n n w_{iU} = \exp\left(-\chi_{\alpha,1}^2/2\right).$$

Il s'agit donc de calculer les w_i satisfaisant cette condition sachant par ailleurs que $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ et $w_i \geq 0$ (pour $i = 1, \dots, n$). Owen (1988) décrit un

algorithme pour trouver ces bornes. Il s'agit essentiellement de la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Hall et La Scala (1990) ont par ailleurs montré que les bornes de l'intervalle de confiance obtenu sont égales à

$$\bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} \left(-z_{\alpha/2} + \frac{\hat{\gamma}}{6\sqrt{n}} 2z_{\alpha/2}^2 \right) + O_p(n^{-3/2})$$

et

$$\bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} \left(z_{\alpha/2} + \frac{\hat{\gamma}}{6\sqrt{n}} 2z_{\alpha/2}^2 \right) + O_p(n^{-3/2})$$

ce qui implique que cet intervalle n'est pas tout à fait correct au second ordre. Il faudrait pour cela le translater d'une quantité égale à $\hat{\gamma}S/(6n)$ de façon à ce que ses bornes ne diffèrent de celles de IC_h , que d'un terme d'ordre $O_p(n^{-3/2})$.

2.5.3 Méthode des statistiques de comparaison

Hall (1985) propose une autre méthode pour construire un intervalle de confiance correct au second ordre. Elle nécessite des statistiques de comparaison T_0^m dont il s'agit de tabuler les quantiles pour les valeurs désirées de α et pour un grand nombre de m . Ces tables ressembleront typiquement à des tables du chi-deux ou à des tables de Student. L'idée de cette méthode est de remplacer les quantiles z_α ou $t_{\alpha, n-1}$ utilisés habituellement pour les intervalles de type (2.1) par les quantiles de ces statistiques de comparaison, la valeur de m choisi étant déterminée en fonction de l'asymétrie $\hat{\gamma}$ de l'échantillon. Dans le cas d'un intervalle de confiance pour une moyenne, Hall (1995) propose comme T_0^m des statistiques calculées à partir de m réalisations indépendantes de variables exponentielles standardisées. L'avantage de cette méthode est que l'intervalle de confiance obtenu est correct au second ordre *uniformément* en α (ce qui n'est pas le cas des autres intervalles présentés dans cette thèse).

2.6 Conclusion

Les intervalles de confiance de type IC_h basés sur une transformation de la variable T sont de loin les plus simples à calculer parmi les intervalles présentés dans ce chapitre. En effet, les méthodes bootstrap nécessitent la génération d'un grand nombre de sous-échantillons, la méthode de la vraisemblance empirique nécessite la résolution d'un système d'équations non linéaires alors que la méthode des statistiques de comparaison nécessite l'emploi de tables difficilement accessibles. On verra toutefois dans le chapitre suivant que les intervalles de type IC_h présentent dans certains cas des comportements aberrants.

Chapitre 3

Propriétés d'un intervalle de confiance

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, on s'est occupé des propriétés d'équilibrage d'un intervalle de confiance pour une moyenne. En particulier, on s'est intéressé à des intervalles de confiance corrects au second ordre. Dans ce chapitre, on va définir d'autres propriétés que se doivent de satisfaire un intervalle de confiance. Plus précisément, on ne va pas considérer ici un intervalle de confiance comme une quantité aléatoire (dans le sens où les bornes d'un intervalle de confiance sont des variables aléatoires), mais comme un intervalle fixe, calculé à partir d'un échantillon donné. On utilisera ainsi des lettres minuscules à la place de lettres majuscules pour désigner les observations, la moyenne et l'écart-type de cet échantillon.

3.2 Propriétés désirées

On va énoncer ci-dessous des propriétés qu'il est naturel d'exiger d'un intervalle de confiance pour la moyenne μ d'une population (où μ est à priori

n'importe quel nombre réel). On suit en cela les remarques de Kendall et Stuart dans leur fameux ouvrage en trois volumes *The Advanced Theory of Statistics* (1973, vol. 2, p. 114).

Soit donc un intervalle de confiance de la forme $[g, d]$ calculé à partir d'un échantillon de taille n . Les bornes g et d de l'intervalle doivent naturellement dépendre du niveau de confiance $1 - \alpha$ choisi. Voici en outre de quelle manière elles doivent dépendre de α .

- C1 Lorsque $\alpha = 1$, la borne gauche g et la borne droite d de l'intervalle doivent coïncider de telle sorte que l'intervalle soit réduit en un seul point, et que, par conséquent, μ ne soit pas dans l'intervalle.
- C2 Lorsque $\alpha = 0$, la borne gauche g doit être égale à $-\infty$ et la borne droite d à $+\infty$ de telle sorte que l'intervalle recouvre l'ensemble des valeurs possibles pour μ , et que par conséquent μ soit dans l'intervalle.
- C3 Entre ces deux valeurs extrêmes de α , la borne gauche g doit être une fonction croissante de α et la borne droite d une fonction décroissante de α de telle sorte que, si une valeur μ_0 se trouve dans l'intervalle pour une certaine valeur α_1 , elle s'y trouve encore pour une valeur α_2 inférieure à α_1 .

Les bornes g et d de l'intervalle dépendront également de la taille n de l'échantillon. Voici en outre de quelle manière elles doivent dépendre de n .

- C4 La borne gauche g doit être une fonction croissante de n et la borne droite d une fonction décroissante de n de telle sorte que l'intervalle, à un niveau $1 - \alpha$ constant, soit d'autant plus court que n est grand, reflétant ainsi la diminution de l'incertitude lorsque le nombre d'observations augmente.

On a vu au chapitre précédent que dans le but de rendre un intervalle de confiance correct au second ordre, les bornes de l'intervalle g et d pouvaient dépendre aussi de l'asymétrie γ de la population. Les propriétés suivantes nous disent de quelle manière elles doivent dépendre de γ , compte tenu du fait que l'asymétrie de la population γ est de signe opposé à l'asymétrie de la variable aléatoire T (voir chapitre 1).

- C5 lorsque γ est nul, la moyenne de l'échantillon \bar{x} doit être à égale distance des bornes g et d , reflétant ainsi la symétrie de la variable aléatoire T .
- C6 Les bornes g et d doivent être des fonctions croissantes de γ . En particulier, si γ est positif, \bar{x} sera plus proche de la borne gauche g que de la borne droite d et donc l'intervalle étiré vers la droite, reflétant ainsi l'asymétrie négative de la variable aléatoire T . De même, si γ est négatif, \bar{x} sera plus proche de la borne droite d que de la borne gauche g et donc l'intervalle étiré vers la gauche, reflétant ainsi l'asymétrie positive de la variable aléatoire T .

A partir d'un échantillon de n observations x_1, \dots, x_n provenant d'une population de moyenne μ inconnue, on calcule donc la moyenne

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

et l'écart-type

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

afin de pouvoir calculer un intervalle de confiance pour μ au niveau $1 - \alpha$ de forme générale

$$\left[\bar{x} - a(\alpha) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + b(\alpha) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right] \quad (3.1)$$

où $a(\alpha)$ et $b(\alpha)$ sont deux nombres dépendant de α ($0 \leq \alpha \leq 1$). On a vu au chapitre précédent différentes solutions pour définir $a(\alpha)$ et $b(\alpha)$ dans (3.1). Parmi les intervalles de type (3.1), on a notamment les intervalles classiques

IC_t et IC_z , ainsi que les intervalles de type IC_h . Ces derniers dépendent de l'asymétrie γ de la population, ou plus précisément de γ/\sqrt{n} . Si on considère les fonctions $a(\alpha)$ et $b(\alpha)$ dans (3.1) comme des fonctions de α , n et γ , on peut réécrire l'intervalle ainsi

$$\left[\bar{x} - a(\alpha, n, \gamma) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} - b(\alpha, n, \gamma) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right]. \quad (3.2)$$

En considérant des intervalles de type (3.2), les propriétés C1-C6 s'énoncent de la manière suivante:

C1 $a(1, n, \gamma) = b(1, n, \gamma)$

C2 $a(0, n, \gamma) = +\infty$ et $b(0, n, \gamma) = -\infty$

C3 $a(\alpha, n, \gamma)$ décroissante en α et $b(\alpha, n, \gamma)$ croissante en α

C4 $a(\alpha, n, \gamma)/\sqrt{n}$ décroissante en n et $b(\alpha, n, \gamma)/\sqrt{n}$ croissante en n

C5 $a(\alpha, n, 0) = -b(\alpha, n, 0)$

C6 $a(\alpha, n, \gamma)$ et $b(\alpha, n, \gamma)$ décroissantes en γ .

Il est facile de vérifier que les intervalles classiques IC_t et IC_z satisfont les propriétés C1-C5. Comme ils ne dépendent pas de l'asymétrie γ de la population, ils ne satisfont pas strictement C6. Dans la section suivante, on va étudier ces propriétés C1-C6 pour les intervalles de confiance de type IC_h introduits au chapitre précédent.

3.3 Propriétés C1-C6 pour les intervalles IC_h

Pour les intervalles de type IC_h , on a par définition $a(\alpha, n, \gamma) = h^{-1}(z_{\alpha/2})$ et $b(\alpha, n, \gamma) = h^{-1}(-z_{\alpha/2})$. On va considérer les intervalles IC_{h_1} , IC_{h_3} , IC_{h_4} et IC_{h_5} où les transformations h_1 , h_3 , h_4 et h_5 sont définies au chapitre 2.

3.3.1 Propriétés C1-C3

La propriété C1 signifie

$$h^{-1}(z_{1/2}) = h^{-1}(-z_{1/2})$$

ce qui est vérifié quel que soit la transformation inversible h car on a $z_{1/2} = -z_{1/2} = 0$.

Remarquons que le point

$$m = \bar{x} - h^{-1}(0) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

auquel se réduit l'intervalle lorsque $\alpha = 1$ peut être utilisé pour estimer μ . Comme l'a noté Pfanzagl (1979), la variable aléatoire

$$M = \bar{X} - h^{-1}(0) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

(où \bar{X} et S sont les versions aléatoires de \bar{x} et s) est en effet un estimateur non biaisé de μ , par rapport à la médiane, jusqu'à l'ordre $O(n^{-1})$ (si l'intervalle est équilibré jusqu'à cet ordre). Cela veut dire que l'on a

$$\Pr \{ \mu < M \} = 1/2 + O(n^{-1})$$

et

$$\Pr \{ \mu > M \} = 1/2 + O(n^{-1}).$$

Dans le cas de IC_{h_1} et IC_{h_3} , on a par exemple

$$M = \bar{X} + \frac{S\gamma}{6n}.$$

La propriété C2 signifie $h^{-1}(z_0) = +\infty$ et $h^{-1}(-z_0) = -\infty$, ce qui est vérifié pour h_3 et h_4 . La transformation inverse h_5^{-1} n'est pas définie en $-z_0 = -\infty$ et, de ce fait, l'intervalle IC_{h_5} non plus lorsque $\alpha = 0$. Il ne peut donc pas satisfaire C2. Enfin, lorsque $\gamma > 0$ on a $h_1^{-1}(z_0) = h_1^{-1}(-z_0) = -\infty$

alors que lorsque $\gamma < 0$ on a $h_1^{-1}(z_{\alpha/2}) = h_1^{-1}(-z_{\alpha/2}) = +\infty$ et, de ce fait, l'intervalle IC_{h_1} ne satisfait pas non plus C2.

La propriété C3 signifie que $h^{-1}(z_{\alpha/2})$ est décroissante en α c'est-à-dire croissante en $z_{\alpha/2}$ et que $h^{-1}(-z_{\alpha/2})$ est croissante en α c'est-à-dire croissante en $-z_{\alpha/2}$. Ceci est vérifié pour h_3 et h_4 , ainsi que pour h_5 sur le domaine où h_5^{-1} est défini. Par contre, C3 n'est pas vérifié pour IC_{h_1} . Considérons en effet le cas d'une asymétrie positive ($\gamma > 0$). La fonction $h_1^{-1}(z_{\alpha/2})$ est quadratique en $z_{\alpha/2}$ avec un coefficient principal négatif. Elle atteint son maximum en $z_{\alpha/2} = 3\sqrt{n}/2\gamma$. Pour des valeurs supérieures de $z_{\alpha/2}$, cette fonction est donc décroissante en $z_{\alpha/2}$ et C3 n'est pas vérifié. Plus précisément, la borne gauche de IC_{h_1} n'est pas une fonction croissante en α . Dans le cas d'une asymétrie négative ($\gamma < 0$), la fonction $h_1^{-1}(-z_{\alpha/2})$ est quadratique en $-z_{\alpha/2}$ avec un coefficient principal positif. Elle atteint son minimum en $-z_{\alpha/2} = 3\sqrt{n}/2\gamma$. Pour des valeurs inférieures de $-z_{\alpha/2}$, cette fonction est donc décroissante en $z_{\alpha/2}$ et C3 n'est pas vérifié. Plus précisément, la borne droite de IC_{h_1} n'est pas une fonction décroissante en α .

Remarquons que dans le cas d'une asymétrie positive, la borne droite de IC_{h_1} est bien une fonction décroissante de α . En effet, la fonction $h_1^{-1}(-z_{\alpha/2})$ est quadratique en $-z_{\alpha/2}$ avec cette fois-ci un coefficient principal négatif. Elle atteint son maximum en $-z_{\alpha/2} = 3\sqrt{n}/2\gamma$ qui est ici positif et, par conséquent, hors du domaine de définition de $-z_{\alpha/2}$. Sur son domaine de définition, la fonction $h_1^{-1}(-z_{\alpha/2})$ est donc bien croissante en $-z_{\alpha/2}$. De même, dans le cas d'une asymétrie négative, la borne gauche de IC_{h_1} est bien une fonction croissante de α . En effet, la fonction $h_1^{-1}(z_{\alpha/2})$ est quadratique en $z_{\alpha/2}$ avec un coefficient principal positif. Elle atteint son minimum en $z_{\alpha/2} = 3\sqrt{n}/2\gamma$ qui est ici négatif et, par conséquent, hors du domaine de définition de $z_{\alpha/2}$. Sur son domaine de définition, la fonction $h_1^{-1}(z_{\alpha/2})$ est donc bien croissante en $z_{\alpha/2}$.

Ainsi, lorsque l'asymétrie est positive, la borne droite de IC_{h_1} a un comportement adéquat au contraire de sa borne gauche; et lorsque l'asymétrie est

négative, la borne gauche de IC_{h_1} a un comportement adéquat au contraire de sa borne droite. L'idée de notre intervalle de confiance que l'on va définir au chapitre suivant sera de garder la bonne borne de IC_{h_1} et de modifier sa mauvaise borne.

3.3.2 Propriété C4

Considérons tout d'abord la transformation h_3 . Pour que C4 soit satisfait, il faut que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{h_3^{-1}(z_{\alpha/2})}{\sqrt{n}} \right) &= \frac{-z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n^3}} + \frac{\gamma}{6n^2} \\ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{h_3^{-1}(-z_{\alpha/2})}{\sqrt{n}} \right) &= \frac{z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n^3}} + \frac{\gamma}{6n^2}\end{aligned}$$

soient respectivement négative et positive c'est-à-dire que

$$\sqrt{n} \geq \frac{\gamma}{3z_{\alpha/2}} \quad (3.3)$$

$$\sqrt{n} \geq \frac{-\gamma}{3z_{\alpha/2}} \quad (3.4)$$

Pour la transformation h_4 , il faut que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{h_4^{-1}(z_{\alpha/2})}{\sqrt{n}} \right) &= \frac{1}{\sqrt{n^3}} \left[\frac{\left(\frac{\gamma}{6\sqrt{n}} - \frac{z_{\alpha/2}}{2} \right)^3}{\left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \left(z_{\alpha/2} - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} \right) \right)} \right]^{1/3} \\ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{h_4^{-1}(-z_{\alpha/2})}{\sqrt{n}} \right) &= \frac{1}{\sqrt{n^3}} \left[\frac{\left(\frac{\gamma}{6\sqrt{n}} + \frac{z_{\alpha/2}}{2} \right)^3}{\left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \left(-z_{\alpha/2} - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} \right) \right)^2} \right]^{1/3}\end{aligned}$$

soient respectivement négative et positive ce qui est le cas lorsque (3.3) et (3.4) sont vérifiées.

Quant à la transformation h_5 , pour autant que h_5^{-1} soit défini, il faut que

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{h_5^{-1}(z_{\alpha/2})}{\sqrt{n}} \right) = \frac{\frac{\gamma}{6n^2} - \frac{z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n^3}}}{\frac{2\gamma}{3\sqrt{n}} \left(z_{\alpha/2} - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} \right) + 1}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{h_5^{-1}(-z_{\alpha/2})}{\sqrt{n}} \right) = \frac{\frac{\gamma}{6n^2} + \frac{z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n^3}}}{\frac{2\gamma}{3\sqrt{n}} \left(-z_{\alpha/2} - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} \right) + 1}$$

soient respectivement négative et positive ce qui est également le cas lorsque (3.3) et (3.4) sont vérifiés (car lorsque h_5^{-1} est défini, le dénominateur des fonctions ci-dessus est toujours positif).

Ainsi, les intervalles de confiance IC_{h_3} , IC_{h_4} et IC_{h_5} satisfont tous trois C4 si (3.3) et (3.4) sont vérifiés. Remarquons que lorsque l'asymétrie est positive, (3.4) est vérifié et donc les bornes droites de ces intervalles sont bien décroissantes en n , alors que lorsque l'asymétrie est négative, (3.3) est vérifié et donc les bornes gauches de ces intervalles sont bien croissantes en n . Pour que l'autre borne de ces intervalles ait également un comportement adéquat par rapport à n (sur l'ensemble des $n \geq 3$), il faut que

$$|\gamma| \leq 3\sqrt{3}z_{\alpha/2}.$$

Par exemple, lorsque $\alpha = 0.05, 0.1, 0.2, 0.4$ et 0.8 , il faut respectivement que $|\gamma|$ soit inférieur à 10.2, 8.5, 6.6, 4.4 et 1.3. Autrement dit, C4 est satisfait si l'asymétrie $|\gamma|$ n'est pas trop importante (et si α n'est pas trop grand).

En ce qui concerne la transformation h_1 , on doit avoir que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{h_1^{-1}(z_{\alpha/2})}{\sqrt{n}} \right) &= \frac{-z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n^3}} + \frac{\gamma}{n^2} \frac{(2z_{\alpha/2}^2 + 1)}{6} \\ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{h_1^{-1}(-z_{\alpha/2})}{\sqrt{n}} \right) &= \frac{z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n^3}} + \frac{\gamma}{n^2} \frac{(2z_{\alpha/2}^2 + 1)}{6} \end{aligned}$$

soient respectivement positive et négative, c'est à dire que

$$\sqrt{n} \geq \frac{\gamma}{3} \frac{(2z_{\alpha/2}^2 + 1)}{z_{\alpha/2}} \quad (3.5)$$

$$\sqrt{n} \geq \frac{-\gamma}{3} \frac{(2z_{\alpha/2}^2 + 1)}{z_{\alpha/2}}. \quad (3.6)$$

Ici aussi on remarque que, lorsque l'asymétrie est positive, (3.6) est vérifié et donc la borne droite de IC_{h_1} est bien décroissante en n , alors que, lorsque

l'asymétrie est négative, (3.5) est vérifié et donc la borne gauche de IC_{h_1} est bien croissante en n . Pour que l'autre borne de IC_{h_1} ait également un comportement adéquat par rapport à n , il faut que (en considérant des échantillons de taille minimale $n = 3$)

$$|\gamma| \leq 3\sqrt{3} \frac{z_{\alpha/2}}{(2z_{\alpha/2}^2 + 1)}.$$

Par exemple, lorsque $\alpha = 0.05, 0.1, 0.2, 0.4$ et 0.8 , il faut respectivement que $|\gamma|$ soit inférieur à 1.2, 1.3, 1.6, 1.8 et 1.2. La propriété C4 est donc moins souvent remplie pour IC_{h_1} que pour IC_{h_3}, IC_{h_4} et IC_{h_5} .

3.3.3 Propriétés C5-C6

La propriété C5 signifie que, lorsque $\gamma = 0$, on ait

$$h^{-1}(-z_{\alpha/2}) = -h^{-1}(z_{\alpha/2}).$$

Comme toutes les transformations h considérées se réduisent à l'identité lorsque $\gamma = 0$, C5 est bien vérifié.

Pour que l'intervalle IC_{h_3} satisfasse C6, il faut que

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} h_3^{-1}(z_{\alpha/2}) = \frac{\partial}{\partial \gamma} h_3^{-1}(-z_{\alpha/2}) = \frac{-1}{6\sqrt{n}}$$

soient négatives, ce qui est effectivement le cas. De même, l'intervalle IC_{h_1} satisfait aussi C6 puisque

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} h_1^{-1}(z_{\alpha/2}) = \frac{\partial}{\partial \gamma} h_1^{-1}(-z_{\alpha/2}) = \frac{-(2z_{\alpha/2}^2 + 1)}{6\sqrt{n}}$$

sont également négatives.

En ce qui concerne IC_{h_4} , on a pour une valeur z quelconque

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} h_4^{-1}(z) = \frac{-3\sqrt{n}}{\gamma^2} \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \left(z - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} \right) \right)^{1/3}$$

$$+\frac{\sqrt{n}}{\gamma} \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \left(z - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}}\right)\right)^{-2/3} \left(\frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{\gamma}{3n}\right) + \frac{3\sqrt{n}}{\gamma^2}. \quad (3.7)$$

Lorsque l'asymétrie est positive ($\gamma > 0$) et, en considérant $z = -z_{\alpha/2}$ dans (3.7), cette fonction est négative si

$$\left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \left(z - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}}\right)\right)^2 - \left(1 + \frac{\gamma}{3\sqrt{n}} \left(2z - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}}\right)\right)^3 \leq 0$$

ou encore si

$$\begin{aligned} (9 + 18z^2) + (6z + 16z^3) \frac{\gamma}{\sqrt{n}} - (1 + 4z^2) \left(\frac{\gamma}{\sqrt{n}}\right)^2 \\ + \frac{1}{3} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{n}}\right)^3 - \frac{1}{108} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{n}}\right)^4 \geq 0. \end{aligned}$$

Le terme de gauche de cette expression est une fonction décroissante en γ qui tend vers $-\infty$ lorsque γ tend vers $+\infty$. Cela veut dire qu'au delà d'une certaine valeur de γ , la borne droite de IC_{h_4} n'est pas une fonction croissante de γ et, de ce fait, C6 n'est pas satisfait. Dans le cas d'une asymétrie négative $\gamma < 0$, on rencontre une situation similaire en considérant $z = z_{\alpha/2}$ dans (3.7). Ainsi, en deçà d'une certaine valeur de γ , la borne gauche de IC_{h_4} n'est pas une fonction croissante de γ et, de ce fait, C6 n'est pas satisfait. On peut calculer par exemple que lorsque $\alpha = 0.001, 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4$ et 0.8 , la propriété C6 n'est pas satisfaite à partir de valeurs de $|\gamma/\sqrt{n}|$ respectivement égales à 0.34, 0.43, 0.56, 0.65, 0.81, 1.13 et 2.09. Plus grave, il est clair, de par la définition de h_4^{-1} , que l'intervalle IC_{h_4} tend à se réduire au seul point \bar{x} lorsque l'asymétrie $|\gamma|$ tend vers l'infini.

En ce qui concerne IC_{h_5} , on a pour une valeur z quelconque

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} h_5^{-1}(z) = \frac{-3\sqrt{n}}{2\gamma^2} \log \left(\frac{2\gamma}{3\sqrt{n}} \left(z - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} \right) + 1 \right) + \frac{3\sqrt{n}}{2\gamma} \frac{\frac{2z}{3\sqrt{n}} - \frac{2\gamma}{9n}}{\left(\frac{2\gamma}{3\sqrt{n}} \left(z - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} \right) + 1 \right)}$$

qui est une fonction négative à la fois pour $z = -z_{\alpha/2}$ et pour $z = z_{\alpha/2}$ sur l'ensemble du domaine de définition de h_5^{-1} . L'intervalle IC_{h_5} satisfait donc C6 sur ce domaine.

3.4 Conclusion

Parmi les intervalles de confiance de type IC_h introduits au chapitre précédent, l'intervalle IC_{h_1} a les graves défauts de ne pas satisfaire les propriétés C2 et C3. L'intervalle IC_{h_5} se comporte bien par rapport aux propriétés C1-C6 sur son domaine de définition, mais on a vu que ce dernier est restreint. L'intervalle IC_{h_3} satisfait lui aussi ces propriétés, mais ce n'est pas un intervalle de confiance correct au second ordre. Incontestablement, c'est l'intervalle IC_{h_4} qui s'impose parmi les intervalles de type IC_h . Malheureusement il ne satisfait pas C6, et il possède le défaut de se réduire en un seul point lorsque l'asymétrie augmente.

Chapitre 4

Intervalle de confiance adaptatif

4.1 Introduction

Etant donné la moyenne \bar{X} et l'écart-type S d'un échantillon de taille n , on a considéré au chapitre 2 des intervalles de confiance pour la moyenne μ de la population de type

$$IC_{a,b} = \left[\bar{X} - a(\alpha) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} - b(\alpha) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

où $a(\alpha)$ et $b(\alpha)$ étaient choisis de telle sorte que ces intervalles soient de niveau $1 - \alpha$. On avait ainsi

$$\Pr \{ \mu \in IC_{a,b} \} = F_T(a(\alpha)) - F_T(b(\alpha)) = 1 - \alpha$$

où $F_T(x)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire $T = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S$. On a ensuite considéré des intervalles de confiance équilibrés au niveau $1 - \alpha$, c'est-à-dire tels que

$$\Pr \{ \mu < IC_{a,b} \} = \Pr \{ \mu > IC_{a,b} \} = \alpha/2$$

ce qui nous donnait comme solution pour $a(\alpha)$ et $b(\alpha)$

$$a(\alpha) = F_T^{-1}(1 - \alpha/2)$$

$$b(\alpha) = F_T^{-1}(\alpha/2).$$

Lorsque l'on n'impose pas cette contrainte d'équilibrage, la solution pour $a(\alpha)$ et $b(\alpha)$ n'est toutefois pas unique. On peut en effet poser

$$a(\alpha) = F_T^{-1}(1 - \lambda\alpha)$$

$$b(\alpha) = F_T^{-1}((1 - \lambda)\alpha)$$

où $0 \leq \lambda \leq 1$. On a alors une famille d'intervalles de confiance pour μ au niveau $1 - \alpha$ pour lesquels on a

$$\Pr\{\mu < IC_{a,b}\} = \lambda\alpha$$

$$\Pr\{\mu > IC_{a,b}\} = (1 - \lambda)\alpha$$

avec toujours cependant

$$\Pr\{\mu \in IC_{a,b}\} = 1 - \alpha.$$

Le cas $\lambda = 1/2$ correspond à un intervalle de confiance équilibré. Lorsque $\lambda = 0$, on obtient un intervalle non borné à gauche de type

$$\left[-\infty; \bar{X} - b(\alpha) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

et lorsque $\lambda = 1$, on obtient un intervalle non borné à droite de type

$$\left[\bar{X} - a(\alpha) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}; +\infty\right].$$

Une approximation de tels intervalles peut s'obtenir en posant

$$a(\alpha) = z_{\lambda\alpha}$$

$$b(\alpha) = -z_{(1-\lambda)\alpha}.$$

On a alors la famille d'intervalles décrite par

$$IC_\lambda = \left[\bar{X} - z_{\lambda\alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{(1-\lambda)\alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]. \quad (4.1)$$

Notons que, quel que soit la valeur de λ , l'intervalle IC_λ contient toujours le sous-intervalle (lorsque $\alpha \leq 1/2$)

$$\left[\bar{X} - z_\alpha \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_\alpha \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right].$$

Dans le cas d'une population symétrique, on a

$$\Pr \{ \mu < IC_\lambda \} = \lambda\alpha + O(n^{-1}) \quad (4.2)$$

$$\Pr \{ \mu > IC_\lambda \} = (1 - \lambda)\alpha + O(n^{-1}). \quad (4.3)$$

Dans le cas d'une population asymétrique, on a par contre

$$\Pr \{ \mu < IC_\lambda \} = \lambda\alpha + O(n^{-1/2}) \quad (4.4)$$

$$\Pr \{ \mu > IC_\lambda \} = (1 - \lambda)\alpha + O(n^{-1/2}). \quad (4.5)$$

Ces résultats s'obtiennent en utilisant les premiers termes d'une expansion d'Edgeworth de T comme on l'a fait au chapitre 2.

Dans les cas symétriques, par (4.2) et (4.3), l'intervalle (4.1) est ainsi équilibré jusqu'à l'ordre $O(n^{-1})$ pour $\lambda = 1/2$. Dans les cas asymétriques, l'idée centrale de cette notre thèse est de soutenir que, pour une valeur bien choisie de λ , les probabilités (4.4) et (4.5) sont peut-être égales à $\alpha/2 + O(n^{-1})$ et que l'intervalle (4.1) pourrait donc être équilibré jusqu'à l'ordre $O(n^{-1})$ pour cette valeur particulière de λ .

On va ainsi définir un paramètre g , dépendant de la taille n de l'échantillon et de l'asymétrie γ de la population, tel que en posant $\lambda = g$ dans (4.1), l'intervalle de confiance pour μ au niveau $1 - \alpha$ défini par

$$IC_g = \left[\bar{X} - z_{g\alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{(1-g)\alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right] \quad (4.6)$$

soit équilibré jusqu'à l'ordre $O(n^{-1})$, c'est-à-dire correct au second ordre, dans les cas symétriques comme dans les cas asymétriques. En particulier, lorsque la population est symétrique, il suffira de poser $g = 1/2$ (on aura ainsi $IC_g = IC_z$). Lorsque la population est asymétrique, il faudra que le $\lambda\alpha + O(n^{-1/2})$ de (4.4) et le $(1 - \lambda)\alpha + O(n^{-1/2})$ de (4.5) deviennent du $\alpha/2 + O(n^{-1})$ lorsque $\lambda = g$. On dira de cet intervalle qu'il est *adaptatif* par rapport à l'asymétrie de la population dans le sens où sa définition s'adapte selon l'importance de cette asymétrie. On va voir dans la section suivante comment il est possible de définir ce paramètre g .

4.2 Définition de l'intervalle IC_g

Notre idée est de déterminer le paramètre g de telle sorte que l'une des bornes de IC_g coïncide avec l'une des bornes d'un intervalle de type IC_h introduits au chapitre 2. Si on veut identifier la borne droite de IC_g avec celle de IC_h , on doit choisir le g tel que

$$\bar{X} + z_{(1-g)\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} = \bar{X} - h^{-1}(-z_{\alpha/2}) \frac{S}{\sqrt{n}}$$

c'est-à-dire tel que

$$z_{(1-g)\alpha} = -h^{-1}(-z_{\alpha/2}).$$

Cela nous donne la solution

$$g = 1 - \frac{\Phi(h^{-1}(-z_{\alpha/2}))}{\alpha}. \quad (4.7)$$

Si on veut identifier la borne gauche de IC_g avec celle de IC_h , on doit choisir le g tel que

$$\bar{X} - z_{g\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} = \bar{X} - h^{-1}(z_{\alpha/2}) \frac{S}{\sqrt{n}}$$

c'est-à-dire tel que

$$z_{g\alpha} = h^{-1}(z_{\alpha/2}).$$

Cela nous donne la solution

$$\begin{aligned} g &= \frac{1 - \Phi\left(h^{-1}(z_{\alpha/2})\right)}{\alpha} \\ &= \frac{\Phi\left(-h^{-1}(z_{\alpha/2})\right)}{\alpha}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Il faut choisir une transformation h tel que l'on ait avec les définitions (4.7) ou (4.8)

$$0 \leq g \leq 1.$$

En utilisant la définition (4.7), on a

$$\begin{aligned} 0 \leq g \leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 \leq \Phi\left(h^{-1}(-z_{\alpha/2})\right) \leq \alpha \\ \Leftrightarrow -\infty = \Phi^{-1}(0) \leq h^{-1}(-z_{\alpha/2}) \leq \Phi^{-1}(\alpha) = -z_{\alpha} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$0 \leq g \leq 1 \Leftrightarrow h^{-1}(-z_{\alpha/2}) \leq -z_{\alpha}$$

ou de manière équivalente

$$0 \leq g \leq 1 \Leftrightarrow h(-z_{\alpha}) \geq -z_{\alpha/2}. \quad (4.9)$$

En utilisant la définition (4.8), on a

$$\begin{aligned} 0 \leq g \leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 \leq \Phi\left(-h^{-1}(z_{\alpha/2})\right) \leq \alpha \\ \Leftrightarrow -\infty = \Phi^{-1}(0) \leq -h^{-1}(z_{\alpha/2}) \leq \Phi^{-1}(\alpha) = -z_{\alpha} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$0 \leq g \leq 1 \Leftrightarrow h^{-1}(z_{\alpha/2}) \geq z_{\alpha}$$

ou de manière équivalente

$$0 \leq g \leq 1 \Leftrightarrow h(z_\alpha) \leq z_{\alpha/2}. \quad (4.10)$$

Etant donné que la transformation h_2 n'est pas inversible, que h_5^{-1} n'est pas toujours défini et que l'intervalle IC_{h_3} ne mène pas à des intervalles de confiance corrects au second ordre, on va tout d'abord restreindre notre attention aux transformations h_1 et h_4 .

Comme $h_4(-z_\alpha)$ et $h_4(z_\alpha)$ tendent respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$ lorsque $|\gamma/\sqrt{n}|$ tend vers l'infini et $\alpha < 1/2$, il est possible d'avoir simultanément

$$h_4(-z_\alpha) < -z_{\alpha/2}$$

et

$$h_4(z_\alpha) > z_{\alpha/2}$$

ce qui implique que ni la définition (4.7), ni la définition (4.8), ne donne une valeur de g comprise entre 0 et 1 par respectivement (4.9) et (4.10). Cela est lié au fait que l'intervalle IC_{h_4} tend à se réduire au seul point \bar{X} lorsque l'asymétrie augmente et, de ce fait lorsque celle-ci est suffisamment grande, IC_{h_4} est compris dans l'intervalle

$$\left[\bar{X} - z_\alpha \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_\alpha \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right],$$

qui lui-même on l'a vu est compris dans IC_g (lorsque $\alpha \leq 1/2$). Il est dans ce cas impossible de faire coïncider l'une des bornes de IC_{h_4} avec l'une des bornes de IC_g . On abandonne ainsi l'idée d'utiliser la transformation h_4 pour définir g .

