

LE STATUT LOGIQUE DE LA CONTRADICTION: L'APPROCHE PARACONSISTANTE

Henri VOLKEN

*Nous entrons et nous n'entrons pas dans les
mêmes fleuves; nous sommes et nous ne
sommes pas. Héraclite*

1. Le principe «ex contradictione quodlibet»

Les premières considérations systématiques sur la contradiction remontent, dans notre culture occidentale du moins, aux Eléates. Elles ont permis, selon toute vraisemblance, à Parménide et à ses disciples de développer le style du raisonnement indirect si caractéristique de la pensée mathématique et scientifique. Ce raisonnement est appelé aussi *raisonnement par l'absurde*, par référence au statut négatif qu'il fait jouer à la contradiction. En effet, la première apparition d'une contradiction permet de rebrousser chemin et de nier l'hypothèse qui se trouve au départ. Une contradiction signale donc une impossibilité, une absurdité, un désaccord définitif avec le monde dans lequel et à propos duquel se déroule le raisonnement. Ce monde lui-même est supposé être consistant¹.

Tout à l'opposé on trouve Héraclite pour qui la contradiction est un révélateur de la réalité qui rend celle-ci compréhensible: une chose ne s'explique que par rapport à son contraire. Le devenir est le principe du monde. Le devenir lui-même s'explique par l'opposition et la contradiction. Le monde pour Héraclite est contradictoire.

¹ Nous utiliserons le terme de *consistant* pour une théorie ne comportant pas de contradiction et le terme *absolument consistant* pour une théorie non triviale.
Travaux de logique, 11, 1997.

On trouve plus tard chez Aristote une formulation de plusieurs principes réglant le sort de la contradiction, du moins en ce qui concerne son statut logique. Il s'agit notamment du principe de la non-contradiction et du principe du tiers-exclu. Le premier stipule que φ et $\neg\varphi$ ne peuvent pas être vrais simultanément, alors que le second demande que l'un des deux au moins soit vrai. Par la suite, ces principes ont été généralement admis sans réserve par les logiciens et mathématiciens. Héraclite est resté l'*obscur* – comme il avait été surnommé – et son influence se limite au courant dialectique, représenté plus près de nous notamment par Hegel.

Les premiers signes d'une attitude plus critique en ce qui concerne la place de la contradiction dans le raisonnement sont apparus au début du vingtième siècle et plus précisément autour des années 1910. Divers paradoxes sémantiques ont alors ébranlé les «fondements» récents de la logique et des mathématiques, dont le plus célèbre est celui que Russell décrivit dans une lettre à Frege en 1902 et qui porte son nom aujourd'hui. D'autre part à cette époque les discussions autour de la géométrie non euclidienne ne sont pas éteintes. Ces discussions portent en particulier sur le statut des axiomes mais aussi sur l'existence de modèles non standards.

En ce qui concerne la contradiction, trois événements témoignent d'une réaction sérieuse contre les principes aristotéliens. Ces événements ont eu lieu presque en même temps.

Tout d'abord Lukasiewicz (1971) discute le principe de la non-contradiction dans un article où il envisage une logique qui pourrait se passer de ce principe. Il y montre même que la théorie des syllogismes d'Aristote ne nécessite pas ce principe. Ce travail ouvre la voie à de nouvelles formes de logique, en particulier des logiques multivalentes.

Autour de la même date, une discussion animée s'est engagée autour des thèses de Meinong et de sa théorie des objets qui permet la description et l'utilisation d'objets non existants. Les objets peuvent avoir, selon cette théorie, des qualités contradictoires. Cette théorie préfigure déjà la sémantique des mondes possibles de Kripke.

De son côté, le logicien russe Vassiliév introduisit une «logique imaginaire» qui ne supposait pas le principe de non-contradiction, en tout cas pour la partie de sa logique qui touchait le «jugement sur des concepts», par opposition à la partie qui traitait des «jugements sur des faits». Là encore, la démarche imite un peu celle de la géométrie non euclidienne en ce sens que des principes jusque-là admis comme évident, étaient remis en question.

