



Faculté des Sciences
Institut de mathématiques
Rue Emile-Argand 11, 2000 Neuchâtel

Propriété de Haagerup dynamique et Baum-Connes explicite pour certains produits semi-directs de \mathbb{Z}^2 par \mathbb{F}_2

Thèse

présentée à la Faculté des Sciences
pour l'obtention du grade de docteur ès Sciences en mathématiques

par

Alexandre Zumbrunnen

Acceptée sur proposition du jury :

Prof. Alain Valette	Université de Neuchâtel, CH	Directeur de thèse
Prof. Paul Jolissaint	Université de Neuchâtel, CH	Co-directeur de thèse
Dr. Amine Marrakchi	ENS Lyon, FR	Rapporteur
Dr. Clément Dell'Aiera	ENS Lyon, FR	Rapporteur

Soutenue le 08 Juillet 2022

IMPRIMATUR POUR THESE DE DOCTORAT

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel
autorise l'impression de la présente thèse soutenue par

Monsieur Alexandre Zumbrunnen

Titre:

**« Propriété de Haagerup dynamique et
Baum-Connes explicite pour certains produits
semi-directs de Z^2 par F_2 »**

sur le rapport des membres du jury composé comme suit:

- Prof. Alain Valette, directeur de thèse, Université de Neuchâtel, Suisse
- Prof. Paul Jolissaint, co-directeur de thèse, Université de Neuchâtel, Suisse
- Dr. Amine Marrakchi, rapporteur, ENS Lyon, France
- Dr. Clément Dell'Aiera, rapporteur, ENS Lyon, France

Neuchâtel, le 9 août 2022

Le Doyen, Prof. R. Bshary



Dynamical Haagerup Property and Explicit Baum-Connes for some semi-direct products of \mathbb{Z}^2 by \mathbb{F}_2

Alexandre Zumbrunnen

Remerciements

"Les mathématiques ne sont pas une marche tranquille sur une autoroute dégagée, mais un voyage dans un désert étrange, où les explorateurs sont souvent perdus" - W.S Anglin.

"Nous entendons souvent dire que les mathématiques consistent à "prouver des théorèmes". Le travail d'un écrivain serait-il "d'écrire des phrases"? L'œuvre d'un mathématicien est surtout un enchevêtrement de conjectures, d'analogies, de souhaits et de frustrations; la démonstration, loin d'être le noyau de la découverte, n'est souvent que le moyen de s'assurer que notre esprit ne nous joue pas des tours." - G-C. Rota

Contrairement à la croyance populaire, un mathématicien n'est pas, en général, une personne travaillant seule dans son coin. Les explorateurs de ce "désert étrange" ont besoin de se retrouver et d'échanger afin d'y voir plus clair. La communication, orale ou écrite, est essentielle dans ce métier. En effet l'échange d'idées, de souhaits et de frustrations est l'essence même des mathématiques; cela permet l'enchevêtrement de conjectures, d'analogies afin de s'y retrouver, de tracer quelques lignes dans une carte idéale décrivant ce désert. Une thèse en mathématiques est donc un travail personnel que l'on ne pourrait accomplir seul. C'est une expérience de vie dont le chemin est fait de rencontres, de discussions et de collaborations. Il est donc naturel de commencer par remercier les personnes qui m'ont aidé et soutenu dans ma quête.

Merci à mes directeurs de thèse, Alain Valette et Paul Jolissaint. Je vous remercie de m'avoir engagé et de m'avoir soutenu dans le projet de cette thèse. J'ai pleinement conscience de la chance que j'ai eu d'avoir pu faire une thèse avec vous deux, à Neuchâtel, sur des sujets mathématiques qui m'enthousiasment.

Alain, j'ai découvert à travers ces années, non seulement un mathématicien hors pair ayant une immense culture dans cette science, mais également un bon vivant, profondément gentil, drôle et sur qui on peut compter; un bon belge en somme. J'ai eu la chance de partir plusieurs fois avec toi, aussi bien à Portiragnes qu'ailleurs et c'était toujours au top; merci énormément!

Je te remercie du temps que tu as consacré à répondre à mes questions, de ton travail de relecture et de correction lors de la rédaction de ce document ainsi que de la liberté dont j'ai bénéficié pour mes recherches. Enfin, j'aimerais te dire que je suis très content d'avoir pu expérimenter une collaboration avec toi et que j'ai énormément appris durant celle-ci.

Paul, merci d'avoir accepté de co-diriger ma thèse, de m'avoir transmis ta passion pour ces mathématiques-ci lors de mon travail de master avec toi. Je te remercie également de tous ces vendredis au tableau noir, essayant de te convaincre de telle ou telle chose; je garde un très bon souvenir de nos collaborations. J'ai adoré être ton assistant d'analyse complexe durant ma thèse; chaque année a été une très belle expérience. Finalement, merci pour ta bonne humeur et d'être, in fine, un bon jurassien; qu'est-ce qu'ils sont sympas ces jurassiens!

J'adresse ma plus vive gratitude à Amine Marrakchi et Clément Dell'Aiera d'avoir accepté

d'être membres de mon jury. Merci à vous deux pour votre gentillesse et votre modestie lors de nos différents échanges aussi bien à Neuchâtel, lors de vos visites, que par mails, par la suite. Merci beaucoup pour vos nombreuses remarques pertinentes et vos commentaires utiles à mes questions ; c'est bon de pouvoir échanger avec des personnes aussi intéressantes et sympas que vous deux !

Les différents travaux de cette thèse ont été les fruits de discussions et de collaborations diverses et variées. J'aimerais donc te remercier en premier Thiebout. Tu m'as montré qu'il n'y avait pas de problème en mathématiques, que des solutions ! J'espère que tout se passe bien pour toi en Belgique. Merci également à Sanaz et Ramón. J'ai apprécié nos échanges et nos balades aux Diablerets.

Comment faire des remerciements sans citer mes deux frères de thèse : Laurent et Tom. Merci pour tout les gars ! Que de souvenirs à vos côtés sobre ou moins sobre, à domicile comme à l'extérieur. Merci à toi Tommy pour tes Sexy Topics in Maths. Merci à toi Lolo pour avoir eu les mêmes difficultés mathématiques que moi durant ces années de thèse. Un conseil néanmoins : faut que tu déménages de la capitale du crime, pour venir à la Tchaux ou au moins y passer régulièrement. Bref, j'ai hâte d'en boire une avec vous les gars !

Laura, j'ai vraiment eu de la chance de te rencontrer. Tu es une personne incroyable et j'espère que tu feras une belle et longue carrière dans l'académique. Grâce à toi, je sais que j'ai une deuxième famille à Genève sur qui je peux compter. Vous êtes tous formidables !

Je tiens également à faire un petit mot à Rémi B. et Rémi D. Rémi B., j'espère que tu trouveras ta voie et que tu t'ouvriras un peu plus au monde. Rémi D., merci d'avoir pallier mon incompetence en Python et d'avoir porté de l'intérêt à mon petit problème ; ça m'a permis de découvrir ce que pouvait être une collaboration entre matheux et informaticiens.

Vient le moment aléatoire, soit (X_n) un process... mais... ah oui je me souviens ! Un merci tout particulier à cette équipe extraordinaire avec qui je me suis toujours super bien entendu ; non seulement pour l'intérêt mathématique en commun mais également pour le côté humain derrière chacun de ses membres. Je tiens donc à remercier Michel, Édouard, Tobias, William, Antoine et Jérémy aka Fiston. Édouard ne t'inquiètes pas, Laurent t'as vengé en retardant la rédaction de ma thèse avec quelques questions de théorie de la mesure. Michel et Tobias, je vous remercie pour ce semestre sur les systèmes dynamiques aléatoires ; j'ai appris énormément. William, tu es le seul qui a compris où se situait réellement la capitale de la Suisse : Bravo ! Antoine et Fiston, tout simplement des gars en or. L'un est mon compagnon de carte préféré (désolé Léo), l'autre l'un de mes meilleurs potes avec qui je pars à la guerre sur le terrain de rugby tous les week-ends et avec qui j'ai (presque) tout fait ! (y'en a toujours au moins deux dans l'équipe non ?)

Merci au groupe le vrai Neuchâtel, i.e. Laura, Antoine, Fiston, Jannaud, Laurent, Léo, Maël, Joé, Paul-Henry et Thomas, pour toutes ces soirées en semaine qui sont juste géniales. J'en profite pour te faire un petit mot Léo. Le loclois, le tennisman de renom, que dis-je le géomètre fou, ne change rien t'es vraiment un super bon type et j'ai de la chance de te compter parmi mes

amis.

De même, PH, je me permets de te souhaiter bonne chance pour la suite de ta carrière en Chine.

Je salue tous les anciens de l'institut, Luc, Carsten, Aïsha, Lucas et plus généralement le groupe Neuchâtel en force. De plus, je remercie plus généralement tous les membres de l'institut de mathématiques de l'université de Neuchâtel pour la bonne ambiance de travail. Un mot spécial pour notre secrétaire préférée, Christine, qui s'occupe de tout ce beau monde avec le sourire et bonne humeur.

Merci aux étudiants, toutes volées confondues, sans qui, je n'aurais pas réalisé que ma voie est dans l'enseignement.

Merci également à tous mes potes de la Bromance et du RCC. J'ai énormément de chance de vous avoir. À la prochaine autour d'un clou ou dans la mêlée !

Je tiens en dernier lieu à remercier ma famille, ma mère, mon père, mon frère, ainsi que mes grands-parents pour leur soutien constant et leur enthousiasme pour mon parcours académique sans réellement comprendre ce que j'ai fait.

Je termine par toi mon chat, ma loutre, mon amour Estel. Merci de partager ma vie, merci de supporter mes blagues et mes digressions mathématiques. Merci d'être toujours là pour moi, merci pour ton soutien et ta bonne humeur. J'ai hâte de la suite à tes côtés.

Abstract

This thesis is organized in two parts. The aim of the first one is to provide a characterization of the Haagerup property for locally compact second countable groups in terms of actions on σ -finite measure spaces, with some examples and a noncommutative analogue. In the second one, we investigate the Baum-Connes assembly map through concrete examples. More precisely, given a semidirect product of \mathbb{Z}^2 by \mathbb{F}_2 , where \mathbb{F}_2 denotes a free subgroup of rank 2 in $SL_2(\mathbb{Z})$, we study on the one hand the K -theory of its associated C^* -algebra, and on the other hand the geometric K -homology of its classifying space. Thus, the study of these groups, gives us in some cases explicit generators. From this natural description of K -groups, we try to identify them via the assembly map. In doing so, we reprove the Baum-Connes conjecture for some of these groups.

Keywords : Locally compact groups, group actions, unitary representations, Haagerup property, Baum-Connes conjecture, K -theory, K -homology.

Résumé

Ce travail s'organise en deux parties. La première s'intéresse à caractériser la propriété de Haagerup pour les groupes localement compacts, dénombrables à l'infini en termes d'actions sur des espaces mesurés σ -finis, avec quelques exemples et un analogue dans le cadre non-commutatif. Dans la seconde, on investigate la conjecture de Baum-Connes sur quelques exemples concrets. Plus précisément, étant donné un produit semi-direct de \mathbb{Z}^2 par \mathbb{F}_2 , où \mathbb{F}_2 désigne un sous-groupe libre de rang 2 dans $SL_2(\mathbb{Z})$, on étudie d'une part la K -théorie de sa C^* -algèbre associée et d'autre part la K -homologie géométrique de son espace classifiant. Ainsi, l'étude de ces groupes, nous donne dans certains cas des générateurs explicites. De cette description naturelle des K -groupes, on essaie de les identifier par le morphisme d'assemblage. En d'autres termes, on redémontre de manière explicite la conjecture de Baum-Connes pour certains de ces groupes.

Mots clés : Groupes localement compacts, actions de groupes, représentations unitaires, propriété de Haagerup, conjecture de Baum-Connes, K -théorie, K -homologie.

Table des matières

Introduction	1
1. Préliminaires	13
1.1. Propriété de Haagerup	13
1.1.1. Actions de groupes et Représentations de groupes	13
1.1.2. 1-cohomologie de groupes	19
1.1.3. Caractères et groupe dual	21
1.1.4. Moyennabilité et non-moyennabilité	21
1.1.5. Propriété (T) de Kazhdan et a -(T)-moyennabilité	23
1.2. C^* -algèbres et algèbres de von Neumann	25
1.2.1. C^* -algèbres	25
1.2.2. C^* -algèbres de groupes et produits croisés	27
1.2.3. Algèbres de von Neumann	30
1.2.4. Actions C_0 sur des algèbres de von Neumann	32
1.3. Introduction à la conjecture de Baum-Connes	33
1.3.1. K -théorie des C^* -algèbres	33
1.3.2. Suites exactes à 6-termes de Pimsner-Voiculescu	39
1.3.3. Description géométrique et analytique de la K -homologie	46
1.3.4. Espaces propres, G - CW -complexes et Espace classifiant	58
1.3.5. Lien entre la K -homologie géométrique et analytique	60
1.3.6. Isomorphisme de Bott et suite exacte à six termes en K -homologie	62
1.3.7. Application d'assemblage	63
2. Une nouvelle caractérisation de la propriété de Haagerup par des actions sur des espaces mesurés infinis	67
2.1. Preuve du théorème principal	68
2.1.1. Preuve du Théorème 2.0.4, Partie 1	69
2.1.2. Cas des groupes discrets	78
2.1.3. Cas des groupes contenant un réseau	78
2.1.4. Cas des groupes localement compacts, dénombrables à l'infini	81
2.2. Discussion sur l'ergodicité	87
2.3. Exemples de systèmes dynamiques C_0	94
2.3.1. Groupes agissant proprement sur les arbres	94
2.3.2. $SL_2(\mathbb{R})$	97
3. Propriété de Haagerup dynamique et actions sur les algèbres de von Neumann	99
3.1. Des actions sur les algèbres de von Neumann à la propriété de Haagerup	100
3.2. Construction d'actions C_0 sur des algèbres de von Neumann	102
3.2.1. Action sur l'algèbre des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert	103
3.2.2. Actions sur des produits croisés	106
3.2.3. Actions sur les produits tensoriels	111

4. Baum-Connes explicite pour certains produits semi-directs de \mathbb{Z}^2 par \mathbb{F}_2	113
4.1. K -théorie et K -homologie pour certains produits semi-directs de \mathbb{Z}^2 par \mathbb{Z} . . .	113
4.1.1. K -théorie de $C(\mathbb{T}^2)$	113
4.1.2. K -théorie de $C_r^*(\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z})$	116
4.1.3. K -homologie de \mathbb{T}^2	119
4.1.4. K -homologie de l'espace classifiant de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$	121
4.2. K -théorie et K -homologie pour certains produits semi-directs de \mathbb{Z}^2 par \mathbb{F}_2 . . .	125
4.2.1. $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{F}_2$, avec \mathbb{F}_2 un sous-groupe de rang 2 dans $SL_2(\mathbb{Z})$	125
4.2.2. Le cas de $\mathbb{Z}^2 \rtimes S$, avec S le groupe de Sanov	128
4.2.3. Le cas de $\mathbb{Z}^2 \rtimes C$, avec C le sous-groupe des commutateurs de $SL_2(\mathbb{Z})$.	136
A. Annexe Code Python	145
Bibliographie	153

Introduction

Cette thèse rassemble plusieurs travaux ; certains provenant de mes directeurs de thèse tandis que d'autres provenant d'une démarche plus personnelle. Elle se compose de trois articles, dont un est publié (voir [DJZ20]) en collaboration avec Thiebout Delabie et Paul Jolissaint, un plus personnel en cours de perfectionnement et un dernier en progrès avec Alain Valette, Ramón Flores et Sanaz Pooya. Ce mémoire s'organise en deux parties. La première traite de la propriété de Haagerup pour les groupes localement compacts, dénombrables à l'infini tandis que la seconde aborde la conjecture de Baum-Connes. Précisons que ces deux sujets ne sont pas complètement étrangers l'un de l'autre. En effet une motivation importante dans l'étude de la propriété de Haagerup découle du théorème suivant (voir [HK01]) :

Théorème 0.0.1 (Higson et Kasparov, 2001). La conjecture de Baum-Connes à coefficients est vraie pour les groupes ayant la propriété de Haagerup.