Considérons à présent la transformation h_1 . Lorsque $\gamma \geq 0$, on a

$$h_1(-z_\alpha) = -z_\alpha + \frac{\gamma}{\sqrt{n}} + \frac{\gamma z_\alpha^2}{3\sqrt{n}} \geq -z_\alpha \quad (> -z_{\alpha/2})$$

et ainsi en utilisant la définition (4.7) de g avec $h = h_1$ on a par (4.9)

$$0 \leq g \leq 1.$$

Plus précisément, comme

$$1/2 \leq g \leq 1 \Leftrightarrow h(-z_{\alpha/2}) \geq -z_{\alpha/2},$$

et comme $h_1(-z_{\alpha/2}) \geq -z_{\alpha/2}$, on a

$$1/2 \leq g \leq 1.$$

Lorsque $\gamma \leq 0$, on a

$$h_1(z_{\alpha}) = z_{\alpha} + \frac{\gamma}{\sqrt{n}} + \frac{\gamma z_{\alpha}^2}{3\sqrt{n}} \leq z_{\alpha} \quad (< z_{\alpha/2})$$

et ainsi en utilisant la définition (4.8) de g avec $h = h_1$ on a par (4.10)

$$0 \leq g \leq 1.$$

Plus précisément, comme

$$0 \leq g \leq 1/2 \Leftrightarrow h(z_{\alpha/2}) \leq z_{\alpha/2},$$

et comme $h_1(z_{\alpha/2}) \leq z_{\alpha/2}$, on a

$$0 \leq g \leq 1/2.$$

Il est donc possible d'identifier la borne droite de IC_g avec celle de IC_{h_1} lorsque l'asymétrie est positive. De même, il est possible d'identifier la borne gauche de IC_g avec celle de IC_{h_1} lorsque l'asymétrie est négative. Il s'agit certainement d'une bonne idée car comme on l'a vu au chapitre 3, la borne droite de IC_{h_1} a un comportement adéquat (par rapport à α) seulement lorsque l'asymétrie est positive alors que la borne gauche de IC_{h_1} a un comportement adéquat (par rapport à α) seulement lorsque l'asymétrie est négative. En définissant IC_g de cette manière, on garde la bonne borne de IC_{h_1} et on modifie sa mauvaise borne.

L'intervalle adaptatif que l'on propose dans cette thèse et que l'on étudie dans ce chapitre est donc l'intervalle (4.6) avec lorsque $\gamma \geq 0$ (et $\alpha > 0$)

$$\begin{aligned} g &= 1 - \frac{\Phi\left(h_1^{-1}(-z_{\alpha/2})\right)}{\alpha} \\ &= 1 - \frac{\Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}}\left(2z_{\alpha/2}^2 + 1\right)\right)}{\alpha} \end{aligned} \quad (4.11)$$

et lorsque $\gamma \leq 0$ (et $\alpha > 0$)

$$\begin{aligned} g &= \frac{1 - \Phi\left(h_1^{-1}(z_{\alpha/2})\right)}{\alpha} = \frac{\Phi\left(-h_1^{-1}(z_{\alpha/2})\right)}{\alpha} \\ &= \frac{1 - \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}}\left(2z_{\alpha/2}^2 + 1\right)\right)}{\alpha} \\ &= \frac{\Phi\left(-z_{\alpha/2} + \frac{\gamma}{6\sqrt{n}}\left(2z_{\alpha/2}^2 + 1\right)\right)}{\alpha}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Le cas $\gamma = 0$ nous donne $g = 1/2$ en utilisant (4.11) ou (4.12) et on a alors $IC_g = IC_z$. Pour le cas $\alpha = 0$, on a $z_{g\alpha} = z_{(1-g)\alpha} = z_0 = +\infty$ et donc $IC_g = [-\infty; +\infty]$ sans avoir besoin de définir g .

Avant de vérifier qu'il satisfait les propriétés C1-C6 d'un intervalle de confiance définies au chapitre 3, on va prouver, dans la section suivante que notre intervalle IC_g est bien un intervalle de confiance pour μ équilibré jusqu'à l'ordre $O(n^{-1})$, c'est-à-dire correct au second ordre.

4.3 Equilibrage de l'intervalle IC_g

On va démontrer dans le théorème suivant que IC_g est un intervalle de confiance pour μ au niveau $1 - \alpha$, équilibré jusqu'à l'ordre $O(n^{-1})$ lorsque $\alpha \leq 1/2$. Il faut donc voir que l'on a

$$\Pr\{\mu > IC_g\} = \alpha/2 + O(n^{-1})$$

et

$$\Pr\{\mu < IC_g\} = \alpha/2 + O(n^{-1}).$$

On va se concentrer sur le cas d'une asymétrie positive $\gamma \geq 0$ (le cas d'une asymétrie négative étant tout à fait similaire). Comme la borne droite de IC_g est la même que celle de IC_{h_1} , et comme IC_{h_1} est un intervalle de confiance pour μ au niveau $1 - \alpha$ équilibré jusqu'à l'ordre $O(n^{-1})$, on a bien

$$\Pr \{ \mu > IC_g \} = \Pr \{ \mu > IC_{h_1} \} = \alpha/2 + O(n^{-1}).$$

Il reste donc à démontrer que l'on retrouve le même résultat pour $\Pr \{ \mu < IC_g \}$. Cela sera la conséquence du Théorème 1 ci-dessous où l'on prouve que

$$z_{g\alpha} = h_1^{-1}(z_{\alpha/2}) + O(n^{-1}).$$

On aura alors que la borne inférieure de IC_g

$$\begin{aligned} \bar{X} - z_{g\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} &= \bar{X} - \left(h_1^{-1}(z_{\alpha/2}) + O(n^{-1}) \right) \frac{S}{\sqrt{n}} \\ &= \bar{X} - h_1^{-1}(z_{\alpha/2}) \frac{S}{\sqrt{n}} + O_p(n^{-3/2}) \end{aligned}$$

ne diffère de la borne inférieure de IC_{h_1} que d'un terme d'ordre $O_p(n^{-3/2})$. Or, si les bornes inférieures B_1 et B_2 de deux intervalles IC_1 et IC_2 pour une moyenne μ sont telles que l'on ait

$$B_1 = B_2 + O_p(n^{-\frac{r+1}{2}}),$$

on a alors (voir par exemple Hall, 1992b, section 3.5)

$$\Pr \{ \mu < IC_1 \} = \Pr \{ \mu < IC_2 \} + O(n^{-r/2}).$$

On aura donc

$$\Pr \{ \mu < IC_g \} = \Pr \{ \mu < IC_{h_1} \} + O(n^{-1}).$$

Or, comme IC_{h_1} est équilibré jusqu'à l'ordre $O(n^{-1})$ et que par conséquent

$$\Pr \{ \mu < IC_{h_1} \} = \alpha/2 + O(n^{-1}),$$

on aura finalement

$$\Pr \{ \mu < IC_g \} = \alpha/2 + O(n^{-1}).$$

Note. Dans la preuve du théorème suivant, on utilise plusieurs fois le théorème des accroissements finis, démontrant que lorsque f est une fonction réelle dérivable, on a pour tout $h > 0$

$$f(x - h) = f(x) - h \cdot f'(\xi)$$

où ξ est dans l'intervalle $[x - h; x]$ et

$$f(x + h) = f(x) + h \cdot f'(\xi)$$

où ξ est dans l'intervalle $[x; x + h]$.

Théorème 1. Dans le cas où $\alpha \leq 1/2$ et $\gamma \geq 0$, on a

$$z_{g\alpha} = h_1^{-1}(z_{\alpha/2}) + O(n^{-1}).$$

Preuve. On définit tout d'abord la constante positive

$$k = \frac{\gamma \cdot (2z_{\alpha/2}^2 + 1)}{6}.$$

Par définition, on a donc (voir chapitre 2)

$$\begin{aligned} h_1^{-1}(z_{\alpha/2}) &= z_{\alpha/2} - \frac{\gamma \cdot (2z_{\alpha/2}^2 + 1)}{6\sqrt{n}} \\ &= z_{\alpha/2} - \frac{k}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

D'autre part, en utilisant la définition (4.11) de g , on a

$$\begin{aligned} z_{g\alpha} &= \Phi^{-1}(1 - g\alpha) \\ &= \Phi^{-1}\left(1 - \left(1 - \frac{\Phi(h_1^{-1}(-z_{\alpha/2}))}{\alpha}\right)\alpha\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi^{-1} \left(1 - \alpha + \Phi \left(h_1^{-1}(-z_{\alpha/2}) \right) \right) \\
&= \Phi^{-1} \left(1 - \alpha + \Phi \left(-z_{\alpha/2} - \frac{\gamma \cdot (2z_{\alpha/2}^2 + 1)}{6\sqrt{n}} \right) \right) \\
&= \Phi^{-1} \left(1 - \alpha + \Phi \left(-z_{\alpha/2} - \frac{k}{\sqrt{n}} \right) \right).
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème des accroissements finis, on obtient

$$\begin{aligned}
z_{g\alpha} &= \Phi^{-1} \left(1 - \alpha + \Phi \left(-z_{\alpha/2} \right) - \frac{k}{\sqrt{n}} \cdot \phi(\xi) \right) \\
&= \Phi^{-1} \left(1 - \alpha/2 - \frac{k}{\sqrt{n}} \cdot \phi(\xi) \right).
\end{aligned}$$

avec

$$\xi \in \left[-z_{\alpha/2} - \frac{k}{\sqrt{n}}; -z_{\alpha/2} \right]$$

et où $\phi(x) = \Phi'(x)$ est une fonction strictement positive. En utilisant à nouveau le théorème des accroissements finis, et en rappelant que

$$(\Phi^{-1})'(x) = \frac{1}{\phi(\Phi^{-1}(x))},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
z_{g\alpha} &= \Phi^{-1} \left(1 - \alpha/2 \right) - \frac{k}{\sqrt{n}} \cdot \phi(\xi) \cdot \frac{1}{\phi(\eta)} \\
&= z_{\alpha/2} - \frac{k}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\phi(\xi)}{\phi(\eta)}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

avec

$$\eta \in \left[\Phi^{-1} \left(1 - \alpha/2 - \frac{k}{\sqrt{n}} \cdot \phi(\xi) \right); \Phi^{-1} \left(1 - \alpha/2 \right) \right] = [z_{g\alpha}; z_{\alpha/2}].$$

Par (4.13) et (4.14), on a ainsi

$$z_{g\alpha} - h_1^{-1}(z_{\alpha/2}) = \frac{k}{\sqrt{n}} \cdot \left(1 - \frac{\phi(\xi)}{\phi(\eta)} \right). \tag{4.15}$$

Il s'agit à présent d'étudier le ratio $\phi(\xi)/\phi(\eta)$ qui apparaît dans (4.15).

Comme on suppose $\gamma \geq 0$, on a $g \geq 1/2$ et donc

$$z_{g\alpha} \leq z_{\alpha/2}.$$

De plus, comme on suppose $\alpha \leq 1/2$, on a $g\alpha \leq 1/2$ et donc $z_{g\alpha} \geq 0$. Par conséquent, on retrouve la situation suivante

$$|z_{g\alpha}| \leq |\eta| \leq |z_{\alpha/2}| = |-z_{\alpha/2}| \leq |\xi| \leq \left| -z_{\alpha/2} - \frac{k}{\sqrt{n}} \right| \quad (4.16)$$

et comme $\phi(x)$ est une fonction paire et décroissante sur l'ensemble des $x \geq 0$, on a

$$\phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{k}{\sqrt{n}}\right) \leq \phi(\xi) \leq \phi(-z_{\alpha/2}) = \phi(z_{\alpha/2}) \leq \phi(\eta) \leq \phi(z_{g\alpha}). \quad (4.17)$$

En particulier, on a par (4.17)

$$0 \leq 1 - \frac{\phi(\xi)}{\phi(\eta)} \leq 1 - \frac{\phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{k}{\sqrt{n}}\right)}{\phi(z_{g\alpha})}.$$

En utilisant le théorème des accroissements finis, on obtient

$$1 - \frac{\phi(\xi)}{\phi(\eta)} \leq 1 - \frac{\phi\left(-z_{\alpha/2}\right) - \frac{k}{\sqrt{n}} \cdot \phi'(\xi_2)}{\phi(z_{g\alpha})}$$

où ξ_2 se situe dans le même intervalle que ξ . On a par ailleurs en utilisant (4.14) et le théorème des accroissements finis

$$\begin{aligned} \phi(-z_{\alpha/2}) &= \phi(z_{\alpha/2}) \\ &= \phi\left(z_{g\alpha} + \frac{k}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\phi(\xi)}{\phi(\eta)}\right) \\ &= \phi(z_{g\alpha}) + \frac{k}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\phi(\xi)}{\phi(\eta)} \cdot \phi'(\eta_2) \end{aligned}$$

où η_2 se situe dans le même intervalle que η . On en conclut

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\phi(\xi)}{\phi(\eta)} &\leq 1 - \frac{\phi(z_{g\alpha})}{\phi(z_{g\alpha})} - \frac{\frac{k}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\phi(\xi)}{\phi(\eta)} \cdot \phi'(\eta_2)}{\phi(z_{g\alpha})} + \frac{\frac{k}{\sqrt{n}} \cdot \phi'(\xi_2)}{\phi(z_{g\alpha})} \\ &= \frac{\frac{k}{\sqrt{n}}}{\phi(z_{g\alpha})} \left(\phi'(\xi_2) - \frac{\phi(\xi)}{\phi(\eta)} \phi'(\eta_2) \right). \end{aligned}$$

En rappelant que

$$\phi'(x) = -x\phi(x),$$

on obtient

$$1 - \frac{\phi(\xi)}{\phi(\eta)} \leq \frac{\frac{k}{\sqrt{n}}}{\phi(z_{g\alpha})} \left(-\xi_2 \cdot \phi(\xi_2) + \frac{\phi(\xi)}{\phi(\eta)} \eta_2 \cdot \phi(\eta_2) \right).$$

Comme on a par (4.17) $\phi(\xi)/\phi(\eta) \leq 1$, on obtient finalement

$$1 - \frac{\phi(\xi)}{\phi(\eta)} \leq \frac{\frac{k}{\sqrt{n}}}{\phi(z_{g\alpha})} (-\xi_2 \cdot \phi(\xi_2) + \eta_2 \cdot \phi(\eta_2)).$$

Mais ξ_2 se situe dans le même intervalle que ξ et η_2 se situe dans le même intervalle que η . On a alors de façon semblable à (4.16) et (4.17)

$$|z_{g\alpha}| \leq |\eta_2| \leq |z_{\alpha/2}| = |-z_{\alpha/2}| \leq |\xi_2| \leq \left| -z_{\alpha/2} - \frac{k}{\sqrt{n}} \right| \quad (4.18)$$

et

$$\phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{k}{\sqrt{n}}\right) \leq \phi(\xi_2) \leq \phi(-z_{\alpha/2}) = \phi(z_{\alpha/2}) \leq \phi(\eta_2) \leq \phi(z_{g\alpha}). \quad (4.19)$$

Par (4.19), on a

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\phi(\xi)}{\phi(\eta)} &\leq \frac{\frac{k}{\sqrt{n}}}{\phi(z_{g\alpha})} (-\xi_2 \cdot \phi(z_{g\alpha}) + \eta_2 \cdot \phi(z_{g\alpha})) \\ &= \frac{k}{\sqrt{n}} (-\xi_2 + \eta_2). \end{aligned}$$

Par (4.18), on a (ξ_2 étant négatif, et donc $-\xi_2$ positif)

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\phi(\xi)}{\phi(\eta)} &\leq \frac{k}{\sqrt{n}} \left(\left(z_{\alpha/2} + \frac{k}{\sqrt{n}} \right) + z_{\alpha/2} \right) \\ &= \frac{2z_{\alpha/2} \cdot k}{\sqrt{n}} + \frac{k^2}{n}. \end{aligned}$$

On en conclut que

$$1 - \frac{\phi(\xi)}{\phi(\eta)} = O(n^{-1/2})$$

et ainsi la différence $z_{g\alpha} - h_1^{-1}(z_{\alpha/2})$ dans (4.15) vaut

$$z_{g\alpha} - h_1^{-1}(z_{\alpha/2}) = \frac{k}{\sqrt{n}} \cdot O(n^{-1/2}) = O(n^{-1}) \quad \square$$

4.4 Propriétés C1-C6 pour l'intervalle IC_g

On va voir dans ce qui suit le comportement de IC_g par rapport aux propriétés C1-C6 d'un intervalle de confiance définies au chapitre 3. Comme on l'a fait au chapitre 3, on adopte ici les notations \bar{x} et s pour la moyenne et l'écart-type d'un échantillon de taille n . On considère ainsi pour un échantillon donné l'intervalle fixe

$$IC_g = \left[\bar{x} - z_{g\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{(1-g)\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right].$$

4.4.1 Propriétés C1-C3

Lorsque $\alpha = 1$, on a

$$z_{(1-g)\alpha} = z_{1-g} = -z_g = -z_{g\alpha}$$

de telle sorte que l'intervalle IC_g est réduit au seul point

$$\begin{aligned} m &= \bar{x} - z_g \frac{s}{\sqrt{n}} \\ &= \bar{x} - \Phi^{-1}(1-g) \frac{s}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

La propriété C1 est donc vérifiée. Notons qu'avec les définitions (4.11) ou (4.12) de g , on obtient dans les deux cas

$$m = \bar{x} - h_1^{-1}(0) \frac{s}{\sqrt{n}} = \bar{x} + \frac{\gamma s}{6n}$$

comme pour les intervalles IC_{h_1} et IC_{h_3} .

On a vu d'autre part lors de la définition de IC_g que dans le cas $\alpha = 0$, l'intervalle IC_g est l'ensemble des nombres réels. La propriété C2 est donc aussi vérifiée.

Pour que la propriété C3 soit vérifiée, il faut que la borne gauche de IC_g soit une fonction croissante de α et la borne droite de IC_g une fonction décroissante de α . Considérons tout d'abord le cas d'une asymétrie positive. Comme la borne droite de IC_g coïncide avec la borne droite de IC_{h_1} , et que celle-ci est une fonction décroissante de α , la borne droite de IC_g a le comportement adéquat. Il reste donc à vérifier le bon comportement de sa borne gauche. Celle-ci sera une fonction croissante de α si $z_{g\alpha}$ est une fonction décroissante de α . Or

$$z_{g\alpha} = \Phi^{-1} \left(1 - \alpha + \Phi \left(-z_{\alpha/2} - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} (2z_{\alpha/2}^2 + 1) \right) \right)$$

est une fonction décroissante de α si et seulement si la fonction

$$f(\alpha) = 1 - \alpha + \Phi \left(-z_{\alpha/2} - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} (2z_{\alpha/2}^2 + 1) \right)$$

est également décroissante en α . Comme on a

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} z_{\alpha/2} = \frac{-1}{2\phi(z_{\alpha/2})},$$

on obtient

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(\alpha) = -1 + \phi \left(-z_{\alpha/2} - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} (2z_{\alpha/2}^2 + 1) \right) \left(\frac{1}{2\phi(z_{\alpha/2})} + \frac{1\gamma z_{\alpha/2}}{3\sqrt{n}\phi(z_{\alpha/2})} \right).$$

Il faut donc vérifier que cette dérivée est inférieure à zéro pour tout α . Pour ce faire, on a calculé cette fonction pour chaque valeur de α entre 0 et 1 (avec un pas de 0.01) et pour chaque valeur de γ/\sqrt{n} entre 0 et 10 (avec un pas de 0.1). Le maximum de toutes ces valeurs est -0.416 (atteint pour $\alpha = 0.68$ et $\gamma/\sqrt{n} = 1.8$) qui est effectivement inférieur à zéro. On peut en conclure que C3 est vérifié.

Le cas est tout à fait similaire pour une asymétrie négative. La borne gauche de IC_g coïncide avec celle de IC_{h_1} et possède donc le comportement adéquat. Quant à la borne droite de IC_g , on peut montrer de la même manière qu'il s'agit bien d'une fonction décroissante de α .

4.4.2 Propriété C4

Pour que la propriété C4 soit vérifiée, il faut que la fonction $(\partial/\partial n)(z_{g\alpha}/\sqrt{n})$ soit négative et que la fonction $(\partial/\partial n)(-z_{(1-g)\alpha}/\sqrt{n})$ soit positive. On va à nouveau considérer le cas d'une asymétrie positive. Comme dans ce cas la borne droite de IC_g coïncide avec la borne droite de IC_{h_1} , on a

$$\begin{aligned} (\partial/\partial n)(-z_{(1-g)\alpha}/\sqrt{n}) &= (\partial/\partial n)(h_1^{-1}(-z_{\alpha/2})/\sqrt{n}) \\ &= \frac{z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n^3}} + \frac{\gamma}{n^2} \frac{(2z_{\alpha/2}^2 + 1)}{6} \end{aligned}$$

qui est bien positive. Quant à la fonction

$$(\partial/\partial n)(z_{g\alpha}/\sqrt{n}) = \frac{-z_{g\alpha}}{2\sqrt{n^3}} + \frac{\frac{\gamma}{12}(2z_{\alpha/2}^2 + 1)\phi(h_1^{-1}(-z_{\alpha/2}))}{n^2 \phi(z_{g\alpha})},$$

elle est négative lorsque

$$\sqrt{n} \geq \frac{\frac{\gamma}{6}(2z_{\alpha/2}^2 + 1)\phi(h_1^{-1}(-z_{\alpha/2}))}{z_{g\alpha}\phi(z_{g\alpha})}. \quad (4.20)$$

En considérant l'ensemble des $n \geq 3$, on a calculé que pour des valeurs de α entre 0 et 0.45, la condition (4.20) est vérifiée (et partant la propriété C4) quelle que soit l'asymétrie γ . Ceci est remarquable si on compare ce résultat à ce que l'on a vu au chapitre 3 pour les intervalles de type IC_h . Puis, pour des valeurs de $\alpha = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ et 0.9 , la condition (4.20) est vérifiée (et partant la propriété C4), pour des asymétries γ inférieures respectivement à 3.1, 2.3, 1.8, 1.3 et 0.7, ce qui est comparable à ce que l'on avait pour les intervalles de type IC_h .

Dans le cas d'une asymétrie négative, on a inversément que la borne gauche satisfait C4, et que la borne droite la satisfait pour tout α jusqu'à 0.45. Puis pour des valeurs de $\alpha = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ et 0.9 , C4 est vérifiée pour des asymétries γ supérieures à respectivement $-3.1, -2.3, -1.8, -1.3$ et -0.7 .

4.4.3 Propriétés C5-C6

La propriété C5 est vérifiée pour IC_g puisque lorsque $\gamma = 0$, on a $IC_g = IC_z$.

D'autre part, dans le cas d'une asymétrie positive, la borne droite de IC_g est bien une fonction croissante de γ puisque c'est le cas de la borne droite de IC_{h_1} . Quant à la borne gauche de IC_g , elle est aussi croissante en γ puisque

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} z_{g\alpha} = \frac{-\frac{(2z_{\alpha/2}^2+1)}{6\sqrt{n}} \phi(h_1^{-1}(-z_{\alpha/2}))}{\phi(z_{g\alpha})} < 0.$$

Comme le raisonnement dans le cas d'une asymétrie négative est tout à fait similaire, la propriété C6 est donc vérifiée.

4.5 Mesures d'asymétrie et paramètre g

On a vu au chapitre 2 que l'on peut remplacer l'asymétrie de la population γ par l'asymétrie de l'échantillon $\hat{\gamma}$ dans la définition des intervalles de type IC_h sans pour autant modifier leurs propriétés. Puisque notre intervalle IC_g est construit à partir de l'intervalle IC_{h_1} , on peut également remplacer γ par $\hat{\gamma}$ dans (4.11) et (4.12) sans modifier les propriétés de IC_g . Notre paramètre g est dans ce cas une variable aléatoire dépendant de l'échantillon X_1, \dots, X_n à travers $\hat{\gamma}$.

Dans cette section, on va toutefois considérer ce paramètre g comme une mesure descriptive de l'échantillon. On va montrer que g est tout comme $\hat{\gamma}$ une *mesure d'asymétrie*, au sens axiomatique du terme, de l'ensemble des observations x_1, \dots, x_n (que l'on supposera rangées par ordre croissant). Plus précisément, le paramètre

$$g^* = g - 1/2$$

que l'on note ici

$$g^*(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n) - 1/2$$

satisfait les trois axiomes A1, A2 et A3 qui définissent ce qu'est une mesure d'asymétrie (voir Oja, 1981; Rousson, 1995), à savoir:

$$\text{A1 } g^*(ax_1 + b, \dots, ax_n + b) = g^*(x_1, \dots, x_n) \quad \forall a > 0, b$$

$$\text{A2 } g^*(-x_n, \dots, -x_1) = -g^*(x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{A3 } \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \leq \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} \quad \forall i = 1, \dots, n-2 \Rightarrow g^*(x_1, \dots, x_n) \leq g^*(y_1, \dots, y_n)$$

Elle a en outre la particularité d'être bornée entre $-1/2$ et $1/2$ (alors que $\hat{\gamma}$ peut prendre théoriquement n'importe quelle valeur entre $-\sqrt{n}$ et \sqrt{n}).

4.5.1 Axiome A1

Comme $\hat{\gamma}$ est une mesure d'asymétrie, elle satisfait A1 et de ce fait on a

$$\hat{\gamma}(ax_1 + b, \dots, ax_n + b) = \hat{\gamma}(x_1, \dots, x_n) \quad \forall a > 0, b.$$

Comme g^* dépend des x_i seulement à travers $\hat{\gamma}$, on a donc également

$$g^*(ax_1 + b, \dots, ax_n + b) = g^*(x_1, \dots, x_n) \quad \forall a > 0, b$$

et de ce fait g^* satisfait aussi A1.

4.5.2 Axiome A2

Comme $\hat{\gamma}$ est une mesure d'asymétrie, elle satisfait A2 et, de ce fait, on a

$$\hat{\gamma}(-x_n, \dots, -x_1) = -\hat{\gamma}(x_1, \dots, x_n).$$

Lorsque $\hat{\gamma}(x_1, \dots, x_n)$ est négatif, $\hat{\gamma}(-x_n, \dots, -x_1)$ est positif, et on a en utilisant la définition (4.11) de g

$$\begin{aligned} g^*(-x_n, \dots, -x_1) &= g(-x_n, \dots, -x_1) - 1/2 \\ &= 1 - \frac{\Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\hat{\gamma}(-x_n, \dots, -x_1)}{6\sqrt{n}} (2z_{\alpha/2}^2 + 1)\right)}{\alpha} \\ &= 1/2 - \frac{\Phi\left(-z_{\alpha/2} + \frac{\hat{\gamma}(x_1, \dots, x_n)}{6\sqrt{n}} (2z_{\alpha/2}^2 + 1)\right)}{\alpha}. \end{aligned}$$

En utilisant cette fois-ci la définition (4.12) de g , on obtient alors

$$\begin{aligned} g^*(-x_n, \dots, -x_1) &= 1/2 - g(x_1, \dots, x_n) \\ &= -g^*(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Lorsque $\hat{\gamma}(x_1, \dots, x_n)$ est positif, $\hat{\gamma}(-x_1, \dots, -x_n)$ est négatif, et on a en utilisant la définition (4.12) de g

$$\begin{aligned} g^*(-x_1, \dots, -x_n) &= g(-x_1, \dots, -x_n) - 1/2 \\ &= \frac{\Phi\left(-z_{\alpha/2} + \frac{\hat{\gamma}(-x_1, \dots, -x_n)}{6\sqrt{n}} (2z_{\alpha/2}^2 + 1)\right)}{\alpha} - 1/2 \\ &= \frac{\Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\hat{\gamma}(x_1, \dots, x_n)}{6\sqrt{n}} (2z_{\alpha/2}^2 + 1)\right)}{\alpha} - 1/2. \end{aligned}$$

En utilisant cette fois-ci la définition (4.11) de g , on obtient alors

$$\begin{aligned} g^*(-x_1, \dots, -x_n) &= 1/2 - g(x_1, \dots, x_n) \\ &= -g^*(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Ainsi g^* satisfait A2.

4.5.3 Axiome A3

Comme $\hat{\gamma}$ est une mesure d'asymétrie, elle satisfait A3 et on a ainsi

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \leq \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} \quad \forall i = 1, \dots, n-2 \quad \Rightarrow \quad \hat{\gamma}(x_1, \dots, x_n) \leq \hat{\gamma}(y_1, \dots, y_n).$$

On va voir à présent que l'on a

$$\hat{\gamma}(x_1, \dots, x_n) \leq \hat{\gamma}(y_1, \dots, y_n) \quad \Rightarrow \quad g^*(x_1, \dots, x_n) \leq g^*(y_1, \dots, y_n).$$

et que de ce fait, en mettant ces deux implications bout à bout, g^* satisfait A3 à savoir

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \leq \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} \quad \forall i = 1, \dots, n-2 \quad \Rightarrow \quad g^*(x_1, \dots, x_n) \leq g^*(y_1, \dots, y_n).$$

- Lorsque $\hat{\gamma}(x_1, \dots, x_n) \leq 0$ et $\hat{\gamma}(y_1, \dots, y_n) \leq 0$, on obtient, en utilisant la définition (4.11) de g ,

$$\begin{aligned} g^*(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\Phi\left(-z_{\alpha/2} + \frac{\hat{\gamma}(x_1, \dots, x_n)}{6\sqrt{n}}(2z_{\alpha/2}^2 + 1)\right)}{\alpha} - 1/2 \\ &\leq \frac{\Phi\left(-z_{\alpha/2} + \frac{\hat{\gamma}(y_1, \dots, y_n)}{6\sqrt{n}}(2z_{\alpha/2}^2 + 1)\right)}{\alpha} - 1/2 \\ &= g^*(y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

- Lorsque $\hat{\gamma}(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ et $\hat{\gamma}(y_1, \dots, y_n) \geq 0$, on obtient, en utilisant la définition (4.12) de g ,

$$\begin{aligned} g^*(x_1, \dots, x_n) &= 1 - \frac{\Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\hat{\gamma}(x_1, \dots, x_n)}{6\sqrt{n}}(2z_{\alpha/2}^2 + 1)\right)}{\alpha} - 1/2 \\ &\leq 1/2 - \frac{\Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\hat{\gamma}(y_1, \dots, y_n)}{6\sqrt{n}}(2z_{\alpha/2}^2 + 1)\right)}{\alpha} \\ &= g^*(y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

- Lorsque $\hat{\gamma}(x_1, \dots, x_n) \leq 0$ et $\hat{\gamma}(y_1, \dots, y_n) \geq 0$, on a

$$g(x_1, \dots, x_n) \leq 1/2$$

et

$$g(y_1, \dots, y_n) \geq 1/2$$

ce qui implique

$$g^*(x_1, \dots, x_n) \leq 0$$

et

$$g^*(y_1, \dots, y_n) \geq 0.$$

et donc

$$g^*(x_1, \dots, x_n) \leq g^*(y_1, \dots, y_n).$$

4.6 Mesures descriptives et intervalle IC_g

Le but d'une mesure descriptive est de résumer un ensemble de données par une seule valeur numérique ayant un sens descriptif. Ainsi, la moyenne \bar{x} nous décrit le *centre* des données alors que l'écart-type s nous informe sur la *dispersion* des données. Plus concrètement, la mesure descriptive s/\sqrt{n} nous indique précisément comment calculer un intervalle de confiance pour la moyenne. Si on choisit le niveau de confiance habituel $1 - \alpha = 0.95$, c'est-à-dire $\alpha = 0.05$, la mesure s/\sqrt{n} est à peu près la demi-quantité qu'il faut retrancher et ajouter au centre \bar{x} pour former l'intervalle $\bar{x} \pm 1.96 \cdot s/\sqrt{n}$. L'écart-type (et partant la dispersion) est souvent interprété de cette façon. On a en quelque sorte dans la tête une table de la forme suivante

s/\sqrt{n}	$z_{0.05/2} \cdot s/\sqrt{n}$
0.5	0.98
1	1.96
1.5	2.94
2	3.92
5	9.80
10	19.60

la colonne de droite nous donnant la demi-longueur de l'intervalle désiré.

Par contre, à part nous indiquer le sens de l'*asymétrie* des données, la mesure descriptive $\hat{\gamma}/\sqrt{n}$ n'a jamais reçu jusqu'ici d'interprétation plus précise. Que signifie par exemple une valeur de 0.75 pour $\hat{\gamma}/\sqrt{n}$? Le fait de pouvoir transformer $\hat{\gamma}/\sqrt{n}$ en g (ou en g^*) nous paraît intéressant car g est une mesure d'asymétrie qui nous donne une information plus concrète sur les données, à savoir de quelle manière il faut répartir la quantité s/\sqrt{n} autour du centre \bar{x} pour obtenir un intervalle de confiance pour la moyenne tenant compte de l'asymétrie. Par exemple, une valeur de 0.75 pour g nous indique qu'il faut considérer les trois quarts du α choisi (et non pas la moitié

seulement) pour construire la borne droite de l'intervalle, et un quart pour construire la borne gauche. Autrement dit, il faut ajouter $z_{(3/4)\alpha} \cdot s/\sqrt{n}$ à \bar{x} pour obtenir la borne droite de l'intervalle et retrancher $z_{(1/4)\alpha} \cdot s/\sqrt{n}$ à \bar{x} pour obtenir la borne gauche. En considérant toujours une valeur $\alpha = 0.05$, on peut avoir en tête la table suivante dans le but d'interpréter $\hat{\gamma}/\sqrt{n}$

$\hat{\gamma}/\sqrt{n}$	g	$z_{g \cdot 0.05}$	$z_{(1-g) \cdot 0.05}$
0.00	0.50	1.96	1.96
0.05	0.58	1.90	2.03
0.10	0.65	1.85	2.10
0.15	0.71	1.81	2.18
0.20	0.76	1.78	2.25
0.25	0.80	1.75	2.32
0.30	0.83	1.73	2.39
0.35	0.86	1.71	2.47
0.40	0.89	1.70	2.54
0.45	0.91	1.69	2.61
0.50	0.93	1.68	2.68
0.55	0.94	1.67	2.76
0.60	0.95	1.67	2.83
0.65	0.96	1.66	2.90
0.70	0.971	1.66	2.97
0.75	0.977	1.66	3.05
0.80	0.982	1.65	3.12
0.85	0.986	1.65	3.19
0.90	0.989	1.65	3.26
0.95	0.991	1.65	3.33
1.00	0.993	1.65	3.41

les deux dernières colonnes nous donnant le nombre de s/\sqrt{n} qu'il faut respectivement retrancher et ajouter à \bar{x} pour obtenir l'intervalle désiré.