Mais le principe logique fatal à toute tentative de tolérance envers la contradiction est le principe connu sous le nom de «ex contradictione quodlibet». Il peut être formalisé ainsi:

$$\varphi, \neg\varphi \vdash \psi \quad (\text{ECQ})$$

et signifie que d'une contradiction on peut déduire n'importe quelle formule. Toute théorie comportant une contradiction explose donc littéralement dans le sens déductif. Une logique dans laquelle le principe (ECQ) est valide est appelée logique *explosive*. Une logique *paraconsistante* est simplement une logique non explosive.

Le principe (ECQ) n'est pas un principe premier de la logique classique ou intuitionniste, mais il est la conséquence de plusieurs principes plus élémentaires. Pour le voir il suffit de regarder les détails de la démonstration classique de Lewis. (Cette démonstration a une valeur emblématique dans tous les textes d'introduction aux logiques paraconsistantes). Voici une version de cette démonstration:

(1)	φ	hypothèse
(2)	$\neg\varphi$	hypothèse
(3)	$\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$	expansion de (2)
(4)	$\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$	adjonction de (1) et (3)
(5)	ψ	sylogisme disjonctif (4)

La preuve est basée sur quatre principes logiques: les trois qui figurent explicitement dans la démonstration, expansion, adjonction et syllogisme disjonctif, et la transitivité de la relation de conséquence.

Pour qu'une logique soit paraconsistante, il faut donc, d'après la définition que nous en avons donnée, qu'elle remette en ques-

tion l'un au moins de ces principes. Nous allons brièvement décrire quelques grandes catégories de logiques paraconsistantes en les classant selon les principes évoqués plus haut. Ensuite nous verrons plus en détail deux exemples importants, la logique relevante et la logique des paradoxes.

2. Quelques logiques non explosives

Les logiques qui mettent en cause la règle de l'*expansion* exigent que:

$$\neg\varphi \vdash \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$$

Mais par contre dans ces logiques, la contraposée

$$\varphi \wedge \neg\psi \vdash \varphi$$

reste souhaitée.

C'est donc essentiellement l'opération de contraposition qui est mise en question. C'est le chemin choisi par da Costa (1974). Il permet de définir une hiérarchie de logiques C_i à l'aide de conditions sémantiques indépendantes pour φ et pour $\neg\varphi$, ainsi que des conditions supplémentaires. Contraposition et (ECQ) sont invalides dans ces logiques.

Les logiques non adjonctives, celles qui attaquent le principe de l'*adjonction*, sont caractérisées par la condition

$$\varphi, \psi \not\vdash \varphi \wedge \psi$$

L'intuition cachée derrière cette approche est l'idée qu'un discours, ou une base de données, sont l'oeuvre de plusieurs protagonistes, qui pris séparément, sont consistants, mais qui peuvent introduire des contradictions entre eux. La logique discursive de Jaskowski (1969) est de ce type: ni adjonction, ni (ECQ) ne sont valides.

On peut mettre en doute également la *transitivité* de la relation de conséquence. Une tentative dans ce sens a été proposée par Smiley en 1959, dans le sens d'une restriction de la relation de conséquence à partir des inférences classiques:

$\varphi \vdash \psi$ ssi elle est classiquement valide et si $F(\varphi, \psi)$

La condition F, le filtre, peut prendre des formes diverses. Par exemple

$F(\varphi, \psi)$ ssi φ n'est pas une contradiction,
et ψ pas une tautologie.

Dans ce cas on constate que toutes les étapes de (ECQ) sont valides mais que (ECQ) lui-même ne l'est pas. La conséquence n'est donc pas transitive. Les logiques de ce type sont appelées *filtrées*.

Dans la recherche d'une logique non explosive, on peut enfin vouloir éliminer la propriété du *sylogisme disjonctif*. On peut caractériser les logiques dans lesquelles ce principe n'est pas valide, par leur sémantique basée sur la notion de treillis de de Morgan. Il s'agit d'un treillis distributif muni d'un opérateur unaire involutif et anti-monotone, qui fixera le comportement de la négation. La relation de conséquence est définie par:

$\varphi \vDash \psi$ ssi pour toute interprétation v , $v(\varphi) \leq v(\psi)$

Les logiques de de Morgan sont le plus souvent des logiques pertinentes, bien qu'il existe des exemples intéressants pour lesquels ce ne soit pas le cas.