Dans cette introduction, on désignera par G un groupe localement compact dénombrable à l'infini qui de plus sera supposé non compact car le cas compact n'est pas pertinent lorsque l'on s'intéresse à la propriété de Haagerup.

Partie I : Propriété de Haagerup dynamique

La propriété de Haagerup est une propriété des groupes topologiques qui a de nombreuses caractérisations différentes. Dès la fin des années 70, U. Haagerup définit dans [Haa78a] ce que l'on nomme à présent la propriété H ; motivé par la caractérisation des C^* -algèbres nucléaires et des algèbres de von Neumann injectives en termes d'existence d'applications complètement positives et désirant démontrer que le caractère complètement positif était nécessaire dans ces résultats. Dans les années 60, D. Kazhdan définit sa propriété (T) (voir [Kaz67]) pour les groupes localement compacts et l'utilise comme outil pour démontrer qu'une grande classe de réseaux sont finiment engendrés. La propriété (T) a été initialement définie en termes de représentations unitaires. On se rendit compte (voir [De177], [Gui72]) qu'un groupe localement compact σ -compact a la propriété (T) si toute action par isométries affines sur un espace de Hilbert admet un point fixe ; cette propriété est connue sous le nom de propriété (FH) . Dans le contexte de l'étude dynamique des actions par isométries d'un groupe, M. Gromov définit l' a - (T) -moyennabilité dans [Gro88] comme négation forte de cette propriété (T) .

Théorème 0.0.1 (Théorème 2.1.1, [CCJ⁺12]). Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une fonction continue propre $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui soit définie conditionnellement de type négative ;
2. La C^* -algèbre abélienne $C_0(G)$ possède une approximation de l'unité formée de fonctions définies positives normalisées, i.e. il existe une suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ de fonctions définies positives dans $C_0(G)$ telles que $\varphi_n(e) = 1$ pour tout n , $\varphi_n \rightarrow 1$ uniformément sur tout compact de G .

3. Il existe une représentation unitaire C_0 de G sur (π, \mathcal{H}) , i.e. les coefficients matriciels $\varphi_{\xi, \eta}: g \mapsto \langle \pi(g)\xi, \eta \rangle$ appartiennent à $C_0(G)$ pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, et contenant faiblement la représentation triviale 1_G .
4. G est a -(T)-moyennable : il existe un espace de Hilbert \mathcal{H} et une action isométrique affine α de G sur \mathcal{H} qui est propre, i.e. pour toute paire de sous-ensembles bornés B et C de \mathcal{H} , l'ensemble

$$\{g \in G : \alpha_g(B) \cap C \neq \emptyset\},$$

est relativement compact.

Définition 0.0.2. Un groupe G a la propriété de Haagerup s'il satisfait une et donc toutes les conditions équivalentes ci-dessus.

Il découle alors immédiatement des définitions qu'un groupe a simultanément la propriété (T) et Haagerup si et seulement si il est compact. Ainsi on interprète la propriété de Haagerup comme négation forte de (T) et c'est pourquoi on supposera G non compact. Comme la propriété (T) est souvent considérée comme une forme de rigidité en théorie des représentations, par contraste on dit que les groupes ayant la propriété de Haagerup sont fortement non rigides. Dans ce registre, il existe aussi une autre classe de groupes très importante due à J. von Neumann ([vN29]); les groupes moyennables. Une caractérisation de ceux-ci est la suivante (voir Théorème G.3.2 de [BdLHV08]) :

Définition 0.0.3. Un groupe G est moyennable si et seulement si 1_G est faiblement contenue dans la représentation régulière gauche λ_G .

On déduit alors que les groupes moyennables ont la propriété de Haagerup. La réciproque est fautive puisque, par exemple le groupe libre à deux générateurs est Haagerup mais non moyennable. Ainsi la propriété de Haagerup peut également s'interpréter comme une forme faible de moyennabilité.

Actions C_0 sur les espaces mesurés infinis

De nos jours, il existe plusieurs caractérisations de la propriété de Haagerup : à part celles présentées dans [CCJ⁺12], on peut notamment mentionner celle impliquant des actions sur des espaces à murs mesurés ou sur des espaces L^p (voir [CDH10]). L'objectif principal de cette partie est d'étudier la propriété de Haagerup par des actions sur des espaces de mesures infinis. Ce travail tire ses origines de la caractérisation initiale de la moyennabilité : G est moyennable si et seulement si l'algèbre $L^\infty(G)$ possède une moyenne G -invariante par rapport à l'action de G sur lui-même par translation gauche. Remarquons que cette action est un cas particulier d'une action propre. De ce fait il est légitime de se demander quels groupes admettent une action propre sur un espace localement compact Ω muni d'une mesure invariante et tel que $L^\infty(\Omega)$ admette une moyenne invariante. La proposition suivante donne la réponse :

Proposition 0.0.4. *Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini et Ω un espace localement compact sur lequel G agit proprement et admet une mesure borélienne régulière G -invariante μ . Si $L^\infty(\Omega)$ admet une moyenne invariante, alors G est moyennable.*

En effet, il est connu que l'existence d'une moyenne invariante sur $L^\infty(\Omega)$ est équivalent au fait que, pour tout compact $K \subset G$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue à support

compact ξ sur Ω telle que $\|\xi\|_2 = 1$ et

$$\sup_{g \in K} |\langle \pi_\Omega(g)\xi, \xi \rangle - 1| < \varepsilon,$$

où π_Ω désigne la représentation unitaire de permutations de G sur $L^2(\Omega)$. Comme l'action est propre et ξ est à support compact, alors le coefficient $\varphi = \langle \pi_\Omega(\cdot)\xi, \xi \rangle$ est également à support compact et donc la fonction 1 est limite uniforme sur les compacts de G de fonctions définies positives à support compact; ce qui signifie que G est moyennable. Par conséquent G est moyennable si et seulement si il admet une action propre préservant la mesure sur un espace localement compact Ω de sorte que $L^\infty(\Omega)$ admette une moyenne G -invariante. On en déduit donc que la propriété d'une action est trop forte pour caractériser la propriété de Haagerup. Dans le cadre des actions préservant la mesure sur des espaces probabilisés, P. Jolissaint démontre dans [CCJ⁺12] chapitre 2 que la notion d'action fortement mélangeante est bien adaptée :

Théorème 0.0.5. (Théorème 2.1.3, [CCJ⁺12]) Un groupe G localement compact dénombrable à l'infini a la propriété de Haagerup si et seulement si il a une action préservant la mesure sur un espace standard probabilisé qui est fortement mélangeante et admet une suite non triviale asymptotiquement invariante.

Dans le cadre des actions préservant la mesure sur des espaces mesurés, on considère la propriété suivante :

Définition 0.0.6. Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré sur lequel G agit par automorphismes boréliens qui préservent μ . On dit que le système dynamique correspondant $(\Omega, \mathcal{B}, \mu, G)$ est C_0 si, pour tous $A, B \in \mathcal{B}$ tels que $0 \leq \mu(A), \mu(B) < \infty$, on a :

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \mu(gA \cap B) = 0.$$

Remarque 0.0.7. Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu, G)$ un système dynamique préservant la mesure. Alors c'est un système dynamique C_0 si et seulement si π_Ω est une représentation C_0 . Donc on déduit que si G admet un système dynamique C_0 $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ tel que $L^\infty(\Omega)$ a une moyenne G -invariante, alors G a la propriété de Haagerup.

Le résultat principal est donc la réciproque :

Théorème 0.0.8. Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini avec la propriété de Haagerup. Alors il existe un système dynamique C_0 $(\Omega, \mathcal{B}, \mu, G)$ tel que $L^\infty(\Omega)$ a une moyenne G -invariante. Plus précisément :

1. la mesure μ est σ -finie, G -invariante et $L^2(\Omega, \mu)$ est un espace de Hilbert séparable;
2. pour tous $A, B \in \mathcal{B}$ tels que $0 \leq \mu(A), \mu(B) < \infty$, on a :

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \mu(gA \cap B) = 0;$$

3. il existe une suite de vecteurs unitaires $(\xi_n)_{n \geq 1} \subset L^2(\Omega, \mu)$ tels que $\xi_n \geq 0$ pour tout n et, pour tout compact $K \subset G$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{g \in K} \langle \pi_\Omega(g)\xi_n, \xi_n \rangle = 1.$$

D'un point de vue dynamique, il est possible de s'intéresser à d'autres cadre pour caractériser la propriété de Haagerup. En guise d'exemple, on peut notamment citer les articles [AIM19], [MV20] qui traitent des actions non-singulières :

Théorème 0.0.9 (Corollaire 6.6, [AIM19]). Soit G un groupe localement compact. Les énoncés suivants sont équivalents :

1. G a la propriété de Haagerup ;
2. G admet une action non-singulière de type zéro qui a une moyenne invariante ;
3. G admet une action non-singulière de type zéro qui admet une entropie presque nulle.

Il est à noter qu'il existe une différence majeure entre la caractérisation du théorème 0.0.5 et notre résultat, le théorème 0.0.8. Des actions fortement mélangeantes sont nécessairement ergodiques, tandis que les actions que l'on étudie, les actions C_0 , ne le sont pas en général. En effet, considérons l'action par translations de \mathbb{Z} sur \mathbb{R} muni de la mesure de Lebesgue μ . Alors

$$A = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} (k, k + 1/2)$$

est \mathbb{Z} -invariant et $\mu(A) = \mu(A^c) = +\infty$. Comme l'action est propre, alors elle est C_0 .

Question 0.0.10. *Pour quels groupes ayant la propriété de Haagerup peut-on trouver un système dynamique C_0 ergodique ?*

Rappelons qu'un groupe localement compact est dit périodique si chaque sous-groupe cyclique est relativement compact. Ainsi un groupe est non-périodique si et seulement si il contient un sous-groupe discret isomorphe à \mathbb{Z} .

On démontrera que sous l'hypothèse de non-périodicité du groupe, l'action C_0 peut être supposée ergodique. Cela suivra de la proposition suivante qui est une extension du théorème 9.1.3 de [MV20] au cas des groupes localement compacts :

Proposition 0.0.11. *Soit G un groupe localement compact dénombrable à l'infini ayant la propriété de Haagerup. Soit $\pi : G \rightarrow O(\mathcal{H})$ une représentation orthogonale C_0 et soit $c \in Z^1(\pi, \mathcal{H})$ un 1-cocycle évanescent qui n'est pas un cobord. Alors l'action tordue β définie dans la section 2.2 est faiblement mélangeante.*

Un résultat plus fin, utilisant des méthodes complètement différentes, a été donné récemment par A.Danilenko (voir [Dan21]) valide pour les groupes localement compacts :

Théorème 0.0.12 (Théorème B, A. Danilenko). Les énoncés suivant sont équivalents :

1. G a la propriété de Haagerup ;
2. Il existe une G -action T faiblement mélangeante conservative de type zéro préservant la mesure sur un espace standard infini σ -fini admettant une suite exhaustive d'ensembles de T -Følner ;
3. Il existe une G -action T faiblement mélangeante conservative de type zéro préservant la mesure sur un espace standard infini σ -fini (X, \mathcal{B}, μ) admettant une suite exhaustive d'ensembles de T -Følner $(A_n)_{n \geq 1}$ avec $\mu(A_n) = 1$ pour tout n .

Suivant la définition 0.0.2 de la propriété de Haagerup, il est possible pour beaucoup de groupes de donner des exemples naturels de représentations avec la propriété (3). On donne ici, en guise d'exemple, la construction standard pour le groupe libre sur deux générateurs. U. Haagerup montre dans [Haa78a] que la longueur des mots $|\cdot|$ pour \mathbb{F}_2 est une fonction conditionnellement de type négative propre. Ainsi en utilisant le théorème de Schoenberg, on déduit que $\psi(g) = \exp(-t|g|)$ est définie positive pour tout $t > 0$. D'où en considérant la suite $t_n = 1/n$ pour tout $n \geq 1$, on peut utiliser la construction GNS (voir théorème C.4.10 [BdLHV08]) sur ψ_n pour obtenir son triplet associé $(\pi_n, \mathcal{H}_n, \xi_n)$. En posant $\pi = \bigoplus_n \pi_n$ on obtient donc une représentation C_0 ayant des vecteurs presque invariants. Cependant notre théorème 0.0.8 permet d'affirmer que lorsqu'un groupe à la propriété de Haagerup, il est toujours possible de se ramener à une représentation de permutations étant C_0 et avec une suite de vecteurs presque invariants. On a vu que pour les groupes moyennables, cela est évident. D'où la question suivante posée par Y. Stalder :

Question 0.0.13. *Quel pourrait être un exemple explicite d'un tel système dynamique lorsque G n'est pas moyennable ?*

En utilisant des méthodes de [MV20], [AIM19], nous donnons des exemples pour les groupes agissant proprement sur les arbres dans la section 2.3. Dans le cas du groupe libre \mathbb{F}_2 , on obtient :

Exemple 0.0.14. *Soit $\sigma : \mathbb{F}_2 \curvearrowright T_4$ son action sur son graphe de Cayley. Alors un exemple d'espace mesuré infini pour le théorème 0.0.8 est donné par :*

$$\left(\mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right)^{\otimes T_4} \otimes (\mathbb{R}, \lambda).$$

où l'action de \mathbb{F}_2 est l'action tordue définie dans la section 2.2 associée à σ .

Dans le contexte des actions non-singulières, on a :

Exemple 0.0.15. *Soit $\sigma : \mathbb{F}_2 \curvearrowright T_4$ son action sur son graphe de Cayley. Alors un exemple d'espace mesuré infini pour le théorème 0.0.9 est donné par :*

$$(\Omega(T_4) \times \mathbb{R}, \mu \otimes \lambda),$$

où $\Omega(T_4)$ est l'espace de toutes les orientations possibles de l'arbre et l'action non-singulière de \mathbb{F}_2 est définie dans la section 2.3.