En utilisant g^* plutôt que g , l'intervalle IC_g calculé sur un ensemble de données peut par ailleurs être réécrit comme suit

$$\begin{aligned} IC_g &= \left[\bar{x} - z_{g\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{(1-g)\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right] \\ &= \left[\bar{x} - z_{(1/2+g^*)\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{(1/2-g^*)\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right] \\ &= \bar{x} \pm z_{(1/2\pm g^*)\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Cette dernière formulation implique une mesure de centre \bar{x} , une mesure de dispersion s et une mesure d'asymétrie g^* de l'échantillon, c'est-à-dire un exemplaire des trois types de mesures descriptives univariées bien établies (voir Rousson, 1995). L'intervalle IC_g peut être ainsi utilisé comme figure descriptive de l'échantillon, à l'image d'un box-plot que l'on construit également à partir d'une mesure de centre (la médiane), une mesure de dispersion (l'intervalle interquartile) et une mesure d'asymétrie (le coefficient de Yule).

4.7 Conclusion

L'intervalle adaptatif IC_g que l'on a étudié dans ce chapitre nous paraît être une excellente alternative aux intervalles IC_h introduits au chapitre 2. Il est tout aussi simple à calculer, s'avère être correct au second ordre et satisfait les propriétés C1-C6 souhaitables pour un intervalle de confiance. En particulier, par rapport à IC_{h_4} , il n'a pas le désavantage de se réduire en un seul point lorsque l'asymétrie augmente. Comme autre avantage de IC_g , citons les concepts de mesure d'asymétrie et de figure descriptive vus à travers cet intervalle.

Chapitre 5

Tests d'hypothèse et population asymétrique

5.1 Introduction

On a vu au chapitre 1 qu'un intervalle de confiance pour μ au niveau $1 - \alpha$ peut être défini comme l'ensemble des valeurs μ_0 qui ne sont pas significativement différentes de μ au seuil de signification α . Ainsi, l'ensemble des valeurs μ_0 appartenant à l'intervalle

$$IC_z = \left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

est le même que l'ensemble des μ_0 qui satisfont

$$\left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right| \leq z_{\alpha/2}. \quad (5.1)$$

Cette condition (5.1) est souvent utilisée dans un problème de test d'hypothèse. Lorsque (5.1) est vérifié, on accepte (ou on ne rejette pas) l'hypothèse

$$H : \mu = \mu_0$$

alors que lorsque (5.1) n'est pas vérifié on rejette l'hypothèse H .

Le test est construit de telle sorte que la probabilité que l'on rejette H alors que H est vraie (on dit aussi l'erreur de première espèce) soit égale à α . Cette probabilité est en fait égale à $\Pr \{|T| > z_{\alpha/2}\}$ où $T = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S$. Lorsque la population est normalement distribuée (ou plus généralement lorsqu'elle est symétrique), on a vu au chapitre 2 que cette probabilité est égale à

$$\begin{aligned} \Pr \{|T| > z_{\alpha/2}\} &= \Pr \{T > z_{\alpha/2}\} + \Pr \{T < -z_{\alpha/2}\} \\ &= \Pr \{\mu < IC_z\} + \Pr \{\mu > IC_z\} \\ &= \alpha/2 + O(n^{-1}) + \alpha/2 + O(n^{-1}) \\ &= \alpha + O(n^{-1}). \end{aligned}$$

Il est à noter cependant que n'importe quel intervalle de confiance de la forme

$$IC_\lambda = \left[\bar{X} - z_{\lambda\alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{(1-\lambda)\alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

(avec $0 \leq \lambda \leq 1$) pourrait être utilisé à la place de IC_z . On peut choisir d'accepter l'hypothèse H si μ_0 appartient à cet intervalle, ou de manière équivalente si

$$-z_{(1-\lambda)\alpha} \leq \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq z_{\lambda\alpha},$$

sans pour autant modifier l'erreur de première espèce jusqu'à l'ordre $O(n^{-1})$. Cette probabilité est en effet égale à

$$\begin{aligned} \Pr \{T > z_{\lambda\alpha}\} + \Pr \{T < -z_{(1-\lambda)\alpha}\} &= \Pr \{\mu < IC_\lambda\} + \Pr \{\mu > IC_\lambda\} \\ &= \lambda\alpha + O(n^{-1}) + (1-\lambda)\alpha + O(n^{-1}) \\ &= \alpha + O(n^{-1}). \end{aligned}$$

A chaque intervalle de confiance, et donc à chaque valeur possible de λ , on peut associer une règle de décision pour accepter ou non H . La règle de décision (5.1) correspond au cas $\lambda = 1/2$. Deux autres règles de décision sont

couramment utilisées: celle correspondant au cas $\lambda = 0$, c'est-à-dire lorsque l'on accepte H si μ_0 appartient à l'intervalle

$$\left[-\infty; \bar{X} + z_\alpha \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

ou de manière équivalente si

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq -z_\alpha, \quad (5.2)$$

et celle correspondant au cas $\lambda = 1$, c'est-à-dire lorsque l'on accepte H si μ_0 appartient à l'intervalle

$$\left[\bar{X} - z_\alpha \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}; +\infty \right]$$

ou de manière équivalente si

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq z_\alpha. \quad (5.3)$$

Aux règles de décision (5.1), (5.2) et (5.3), on associe respectivement les hypothèses alternatives

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$H_2 : \mu < \mu_0$$

$$H_3 : \mu > \mu_0$$

exprimant ainsi l'ensemble des μ_0 pour lesquels le test est puissant, c'est-à-dire l'ensemble des μ_0 pour lesquels le test sera capable de détecter une différence entre μ et μ_0 . Dans le premier cas, on parle d'un *test d'hypothèse bilatéral*, et dans les deux autres cas d'un *test d'hypothèse unilatéral*. Lors d'un test bilatéral, on répartit ainsi l'erreur de première espèce α équitablement de part et d'autre de l'intervalle utilisé pour définir la règle de décision. Lors d'un test unilatéral, ce risque α est réparti d'un seul côté de l'intervalle. On

voit donc que le concept d'intervalle de confiance équilibré est lié au concept de test bilatéral.

L'acceptation ou le rejet d'une hypothèse H dépend du seuil de signification α choisi. Ainsi, lorsque $\alpha = 0$, on accepte systématiquement H , alors qu'inversément lorsque $\alpha = 1$, on rejette systématiquement H . Etant donné un échantillon x_1, \dots, x_n , de moyenne \bar{x} et d'écart-type s , la valeur p est définie comme le seuil de signification maximal où l'on accepte encore H . On a donc

on rejette H si $\alpha > p$

on accepte H si $\alpha \leq p$.

Le calcul de la valeur p dépend de la règle de décision choisie. Dans le cas où (5.1), (5.2) ou (5.3) sont utilisées, on a respectivement en posant $t_0 = \sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)/s$

$$p = 2\Phi(-|t_0|)$$

$$p = \Phi(t_0)$$

$$p = \Phi(-t_0).$$

5.2 Tests d'hypothèse avec les intervalles IC_h

Lorsque la population est asymétrique, on a vu au chapitre 2 que l'intervalle IC_z n'est pas équilibré jusqu'à l'ordre $O(n^{-1})$ mais seulement jusqu'à l'ordre $O(n^{-1/2})$. Lorsque l'on effectue un test bilatéral, il est donc souhaitable de remplacer la règle de décision (5.1) associée à l'intervalle IC_z , par une règle de décision associée à un intervalle correct au second ordre, de façon à répartir au mieux le risque α de part et d'autre de l'intervalle (afin que le test soit autant puissant pour les valeurs μ_0 plus petites que μ que pour les valeurs μ_0 plus grandes que μ).

On considère ici les intervalles de confiance de type IC_h avec l'une des transformations h vues au chapitre 2. On peut leur associer la règle de

décision suivante: on accepte l'hypothèse H si μ_0 appartient à l'intervalle

$$\mu_0 \in \left[\bar{X} - h^{-1}(z_{\alpha/2}) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} - h^{-1}(-z_{\alpha/2}) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

ou de manière équivalente si

$$\left| h \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right) \right| \leq z_{\alpha/2}, \quad (5.4)$$

et on rejette l'hypothèse H lorsque (5.4) n'est pas vérifié.

La valeur p associée à cette règle de décision est la solution de

$$|h(t_0)| = z_{p/2},$$

c'est-à-dire est donnée par

$$p = 2\Phi(-|h(t_0)|).$$

Ceci est une formule explicite en p pour autant que la transformation h ne dépende pas de α comme c'est le cas pour les transformations h_2 , h_3 , h_4 et h_5 . Par ailleurs, on verra que la valeur p n'a pas de sens pour IC_{h_1} puisque cet intervalle ne satisfait pas la propriété C3 d'un intervalle de confiance définie au chapitre 3.

On a par ailleurs que la condition (5.4) permet de définir un intervalle de confiance lorsque la transformation h n'est pas inversible à l'image de h_2 (l'intervalle étant formé de l'ensemble des μ_0 satisfaisant (5.4)).

On va étudier ci-après le comportement de la valeur p (à travers $z_{p/2}$) associée à la règle de décision (5.4) pour les différentes transformations h , en fonction de t_0 et de l'asymétrie γ/\sqrt{n} .

5.2.1 Transformation h_1

Le cas de IC_{h_1} est problématique car, comme on l'a vu au chapitre 3, il ne satisfait pas la propriété C3, c'est-à-dire que l'une des bornes ne se comporte

pas de façon adéquate par rapport à α . Plus précisément, lorsque l'asymétrie est positive, la borne gauche n'est pas partout une fonction croissante de α , alors que lorsque l'asymétrie est négative, la borne droite n'est pas partout une fonction décroissante de α . Ceci implique que certaines valeurs de μ_0 n'appartiennent pas à IC_{h_1} à un certain niveau $1 - \alpha_1$, mais qu'elles y appartiennent à un niveau $1 - \alpha_2 < 1 - \alpha_1$. Par conséquent, il est possible de rejeter l'hypothèse H à un certain seuil de signification α_1 , mais de l'accepter à un seuil de signification $\alpha_2 > \alpha_1$. Il s'en suit que la définition d'une valeur p pour cet intervalle n'a pas de sens.

La figure 1 nous montre le comportement des bornes de IC_{h_1} pour $\gamma = +3$ et -3 (avec par ailleurs $\bar{x} = 0$, $s = 1$ et $n = 9$). Dans le cas d'une asymétrie positive, on voit que la borne gauche atteint son minimum pour une valeur de α différente de 0. Ce minimum correspond au α pour lequel on a $z_{\alpha/2} = 3\sqrt{n}/2\gamma$. La borne gauche vaut alors

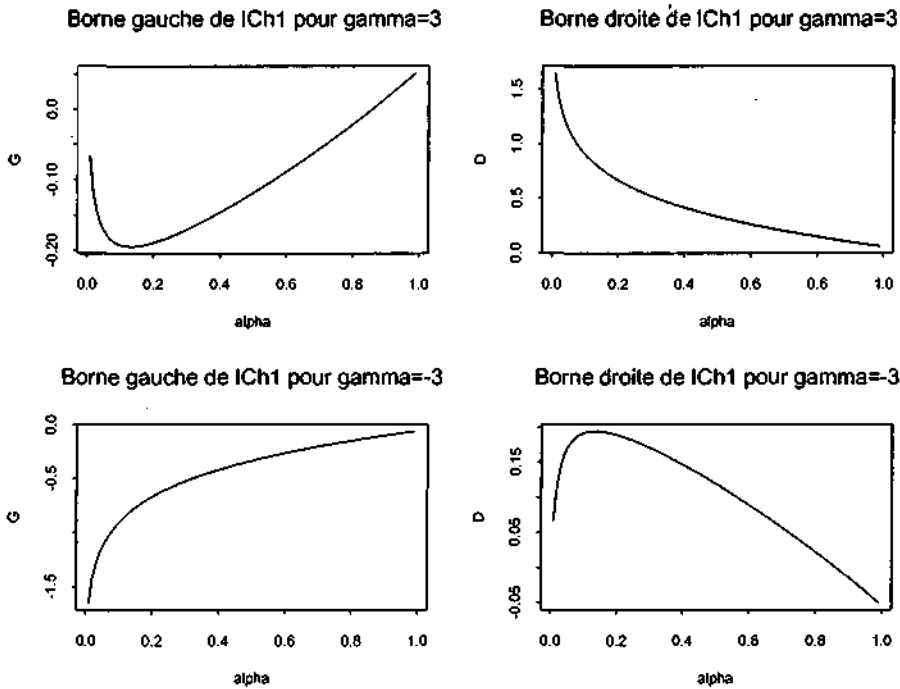
$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} \left[\frac{3\sqrt{n}}{2\gamma} - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} \left(2 \left(\frac{3\sqrt{n}}{2\gamma} \right)^2 + 1 \right) \right] = \bar{x} - \frac{3s}{4\gamma} + \frac{\gamma s}{6n}.$$

Ainsi, lorsque μ_0 est inférieur à cette valeur, l'hypothèse H est rejetée quel que soit le seuil de signification α utilisé puisque μ_0 n'appartient pas à l'intervalle IC_{h_1} quel que soit le niveau $1 - \alpha$ (alors que si IC_{h_1} satisfaisait la propriété C2, ces valeurs de μ_0 appartiendraient à l'intervalle au moins pour $\alpha = 0$).

Dans le cas d'une asymétrie négative, on a une situation similaire. La borne droite atteint son maximum pour une valeur de α différente de 0. Ce maximum correspond au α pour lequel on a $z_{\alpha/2} = -3\sqrt{n}/2\gamma$. Par conséquent, des valeurs de μ_0 supérieures à

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} \left[-\frac{3\sqrt{n}}{2\gamma} - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} \left(2 \left(\frac{-3\sqrt{n}}{2\gamma} \right)^2 + 1 \right) \right] = \bar{x} - \frac{3s}{4\gamma} + \frac{\gamma s}{6n}$$

n'appartiennent pas à l'intervalle IC_{h_1} quel que soit le niveau $1 - \alpha$, et on a ainsi le même problème. On en conclut que l'intervalle IC_{h_1} n'est pas bien adapté à un problème de test d'hypothèse.

Figure 1: Borne gauche et borne droite de IC_{h_1} en fonction de α .

5.2.2 Transformation h_2

Lorsque l'on utilise la règle de décision (5.4) avec la transformation h_2 , et que l'on a

$$\left| \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \right| < \frac{3}{\sqrt{2}} \cong 2.12,$$

la fonction $z_{p/2}(t_0) = |h_2(t_0)|$ est du type de celles représentées en figure 2.

Ce type de figure nous procure une illustration des intervalles que l'on utilise pour tester l'hypothèse H selon les différents seuils de signification. Rappelons que l'ensemble des μ_0 pour lesquels $|h_2(t_0)| \leq z_{\alpha/2}$ est l'ensemble des μ_0 pour lesquels on accepte H au seuil de signification α , et constitue par conséquent un intervalle de confiance pour μ au niveau $1 - \alpha$. Pour avoir une visualisation de cet intervalle, il suffit de placer sur le graphe une droite horizontale en $z_{\alpha/2}$, puis de considérer les t_0 pour lesquels la fonction dessinée

est en dessous de cette droite. Les μ_0 correspondant à ces t_0 (c'est-à-dire qu'il faut poser $\mu_0 = \bar{x} - s \cdot t_0/\sqrt{n}$) forment l'intervalle en question. Les figures 3 à 8 seront à interpréter de la même façon.

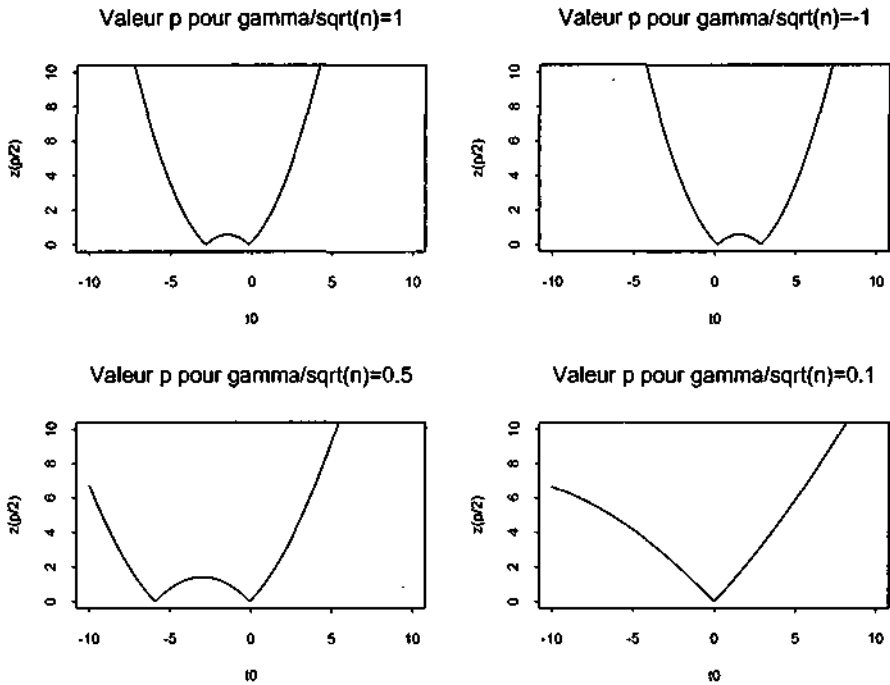


Figure 2: La fonction $z_{p/2} = |h_2(t_0)|$ lorsque $|\gamma/\sqrt{n}| < 3/\sqrt{2}$.

On voit sur la figure 2 que la fonction $z_{p/2}(t_0) = |h_2(t_0)|$ admet deux minimums. Ils sont atteints aux points

$$t_0 = -\frac{3\sqrt{n}}{2\gamma} \mp \frac{3\sqrt{n}}{2\gamma} \sqrt{1 - \frac{2\gamma^2}{9n}}.$$

Si on a au milieu de ces deux minimums

$$\left| h_2 \left(-\frac{3\sqrt{n}}{2\gamma} \right) \right| = \left| \frac{-3\sqrt{n}}{4\gamma} + \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} \right| > z_{\alpha/2},$$

pour une certaine valeur de α , l'intervalle utilisé pour tester l'hypothèse H à ce seuil de signification α est composé de deux intervalles disjoints. Celui

qui contient le minimum

$$t_0 = -\frac{3\sqrt{n}}{2\gamma} + \frac{3\sqrt{n}}{2\gamma} \sqrt{1 - \frac{2\gamma^2}{9n}}$$

contient des valeurs de μ_0 proches de \bar{x} . Par contre, celui qui contient le minimum

$$t_0 = -\frac{3\sqrt{n}}{2\gamma} - \frac{3\sqrt{n}}{2\gamma} \sqrt{1 - \frac{2\gamma^2}{9n}}$$

peut contenir des valeurs de μ_0 très éloignées de \bar{x} (surtout lorsque γ/\sqrt{n} est petit), ce qui veut dire que l'on acceptera H bien que \bar{x} diffère largement de la valeur testée μ_0 .

Lorsque l'on a

$$\left| \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \right| \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2.12,$$

la fonction $z_{p/2}(t_0) = |h_2(t_0)|$ est du type de celles représentées en figure 3.

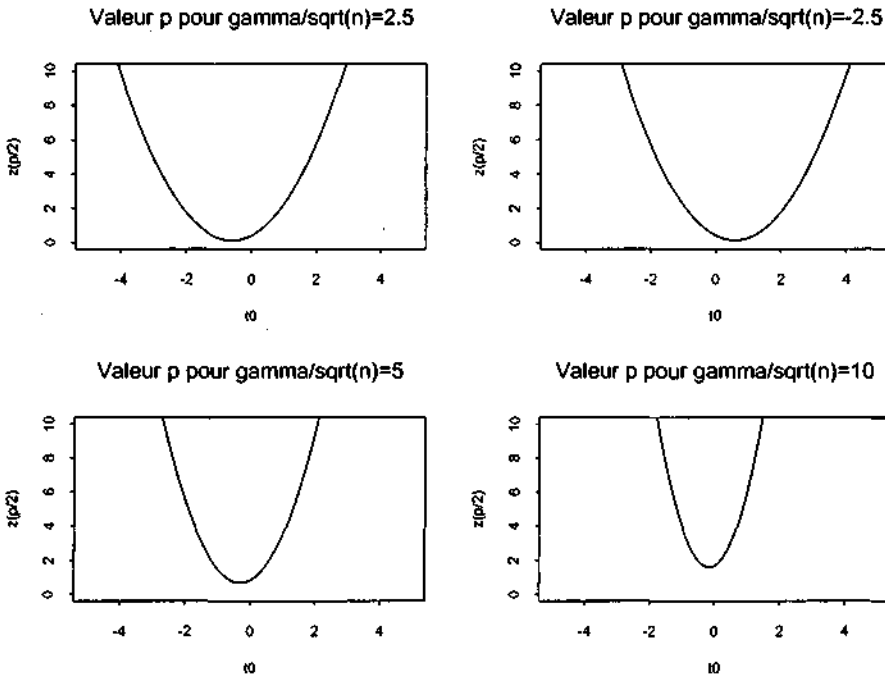


Figure 3: La fonction $z_{p/2} = |h_2(t_0)|$ lorsque $|\gamma/\sqrt{n}| \geq 3/\sqrt{2}$.

On voit que cette fonction est strictement positive si $|\gamma/\sqrt{n}| > 3/\sqrt{2}$. Son minimum est atteint au point $t_0 = -3\sqrt{n}/2\gamma$. Ainsi, lorsque l'on a

$$\left| h_2 \left(-\frac{3\sqrt{n}}{2\gamma} \right) \right| = \left| \frac{-3\sqrt{n}}{4\gamma} + \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} \right| > z_{\alpha/2},$$

pour une certaine valeur de α , l'intervalle utilisé pour tester l'hypothèse H à ce seuil de signification α est l'ensemble vide. On rejette donc l'hypothèse H quel que soit la valeur de \bar{x} ! L'erreur de première espèce est ici de 1 et non de α .

Ces différentes constatations nous mènent à la conclusion que la règle de décision (5.4) avec la transformation h_2 n'est pas du tout adaptée à un problème de test d'hypothèse.

5.2.3 Transformation h_3

Lorsque l'on utilise la règle de décision (5.4) avec la transformation h_3 , la fonction $z_{p/2}(t_0) = |h_3(t_0)|$ est du type de celles représentées en figure 4. On constate que cette fonction est simplement translatée lorsque γ/\sqrt{n} varie. Cette fonction ne présente aucun des défauts vus au paragraphe précédent, mais comme on l'a souligné au chapitre 2, l'intervalle de confiance utilisé pour la règle de décision n'est pas correct au second ordre. Notons encore que, comme c'est le cas pour les autres transformations, le cas $\gamma/\sqrt{n} = 0$ correspond à la règle de décision (5.1).

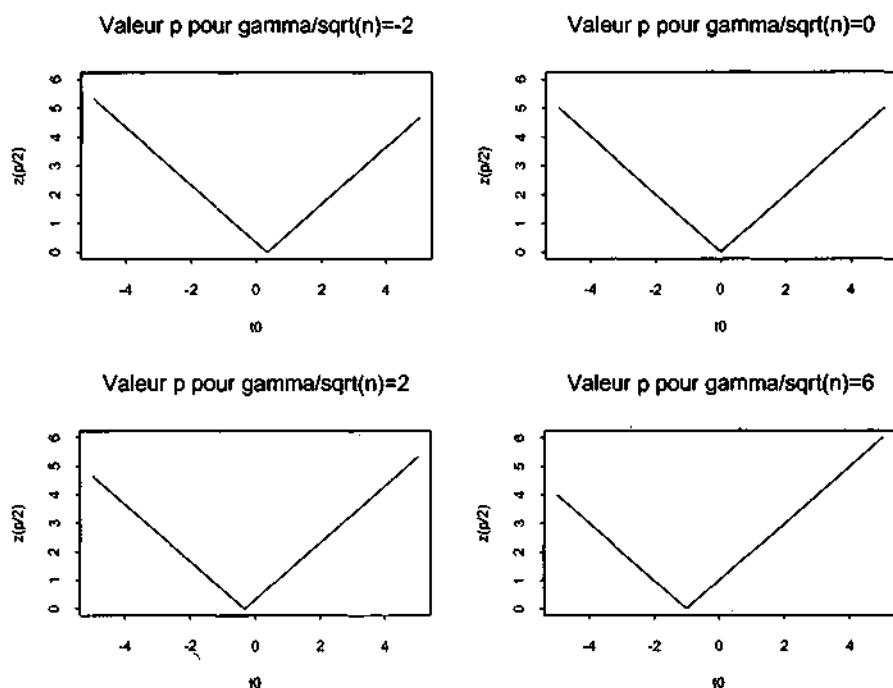


Figure 4: La fonction $z_{p/2} = |h_3(t_0)|$ pour différentes valeurs de γ/\sqrt{n} .

5.2.4 Transformation h_4

Lorsque l'on utilise la règle de décision (5.4) avec la transformation h_4 , la fonction $z_{p/2}(t_0) = |h_4(t_0)|$ est la valeur absolue d'une fonction cubique qui admet donc un point d'inflexion. Celui-ci est atteint pour la valeur $t_0 = -3\sqrt{n}/\gamma$. On a en ce point

$$h_4\left(-\frac{3\sqrt{n}}{\gamma}\right) = \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{\gamma}.$$

Cette quantité est positive si

$$\left|\frac{\gamma}{\sqrt{n}}\right| > \sqrt{6} \cong 2.45.$$

La vérification ou non de cette condition change la forme de la fonction comme on peut le voir en figure 5.

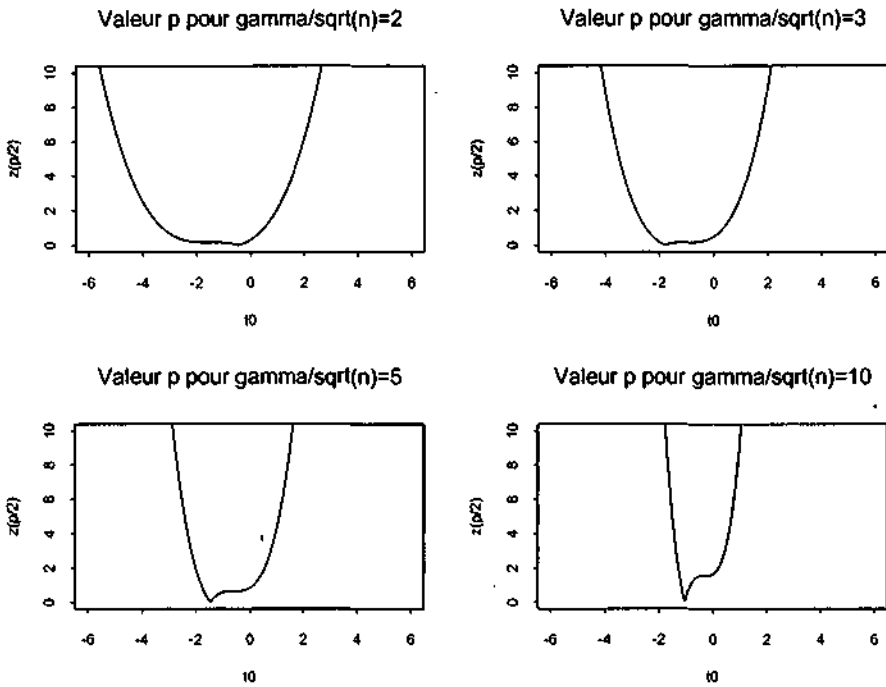


Figure 5: La fonction $z_{p/2} = |h_4(t_0)|$ pour différentes valeurs de γ/\sqrt{n} .

Pour $\gamma/\sqrt{n} = 2$, la courbe est asymétrique vers la gauche. Mais pour $\gamma/\sqrt{n} = 3, 5$ ou 10 , la courbe est asymétrique vers la droite, ce qui est une conséquence du fait que l'intervalle IC_{h_4} , utilisé ici pour la règle de décision, ne satisfait pas la propriété C6 d'un intervalle de confiance (voir chapitre 3). De plus, on voit bien sur cette figure que lorsque γ/\sqrt{n} est grand, $z_{p/2}(t_0)$ croît très vite. Cela signifie que quel que soit la valeur du seuil de signification α utilisé, l'ensemble des μ_0 pour lesquels on accepte H tend vers le seul point \bar{x} lorsque γ/\sqrt{n} tend vers l'infini. Par conséquent, l'erreur de première espèce tend vers 1 lorsque γ/\sqrt{n} tend vers l'infini.

Par contre, lorsque

$$\left| \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \right| \leq \sqrt{6} \cong 2.45,$$

la fonction $z_{p/2}(t_0)$ ne présente pas ces défauts comme on peut le voir en figure 6.

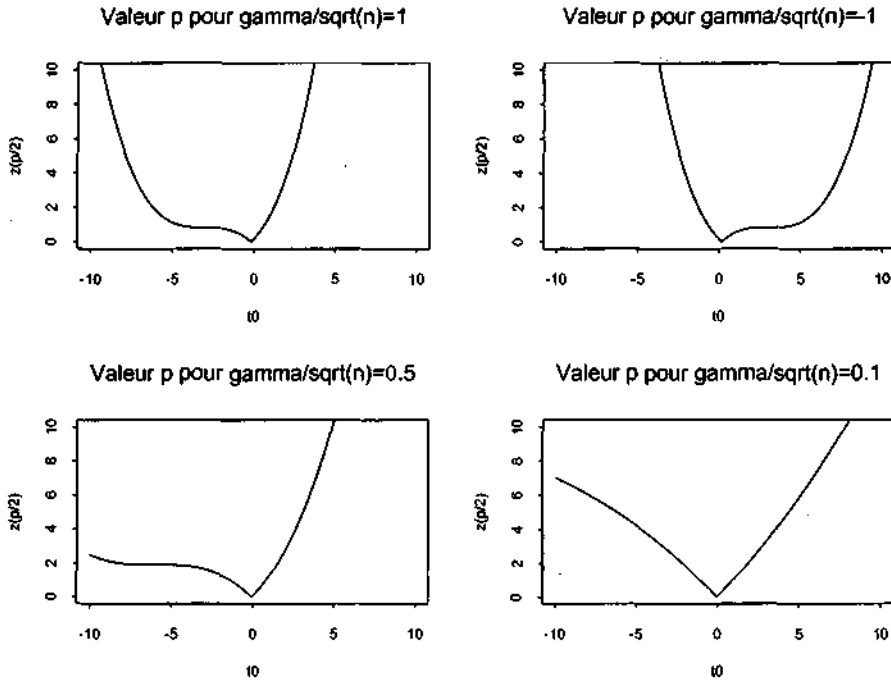


Figure 6: La fonction $z_{p/2} = |h_4(t_0)|$ lorsque $|\gamma/\sqrt{n}| \leq \sqrt{6}$.

5.2.5 Transformation h_5

Comme on l'a vu au chapitre 2, la transformation h_5 est similaire à la transformation h_4 , surtout pour les petites valeurs de γ/\sqrt{n} . Il en résulte que la fonction $z_{p/2}(t_0) = |h_5(t_0)|$ ressemble dans ces cas-là à $|h_4(t_0)|$. Mais l'intervalle que l'on utilise ici pour tester l'hypothèse H n'est pas toujours borné et n'est donc pas très approprié pour un problème de test d'hypothèse (car le test en question sera alors particulièrement peu puissant). Cet intervalle n'est même jamais borné (quel que soit le seuil de signification α) lorsque $|\gamma/\sqrt{n}| = 3$. Et lorsque $|\gamma/\sqrt{n}| > 3$, l'intervalle utilisé pour tester l'hypothèse H à un seuil de signification α est l'ensemble vide si $h_5(t_0) > z_{\alpha/2}$. La figure 7 nous en procure une illustration.

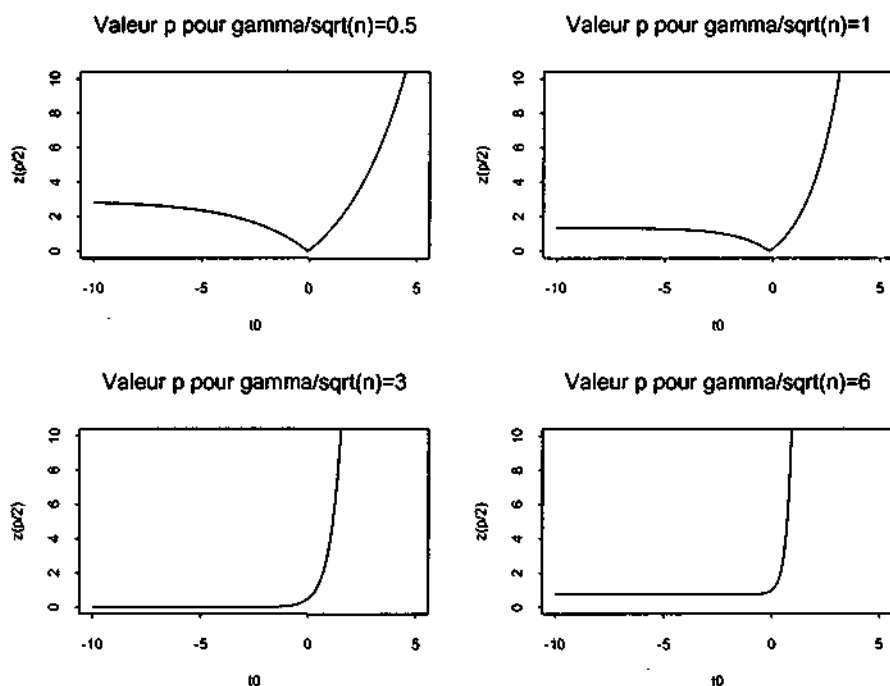


Figure 7: La fonction $z_{p/2} = |h_5(t_0)|$ pour différentes valeurs de γ/\sqrt{n} .