Nous allons voir un peu plus en détail deux exemples de logiques paraconsistantes qui ont une importance particulière pour la suite.

2.1. La logique pertinente RQ

Cette logique est due à Anderson et Belnap (1975). Elle est née de la préoccupation de définir une opération conditionnelle qui ne présente pas les défauts de la conditionnelle classique. Il est exigé notamment que l'antécédent et le conséquent possèdent en commun au moins une variable propositionnelle, ce qui donne une certaine pertinence («relevance» en anglais) à la conditionnelle.

Nous allons en donner une description syntaxique qui montre le mécanisme de la conditionnelle qui n'est plus vérifonctionnelle, c'est-à-dire qui ne peut plus être définie à l'aide de la négation et de la disjonction. Il est possible de définir la conditionnelle classique, l'implication matérielle, par $\varphi \supset \psi$ ssi $\neg\varphi \vee \psi$. Mais la règle du modus ponens n'est plus valide pour cette dernière opération. Voici les axiomes de RQ:

- R1 $\varphi \rightarrow \varphi$
- R2 $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \theta) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta))$
- R3 $\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$
- R4 $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$
- R5 $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$
- R6 $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \theta)) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \wedge \theta))$
- R7 $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$
- R8 $\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$
- R9 $((\varphi \rightarrow \theta) \wedge (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \theta)$
- R10 $(\varphi \wedge (\psi \vee \theta)) \rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta))$
- R11 $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$
- R12 $(\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi$

On obtient la logique RM en rajoutant l'axiome R13:

- R13 $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$

Ceci forme la partie propositionnelle de la logique RQ. Les axiomes concernant les quantificateurs sont:

- R14 $\forall x(\varphi x \rightarrow \varphi t)$ (t est un terme quelconque)
- R15 $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)$
- R16 $\varphi \rightarrow \forall x\varphi$ (x pas libre dans φ)
- R17 $\forall x(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \vee \forall x\psi)$ (x pas libre dans φ)
- R18 $(\forall x\varphi \wedge \forall x\psi) \rightarrow \forall x(\varphi \wedge \psi)$

Les deux règles de dérivation sont:

- I. Si φ et ψ sont des théorèmes, alors $\varphi \wedge \psi$ l'est aussi.
- II. Si φ et $\varphi \rightarrow \psi$ sont des théorèmes, alors ψ l'est aussi.

La sémantique correspondante est du type RM3. Il s'agit d'une logique à trois valeurs, $\{f, p, v\}$, ces valeurs étant ordonnées alphabétiquement, p et v étant les valeurs désignées: $\{p, v\} = \nabla$. On définit une interprétation I en imposant les conditions

- I1 Pour chaque formule atomique α , $I(\alpha) \in \{f, p, v\}$
 I2 $I(\neg\varphi) = v, p, f$ ssi $I(\varphi) = f, p, v$
 3 $I(\varphi \wedge \psi) = \min\{I(\varphi), I(\psi)\}$
 I4 $I(\varphi \vee \psi) = \max\{I(\varphi), I(\psi)\}$
 $I(\varphi \rightarrow \psi) = I(\neg\varphi \vee \psi)$ si $I(\varphi) \leq I(\psi)$
 I5 et $I(\neg\varphi \wedge \psi)$ sinon
 I6 $I(\forall x\varphi x) = \min\{a: \text{pour un certain } t, I(\varphi t) = a\}$
 7 $I(\exists x\varphi x) = \max\{a: \text{pour un certain } t, I(\varphi t) = a\}$

Validité et conséquence sont définies par

$$\Gamma \models \varphi \quad \text{ssi il n'y a pas de } I \text{ tel que } I(\varphi) = f \\ \text{alors que pour tout } \gamma \in \Gamma, I(\gamma) \in \nabla$$

et

$$\models \varphi \quad \text{ssi pour tout } I, I(\varphi) \in \nabla$$

2.2. La logique des paradoxes

La logique des paradoxes, LP, est un autre exemple de logique paraconsistante. Nous allons en donner une présentation sémantique. Le 0 et le 1 symboliseront le vrai et le faux. Les trois valeurs logiques seront définies à partir de là. $\{0\}$ sera la valeur faux, $\{1\}$ la valeur vrai et $\{0,1\}$ la valeur paradoxale vrai-et-faux.