Pour terminer, en utilisant de l'induction sur la 1-cohomologie, on traite également un exemple de système dynamique C_0 pour $SL_2(\mathbb{R})$. La construction obtenue sera étendue aux groupes de Lie simples de rang 1 : $SO(n, 1)$ et $SU(n, 1)$, $n \geq 2$. On renvoie au chapitre 3 [CCJ⁺12] pour plus d'informations sur la propriété de Haagerup de ces groupes.

Actions C_0 sur les algèbres de von Neumann

Une motivation supplémentaire à l'étude de la propriété de Haagerup est qu'elle s'étend aux algèbres de von Neumann. La première extension de la propriété de Haagerup aux facteurs de type II_1 est due à M. Choda [Cho83] :

Définition 0.0.16. Un facteur de type II_1 (M, τ) a la propriété de Haagerup s'il existe une suite d'applications de $M \rightarrow M$ unitaux complètement positives $(\phi_n)_n$ telle que :

1. Pour tout n , l'application ϕ_n préserve la trace τ et s'étend à un opérateur compact sur $L^2(M, \tau)$;
2. Pour tout $x \in M$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n(x) - x\|_2 = 0$.

L'extension aux algèbres de von Neumann finies est due à P. Jolissaint dans [Jol02] et finalement aux algèbres de von Neumann quelconques par R. Okayasu, N. Ozawa et R. Tomatsu [OOT15]. Le résultat fondamental suivant établit un autre lien entre les algèbres d'opérateurs et la propriété de Haagerup :

Théorème 0.0.17. Pour un groupe discret dénombrable G : G a la propriété de Haagerup si et seulement si son algèbre de von Neumann de groupe $L(G)$ a la propriété de Haagerup.

Comme $L^\infty(\Omega, \mu)$ est une algèbre de von Neumann commutative pour tout espace mesuré (Ω, μ) , les algèbres de von Neumann sont souvent interprétées comme une version non-commutative de ces espaces. Ainsi il est possible de trouver des analogues non-commutatifs aux théorèmes 0.0.5 et 0.0.8. Le résultat suivant est dû à P. Jolissaint :

Théorème 0.0.18 (Théorème 2.1.5, [CCJ⁺12]). Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini. S'il existe une action de G sur une algèbre de von Neumann N munie d'un état fidèle normal φ qui est G -invariant et telle que l'action soit fortement mélangeante et possède une suite non-triviale asymptotiquement invariante pour φ , alors G a la propriété de Haagerup. Réciproquement, si G a la propriété de Haagerup, alors il admet une telle action sur chacun des facteurs N suivants :

1. $N = R$, où R est le facteur hyperfini de type II_1 et $\varphi = \tau$ sa trace canonique ;
2. $N = R \otimes B(l^2)$ de type II_∞ et $\varphi = \tau \otimes \omega$, où B est de type I_∞ et ω est son état normal ;
3. $N = R_\lambda$, où R_λ est le facteur de Powers avec $\varphi = \varphi_\lambda$ l'état de Powers.

Dans le même esprit, on obtient :

Théorème 0.0.19. Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini. S'il existe une action de G sur une algèbre de von Neumann N munie d'un poids semi-fini φ et telle que l'action soit C_0 et possède une suite de vecteurs presque invariants pour φ , alors G a la propriété de Haagerup.

Réciproquement, si G a la propriété de Haagerup, alors il existe une algèbre de von Neumann de chaque type pour laquelle il existe une action de G sur N étant C_0 et admettant une suite de vecteurs presque invariants.

Dans la section 3, on introduira le contexte précis ainsi que les différentes définitions dans le cadre non-commutatif afin de pouvoir traduire ces notions dans le langage de la théorie des algèbres opérateurs. De plus, on démontrera qu'une telle action existe pour tout groupe ayant la propriété de Haagerup et chaque algèbre de von Neumann listée ci-dessous :

1. $N = L^\infty(\Omega, \mu)$, où (Ω, μ) est l'espace mesuré du théorème 0.0.8 ;
2. $N = B(L^2(\Omega, \mu))$;
3. Quand G admet un sous-groupe discret Γ satisfaisant certaines hypothèses (voir la proposition 3.2.11) :

$$N = L^\infty(\Omega, \mu) \rtimes \Gamma;$$

4. Si G est unimodulaire :

$$N = B(L^2(\Omega, \mu)) \rtimes G;$$

5. $N = R_\lambda \otimes B(L^2(\Omega, \mu))$.

Partie II : Conjecture de Baum-Connes

La K -théorie débute avec les travaux de A. Grothendieck sur des problèmes de géométrie algébrique dans les années 50. Plus précisément, il introduit cette notion pour formuler le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch sur les schémas. En 1959, J-P. Serre initie la K -théorie algébrique en appliquant la construction de Grothendieck aux modules projectifs sur un anneau. À la même période, M. Atiyah et F. Hirzebruch s'intéressent aux fibrés vectoriels complexes sur un espace topologique et s'inspirent des idées de Grothendieck pour définir une K -théorie topologique qui aura un rôle majeur dans le théorème d'indice d'Atiyah et Singer. Ceci conduira à la K -théorie des C^* -algèbres qui est une notion centrale en géométrie non-commutative.

La conjecture de Baum-Connes apparaît en 1982 à la suite des travaux de G. Kasparov et A. Mishenko sur la conjecture de Novikov. À l'origine P. Baum et A. Connes établissent leur conjecture pour les groupes discrets en utilisant une description géométrique de la K -homologie, notée $K^*(M, G)$, avec M une G -variété. En considérant les opérateurs elliptiques et la théorie d'indice, ils construisent une application de la K -homologie géométrique à la K -théorie des C^* -algèbres. Ils affirment alors que :

$$\mu_i : K^i(M, G) \rightarrow K_i(C_0(M) \rtimes_r G), \quad i = 0, 1$$

est un isomorphisme ([BC00]). En 1994, P. Baum, A. Connes, N. Higson annoncent une reformulation et une généralisation de la conjecture [BCH94] en englobant tous les groupes localement compacts, dénombrables à l'infini et tous les coefficients plutôt que \mathbb{C} . En effet, il a fallu attendre deux ingrédients essentiels pour cette extension. D'une part, la première clef était d'introduire et utiliser l'espace classifiant des actions propres d'un groupe, noté $\underline{E}G$. D'autre part, le précieux travail de Kasparov [Kas88], [Kas83] sur l'indice d'un opérateur différentiel elliptique et la création de la KK -théorie. Par ce langage, l'application d'assemblage s'interprète comme une application d'indice. La conjecture se formule ainsi :

Conjecture 0.0.1 (Baum-Connes à coefficients). *Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini. Soit A une G - C^* -algèbre. Alors l'application d'assemblage*

$$\mu_j^{G,A} : RK_j^G(\underline{E}G, A) \rightarrow K_j(A \rtimes_r G)$$

est un isomorphisme pour $j = 0, 1$.

Citons également celle plus digeste, sans coefficient :

Conjecture 0.0.2. *Soit G un groupe localement compact et dénombrable à l'infini. Alors l'application d'assemblage*

$$\mu_i^G : K_i^G(\underline{E}G) \rightarrow K_i(C_r^*(G))$$

est un isomorphisme pour $i = 0, 1$.

Il est à noter que la seconde est posée dans le cadre originel ; c'est-à-dire sans impliquer de KK -théorie, mais avec la description géométrique de K -homologie. L'avantage de cette dernière est que les éléments formant cette théorie sont, en principe, plus concrets et par conséquent plus facile à comprendre. En effet, un K -cycle géométrique sur un espace localement compact est composé d'une variété compacte, d'un fibré vectoriel complexe sur celle-ci et d'une application reliant la variété à l'espace.

En résumé, partant d'un groupe G localement compact et dénombrable à l'infini, on peut s'intéresser à la C^* -algèbre réduite de G , notée $C_r^*(G)$, ou encore à l'espace classifiant des actions propres de G , \underline{EG} . Il existe des théories permettant d'associer à ces nouveaux objets un groupe abélien que l'on nomme la K -théorie des C^* -algèbres et la K -théorie homologique G -équivariante. À priori, les groupes que l'on obtient par ces deux théories n'ont aucun lien puisqu'ils découlent de deux objets mathématiques complètement différents. Cependant, la conjecture 0.0.2 affirme que les deux groupes obtenues sont identiques. Ainsi cette conjecture permet de faire le pont entre deux branches des mathématiques, et par conséquent donne un accès à la compréhension d'un objet plutôt difficile, $C_r^*(G)$, via un objet plus simple en pratique \underline{EG} . On se référera au côté droit comme le côté analytique et le côté gauche comme le côté topologique.

En raison de l'énorme panel de conséquences qu'une preuve de cette conjecture aurait, elle est devenue l'un des problèmes les plus connus et dans un sens a orienté le développement des algèbres d'opérateurs et de la théorie des groupes depuis plusieurs décennies. En effet, l'injectivité de l'application d'assemblage a de nombreuses conséquences en topologie. Par exemple, A. Mishenko a démontré dans [Mis74] que la conjecture de Novikov est vraie pour les variétés orientées fermées avec groupe fondamental satisfaisant l'injectivité de Baum-Connes. De même, la surjectivité de cette application a des impacts en analyse. Par exemple, elle impliquerait la conjecture des idempotents :

Conjecture 0.0.3 (Kaplansky-Kadison, 1949). *Si G est un groupe discret sans torsion, alors $C_r^*(G)$ n'a pas d'autre idempotent que 0 et 1.*

La preuve repose sur l'intégralité de la trace :

Proposition 0.0.4 ([BCH94], Proposition 7.15). *Soit G un groupe discret sans torsion. Si l'application d'assemblage est surjective, alors l'image de la trace induite sur $K_0(C_r^*(G))$ est exactement \mathbb{Z} .*

La conjecture a été démontrée pour de larges classes de groupes incluant notamment :

- Sous-groupes discrets de $SO(n, 1)$ et $SU(n, 1)$ (Kasparov [Kas83] et Julg-Kasparov [KJ95]);
- Réseaux co-compacts de $SL_3(F)$, où F est \mathbb{R} , \mathbb{C} , ou un corps p -adique (V. Lafforgue [Laf98]);
- Groupes à un relateur (Beguin-Bettaieb-Valette [BBV99]);
- Groupes avec la propriété de Haagerup (Higson-Kasparov, voir théorème 0.0.1)
- Groupes hyperboliques agissant proprement et co-compactement sur un espace $CAT(0)$ et donc réseaux co-compacts des groupes de Lie simples $SO(n, 1)$, $SU(n, 1)$, $Sp(n, 1)$ et $F_4(-20)$ (V. Lafforgue [Laf02]);
- Sous-groupes des groupes hyperboliques (Mineyev-Yu [MY01]).

Il est à noter que la conjecture n'est pas connue pour $SL_3(\mathbb{Z})$ qui est un groupe ayant (T) . Pour de plus amples informations sur ce sujet, on renvoie à [AJV19].

Baum-Connes explicite pour certains produits semi-directs de \mathbb{Z}^2 par \mathbb{F}_2

En définitive, la formulation de la conjecture de Baum-Connes dans l'une ou l'autre de ses descriptions ainsi que les résultats positifs sur celle-ci sont techniques et abstraites. Par conséquent, seuls les spécialistes du domaine peuvent comprendre et utiliser ses étonnantes applications. Afin de pallier ce problème, sous l'impulsion de mon directeur de thèse A. Valette, le

projet Baum-Connes explicite a été créé. Le but est donc de décrire explicitement la conjecture de Baum-Connes pour certains groupes où la conjecture est connue. En d'autres termes, on aimerait répondre à travers des exemples concrets aux questions suivantes qui apparaissent naturellement :

Question 0.0.5. *Comment l'application d'assemblage traduit l'information encodée du côté topologique au côté analytique ? Autrement dit, supposons que les K -groupes sont munis d'ensembles "naturels" de générateurs, c'est-à-dire que l'on comprend assez bien. Peut-on espérer que satisfaire Baum-Connes signifie que l'application d'assemblage envoie ces ensembles les uns sur les autres ?*

Ce projet a débuté il y a une vingtaine d'années avec l'article [BBV99] qui démontre la conjecture de Baum-Connes pour les groupes à un relateur. Quelques années après, la thèse de O. Isely [Ise11] s'occupe de l'analyse du groupe d'Heisenberg et plus généralement des différents produits semi-directs de \mathbb{Z}^2 par \mathbb{Z} . En 2018, S. Pooya [Poo18] s'est intéressée aux groupes résolubles de Baumslag-Solitar et aux produits en couronne d'un groupe fini avec des groupes libres. Ces groupes ont la propriété de Haagerup et donc par théorème 0.0.1 satisfont Baum-Connes à coefficients. Le but de leurs thèses respectives était donc de mettre en lumière l'application d'assemblage de ces groupes sous un angle différent que celui de Higson-Kasparov. Ces groupes peuvent être vus comme produits semi-directs ce qui permet d'utiliser plusieurs outils pour calculer les K -groupes. Plus récemment dans [ABA⁺21], les auteures traitent le cas des groupes de tresses pures.

C'est dans ce contexte qu'un projet en collaboration avec R. Flores, S. Pooya et A. Valette a vu le jour. L'objectif est de traiter le cas des produits semi-directs de \mathbb{Z}^2 par H , où H est un sous-groupe non-moyennable de $SL_2(\mathbb{Z})$. L'intérêt réside dans le fait que contrairement aux groupes cités précédemment, ils n'ont pas la propriété de Haagerup. En effet, la paire $(\mathbb{Z}^2 \rtimes H, \mathbb{Z}^2)$ a la propriété (T) relative (voir [Bur91], p.62). De plus, ils ne sont pas hyperboliques puisqu'ils contiennent une copie de \mathbb{Z}^2 . Cependant la conjecture de Baum-Connes et même la conjecture de Baum-Connes à coefficients sont connues pour ces groupes ; cela découle du résultat de H. Oyono-Oyono [OO01] qui a démontré que la conjecture de Baum-Connes à coefficients est stable sous les actions de groupes sur les arbres. Plus précisément si G est un groupe agissant sur un arbre sans inversion d'arête, alors G satisfait la conjecture de Baum-Connes à coefficients si et seulement si tous les stabilisateurs de sommets dans G la satisfont également.

Dans cette thèse nous allons étudier le cas $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{F}_2$, où \mathbb{F}_2 est un sous-groupe libre de rang 2 de $SL_2(\mathbb{Z})$. On peut déduire pour ces groupes la conjecture de Baum-Connes via un autre résultat d'extension de H. Oyono-Oyono :

Théorème 0.0.6 (Oyono-Oyono, [Oyo01]). Soit $0 \rightarrow \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 \rightarrow 0$ une suite exacte de groupes discrets. Supposons que :

1. Γ_2 satisfait la conjecture de Baum-Connes à coefficients ;
2. Chaque sous-groupe de Γ_1 contenant Γ_0 comme sous-groupe d'indice fini satisfait la conjecture de Baum-Connes à coefficients.

Alors Γ_1 satisfait la conjecture de Baum-Connes à coefficients.