5.3 Tests d'hypothèse avec l'intervalle IC_g

On a vu au chapitre 4 que lorsque la population est asymétrique, une alternative aux intervalles de confiance de type IC_h pour remplacer IC_z est constituée par l'intervalle de confiance adaptatif IC_g . Pour un problème de test d'hypothèse bilatéral, on peut donc remplacer la condition (5.1) par la règle de décision suivante: on accepte l'hypothèse H si μ_0 appartient à l'intervalle

$$\left[\bar{X} - z_{g\alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{(1-g)\alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

ou de manière équivalente si

$$-z_{(1-g)\alpha} \leq \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq z_{g\alpha}, \quad (5.5)$$

où le paramètre g est défini au chapitre 4.

Comme IC_g satisfait les propriétés C1-C3 d'un intervalle de confiance, et qu'il a par conséquent le comportement adéquat par rapport à α , il est possible de définir une valeur p . On a vu au chapitre 4 que lorsque $\alpha = 1$, l'intervalle IC_g se réduit au point

$$m = \bar{x} + \frac{\gamma s}{6n}.$$

Pour les μ_0 plus petits que m , la valeur p est donc le α pour lequel μ_0 coïncide avec la borne gauche de IC_g alors que pour les μ_0 plus grands que m , la valeur p est le α pour lequel μ_0 coïncide avec la borne droite de IC_g . On a ainsi dans le cas d'une asymétrie positive:

- Si

$$\mu_0 \geq m$$

c'est-à-dire si

$$t_0 \leq -\frac{\gamma}{6\sqrt{n}}$$

la valeur p est la solution de

$$\mu_0 = \bar{x} + \left(z_{p/2} + \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} (2z_{p/2}^2 + 1) \right) \frac{s}{\sqrt{n}}$$

c'est-à-dire de

$$t_0 = -z_{p/2} - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} (2z_{p/2}^2 + 1).$$

La solution positive de cette équation quadratique en $z_{p/2}$ est

$$z_{p/2} = \frac{-1 + \sqrt{1 - \frac{4\gamma}{3\sqrt{n}} \left(t_0 + \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} \right)}}{2\gamma / (3\sqrt{n})} \quad (5.6)$$

de laquelle on peut déduire p .

- Si

$$\mu_0 \leq m$$

c'est-à-dire si

$$t_0 \geq -\frac{\gamma}{6\sqrt{n}}$$

la valeur p est la solution de

$$\mu_0 = \bar{x} - \Phi^{-1} \left(1 - p + \Phi \left(-z_{p/2} - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} (2z_{p/2}^2 + 1) \right) \right) \frac{s}{\sqrt{n}}$$

c'est-à-dire de

$$t_0 = \Phi^{-1} \left(1 - p + \Phi \left(-z_{p/2} - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} (2z_{p/2}^2 + 1) \right) \right)$$

ou encore de

$$\Phi(t_0) = 1 - p + \Phi \left(-z_{p/2} - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} (2z_{p/2}^2 + 1) \right)$$

et ainsi de

$$p = \Phi(-t_0) + \Phi \left(-z_{p/2} - \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} (2z_{p/2}^2 + 1) \right). \quad (5.7)$$

Il s'agit d'une équation implicite en p que l'on peut résoudre par exemple à l'aide de la méthode de la bissection.

De manière similaire, dans le cas d'une asymétrie négative, on a la situation suivante:

- Si

$$\mu_0 \leq m$$

c'est-à-dire si

$$t_0 \geq -\frac{\gamma}{6\sqrt{n}}$$

la valeur p est la solution de

$$z_{p/2} = \frac{-1 + \sqrt{1 - \frac{4\gamma}{3\sqrt{n}} \left(t_0 + \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} \right)}}{-2\gamma / (3\sqrt{n})}. \quad (5.8)$$

- Si

$$\mu_0 \geq m$$

c'est-à-dire si

$$t_0 \leq -\frac{\gamma}{6\sqrt{n}}$$

la valeur p est la solution de l'équation implicite en p

$$p = \Phi(t_0) + \Phi\left(-z_{p/2} + \frac{\gamma}{6\sqrt{n}}(2z_{p/2}^2 + 1)\right). \quad (5.9)$$

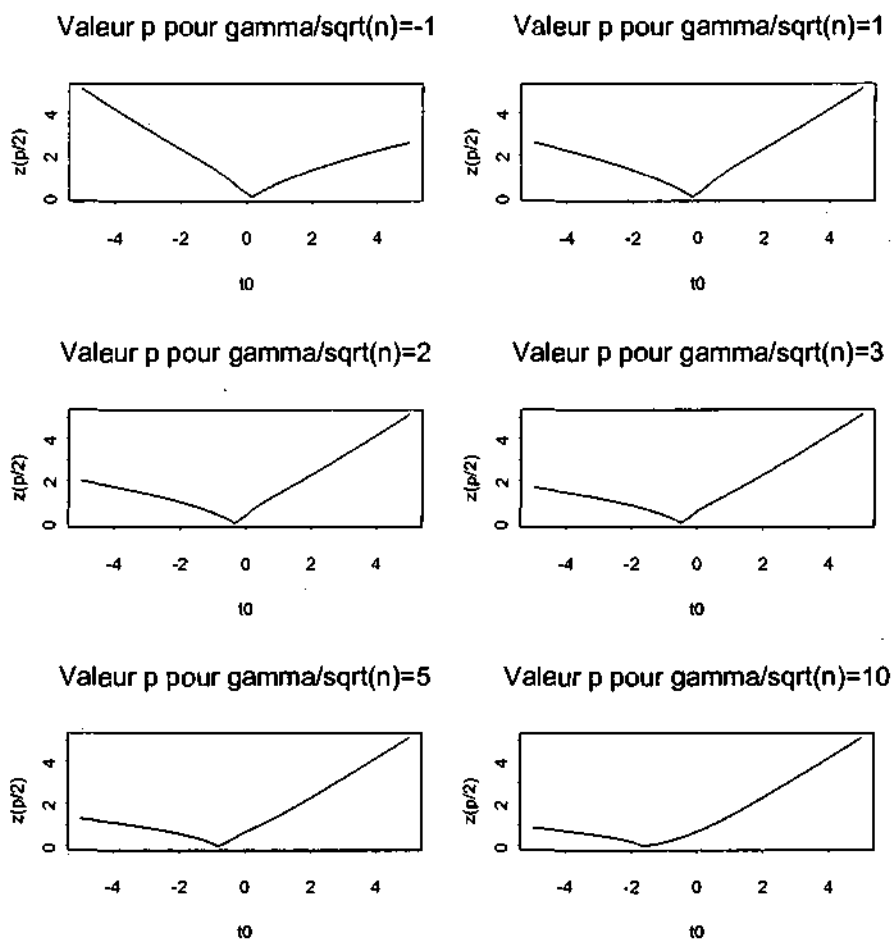


Figure 8: La fonction $z_{p/2}(t_0)$ pour (4.6) et différentes valeurs de γ/\sqrt{n} .

La figure 8 représente $z_{p/2}$ en fonction de t_0 pour différentes valeurs de γ/\sqrt{n} lorsque la règle de décision (5.5) est utilisée. On peut voir que le comportement de cette fonction ne présente aucun des défauts constatés dans la section précédente, et ceci quelle que soit la valeur de γ/\sqrt{n} .

Notons que dans le cas d'une asymétrie nulle, les formules (5.6) ou (5.9) peuvent être utilisées lorsque $\mu_0 \geq \bar{x}$ (c'est-à-dire lorsque $t_0 \leq 0$). En effet, (5.6) et (5.9) sont dans ce cas

$$\begin{aligned} t_0 &= -z_{p/2} \\ p &= \Phi(t_0) + \Phi(-z_{p/2}) \end{aligned}$$

ce qui nous donne la solution

$$p = 2\Phi(t_0).$$

Lorsque $\mu_0 \leq \bar{x}$ (c'est-à-dire lorsque $t_0 \geq 0$), les formules (5.7) ou (5.8) peuvent être utilisées. Elle sont dans ce cas

$$\begin{aligned} p &= \Phi(-t_0) + \Phi(-z_{p/2}) \\ t_0 &= z_{p/2} \end{aligned}$$

ce qui nous donne la solution

$$p = 2\Phi(-t_0).$$

Ainsi, dans le cas d'une asymétrie nulle, les formules (5.6), (5.7), (5.8) et (5.9) sont toutes égales à

$$p = 2\Phi(-|t_0|),$$

ce qui est bien la formule pour la valeur p lorsque la règle de décision (5.1) est utilisée.

5.4 Tests d'hypothèse unilatéraux

Lorsque l'on effectue un test unilatéral en utilisant les règles de décision (5.2) ou (5.3), l'erreur de première espèce commise est de $\alpha + O(n^{-1/2})$ si la population est asymétrique. Il est donc souhaitable d'adopter une autre règle de décision afin que l'erreur de première espèce soit de $\alpha + O(n^{-1})$. Pour ce faire, on utilise ici aussi des intervalles de type IC_h et IC_g , en adaptant les règles de décision (5.4) et (5.5) comme expliqué ci-dessous.

5.4.1 Intervalles IC_h

L'adaptation de la règle de décision (5.4) pour un test d'hypothèse unilatéral est immédiate. Lorsque l'hypothèse alternative est $H_2 : \mu < \mu_0$, on accepte H au seuil de signification α si μ_0 appartient à l'intervalle

$$\left[-\infty; \bar{X} - h^{-1}(-z_\alpha) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

c'est-à-dire si

$$h \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right) \geq -z_\alpha, \quad (5.10)$$

alors que lorsque l'hypothèse alternative est $H_3 : \mu > \mu_0$, on accepte H au seuil de signification α si μ_0 appartient à l'intervalle

$$\left[\bar{X} - h^{-1}(z_\alpha) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}; +\infty \right]$$

c'est-à-dire si

$$h \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right) \leq z_\alpha. \quad (5.11)$$

La valeur p est alors donnée par

$$p = \Phi(h(t_0))$$

et par

$$p = \Phi(-h(t_0))$$

pour respectivement les règles de décision (5.10) et (5.11).

5.4.2 Intervalle IC_g

L'adaptation de la règle de décision (5.5) pour un test d'hypothèse unilatéral n'est pas aussi immédiate que pour la règle de décision (5.4). Les deux bornes de l'intervalle IC_g sont en effet liées par le paramètre g , ce qui implique que l'on ne peut pas considérer des intervalles de ce type non bornés à gauche

$$\left[-\infty; \bar{X} + z_{(1-g)\alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

ou non bornés à droite

$$\left[\bar{X} - z_{g\alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}; +\infty \right]$$

comme on peut le faire avec les intervalles de type IC_h .

Afin de pouvoir tout de même procéder ici à un test d'hypothèse unilatéral, on utilisera l'intervalle de confiance IC_g au niveau $1 - 2\alpha$ pour un test d'hypothèse au seuil de signification α . Lorsque l'hypothèse alternative est $H_2 : \mu < \mu_0$, on acceptera H au seuil de signification α si μ_0 n'est pas à droite de l'intervalle IC_g de niveau $1 - 2\alpha$, c'est-à-dire si

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq -z_{2(1-g)\alpha}, \quad (5.12)$$

alors que lorsque l'hypothèse alternative est $H_3 : \mu > \mu_0$, on acceptera H au seuil de signification α si μ_0 n'est pas à gauche de l'intervalle IC_g de niveau $1 - 2\alpha$, c'est-à-dire si

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq z_{2g\alpha}. \quad (5.13)$$

Dans les deux cas, l'erreur de première espèce est ainsi égale à $\alpha + O(n^{-1})$.

Pour la règle de décision (5.12), la valeur p se calcule avec les formules (5.6) ou (5.9), selon que l'asymétrie soit respectivement positive ou négative, en remplaçant dans ces formules p par $2p$. Toutefois, la valeur p n'est pas définie lorsque $\mu_0 < m = \bar{x} + \gamma s / (6n)$ car il est alors impossible que μ_0 soit à droite de l'intervalle considéré (on accepte donc H pour tout α entre 0 et 1/2).

Pour la règle de décision (5.13), la valeur p se calcule avec les formules (5.7) ou (5.8), selon que l'asymétrie soit respectivement positive ou négative, en remplaçant dans ces formules p par $2p$. Toutefois, la valeur p n'est pas définie lorsque $\mu_0 > m = \bar{x} + \gamma s / (6n)$ car il est alors impossible que μ_0 soit à gauche de l'intervalle considéré (on accepte donc H pour tout α entre 0 et $1/2$).

On ne peut effectuer ici des tests d'hypothèse unilatéraux que jusqu'à un seuil de signification de $\alpha = 1/2$. La valeur p maximale (lorsqu'elle est définie) est donc de $1/2$. Soit dit en passant, il s'agit de la valeur p que l'on obtient lorsqu'on utilise (5.2) ou (5.3) comme règles de décision et que l'on a $\mu_0 = \bar{x}$.

5.5 Conclusion

Comme on l'a déjà vu dans le cadre des intervalles de confiance au chapitre 3, la transformation h_4 représente la meilleure alternative parmi les transformations h . Pour un problème de tests d'hypothèses, les transformations h_1 , h_2 et h_5 sont particulièrement mal adaptées, alors que la transformation h_3 ne corrige pas les défauts dus à l'asymétrie. D'autre part, de la même manière que l'intervalle IC_g est une bonne alternative aux intervalles IC_h pour un problème d'intervalle de confiance, l'utilisation de la règle de décision (5.5) est une bonne alternative aux règles de décision (5.4) pour un problème de test d'hypothèse bilatéral. On a vu également que l'on peut utiliser notre intervalle IC_g pour un problème de test d'hypothèse unilatéral.

Chapitre 6

Comparaison

6.1 Lois gammas

Afin de pouvoir comparer les performances des différents intervalles de confiance présentés dans cette thèse et, en particulier, afin de constater les qualités de notre intervalle IC_g , on a procédé à trois études de simulation.

Pour la première étude de simulation, on a généré à l'aide de S-PLUS des échantillons provenant de différentes lois gammas. On a choisi la famille des lois gammas car elle contient des lois avec n'importe quel coefficient d'asymétrie γ . En effet, une loi gamma de densité

$$f(x) = \frac{x^{r-1}}{\Gamma(r)} \exp(-x)$$

sur l'ensemble des nombres positifs, avec $r > 0$ et $\Gamma(\cdot)$ la fonction gamma, est telle que

$$\begin{aligned} \mu &= r \quad (= \sigma^2) \\ \gamma &= \frac{2}{\sqrt{r}}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Afin d'obtenir une loi avec une asymétrie γ donnée, il suffit donc de choisir la loi gamma de paramètre

$$r = \frac{4}{\gamma^2},$$

ce paramètre étant en outre la moyenne μ de cette loi.

On a considéré des échantillons de taille

$$n = 5, 10, 20, 30, 50, 100$$

provenant de lois gammas de paramètre r tel que

$$\gamma/\sqrt{n} = 0.1, 0.5, 1, 2, 5, 10$$

c'est-à-dire que l'on a du poser

$$r = \frac{4}{n \left(\frac{\gamma}{\sqrt{n}}\right)^2}$$

pour obtenir ces différentes valeurs de γ/\sqrt{n} , et on a calculé des intervalles de confiance au niveau $1 - \alpha$ avec

$$\alpha = 0.001, 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5.$$

On a donc considéré six niveaux pour les paramètres α , γ/\sqrt{n} et n , ce qui fait en les combinant $6^3 = 216$ possibilités. Pour chacune de ces 216 possibilités, on a généré $N = 10'000$ échantillons, et à partir de chacun de ces 10'000 échantillons, on a calculé les six intervalles de confiance suivants:

$$IC_x, IC_t, IC_g, IC_{h_1}, IC_{h_3}, IC_{h_4}$$

On n'a pas considéré l'intervalle IC_{h_5} car il est trop souvent non défini lorsque l'asymétrie est importante.

On a ensuite compabilisé le nombre de fois (sur les 10'000 échantillons) où la valeur réelle de μ (c'est-à-dire le paramètre r de la loi gamma générée) est à gauche, à l'intérieur ou à droite de chaque intervalle considéré. On désignera ces quantités respectivement par G (pour Gauche), I (pour Intérieur) et D (pour Droite). On a ainsi obtenu un nombre G ; un nombre I et un nombre D pour chaque intervalle et pour chacune des 216 possibilités prises en compte. Ces résultats sont donnés en annexe 1 (tables 1.1 à 1.12) et

classés par respectivement α , γ/\sqrt{n} et n . Les résultats empiriques donnés dans ces tables sont à comparer avec les résultats théoriques

$$N \cdot \alpha/2$$

pour G et D et

$$N \cdot (1 - \alpha)$$

pour I , ce qui représente des intervalles équilibrés au niveau $1 - \alpha$.

Les quantités G/N , I/N et D/N sont des estimations de la probabilité que la moyenne μ se trouve respectivement à gauche, à l'intérieur et à droite de l'intervalle en question. La variance de ces estimations peut être estimée par respectivement $G(N - G)/N^3$, $I(N - I)/N^3$ et $D(N - D)/N^3$. Notons que l'estimation de ces variances n'est pas bonne lorsque ces quantités G , I et D sont proches de 0 ou de N et que par conséquent, il est délicat de tirer des conclusions dans de tels cas.

Quelques remarques s'imposent par ailleurs:

- Lors de cette étude de simulation, on a considéré le coefficient d'asymétrie γ (qui est nécessaire pour calculer les intervalles de confiance IC_g , IC_{h_1} , IC_{h_3} et IC_{h_4}) comme connu et on a donc utilisé (6.1). Par contre, on a du calculer à partir des échantillons les valeurs de \bar{x} et s . Lorsque l'on avait pour un échantillon $s = 0$ (ce qui arrive parfois avec γ/\sqrt{n} grand et n petit), on ne considérait pas l'échantillon en question, et on en tirait un nouveau.

- Comme l'asymétrie est toujours positive, les bornes droites de IC_g et IC_{h_1} coïncident tout le temps et, par conséquent, les nombres D sont les mêmes pour ces deux intervalles, pour tout α , γ/\sqrt{n} et n .

- Il n'est pas possible d'avoir une idée ici de la convergence des résultats empiriques vers les résultats théoriques lorsque n augmente avec α et γ fixés. Pour ce faire, il aurait fallu choisir des niveaux pour γ et non pour γ/\sqrt{n} . On se reportera pour cela à la deuxième étude de simulation.

- On a préféré choisir ici des niveaux pour γ/\sqrt{n} plutôt que pour γ car on a le plus souvent étudié dans cette thèse les intervalles en fonction de γ/\sqrt{n} .

• On s'aperçoit que les performances de ces intervalles ne sont pas excellentes (et même parfois franchement mauvaises). Ceci s'explique du fait que l'on a considéré des lois d'asymétrie extrême. Par exemple, pour les niveaux $\gamma/\sqrt{n} = 10$ et $n = 100$, on a une asymétrie de $\gamma = 100$, ce qui est très rare en pratique. Notre intérêt pour cette étude de simulation est que l'on peut se rendre compte ici du comportement de ces intervalles dans des cas extrêmes.

Afin de comparer les performances de ces différents intervalles, on a calculé pour chacun d'eux et pour chacune des 216 possibilités une distance du χ^2 entre les résultats empiriques et les résultats théoriques. On a ainsi calculé pour chaque intervalle et pour chaque niveau de α , γ/\sqrt{n} et n un coefficient

$$\chi_c^2(\alpha, \gamma/\sqrt{n}, n) = \frac{(C - N \cdot \alpha/2)^2}{N \cdot \alpha/2} + \frac{(I - N \cdot (1 - \alpha))^2}{N \cdot (1 - \alpha)} + \frac{(D - N \cdot \alpha/2)^2}{N \cdot \alpha/2}. \quad (6.2)$$

Afin de réduire un peu le nombre de ces coefficients, on a choisi de cumuler les $\chi_c^2(\alpha, \gamma/\sqrt{n}, n)$ pour les différents n à un même niveau de α et γ/\sqrt{n} . On a ainsi obtenu pour chaque intervalle et pour chaque niveau de α et γ/\sqrt{n} un coefficient

$$\chi_C^2(\alpha, \gamma/\sqrt{n}) = \sum_{n=5,10,20,30,50,100} \chi_c^2(\alpha, \gamma/\sqrt{n}, n). \quad (6.3)$$

Pour chacun des intervalles considérés, on a donc 36 coefficients χ_C^2 . Il y a ainsi 36 façons de classer ces intervalles. Ces 36 classements sont donnés dans la table 6.1.

On retrouve dans ces classements certaines tendances soulevées dans cette thèse. En particulier, on voit que

- L'intervalle IC_{h_1} est très mauvais lorsque α est petit.
- L'intervalle IC_{h_4} a des problèmes quand l'asymétrie γ/\sqrt{n} est importante.
- L'intervalle IC_t est meilleur lorsque la population est presque symétrique ($\gamma/\sqrt{n} = 0.1$) que lorsqu'elle est franchement asymétrique.

α	γ/\sqrt{n}	1.	2.	3.	4.	5.	6.
0.001	0.1	IC_t	IC_g	IC_{h_4}	IC_z	IC_{h_3}	IC_{h_1}
0.001	0.5	IC_g	IC_{h_4}	IC_t	IC_{h_3}	IC_z	IC_{h_1}
0.001	1	IC_g	IC_{h_4}	IC_t	IC_{h_3}	IC_z	IC_{h_1}
0.001	2	IC_g	IC_{h_4}	IC_t	IC_{h_3}	IC_z	IC_{h_1}
0.001	5	IC_g	IC_t	IC_{h_3}	IC_z	IC_{h_4}	IC_{h_1}
0.001	10	IC_g	IC_{h_1}	IC_{h_3}	IC_t	IC_z	IC_{h_4}
0.01	0.1	IC_t	IC_g	IC_{h_4}	IC_{h_1}	IC_{h_3}	IC_z
0.01	0.5	IC_{h_4}	IC_g	IC_t	IC_{h_3}	IC_{h_1}	IC_z
0.01	1	IC_{h_4}	IC_g	IC_t	IC_{h_3}	IC_z	IC_{h_1}
0.01	2	IC_g	IC_{h_4}	IC_t	IC_{h_3}	IC_z	IC_{h_1}
0.01	5	IC_g	IC_{h_3}	IC_t	IC_z	IC_{h_4}	IC_{h_1}
0.01	10	IC_g	IC_{h_1}	IC_{h_3}	IC_t	IC_z	IC_{h_4}
0.05	0.1	IC_t	IC_g	IC_{h_4}	IC_{h_1}	IC_{h_3}	IC_z
0.05	0.5	IC_g	IC_{h_4}	IC_{h_1}	IC_t	IC_{h_3}	IC_z
0.05	1	IC_{h_4}	IC_g	IC_t	IC_{h_3}	IC_z	IC_{h_1}
0.05	2	IC_g	IC_{h_4}	IC_{h_3}	IC_t	IC_z	IC_{h_1}
0.05	5	IC_g	IC_{h_3}	IC_t	IC_z	IC_{h_1}	IC_{h_4}
0.05	10	IC_g	IC_{h_1}	IC_{h_3}	IC_t	IC_z	IC_{h_4}
0.1	0.1	IC_t	IC_{h_4}	IC_g	IC_{h_1}	IC_{h_3}	IC_z
0.1	0.5	IC_{h_4}	IC_g	IC_{h_1}	IC_t	IC_{h_3}	IC_z
0.1	1	IC_{h_4}	IC_g	IC_{h_3}	IC_t	IC_z	IC_{h_1}
0.1	2	IC_g	IC_{h_4}	IC_{h_3}	IC_t	IC_z	IC_{h_1}
0.1	5	IC_g	IC_{h_3}	IC_t	IC_{h_1}	IC_z	IC_{h_4}
0.1	10	IC_g	IC_{h_1}	IC_{h_3}	IC_t	IC_z	IC_{h_4}
0.2	0.1	IC_t	IC_{h_4}	IC_g	IC_{h_1}	IC_{h_3}	IC_z
0.2	0.5	IC_{h_4}	IC_g	IC_{h_1}	IC_{h_3}	IC_t	IC_z
0.2	1	IC_{h_4}	IC_g	IC_{h_3}	IC_{h_1}	IC_t	IC_z
0.2	2	IC_{h_4}	IC_g	IC_{h_3}	IC_t	IC_z	IC_{h_1}
0.2	5	IC_g	IC_{h_3}	IC_{h_1}	IC_{h_4}	IC_t	IC_z
0.2	10	IC_g	IC_{h_1}	IC_{h_3}	IC_t	IC_z	IC_{h_4}
0.5	0.1	IC_{h_4}	IC_g	IC_{h_1}	IC_t	IC_{h_3}	IC_z
0.5	0.5	IC_{h_4}	IC_g	IC_{h_1}	IC_{h_3}	IC_t	IC_z
0.5	1	IC_{h_4}	IC_g	IC_{h_3}	IC_{h_1}	IC_t	IC_z
0.5	2	IC_{h_4}	IC_g	IC_{h_3}	IC_{h_1}	IC_t	IC_z
0.5	5	IC_g	IC_{h_1}	IC_{h_4}	IC_{h_3}	IC_t	IC_z
0.5	10	IC_g	IC_{h_1}	IC_{h_3}	IC_{h_4}	IC_t	IC_z

Table 6.1: Les 36 classements des six intervalles selon (6.3).

Quant à notre intervalle IC_g , son comportement par rapport aux autres intervalles est excellent puisqu'il n'apparaît jamais en deçà de la troisième position. Si on fait un classement général, en additionnant les rangs obtenus par les intervalles dans les 36 classements, on voit que l'intervalle IC_g arrive nettement en tête:

1.	IC_g	55
2.	IC_{h_4}	102
3.	IC_t	125
4.	IC_{h_3}	130
5.	IC_{h_1}	152
6.	IC_z	192

Il convient toutefois de préciser que lorsque l'on connaît la distribution de la population, il est certainement préférable d'utiliser un intervalle de confiance spécialement conçu à cet effet. Dans le cadre de ces lois gammas, on a effectué encore quelques simulations en calculant un intervalle de confiance basé sur la méthode du rapport de vraisemblance (voir par exemple Barndorff-Nielsen et Cox, 1994, section 6.6). Bien que la méthode utilisée ne produise des intervalles de confiance corrects qu'au premier ordre, leurs performances se sont avérées meilleures que celles des intervalles considérés dans cette thèse, et ceci pour un grand nombre des 216 possibilités vues ci-dessus. Notons cependant que pour calculer de tels intervalles, on doit connaître la distribution de la population, ce qui n'est pas chose courante.

6.2 Autres lois

On a effectué une deuxième étude de simulation en générant cette fois-ci des échantillons provenant des sept lois décrites dans la table 6.2.

Cette deuxième étude de simulation a été planifiée de façon analogue à la première, c'est-à-dire que l'on a considéré six niveaux pour α et pour n . Les six niveaux de γ/\sqrt{n} ont par contre été remplacés par les sept niveaux

correspondant aux sept lois considérées. On a donc ici pour chaque intervalle un nombre G , un nombre I et un nombre D pour chacune des $7 \cdot 6 \cdot 6 = 252$ possibilités obtenues en combinant ces niveaux. Ces résultats sont donnés en annexe 2 (tables 2.1 à 2.14) et classés respectivement par loi, α , et n .

Une autre différence avec la première étude de simulation est qu'ici, on estime l'asymétrie sur l'échantillon. On a ainsi calculé la quantité

$$\hat{\gamma} = \frac{m_3}{s^3}$$

sur chaque échantillon et on a utilisé cet estimateur $\hat{\gamma}$ pour calculer les intervalles de confiance IC_g , IC_{h_1} , IC_{h_3} et IC_{h_4} à la place de la valeur théorique γ . La quantité m_3 désigne le 3ème moment centré de l'échantillon. Notons que l'on a utilisé la formule

$$m_3 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})}{n} \cdot \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}$$

qui est un estimateur non biaisé du 3ème moment de la population, alors que la plupart du temps, le facteur $n^2/((n-1)(n-2))$ est négligé dans la littérature.

Dans l'ensemble, les résultats de cette deuxième étude simulation sont nettement meilleurs que ceux de la première. Afin de comparer les performances des différents intervalles, on a aussi calculé pour chacun d'eux et pour chacune des 252 possibilités une distance du χ^2 entre les résultats empiriques et les résultats théoriques. On a toutefois différencié les cas où la loi est symétrique (les trois premières lois de la table 6.2) des cas où la loi est asymétrique (les quatre dernières lois de la table 6.2). Dans les cas où la loi est asymétrique, on a calculé pour chaque intervalle, pour chaque α et pour chaque n un coefficient

$$\chi_c^2(\text{loi}, \alpha, n) = \frac{(G - N \cdot \alpha/2)^2}{N \cdot \alpha/2} + \frac{(I - N \cdot (1 - \alpha))^2}{N \cdot (1 - \alpha)} + \frac{(D - N \cdot \alpha/2)^2}{N \cdot \alpha/2} \quad (6.4)$$

analogue à (6.2). Par contre, dans les cas où la loi est symétrique, on a

calculé un autre coefficient

$$\begin{aligned}\chi_c^2(\text{loi}, \alpha, n) &= \frac{2\left(\frac{G+D}{2} - N \cdot \alpha/2\right)^2}{N \cdot \alpha/2} + \frac{(I - N \cdot (1 - \alpha))^2}{N \cdot (1 - \alpha)} \\ &= \frac{(G + D - N \cdot \alpha)^2}{N \cdot \alpha} + \frac{(I - N \cdot (1 - \alpha))^2}{N \cdot (1 - \alpha)}\end{aligned}\quad (6.5)$$

arguant du fait que lorsque la loi est symétrique, la probabilité que μ soit à gauche de l'intervalle est égale à la probabilité que μ soit à droite de l'intervalle. Cette probabilité est ainsi estimée par la quantité $(G + D)/(2N)$.

On n'a pas agrégé ces distances du χ^2 comme on l'a fait dans la première étude de simulation avec la formule (6.3). On a ainsi 252 coefficients $\chi_c^2(\text{loi}, \alpha, n)$ et donc 252 possibilités de classer les intervalles de confiance. Afin de réduire un peu le nombre de ces classements, on a fait un classement général pour les sept lois considérées. Pour chaque loi, on a additionné les rangs obtenus par les différents intervalles dans les 36 classements relatifs à cette loi. Ces classements généraux sont donnés dans la table 6.3. Les tables 6.4 à 6.10 pour leur part nous donnent une vue d'ensemble des intervalles pour lesquels les $\chi_c^2(\text{loi}, \alpha, n)$ sont non significatifs au seuil de 5%, c'est-à-dire plus petits que 5.99 ou 3.84 selon que la loi soit respectivement asymétrique ou symétrique (ce sont les cas où les résultats empiriques concordent avec les résultats théoriques). Les intervalles considérés sont ici abrégés par z , t , g , h_1 , h_3 et h_4 .

On voit que pour la loi normale, IC_t est non significatif dans (presque) tous les cas, confirmant ainsi la théorie. D'une manière générale, les cinq autres intervalles sont non significatifs à partir d'une taille $n = 50$. Notons toutefois le deuxième rang au classement général de IC_g . Pour la loi uniforme, les intervalles IC_t , IC_g , IC_{h_1} et IC_{h_4} sont meilleurs que les autres, surtout lorsque n et α sont petits. Les résultats sont dans l'ensemble moins bons pour la loi de Laplace où IC_g y réalise ses moins bonnes performances, comme d'une manière générale les intervalles conçus pour corriger l'asymétrie (IC_{h_4} et surtout IC_{h_1}), alors que IC_t reste le meilleur de ces intervalles.

Loi	Symbole	μ	γ
Loi normale centrée réduite	\mathcal{N}	0	0
Loi uniforme sur $[0;1]$	\mathcal{U}	1/2	0
Loi de Laplace de variance 2	\mathcal{L}	0	0
Loi normale c.r. en valeur absolue	$ \mathcal{N} $	$\sqrt{2/\pi}$	$\frac{\sqrt{2(4-\pi)}}{\sqrt{(\pi-2)^3}} \cong 1$
(-1)*Loi normale c.r. en v.a.	$- \mathcal{N} $	$-\sqrt{2/\pi}$	$-\frac{\sqrt{2(4-\pi)}}{\sqrt{(\pi-2)^3}} \cong -1$
Loi du chi carré avec 1 d.l.	χ^2	1	$\sqrt{8}$
(-1)*Loi du chi carré avec 1 d.l.	$-\chi^2$	-1	$-\sqrt{8}$

Table 6.2: Les sept lois considérées lors de la deuxième simulation.

Loi	1.	2.	3.	4.	5.	6.
\mathcal{N}	IC_t	IC_g	IC_z	IC_{h_4}	IC_{h_3}	IC_{h_1}
\mathcal{U}	IC_t	IC_g	IC_{h_1}	IC_{h_4}	IC_{h_3}	IC_z
\mathcal{L}	IC_t	IC_z	IC_{h_3}	IC_g	IC_{h_4}	IC_{h_1}
$ \mathcal{N} $	IC_{h_4}	IC_g	IC_{h_1}	IC_t	IC_{h_3}	IC_z
$- \mathcal{N} $	IC_{h_4}	IC_g	IC_{h_1}	IC_t	IC_{h_3}	IC_z
χ^2	IC_{h_4}	IC_g	IC_{h_1}	IC_t	IC_{h_3}	IC_z
$-\chi^2$	IC_{h_4}	IC_g	IC_{h_1}	IC_t	IC_{h_3}	IC_z

Table 6.3: Les classements des six intervalles par loi.