Une interprétation est donnée par le couple $\langle D, I \rangle$, où D est un domaine non vide et I une fonction qui attribue à chaque symbole non logique une dénotation: à chaque constante c , un élément $I(c)$ dans D , à chaque symbole de fonction n -aire f , une

fonction n -aire $I(f)$ sur D , et à chaque symbole de prédicat P n -aire, un couple de sous-ensembles de D^n , appelés extension et anti-extension de P , qui ensemble forment un recouvrement de D . On notera $I(P) = \langle I^+(P), I^-(P) \rangle$. L'extension du prédicat '=' sera toujours la diagonale de D , mais son anti-extension peut recouvrir la diagonale partiellement.

Les conditions de vérité dans cette interprétation sont définies ainsi: (v est la fonction sémantique associée à l'interprétation I)

- $1 \in v(Pt_1 \dots t_n)$ ssi $\langle I(t_1), \dots, I(t_n) \rangle \in I^+(P)$
- $0 \in v(Pt_1 \dots t_n)$ ssi $\langle I(t_1), \dots, I(t_n) \rangle \in I^-(P)$
- $1 \in v(\neg\varphi)$ ssi $0 \in v(\varphi)$
- $0 \in v(\neg\varphi)$ ssi $1 \in v(\varphi)$
- $1 \in v(\varphi \wedge \psi)$ ssi $1 \in v(\varphi)$ et $1 \in v(\psi)$
- $0 \in v(\varphi \wedge \psi)$ ssi $0 \in v(\varphi)$ ou $0 \in v(\psi)$
- $1 \in v(\forall x\varphi)$ ssi $1 \in v(\varphi[x/d])$ pour tous les $d \in D$
- $0 \in v(\forall x\varphi)$ ssi $0 \in v(\varphi[x/d])$ pour un $d \in D$ au moins

La disjonction et la quantification existentielle sont définies de manière standard.

La vérité est définie de manière suivante: φ est vrai dans l'interprétation I ssi $1 \in v(\varphi)$ et φ est faux ssi $0 \in v(\varphi)$. Une formule φ est une vérité logique ssi elle est vraie dans toute interprétation I . On a les résultats importants:

$$\models_{LP} \varphi \quad \text{ssi} \quad \models_{cl} \varphi$$

et

$$\text{Si } \Gamma \models_{LP} \varphi \quad \text{alors} \quad \Gamma \models_{cl} \varphi$$

Dans le cas de la conséquence logique, la réciproque n'est pas vraie. (ECQ) est un contre-exemple, comme on peut le vérifier facilement. Il suffit en effet de considérer une interprétation I dont la fonction sémantique v attribue les valeurs 0 à $\varphi, \neg\varphi$ et ψ , ainsi que la valeur 1 à φ et $\neg\varphi$.

3. Arithmétiques inconsistantes

La base logique des arithmétiques que nous allons considérer est donnée par RQ , la logique relevante donnée plus haut et plus particulièrement la sémantique $RM3$ utilisant trois valeurs de vérité. Les axiomes arithmétiques sont les suivants. Il s'agit essentiellement des axiomes de Peano.

- A1 $\forall x \forall y (x = y \rightarrow x' = y')$
 A2. $\forall x \forall y \forall z (x = y \rightarrow (x = z \rightarrow y = z))$
 A3 $\forall x (\neg x' = 0)$
 A4 $\forall x (x + 0 = x)$
 A5 $\forall x \forall y (x + y' = (x + y)')$
 A6 $\forall x (x \times 0 = 0)$
 A7 $\forall x \forall y (x \times y' = (x \times y) + x)$

Il faut rajouter la règle d'induction

- R1 Si $\varphi 0$ et $\forall x (\varphi x \rightarrow \varphi x')$ sont des théorèmes, alors $\forall x \varphi x$ l'est aussi.

La différence entre l'arithmétique $R\#$ ainsi définie et l'arithmétique de Peano réside dans la logique sous-jacente. Ici il s'agit de R , une logique dans laquelle la conditionnelle n'est pas l'implication matérielle.