En effet, en considérant la suite exacte :

$$0 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow G/N \rightarrow 0,$$

une conséquence de ce résultat est le corollaire suivant :

Corollaire 0.0.7. *On suppose que N est normal dans G et que G/N est sans torsion. De plus si N et G/N satisfont Baum-Connes à coefficients , alors G satisfait aussi Baum-Connes à coefficients.*

Dans un premier temps, on s'intéresse à décrire les caractéristiques communes aussi bien du côté analytique que topologique pour $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{F}_2$, où le groupe libre \mathbb{F}_2 est engendré par deux matrices abstraites α_1, α_2 dans $SL_2(\mathbb{Z})$. Dans un second temps, on traite deux exemples explicites :

1. $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes S$, où S est le groupe de Sanov de $SL_2(\mathbb{Z})$, c'est à dire le sous-groupe engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$: c'est une application bien connue du lemme du ping-pong que le groupe de Sanov est non-abélien libre de rang 2; avec indice 12 dans $SL_2(\mathbb{Z})$.
2. $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes C$, où C est le sous-groupe des commutateurs de $SL_2(\mathbb{Z})$. C est engendré librement par les deux commutateurs $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (voir remarque 3.9 in [Kei]; proposition 4, p. 14 de [SB77]).

Pour le côté analytique, comme les groupes sont des produits semi-directs, on utilise les suites exactes à 6-termes de Pimsner-Voiculescu [PV82] pour obtenir les résultats :

Théorème 0.0.8. Soit $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes S$.

1. Le groupe $K_0(C_r^*(G))$ est isomorphe à \mathbb{Z}^4 . Les générateurs sont donnés par $[1]$, $[P_{v,w}]$, $[P_{u_1,v}]$ and $[P_{u_2,w}]$.
2. Le groupe $K_1(C_r^*(G))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^4 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Les générateurs sont donnés par les éléments sans torsion $[u_1]$, $[u_2]$, $[Q_{\alpha_1}^{u_1}]$ and $[Q_{\alpha_2}^{u_2}]$, avec les classes $[v]$ et $[w]$, qui sont d'ordre 2.

Théorème 0.0.9. Soit $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes C$.

1. Le groupe $K_0(C_r^*(G))$ est isomorphe à \mathbb{Z}^4 . Les générateurs sont donnés par $[1]$, $[P_{v,w}]$, $[p_1]_0 - [q_1]_0$ et $[p_2]_0 - [q_2]_0$.
2. Le groupe $K_1(C_r^*(G))$ est isomorphe à \mathbb{Z}^4 . Les générateurs sont donnés par les éléments sans torsion $[u_1]$, $[u_2]$, $[Q_{\alpha_1}^{u_1}]$ et $[Q_{\alpha_2}^{u_2}]$.

Le calcul explicite du membre de gauche est possible grâce à l'existence d'un modèle de dimension 3 pour \underline{EG} . Plus précisément, comme G est sans torsion on considère BG également de dimension 3. En utilisant un résultat de M. Matthey [M⁺02], ce calcul se simplifie en un calcul d'homologie. Avec la description géométrique de K -homologie, on obtient les résultats :

Théorème 0.0.10. Soit $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes S$.

1. Le groupe $K_0(BG)$ est isomorphe à \mathbb{Z}^4 et engendré par $\delta_1 = [*, \mathbb{C}, * \rightarrow x_0 \subset BG]$, $\delta_2 = [\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}, i]$, δ_{i_1} et δ_{i_2} .
2. Le groupe $K_1(BG)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^4 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Les générateurs sont donnés par les éléments sans torsion $\gamma_4^1 = [M_{\mathbb{T}^2, \alpha_1}, M_{\mathbb{T}^2, \alpha_1} \times \mathbb{C}, \text{Id}_{M_{\mathbb{T}^2, \alpha_1}}]$, $\gamma_4^2 = [M_{\mathbb{T}^2, \alpha_2}, M_{\mathbb{T}^2, \alpha_2} \times \mathbb{C}, \text{Id}_{M_{\mathbb{T}^2, \alpha_2}}]$, γ_3^1 et γ_3^2 , avec les classes γ_1 et γ_2 , qui sont d'ordre 2.

Théorème 0.0.11. Soit $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes C$.

1. Le groupe $K_0(BG)$ est isomorphe à \mathbb{Z}^4 et engendré par $\delta_1 = [*, \mathbb{C}, * \rightarrow x_0 \subset BG]$, $\delta_2 = [\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}, i]$, $[\Sigma_{x_1}, \Sigma_{x_1} \times \mathbb{C}, f_{x_1}]$ et $[\Sigma_{x_2}, \Sigma_{x_2} \times \mathbb{C}, f_{x_2}]$, avec $x_1, x_2 \in H_2(BG)$ explicites.
2. Le groupe $K_1(BG)$ est isomorphe à \mathbb{Z}^4 . Les générateurs sont donnés par les éléments sans torsion $\gamma_4^1 = [M_{\mathbb{T}^2, \alpha_1}, M_{\mathbb{T}^2, \alpha_1} \times \mathbb{C}, \text{Id}_{M_{\mathbb{T}^2, \alpha_1}}]$, $\gamma_4^2 = [M_{\mathbb{T}^2, \alpha_2}, M_{\mathbb{T}^2, \alpha_2} \times \mathbb{C}, \text{Id}_{M_{\mathbb{T}^2, \alpha_2}}]$, γ_3^1 et γ_3^2 .

Enfin, on discute de la possibilité de rendre explicite la bijection μ_i^G dans chacun des cas :

Théorème 0.0.12. Soit $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes S$. Alors

1. L'application d'assemblage μ_0^G est un isomorphisme ;
2. L'application d'assemblage μ_1^G est une bijection en dimension 1 et non-nulle en dimension 3.

Théorème 0.0.13. Soit $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes C$. Alors

1. L'application d'assemblage μ_0^G restreinte à un terme en \mathbb{Z}^2 est une bijection ;
2. L'application d'assemblage μ_1^G est une bijection en dimension 1 et non-nulle en dimension 3.

Organisation de la thèse

Cette thèse est organisée de la manière suivante.

Chapitre 1 On donne les préliminaires nécessaires à la compréhension des chapitres suivants. On introduit donc le vocabulaire et les différents outils bien connus utilisés dans ce travail. Pour la propriété de Haagerup, on rappelle les principales notions de la théorie des représentations ainsi que celles des algèbres d'opérateurs. Pour la conjecture de Baum-Connes, on décrit d'une part la K -théorie des C^* -algèbres. D'autre part, on définit la K -homologie géométrique et analytique. Ce survol nous permet ainsi d'expliquer et de définir l'application d'assemblage.

Chapitre 2 Dans un premier temps, on démontre le théorème 0.0.8 en plusieurs étapes ; on donne une preuve pour les groupes discrets, puis pour les groupes co-Følner et finalement de manière générale pour les groupes localement compacts, dénombrable à l'infini. Dans un second temps, on discute de l'ergodicité des systèmes C_0 et on traite des exemples.

Chapitre 3 On donne le cadre non-commutatif de la section précédente et on démontre le théorème 0.0.19.

Chapitre 4 Premièrement, on rappelle certains calculs explicites fait par O. Isely dans [Ise11] sur lesquels on se base. Puis on décrit complètement la K -théorie ainsi que la K -homologie associées à $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{F}_2$ dans chacun des cas mentionnés précédemment.

1. Préliminaires

Durant l'entièreté de cette section, G sera supposé, sauf mention contraire, être un groupe localement compact, dénombrable à l'infini.

1.1. Propriété de Haagerup

Dans cette section, on rappelle quelques notions importantes lorsque l'on s'intéresse à la dynamique des groupes topologiques. On commence par introduire les actions de groupes sur un espace. On définit ensuite les représentations de groupes ainsi que la théorie de 1-cohomologie. Ceci nous permettra de définir des propriétés de groupes liées aux représentations. Finalement, on donne les rudiments des algèbres d'opérateurs avec un accent sur les C^* -algèbres de groupes.

1.1.1. Actions de groupes et Représentations de groupes

L'essentiel de cette section est inspiré des appendices de [BdLHV08] ainsi que du premier chapitre de [BBM00] et du deuxième chapitre de [CCJ⁺12].

Actions

On commence par donner la définition d'un groupe localement compact :

Définition 1.1.1. Un groupe topologique G est localement compact si tout élément $g \in G$ possède un voisinage compact.

Un intérêt de considérer ces groupes-ci lorsque l'on étudie des systèmes dynamiques est donné par le résultat suivant :

Théorème 1.1.2 (Mesure de Haar). Il existe sur l'espace mesurable (G, \mathcal{B}) , où \mathcal{B} désigne la tribu borélienne de G , une unique mesure de Borel quasi-régulière invariante par translation à gauche. On note cette mesure μ_G et on l'appelle la mesure de Haar de G .

Définition 1.1.3 (Fonction modulaire). Pour tout $g \in G$, la mesure $m_g: A \mapsto \mu_G(Ag)$ est invariante à gauche. Ainsi par unicité de la mesure de Haar, m_g est un multiple de celle-ci. Ainsi il existe une constante, notée $\Delta_G(g)$, telle que $m_g = \Delta_G(g)\mu_G$. L'application $\Delta: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est un homomorphisme continu appelé fonction modulaire. Le groupe est dit unimodulaire si $\Delta_G \equiv 1$.

On renvoie à [BdLHV08] pour des exemples de tels groupes.

Définition 1.1.4. Soit X un espace et soit G un groupe. Une action de G sur X , notée $\alpha: G \curvearrowright X$, est une application

$$\begin{aligned} \alpha: G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto \alpha_g(x), \end{aligned}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall x \in X \alpha_e(x) = x$;
2. $\forall g, h \in G \forall x \in X \alpha_g \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$.

Si X est un espace topologique et si α est continue, on appelle X un G -espace.

On utilisera également la notation $gx := \alpha_g(x)$ et pour un ensemble $A \subset X$, $gA = \{gx : x \in A\}$.

Définition 1.1.5. Soit $x \in X$. Le sous-groupe $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ est appelé le stabilisateur de x . On définit également l'orbite d'un élément $O_x = \{y \in X : \exists g \in G : gx = y\}$. Une action est libre si G_x est trivial pour tout $x \in X$. Elle est dite transitive si elle possède une seule orbite.

Lorsque l'on considère un G -espace X localement compact, on s'intéresse à la propriété d'une action :

Définition 1.1.6. L'action est propre si l'application

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \times X \\ (g, x) &\mapsto (g \cdot x, x) \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

est propre, i.e. la pré-image d'un sous-ensemble compact de $X \times X$ est compacte dans $G \times X$. Ceci revient à regarder que pour tous sous-ensembles compacts $K, L \subset X$, l'ensemble :

$$\{g \in G : gK \cap L \neq \emptyset\},$$

est relativement compact.

Dans le cas d'un espace métrique (X, d) , on s'intéressera à la notion d'action métriquement propre qui est mieux adaptée pour les actions isométriques sur des espaces métriques pas localement compacts.

Définition 1.1.7. L'action $\alpha : G \curvearrowright X$ est métriquement propre si

$$\lim_{g \rightarrow \infty} d(gx, x) = +\infty \quad \forall x \in X.$$

Ici, tendre vers l'infini dans G signifie quitter les sous-ensembles compacts.

Cette dernière définition est équivalente à demander que l'application (1.1.1) satisfasse la condition suivante : la pré-image d'un sous-ensemble borné de $X \times X$ est bornée dans $G \times X$. Les définitions 1.1.6 et 1.1.7 sont donc équivalentes seulement pour les espaces métriques propres, i.e. les espaces métriques où les boules fermées sont compactes. De plus, dans la section 1.3.4, on donnera une "image locale" des actions propres afin de définir l'espace classifiant des actions propres (voir la définition 1.3.72).

Dans cette thèse on considère essentiellement des actions sur des espaces mesurés. Soit (X, \mathcal{B}, μ) un tel espace.

Définition 1.1.8. L'action de $\alpha : G \curvearrowright X$ est dite mesurable si l'application $\alpha : G \times X \rightarrow X$ est mesurable. On peut alors définir pour tout $g \in G$, une mesure $\mu_g(A) := \mu(g^{-1}A)$ pour tout ensemble mesurable A de X . On dit que cette action est non-singulière si μ_g et μ sont des mesures équivalentes pour tout $g \in G$. L'action est dite invariante si $\mu_g = \mu$ pour tout $g \in G$. On abrégera p.m.p (préservant une mesure de probabilité) si μ est une probabilité et G -invariante. Finalement l'action est dite ergodique si pour tout mesurable $A \in \mathcal{B}$ avec $gA = A$ pour tout $g \in G$, on a soit $\mu(A) = 0$ soit $\mu(A^c) = 0$.

L'étude de la théorie ergodique des actions de groupes est motivée par de nombreux exemples venant aussi bien de la théorie ergodique classique, que de la géométrie ou encore de la combinatoire. Pour ne citer qu'un exemple, on peut s'intéresser au sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$ engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui agit par automorphismes sur le tore \mathbb{T}^2 . On veut peut-être savoir si l'action est ergodique et mélangeante afin par exemple de pouvoir déterminer la vitesse de convergence d'une marche aléatoire vers la loi uniforme de \mathbb{T}^2 .

Une fonction $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ est dite G -invariante (resp. essentiellement G -invariante) si $f(gx) = f(x)$ pour tout $g \in G$ et pour tout $x \in X$ (resp. pour μ -presque tout $x \in X$). Le résultat suivant permet de caractériser les actions ergodiques :

Proposition 1.1.9. *Soit $\alpha: G \curvearrowright X$ une action mesurable. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\alpha: G \curvearrowright X$ est ergodique ;
2. toute fonction mesurable et essentiellement G -invariante est constante μ -presque partout.

Proposition 1.1.10. *Soit G un groupe compact. Soit $H < G$ un sous-groupe de G . Alors l'action $H \curvearrowright G$ par translations est ergodique si et seulement si H est dense dans G .*

On retrouve ainsi l'exemple de l'ergodicité des rotations irrationnelles sur le cercle \mathbb{T} .

Définition 1.1.11. Soit $G \curvearrowright (X, \mathcal{B}, \mu)$ une action p.m.p sur un espace de probabilité. On dit que l'action est fortement mélangeante si pour tous mesurables A et B de X , on a :

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \mu(gA \cap B) = \mu(A)\mu(B),$$

c'est-à-dire pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subset G$ tel que :

$$|\mu(gA \cap B) - \mu(A)\mu(B)| < \epsilon \quad \forall g \in G \setminus K.$$

L'action est dite faiblement mélangeante si l'action diagonale sur $(X \times X, \mu \otimes \mu)$ est ergodique. Une suite de sous-ensembles boréliens $(A_n)_{n \geq 1}$ de X est dite asymptotiquement invariante si pour tout compact K de G , on a :

$$\sup_{g \in K} \mu(gA_n \Delta A_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

De plus elle est dite non triviale si $\inf_n \mu(A_n)(1 - \mu(A_n)) > 0$.

Une suite de Følner dans X est une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ avec $\mu(A_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ et pour tout compact K de G , on a :

$$\sup_{g \in K} \frac{\mu(gA_n \Delta A_n)}{\mu(A_n)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Constatons qu'une action fortement mélangeante est nécessairement ergodique. En effet si $A \in \mathcal{B}$ est tel que $gA = A$ pour tout $g \in G$, alors $\mu(A) = \mu(A)^2$ et donc $\mu(A) \in \{0, 1\}$.