	$\alpha = 0.001$	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5
$n = 5$	t	t	t	t	t	t
10	t	t	t	t	t	t
20	t	t		t	t	$t g$ $h_1 h_3 h_4$
30	t	t	t	t	$z t g$ $h_3 h_4$	t
50	$t g$ h_3	$z t g$ $h_3 h_4$	$z t g$ $h_3 h_4$	$z t g$ $h_3 h_4$	$z t g$ $h_1 h_3 h_4$	$z t g$ $h_1 h_3 h_4$
100	$z t g$ $h_1 h_3 h_4$	$z g$ $h_1 h_3 h_4$	$z t g$ $h_1 h_3 h_4$	$z t g$ $h_1 h_3 h_4$	$z t g$ $h_1 h_3 h_4$	

Table 6.4: Les intervalles non significatifs dans le cas de la loi \mathcal{N} .

	$\alpha = 0.001$	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5
$n = 5$					t	h_3
10			$t h_4$	$t g h_1$	$t g h_1$	$t g$ $h_1 h_3 h_4$
20	$t h_4$	$t h_1$	$t g$ $h_1 h_4$	t	$t h_3$	$z t g$ $h_1 h_3 h_4$
30	$t g$ $h_1 h_4$	$t g$ $h_1 h_4$	$t g h_1$	$t g h_1$	$t g$ $h_1 h_3 h_4$	$z t g$ $h_1 h_3 h_4$
50	$t g$ $h_1 h_4$	$t g$ $h_1 h_4$	$z t g$ $h_1 h_3 h_4$	$z t h_3$	$z t g$ $h_1 h_3 h_4$	$z t g$ $h_1 h_3 h_4$
100		$t g$ $h_1 h_4$	$t g$ $h_1 h_3 h_4$	$z t g$ $h_1 h_3 h_4$	$z t g$ $h_1 h_3 h_4$	$z t g$ $h_1 h_3 h_4$

Table 6.5: Les intervalles non significatifs dans le cas de la loi \mathcal{U} .

	$\alpha = 0.001$	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5
$n = 5$	t				t	
10	t			t	t	
20	t		t	t	t	
30		z	t	t	t	
50	$z g h_3$	$z h_3$	t	t	$z t$	$z t g$ $h_1 h_3 h_4$
100	$z t h_3$	$z t h_3$	$z t h_3$	$z t h_3$	$z t h_3$	$z t g$ $h_1 h_3 h_4$

Table 6.6: Les intervalles non significatifs dans le cas de la loi \mathcal{L} .

	$\alpha = 0.001$	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5
$n = 5$						
10						
20						$g h_1 h_4$
30						$g h_1 h_4$
50				$g h_1 h_4$		$g h_1 h_3 h_4$
100	$g h_1 h_4$	$h_1 h_4$	$g h_1 h_4$	$g h_1 h_4$	$g h_1 h_4$	$g h_1 h_4$

Table 6.7: Les intervalles non significatifs dans le cas de la loi $|\mathcal{N}|$.

	$\alpha = 0.001$	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5
$n = 5$						
10						h_4
20						h_4
30	h_4			h_4	h_4	h_4
50		h_4	h_4	$g h_1 h_4$	$g h_4$	$g h_1 h_3 h_4$
100	$g h_1 h_4$	$g h_1 h_4$	h_4	$g h_1 h_4$	$g h_1 h_4$	$z t g$ $h_1 h_3 h_4$

Table 6.8: Les intervalles non significatifs dans le cas de la loi $-|\mathcal{N}|$.

	$\alpha = 0.001$	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5
$n = 5$						
10						
20						
30						
50						
100						h_4

Table 6.9: Les intervalles non significatifs dans le cas de la loi χ^2 .

	$\alpha = 0.001$	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5
$n = 5$						
10						
20						
30						
50						
100		h_4				h_4

Table 6.10: Les intervalles non significatifs dans le cas de la loi $-\chi^2$.

Le cas de la loi normale en valeur absolue représente une loi d'asymétrie modérée. On voit que les intervalles adaptés pour ce genre de cas tels IC_g , IC_{h_1} et surtout IC_{h_4} donnent des résultats non significatifs lorsque n est suffisamment grand. C'est le cadre typique où ils améliorent de manière convaincante les performances des intervalles traditionnels. Dans le cas d'une loi plus asymétrique, comme celle d'un χ^2 avec 1 degré de liberté, ces intervalles restent meilleurs que les intervalles traditionnels même s'ils sont trouvés significatifs, sauf IC_{h_4} dans quelques rares cas. Ce dernier est dans l'ensemble le meilleur intervalle dans les cas asymétriques devant IC_g .

6.3 Comparaison avec le bootstrap

Dans le but de pouvoir mieux apprécier les qualités des intervalles de confiance présentés dans cette thèse, on a procédé à une troisième étude de simulation où l'on a comparé ces intervalles aux intervalles bootstrap introduits au chapitre 2. Pour ce faire, on a généré des échantillons provenant des cinq premières lois de la table 6.2, de taille $n = 20$ et $n = 50$. On a ici considéré cinq possibilités pour α , à savoir

$$\alpha = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5,$$

et à la différence des deux premières études de simulation, on a calculé ici les intervalles de confiance pour les cinq niveaux de α sur un seul et même échantillon. D'autre part, pour chacune des dix possibilités considérées (les cinq lois et les deux tailles d'échantillons), on a généré non pas $N = 10'000$ échantillons, mais seulement $N = 1000$ échantillons (le temps de calcul pour les intervalles bootstrap étant plus long), ce qui explique notre choix de ne pas considérer le cas $\alpha = 0.001$ pour lequel les estimations ne seraient pas très précises.

En plus des six intervalles considérés dans les deux premières études de simulation, on a calculé ici les trois types d'intervalles bootstrap décrits à

la section 2.5.1, à savoir l'intervalle bootstrap- t , l'intervalle percentile bootstrap et l'intervalle bootstrap BCa. Ces trois intervalles seront symbolisés par IC_{b_t} , IC_{b_p} et IC_{bc_a} ou simplement par b_t , b_p et bc_a . Pour calculer ces intervalles bootstrap, on a utilisé dans chaque cas un nombre $B = 1000$ sous-échantillons. Les résultats de ces simulations se trouvent en annexe 3 (tables 3.1 à 3.6) et classés respectivement par n , par loi et par α .

Pour chaque intervalle, et pour chaque loi, chaque n et chaque α considérés, on a aussi calculé une distance du χ^2 entre les résultats empiriques et les résultats théoriques en utilisant les formules (6.4) ou (6.5) selon que la loi soit respectivement asymétrique ou symétrique. Un classement des neuf intervalles s'avère dès lors possible. En considérant les cinq niveaux de α , cela fait donc $10 \cdot 5 = 50$ façons de classer les intervalles de confiance. Les intervalles pour lesquels les $\chi_c^2(\text{loi}, \alpha, n)$ sont trouvés non significatifs à 5%, c'est-à-dire plus petits que 5.99 ou 3.84 selon que la loi soit respectivement asymétrique ou symétrique, sont donnés dans la table 6.11. Par ailleurs, on a agrégé les $\chi_c^2(\text{loi}, \alpha, n)$ par α , ce qui nous donne des coefficients de type

$$\chi_C^2(\text{loi}, n) = \sum_{\alpha=0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5} \chi_c^2(\text{loi}, \alpha, n), \quad (6.6)$$

arguant du fait que sur un même échantillon, les intervalles ont été calculés pour chaque α . Les classements des intervalles selon ces $\chi_C^2(n, \text{loi})$ sont donnés dans la table 6.12.

Notons que les résultats de cette étude de simulation sont moins précis que ceux obtenus à la section 6.2, du fait que l'on a généré seulement 1000 échantillons pour chaque cas considéré. Ceci explique sans doute certaines irrégularités observées, notamment le fait que l'intervalle IC_t n'est pas toujours en première position lorsque la loi est normale, et le fait que les résultats obtenus pour des échantillons provenant d'une loi uniforme sont meilleurs pour $n = 20$ que pour $n = 50$. Une autre conséquence de ce nombre restreint d'échantillons générés est que, d'une manière générale, il y a beaucoup plus d'intervalles trouvés non-significatifs, et ceci pour toutes les lois (mais surtout

Loi	n	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5
\mathcal{N}	20	<i>z t g</i>	<i>z t g</i>	<i>z t g</i>	<i>z t g</i>	<i>t</i>
		$h_1 h_3 h_4$	$h_1 h_3 h_4$	$h_1 h_3 h_4$	$h_1 h_3 h_4$	
		$b_t b_p b c_a$	$b_t b_p b c_a$	$b_t b_p b c_a$	$b_t b_p b c_a$	b_t
	50	<i>z t g</i>	<i>t</i>	<i>z t g</i>	<i>z t g</i>	<i>z t g</i>
		$h_1 h_3 h_4$		$h_1 h_3 h_4$	$h_1 h_3 h_4$	$h_1 h_3 h_4$
		$b_t b_p b c_a$	b_t	$b_t b_p b c_a$	$b_t b_p b c_a$	$b_t b_p b c_a$
\mathcal{U}	20	<i>t g</i>	<i>t g</i>	<i>z t g</i>	<i>z t g</i>	<i>z t g</i>
		$h_1 h_3 h_4$	$h_1 h_3 h_4$	$h_1 h_3 h_4$	$h_1 h_3 h_4$	$h_1 h_3 h_4$
		$b_t b_p b c_a$	$b c_a$	$b_p b c_a$	$b_t b c_a$	$b_t b c_a$
	50	<i>z t g</i>	<i>z t g</i>	<i>z t g</i>	<i>z t g</i>	<i>t</i>
		$h_1 h_3 h_4$	$h_1 h_3 h_4$	$h_1 h_3 h_4$	$h_1 h_3 h_4$	
		$b_t b_p b c_a$	$b_p b c_a$	$b_t b_p b c_a$	$b_t b_p b c_a$	
\mathcal{L}	20	<i>z t</i>	<i>t</i>			<i>z t g</i>
		h_3				$h_1 h_3 h_4$
		b_t				$b_t b_p$
	50	<i>z t g</i>	<i>z t</i>	<i>z t g</i>	<i>z g</i>	<i>g</i>
		h_3	h_3	$h_1 h_3 h_4$	$h_1 h_3 h_4$	$h_1 h_3 h_4$
		$b_t b_p$	$b_t b_p$	$b_t b_p b c_a$	$b_t b_p b c_a$	$b_t b c_a$
$ \mathcal{N} $	20					<i>g</i>
					h_4	$h_1 h_3 h_4$
		b_t			$b_t b c_a$	$b_t b c_a$
	50	<i>t g</i>	<i>g</i>	<i>g</i>	<i>t g</i>	<i>g</i>
		$h_1 h_3 h_4$	$h_1 h_4$	$h_1 h_4$	$h_1 h_3 h_4$	$h_1 h_4$
		$b_t b_p b c_a$	$b_t b c_a$	$b_t b c_a$	$b_t b_p b c_a$	$b_t b c_a$
χ^2	20					b_t
						<i>g</i>
			h_4	h_4	h_4	$h_1 h_4$
	50					<i>g</i>
			h_4	h_4	h_4	$h_1 h_4$
		b_t		b_t	b_t	$b_t b c_a$

Table 6.11: Les intervalles non significatifs lors de la troisième étude de simulation.

Loi	n	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
\mathcal{N}	20	IC_{h_4}	IC_g	IC_{h_3}	IC_{h_1}	IC_z	IC_t	IC_{b_p}	IC_{bc_a}	IC_{b_t}
	50	IC_t	IC_{b_t}	IC_{h_4}	IC_g	IC_{h_1}	IC_z	IC_{h_3}	IC_{b_p}	IC_{bc_a}
\mathcal{U}	20	IC_t	IC_g	IC_{h_1}	IC_{bc_a}	IC_{h_4}	IC_{h_3}	IC_z	IC_{b_p}	IC_{b_t}
	50	IC_t	IC_g	IC_{h_1}	IC_{h_4}	IC_{h_3}	IC_z	IC_{bc_a}	IC_{b_p}	IC_{b_t}
\mathcal{L}	20	IC_t	IC_z	IC_{h_3}	IC_{b_t}	IC_{b_p}	IC_g	IC_{h_4}	IC_{bc_a}	IC_{h_1}
	50	IC_{h_3}	IC_z	IC_{b_t}	IC_{b_p}	IC_g	IC_t	IC_{h_4}	IC_{bc_a}	IC_{h_1}
$ \mathcal{N} $	20	IC_{b_t}	IC_{h_4}	IC_{h_1}	IC_g	IC_{bc_a}	IC_t	IC_{h_3}	IC_{b_p}	IC_z
	50	IC_{h_4}	IC_{h_1}	IC_g	IC_{b_t}	IC_{bc_a}	IC_{b_p}	IC_{h_3}	IC_t	IC_z
χ^2	20	IC_{b_t}	IC_{h_4}	IC_{h_1}	IC_{bc_a}	IC_g	IC_t	IC_{b_p}	IC_{h_3}	IC_z
	50	IC_{h_4}	IC_{b_t}	IC_g	IC_{bc_a}	IC_{h_1}	IC_{b_p}	IC_{h_3}	IC_t	IC_z

Table 6.12: Les classements des neuf intervalles par loi et par n selon (6.6).

pour les lois symétriques), les $\chi_c^2(\text{loi}, \alpha, n)$ étant en moyenne dix fois plus petits.

Il est dès lors plus délicat de comparer les performances de ces intervalles. Néanmoins, on peut remarquer clairement certaines tendances, notamment que dans les cas asymétriques, les intervalles IC_{h_4} et IC_{b_t} ressortent du lot, devant les autres intervalles conçus pour corriger l'asymétrie, à savoir IC_{h_1} , IC_g et IC_{bc_a} . Il est à noter que IC_{h_1} s'avère meilleur ici que IC_g dans les cas asymétriques. En effet, il n'est pas handicapé par des échantillons de faible taille pour lesquels ses performances étaient très mauvaises. Par contre, il demeure en dernière position lorsque la loi générée est de Laplace. Par ailleurs, il y a une correspondance totale entre les performances des intervalles IC_g et IC_{h_1} dans les cas uniformes (qui sont en fait ex-aequo dans les classements de la table 6.12 pour cette loi). Quant à notre intervalle IC_g , il est également bien placé dans les cas symétriques, notamment lorsque la loi est uniforme.

6.4 Conclusion

Dans l'ensemble, le comportement de notre intervalle IC_g répond à notre attente. Dans la première étude de simulation, on a montré que dans des situations extrêmes, c'est l'intervalle qui rencontre le moins de problèmes parmi les intervalles étudiés et qui présente la meilleure "performance". Dans la deuxième étude de simulation où on a considéré des situations plus réalistes, il se comporte de façon tout à fait honorable à la fois pour des lois symétriques (derrière IC_t) que pour des lois asymétriques (derrière IC_{hd}). Ceci est ensuite confirmé lors de la troisième étude de simulation où des méthodes bootstrap sont également prises en compte. On en conclut que l'intervalle de confiance adaptatif IC_g peut être utilisé à la fois dans les cas symétriques et dans les cas asymétriques.

Chapitre 7

Exemples d'application

7.1 Cas d'une asymétrie positive

Dans ce chapitre, on se propose de calculer les intervalles de confiance présentés dans cette thèse, et notamment notre intervalle de confiance IC_g , en utilisant un ensemble de données constitué du poids du corps en kilogrammes et du poids du cerveau en grammes de 28 espèces animales (voir Hand et. al, 1994, p. 232). De ces 28 animaux, on a retiré trois d'entre eux qui représentent des dinosaures et qui possèdent un poids du corps par trop disproportionné. Les données pour les 25 espèces restantes sont reproduites dans la table 7.1. On fait l'hypothèse que ces 25 espèces forment un échantillon provenant d'un ensemble d'espèces plus général constituant notre population.

En ce qui concerne le poids du corps, on calcule à partir de cet échantillon x_1, \dots, x_n de taille

$$n = 25$$

les estimations

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = 467.85 \\ s &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} = 1387.39\end{aligned}$$

espèce animale	corps (en kg)	log(corps)	cerveau (en g)	cerveau/corps (en g/kg)
castor de montagne	1.350	0.300	8.1	6.000
vache	465.000	6.142	423.0	0.910
loup gris	36.330	3.593	119.5	3.289
chèvre	27.660	3.320	115.0	4.158
cobaye	1.040	0.039	5.5	5.288
éléphant Indien	2547.000	7.843	4603.0	1.807
âne	187.100	5.232	419.0	2.239
cheval	521.000	6.256	655.0	1.257
singe potar	10.000	2.303	115.0	11.500
chat	3.300	1.194	25.6	7.758
girafe	529.000	6.271	680.0	1.285
gorille	207.000	5.333	406.0	1.961
humain	62.000	4.127	1320.0	21.290
éléphant africain	6654.000	8.803	5712.0	0.858
singe rhésus	6.800	1.917	179.0	26.324
kangourou	35.000	3.555	56.0	1.600
hamster	0.120	-2.120	1.0	8.333
souris	0.023	-3.772	0.4	17.391
lapin	2.500	0.916	12.1	4.840
mouton	55.500	4.016	175.0	3.153
jaguar	100.000	4.605	157.0	1.570
chimpanzé	52.160	3.954	440.0	8.436
rat	0.280	-1.273	1.9	6.786
taupe	0.122	-2.104	3.0	24.590
porc	192.000	5.257	180.0	0.938

Table 7.1: Données utilisées dans les exemples du chapitre 7.

$$\begin{aligned}\hat{\gamma} &= \frac{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{n} \cdot \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}}{\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}\right)^{3/2}} \\ &= \frac{\sqrt{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)^{3/2}} \cdot \frac{\sqrt{(n-1)n}}{(n-2)} \\ &= 4.14\end{aligned}$$

pour respectivement la moyenne μ , la variance σ^2 et le coefficient d'asymétrie γ de la population. Si on choisit pour nos intervalles le niveau habituel de 0.95, c'est-à-dire

$$\alpha = 0.05$$

on a donc

$$z_{0.025} = 1.96$$

$$t_{0.025, 24} = 2.06$$

et ainsi les intervalles de confiance pour μ au niveau 0.95

$$IC_x = [-75.99; 1011.70]$$

$$IC_t = [-104.83; 1040.54]$$

qui recouvrent des valeurs négatives (bien que la moyenne μ de la population est par définition positive).

Les transformations inverses de $t = \sqrt{n}(\bar{x} - \mu)/s$ proposées au chapitre 2 sont ici données par

$$h_1^{-1}(t) = t - \frac{4.14}{\sqrt{25}} \frac{(2 \cdot 1.96^2 + 1)}{6} = t - 1.198$$

$$h_3^{-1}(t) = t - \frac{4.14}{6\sqrt{25}} = t - 0.138$$

$$h_4^{-1}(t) = \frac{3\sqrt{25}}{4.14} \left(1 + \frac{4.14}{\sqrt{25}} \left(t - \frac{4.14}{6\sqrt{25}}\right)\right)^{1/3} - \frac{3\sqrt{25}}{4.14}$$

$$h_5^{-1}(t) = \frac{3\sqrt{25}}{2 \cdot 4.14} \log \left(\frac{2 \cdot 4.14}{3\sqrt{25}} \left(t - \frac{4.14}{6\sqrt{25}}\right) + 1 \right).$$

Rappelons que la transformation h_2 ne permet pas de définir un intervalle de confiance. Au point $t = z_{\alpha/2} = 1.96$, on a

$$h_1^{-1}(1.96) = 0.762$$

$$h_3^{-1}(1.96) = 1.822$$

$$h_4^{-1}(1.96) = 1.300$$

$$h_5^{-1}(1.96) = 1.261$$

et au point $t = -z_{\alpha/2} = -1.96$, on a

$$h_1^{-1}(-1.96) = -3.158$$

$$h_3^{-1}(-1.96) = -2.098$$

$$h_4^{-1}(-1.96) = -6.896$$

alors que $h_5^{-1}(-1.96)$ n'est pas défini, et donc la borne droite de IC_{h_5} non plus. On obtient les intervalles

$$IC_{h_1} = [256.54; 1344.23]$$

$$IC_{h_3} = [-37.70; 1049.99]$$

$$IC_{h_4} = [107.19; 2381.20]$$

On voit que les intervalles conçus pour corriger l'asymétrie IC_{h_1} et IC_{h_4} ont une borne gauche positive.

Calculons à présent l'intervalle IC_g . Comme l'asymétrie est positive ($\hat{\gamma} > 0$), on a

$$\begin{aligned} g &= 1 - \frac{\Phi\left(-1.96 - \frac{4.14}{6\sqrt{25}}(2 \cdot 1.96^2 + 1)\right)}{0.05} \\ &= 1 - \frac{\Phi(-3.158)}{0.05} = 1 - \frac{0.00079}{0.05} \\ &= 0.9842. \end{aligned}$$

On est presque dans le cas d'une asymétrie maximale représenté par $g = 1$.

On a ainsi

$$z_{g\alpha} = z_{0.04921} = 1.653$$

$$z_{(1-g)\alpha} = z_{0.00079} = 3.160$$

et l'intervalle de confiance

$$IC_g = [9.29; 1344.23].$$

On voit que la borne droite de IC_g coïncide avec celle de IC_{h_1} , alors que la borne gauche est également positive.

7.2 Cas d'une asymétrie négative

Il est recommandé selon Hand et. al (1994, p. 232) de transformer ces données en prenant un logarithme. On a ainsi transformé la variable "poids du corps". Ces données ainsi transformées se trouvent en troisième colonne de la table 7.1. En utilisant les mêmes formules que dans la section 7.1, on calcule pour cette variable transformée

$$\bar{x} = 3.028$$

$$s = 3.175$$

$$\hat{\gamma} = -0.358$$

L'asymétrie est ainsi fortement réduite par cette transformation. Les intervalles de confiance IC_z et IC_t sont ici

$$IC_z = [1.76; 4.30]$$

$$IC_t = [1.69; 4.37].$$

De plus, on a

$$h_1^{-1}(t) = t + \frac{0.358(2 \cdot 1.96^2 + 1)}{\sqrt{25} \cdot 6} = t + 0.104$$

$$h_3^{-1}(t) = t + \frac{0.358}{6\sqrt{25}} = t + 0.012$$

$$h_4^{-1}(t) = \frac{-3\sqrt{25}}{0.358} \left(1 - \frac{0.358}{\sqrt{25}} \left(t + \frac{0.358}{6\sqrt{25}} \right) \right)^{1/3} + \frac{3\sqrt{25}}{0.358}$$

$$h_5^{-1}(t) = \frac{-3\sqrt{25}}{2 \cdot 0.358} \log \left(\frac{-2 \cdot 0.358}{3\sqrt{25}} \left(t + \frac{0.358}{6\sqrt{25}} \right) + 1 \right).$$

Au point $t = z_{\alpha/2} = 1.96$, on a

$$h_1^{-1}(1.96) = 2.064$$

$$h_3^{-1}(1.96) = 1.972$$

$$h_4^{-1}(1.96) = 2.073$$

$$h_5^{-1}(1.96) = 2.084$$

et au point $t = -z_{\alpha/2} = -1.96$, on a

$$h_1^{-1}(-1.96) = -1.856$$

$$h_3^{-1}(-1.96) = -1.948$$

$$h_4^{-1}(-1.96) = -1.864$$

$$h_5^{-1}(-1.96) = -1.852$$

On obtient les intervalles

$$IC_{h_1} = [1.69; 4.23]$$

$$IC_{h_3} = [1.75; 4.29]$$

$$IC_{h_4} = [1.68; 4.23]$$

$$IC_{h_5} = [1.68; 4.23].$$

On remarque que les intervalles IC_{h_1} , IC_{h_4} et IC_{h_5} sont très proches les uns des autres. On remarque également que l'intervalle IC_{h_3} est ici bien défini.

Calculons à présent l'intervalle IC_g . Comme l'asymétrie est négative ($\hat{\gamma} < 0$), on a

$$g = \frac{\Phi \left(-1.96 - \frac{0.358}{6\sqrt{25}} (2 \cdot 1.96^2 + 1) \right)}{0.05}$$

$$= \frac{\Phi(-2.064)}{0.05} = \frac{0.0195}{0.05}$$

$$= 0.39.$$

On n'est pas très loin du cas symétrique représenté par $g = 0.5$. On obtient

$$\begin{aligned} z_{g\alpha} &= z_{0.0195} = 2.064 \\ z_{(1-g)\alpha} &= z_{0.0305} = 1.873 \end{aligned}$$

et l'intervalle de confiance

$$IC_g = [1.69; 4.24].$$

On a donc que c'est la borne gauche de IC_g qui coïncide avec celle de IC_{h_1} .

7.3 Tests d'hypothèse

Pour illustrer une procédure de test d'hypothèse en utilisant les intervalles étudiés dans cette thèse, on considère la variable constituant le rapport entre le poids du cerveau et le poids du corps de ces 25 espèces animales. Cette variable est donnée en dernière colonne de la table 7.1. Toujours en utilisant les mêmes formules que dans la section 7.1, on calcule pour cette variable

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 6.942 \\ s &= 7.571 \\ \hat{\gamma} &= 1.579 \end{aligned}$$

Supposons que l'on veuille tester l'hypothèse nulle

$$H : \mu = 4$$

contre l'hypothèse alternative

$$H_1 : \mu \neq 4,$$

c'est-à-dire effectuer un test bilatéral. Comme $\mu_0 = 4$, on a ici

$$t_0 = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{s} = \frac{\sqrt{25}(6.942 - 4)}{7.571} = 1.943.$$

On va calculer la valeur p pour tous les intervalles considérés dans cette thèse. Pour l'intervalle IC_z , on a

$$p = 2\Phi(-1.943) = 0.052$$

où $\Phi(x)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, alors que pour l'intervalle IC_t , on a

$$p = 2\Phi_{24}(-1.943) = 0.064$$

où $\Phi_{24}(x)$ est la fonction de répartition de la loi de Student avec 24 degrés de liberté. On s'aperçoit donc que l'hypothèse nulle est acceptée (de peu) au seuil de signification habituel $\alpha = 0.05$.

Les transformations proposées au chapitre 2 sont ici

$$h_2(t_0) = t_0 + \frac{1.579}{\sqrt{25}} \cdot \frac{(2t_0^2 + 1)}{6} = 0.105t_0^2 + t_0 + 0.053$$

$$h_3(t_0) = t_0 + \frac{1.579}{6\sqrt{25}} = t_0 + 0.053$$

$$\begin{aligned} h_4(t_0) &= t_0 + \frac{1.579}{\sqrt{25}} \cdot \frac{(2t_0^2 + 1)}{6} + \frac{1.579^2}{25} \cdot \frac{t_0^3}{27} \\ &= 0.004t_0^3 + 0.105t_0^2 + t_0 + 0.053 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_5(t_0) &= \frac{3\sqrt{25}}{2 \cdot 1.579} \left(\exp\left(\frac{2 \cdot 1.579}{3\sqrt{25}} t_0\right) - 1 \right) + \frac{1.579}{6\sqrt{25}} \\ &= 4.750 \cdot \exp\left(\frac{t_0}{4.750}\right) - 4.697. \end{aligned}$$

Rappelons que la transformation h_1 ne se prête pas à une procédure de test d'hypothèse. Au point $t_0 = 1.943$, on a donc

$$h_2(1.943) = 2.392$$

$$h_3(1.943) = 1.996$$

$$h_4(1.943) = 2.422$$

$$h_5(1.943) = 2.454$$

et on obtient les valeurs p associées respectivement à IC_{h_2} , IC_{h_3} , IC_{h_4} et IC_{h_5}

$$p = 2\Phi(-2.392) = 0.017$$

$$p = 2\Phi(-1.996) = 0.046$$

$$p = 2\Phi(-2.422) = 0.015$$

$$p = 2\Phi(-2.454) = 0.014$$

L'hypothèse nulle est ici rejetée dans les quatre cas au seuil de signification $\alpha = 0.05$, quoique de peu pour IC_{h_3} qui est ici encore très proche de IC_z .

En ce qui concerne notre intervalle IC_g , on procède ici de la manière suivante. On calcule le point

$$m = \bar{x} + \frac{\hat{\gamma}s}{6n} = 6.942 + \frac{1.579 \cdot 7.571}{6 \cdot 25} = 7.022.$$

Comme la valeur testée $\mu_0 = 4$ est inférieure à m , et comme l'asymétrie est positive, la valeur p est la solution de l'équation implicite en p

$$p = \Phi(-1.943) + \Phi\left(-z_{p/2} - \frac{1.579}{6 \cdot \sqrt{25}}(2z_{p/2}^2 + 1)\right).$$

A l'aide de la méthode de la bisection, on trouve

$$p = 0.029$$

c'est-à-dire que l'hypothèse nulle est rejetée au seuil $\alpha = 0.05$.

Supposons que l'on veuille tester à présent l'hypothèse nulle

$$H : \mu = 8$$

contre l'hypothèse alternative

$$H_1 : \mu \neq 8.$$

Comme $\mu_0 = 8$, on a ici

$$t_0 = \frac{\sqrt{25}(6.942 - 8)}{7.571} = -0.699.$$

Pour l'intervalle IC_z , on a

$$p = 2\Phi(-0.699) = 0.485$$

alors que pour l'intervalle IC_t , on a

$$p = 2\Phi_{24}(-0.699) = 0.491.$$

Par ailleurs, comme on a au point $t_0 = -0.699$

$$h_2(-0.699) = -0.595$$

$$h_3(-0.699) = -0.646$$

$$h_4(-0.699) = -0.596$$

$$h_5(-0.699) = -0.597$$

on obtient les valeurs p associées respectivement à IC_{h_2} , IC_{h_3} , IC_{h_4} et IC_{h_5} comme suit

$$p = 2\Phi(-0.595) = 0.552$$

$$p = 2\Phi(-0.646) = 0.518$$

$$p = 2\Phi(-0.596) = 0.551$$

$$p = 2\Phi(-0.597) = 0.551$$

En ce qui concerne notre intervalle IC_g , comme la valeur testée $\mu_0 = 8$ est ici supérieure à m , et comme l'asymétrie est positive, la valeur p est donnée par

$$\begin{aligned} z_{p/2} &= \frac{-1 + \sqrt{1 - \frac{4 \cdot 1.579}{3\sqrt{25}} \left(-0.699 + \frac{1.579}{6\sqrt{25}}\right)}}{(2 \cdot 1.579) / (3\sqrt{25})} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{1.272}}{0.211} = 0.606. \end{aligned}$$

On en déduit

$$p = 2\Phi(-0.606) = 0.545.$$

On remarque que ces valeurs p sont proches les unes des autres et que l'hypothèse nulle est acceptée dans tous les cas au seuil $\alpha = 0.05$.

Considérons à présent un test d'hypothèse unilatéral avec l'hypothèse alternative

$$H_2 : \mu < 8.$$

On a pour les intervalles IC_z et IC_t respectivement

$$p = \Phi(-0.699) = 0.242$$

$$p = \Phi_{24}(-0.699) = 0.246$$

et pour les intervalles IC_{h_2} , IC_{h_3} , IC_{h_4} et IC_{h_5} respectivement

$$p = \Phi(-0.595) = 0.276$$

$$p = \Phi(-0.646) = 0.259$$

$$p = \Phi(-0.596) = 0.276$$

$$p = \Phi(-0.597) = 0.275$$

En ce qui concerne notre intervalle IC_g , comme la valeur testée $\mu_0 = 8$ est supérieure à m , et comme l'asymétrie est positive, la valeur p est donnée par

$$\begin{aligned} z_p &= \frac{-1 + \sqrt{1 - \frac{4 \cdot 1.579}{3\sqrt{25}} \left(-0.699 + \frac{1.579}{6\sqrt{25}}\right)}}{(2 \cdot 1.579) / (3\sqrt{25})} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{1.272}}{0.211} = 0.606 \end{aligned}$$

(on a donc remplacé p par $2p$ dans la formule appropriée). On en déduit

$$p = \Phi(-0.606) = 0.272.$$

On remarque que ces valeurs p ont simplement été divisées par deux par rapport à celles trouvées lors du test bilatéral, et ceci pour tous les intervalles

y compris pour IC_g . L'hypothèse nulle est néanmoins toujours acceptée au seuil $\alpha = 0.05$.

Dans le cas où l'hypothèse alternative est

$$H_3 : \mu > 8$$

on a pour les intervalles IC_z et IC_t respectivement

$$p = \Phi(0.699) = 0.757$$

$$p = \Phi_{24}(-0.699) = 0.754,$$

et pour les intervalles IC_{h_2} , IC_{h_3} , IC_{h_4} et IC_{h_5} respectivement

$$p = \Phi(0.595) = 0.724$$

$$p = \Phi(0.646) = 0.741$$

$$p = \Phi(0.596) = 0.724$$

$$p = \Phi(0.597) = 0.725$$

Ces valeurs p sont toutes égales à 1 moins la valeur p calculée dans le cas où l'hypothèse alternative était $H_2 : \mu < 8$. L'hypothèse nulle est bien entendu acceptée dans chaque cas au seuil $\alpha = 0.05$.

En ce qui concerne notre intervalle IC_g , comme la valeur testée $\mu_0 = 8$ est supérieure à m , la valeur p n'est pas définie. En fait l'hypothèse nulle est acceptée à n'importe quel seuil de signification α entre 0 et 0.5. Rappelons d'autre part que l'intervalle IC_g ne peut pas être utilisé dans une procédure de test unilatéral pour des seuils α supérieurs à 0.5.

Notons enfin que dans le cas où l'on teste l'hypothèse nulle

$$H : \mu = 20$$

contre l'hypothèse alternative

$$H_1 : \mu \neq 20,$$

on a pour IC_{h_2} une valeur p égale à 0.4577, c'est-à-dire que l'on accepte l'hypothèse nulle bien que la valeur de $\bar{x} = 6.942$ soit extrêmement éloignée de $\mu_0 = 20$. Bien entendu, pour tous les autres intervalles, on a ici une valeur p très proche de 0. Ceci correspond au cas où l'intervalle défini par IC_{h_2} est composé de deux intervalles disjoints, le deuxième intervalle comprenant des valeurs fort éloignées de \bar{x} (voir chapitre 5).