Nous allons définir une structure pour cette arithmétique qui permettra de montrer la consistance absolue, c'est-à-dire la non-trivialité, de $R\#$ par des moyens finis.

Un modèle de type $RM3^i$ est un couple $\langle D^i, I \rangle$ où le domaine est celui des entiers modulo i , et I associe aux symboles d'opération les opérations correspondantes modulo i . Aux formules atomiques $t_1 = t_2$, I attribue la valeur p si $I(t_1) = I(t_2)$ et la valeur f sinon. Pour les formules composées, ce sont les règles de $RM3$ qui s'appliquent.

Nous appellerons *arithmétique $RM3^i$* l'ensemble des formules vraies dans cette structure. Une telle arithmétique possède les propriétés suivantes: elle est inconsistante, non triviale, com-

plète, décidable et constitue une extension de $R\#$ pour n 'importe quelle valeur de i .

De plus, $RM3^i$ est axiomatisable de la manière suivante: aux axiomes de $R\#$ on rajoute les formules $0 = i$ et pour chaque j tel que $0 \leq j < i$, les formules $0 = j \leftrightarrow 0 = 1$. Les théorèmes de cette nouvelle arithmétique $RM3^{i\#}$ sont exactement les vérités logiques de $RM3^i$.

L'utilisation d'une logique paraconsistante permet de démontrer par des moyens très simples la consistance absolue de $R\#$, contrairement à l'arithmétique de Peano basée sur la logique classique. En effet $I(0=1)=f$, mais tous les théorèmes de $R\#$ obtiennent une valeur désignée.

Dans la logique $RM3^9$ par exemple on peut montrer que la forme suivante du théorème de Fermat n'est pas vraie:

Fermat

$$\forall x \forall y \forall z \forall n (x^n + y^n = z^n \rightarrow (x = 0 \vee x = 1 \vee y = 0 \vee y = 1 \vee z = 0 \vee z = 1 \vee n = 0 \vee n = 1 \vee n = 2))$$

Pour le voir il suffit de prendre les valeurs $x=y=z=n=3$. L'antécédent de la conditionnelle prend la valeur p, alors que le conséquent prend la valeur f. Par conséquent la formule quantifiée prend la valeur f. Dans l'arithmétique $RM3^9$ le théorème de Fermat, dans la forme citée, n'est donc pas valide.

4. Applications et résultats

Le paradoxe de Russell est à l'origine de nombreuses tentatives de formaliser la théorie des ensembles de manière consistante. Ces tentatives impliquent en particulier l'abandon de l'axiome de compréhension non restreint:

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \varphi)$$

Celui-ci est pourtant souhaité, si l'on veut utiliser cette théorie pour décrire la pratique scientifique courante. Il garantit en particulier que tout prédicat définissable dans la théorie possède une extension.

Les restrictions proposées de l'axiome de compréhension semblent artificielles et souvent ad hoc. Ni la théorie des types, qui restreint le langage de manière peu naturelle, ni l'axiomatisation de Zermelo qui limite l'application de cet axiome à des ensembles déjà existants ne sont très satisfaisants du point de vue de la pertinence de la théorie résultante. L'approche de Gödel-Bernays-von Neumann quant à elle introduit une distinction peu intuitive entre *classe* et *ensemble*. La consistance d'aucune de ces théories restreintes des ensembles n'a pu être établie.

L'approche paraconsistante, qui consiste à trouver une logique sous-jacente, capable de résister à certains paradoxes, constitue une démarche intéressante. Bien sûr, là aussi il y a un prix à payer. La logique qui en résulte, n'a pas toujours des contours familiers, comme nous l'avons vu. Par contre elle permet de retrouver l'axiome de compréhension dans sa forme générale. Dans un travail récent, Brady (1989) a en effet montré la non-trivialité, ou la consistance absolue, de ce qu'il appelle une théorie dialectale des ensembles. Cette théorie est basée sur une logique paraconsistante et possède un axiome de compréhension sans restrictions en plus de l'axiome d'extensionnalité. La logique sur laquelle s'appuie cette théorie est la logique DSQ, une logique relevante de type RM avec des opérateurs modaux. Brady a démontré la non-trivialité de sa théorie en construisant un modèle extensionnel complexe MD. Ce modèle est construit à l'aide de suites transfinies de modèles du type RM3. Dans ce modèle, les axiomes de DSQ ainsi que l'axiome de compréhension sont vérifiés, alors que d'autres formules ne le sont pas.