Définition 1.1.12. Soit (X, \mathcal{B}, μ) un espace mesuré sur lequel G agit par automorphismes boréliens et préservant μ est appelé un système dynamique et est noté (X, \mathcal{B}, μ, G) . On dira que

le système dynamique (X, \mathcal{B}, μ, G) est mélangeant, ou C_0 , si pour tous $A, B \in \mathcal{B}$ tels que $0 \leq \mu(A), \mu(B) < \infty$, on a :

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \mu(gA \cap B) = 0.$$

Remarquons qu'une telle action n'est pas nécessairement ergodique. En effet en considérant l'action par translations de \mathbb{Z} sur (\mathbb{R}, λ) , où λ désigne la mesure de Lebesgue, on constate que l'action est C_0 car elle est propre. Mais l'ensemble

$$A = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} (k, k + 1/2),$$

est \mathbb{Z} -invariant et $\lambda(A) = \lambda(A^c) = +\infty$.

Représentations

Dans cette section on introduit la notion de représentation d'un groupe qui n'est autre qu'un homomorphisme du groupe vers $GL(V)$, les opérateurs linéaires inversibles d'un espace vectoriel. Plus précisément :

Définition 1.1.13. Une représentation d'un groupe G sur un espace vectoriel V est une application

$$\begin{aligned} \pi: G &\rightarrow GL(V) \\ g &\mapsto \pi(g), \end{aligned}$$

telle que $\pi(e) = \text{Id}_V$ et $\pi(g) \circ \pi(h) = \pi(gh)$, pour tout $g, h \in G$. Le degré d'une représentation est la dimension de V .

Dans cette thèse, on travaillera uniquement avec des représentations unitaires sur des espaces de Hilbert, i.e. à valeurs dans les opérateurs unitaires (isométriques) sur un Hilbert :

Définition 1.1.14. Une représentation unitaire d'un groupe G sur un espace de Hilbert \mathcal{H} est une application

$$\begin{aligned} \pi: G &\rightarrow B(\mathcal{H}) \\ g &\mapsto \pi(g), \end{aligned}$$

telle que $\pi(e) = \text{Id}_{\mathcal{H}}$, $\pi(g) \circ \pi(h) = \pi(gh)$ et $\pi(g)^* = \pi(g^{-1})$ pour tout $g, h \in G$. De plus, on impose que la représentation soit fortement continue, i.e. l'application $g \mapsto \pi(g)\xi$ soit continue pour tout $\xi \in \mathcal{H}$.

On donne à présent quelques exemples élémentaires de représentations. Chaque groupe possède la représentation triviale, où chaque élément est envoyé sur l'opérateur identité. On la note 1_G . Un autre exemple important est la représentation régulière gauche :

Définition 1.1.15. Soit $L^2(G, \mu_G)$ l'espace de Hilbert des fonctions carré intégrable $f: G \rightarrow \mathbb{C}$. Pour $g \in G$, on définit l'opérateur unitaire $\lambda_G(g): L^2(G) \rightarrow L^2(G)$ par :

$$\lambda_G(g)\xi(x) = \xi(g^{-1}x), \quad \xi \in L^2(G), \quad x \in G.$$

La représentation λ_G ainsi obtenue s'appelle la représentation régulière gauche de G .

On peut étendre cet exemple aux actions de groupes. En effet considérons une action mesurable non-singulière continue $\alpha: G \curvearrowright X$ sur un espace mesuré σ -fini. Ainsi par le théorème de

Radon-Nikodym, il existe une fonction positive mesurable sur X , notée $\frac{d\mu_g}{d\mu}$, telle que :

$$\int_X f(gx) \frac{d\mu_g}{d\mu}(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x), \quad \forall f \in L^1(X, \mu).$$

De plus la fonction mesurable

$$\begin{aligned} c_\mu : G \times X &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ (g, x) &\mapsto c_\mu(g, x) = \frac{d\mu_g}{d\mu}(x), \end{aligned}$$

satisfait la relation d'un cocycle, i.e. $c_\mu(gh, x) = c_\mu(g, hx)c_\mu(h, x)$, pour tous $g, h \in G$ et μ -presque tout $x \in X$. Ainsi, en posant

$$\pi_X(g)\xi(x) = c_\mu(g^{-1}, x)^{1/2} \xi(g^{-1}x) \quad g \in G, \xi \in L^2(X, \mu),$$

on obtient une représentation unitaire de G . La continuité forte vient de l'hypothèse de σ -finitude de X (voir appendice A de [BdLHV08]).

Définition 1.1.16. Sous les hypothèses précédentes, la représentation π_X est appelée représentation de Koopman. Dans le cas particulier où μ est G -invariante, π_X est appelée représentation de permutations.

Lorsque H est un sous-groupe fermé de G , il existe une mesure ν quasi-invariante sur l'espace homogène G/H . En effet, il existe toujours une fonction ρ pour la paire (G, H) (voir chapitre 8 de [RS⁺00]), i.e. une fonction continue $\rho : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ satisfaisant :

$$\rho(xh) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)} \rho(x), \quad \forall x \in G, h \in H.$$

De cette fonction on peut définir la représentation quasi-régulière de G associée à H :

$$\lambda_{G/H}(g)\xi(x) = \left(\frac{\rho(g^{-1}x)}{\rho(x)} \right)^{1/2} \xi(g^{-1}x), \quad g, x \in G, \xi \in L^2(G/H).$$

On s'attarde à présent sur une notion importante de la théorie des représentations ; l'induction. À chaque sous-groupe fermé H de G et à chaque représentation unitaire (σ, \mathcal{K}) de H , il est possible d'induire σ à G ; cette représentation se note $\text{Ind}_H^G \sigma$.

Soit p la projection canonique de G sur G/H et considérons \mathcal{A} l'espace vectoriel de toutes les applications continues $\xi : G \rightarrow \mathcal{K}$ à p -support compact et telles que $\xi(xh) = \sigma(h^{-1})\xi(x)$ pour tout $x \in G$ et tout $h \in H$. On peut alors équiper \mathcal{A} d'un produit scalaire :

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int_{G/H} \langle \xi(x), \eta(x) \rangle d\nu(xH).$$

On complète alors \mathcal{A} par ce produit scalaire pour obtenir un espace de Hilbert \mathcal{H}_ν . Définissons alors pour tout $g \in G$, l'opérateur :

$$\pi_\nu(g)\xi(x) = \left(\frac{d\nu_{g^{-1}}(xH)}{d\nu(xH)} \right)^{1/2} \xi(g^{-1}x), \quad \xi \in \mathcal{A}, x \in G.$$

Cet opérateur sur \mathcal{A} préserve le produit scalaire, ce qui permet de l'étendre à un opérateur unitaire sur \mathcal{H}_ν .

Définition 1.1.17. La représentation unitaire π_ν sur \mathcal{H}_ν s'appelle la représentation de G induite par la représentation σ de H . Elle est notée $\text{Ind}_H^G \sigma$.

Exemple 1.1.18. Pour tout sous-groupe fermé H , on considère la représentation triviale de H , i.e. 1_H . Alors on a $\text{Ind}_H^G 1_H = \lambda_{G/H}$.

On termine cette section en donnant l'analogie des définitions 1.1.11 et 1.1.12. Pour ce faire, on commence par définir la notion de vecteurs invariants :

Définition 1.1.19. Soit (π, \mathcal{H}) une représentation unitaire de G .

1. Pour un sous-ensemble K de G et $\epsilon > 0$, un vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ est (K, ϵ) -invariant si :

$$\sup_{g \in K} \|\pi(g)\xi - \xi\| < \epsilon \|\xi\|.$$

2. La représentation (π, \mathcal{H}) a des vecteurs presque invariants si elle a des vecteurs (K, ϵ) -invariant pour tout ensemble compact K de G et tout $\epsilon > 0$. On dit alors qu'elle contient faiblement la représentation triviale et on note $1_G < \pi$.
3. La représentation (π, \mathcal{H}) a des vecteurs invariants si il existe $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi \neq 0$, tel que $\pi(g)\xi = \xi$ pour tout $g \in G$. On dit qu'elle contient la représentation triviale et on note $1_G \subset \pi$. Les vecteurs invariants forment un sous-espace vectoriel de \mathcal{H} qui est noté $\mathcal{H}^{\pi(G)}$. On a donc

$$1_G \subset \pi \leftrightarrow \mathcal{H}^{\pi(G)} \neq \{0\}.$$

Définition 1.1.20. Soit (π, \mathcal{H}) une représentation unitaire de G .

1. On dit que la représentation π est C_0 , ou mélangeante, si ses coefficients matriciels

$$\varphi_{\xi, \eta} : g \mapsto \langle \pi(g)\xi, \eta \rangle$$

sont dans $C_0(G)$ pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.

2. On dit que la représentation π est faiblement mélangeante si elle ne contient pas de sous-représentation de dimension finie non-nulle.

Considérons alors une action $\alpha : G \curvearrowright (X, \mathcal{B}, \mu)$ p.m.p. et regardons sa représentation de permutation $\pi_X : G \rightarrow \mathcal{U}(L^2(X, \mu))$. On définit alors un sous-espace fermé G -invariant de $L^2(X, \mu)$:

$$L_0^2(X, \mu) = \left\{ \xi \in L^2(X, \mu) : \int_X \xi d\mu = 0 \right\},$$

de sorte à pouvoir considérer ρ_X la restriction de π_X sur ce sous-espace. Le prochain résultat établit le lien entre l'action α et ρ_X .

Proposition 1.1.21. Soit $\alpha : G \curvearrowright (X, \mathcal{B}, \mu)$ une action p.m.p. Soit π_X la représentation de permutations associée et ρ_X sa restriction à $L_0^2(X, \mu)$. Alors α est fortement mélangeante (respectivement faiblement mélangeante) si et seulement si ρ_X est C_0 (respectivement faiblement mélangeante). De plus, l'existence d'une suite de Følner pour α implique que 1_G est faiblement contenue dans ρ_X .

Finalement, on rappelle ci-dessous quelques propriétés utiles dans le cadre plus général des actions non-singulières :

Proposition 1.1.22. *Soit $\alpha: G \curvearrowright (X, \mathcal{B}, \mu)$ une action non-singulière et soit $\pi_X: G \curvearrowright L^2(X)$ sa représentation de Koopman associée. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. α n'a pas de mesure de probabilité invariante ;
2. π_X n'a pas de vecteur invariant ;
3. il existe $\xi \in L^2(X)^+$ telle que $\inf_{g \in G} \langle \pi_X(g)\xi, \xi \rangle = 0$;
4. π_X est faiblement mélangeante.

Proposition 1.1.23. *Soit $\alpha: G \curvearrowright (X, \mathcal{B}, \mu)$ une action non-singulière et soit $\pi_X: G \curvearrowright L^2(X)$ sa représentation de Koopman associée. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. α a une suite de mesures presque invariantes, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout sous-ensemble compact $K \subset G$, il existe une mesure de probabilité η sur X telle que :

$$\|g_*\eta - \eta\| < \varepsilon \quad \forall g \in K;$$

2. α possède une moyenne invariante, i.e. un état G -invariant $\phi \in L^\infty(X)^*$;
3. π_X a des vecteurs presque invariants ;
4. il existe une représentation orthogonale $\sigma: G \rightarrow O(\mathcal{H})$ telle que $\pi_X \otimes \sigma$ a des vecteurs presque invariants.

Les preuves de ces deux derniers résultats peuvent se trouver dans l'appendice de [AIM19].

1.1.2. 1-cohomologie de groupes

Cette section est entièrement basée sur le chapitre 2 de [BdLHV08].

Définition 1.1.24. Un espace de Hilbert réel affine est la donnée d'un ensemble \mathcal{H} venant avec une action simplement transitive du groupe additif d'un espace de Hilbert réel \mathcal{H}^0 . On désigne par $O(\mathcal{H}^0)$ le groupe orthogonal de \mathcal{H}^0 , c'est-à-dire le groupe des opérateurs linéaires isométriques inversibles sur \mathcal{H}^0 . Le choix d'une origine sur \mathcal{H} nous donne, par le théorème de Mazur-Ulam, la décomposition :

$$\text{Isom}(\mathcal{H}) = O(\mathcal{H}^0) \ltimes \mathcal{H}^0.$$

Définition 1.1.25. Une action isométrique affine de G sur \mathcal{H} est un homomorphisme de groupe $\alpha: G \rightarrow \text{Isom}(\mathcal{H})$ telle que l'application $G \rightarrow \mathcal{H}$,

$$g \mapsto \alpha(g)x$$

est continue pour tout $x \in \mathcal{H}$.

Le lemme suivant nous donne la description générale d'une telle action.

Lemme 1.1.26. *Soit π une représentation orthogonale de G sur \mathcal{H}^0 . Pour une application $\alpha: G \rightarrow \text{Isom}(\mathcal{H})$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. α est une action affine isométrique de G avec partie linéaire π ;

2. il existe une application continue $b: G \rightarrow \mathcal{H}^0$ satisfaisant la relation de 1-cocycle :

$$b(gh) = b(g) + \pi(g)b(h),$$

et telle que

$$\alpha(g)x = \pi(g)x + b(g)$$

pour tout $g, h \in G$ et $x \in \mathcal{H}$.

Définition 1.1.27. Soit π une représentation orthogonale de G sur un espace de Hilbert réel \mathcal{H}^0 .

1. L'application $b: G \rightarrow \mathcal{H}^0$ du lemme précédent s'appelle un 1-cocycle par rapport à π .
2. Un 1-cocycle de la forme :

$$b(g) = \pi(g)\xi - \xi, \quad \forall g \in G,$$

pour un $\xi \in \mathcal{H}^0$ fixé, s'appelle un 1-cobord par rapport à π .

3. L'espace noté $Z^1(G, \pi)$, ou $Z^1(\pi, \mathcal{H})$, est celui de tous les 1-cocycles par rapport à π . C'est un espace vectoriel réel et le sous-espace de $Z^1(G, \pi)$ de tous les 1-cobords est noté $B^1(G, \pi)$. L'espace vectoriel quotient :

$$H^1(G, \pi) = Z^1(G, \pi)/B^1(G, \pi),$$

est appelé le premier groupe de cohomologie à coefficients dans π .

Le lemme suivant donne une caractérisation des 1-cobords.

Lemme 1.1.28. Soit π une représentation orthogonale de G sur \mathcal{H}^0 . Soit $b \in Z^1(G, \pi)$ et soit α l'action affine isométrique associée. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $b \in B^1(G, \pi)$;
2. α a un point fixe dans \mathcal{H} ;
3. α est conjuguée à π par une translation ;
4. b est bornée ;
5. toutes les orbites de α sont bornées ;
6. il existe une orbite de α bornée.

On termine cette section en s'intéressant aux actions affines isométriques propres. Plus précisément, on donne une méthode pour construire de telles actions. Supposons que l'on ait un G -espace X et un espace de Hilbert \mathcal{H} avec une représentation unitaire π de G . De plus, on suppose qu'il existe une application continue de $c: X \times X \rightarrow \mathcal{H}$ telle que les conditions suivantes soient satisfaites :

1. $c(x, y) + c(y, z) = c(x, z), \quad \forall x, y, z \in X$;
2. $c(gx, gy) = \pi(g)c(x, y), \quad \forall x, y \in X, \forall g \in G$;
3. $\lim_{g \rightarrow \infty} \|c(gx, x)\| = +\infty, \quad x \in X$.