Conclusion

Le problème

On considère un échantillon de n observations indépendantes provenant d'une population distribuée selon une loi de moyenne μ inconnue. On suppose cette loi continue et ses six premiers moments finis. A partir de la moyenne \bar{X} et de l'écart-type S de l'échantillon, on veut définir un intervalle de confiance pour μ de la forme

$$IC = \left[\bar{X} - a(\alpha) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} - b(\alpha) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

tel que

$$\Pr \{ \mu < IC \} = \Pr \{ \mu > IC \} = \alpha/2.$$

La solution à ce problème est de poser

$$a(\alpha) = F_T^{-1}(1 - \alpha/2)$$

$$b(\alpha) = F_T^{-1}(\alpha/2)$$

où $F_T^{-1}(x)$ désigne le quantile x de la distribution de $T = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S$. Cette distribution n'est toutefois pas connue, sauf dans le cas particulier où la population est normalement distribuée. En pratique, on utilise généralement les quantiles d'une loi de Student avec $(n - 1)$ degrés de liberté, ou ceux d'une loi normale standardisée

$$a(\alpha) = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = z_{\alpha/2}$$

$$b(\alpha) = \Phi^{-1}(\alpha/2) = -z_{\alpha/2}$$

comme approximations des quantiles de T . On peut montrer que l'on a avec de telles approximations

$$\Pr \{ \mu < IC \} = \Pr \{ \mu > IC \} = \alpha/2 + O(n^{-1})$$

si la distribution de la population est symétrique et

$$\Pr \{ \mu < IC \} = \alpha/2 + O(n^{-1/2})$$

$$\Pr \{ \mu > IC \} = \alpha/2 + O(n^{-1/2})$$

si la distribution de la population est asymétrique. Dans le premier cas, on obtient un intervalle de confiance dit *correct au second ordre*, alors que dans le second cas, on obtient un intervalle de confiance dit *correct au premier ordre*.

Le problème considéré dans cette thèse est de définir un intervalle de confiance qui soit correct au second ordre dans les cas symétriques comme dans les cas asymétriques.

Solutions proposées dans la littérature

Afin de résoudre ce problème, plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature, telles les méthodes bootstrap ou la méthode de la vraisemblance empirique. Parmi ces méthodes, la plus simple est celle qui consiste à déterminer une transformation inversible h de T afin que notre problème soit résolu en posant

$$a(\alpha) = h^{-1}(z_{\alpha/2})$$

$$b(\alpha) = h^{-1}(-z_{\alpha/2}).$$

Parmi les transformations possibles, on a notamment (voir Hall, 1983, 1992a)

$$h_1(T) = T + \frac{\gamma(2z_{\alpha/2}^2 + 1)}{6\sqrt{n}}$$

$$h_4(T) = T + \frac{\gamma(2T^2 + 1)}{6\sqrt{n}} + \frac{\gamma^2 T^3}{27n}$$

où γ est le coefficient d'asymétrie de la population. En pratique γ peut être remplacé dans ces formules par le coefficient d'asymétrie de l'échantillon $\hat{\gamma}$.

En choisissant $h = h_1$, l'intervalle obtenu a toutefois le problème suivant: lorsque l'asymétrie est positive, la borne gauche de l'intervalle n'est pas une fonction croissante de α , et lorsque l'asymétrie est négative, la borne droite de l'intervalle n'est pas une fonction décroissante de α (lorsque α est petit et pour des valeurs de \bar{X} et de S fixées). Il en résulte que μ n'appartient pas à l'intervalle lorsque α est suffisamment petit!

En choisissant $h = h_4$, l'intervalle obtenu a la particularité suivante: lorsque l'asymétrie est positive, la borne droite de l'intervalle n'est pas une fonction croissante de γ , et lorsque l'asymétrie est négative, la borne gauche de l'intervalle n'est pas une fonction décroissante de $-\gamma$ (lorsque $|\gamma|$ est grand et pour des valeurs de \bar{X} et de S fixées). Il en résulte que l'intervalle tend à se réduire à la seule valeur de \bar{X} lorsque l'asymétrie augmente.

Solution proposée dans cette thèse

Notre idée a été de traduire l'asymétrie de la population par une asymétrie de l'intervalle de confiance autour de \bar{X} . Pour ce faire, on a défini un paramètre g entre 0 et 1 et on a considéré l'intervalle de confiance déterminé par

$$\begin{aligned} a(\alpha) &= z_{g\alpha} \\ b(\alpha) &= -z_{(1-g)\alpha}. \end{aligned}$$

Afin de définir g , notre idée a été de garder la bonne borne et de modifier la mauvaise borne de l'intervalle obtenu en utilisant la transformation h_1 . Autrement dit, on fait coïncider sa borne droite avec la borne droite de notre intervalle lorsque l'asymétrie est positive, et on fait coïncider sa borne gauche avec la borne gauche de notre intervalle lorsque l'asymétrie est négative. On trouve comme solution

$$g = 1 - \frac{\Phi\left(h_1^{-1}(-z_{\alpha/2})\right)}{\alpha}$$

lorsque l'asymétrie est positive et

$$g = \frac{\Phi\left(-h_1^{-1}(z_{\alpha/2})\right)}{\alpha}$$

lorsque l'asymétrie est négative. Dans le cas d'une asymétrie nulle, on a $g = 1/2$ et notre intervalle coïncide avec l'intervalle obtenu en utilisant l'approximation normale des quantiles de T .

Notre intervalle de confiance est aussi simple à calculer que celui obtenu en utilisant la transformation h_1 . Il est dit *adaptatif*, dans le sens où sa définition dépend de l'asymétrie de la population. On a montré qu'il est correct au second ordre (lorsque $\alpha \leq 0.5$) et que le comportement de ses bornes par rapport à α et à γ est adéquat. De plus trois études de simulation ont confirmé son bon comportement dans les cas symétriques comme dans les cas asymétriques.

Recherche future

Voici pour terminer trois directions de recherche qu'il est possible d'explorer afin de généraliser les idées développées dans cette thèse:

1. Etudier comment définir une version bootstrap de notre intervalle, afin d'obtenir un intervalle de confiance correct au troisième ordre.
2. Etudier sous quelles conditions on peut définir un tel intervalle de confiance pour un autre paramètre que la moyenne d'une population (par exemple pour la pente d'une régression).
3. Développer un tel intervalle à partir des quantiles d'une loi de Student plutôt que des quantiles d'une loi normale. Dans le cas d'une asymétrie nulle, on obtiendra ainsi l'approximation de Student plutôt que l'approximation normale des quantiles de T .

Annexe 1

Résultats de la première étude de simulation

α	γ/\sqrt{n}	n	IC_z			IC_t			IC_g		
			C	I	D	G	I	D	G	I	D
0.001	0.1	5	130	9683	187	3	9993	4	151	9720	129
0.001	0.1	10	34	9901	65	2	9985	13	44	9922	34
0.001	0.1	20	8	9949	43	0	9982	18	13	9964	23
0.001	0.1	30	6	9969	25	3	9985	12	7	9982	11
0.001	0.1	50	1	9980	19	0	9991	9	5	9993	2
0.001	0.1	100	3	9974	23	2	9977	21	5	9984	11
0.001	0.5	5	50	9499	451	0	9979	21	65	9798	137
0.001	0.5	10	5	9687	308	0	9904	96	5	9927	68
0.001	0.5	20	0	9747	253	0	9862	138	0	9960	40
0.001	0.5	30	0	9739	261	0	9816	184	0	9959	41
0.001	0.5	50	0	9752	248	0	9801	199	0	9965	35
0.001	0.5	100	0	9766	234	0	9784	216	0	9962	38
0.001	1	5	12	8943	1045	0	9800	200	14	9703	283
0.001	1	10	0	9021	979	0	9476	524	1	9781	218
0.001	1	20	0	9067	933	0	9273	727	0	9767	233
0.001	1	30	0	9088	912	0	9228	772	0	9811	189
0.001	1	50	0	9109	891	0	9180	820	0	9786	214
0.001	1	100	0	9115	885	0	9155	845	0	9796	204
0.001	2	5	2	7275	2723	0	8549	1451	2	8786	1212
0.001	2	10	0	7231	2769	0	7797	2203	0	8820	1180
0.001	2	20	0	7393	2607	0	7623	2377	0	8855	1145
0.001	2	30	0	7291	2709	0	7461	2539	0	8838	1162
0.001	2	50	0	7342	2658	0	7455	2545	0	8790	1210
0.001	2	100	0	7349	2651	0	7393	2607	0	8834	1166
0.001	5	5	0	3588	6412	0	4358	5642	0	5075	4925
0.001	5	10	0	3651	6349	0	3915	6085	0	5053	4947
0.001	5	20	0	3515	6485	0	3639	6361	0	5072	4928
0.001	5	30	0	3647	6353	0	3734	6266	0	5132	4868
0.001	5	50	0	3563	6437	0	3602	6398	0	5050	4950
0.001	5	100	0	3632	6368	0	3661	6339	0	5089	4911
0.001	10	5	0	1552	8448	0	1793	8207	0	2264	7736
0.001	10	10	0	1567	8433	0	1653	8347	0	2322	7678
0.001	10	20	0	1466	8534	0	1501	8499	0	2232	7768
0.001	10	30	0	1532	8468	0	1550	8450	0	2312	7688
0.001	10	50	0	1573	8427	0	1584	8416	0	2333	7667
0.001	10	100	0	1517	8483	0	1523	8477	0	2250	7750

Table 1.1: IC_z , IC_t et IC_g avec $\alpha = 0.001$ et des lois gammas.

α	γ/\sqrt{n}	n	IC_{h_1}			IC_{h_3}			IC_{h_4}		
			G	I	D	G	I	D	G	I	D
0.001	0.1	5	194	9677	129	135	9680	185	178	9703	119
0.001	0.1	10	61	9905	34	35	9901	64	57	9911	32
0.001	0.1	20	27	9950	23	8	9950	42	22	9957	21
0.001	0.1	30	11	9978	11	7	9969	24	8	9983	9
0.001	0.1	50	12	9986	2	1	9981	18	11	9988	1
0.001	0.1	100	14	9975	11	3	9974	23	10	9982	8
0.001	0.5	5	717	9146	137	56	9516	428	184	9810	6
0.001	0.5	10	506	9426	68	5	9709	286	71	9927	2
0.001	0.5	20	457	9503	40	0	9770	230	28	9972	0
0.001	0.5	30	406	9553	41	0	9756	244	12	9987	1
0.001	0.5	50	422	9543	35	0	9765	235	8	9992	0
0.001	0.5	100	407	9555	38	0	9782	218	10	9990	0
0.001	1	5	5758	3959	283	14	9013	973	164	9553	283
0.001	1	10	5728	4054	218	0	9102	898	69	9713	218
0.001	1	20	5743	4024	233	0	9128	872	40	9727	233
0.001	1	30	5758	4053	189	0	9156	844	37	9773	190
0.001	1	50	5805	3981	214	0	9163	837	33	9752	215
0.001	1	100	5832	3964	204	0	9180	820	24	9771	205
0.001	2	5	7671	1117	1212	2	7418	2580	206	7466	2328
0.001	2	10	7632	1188	1180	0	7383	2617	136	7497	2367
0.001	2	20	7763	1092	1145	0	7535	2465	109	7654	2237
0.001	2	30	7673	1165	1162	0	7448	2552	95	7579	2326
0.001	2	50	7742	1048	1210	0	7500	2500	96	7646	2258
0.001	2	100	7720	1114	1166	0	7484	2516	91	7629	2280
0.001	5	5	4789	286	4925	0	3768	6232	673	2628	6699
0.001	5	10	4785	268	4947	0	3813	6187	719	2656	6625
0.001	5	20	4806	266	4928	0	3702	6298	620	2624	6756
0.001	5	30	4844	288	4868	0	3817	6183	734	2619	6647
0.001	5	50	4785	265	4950	0	3704	6296	655	2627	6718
0.001	5	100	4841	248	4911	0	3823	6177	749	2599	6652
0.001	10	5	2208	56	7736	2	1636	8362	851	513	8636
0.001	10	10	2267	55	7678	0	1664	8336	812	560	8628
0.001	10	20	2179	53	7768	0	1567	8433	792	491	8717
0.001	10	30	2268	44	7688	0	1630	8370	841	519	8640
0.001	10	50	2277	56	7667	0	1693	8307	851	520	8629
0.001	10	100	2197	53	7750	0	1620	8380	780	541	8679

Table 1.2: IC_{h_1} , IC_{h_3} et IC_{h_4} avec $\alpha = 0.001$ et des lois gammas.

α	γ/\sqrt{n}	n	IC_z			IC_t			IC_g		
			G	I	D	G	I	D	G	I	D
0.01	0.1	5	265	9391	344	39	9891	70	303	9424	273
0.01	0.1	10	112	9670	218	33	9887	80	150	9697	153
0.01	0.1	20	74	9779	147	40	9875	85	109	9797	94
0.01	0.1	30	40	9826	134	24	9883	93	73	9839	88
0.01	0.1	50	38	9855	107	28	9885	87	57	9873	70
0.01	0.1	100	29	9867	104	27	9878	95	53	9892	55
0.01	0.5	5	101	9123	776	12	9790	198	155	9506	339
0.01	0.5	10	24	9400	576	8	9660	332	40	9744	216
0.01	0.5	20	11	9446	543	3	9583	414	23	9793	184
0.01	0.5	30	6	9529	465	4	9599	397	19	9829	152
0.01	0.5	50	5	9466	529	2	9515	483	10	9811	179
0.01	0.5	100	0	9513	487	0	9535	465	2	9845	153
0.01	1	5	29	8548	1423	2	9340	658	60	9354	586
0.01	1	10	4	8650	1346	0	9019	981	6	9515	479
0.01	1	20	1	8730	1269	0	8905	1095	2	9568	430
0.01	1	30	1	8742	1257	1	8849	1150	3	9577	420
0.01	1	50	0	8683	1317	0	8758	1242	3	9552	445
0.01	1	100	0	8683	1317	0	8731	1269	0	9552	448
0.01	2	5	8	6901	3091	0	7826	2174	13	8401	1586
0.01	2	10	0	6926	3074	0	7302	2698	1	8425	1574
0.01	2	20	0	6957	3043	0	7100	2900	0	8414	1586
0.01	2	30	0	6920	3080	0	7023	2977	0	8384	1616
0.01	2	50	0	6917	3083	0	6987	3013	0	8381	1619
0.01	2	100	0	7015	2985	0	7043	2957	0	8494	1506
0.01	5	5	0	3418	6582	0	3855	6145	0	4728	5272
0.01	5	10	0	3449	6551	0	3619	6381	0	4813	5187
0.01	5	20	0	3465	6535	0	3538	6462	0	4755	5245
0.01	5	30	0	3430	6570	0	3475	6525	0	4740	5260
0.01	5	50	0	3380	6620	0	3414	6586	0	4768	5232
0.01	5	100	0	3429	6571	0	3445	6555	0	4758	5242
0.01	10	5	0	1506	8494	0	1670	8330	0	2168	7832
0.01	10	10	0	1439	8561	0	1509	8491	0	2137	7863
0.01	10	20	0	1456	8544	0	1485	8515	0	2086	7914
0.01	10	30	0	1450	8550	0	1470	8530	0	2130	7870
0.01	10	50	0	1506	8494	0	1515	8485	0	2181	7819
0.01	10	100	0	1436	8564	0	1437	8563	0	2092	7908

Table 1.3: IC_z , IC_t et IC_g avec $\alpha = 0.01$ et des lois gammas.

α	γ/\sqrt{n}	n	IC_{h_1}			IC_{h_3}			IC_{h_4}		
			G	I	D	G	I	D	G	I	D
0.01	0.1	5	347	9380	273	269	9391	340	332	9403	265
0.01	0.1	10	177	9670	153	114	9672	214	170	9686	144
0.01	0.1	20	127	9779	94	77	9777	146	120	9794	86
0.01	0.1	30	89	9823	88	42	9829	129	84	9834	82
0.01	0.1	50	70	9860	70	39	9855	106	66	9871	63
0.01	0.1	100	74	9871	55	32	9867	101	66	9884	50
0.01	0.5	5	755	8906	339	115	9137	748	337	9644	19
0.01	0.5	10	531	9253	216	27	9427	546	149	9848	3
0.01	0.5	20	452	9364	184	15	9478	507	113	9886	1
0.01	0.5	30	444	9404	152	10	9557	433	94	9906	0
0.01	0.5	50	414	9407	179	6	9498	496	73	9927	0
0.01	0.5	100	421	9426	153	1	9543	456	67	9931	2
0.01	1	5	3685	5729	586	47	8625	1328	357	9313	330
0.01	1	10	3621	5900	479	5	8744	1251	189	9532	279
0.01	1	20	3646	5924	430	1	8834	1165	150	9598	252
0.01	1	30	3765	5815	420	2	8841	1157	157	9615	228
0.01	1	50	3615	5940	445	1	8795	1204	116	9643	241
0.01	1	100	3621	5931	448	0	8802	1198	124	9626	250
0.01	2	5	6630	1784	1586	14	7082	2904	433	7184	2383
0.01	2	10	6657	1769	1574	1	7120	2879	345	7282	2373
0.01	2	20	6714	1700	1586	0	7128	2872	315	7328	2357
0.01	2	30	6645	1739	1616	0	7119	2881	307	7323	2370
0.01	2	50	6670	1711	1619	0	7121	2879	296	7333	2371
0.01	2	100	6726	1768	1506	1	7202	2797	273	7403	2324
0.01	5	5	4387	341	5272	7	3612	6381	1082	2199	6719
0.01	5	10	4441	372	5187	1	3655	6344	1067	2242	6691
0.01	5	20	4415	340	5245	0	3669	6331	1098	2243	6659
0.01	5	30	4391	349	5260	1	3611	6388	1105	2198	6697
0.01	5	50	4426	342	5232	1	3589	6410	1067	2179	6754
0.01	5	100	4406	352	5242	0	3660	6340	1073	2224	6703
0.01	10	5	2117	51	7832	298	1350	8352	935	426	8639
0.01	10	10	2063	74	7863	300	1297	8403	871	423	8706
0.01	10	20	2022	64	7914	289	1292	8419	874	441	8685
0.01	10	30	2052	78	7870	307	1259	8434	898	409	8693
0.01	10	50	2107	74	7819	307	1327	8366	921	425	8654
0.01	10	100	2036	56	7908	291	1272	8437	875	434	8691

Table 1.4: IC_{h_1} , IC_{h_3} et IC_{h_4} avec $\alpha = 0.01$ et des lois gammas.

α	γ/\sqrt{n}	n	IC_z			IC_t			IC_g		
			G	I	D	G	I	D	G	I	D
0.05	0.1	5	478	8801	721	193	9483	324	564	8818	618
0.05	0.1	10	350	9156	494	202	9477	321	415	9188	397
0.05	0.1	20	239	9340	421	175	9480	345	312	9352	336
0.05	0.1	30	199	9417	384	153	9512	335	276	9428	296
0.05	0.1	50	201	9429	370	176	9485	339	268	9450	282
0.05	0.1	100	195	9437	368	182	9470	348	255	9480	265
0.05	0.5	5	297	8606	1097	92	9303	605	467	8885	648
0.05	0.5	10	160	8845	995	78	9143	779	285	9188	527
0.05	0.5	20	78	8980	942	54	9108	838	206	9316	478
0.05	0.5	30	66	9024	910	48	9116	836	182	9372	446
0.05	0.5	50	32	9078	890	27	9123	850	124	9429	447
0.05	0.5	100	65	9003	932	58	9029	913	173	9373	454
0.05	1	5	122	7987	1891	31	8685	1284	252	8764	984
0.05	1	10	51	8131	1818	19	8461	1520	126	9000	874
0.05	1	20	13	8067	1920	9	8202	1789	70	9006	924
0.05	1	30	19	8194	1787	11	8282	1707	81	9065	854
0.05	1	50	8	8169	1823	5	8214	1781	65	9094	841
0.05	1	100	6	8306	1688	5	8333	1662	56	9140	804
0.05	2	5	26	6379	3595	1	6981	3018	71	7776	2153
0.05	2	10	7	6448	3545	0	6684	3316	37	7804	2159
0.05	2	20	2	6469	3529	1	6581	3418	22	7848	2130
0.05	2	30	3	6585	3412	1	6659	3340	16	7925	2059
0.05	2	50	3	6481	3516	1	6526	3473	21	7854	2125
0.05	2	100	0	6618	3382	0	6649	3351	12	7933	2055
0.05	5	5	1	3240	6759	0	3484	6516	4	4388	5608
0.05	5	10	0	3271	6729	0	3366	6634	2	4436	5562
0.05	5	20	0	3171	6829	0	3217	6783	4	4374	5622
0.05	5	30	0	3212	6788	0	3237	6763	1	4394	5605
0.05	5	50	0	3217	6783	0	3246	6754	0	4418	5582
0.05	5	100	0	3262	6738	0	3269	6731	0	4429	5571
0.05	10	5	0	1358	8642	0	1433	8567	0	1936	8064
0.05	10	10	0	1366	8634	0	1396	8604	0	1963	8037
0.05	10	20	0	1429	8571	0	1440	8560	0	2018	7982
0.05	10	30	0	1423	8577	0	1428	8572	0	2006	7994
0.05	10	50	0	1426	8574	0	1429	8571	0	1981	8019
0.05	10	100	0	1393	8607	0	1396	8604	0	1988	8012

Table 1.5: IC_z , IC_t et IC_g avec $\alpha = 0.05$ et des lois gammas.

α	γ/\sqrt{n}	n	IC_{h_1}			IC_{h_3}			IC_{h_4}		
			G	I	D	G	I	D	G	I	D
0.05	0.1	5	588	8794	618	491	8802	707	577	8817	606
0.05	0.1	10	437	9166	397	358	9159	483	424	9185	391
0.05	0.1	20	337	9327	336	245	9345	410	327	9348	325
0.05	0.1	30	297	9407	296	207	9420	373	285	9428	287
0.05	0.1	50	287	9431	282	212	9428	360	279	9452	269
0.05	0.1	100	288	9447	265	198	9447	355	269	9473	258
0.05	0.5	5	985	8367	648	337	8627	1036	649	9313	38
0.05	0.5	10	779	8694	527	191	8880	929	447	9539	14
0.05	0.5	20	691	8831	478	105	9020	875	377	9615	8
0.05	0.5	30	676	8878	446	91	9073	836	340	9656	4
0.05	0.5	50	600	8953	447	50	9124	826	269	9727	4
0.05	0.5	100	628	8918	454	85	9049	866	339	9658	3
0.05	1	5	2493	6523	984	167	8095	1738	675	8954	371
0.05	1	10	2489	6637	874	81	8281	1638	523	9167	310
0.05	1	20	2375	6701	924	34	8210	1756	465	9231	304
0.05	1	30	2452	6694	854	38	8332	1630	431	9262	307
0.05	1	50	2446	6713	841	27	8317	1656	414	9316	270
0.05	1	100	2435	6761	804	23	8432	1545	402	9317	281
0.05	2	5	5306	2541	2153	76	6596	3328	761	6698	2541
0.05	2	10	5411	2430	2159	42	6658	3300	752	6712	2536
0.05	2	20	5420	2450	2130	25	6706	3269	715	6778	2507
0.05	2	30	5453	2488	2059	17	6826	3157	683	6931	2386
0.05	2	50	5375	2500	2125	23	6715	3262	717	6817	2466
0.05	2	100	5536	2409	2055	17	6843	3140	706	6893	2401
0.05	5	5	3945	447	5608	112	3374	6514	1406	1858	6736
0.05	5	10	4003	435	5562	111	3411	6478	1469	1820	6711
0.05	5	20	3926	452	5622	109	3322	6569	1422	1763	6815
0.05	5	30	3970	425	5605	100	3374	6526	1409	1817	6774
0.05	5	50	3983	435	5582	112	3381	6507	1405	1841	6754
0.05	5	100	3980	449	5571	117	3407	6476	1432	1846	6722
0.05	10	5	1854	82	8064	904	590	8506	946	331	8723
0.05	10	10	1891	72	8037	899	621	8480	947	333	8720
0.05	10	20	1937	81	7982	939	645	8416	988	363	8649
0.05	10	30	1918	88	7994	913	660	8427	975	358	8667
0.05	10	50	1901	80	8019	923	654	8423	990	354	8656
0.05	10	100	1900	88	8012	899	664	8437	956	322	8722

Table 1.6: IC_{h_1} , IC_{h_3} et IC_{h_4} avec $\alpha = 0.05$ et des lois gammas.

α	γ/\sqrt{n}	n	IC_z			IC_t			IC_g		
			G	I	D	G	I	D	G	I	D
0.1	0.1	5	801	8182	1017	440	8960	600	881	8211	908
0.1	0.1	10	582	8617	801	430	8945	625	684	8623	693
0.1	0.1	20	479	8819	702	398	8986	616	568	8835	597
0.1	0.1	30	439	8871	690	395	8980	625	534	8898	568
0.1	0.1	50	417	8907	676	383	8977	640	529	8888	583
0.1	0.1	100	436	8906	658	418	8939	643	521	8933	546
0.1	0.5	5	441	8056	1503	204	8749	1047	707	8286	1007
0.1	0.5	10	303	8314	1383	187	8654	1159	600	8558	842
0.1	0.5	20	197	8560	1243	156	8707	1137	465	8777	758
0.1	0.5	30	193	8476	1331	166	8571	1263	425	8780	795
0.1	0.5	50	193	8519	1288	176	8571	1253	490	8741	769
0.1	0.5	100	162	8608	1230	150	8636	1214	420	8856	724
0.1	1	5	254	7527	2219	89	8140	1771	533	8131	1336
0.1	1	10	139	7687	2174	69	7978	1953	416	8364	1220
0.1	1	20	90	7824	2086	56	7954	1990	360	8452	1188
0.1	1	30	86	7789	2125	65	7882	2053	310	8477	1213
0.1	1	50	63	7847	2090	54	7889	2057	302	8486	1212
0.1	1	100	60	7820	2120	56	7839	2105	323	8489	1188
0.1	2	5	70	6040	3890	14	6529	3457	267	7182	2551
0.1	2	10	42	6240	3718	20	6439	3541	198	7366	2436
0.1	2	20	14	6247	3739	8	6338	3654	164	7415	2421
0.1	2	30	19	6295	3686	12	6354	3634	140	7468	2392
0.1	2	50	18	6163	3819	12	6204	3784	159	7333	2508
0.1	2	100	13	6229	3758	10	6252	3738	151	7431	2418
0.1	5	5	8	3084	6908	1	3248	6751	67	4080	5853
0.1	5	10	3	3175	6822	1	3234	6765	45	4222	5733
0.1	5	20	2	3105	6893	2	3125	6873	31	4149	5820
0.1	5	30	0	3134	6866	0	3157	6843	26	4176	5798
0.1	5	50	3	3082	6915	3	3100	6897	38	4100	5862
0.1	5	100	1	3137	6862	1	3143	6856	23	4159	5818
0.1	10	5	0	1352	8648	0	1423	8577	16	1891	8093
0.1	10	10	0	1385	8615	0	1411	8589	11	1944	8045
0.1	10	20	0	1383	8617	0	1393	8607	11	1909	8080
0.1	10	30	0	1334	8666	0	1341	8659	7	1895	8098
0.1	10	50	0	1350	8650	0	1354	8646	11	1873	8116
0.1	10	100	0	1370	8630	0	1375	8625	7	1954	8039

Table 1.7: IC_z , IC_t et IC_g avec $\alpha = 0.1$ et des lois gammas.

α	γ/\sqrt{n}	n	IC_{h_1}			IC_{h_3}			IC_{h_4}		
			G	I	D	G	I	D	G	I	D
0.1	0.1	5	897	8195	908	816	8182	1002	886	8218	896
0.1	0.1	10	700	8607	693	597	8627	776	690	8626	684
0.1	0.1	20	588	8815	597	488	8826	686	578	8836	586
0.1	0.1	30	555	8877	568	462	8865	673	540	8904	556
0.1	0.1	50	550	8867	583	431	8911	658	536	8887	577
0.1	0.1	100	540	8914	546	454	8905	641	525	8939	536
0.1	0.5	5	1149	7844	1007	505	8078	1417	864	8558	578
0.1	0.5	10	1044	8114	842	358	8363	1279	741	8809	450
0.1	0.5	20	911	8331	758	258	8602	1140	609	9020	371
0.1	0.5	30	851	8354	795	256	8523	1221	541	9070	389
0.1	0.5	50	891	8340	769	261	8544	1195	631	9007	362
0.1	0.5	100	854	8422	724	228	8640	1132	574	9067	359
0.1	1	5	2317	6347	1336	355	7591	2054	894	8700	406
0.1	1	10	2274	6506	1220	246	7772	1982	828	8830	342
0.1	1	20	2264	6548	1188	182	7919	1899	767	8893	340
0.1	1	30	2200	6587	1213	169	7885	1946	744	8910	346
0.1	1	50	2159	6629	1212	151	7946	1903	712	8947	341
0.1	1	100	2165	6647	1188	147	7894	1959	720	8978	302
0.1	2	5	4618	2831	2551	244	6177	3579	1144	6260	2596
0.1	2	10	4758	2806	2436	172	6384	3444	1127	6382	2491
0.1	2	20	4701	2878	2421	143	6407	3450	1064	6470	2466
0.1	2	30	4804	2804	2392	126	6439	3435	1013	6531	2456
0.1	2	50	4675	2817	2508	140	6328	3532	1065	6384	2551
0.1	2	100	4796	2786	2418	131	6418	3451	1056	6467	2477
0.1	5	5	3646	501	5853	680	2680	6640	1570	1620	6810
0.1	5	10	3764	503	5733	689	2772	6539	1600	1683	6717
0.1	5	20	3686	494	5820	719	2665	6616	1596	1619	6785
0.1	5	30	3712	490	5798	738	2684	6578	1595	1669	6736
0.1	5	50	3659	479	5862	712	2644	6644	1585	1607	6808
0.1	5	100	3676	506	5818	722	2685	6593	1626	1641	6733
0.1	10	5	1807	100	8093	1036	493	8471	1037	262	8701
0.1	10	10	1857	98	8045	1071	483	8446	1071	258	8671
0.1	10	20	1836	84	8080	1069	470	8461	1071	260	8669
0.1	10	30	1812	90	8098	1012	504	8484	1013	256	8731
0.1	10	50	1770	114	8116	1048	445	8507	1049	246	8705
0.1	10	100	1855	106	8039	1038	494	8468	1039	273	8688

Table 1.8: IC_{h_1} , IC_{h_3} et IC_{h_4} avec $\alpha = 0.1$ et des lois gammas.

α	γ/\sqrt{n}	n	IC_z			IC_t			IC_g		
			G	I	D	G	I	D	G	I	D
0.2	0.1	5	1236	7284	1480	889	7990	1121	1347	7285	1368
0.2	0.1	10	999	7663	1338	860	7966	1174	1113	7669	1218
0.2	0.1	20	1008	7775	1217	936	7914	1150	1123	7764	1113
0.2	0.1	30	899	7938	1163	849	8046	1105	1020	7945	1035
0.2	0.1	50	911	7917	1172	885	7963	1152	1026	7913	1061
0.2	0.1	100	882	7944	1174	871	7975	1154	992	7968	1040
0.2	0.5	5	898	7133	1969	590	7769	1641	1316	7177	1507
0.2	0.5	10	637	7505	1858	514	7790	1696	1094	7538	1368
0.2	0.5	20	642	7578	1780	563	7738	1699	1108	7641	1251
0.2	0.5	30	631	7590	1779	571	7687	1742	1110	7581	1309
0.2	0.5	50	604	7565	1831	577	7620	1803	1064	7587	1349
0.2	0.5	100	589	7645	1766	577	7671	1752	1074	7702	1224
0.2	1	5	586	6717	2697	343	7332	2325	1247	6903	1850
0.2	1	10	454	6926	2620	346	7170	2484	1120	7127	1753
0.2	1	20	385	6954	2661	319	7092	2589	1056	7161	1783
0.2	1	30	367	6999	2634	330	7075	2595	1080	7170	1750
0.2	1	50	346	7133	2521	324	7178	2498	1087	7179	1734
0.2	1	100	325	7152	2523	306	7181	2513	1017	7304	1679
0.2	2	5	281	5586	4133	114	6000	3886	1008	5972	3020
0.2	2	10	197	5664	4139	126	5852	4022	928	6120	2952
0.2	2	20	154	5791	4055	129	5870	4001	958	6083	2959
0.2	2	30	153	5716	4131	119	5786	4095	892	6178	2930
0.2	2	50	140	5791	4069	127	5817	4056	929	6145	2926
0.2	2	100	146	5776	4078	144	5797	4059	893	6205	2902
0.2	5	5	71	2915	7014	14	3080	6906	597	3299	6104
0.2	5	10	47	2942	7011	17	3013	6970	605	3307	6088
0.2	5	20	40	2958	7002	27	2982	6991	653	3296	6051
0.2	5	30	38	2965	6997	27	2990	6983	616	3277	6107
0.2	5	50	24	2966	7010	21	2980	6999	634	3229	6137
0.2	5	100	35	2945	7020	31	2951	7018	632	3312	6056
0.2	10	5	15	1315	8670	1	1370	8629	430	1358	8212
0.2	10	10	15	1293	8692	9	1316	8675	459	1286	8255
0.2	10	20	7	1325	8668	5	1335	8660	455	1357	8188
0.2	10	30	6	1288	8706	3	1300	8697	433	1341	8226
0.2	10	50	8	1325	8667	7	1329	8664	464	1333	8203
0.2	10	100	14	1303	8683	12	1306	8682	441	1360	8199

Table 1.9: IC_z , IC_t et IC_g avec $\alpha = 0.2$ et des lois gammas.