Une autre application importante de la logique paraconsistante se situe dans le domaine de la sémantique naïve. En effet, une théorie dans laquelle on veut exprimer la notion de vérité par un prédicat appartenant à son langage, est inconsistante. Appelons V le prédicat qui représente la vérité dans la théorie et supposons que ce prédicat satisfasse le schéma de Tarski: $\varphi \leftrightarrow V\hat{\varphi}$ pour toute formule fermée². Il est possible de définir

2 $\hat{\varphi}$ est la représentation du nombre de Gödel de φ .

ensuite une formule ayant la propriété $\theta \leftrightarrow (V\hat{\theta} \rightarrow \psi)$ en appliquant le théorème du point fixe. Une telle théorie est triviale comme le montre le paradoxe de Curry:

- | | | |
|-----|--|--------------|
| (1) | $V\hat{\theta} \leftrightarrow (V\hat{\theta} \rightarrow \psi)$ | Tarski |
| (2) | $V\hat{\theta} \rightarrow (V\hat{\theta} \rightarrow \psi)$ | |
| (3) | $V\hat{\theta} \rightarrow \psi$ | absorption |
| (4) | $V\hat{\theta}$ | modus ponens |
| (5) | ψ | modus ponens |

Les principes logiques en cause ici sont l'absorption et le modus ponens, tous deux principes valides de la logique classique. Une sémantique naïve doit donc être basée sur une logique différente.

Il existe effectivement un modèle non trivial de sémantique naïve, construit sur une logique paraconsistante. Dowden le décrit dans un article de 1984. La démarche de Dowden est intéressante, parce qu'elle combine des idées de la logique LP, présentée plus haut, avec le point de vue de Kripke [Kr] sur le traitement des paradoxes.

On peut définir le paradoxe du menteur par la formule

$$\mu: \exists x(Cx \wedge \neg Vx)$$

dans laquelle C est le prédicat qui s'applique uniquement au nombre de Gödel de μ . L'existence de cette formule est garantie par le théorème du point fixe. Le modèle de Dowden, qu'il appelle J, est construit à partir du modèle K de Kripke en donnant l'extension et l'anti-extension du prédicat V.

$$V^{J+} = \{\hat{\varphi} \mid K \not\models \neg\varphi\}$$

$$V^{J-} = \{\hat{\varphi} \mid K \not\models \varphi\}$$

Dans ce modèle J, on peut montrer les résultats suivants:

- Pour tout φ , ou $J \models \varphi$, ou $J \models \neg\varphi$
- $J \models \mu$, et $J \models \neg\mu$

Si dans le modèle K de Kripke, la vérité est sous-déterminée, – le menteur n'est ni vrai ni faux –, dans le modèle J de Dowden, la vérité est sur-déterminée pour les formules paradoxales comme dans l'exemple du menteur, μ . Dans ce dernier modèle, Dowden a pu prouver le résultat important: dans J, aucune formule classique, c'est-à-dire ne comprenant pas le prédicat V, n'est à la fois vraie et fausse. Ceci montre d'une part sa non-trivialité, mais aussi, d'autre part, qu'il s'agit bien ici d'une extension de la situation classique.

4. Conclusion

Les logiques classique et intuitionniste traitent le problème des contradictions par le moyen radical du principe (ECQ). Celui-ci fait simplement exploser toute théorie inconsistante, avec le désavantage qu'il ne permet plus de faire la différence entre consistance et consistance absolue (non-trivialité). Or nous avons donné des exemples de théories situées précisément dans cette zone entre inconsistance et trivialité. Il existe des modèles de l'arithmétique inconsistants, pour lesquels il existe des preuves finies de consistance absolue! Cela oblige à jeter un regard nouveau sur les théorèmes d'incomplétude de Gödel. Les limitations de la formalisation paraissent moins dramatiques si l'on considère que des théories inconsistantes peuvent être d'un certain intérêt, à condition bien sûr qu'elles ne soient pas triviales. Et certaines de ces théories présentent un intérêt mathématique évident, ce qui n'est pas le moindre des arguments pour en faire l'étude.