Alors en fixant un point-base $x_0 \in X$ et en posant $b(g) = c(gx_0, x_0)$, on obtient un 1-cocycle propre par rapport à π et donc une action affine isométrique (métriquement) propre.

1.1.3. Caractères et groupe dual

Nous introduisons dans cette section une notion qui apparaîtra plus tard : le groupe dual de G .

Définition 1.1.29. Soient $(\pi_1, \mathcal{H}_1), (\pi_2, \mathcal{H}_2)$ deux représentations d'un groupe G . On dit alors que π_1 est équivalente à π_2 s'il existe un opérateur d'entrelacement $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ unitaire tel que $T\pi_1(g) = \pi_2(g)T$ pour tout $g \in G$. On note alors $\pi_1 \simeq \pi_2$.

Définition 1.1.30. Une représentation unitaire (π, \mathcal{H}) de G est dite irréductible si \mathcal{H} ne possède pas de sous-espace fermé G -invariant non trivial.

On définit alors le dual de G , noté \hat{G} , comme l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles de G .

Définition 1.1.31. Un caractère de G est un homomorphisme continu $\chi : G \rightarrow \mathbb{T}$, où \mathbb{T} désigne le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

Supposons à présent que G est un groupe topologique abélien. Alors en utilisant le lemme de Schur, on déduit que chaque représentation irréductible de G est de degré 1. En effet, comme $\pi(G) \subset \pi(G)'$, où $\pi(G)'$ désigne le commutant de $\pi(G)$ (l'ensemble des opérateurs qui commutent à $\pi(g)$ pour tout $g \in G$), on a donc que $\pi(g) = \chi(g)I$. Ainsi on obtient la définition suivante :

Définition 1.1.32. Pour un groupe abélien G , on définit le groupe dual $\hat{G} := \text{Hom}(G, \mathbb{T})$, i.e. le groupe abélien des caractères avec la multiplication ponctuelle.

L'exemple suivant sera utilisé par la suite.

Exemple 1.1.33. Considérons le groupe discret \mathbb{Z} . Un homomorphisme $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{T}$ est entièrement déterminé par l'image de 1. En effet, il suffit de remarquer que pour $n \geq 1$:

$$\chi(n) = \chi(1 + \dots + 1) = \chi(1)^n,$$

et $\chi(-n) = \overline{\chi(n)}$. Ainsi on obtient $\hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$. Plus généralement, $\hat{\mathbb{Z}^k} = \mathbb{T}^k$ pour tout $k \geq 1$.

1.1.4. Moyennabilité et non-moyennabilité

La moyennabilité est une propriété de groupe qui généralise à la fois la notion de groupe fini (compact) et la notion de groupe abélien. On rappelle la définition suivante :

Définition 1.1.34. Soit G un groupe localement compact, de Hausdorff. Une moyenne sur $L^\infty(G)$ est une fonctionnelle linéaire positive de norme 1.

On dit alors que G est moyennable si il existe une moyenne invariante à gauche m sur $L^\infty(G)$, i.e. pour tout $g \in G$

$$m(g \cdot f) = m(f), \quad f \in L^\infty(G),$$

où $g \cdot f(x) = f(g^{-1}x)$ pour tout $x \in G$.

Remarquons qu'un groupe compact possède une moyenne invariante. En effet, il suffit de considérer l'intégration contre sa mesure de Haar :

$$m(f) = \frac{1}{\mu_G(G)} \int_G f(x) d\mu_G(x).$$

De plus, on sait que les groupes abéliens sont moyennables (voir par exemple le théorème de Markov-Kakutani appendice G de [BdLHV08]).

De plus, la moyennabilité se comporte bien sous les suites exactes et les réunions directes :

Théorème 1.1.35. Soit G un groupe localement compact, de Hausdorff. Soit H un sous-groupe normal fermé de G .

1. Si G est moyennable, alors G/H est moyennable.
2. Si H et G/H sont moyennables, alors G est moyennable. Autrement dit la moyennabilité est préservée par extensions.
3. Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille inductive de sous-groupes fermés de G telle que $\bigcup_{i \in I} G_i$ soit dense dans G . Si G_i est moyennable pour tout $i \in I$, alors G est moyennable.

On peut donc considérer la plus petite classe de groupes contenant les groupes abéliens et finis et étant fermée sous extensions et unions directes. Les groupes dans cette classe s'appellent les groupes moyennables élémentaires. Tous les groupes moyennables ne sont pas élémentaires ; par exemple le groupe de Grigorchuk est un groupe moyennable mais pas élémentaire.

Nous donnons à présent deux non-exemples importants.

Exemple 1.1.36. 1. *Le groupe libre \mathbb{F}_2 sur deux générateurs a et b n'est pas moyennable. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe une moyenne invariante m sur $l^\infty(\mathbb{F}_2)$. On considère alors A l'ensemble des mots réduits commençant par une puissance non-nulle de a . Ainsi $\mathbb{F}_2 = aA \cup A$. De plus, $m(A) = m(aA)$ et $m(\mathbb{F}_2) = 1$. D'où $m(A) \geq \frac{1}{2}$. Cependant :*

$$1 = m(\mathbb{F}_2) \geq m(A) + m(bA) + m(b^2A) = 3m(A) \geq \frac{3}{2},$$

ce qui est une contradiction.

2. *On considère le groupe fondamental d'une surface fermée orientable de genre $g \geq 2$, noté Γ_g . Il existe un homomorphisme surjectif évident de Γ_g vers \mathbb{F}_2 . Ainsi en utilisant le théorème précédent, on déduit la non-moyennabilité de Γ_g .*

On termine cette section en donnant une autre caractérisation de la moyennabilité en terme de représentations :

Théorème 1.1.37 (Hulanicki-Reiter). Soit G un groupe localement compact. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. G est moyennable ;
2. $1_G < \lambda_G$;
3. $\pi < \lambda_G$ pour toute représentation unitaire π de G .

On déduit de ce résultat que les sous-groupes fermés d'un groupe localement compact moyennable sont moyennables. En effet, il suffit de constater que $\lambda_{G|H} < \lambda_H$. Par conséquent, un groupe localement compact contenant \mathbb{F}_2 comme sous-groupe fermé n'est pas moyennable. Ceci permet d'affirmer, par exemple, que le groupe $SL_2(\mathbb{R})$ n'est pas moyennable. En effet, considérons H le réseau non co-compact de $SL_2(\mathbb{Z})$ engendré par les deux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'avère qu'une application du lemme du ping-pong sur \mathbb{R}^2 montre que H est un groupe libre de rang 2.

1.1.5. Propriété (T) de Kazhdan et $a-(T)$ -moyennabilité

On définit dans cette section une propriété centrale de cette thèse, la propriété de Haagerup, aussi connue sous le nom $a-(T)$ -moyennabilité.

On commence par déterminer les groupes ayant une action isométrique propre sur un espace euclidien \mathbb{E}^n . La structure de tels groupes a été donnée par Bieberbach (voir par exemple [Cha86]) :

Théorème 1.1.38. Soit Γ un groupe discret agissant proprement et isométriquement sur \mathbb{E}^n . Alors Γ est un groupe cristallographique, c'est-à-dire il s'obtient via une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^k \rightarrow \Gamma \rightarrow F \rightarrow 0,$$

où $k \leq n$ et F est un groupe fini. Si de plus l'action est co-compacte, alors $k = n$ et le sous-groupe normal \mathbb{Z}^n agit automatiquement via n translations indépendantes.

Cependant la situation est complètement différente lorsque l'on remplace l'espace euclidien par un espace de Hilbert arbitraire.

Définition 1.1.39 (Gromov). Un groupe localement compact G est dit $a-(T)$ -moyennable s'il possède une action affine isométrique propre sur un espace de Hilbert \mathcal{H} .

On remarque que les groupes cristallographiques sont donc $a-(T)$ -moyennables. Cependant, il existe beaucoup d'autres exemples, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 1.1.40 (Théorème 2.1.1, [CCJ⁺12]). Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une fonction continue propre $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui soit définie conditionnellement de type négative ;
2. La C^* -algèbre abélienne $C_0(G)$ possède une approximation de l'unité formée de fonctions définies positives normalisées, i.e. il existe une suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ de fonctions définies positives dans $C_0(G)$ telles que $\varphi_n(e) = 1$ pour tout n , $\varphi_n \rightarrow 1$ uniformément sur tout compact de G .
3. Il existe une représentation unitaire C_0 de G sur (π, \mathcal{H}) , i.e. les coefficients matriciels $\varphi_{\xi, \eta} : g \mapsto \langle \pi(g)\xi, \eta \rangle$ appartiennent à $C_0(G)$ pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, et contenant faiblement la représentation triviale 1_G .
4. G est $a-(T)$ -moyennable.

Définition 1.1.41. Un groupe G a la propriété de Haagerup s'il satisfait une et donc toutes les conditions équivalentes ci-dessus.

Ainsi, de manière plus générale, les groupes moyennables ont la propriété de Haagerup ; il suffit de comparer le théorème 1.1.37 avec la condition (3) du théorème ci-dessus. C'est pourquoi la propriété de Haagerup est souvent vue comme une propriété de moyennabilité faible.

En considérant le lemme 1.1.26, on peut reformuler la définition 1.1.39 en termes de 1-cocycles :

Proposition 1.1.42. Un groupe G localement compact est $a-(T)$ -moyennable s'il existe une représentation unitaire π de G et un 1-cocycle propre $b \in Z^1(G, \pi)$.

On donne à présent quelques exemples de groupes ayant la propriété de Haagerup :

Exemple 1.1.43. 1. *Les groupes agissant proprement sur les arbres ont la propriété de Haagerup. En effet, soit $T = (V, E)$ un arbre sur lequel G agit proprement. On note \mathbb{E} l'ensemble des arêtes orientées, où chaque arête géométrique possède deux orientations possibles. Soit π la représentation de permutation de G sur $l^2(\mathbb{E})$. Pour $x, y \in V$, on note $[x, y]$ l'ensemble des arêtes orientées sur l'unique chemin géodésique reliant x à y . On dit que $e \in [x, y]$ est cohérent si l'arête pointe de x vers y et incohérent sinon. On définit alors un cocycle*

$$c : V \times V \rightarrow l^2(\mathbb{E}),$$

où pour tout $x, y \in V$ et $e \in \mathbb{E}$:

$$c(x, y)(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \notin [x, y] \\ 1 & \text{si } e \in [x, y] \text{ et est cohérent} \\ -1 & \text{si } e \in [x, y] \text{ et est incohérent.} \end{cases}$$

On vérifie sans mal les trois conditions énoncées à la fin de la section 1.1.2. Ainsi, on déduit par exemple que le groupe libre sur deux générateurs \mathbb{F}_2 a la propriété de Haagerup.

2. *Les groupes de Lie $SO(n, 1)$ et $SU(n, 1)$, i.e. les groupes d'isométries de l'espace hyperbolique de dimension n réel et complexe respectivement, ont la propriété de Haagerup. En effet, des actions affines isométriques propres ont été construites par A.M. Vershik, I.M. Gelfand et M.I. Graev ([VGG73], [VGG74]).*
3. *Les groupes de Coxeter ont la propriété de Haagerup. M. Bozejko, T. Januszkiewicz et R. Spatzier ont démontré que le système de Coxeter (W, S) admet une métrique des mots définie conditionnellement de type négative (voir [BJS88]).*

Notons que, dès le moment où un espace topologique X admet un noyau conditionnellement de type négatif, on peut plonger notre espace dans un espace de Hilbert \mathcal{H} .

Théorème 1.1.44 (construction GNS). Soit Ψ un noyau conditionnellement de type négatif sur un espace topologique X et soit $x_0 \in X$ un point-base. Alors il existe un espace de Hilbert réel \mathcal{H} et une application continue $f : X \rightarrow \mathcal{H}$ avec les propriétés suivantes :

1. $\Psi(x, y) = \|f(x) - f(y)\|^2$ pour tout $x, y \in X$;
2. L'ensemble des combinaisons linéaires de $\{f(x) - f(x_0) : x \in X\}$ est dense dans \mathcal{H} .

De plus, la paire (\mathcal{H}, f) est unique à isomorphisme canonique près.

Par exemple pour un arbre $T = (V, E)$, il suffit (voir exemple ci-dessus) de considérer $f(x) = c(x_0, x)$, où $x_0 \in V$ est un point-base fixé.

On termine cette section avec une autre notion très importante en théorie des représentations : la propriété (T) de Kazhdan.

Définition 1.1.45. Soit G un groupe topologique. Un sous-ensemble K de G est un ensemble de Kazhdan si il existe $\varepsilon > 0$ avec la propriété suivante :

Toute représentation unitaire (π, \mathcal{H}) de G ayant un vecteur (K, ε) -invariant admet aussi un vecteur non-nul invariant.

On dit alors que (K, ε) est une paire de Kazhdan pour G . Le groupe G a la propriété (T) si G admet une paire de Kazhdan compact.

Autrement dit, G a la propriété (T) si et seulement si pour toute représentation unitaire (π, \mathcal{H}) de G telle que $1_G \prec \pi$ implique $1_G \subset \pi$. Ainsi le nom (T) vient de la caractérisation que la représentation triviale est isolée pour la topologie de Fell. Il existe plusieurs caractérisations différentes de la propriété (T) :

1. Toute fonction conditionnellement de type négative définie sur G est bornée ;
2. Toute action affine isométrique sur un espace de Hilbert \mathcal{H} a un point fixe ;
3. Toute suite de fonctions continues, normalisées, définies positives sur G convergeant uniformément sur tout compact de G vers 1, converge uniformément vers 1 sur G .

On remarque donc que la propriété de Haagerup peut être vue comme la négation forte de la propriété (T) . En effet, les seuls groupes ayant à la fois (T) et étant a - (T) -moyennables sont les groupes compacts. La propriété (T) est donc une obstruction à la moyennabilité. De plus, elle est considérée en théorie des représentations comme une forme de rigidité. Par contraste, on peut donc dire que la propriété de Haagerup est une propriété forte de non-rigidité.

Définition 1.1.46. Soit G un groupe topologique et soit H un sous-groupe fermé de G . On dit que la paire (G, H) a la propriété (T) relative si toute représentation unitaire (π, \mathcal{H}) de G ayant des vecteurs presque invariants, possède un vecteur non-nul $\pi(H)$ -invariant.

Exemple 1.1.47. 1. Un groupe G a (T) si et seulement si la paire (G, G) a la propriété (T) relative.

2. Soit Γ un sous-groupe non-moyennable de $SL_2(\mathbb{Z})$. Alors la paire $(\mathbb{Z}^2 \rtimes \Gamma, \mathbb{Z}^2)$ a la propriété (T) relative (voir [Bur91]).

Enfin, une motivation dans l'étude de la propriété (T) est donnée par la théorie géométrique des groupes.