α	γ/\sqrt{n}	n	IC_{h_1}			IC_{h_3}			IC_{h_4}		
			G	I	D	G	I	D	G	I	D
0.2	0.1	5	1352	7280	1368	1258	7296	1446	1348	7293	1359
0.2	0.1	10	1121	7661	1218	1038	7658	1304	1115	7673	1212
0.2	0.1	20	1140	7747	1113	1041	7765	1194	1124	7773	1103
0.2	0.1	30	1028	7937	1035	924	7948	1128	1022	7951	1027
0.2	0.1	50	1036	7903	1061	940	7908	1152	1028	7924	1048
0.2	0.1	100	1002	7958	1040	916	7940	1144	993	7974	1033
0.2	0.5	5	1567	6926	1507	1017	7131	1852	1365	7403	1232
0.2	0.5	10	1360	7272	1368	762	7512	1726	1155	7798	1047
0.2	0.5	20	1356	7393	1251	784	7565	1651	1162	7859	979
0.2	0.5	30	1391	7300	1309	761	7571	1668	1163	7826	1011
0.2	0.5	50	1356	7295	1349	747	7560	1693	1128	7832	1040
0.2	0.5	100	1355	7421	1224	730	7657	1613	1117	7944	939
0.2	1	5	2410	5740	1850	834	6727	2439	1449	8060	491
0.2	1	10	2272	5975	1753	692	6919	2389	1314	8281	405
0.2	1	20	2194	6023	1783	630	6954	2416	1245	8384	371
0.2	1	30	2272	5978	1750	616	7001	2383	1302	8291	407
0.2	1	50	2319	5947	1734	630	7075	2295	1301	8325	374
0.2	1	100	2245	6076	1679	584	7124	2292	1223	8375	402
0.2	2	5	4047	2933	3020	777	5414	3809	1708	5661	2631
0.2	2	10	4083	2965	2952	674	5559	3767	1678	5745	2577
0.2	2	20	4136	2905	2959	687	5618	3695	1686	5723	2591
0.2	2	30	4082	2988	2930	655	5562	3783	1652	5820	2528
0.2	2	50	4092	2982	2926	673	5596	3731	1697	5718	2585
0.2	2	100	4042	3056	2902	649	5640	3711	1676	5792	2532
0.2	5	5	3376	520	6104	1572	1750	6678	1811	1414	6775
0.2	5	10	3345	567	6088	1601	1695	6704	1837	1383	6780
0.2	5	20	3365	584	6051	1595	1713	6692	1848	1366	6786
0.2	5	30	3349	544	6107	1571	1728	6701	1814	1417	6769
0.2	5	50	3348	515	6137	1551	1751	6698	1794	1428	6778
0.2	5	100	3344	600	6056	1537	1749	6714	1801	1403	6796
0.2	10	5	1683	105	8212	1160	336	8504	1245	72	8683
0.2	10	10	1653	92	8255	1137	367	8496	1217	83	8700
0.2	10	20	1713	99	8188	1167	360	8473	1247	73	8680
0.2	10	30	1669	105	8226	1132	354	8514	1211	78	8711
0.2	10	50	1704	93	8203	1163	356	8481	1232	85	8683
0.2	10	100	1682	119	8199	1141	365	8494	1223	85	8692

Table 1.10: IC_{h_1} , IC_{h_3} et IC_{h_4} avec $\alpha = 0.2$ et des lois gammas.

α	γ/\sqrt{n}	n	IC_z			IC_t			IC_g		
			G	I	D	G	I	D	G	I	D
0.5	0.1	5	2463	4735	2802	2288	5121	2591	2542	4755	2703
0.5	0.1	10	2493	4849	2658	2407	4994	2599	2603	4804	2593
0.5	0.1	20	2431	4988	2581	2392	5074	2534	2544	4965	2491
0.5	0.1	30	2496	4964	2540	2469	5019	2512	2608	4950	2442
0.5	0.1	50	2339	5024	2637	2321	5058	2621	2445	4997	2558
0.5	0.1	100	2396	5033	2571	2392	5049	2559	2501	5023	2476
0.5	0.5	5	2209	4542	3249	2007	4914	3079	2701	4472	2827
0.5	0.5	10	2083	4755	3162	2000	4915	3085	2628	4633	2739
0.5	0.5	20	2171	4743	3086	2130	4825	3045	2695	4631	2674
0.5	0.5	30	2121	4799	3080	2094	4844	3062	2645	4666	2689
0.5	0.5	50	2048	4773	3179	2031	4802	3167	2583	4662	2755
0.5	0.5	100	2074	4742	3184	2065	4758	3177	2562	4672	2766
0.5	1	5	1883	4260	3857	1687	4608	3705	2804	3956	3240
0.5	1	10	1870	4367	3763	1769	4526	3705	2802	4060	3138
0.5	1	20	1797	4480	3723	1751	4550	3699	2806	4130	3064
0.5	1	30	1826	4492	3682	1786	4560	3654	2797	4236	2967
0.5	1	50	1891	4416	3693	1876	4444	3680	2864	4114	3022
0.5	1	100	1861	4451	3688	1849	4472	3679	2838	4145	3017
0.5	2	5	1635	3409	4956	1370	3785	4845	3088	2809	4103
0.5	2	10	1526	3544	4930	1438	3679	4883	2981	2937	4082
0.5	2	20	1572	3559	4869	1532	3610	4858	3037	2937	4026
0.5	2	30	1493	3551	4956	1462	3593	4945	2957	2900	4143
0.5	2	50	1532	3520	4948	1509	3551	4940	3009	2874	4117
0.5	2	100	1560	3528	4912	1549	3543	4908	3025	2883	4092
0.5	5	5	1086	1614	7300	904	1852	7244	2122	1294	6584
0.5	5	10	1079	1584	7337	1008	1680	7312	2106	1227	6667
0.5	5	20	1162	1537	7301	1123	1583	7294	2144	1246	6610
0.5	5	30	1098	1494	7408	1073	1527	7400	2092	1135	6773
0.5	5	50	1120	1590	7290	1110	1604	7286	2164	1225	6611
0.5	5	100	1161	1546	7293	1157	1551	7292	2159	1237	6604
0.5	10	5	660	542	8798	585	628	8787	1054	502	8444
0.5	10	10	639	567	8794	613	598	8789	1018	532	8450
0.5	10	20	619	541	8840	612	551	8837	961	555	8484
0.5	10	30	643	552	8805	632	566	8802	1000	544	8456
0.5	10	50	654	534	8812	651	538	8811	1017	513	8470
0.5	10	100	651	568	8781	649	570	8781	1045	557	8398

Table 1.11: IC_z , IC_t et IC_g avec $\alpha = 0.5$ et des lois gammas.

α	γ/\sqrt{n}	n	IC_{h_1}			IC_{h_3}			IC_{h_4}		
			G	I	D	G	I	D	G	I	D
0.5	0.1	5	2543	4754	2703	2506	4741	2753	2541	4759	2700
0.5	0.1	10	2603	4804	2593	2556	4816	2628	2603	4809	2588
0.5	0.1	20	2546	4963	2491	2488	4987	2525	2544	4971	2485
0.5	0.1	30	2611	4947	2442	2563	4955	2482	2602	4958	2440
0.5	0.1	50	2448	4994	2558	2400	5003	2597	2443	5001	2556
0.5	0.1	100	2505	5019	2476	2456	5021	2523	2500	5026	2474
0.5	0.5	5	2755	4418	2827	2491	4478	3031	2663	4633	2704
0.5	0.5	10	2686	4575	2739	2409	4660	2931	2594	4774	2632
0.5	0.5	20	2749	4577	2674	2478	4666	2856	2651	4780	2569
0.5	0.5	30	2702	4609	2689	2439	4694	2867	2605	4810	2585
0.5	0.5	50	2641	4604	2755	2355	4707	2938	2539	4836	2625
0.5	0.5	100	2628	4606	2766	2347	4702	2951	2520	4847	2633
0.5	1	5	3016	3744	3240	2449	4031	3520	2695	4694	2611
0.5	1	10	3015	3847	3138	2460	4130	3410	2705	4774	2521
0.5	1	20	3030	3906	3064	2439	4202	3359	2701	4872	2427
0.5	1	30	3037	3996	2967	2419	4304	3277	2683	4956	2361
0.5	1	50	3085	3893	3022	2491	4188	3321	2759	4871	2370
0.5	1	100	3070	3913	3017	2459	4226	3315	2742	4866	2392
0.5	2	5	3652	2245	4103	2774	2767	4459	2959	4195	2846
0.5	2	10	3531	2387	4082	2678	2863	4459	2838	4360	2802
0.5	2	20	3627	2347	4026	2718	2880	4402	2894	4384	2722
0.5	2	30	3574	2283	4143	2662	2857	4481	2827	4365	2808
0.5	2	50	3572	2311	4117	2694	2801	4505	2888	4310	2802
0.5	2	100	3624	2284	4092	2735	2839	4426	2899	4252	2849
0.5	5	5	2878	538	6584	2304	828	6868	2385	829	6786
0.5	5	10	2811	522	6667	2275	810	6915	2350	812	6838
0.5	5	20	2830	560	6610	2328	780	6892	2393	804	6803
0.5	5	30	2723	504	6773	2256	716	7028	2318	744	6938
0.5	5	50	2842	547	6611	2332	785	6883	2413	781	6806
0.5	5	100	2843	553	6604	2330	796	6874	2420	806	6774
0.5	10	5	1443	113	8444	1262	169	8569	1251	36	8713
0.5	10	10	1453	97	8450	1263	179	8558	1249	34	8717
0.5	10	20	1415	101	8484	1221	176	8603	1209	39	8752
0.5	10	30	1455	89	8456	1244	189	8567	1236	33	8731
0.5	10	50	1417	113	8470	1264	136	8600	1247	34	8719
0.5	10	100	1479	123	8398	1276	188	8536	1260	51	8689

Table 1.12: IC_{h_1} , IC_{h_3} et IC_{h_4} avec $\alpha = 0.5$ et des lois gammas.

Annexe 2

Résultats de la deuxième étude de simulation

α	n	IC_z			IC_t			IC_g		
		G	I	D	G	I	D	G	I	D
0.001	5	135	9713	152	2	9993	5	106	9764	130
0.001	10	47	9899	54	6	9987	7	48	9908	44
0.001	20	25	9956	19	7	9990	3	18	9960	22
0.001	30	14	9970	16	6	9986	8	12	9975	13
0.001	50	6	9983	11	5	9992	3	6	9986	8
0.001	100	4	9990	6	3	9992	5	4	9990	6
0.01	5	324	9343	333	61	9894	45	287	9421	292
0.01	10	127	9730	143	41	9915	44	123	9736	141
0.01	20	101	9826	73	49	9915	36	97	9832	71
0.01	30	97	9841	62	59	9904	37	90	9849	61
0.01	50	50	9891	59	35	9916	49	49	9890	61
0.01	100	50	9909	41	41	9925	34	49	9911	40
0.05	5	612	8760	628	267	9489	244	598	8825	577
0.05	10	400	9184	416	231	9510	259	389	9207	404
0.05	20	303	9398	299	239	9545	216	315	9397	288
0.05	30	315	9413	272	278	9491	231	322	9406	272
0.05	50	253	9460	287	226	9520	254	254	9464	282
0.05	100	261	9468	271	248	9502	250	262	9471	267
0.1	5	899	8253	848	528	9015	457	889	8278	833
0.1	10	710	8611	679	526	8973	501	712	8622	666
0.1	20	612	8781	607	532	8946	522	606	8794	600
0.1	30	562	8923	515	508	9032	460	557	8924	519
0.1	50	526	8958	516	497	9020	483	536	8945	519
0.1	100	500	9001	499	485	9034	481	505	8996	499
0.2	5	1403	7280	1317	1051	7960	989	1389	7297	1314
0.2	10	1173	7735	1092	998	8073	929	1144	7749	1107
0.2	20	1036	7866	1098	964	8015	1021	1040	7878	1082
0.2	30	992	7930	1078	943	8048	1009	997	7925	1078
0.2	50	1029	7961	1010	1003	8021	976	1035	7954	1011
0.2	100	983	7964	1053	970	8002	1028	979	7968	1053
0.5	5	2602	4678	2720	2418	5034	2548	2600	4666	2734
0.5	10	2619	4762	2619	2538	4936	2526	2629	4758	2613
0.5	20	2534	5023	2443	2498	5100	2402	2545	5008	2447
0.5	30	2613	4901	2486	2589	4947	2464	2615	4894	2491
0.5	50	2530	4920	2550	2509	4961	2530	2527	4924	2549
0.5	100	2440	5115	2445	2433	5126	2441	2437	5117	2446

Table 2.1: IC_z , IC_t et IC_g avec une loi normale centrée réduite.

α	n	IC_{h_1}			IC_{h_3}			IC_{h_4}		
		G	I	D	G	I	D	G	I	D
0.001	5	538	8927	535	134	9710	156	163	9639	198
0.001	10	116	9773	111	50	9896	54	75	9858	67
0.001	20	31	9932	37	25	9956	19	24	9946	30
0.001	30	16	9967	17	14	9970	16	13	9972	15
0.001	50	8	9981	11	6	9984	10	7	9983	10
0.001	100	4	9989	7	4	9990	6	4	9990	6
0.01	5	562	8849	589	328	9335	337	356	9288	356
0.01	10	190	9594	216	133	9723	144	148	9679	173
0.01	20	114	9801	85	102	9823	75	108	9815	77
0.01	30	98	9834	68	97	9840	63	92	9842	66
0.01	50	51	9880	69	51	9890	59	51	9883	66
0.01	100	50	9910	40	50	9909	41	50	9910	40
0.05	5	798	8447	755	615	8756	629	601	8802	597
0.05	10	451	9097	452	394	9190	416	407	9183	410
0.05	20	331	9358	311	307	9397	296	318	9388	294
0.05	30	331	9392	277	316	9411	273	322	9403	275
0.05	50	257	9456	287	251	9463	286	255	9462	283
0.05	100	262	9471	267	263	9467	270	262	9472	266
0.1	5	1047	7980	973	895	8252	853	869	8300	831
0.1	10	757	8546	697	711	8609	680	701	8643	656
0.1	20	619	8763	618	615	8771	614	605	8791	604
0.1	30	561	8907	532	565	8924	511	558	8922	520
0.1	50	539	8940	521	531	8949	520	537	8944	519
0.1	100	506	8994	500	500	9000	500	506	8994	500
0.2	5	1478	7131	1391	1393	7277	1330	1312	7423	1265
0.2	10	1171	7693	1136	1163	7733	1104	1134	7783	1083
0.2	20	1051	7857	1092	1027	7878	1095	1033	7890	1077
0.2	30	1000	7916	1084	992	7931	1077	998	7924	1078
0.2	50	1036	7953	1011	1032	7949	1019	1036	7954	1010
0.2	100	979	7968	1053	985	7963	1052	979	7969	1052
0.5	5	2621	4631	2748	2589	4684	2727	2547	4772	2681
0.5	10	2635	4749	2616	2624	4756	2620	2616	4787	2597
0.5	20	2545	5008	2447	2535	5018	2447	2537	5017	2446
0.5	30	2616	4892	2492	2619	4887	2494	2613	4899	2488
0.5	50	2527	4923	2550	2531	4919	2550	2527	4924	2549
0.5	100	2437	5117	2446	2437	5118	2445	2437	5118	2445

Table 2.2: IC_{h_1} , IC_{h_3} et IC_{h_4} avec une loi normale centrée réduite.

α	n	IC_z			IC_t			IC_g		
		G	I	D	G	I	D	G	I	D
0.001	5	230	9573	197	20	9968	12	172	9693	135
0.001	10	67	9869	64	10	9976	14	36	9920	44
0.001	20	31	9943	26	7	9985	8	8	9982	10
0.001	30	18	9969	13	10	9985	5	7	9989	4
0.001	50	10	9980	10	4	9993	3	3	9995	2
0.001	100	13	9976	11	9	9982	9	9	9983	8
0.01	5	424	9174	402	128	9765	107	309	9374	317
0.01	10	179	9633	188	68	9844	88	92	9798	110
0.01	20	93	9808	99	47	9902	51	48	9903	49
0.01	30	76	9839	85	55	9887	58	50	9896	54
0.01	50	70	9853	77	51	9887	62	44	9896	60
0.01	100	66	9870	64	57	9886	57	53	9894	53
0.05	5	660	8719	621	347	9312	341	536	8951	513
0.05	10	400	9159	441	252	9469	279	267	9437	296
0.05	20	337	9323	340	261	9478	261	250	9501	249
0.05	30	308	9410	282	254	9516	230	244	9533	223
0.05	50	265	9463	272	230	9526	244	225	9540	235
0.05	100	278	9457	265	262	9486	252	255	9496	249
0.1	5	861	8221	918	552	8861	587	698	8548	754
0.1	10	661	8653	686	496	8990	514	479	9001	520
0.1	20	542	8866	592	472	9017	511	451	9066	483
0.1	30	527	8896	577	470	9010	520	453	9053	494
0.1	50	492	8975	533	462	9042	496	456	9066	478
0.1	100	516	8956	528	498	8990	512	494	9002	504
0.2	5	1275	7465	1260	969	8051	980	1075	7868	1057
0.2	10	1152	7709	1139	1011	7998	991	976	8063	961
0.2	20	1025	7915	1060	943	8075	982	920	8123	957
0.2	30	1045	7890	1065	983	8007	1010	973	8032	995
0.2	50	1026	7926	1048	999	7976	1025	993	7991	1016
0.2	100	1036	7946	1018	1019	7978	1003	1012	7990	998
0.5	5	2599	4841	2560	2424	5185	2391	2415	5208	2377
0.5	10	2593	4837	2570	2507	5006	2487	2496	5034	2470
0.5	20	2485	4988	2527	2447	5074	2479	2450	5061	2489
0.5	30	2552	4968	2480	2516	5033	2451	2514	5033	2453
0.5	50	2477	5011	2512	2465	5037	2498	2462	5042	2496
0.5	100	2513	4963	2524	2504	4978	2518	2504	4979	2517

Table 2.3: IC_z , IC_t et IC_g avec une loi uniforme sur $[0; 1]$.

α	n	IC_{h_1}			IC_{h_3}			IC_{h_4}		
		G	I	D	G	I	D	G	I	D
0.001	5	301	9422	277	226	9580	194	180	9657	163
0.001	10	41	9911	48	64	9874	62	33	9927	40
0.001	20	8	9982	10	31	9944	25	5	9988	7
0.001	30	7	9989	4	17	9970	13	6	9990	4
0.001	50	3	9995	2	7	9983	10	3	9995	2
0.001	100	9	9983	8	12	9977	11	9	9983	8
0.01	5	387	9224	389	408	9189	403	279	9444	277
0.01	10	98	9787	115	166	9660	174	73	9833	94
0.01	20	49	9902	49	87	9820	93	37	9925	38
0.01	30	50	9896	54	74	9844	82	46	9904	50
0.01	50	44	9896	60	69	9855	76	42	9899	59
0.01	100	53	9894	53	62	9875	63	53	9895	52
0.05	5	585	8859	556	646	8744	610	465	9080	455
0.05	10	269	9428	303	380	9201	419	227	9534	239
0.05	20	250	9501	249	326	9344	330	231	9534	235
0.05	30	244	9533	223	299	9426	275	240	9543	217
0.05	50	225	9540	235	258	9477	265	224	9542	234
0.05	100	255	9496	249	273	9463	264	253	9498	249
0.1	5	732	8476	792	826	8291	883	595	8756	649
0.1	10	481	8996	523	636	8709	655	419	9143	438
0.1	20	452	9065	483	524	8904	572	439	9091	470
0.1	30	453	9053	494	515	8920	565	444	9064	492
0.1	50	456	9066	478	484	8995	521	452	9072	476
0.1	100	494	9002	504	511	8962	527	494	9003	503
0.2	5	1096	7824	1080	1219	7579	1202	926	8164	910
0.2	10	978	8060	962	1104	7796	1100	911	8188	901
0.2	20	920	8123	957	993	7973	1034	913	8141	946
0.2	30	973	8032	995	1020	7932	1048	970	8042	988
0.2	50	993	7991	1016	1018	7939	1043	992	7995	1013
0.2	100	1012	7990	998	1034	7953	1013	1012	7991	997
0.5	5	2422	5192	2386	2508	5025	2467	2280	5426	2294
0.5	10	2496	5034	2470	2545	4925	2530	2490	5057	2453
0.5	20	2450	5061	2489	2469	5029	2502	2450	5064	2486
0.5	30	2514	5033	2453	2538	4999	2463	2514	5034	2452
0.5	50	2462	5042	2496	2471	5026	2503	2462	5042	2496
0.5	100	2504	4979	2517	2508	4969	2523	2504	4979	2517

Table 2.4: IC_{h_1} , IC_{h_3} et IC_{h_4} avec une loi uniforme sur $[0; 1]$.

α	n	IC_z			IC_t			IC_g		
		G	I	D	G	I	D	C	I	D
0.001	5	86	9825	89	5	9991	4	76	9844	80
0.001	10	31	9937	32	3	9995	2	31	9935	34
0.001	20	14	9971	15	4	9990	6	15	9963	22
0.001	30	6	9981	13	0	9999	1	13	9970	17
0.001	50	4	9991	5	1	9997	2	8	9986	6
0.001	100	6	9986	8	5	9989	6	9	9978	13
0.01	5	232	9541	227	23	9955	22	229	9557	214
0.01	10	123	9744	133	33	9940	27	150	9688	162
0.01	20	69	9849	82	42	9924	34	91	9790	119
0.01	30	62	9881	57	40	9927	33	94	9823	83
0.01	50	50	9904	46	32	9935	33	81	9853	66
0.01	100	45	9895	60	37	9908	55	61	9863	76
0.05	5	510	8953	537	163	9676	161	603	8787	610
0.05	10	372	9249	379	200	9585	215	480	9042	478
0.05	20	288	9387	325	232	9530	238	373	9218	409
0.05	30	280	9438	282	232	9534	234	353	9301	346
0.05	50	278	9453	269	249	9508	243	329	9335	336
0.05	100	267	9482	251	254	9514	232	312	9404	284
0.1	5	839	8305	856	437	9164	399	1007	8010	983
0.1	10	638	8672	690	460	9035	505	818	8337	845
0.1	20	582	8818	600	502	8983	515	715	8584	701
0.1	30	545	8911	544	491	9019	490	642	8713	645
0.1	50	539	8923	538	508	8976	516	604	8785	611
0.1	100	510	9023	467	498	9054	448	566	8922	512
0.2	5	1408	7229	1363	997	8050	953	1650	6787	1563
0.2	10	1219	7602	1179	1045	7945	1010	1430	7203	1367
0.2	20	1151	7783	1066	1075	7934	991	1294	7495	1211
0.2	30	1069	7861	1070	1025	7959	1016	1163	7671	1166
0.2	50	1018	7933	1049	992	7995	1013	1083	7804	1113
0.2	100	1011	7993	996	999	8016	985	1063	7890	1047
0.5	5	2826	4304	2870	2643	4682	2675	3007	3945	3048
0.5	10	2683	4667	2650	2582	4861	2557	2810	4391	2799
0.5	20	2671	4748	2581	2635	4820	2545	2744	4625	2631
0.5	30	2575	4811	2614	2549	4871	2580	2635	4699	2666
0.5	50	2485	4992	2523	2467	5027	2506	2511	4926	2563
0.5	100	2553	4971	2476	2545	4989	2466	2576	4931	2493

Table 2.5: IC_z , IC_t et IC_g avec une loi de Laplace de variance 2.

α	n	IC_{h_1}			IC_{h_3}			IC_{h_4}		
		G	I	D	G	I	D	G	I	D
0.001	5	973	7987	1040	86	9824	90	164	9660	176
0.001	10	402	9185	413	34	9931	35	90	9837	73
0.001	20	136	9698	166	14	9969	17	42	9899	59
0.001	30	76	9841	83	7	9980	13	33	9927	40
0.001	50	37	9935	28	4	9991	5	20	9960	20
0.001	100	14	9967	19	6	9986	8	13	9971	16
0.01	5	923	8169	908	241	9534	225	353	9304	343
0.01	10	440	9048	512	130	9730	140	247	9486	267
0.01	20	241	9511	248	74	9838	88	147	9686	167
0.01	30	175	9661	164	64	9876	60	135	9742	123
0.01	50	111	9792	97	53	9899	48	98	9823	79
0.01	100	68	9848	84	47	9892	61	67	9850	83
0.05	5	1119	7732	1149	538	8900	562	744	8501	755
0.05	10	756	8480	764	404	9188	408	592	8831	577
0.05	20	482	8992	526	304	9356	340	412	9130	458
0.05	30	437	9141	422	294	9415	291	396	9212	392
0.05	50	366	9262	372	290	9434	276	344	9304	352
0.05	100	324	9375	301	277	9466	257	319	9387	294
0.1	5	1396	7238	1366	895	8205	900	1100	7835	1065
0.1	10	1007	7979	1014	677	8598	725	889	8215	896
0.1	20	814	8410	776	616	8766	618	742	8530	728
0.1	30	696	8599	705	564	8877	559	665	8669	666
0.1	50	639	8719	642	554	8894	552	616	8763	621
0.1	100	578	8899	523	522	8999	479	569	8914	517
0.2	5	1873	6344	1783	1488	7082	1430	1652	6775	1573
0.2	10	1530	6981	1489	1293	7480	1227	1440	7179	1381
0.2	20	1341	7393	1266	1191	7696	1113	1302	7484	1214
0.2	30	1189	7613	1198	1089	7810	1101	1162	7666	1172
0.2	50	1095	7777	1128	1037	7891	1072	1083	7800	1117
0.2	100	1063	7886	1051	1020	7968	1012	1063	7887	1050
0.5	5	3030	3890	3080	2939	4071	2990	2972	4029	2999
0.5	10	2828	4355	2817	2748	4510	2742	2788	4436	2776
0.5	20	2747	4616	2637	2714	4674	2612	2733	4641	2626
0.5	30	2639	4692	2669	2613	4744	2643	2632	4709	2659
0.5	50	2516	4919	2565	2498	4952	2550	2506	4932	2562
0.5	100	2576	4931	2493	2564	4954	2482	2574	4935	2491

Table 2.6: IC_{h_1} , IC_{h_3} et IC_{h_4} avec une loi de Laplace de variance 2.

α	n	IC_z			IC_t			IC_g		
		G	I	D	G	I	D	G	I	D
0.001	5	59	9398	543	4	9940	56	47	9558	395
0.001	10	5	9779	216	0	9950	50	4	9879	117
0.001	20	5	9917	78	0	9959	41	5	9954	41
0.001	30	3	9942	55	0	9974	26	3	9977	20
0.001	50	3	9965	32	3	9971	26	6	9978	16
0.001	100	1	9984	15	1	9986	13	1	9995	4
0.01	5	116	9124	760	22	9730	248	106	9301	593
0.01	10	54	9487	459	12	9746	242	65	9642	293
0.01	20	30	9711	259	16	9815	169	42	9811	147
0.01	30	25	9805	170	16	9854	130	39	9860	101
0.01	50	26	9827	147	17	9860	123	35	9878	87
0.01	100	25	9859	116	20	9878	102	37	9900	63
0.05	5	292	8490	1218	99	9180	721	280	8734	986
0.05	10	195	8996	809	99	9309	592	223	9195	582
0.05	20	157	9277	566	103	9423	474	208	9406	386
0.05	30	167	9354	479	126	9456	418	223	9445	332
0.05	50	186	9375	439	155	9434	411	249	9426	325
0.05	100	218	9447	335	206	9472	322	266	9471	263
0.1	5	482	7936	1582	230	8670	1100	501	8176	1323
0.1	10	377	8510	1113	255	8819	926	438	8683	879
0.1	20	371	8785	844	296	8955	749	460	8920	620
0.1	30	414	8813	773	365	8928	707	506	8904	590
0.1	50	375	8946	679	345	9010	645	488	8972	540
0.1	100	407	8942	651	393	8982	625	487	8983	530
0.2	5	855	7190	1955	583	7814	1603	918	7383	1699
0.2	10	805	7598	1597	686	7902	1412	951	7750	1299
0.2	20	822	7790	1388	760	7922	1318	967	7881	1152
0.2	30	892	7785	1323	845	7882	1273	1041	7851	1108
0.2	50	852	7870	1278	834	7916	1250	973	7918	1109
0.2	100	894	7969	1137	888	7986	1126	990	8002	1008
0.5	5	2184	4614	3202	1984	5003	3013	2366	4657	2977
0.5	10	2264	4870	2866	2179	5038	2783	2465	4874	2661
0.5	20	2299	4979	2722	2260	5061	2679	2491	4990	2519
0.5	30	2391	4886	2723	2358	4946	2696	2549	4903	2548
0.5	50	2415	4983	2602	2395	5015	2590	2555	4964	2481
0.5	100	2408	4912	2680	2394	4930	2676	2485	4937	2578

Table 2.7: IC_z , IC_t et IC_g avec une loi normale c.r. en valeur absolue.

α	n	IC_{h_1}			IC_{h_3}			IC_{h_4}		
		G	I	D	G	I	D	G	I	D
0.001	5	603	8846	551	59	9405	536	81	9522	397
0.001	10	91	9786	123	5	9790	205	16	9885	99
0.001	20	23	9935	42	5	9919	76	13	9957	30
0.001	30	9	9971	20	3	9948	49	4	9979	17
0.001	50	11	9973	16	3	9966	31	9	9981	10
0.001	100	4	9992	4	1	9984	15	3	9993	4
0.01	5	376	8934	690	116	9145	739	151	9320	529
0.01	10	144	9558	298	55	9501	444	90	9673	237
0.01	20	69	9784	147	31	9724	245	56	9834	110
0.01	30	65	9834	101	28	9808	164	57	9861	82
0.01	50	42	9871	87	27	9836	137	39	9888	73
0.01	100	52	9885	63	26	9866	108	46	9896	58
0.05	5	470	8475	1055	292	8520	1188	320	8860	820
0.05	10	308	9107	585	198	9029	773	249	9256	495
0.05	20	259	9355	386	168	9295	537	230	9444	326
0.05	30	264	9404	332	171	9377	452	238	9465	297
0.05	50	275	9400	325	194	9380	426	263	9431	306
0.05	100	279	9458	263	222	9454	324	274	9473	253
0.1	5	677	7965	1358	483	7976	1541	518	8370	1112
0.1	10	529	8592	879	385	8545	1070	459	8765	776
0.1	20	508	8872	620	390	8803	807	478	8953	569
0.1	30	543	8867	590	433	8824	743	523	8926	551
0.1	50	514	8946	540	395	8954	651	498	8990	512
0.1	100	501	8969	530	425	8954	621	494	8985	521
0.2	5	1061	7228	1711	883	7228	1889	878	7650	1472
0.2	10	1028	7670	1302	840	7649	1511	965	7852	1183
0.2	20	999	7849	1152	861	7802	1337	972	7930	1098
0.2	30	1076	7816	1108	936	7800	1264	1050	7885	1065
0.2	50	998	7893	1109	883	7876	1241	977	7937	1086
0.2	100	1002	7990	1008	921	7967	1112	991	8009	1000
0.5	5	2397	4622	2981	2282	4638	3080	2323	4809	2868
0.5	10	2478	4861	2661	2383	4867	2750	2454	4935	2611
0.5	20	2506	4975	2519	2404	4990	2606	2482	5026	2492
0.5	30	2553	4899	2548	2482	4891	2627	2546	4923	2531
0.5	50	2559	4960	2481	2484	4981	2535	2548	4978	2474
0.5	100	2486	4936	2578	2444	4925	2631	2483	4945	2572

Table 2.8: IC_{h_1} , IC_{h_3} et IC_{h_4} avec une loi normale c.r. en valeur absolue.

α	n	IC_z			IC_t			IC_g		
		G	I	D	G	I	D	C	I	D
0.001	5	517	9415	68	63	9934	3	356	9588	56
0.001	10	205	9786	9	62	9938	0	125	9866	9
0.001	20	100	9896	4	50	9950	0	45	9951	4
0.001	30	62	9936	2	27	9973	0	17	9980	3
0.001	50	36	9960	4	23	9976	1	15	9980	5
0.001	100	16	9983	1	13	9986	1	8	9987	5
0.01	5	800	9063	137	242	9740	18	635	9247	118
0.01	10	441	9519	40	231	9764	5	292	9663	45
0.01	20	274	9691	35	192	9793	15	152	9800	48
0.01	30	188	9786	26	132	9853	15	93	9869	38
0.01	50	130	9842	28	107	9876	17	72	9883	45
0.01	100	108	9854	38	93	9878	29	63	9887	50
0.05	5	1166	8534	300	660	9231	109	925	8796	279
0.05	10	795	8995	210	579	9311	110	601	9178	221
0.05	20	561	9265	174	471	9408	121	392	9371	237
0.05	30	503	9339	158	452	9421	127	354	9416	230
0.05	50	398	9417	185	368	9469	163	291	9451	258
0.05	100	380	9435	185	361	9461	178	295	9469	236
0.1	5	1463	8066	471	993	8773	234	1217	8300	483
0.1	10	1066	8521	413	884	8847	269	818	8692	490
0.1	20	842	8811	347	770	8939	291	624	8928	448
0.1	30	764	8849	387	707	8953	340	581	8920	499
0.1	50	688	8948	364	658	9008	334	531	8991	478
0.1	100	658	8923	419	641	8957	402	535	8965	500
0.2	5	1972	7169	859	1621	7829	550	1739	7366	895
0.2	10	1655	7531	814	1488	7845	667	1359	7695	946
0.2	20	1385	7784	831	1315	7912	773	1165	7847	988
0.2	30	1297	7851	852	1250	7947	803	1098	7918	984
0.2	50	1236	7895	869	1212	7942	846	1070	7923	1007
0.2	100	1136	7930	934	1122	7961	917	1012	7951	1037
0.5	5	3107	4602	2291	2963	4946	2091	2907	4638	2455
0.5	10	2875	4842	2283	2788	5012	2200	2621	4870	2509
0.5	20	2792	4857	2351	2757	4934	2309	2597	4872	2531
0.5	30	2787	4895	2318	2762	4950	2288	2621	4913	2466
0.5	50	2634	4998	2368	2620	5028	2352	2522	4984	2494
0.5	100	2597	4953	2450	2588	4968	2444	2508	4949	2543

Table 2.9: IC_z , IC_t et IC_g avec (-1) * une loi normale c.r. en v.a.