Il y a aussi de bonnes raisons pratiques pour ne pas vouloir éliminer toute contradiction de nos considérations logiques. Les bases de données fournissent un bon exemple de situation où le principe «ex contradictione quodlibet» ne devrait pas s'appliquer. Il se peut en effet que des informations soient introduites dont le caractère contradictoire n'est pas immédiatement apparent, mais ne se révèle que plus tard à la lumière de nouvelles données. Cela ne doit avoir pour conséquence que toute affirmation figure désormais dans la base: celle-ci ne doit pas explo-

ser. Cela implique que le mécanisme déductif sous-jacent doit être non explosif, c'est-à-dire paraconsistant.

En ce qui concerne la théorie des ensembles, il est établi que l'on peut en construire une version possédant l'axiome de compréhension sans restrictions. Il existe même des preuves finies de la non-trivialité d'une telle théorie. Il en va de même pour une autre théorie qu'on aimerait conserver pour sa simplicité: la sémantique naïve. Là encore il existe une, et même plusieurs versions absolument consistantes. Le prix à payer en adoptant une telle théorie est celui de l'abandon de certains principes logiques habituels, le *modus ponens*, ou le syllogisme disjonctif par exemple selon les cas. Mais la théorie des types et les versions axiomatisées de la théorie des ensembles de Zermelo, Fraenkel et Gödel, Bernays, von Neumann, qui sont des théories construites pour éliminer le paradoxe de Russell, ne nous obligent-elles pas à abandonner une part de notre intuition pour des limitations souvent *ad hoc*? Une autre possibilité est celle d'opter pour une conditionnelle non extensionnelle, c'est-à-dire qui ne peut pas être définie dans le langage de la négation et de la disjonction. Un tel exemple est proposé par la logique relevante R.

Il est temps de songer à donner un statut logique nouveau à la contradiction. Son rôle de détonateur dans le cadre d'une logique explosive, classique ou intuitionniste, ne semble plus adéquat, pour toutes les raisons indiquées dans ce bref exposé, et bien d'autres qu'on trouvera dans la littérature (cf. Priest 1989). Ce statut nouveau, ce sont les différentes logiques paraconsistantes qui permettent de le lui attribuer. Et si ces logiques dérangent nos habitudes, elles engendrent des théories qui, dans la plupart des cas, vont au-delà des théories existantes dont elles constituent des généralisations. Et en plus de leur intérêt intrinsèque elles nous ouvrent d'autres horizons, aussi bien épistémologiques que mathématiques.

Institut de mathématiques appliquées
BFSH 2
1015 LAUSANNE

Bibliographie

- ANDERSON A.R. & BELNAP N.D. (1975). *The Logic of Relevance and Necessity*. Princeton: University Press, vol. 1.
- BRADY R.T. (1989). The non-triviality of dialectical set theory. In: Priest, Routley, Norman (1989).
- DA COSTA N. (1974). On the theory of inconsistent formal logics. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 15, 497-510.
- DOWDEN B. (1984). Accepting inconsistencies from the paradoxes. *Journal of Philosophical Logic* 13.
- JASKOWSKI S. (1969). Propositional calculus for contradictory deductive systems. *Studia Logica* 24.
- LUKASIEWICZ J. (1971). On the principle of contradiction in Aristotle. *Review of Metaphysics* 24.
- MEYER R.K. & MORTENSEN C. (1984). Inconsistent models for relevant arithmetics. *The Journal of Symbolic Logic* 49, 918-929.
- PRIEST G. (1979). Logic of paradox. *Journal of Philosophical Logic* 8.
- PRIEST G. (1987). *In Contradiction: A Study of the Transconsistent*. Dordrecht: Nijhoff.
- PRIEST G., ROUTLEY R., NORMAN J. (eds) (1989). *Paraconsistent Logics*. München: Philosophia.
- SMILEY T. (1959). Entailment and deducibility. *Proc. of the Aristotelian Society*, vol. 59.