Théorème 1.1.48. Soit Γ un groupe de type fini, résiduellement fini et infini ayant (T) . Soit S un ensemble fini symétrique de générateurs et soit $\varepsilon > 0$ une constante de Kazhdan pour S . Alors pour toute suite décroissante $(H_n)_{n \geq 1}$ de sous-groupes d'indices finis de Γ avec $\bigcap_n H_n = \{1\}$, la famille de graphes de Cayley $(\text{Cay}(\Gamma/H_n, S))_n$ est une famille $(k, \varepsilon^2/4)$ -expandeurs, où $k = |S|$.

Ainsi en considérant le groupe $SL_3(\mathbb{Z})$, ayant (T) , ou encore $(SL_2(\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^2)$ avec la propriété (T) relative, on obtient les premiers exemples construits de graphes expandeurs réguliers (voir [Mar73]). Pour plus d'informations sur ce sujet, on renvoie au chapitre 6 de [BdLHV08].

1.2. C^* -algèbres et algèbres de von Neumann

Dans cette section, on donne les préliminaires d'algèbres d'opérateurs nécessaires à la compréhension aussi bien du membre de droite de la conjecture de Baum-Connes que de la partie dynamique de la propriété de Haagerup sur les algèbres de von Neumann. Les références principales de ce chapitre sont [Dav96], [Tak13], [Tak79], [Ped79].

1.2.1. C^* -algèbres

Définition 1.2.1. Une algèbre de Banach A est une algèbre complexe normée complète satisfaisant :

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in A.$$

Par exemple $l^2(\mathbb{C})$ muni de la multiplication ponctuelle.

Définition 1.2.2. Une application $*$: $A \rightarrow A$, $a \mapsto a^*$ est une involution si pour tout $x, y \in A$, on a :

1. $(x^*)^* = x$;
2. $(\lambda x)^* = \bar{\lambda}x^*$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$;
3. $(x + y)^* = x^* + y^*$;
4. $(xy)^* = y^*x^*$.

Définition 1.2.3. A est une C^* -algèbre si A est une algèbre de Banach complexe munie d'une involution telle que :

$$\|x^*x\| = \|x\|^2 \quad \forall x \in A.$$

On remarque que pour $x \in A$, $\|x\|^2 = \|x^*x\| \leq \|x^*\| \|x\|$. D'où :

$$\|x\| \leq \|x^*\| \leq \|x^{**}\| = \|x\|.$$

Ainsi l'involution est une application isométrique.

Exemple 1.2.4. 1. L'algèbre des nombres complexes \mathbb{C} munie de la conjugaison est une C^* -algèbre.

2. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert. Alors l'algèbre des opérateurs bornés sur \mathcal{H} , notée $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, munie de l'adjoint et de la norme opérateur est une C^* -algèbre.

De plus, on voit facilement qu'une sous-algèbre fermée (pour la norme) d'une C^* -algèbre qui est fermée par involution est également une C^* -algèbre. Une telle sous-algèbre se nomme une C^* -algèbre concrète.

Ainsi on constate que l'algèbre des opérateurs compacts, notée $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, est une C^* -algèbre.

3. Soit X un espace localement compact, de Hausdorff. Alors $C_0(X)$, l'espace des fonctions continues s'annulant à l'infini, muni de la conjugaison complexe et la norme supremum est une C^* -algèbre.

4. Cependant $l^p(\mathbb{C})$ avec $1 \leq p < \infty$ n'est pas une C^* -algèbre. En effet, seule la norme l^∞ est une C^* -norme.

En fait, les exemples précédents sont, en substance, essentiellement les seuls pouvant apparaître :

Théorème 1.2.5 (Gelfand). Soit A une C^* -algèbre commutative à unité. Alors il existe un espace compact X tel que A est $*$ -isométriquement isomorphe à $C(X)$.

Théorème 1.2.6 (Gelfand, Naimark, Segal). Pour chaque C^* -algèbre A , il existe un espace de Hilbert \mathcal{H} avec un $*$ -homomorphisme isométrique $\varphi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$. En d'autres termes chaque C^* -algèbre abstraite peut se représenter comme C^* -algèbre concrète. Si A est séparable, alors \mathcal{H} peut être choisi séparable.

Les définitions qui suivent sont analogues à celles pour les opérateurs mais sont ici énoncées dans le cas des C^* -algèbres.

Définition 1.2.7. Soit A une C^* -algèbre à unité.

- i) On dit que $p \in A$ est une projection si c'est un élément idempotent auto-adjoint, i.e. $p^2 = p$ et $p^* = p$;

- ii) On dit que $x \in A$ est une isométrie si $x^*x = 1$;
- iii) On dit que $u \in A$ est un unitaire si c'est une isométrie satisfaisant également $uu^* = 1$;
- iv) Un élément $a \in A$ est dit positif s'il existe $y \in A$ tel que $a = y^*y$. Dans ce cas, remarquons que a est nécessairement auto-adjoint. De manière équivalente, cela revient à dire que a est un élément auto-adjoint avec spectre positif.

Exemple 1.2.8 (Algèbre de matrices). Si A est une C^* -algèbre dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre de matrices $M_n(A) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}^n)$ est une C^* -algèbre.

Définition 1.2.9. On dira que la C^* -algèbre A est de dimension finie si elle est finie en tant qu'espace vectoriel complexe.

Proposition 1.2.10. Soit A une C^* -algèbre de dimension finie. Alors il existe un unique $k \geq 1$ et des entiers (uniques à permutations près) n_1, \dots, n_k tels que : $A \cong M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$.

Il est important de constater que la définition 1.2.7 impose que la C^* -algèbre possède une unité. Certaines C^* -algèbres n'ont pas d'unité. Il suffit de considérer $C_0(X)$, où X est non-compact ou encore $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, avec \mathcal{H} de dimension infinie. Cependant, une C^* -algèbre peut toujours être plongée canoniquement dans une à unité. En effet, soit A une C^* -algèbre et considérons la somme directe d'espaces vectoriels complexes $A \oplus \mathbb{C}$. En définissant l'opération :

$$(x + \lambda)(y + \mu) := xy + \mu x + \lambda y + \lambda\mu, \quad \forall x, y \in A, \lambda, \mu \in \mathbb{C},$$

$A \oplus \mathbb{C}$ devient une algèbre complexe à unité. En la munissant de l'involution et de la norme suivante :

$$(x + \lambda)^* = x^* + \bar{\lambda}, \quad x \in A, \lambda \in \mathbb{C},$$

$$\|x + \lambda\| := \sup_{\|y\|_A=1} \|xy + \lambda y\|_A, \quad x \in A, \lambda \in \mathbb{C},$$

elle devient une C^* -algèbre à unité avec plongement isométrique de A . Elle s'appelle l'unitalisation de A et est notée \tilde{A} . Pour une utilisation ultérieure, on définit le $*$ -homomorphisme $\pi_A : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$ par $\pi_A(x + \lambda) = \lambda$ pour tout $x \in A$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

1.2.2. C^* -algèbres de groupes et produits croisés

On décrit ici une construction produisant une source considérable de C^* -algèbres : le produit croisé. Cette construction permet d'obtenir des C^* -algèbres à partir des groupes. On démarre par une sous-classe importante des produits croisés : les C^* -algèbres de groupes.

On commence la construction dans le cas d'un groupe discret. Pour un groupe discret G , on considère l'algèbre de groupe

$$\mathbb{C}G = \left\{ \sum_{g \in G} a_g g : a_g \in \mathbb{C} \right\},$$

où les sommes formelles sont supposées finies. L'algèbre $\mathbb{C}G$ vient avec la multiplication et l'involution suivantes :

$$\left(\sum_{s \in G} a_s s \right) \left(\sum_{t \in G} a_t t \right) = \sum_{s, t \in G} a_s a_t st, \quad \left(\sum_{s \in G} a_s s \right)^* = \sum_{s \in G} \bar{a}_s s^{-1}.$$

On étend alors la représentation régulière gauche à l'algèbre de groupe :

$$\lambda: \mathbb{C}G \rightarrow \mathcal{B}(l^2(G)).$$

Dans le cas localement compact, on considère l'algèbre des fonctions continues à support compact de G , notée $C_c(G)$, où le produit vient de la convolution, i.e.

$$f * g(t) = \int f(s)g(s^{-1}t)ds, \quad f, g \in C_c(G),$$

et l'involution est donnée par :

$$f^*(t) = \Delta(t)^{-1} \overline{f(t^{-1})}, \quad f \in C_c(G).$$

Comme dans le cas discret, on étend la représentation régulière gauche de G , pour obtenir une action de $C_c(G)$ sur $L^2(G)$:

$$\begin{aligned} \lambda: C_c(G) &\rightarrow \mathcal{B}(L^2(G)), \\ \lambda(f)\xi(t) &= \int_G f(s)\xi(s^{-1}t)ds, \quad f \in C_c(G), \xi \in L^2(G). \end{aligned}$$

Ainsi l'action est simplement donnée par la convolution dans $L^2(G)$. Par conséquent, λ est une représentation fidèle de $C_c(G)$ par des opérateurs bornés.

Définition 1.2.11. La C^* -algèbre réduite de G , notée $C_r^*(G)$, est la complétion de $C_c(G)$ par rapport à la norme :

$$\|x\|_r := \|\lambda(x)\|_{\mathcal{B}(L^2(G))}.$$

Exemple 1.2.12. Considérons un groupe abélien G . Alors la transformée de Fourier fournit un isomorphisme entre $C_r^*(G)$ et $C_0(\hat{G})$. En effet, pour $f \in C_c(G)$, la transformée de Gelfand envoie f vers sa transformée de Fourier \hat{f} dans $C_0(\hat{G})$:

$$\hat{f}(\chi) = \mathcal{F}f(\chi) = \int f(t)\chi(t)dt, \quad \chi \in \hat{G}.$$

On déduit ainsi, par exemple, $C_r^*(\mathbb{Z}^2) \cong C(\mathbb{T}^2)$.

Définition 1.2.13. La C^* -algèbre universelle de G , notée $C^*(G)$, est définie comme la complétion de $C_c(G)$ par rapport à la norme :

$$\|x\|_u := \sup \{ \|\pi(x)\| : \pi \text{ est une } * \text{-représentation non-dégénérée de } C_c(G) \}.$$

La C^* -algèbre universelle est caractérisée par la propriété universelle suivante : tout $*$ -homomorphisme de $C_c(G)$ dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ s'étend en un $*$ -homomorphisme de $C^*(G)$ dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ainsi comme λ est non-dégénérée, on obtient une surjection de $C^*(G)$ dans $C_r^*(G)$. Par conséquent :

$$C_r^*(G) \cong C^*(G)/\text{Ker}(\lambda).$$

Théorème 1.2.14 ([BO08], Théorème 2.6.8). $C^*(G) \cong C_r^*(G)$ si et seulement si G est moyennable.

On définit à présent le produit croisé d'un système dynamique non-commutatif.

Définition 1.2.15. Soit G un groupe et A une C^* -algèbre. Une action de G sur A , notée $\alpha: G \curvearrowright A$, est un homomorphisme de G dans le groupe des $*$ -automorphismes de A . De plus, on impose que la fonction $g \mapsto \alpha_g(a)$ soit continue pour tout $a \in A$ fixé. Une C^* -algèbre équipée d'une telle action s'appelle une G - C^* -algèbre.

Soit A une G - C^* -algèbre. On considère $C_c(G, A)$, l'ensemble des fonctions continues de G à valeurs dans A à support compact, avec un produit de convolution twisté par α :

$$f * g(t) = \int f(s)(\alpha_s(g(s^{-1}t)))ds, \quad f, g \in C_c(G, A).$$

L'involution est donnée par

$$f^*(t) = \Delta(t)^{-1} \alpha_t(f(t^{-1})^*), \quad f \in C_c(G, A).$$

Définition 1.2.16. Une représentation covariante (u, π, \mathcal{H}) d'une G - C^* -algèbre A est la donnée d'une représentation unitaire $u: G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ et d'une $*$ -représentation $\pi: A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ telles que :

$$u(g)\pi(a)u(g)^* = \pi(\alpha_g(a)), \quad g \in G, a \in A.$$

La représentation régulière gauche de $C_c(G, A)$ sur $L^2(G, A)$ est donnée par :

$$\lambda(f)\xi(t) = \int \alpha_{t^{-1}}(f(s))\xi(s^{-1}t)ds, \quad f \in C_c(G, A).$$

Définition 1.2.17. Soit (A, α, G) un C^* -système dynamique.

1. Le produit croisé réduit de A par G , notée $A \rtimes_{\alpha, r} G$, est la complétion de $C_c(G, A)$ par rapport à la norme opérateur sur $L^2(G, A)$ donnée par la représentation régulière gauche.
2. Le produit croisé universel de A par G , noté $A \rtimes_{\alpha} G$, est la complétion de $C_c(G, A)$ par rapport à la norme :

$$\|x\|_u := \sup \{ \|\pi(x)\| : \pi \text{ est un } * \text{-homomorphisme de } C_c(G, A) \text{ dans } \mathcal{B}(\mathcal{H}) \}.$$

Remarque 1.2.18. Lorsque $A = \mathbb{C}$, on retrouve, en considérant l'action triviale de G sur \mathbb{C} , les définitions des C^* -algèbres de groupes.

De plus cette construction permet une meilleure compréhension des C^* -algèbres des groupes qui sont un produit semi-direct. En effet, on considère $G = N \rtimes H$, alors l'action de H sur N induit une structure de H - C^* -algèbre sur $C^*(N)$ en définissant l'action de H sur $C_c(N)$:

$$(h \cdot f)(n) = f(h^{-1} \cdot n), \quad f \in C_c(N).$$

On obtient ainsi la proposition suivante.

Proposition 1.2.19. Si G est un produit semi-direct $G = N \rtimes H$, alors :

$$C_r^*(N) \rtimes_r H \cong C_r^*(G), \quad C^*(N) \rtimes H \cong C^*(G).$$

On termine cette section en s'attardant sur le cas discret. Supposons G discret. Alors les produits croisés peuvent être vus comme la complétion de l'algèbre des sommes formelles

finies de la forme :

$$\sum_i a_i u_{g_i}, \quad a_i \in A, g_i \in G,$$

où l'on associe à chaque élément du groupe $g \in G$, un unitaire abstrait u_g satisfaisant :

$$u_g u_h = u_{gh}, \quad u_g x u_g^* = g \cdot x.$$

En d'autres termes cette construction de C^* -algèbres permet non seulement d'encoder l'action de G sur A , mais également d'avoir une copie de G dans le groupe unitaire et de retrouver A de manière canonique par inclusion.

1.2.3. Algèbres de von Neumann

Il y a plusieurs topologies importantes sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ étant plus faibles que la topologie de la norme. On introduit ici uniquement la topologie faible des opérateurs, et on l'abrègera WOT. Elle est définie comme la topologie la plus faible telle que les ensembles de la forme :

$$W(T, x, y) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : |\langle (T - A)x, y \rangle| < 1\}, \quad T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), x, y \in \mathcal{H}$$

sont des ouverts. L'ensemble des éléments de la forme

$$\bigcap_{i=1}^n W(T_i, x_i, y_i)$$

forment une base pour cette topologie. Ainsi une famille T_α converge WOT vers un opérateur T si et seulement si $\lim_\alpha \langle T_\alpha x, y \rangle = \langle T x, y \rangle$ pour tout $x, y \in \mathcal{H}$.