α	n	IC_{h_1}			IC_{h_3}			IC_{h_4}		
		G	I	D	G	I	D	G	I	D
0.001	5	502	8892	606	506	9425	69	347	9570	83
0.001	10	135	9775	90	200	9791	9	103	9876	21
0.001	20	45	9943	12	94	9902	4	32	9963	5
0.001	30	17	9975	8	57	9941	2	10	9983	7
0.001	50	15	9974	11	32	9964	4	13	9981	6
0.001	100	8	9986	6	16	9983	1	5	9989	6
0.01	5	725	8879	396	788	9074	138	566	9279	155
0.01	10	294	9569	137	418	9542	40	215	9711	74
0.01	20	153	9770	77	261	9701	38	118	9828	54
0.01	30	93	9846	61	176	9798	26	79	9870	51
0.01	50	72	9865	63	123	9848	29	62	9882	56
0.01	100	63	9878	59	103	9858	39	60	9884	56
0.05	5	977	8541	482	1121	8583	296	771	8910	319
0.05	10	605	9099	296	756	9035	209	494	9268	238
0.05	20	392	9309	299	540	9279	181	335	9400	265
0.05	30	354	9362	284	485	9345	170	312	9429	259
0.05	50	291	9423	286	384	9426	190	269	9460	271
0.05	100	295	9453	252	371	9439	190	282	9473	245
0.1	5	1245	8128	627	1420	8105	475	1016	8495	489
0.1	10	818	8604	578	1028	8549	423	707	8783	510
0.1	20	624	8866	510	806	8828	366	572	8954	474
0.1	30	581	8888	531	734	8854	412	533	8963	504
0.1	50	531	8970	499	669	8947	384	508	9006	486
0.1	100	535	8943	522	637	8928	435	519	8970	511
0.2	5	1757	7237	1006	1904	7226	870	1512	7630	858
0.2	10	1361	7630	1009	1574	7580	846	1243	7799	958
0.2	20	1165	7816	1019	1332	7796	872	1110	7890	1000
0.2	30	1098	7898	1004	1242	7865	893	1060	7952	988
0.2	50	1070	7902	1028	1203	7893	904	1052	7940	1008
0.2	100	1012	7942	1046	1103	7932	965	1003	7959	1038
0.5	5	2911	4596	2493	2994	4607	2399	2793	4785	2422
0.5	10	2621	4856	2523	2749	4837	2414	2567	4944	2489
0.5	20	2597	4861	2542	2694	4855	2451	2574	4904	2522
0.5	30	2621	4909	2470	2702	4907	2391	2604	4938	2458
0.5	50	2522	4980	2498	2566	4997	2437	2513	4995	2492
0.5	100	2508	4947	2545	2551	4941	2508	2502	4957	2541

Table 2.10: IC_{h_1} , IC_{h_3} et IC_{h_4} avec (-1) * une loi normale c.r. en v.a.

α	n	IC_z			IC_t			IC_g		
		G	I	D	G	I	D	G	I	D
0.001	5	6	8520	1474	0	9612	388	6	9019	975
0.001	10	1	9210	789	0	9606	394	2	9588	410
0.001	20	0	9589	411	0	9742	258	0	9823	177
0.001	30	0	9710	290	0	9796	204	0	9893	107
0.001	50	0	9847	153	0	9877	123	0	9947	53
0.001	100	0	9896	104	0	9907	93	0	9967	33
0.01	5	26	8098	1876	0	8994	1006	16	8599	1385
0.01	10	9	8813	1178	2	9206	792	15	9278	707
0.01	20	1	9286	713	0	9443	557	8	9608	384
0.01	30	5	9431	564	1	9520	479	14	9703	283
0.01	50	9	9590	401	7	9655	338	22	9793	185
0.01	100	6	9747	247	4	9761	235	19	9854	127
0.05	5	78	7560	2362	13	8266	1721	74	8073	1853
0.05	10	57	8310	1633	17	8623	1360	98	8750	1152
0.05	20	51	8761	1188	29	8899	1072	119	9076	805
0.05	30	63	8994	943	47	9094	859	137	9296	567
0.05	50	79	9151	770	70	9206	724	156	9361	483
0.05	100	95	9268	637	86	9296	618	168	9425	407
0.1	5	160	7187	2653	53	7779	2168	208	7593	2199
0.1	10	161	7877	1962	84	8184	1732	322	8222	1456
0.1	20	185	8337	1478	133	8499	1368	373	8578	1049
0.1	30	193	8583	1224	161	8676	1163	372	8760	868
0.1	50	220	8676	1104	200	8739	1061	414	8812	774
0.1	100	292	8841	867	279	8869	852	492	8875	633
0.2	5	471	6497	3032	246	7036	2718	717	6659	2624
0.2	10	484	7094	2422	374	7350	2276	878	7129	1993
0.2	20	538	7424	2038	473	7559	1968	898	7476	1626
0.2	30	599	7581	1820	546	7682	1772	952	7625	1423
0.2	50	669	7699	1632	636	7756	1608	998	7724	1278
0.2	100	751	7865	1384	733	7896	1371	1017	7853	1130
0.5	5	1741	4094	4165	1529	4425	4046	2283	3864	3853
0.5	10	1900	4436	3664	1792	4604	3604	2436	4264	3300
0.5	20	2028	4703	3269	1987	4772	3241	2484	4596	2920
0.5	30	2064	4814	3122	2039	4869	3092	2466	4743	2791
0.5	50	2183	4836	2981	2164	4863	2973	2529	4742	2729
0.5	100	2168	4975	2857	2159	4990	2851	2433	4939	2628

Table 2.11: IC_z , IC_t et IC_g avec une loi du chi carré avec 1 d.l.

α	n	IC_{h_1}			IC_{h_3}			IC_{h_4}		
		G	I	D	G	I	D	G	I	D
0.001	5	1667	7307	1026	6	8551	1443	15	9279	706
0.001	10	869	8720	411	1	9237	762	3	9813	184
0.001	20	390	9433	177	0	9610	390	5	9938	57
0.001	30	204	9689	107	0	9725	275	2	9951	47
0.001	50	71	9876	53	0	9860	140	5	9974	21
0.001	100	18	9949	33	0	9899	101	3	9986	11
0.01	5	924	7669	1407	23	8162	1815	29	8986	985
0.01	10	479	8814	707	9	8868	1123	30	9588	382
0.01	20	243	9373	384	3	9314	683	38	9785	177
0.01	30	182	9535	283	5	9472	523	39	9817	144
0.01	50	119	9696	185	10	9623	367	45	9841	114
0.01	100	86	9787	127	7	9756	237	42	9879	79
0.05	5	624	7505	1871	77	7633	2290	133	8493	1374
0.05	10	481	8367	1152	61	8375	1564	161	9125	714
0.05	20	399	8796	805	59	8815	1126	190	9278	532
0.05	30	380	9053	567	77	9039	884	208	9395	397
0.05	50	324	9193	483	90	9186	724	215	9409	376
0.05	100	269	9324	407	109	9285	606	208	9450	342
0.1	5	726	7065	2209	166	7281	2553	271	8079	1650
0.1	10	730	7814	1456	198	7930	1872	407	8566	1027
0.1	20	686	8265	1049	224	8384	1392	462	8748	790
0.1	30	606	8526	868	226	8620	1154	450	8873	677
0.1	50	572	8654	774	259	8704	1037	474	8893	633
0.1	100	614	8753	633	326	8851	823	536	8913	551
0.2	5	1147	6225	2628	553	6518	2929	763	7199	2038
0.2	10	1210	6797	1993	573	7122	2305	930	7438	1632
0.2	20	1103	7271	1626	643	7425	1932	944	7643	1413
0.2	30	1126	7451	1423	707	7569	1724	980	7753	1267
0.2	50	1123	7599	1278	757	7697	1546	1014	7820	1166
0.2	100	1093	7777	1130	815	7859	1326	1027	7891	1082
0.5	5	2382	3763	3855	2061	3944	3995	2228	4103	3669
0.5	10	2525	4175	3300	2212	4326	3462	2395	4437	3168
0.5	20	2538	4542	2920	2291	4624	3085	2455	4720	2825
0.5	30	2501	4708	2791	2283	4765	2952	2431	4844	2725
0.5	50	2559	4712	2729	2377	4771	2852	2509	4817	2674
0.5	100	2446	4926	2628	2328	4925	2747	2423	4984	2593

Table 2.12: IC_{h_1} , IC_{h_3} et IC_{h_4} avec une loi du chi carré avec 1 d.l.

α	n	IC_z			IC_t			IC_g		
		G	I	D	G	I	D	G	I	D
0.001	5	1438	8554	8	420	9580	0	967	9028	5
0.001	10	739	9260	1	377	9623	0	401	9599	0
0.001	20	431	9569	0	279	9721	0	161	9838	1
0.001	30	260	9740	0	182	9818	0	96	9904	0
0.001	50	162	9838	0	121	9879	0	48	9952	0
0.001	100	95	9905	0	83	9917	0	32	9968	0
0.01	5	1890	8084	26	991	9009	0	1365	8613	22
0.01	10	1128	8868	4	760	9239	1	681	9310	9
0.01	20	713	9282	5	582	9414	4	373	9619	8
0.01	30	547	9451	2	467	9531	2	289	9705	6
0.01	50	371	9622	7	323	9673	4	192	9787	21
0.01	100	232	9761	7	212	9785	3	104	9870	26
0.05	5	2279	7626	95	1683	8297	20	1813	8083	104
0.05	10	1556	8383	61	1294	8684	22	1080	8801	119
0.05	20	1142	8803	55	1025	8949	26	745	9123	132
0.05	30	914	9022	64	831	9125	44	561	9290	149
0.05	50	758	9165	77	716	9217	67	464	9381	155
0.05	100	586	9313	101	572	9332	96	388	9411	201
0.1	5	2688	7140	172	2273	7678	49	2288	7480	232
0.1	10	2021	7816	163	1816	8092	92	1556	8135	309
0.1	20	1501	8331	168	1393	8471	136	1051	8602	347
0.1	30	1340	8446	214	1274	8547	179	912	8675	413
0.1	50	1070	8703	227	1037	8760	203	760	8812	428
0.1	100	882	8862	256	870	8891	239	632	8919	449
0.2	5	3126	6429	445	2803	6976	221	2718	6545	737
0.2	10	2416	7086	498	2282	7363	355	1983	7167	850
0.2	20	2007	7458	535	1930	7594	476	1618	7480	902
0.2	30	1777	7643	580	1719	7740	541	1390	7683	927
0.2	50	1584	7750	666	1558	7803	639	1231	7785	984
0.2	100	1415	7885	700	1399	7910	691	1155	7884	961
0.5	5	4138	4039	1823	4027	4350	1623	3825	3775	2400
0.5	10	3586	4455	1959	3512	4621	1867	3231	4282	2487
0.5	20	3194	4694	2112	3151	4785	2064	2855	4589	2556
0.5	30	3120	4782	2098	3101	4830	2069	2784	4709	2507
0.5	50	3016	4862	2122	3000	4893	2107	2733	4816	2451
0.5	100	2886	4858	2256	2882	4870	2248	2629	4853	2518

Table 2.13: IC_z , IC_t et IC_g avec $(-1)^*$ une loi du chi carré avec 1 d.l.

α	n	IC_{h_1}			IC_{h_3}			IC_{h_4}		
		C	I	D	G	I	D	G	I	D
0.001	5	1015	7230	1755	1415	8577	8	708	9272	20
0.001	10	402	8695	903	709	9290	1	192	9807	1
0.001	20	161	9459	380	411	9589	0	46	9952	2
0.001	30	96	9716	188	243	9757	0	32	9967	1
0.001	50	48	9887	65	150	9850	0	25	9971	4
0.001	100	32	9949	19	90	9910	0	14	9984	2
0.01	5	1390	7749	861	1844	8131	25	963	8996	41
0.01	10	683	8856	461	1075	8920	5	375	9606	19
0.01	20	373	9342	285	679	9316	5	168	9792	40
0.01	30	289	9545	166	527	9470	3	143	9826	31
0.01	50	192	9684	124	345	9646	9	110	9840	50
0.01	100	104	9808	88	216	9775	9	65	9882	53
0.05	5	1832	7532	636	2231	7672	97	1280	8571	149
0.05	10	1081	8411	508	1479	8451	70	654	9178	168
0.05	20	745	8795	460	1081	8851	68	489	9280	231
0.05	30	561	9098	341	856	9064	80	391	9391	218
0.05	50	464	9211	325	718	9197	85	336	9433	231
0.05	100	388	9309	303	565	9314	121	320	9436	244
0.1	5	2299	6957	744	2606	7212	182	1703	7994	303
0.1	10	1556	7711	733	1925	7887	188	1104	8498	398
0.1	20	1051	8303	646	1412	8381	207	784	8782	434
0.1	30	912	8409	679	1268	8476	256	727	8776	497
0.1	50	760	8635	605	1019	8710	271	628	8881	491
0.1	100	632	8826	542	836	8864	300	556	8960	484
0.2	5	2721	6083	1196	3016	6455	529	2089	7128	783
0.2	10	1983	6826	1191	2309	7096	595	1602	7488	910
0.2	20	1618	7253	1129	1889	7483	628	1407	7657	936
0.2	30	1390	7505	1105	1657	7664	679	1233	7803	964
0.2	50	1231	7666	1103	1496	7747	757	1124	7873	1003
0.2	100	1155	7803	1042	1349	7876	775	1105	7919	976
0.5	5	3826	3665	2509	3978	3837	2185	3615	4043	2342
0.5	10	3231	4201	2568	3388	4337	2275	3078	4476	2446
0.5	20	2855	4540	2605	2998	4640	2362	2769	4705	2526
0.5	30	2784	4682	2534	2944	4722	2334	2706	4815	2479
0.5	50	2733	4792	2475	2866	4825	2309	2670	4905	2425
0.5	100	2629	4840	2531	2751	4835	2414	2593	4896	2511

Table 2.14: IC_{h_1} , IC_{h_3} et IC_{h_4} avec $(-1)^*$ une loi du chi carré avec 1 d.l.

Annexe 3

Résultats de la troisième étude de simulation

Loi	α	IC_x			IC_t			IC_g		
		G	I	D	C	I	D	G	I	D
\mathcal{N}	0.01	2	988	10	1	996	3	4	991	5
	0.05	24	946	30	16	961	23	26	949	25
	0.1	49	903	48	42	916	42	54	895	51
	0.2	104	796	100	101	804	95	104	798	98
	0.5	264	461	275	257	472	271	264	465	271
\mathcal{U}	0.01	5	983	12	3	989	8	2	993	5
	0.05	36	934	30	31	947	22	30	950	20
	0.1	53	890	57	49	902	49	47	906	47
	0.2	103	784	113	96	798	106	99	796	105
	0.5	262	480	258	255	493	252	257	496	247
\mathcal{L}	0.01	5	985	10	2	995	3	8	980	12
	0.05	39	927	34	30	945	25	61	895	44
	0.1	75	866	59	68	880	52	90	839	71
	0.2	136	751	113	130	769	101	142	727	131
	0.5	261	480	259	258	485	257	266	471	263
$ \mathcal{N} $	0.01	3	969	28	1	976	23	3	977	20
	0.05	11	926	63	5	939	56	14	943	43
	0.1	30	877	93	24	887	89	39	886	75
	0.2	78	767	155	68	788	144	89	788	123
	0.5	232	480	288	227	489	284	242	495	263
χ^2	0.01	1	928	71	0	940	60	1	959	40
	0.05	2	881	117	2	893	105	8	917	75
	0.1	11	838	151	8	852	140	21	874	105
	0.2	41	748	211	33	762	205	80	764	156
	0.5	187	473	340	183	482	335	230	475	295

Table 3.1: IC_x , IC_t et IC_g avec des échantillons de taille $n = 20$.

Loi	α	IC_{h_1}			IC_{h_3}			IC_{h_4}		
		G	I	D	G	I	D	G	I	D
\mathcal{N}	0.01	7	988	5	3	988	9	6	989	5
	0.05	29	945	26	24	946	30	27	948	25
	0.1	55	893	52	48	904	48	54	896	50
	0.2	104	797	99	103	796	101	104	798	98
	0.5	265	464	271	264	464	272	264	466	270
\mathcal{U}	0.01	2	993	5	5	984	11	1	995	4
	0.05	30	950	20	34	938	28	24	957	19
	0.1	47	906	47	52	892	56	47	909	44
	0.2	99	796	105	102	787	111	98	798	104
	0.5	257	496	247	258	487	255	257	496	247
\mathcal{L}	0.01	30	947	23	5	985	10	19	962	19
	0.05	76	872	52	41	923	36	66	888	46
	0.1	105	815	80	78	862	60	96	831	73
	0.2	145	722	133	137	744	119	143	727	130
	0.5	267	470	263	266	475	259	265	473	262
$ \mathcal{N} $	0.01	4	976	20	4	969	27	3	986	11
	0.05	17	940	43	11	928	61	17	944	39
	0.1	48	877	75	33	876	91	42	892	66
	0.2	92	785	123	80	775	145	89	798	113
	0.5	242	495	263	241	483	276	242	496	262
χ^2	0.01	14	946	40	1	931	68	2	981	17
	0.05	30	895	75	4	886	110	12	943	45
	0.1	50	845	105	13	846	141	27	893	80
	0.2	98	746	156	55	742	203	84	786	130
	0.5	238	467	295	213	470	317	229	488	283

Table 3.2: IC_{h_1} , IC_{h_3} et IC_{h_4} avec des échantillons de taille $n = 20$.

Loi	α	IC_{b_t}			IC_{b_p}			$IC_{b_{c_\alpha}}$		
		G	I	D	G	I	D	G	I	D
\mathcal{N}	0.01	1	997	2	3	989	8	6	987	7
	0.05	17	964	19	27	942	31	27	942	31
	0.1	48	912	40	57	893	50	59	887	54
	0.2	97	810	93	105	785	110	107	793	100
	0.5	260	470	270	267	452	281	267	454	279
\mathcal{U}	0.01	1	996	3	4	985	11	3	990	7
	0.05	13	969	18	38	935	27	30	946	24
	0.1	39	925	36	53	882	65	54	888	58
	0.2	88	816	96	109	774	117	98	788	114
	0.5	254	503	243	273	466	261	258	483	259
\mathcal{L}	0.01	5	988	7	12	975	13	24	957	19
	0.05	52	911	37	56	901	43	73	874	53
	0.1	84	848	68	85	848	67	99	821	80
	0.2	140	741	119	140	737	123	154	713	133
	0.5	258	486	256	265	469	266	266	460	274
$ \mathcal{N} $	0.01	1	991	8	3	971	26	4	974	22
	0.05	13	954	33	13	923	64	16	932	52
	0.1	32	912	56	37	871	92	42	882	76
	0.2	87	805	108	83	763	154	92	789	119
	0.5	235	500	265	233	468	299	243	487	270
χ^2	0.01	0	988	12	1	937	62	2	956	42
	0.05	6	947	47	6	890	104	13	914	73
	0.1	21	905	74	13	847	140	34	863	103
	0.2	69	809	122	53	738	209	86	757	157
	0.5	223	507	270	182	462	356	226	479	295

Table 3.3: IC_{b_t} , IC_{b_p} et $IC_{b_{c_\alpha}}$ avec des échantillons de taille $n = 20$.

Loi	α	IC_z			IC_t			IC_g		
		G	I	D	G	I	D	G	I	D
\mathcal{N}	0.01	5	989	6	5	991	4	4	988	8
	0.05	34	930	36	27	943	30	31	932	37
	0.1	49	893	58	46	897	57	49	896	55
	0.2	100	792	108	98	797	105	98	795	107
	0.5	233	495	272	228	501	271	232	495	273
\mathcal{U}	0.01	8	991	1	8	991	1	6	993	1
	0.05	39	944	17	35	949	16	36	949	15
	0.1	62	895	43	58	905	37	59	903	38
	0.2	129	784	87	127	791	82	125	795	80
	0.5	282	467	251	281	469	250	281	468	251
\mathcal{L}	0.01	7	989	4	4	993	3	8	985	7
	0.05	25	951	24	24	955	21	35	936	29
	0.1	48	901	51	46	907	47	55	888	57
	0.2	97	819	84	94	826	80	107	804	89
	0.5	245	533	222	242	537	221	243	524	233
$ \mathcal{N} $	0.01	4	985	11	2	990	8	4	990	6
	0.05	17	942	41	15	945	40	19	949	32
	0.1	31	900	69	29	905	66	37	908	55
	0.2	81	803	116	81	808	111	95	803	102
	0.5	208	517	275	208	520	272	222	521	257
χ^2	0.01	0	959	41	0	964	36	2	980	18
	0.05	6	920	74	4	926	70	12	938	50
	0.1	18	876	106	17	881	102	41	882	77
	0.2	57	778	165	54	782	164	87	782	131
	0.5	208	488	304	207	491	302	241	488	271

Table 3.4: IC_z , IC_t et IC_g avec des échantillons de taille $n = 50$.

Loi	α	IC_{h_1}			IC_{h_3}			IC_{h_4}		
		G	I	D	G	I	D	G	I	D
\mathcal{N}	0.01	4	988	8	5	988	7	4	988	8
	0.05	31	932	37	34	930	36	31	932	37
	0.1	50	895	55	49	892	59	50	896	54
	0.2	98	795	107	101	791	108	97	796	107
	0.5	232	495	273	231	497	272	232	495	273
\mathcal{U}	0.01	6	993	1	8	991	1	6	993	1
	0.05	36	949	15	39	944	17	35	950	15
	0.1	59	903	38	60	898	42	58	904	38
	0.2	125	795	80	129	786	85	124	796	80
	0.5	281	468	251	282	468	250	281	468	251
\mathcal{L}	0.01	10	980	10	7	989	4	9	981	10
	0.05	38	926	36	28	947	25	36	931	33
	0.1	56	886	58	48	901	51	56	887	57
	0.2	112	796	92	103	812	85	107	803	90
	0.5	243	524	233	245	526	229	243	525	232
$ \mathcal{N} $	0.01	6	988	6	4	986	10	6	990	4
	0.05	20	948	32	17	943	40	20	951	29
	0.1	40	905	55	33	899	68	39	909	52
	0.2	95	803	102	85	805	110	95	808	97
	0.5	222	521	257	215	522	263	220	524	256
χ^2	0.01	13	969	18	0	962	38	5	984	11
	0.05	30	920	50	6	924	70	21	943	36
	0.1	54	869	77	24	875	101	45	891	64
	0.2	101	768	131	66	775	159	91	796	113
	0.5	243	486	271	227	485	288	239	498	263

Table 3.5: IC_{h_1} , IC_{h_3} et IC_{h_4} avec des échantillons de taille $n = 50$.

Loi	α	IC_{b_t}			IC_{b_p}			$IC_{b_{ca}}$		
		G	I	D	G	I	D	G	I	D
\mathcal{N}	0.01	4	990	6	8	984	8	4	987	9
	0.05	31	939	30	32	931	37	34	929	37
	0.1	49	897	54	51	887	62	52	884	64
	0.2	93	803	104	99	789	112	106	786	108
	0.5	230	495	275	233	495	272	231	487	282
\mathcal{U}	0.01	4	996	0	10	988	2	9	991	0
	0.05	29	964	7	35	947	18	34	950	16
	0.1	58	905	37	64	891	45	59	901	40
	0.2	121	794	85	131	778	91	123	785	92
	0.5	283	465	252	280	463	257	283	459	258
\mathcal{L}	0.01	8	985	7	7	984	9	12	977	11
	0.05	30	942	28	26	948	26	34	935	31
	0.1	50	896	54	53	894	53	55	890	55
	0.2	105	811	84	106	807	87	114	789	97
	0.5	243	529	228	239	534	227	248	526	226
$ \mathcal{N} $	0.01	5	990	5	5	987	8	5	988	7
	0.05	19	957	24	18	944	38	22	943	35
	0.1	35	919	46	33	901	66	38	910	52
	0.2	93	813	94	86	802	112	99	808	93
	0.5	220	524	256	207	513	280	221	519	260
χ^2	0.01	3	987	10	2	971	27	6	973	21
	0.05	14	952	34	12	921	67	21	928	51
	0.1	41	898	61	28	877	95	48	879	73
	0.2	86	803	111	66	773	161	96	776	128
	0.5	231	506	263	198	484	318	242	488	270

Table 3.6: IC_{b_t} , IC_{b_p} et $IC_{b_{ca}}$ avec des échantillons de taille $n = 50$.

Bibliographie

- [1] Abramovitch, L. and Singh, K. (1985). Edgeworth Corrected Pivotal Statistics and the Bootstrap. *Ann. Statist.*, 13, 116-132.
- [2] Barndorff-Nielsen, O.E. and Cox, D.R. (1994). *Inference and Asymptotics*. Chapman and Hall.
- [3] Bartlett, M.S. (1935). The Effect of Non-Normality on the t Distribution. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 31, 223-231.
- [4] Bhattacharya, R.N. and Ghosh, J.K. (1978). On the Validity of the Formal Edgeworth Expansion. *Ann. Statist.*, 6, 435-451.
- [5] Bernoulli, J. (1713). *Ars Conjectandi*. Thurnisiorum, Basel.
- [6] Bowman, K., Beauchamp, J. and Shenton, L. (1977). The Distribution of the t Statistic Under Non-Normality. *Intern. Statist. Rev.*, 45, 233-242.
- [7] Charlier, C.V.L. (1905). Ueber das Fehlergesetz. *Ark. Math. Astr. och. Fys.*, Vol.2, No.8.
- [8] Charlier, C.V.L. (1906). Ueber die Darstellung willkuerlicher Funktionen. *Ark. Math. Astr. och. Fys.*, Vol.2, No.20.
- [9] Chebyshev, P.L. (1860). Sur le développement des fonctions à une seule variable. *Bull. Acad. Imp. Sci. St-Petersbourg*, Series 3, Vol.1, 193-202.

- [10] Chebyshev, P.L. (1890). Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités. *Acta Math.*, 14, 305-315.
- [11] Chung, K.-L. (1946). The Approximate Distribution of Student's Statistic. *Ann. Math. Statist.*, 17, 447-465.
- [12] Cornish, E.A. and Fisher R.A. (1937). Moments and Cumulants in the Specification of Distributions. *Intern. Statist. Rev.*, 5, 307-327.
- [13] Davison, A.C. and Hinkley, D.V. (1997). *Bootstrap Methods and their Application*. Cambridge University Press.
- [14] De Moivre, A. (1733). *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii $\overline{a + b}^n$ in Seriem expansi*. Réimprimé in R.C. Archibald (1926), *Isis*, 8, 671-683.
- [15] Edgeworth, F.Y. (1896). The Symmetrical Probability Curve. *Phil. Mag.*, Series 5, 41, 90-99.
- [16] Edgeworth, F.Y. (1905). The Law of Error. *Camb. Phil. Trans.*, 20, 36-66 and 113-141.
- [17] Efron, B. (1979). Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife. *Ann. Statist.*, 7, 1-26.
- [18] Efron, B. (1981). Nonparametric Standard Errors and Confidence Intervals (with discussion). *Canad. J. Statist.*, 9, 139-172.
- [19] Efron, B. (1982). *The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans*. SIAM, Philadelphia.
- [20] Efron, B. (1987). Better Bootstrap Confidence Intervals (with discussion). *J. Amer. Statist. Assoc.*, 82, 171-200.
- [21] Efron, B. and Tibshirani, R.J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman and Hall.

- [22] Fisher, R.A. (1928). Moments and Product Moments of Sampling Distributions. *Proc. London Math. Soc.*, 30, 199-238.
- [23] Gayen, A.K. (1949). The Distribution of Student's t in Random Samples of Any Size Drawn from Non-Normal Universes. *Biometrika*, 36, 353-369.
- [24] Geary, R.C. (1936). The Distribution of Student's Ratio for Non-Normal Samples. *J. Roy. Statist. Soc.*, Supplement 3, No.2, 178-184.
- [25] Geary, R.C. (1947). Testing for Normality. *Biometrika*, 34, 209-242.
- [26] Gram, J.P. (1883). Ueber die Entwicklung reeler Funktionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate. *J. reine Angew. Math.*, 94, 41-73.
- [27] Hall, P. (1983). Inverting an Edgeworth Expansion. *Ann. Statist.*, 11, 569-576.
- [28] Hall, P. (1985). A Tabular Method for Correcting Skewness. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 97, 525-540.
- [29] Hall, P. (1988). Theoretical Comparison of Bootstrap Confidence Intervals. *Ann. Statist.*, 16, 927-953.
- [30] Hall, P. (1990). Pseudo-Likelihood Theory for Empirical Likelihood. *Ann. Statist.*, 18, 121-140.
- [31] Hall, P. (1992a). On the Removal of Skewness by Transformation. *J. Roy. Statist. Soc. B*, 54, 221-228.
- [32] Hall, P. (1992b). *The Bootstrap and Edgeworth Expansion*. Springer-Verlag.
- [33] Hall, P. and La Scala, B. (1990). Methodology and Algorithms of Empirical Likelihood. *Intern. Statist. Rev.*, 58, 109-127.

- [34] Hand, D.J., Daly, F., Lunn, A.D., McConway, K.J. and Ostrowski, E. (1994). *A Handbook of Small Data Sets*. Chapman and Hall.
- [35] Kendall, M.G. and Stuart, A. (1973). *The Advanced Theory of Statistics*, Vol.2, 3rd edition. Griffin, London.
- [36] Johnson, N.J. (1978). Modified t Tests and Confidence Intervals for Asymmetrical Populations. *J. Am. Statist. Assoc.*, 73, 536-544.
- [37] Laderman, J. (1939). The Distribution of Student's Ratio for Samples of Two Items Drawn from Non-Normal Universes. *Ann. Math. Statist.*, 10, 376-379.
- [38] Laplace, P.S. (1812). *Théorie Analytique des Probabilités*. Paris. (La 3ème édition de 1820 a été réimprimée en tant que Volume 7 des oeuvres complètes de Laplace).
- [39] Lehmann, E.L. (1986). *Testing Statistical Hypotheses*. John Wiley.
- [40] Mallows, C.L. and Tukey, J.W. (1982). An Overview of Techniques of Data Analysis, Emphasizing its Explanatory Aspects. In *Some Recent Advances in Statistics*, J. Tiago de Oliveira and B. Epstein Eds., pp. 111-172. Academic Press.
- [41] Montmort, P.R. (1713). *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*. 2ème édition, Jacque Quillau, Paris.
- [42] Nair, A.K.N. (1941). Distribution of Student's t in the Correlation Coefficient in Samples from Non-Normal Populations. *Sankhyā*, 5, 383-400.
- [43] Neyman, J. (1937). Outline of a Theory of Statistical Estimation Based on the Classical Theory of Probability. *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 236, 333-380.

- [44] Neyman, J. and Pearson, E.S. (1928). On the Use and Interpretation of Certain Test Criteria. *Biometrika*, 20A, 175-240.
- [45] Neyman, J. and Pearson, E.S. (1933). On the Problem of the Most Efficient Test of Statistical Hypotheses. *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 231, 289-337.
- [46] Oja, H. (1981). On Location, Scale, Skewness and Kurtosis of Univariate Distributions. *Scand. J. Statist.*, 8, 154-168.
- [47] Owen, A.B. (1988). Empirical Likelihood Ratio Confidence Intervals for a Single Functional. *Biometrika*, 75, 237-249.
- [48] Owen, A.B. (1990). Empirical Likelihood Ratio Confidence Intervals. *Ann. Statist.*, 18, 90-120.
- [49] Pearson, E.S. and Adyanthaya, N.K. (1929). The Distribution of Frequency Constants in Small Samples from Non-Normal Symmetrical and Skew Populations. *Biometrika*, 21, 259-286.
- [50] Pearson, E.S., Plackett, R.L. and Barnard, G.A. (1990). 'Student'. *A Statistical Biography of William Sealy Gosset*. Clarendon Press, Oxford.
- [51] Pearson, K. (1900). On the Criterion that a Given System of Deviations from the Probable in the Case of a Correlated System of Variables is such that it can be Reasonably Supposed to Have Arisen from Random Sampling. *Phil. Mag.*, 5th Series, 50, 157-172.
- [52] Perlo, V. (1933). On the Distribution of Student's Ratio for Samples of Three Drawn from a Rectangular Distribution. *Biometrika*, 25, 203-204.
- [53] Pfanzagl, J. (1979). Nonparametric Minimum Contrast Estimators. In *Selecta Statistica Canadiana*, 5, 105-140.

- [54] Rider, P.R. (1929). On the Distribution of the Ratio of Mean to Standard Deviation in Small Samples from Non-Normal Universes. *Biometrika*, 21, 124-143.
- [55] Rousson, V. (1995). Axiomatique et Statistique Descriptive. *Student*, 1, 17-34.
- [56] Seidenfeld, T. (1979). *Philosophical Problems of Statistical Inference*. Reidel,
- [57] Sophister (1928). Discussion of Small Samples Drawn from an Infinite Skew Population. *Biometrika*, 20A, 389-423.
- [58] Stigler E.S. (1986). *The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty Before 1900*. Harvard University Press.
- [59] Student (1908). The Probable Error of the Mean. *Biometrika*, 6, 1-25.
- [60] Wallace, D.L. (1958). Asymptotic Approximations to Distributions. *Ann. Math. Statist.*, 29, 635-654.
- [61] Wilks, S.S. (1938). The Large Sample Distribution of the Likelihood Ratio for Testing Composite Hypotheses. *Ann. Math. Statist.*, 9, 60-62.
- [62] Wilson, E.B. (1927). Probable Inference, the Law of Succession, and Statistical Inference. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 22, 209-212.
- [63] Withers, C.S. (1983). Expansions for the Distribution and Quantiles of a Regular Functional of the Empirical Distribution with Applications to Nonparametric Confidence Intervals. *Ann. Statist.*, 11, 577-587.
- [64] Withers, C.S. (1984). Asymptotic Expansions for Distributions and Quantiles with Power Series Cumulants. *J. Roy. Statist. Soc. B*, 46, 389-396.