Définition 1.2.20. Une C^* -sous-algèbre de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ contenant l'identité et fermée dans la WOT topologie est appelée une algèbre de von Neumann.

Soit \mathcal{S} un sous-ensemble de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Le commutant de \mathcal{S} , notée \mathcal{S}' , est l'ensemble des opérateurs qui commutent à \mathcal{S} , i.e.

$$\mathcal{S}' := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : ST = TS \ \forall S \in \mathcal{S}\}.$$

Le commutant d'un sous-ensemble auto-adjoint est auto-adjoint. De plus le commutant est fermé dans la WOT topologie. En particulier, le commutant d'une C^* -algèbre est une algèbre de von Neumann. Le théorème suivant nous donne le lien entre la donnée algébrique et la donnée topologique des algèbres de von Neumann.

Théorème 1.2.21 (Théorème du double commutant de von Neumann). Soit A une C^* -sous-algèbre de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de noyau trivial. Alors

$$A'' = \overline{A}^{\text{WOT}}.$$

Il s'avère qu'il existe plusieurs types d'algèbre de von Neumann et que chaque algèbre de von Neumann se décompose en somme directe d'algèbres de von Neumann de ces types. Ainsi, l'étude des algèbres de von Neumann se réduit à la compréhension de ces types.

Définition 1.2.22. Soit N une algèbre de von Neumann. On note N_p l'ensemble des projections de N . On définit sur N_p une relation d'équivalence de la manière suivante :

Soit $e, f \in N_p$. On dit que $e \sim f$ si et seulement si il existe un élément $u \in N$ tel que $u^*u = e$ et $uu^* = f$. On note $e \leq f$ s'il existe $f_1 \in N_p$ telle que $e \sim f_1$ et $f_1 \leq f$, où l'ordre partiel provient du fait que les projections sont des éléments positifs.

Soit $e \in N_p$. On dit que :

1. e est une projection finie si $e \sim f \leq e$ implique $e = f$. Si e n'est pas finie, alors e est dite infinie ;
2. e est dite purement infinie si il n'existe pas de projection finie non-nulle $f \in N_p$ telle que $f \leq e$;
3. e est dite proprement infinie si fe est infinie pour toute projection centrale f , i.e. $f \in N'$, telle que $fe \neq 0$;
4. e est abélienne si eNe est une algèbre de von Neumann abélienne ;
5. e est minimale si $eNe = \mathbb{C}e$.

Une algèbre de von Neumann N est dite alors finie, resp. infinie, proprement infinie ou purement infinie si la projection identité 1 est finie, resp. infinie, proprement infinie ou purement infinie. De plus N est σ -finie si elle admet au plus un nombre dénombrable de projections orthogonales.

Définition 1.2.23. Soit N une algèbre de von Neumann.

1. N est de type I si chaque projection non-nulle centrale domine une projection non-nulle abélienne ;
2. N est de type II si il n'existe pas de projection abélienne mais que chaque projection non-nulle centrale domine une projection non-nulle finie. On dit que N est de type II_1 si de plus N est finie. On dit que N est de type II_∞ si de plus N n'as pas de projection non-nulle centrale finie ;
3. N est de type III si elle ne possède pas de projection non-nulle finie.

Une algèbre de von Neumann est appelée facteur si son centre est trivial, i.e. $Z(N) = N \cap N' = \mathbb{C}$.

Par exemple, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est une algèbre de von Neumann de type I. Une algèbre de von Neumann abélienne est de la forme $L^\infty(X, \mu)$. Dans l'optique de donner quelques exemples supplémentaires, on définit à présent la trace.

Définition 1.2.24. Une trace τ sur une algèbre de von Neumann N est une application τ sur le cône positif N_+ à valeurs dans $[0, \infty]$ satisfaisant les conditions suivantes :

- (i) $\tau(x + y) = \tau(x) + \tau(y)$ pour tous $x, y \in N_+$;
- (ii) $\tau(\lambda x) = \lambda \tau(x)$, $\lambda \geq 0, x \in N_+$;
- (iii) $\tau(x^*x) = \tau(xx^*)$ pour tout $x \in N$;

avec la convention usuelle $0(+\infty) = 0$. Une trace τ est fidèle si $\tau(x^*x) = 0$ si et seulement si $x = 0$, et normale si $\tau(\sup x_i) = \sup \tau(x_i)$, pour toute famille bornée croissante $\{x_i\}$ dans N_+ . On dit que la trace est finie si $\tau(1) = 1$ et elle est semi-finie si pour tout $x \in N_+$ non-nul, il existe $y \in N_+$ non-nul tel que $y \leq x$ et $\tau(y) < \infty$.

Remarquons que si la trace τ est finie, elle s'étend en une fonctionnelle linéaire positive sur N , aussi notée τ . Autrement dit, une trace finie n'est autre qu'une fonctionnelle linéaire positive avec la propriété (iii).

Soit Γ un groupe discret dénombrable. En considérant un système dynamique (N, Γ, α) , on construit comme dans la section précédente le produit croisé réduit de l'algèbre de von Neumann N par Γ , $N \rtimes_{\alpha, r} \Gamma$. Lorsque $N = \mathbb{C}$ avec action triviale, on trouve l'algèbre de von Neumann de groupe, notée $L(\Gamma)$, qui n'est autre que $\overline{\lambda(\mathbb{C}\Gamma)}^{\text{WOT}}$.

On a alors un critère très utile :

Théorème 1.2.25. Soit N une algèbre de von Neumann abélienne. Soit (N, Γ, α) un système dynamique, où l'action est libre et ergodique. Alors $N \rtimes_{\alpha, r} \Gamma$ est un facteur et son type dépend de α de la manière suivante :

1. $N \rtimes_{\alpha, r} \Gamma$ est de type I si et seulement si N a une projection minimale p telle que $\sum_g \alpha_g(p) = 1$;
2. $N \rtimes_{\alpha, r} \Gamma$ est de type II_1 si et seulement si N possède une trace finie invariante sous α ;
3. $N \rtimes_{\alpha, r} \Gamma$ est de type II_∞ si et seulement si N n'a pas de projection minimale et admet une trace semi-finie, infinie invariante sous α ;
4. $N \rtimes_{\alpha, r} \Gamma$ est de type III si et seulement si N n'admet pas de trace invariante sous α .

Considérons alors Γ un ICC-groupe, i.e. un groupe ayant la propriété que chacune de ses classes de conjugaisons :

$$C(\gamma) := \{h\gamma h^{-1} : h \in \Gamma\}$$

sont infinies, sauf pour $\gamma = e$.

Alors il s'avère que $L(\Gamma)$ est un facteur. Comme $L(\Gamma)$ admet une trace finie :

$$\tau(x) = \langle x\delta_e, \delta_e \rangle = x_e,$$

on a que $L(\Gamma)$ est un facteur de type II_1 . Ainsi on déduit, par exemple que $L(\mathbb{F}_2)$ est de type II_1 .

1.2.4. Actions C_0 sur des algèbres de von Neumann

Le but de cette section est de donner l'analogie des définitions de la section 1.1.1 dans le cadre non-commutatif. Elles seront rappelées et utilisées dans le chapitre 3.

Soit N une algèbre de von Neumann avec préduel séparable, et soit φ un état normal fidèle sur N , i.e. une fonctionnelle linéaire positive de norme 1 et soit ψ un poids normal fidèle semi-fini sur N , i.e. l'extension linéaire d'une application $\psi : N_+ \rightarrow [0, \infty]$ avec $\psi(\lambda x + y) = \lambda\psi(x) + \psi(y)$ et telle que $\mathfrak{p}_\psi = \{x \in N : \psi(x^*x) < \infty\}$ est dense dans N pour la topologie faible. On considère $\|x\|_\varphi$ (respectivement $\|x\|_\psi$) la norme hilbertienne associée à $\varphi(x^*x)^{1/2}$ (respectivement $\psi(x^*x)$, $x \in \mathfrak{p}_\psi$). En complétant alors N (resp. \mathfrak{p}_ψ) par rapport à $\|\cdot\|_\varphi$ (resp. $\|\cdot\|_\psi$), et en étendant la multiplication, on obtient un espace de Hilbert $L^2(N, \varphi)$ (resp. $L^2(N, \psi)$) sur lequel N agit.

Supposons qu'il existe une action $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(N)$ telle que φ est α -invariant : $\varphi \circ \alpha_g = \varphi$ pour tout $g \in G$.

Définition 1.2.26. Sous les hypothèses précédentes, on dit que l'action α est fortement mélangeante pour φ si :

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \varphi(\alpha_g(x)y) = \varphi(x)\varphi(y), \quad \forall x, y \in N.$$

Une suite de projections $(e_k)_{k \geq 1}$ sur N est dite être une suite non-triviale asymptotiquement invariante pour α et φ si :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{g \in K} \|\alpha_g(e_k) - e_k\|_\varphi = 0,$$

pour tout compact K de G et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(e_k)(1 - \varphi(e_k)) > 0.$$

La suite de projections est une suite de Følner si :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{g \in K} \frac{\|\alpha_g(e_k) - e_k\|_\varphi}{\|e_k\|_\varphi} = 0,$$

pour tout compact K de G et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(e_k) = 0.$$

Définition 1.2.27. Sous les hypothèses précédentes, on dit que l'action α est C_0 pour ψ si elle s'étend en une représentation unitaire sur $L^2(N, \psi)$ et

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \psi(\alpha_g(x)y) = 0, \quad \forall x, y \in \mathfrak{p}_\psi.$$

Une suite de projections $(e_k)_{k \geq 1} \subset \mathfrak{p}_\psi$ est dite être une suite presque invariante pour α et ψ si $\|e_k\|_\psi = 1$ pour tout k et :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{g \in K} \|\alpha_g(e_k) - e_k\|_\psi = 0,$$

pour tout compact K de G .

1.3. Introduction à la conjecture de Baum-Connes

Cette partie est consacrée à la mise en place du cadre général de la conjecture de Baum-Connes. On commence par définir le membre de droit de la conjecture, i.e. le côté analytique. Pour se faire, on se base principalement sur [RLLL00]. On présente ensuite les suites exactes à six-termes de Pimsner et Voiculescu [PV80] [PV82]; outils majeurs utilisés dans les calculs explicites. Dans un deuxième temps, on décrit le côté gauche de la conjecture de manière géométrique et analytique. Cette section est essentiellement basée sur [Ise11]. Finalement, on explique la construction de l'application d'assemblage. On donne comme référence [MV03] et [Val02].

1.3.1. K -théorie des C^* -algèbres

L'idée de la K -théorie est d'associer à chaque C^* -algèbre A , deux groupes abéliens $K_0(A)$ et $K_1(A)$ qui reflètent, dans un certain sens, la structure de A . La K -théorie des C^* -algèbres est un outil qui joue un rôle important dans la résolution de plusieurs problèmes en algèbre d'opérateurs. En effet, dans le programme de classification d'Elliott des C^* -algèbres, on peut notamment citer que les AF-algèbres sont classifiables en utilisant uniquement des données venant de K -théorie.

K_0 -groupes

Soit A une C^* -algèbre à unité. On considère le système inductif formé des algèbres de matrices $M_n(A)$ et des $*$ -homomorphismes :

$$\begin{aligned} M_n(A) &\rightarrow M_{n+1}(A) \\ M &\mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

l'inclusion de l'algèbre de matrices $M_n(A)$ dans $M_{n+1}(A)$ pour $n \geq 1$ entier. On note

$$M_\infty(A) = \bigcup_n M_n(A)$$

la limite inductive de ce système. De manière similaire, on note $P_\infty(A)$ la limite inductive associée aux ensembles $P_n(A)$ de toutes les projections de $M_n(A)$, pour $n \geq 1$ entier. On définit une opération binaire :

$$p \oplus q = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}, \quad p, q \in P_\infty(A).$$

On considère la relation d'équivalence de Murray-von Neumann sur $P_\infty(A)$:

$$p \sim q \iff \exists v \in M_\infty(A) : p = vv^*, q = v^*v, \quad p, q \in P_\infty(A).$$

On note $V(A)$ l'ensemble des classes d'équivalence et on définit l'opération :

$$[p] + [q] = [p \oplus q].$$

Ainsi $(V(A), +)$ est un semi-groupe abélien. On peut alors obtenir un groupe abélien en lui appliquant la construction de Grothendieck (voir section 3.1.1 de [RLLL00]).

Définition 1.3.1. Soit A une C^* -algèbre à unité. Alors $K_0(A)$ est la complétion de Grothendieck de $V(A)$.

Proposition 1.3.2 (Image standard de K_0). Soit A une C^* -algèbre à unité. Alors

$$K_0(A) = \{[p]_0 - [q]_0 : p, q \in P_\infty(A)\},$$

où $[\cdot]_0 : P_\infty(A) \rightarrow K_0(A)$ est donnée par :

$$[p]_0 = \gamma([p]), \quad p \in P_\infty(A),$$

avec $\gamma : V(A) \rightarrow K_0(A)$ l'application de Grothendieck.

De plus,

1. $[p \oplus q]_0 = [p]_0 + [q]_0, \quad \forall p, q \in P_\infty(A)$;
2. $[0_A]_0 = 0$, où 0_A est la projection nulle de A ;
3. Si $p, q \in P_n(A)$ pour un certain n et $p \sim_h q$ dans $P_n(A)$, alors $[p]_0 = [q]_0$;
4. Si $p, q \in P_n(A)$ sont mutuellement orthogonales, alors $[p + q]_0 = [p]_0 + [q]_0$.

Si $\phi : A \rightarrow B$ est un $*$ -homomorphisme entre C^* -algèbres à unité, alors il induit un homomorphisme ϕ_* entre les K -groupes. En effet, il suffit de poser

$$\phi_*([p]_0) = [\phi(p)]_0, \quad p \in P_\infty(A).$$

Ceci nous permet de définir le groupe K_0 dans le cas non-unital :

Définition 1.3.3. Soit A une C^* -algèbre. On pose :

$$K_0(A) := \text{Ker}((\pi_A)_* : K_0(\tilde{A}) \rightarrow K_0(\mathbb{C})).$$

De plus, si $\phi: A \rightarrow B$ est un $*$ -homomorphisme entre C^* -algèbres, alors il induit un $*$ -homomorphisme $\tilde{\phi}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$ en posant $\tilde{\phi}(x) = \phi(x) + \lambda$, pour tout $x \in A$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Comme le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C} & \\ \pi_A \nearrow & & \nwarrow \pi_B \\ \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \tilde{B} \end{array}$$

alors ϕ induit un homomorphisme ϕ_* de $K_0(A)$ dans $K_0(B)$ de manière consistante avec le cas unital. Ainsi, K_0 est un foncteur covariant de la catégorie des C^* -algèbres avec comme morphismes les $*$ -homomorphismes, dans la catégorie des groupes abéliens avec les homomorphismes.

Remarque 1.3.4. Cela peut paraître étrange de distinguer le cas unital du cas non-unital dans la définition du groupe K_0 puisqu'il n'est pas nécessaire de posséder une unité pour définir les projections. Cependant, cela s'explique par le but de s'adapter à la K -théorie topologique ; théorie en lien étroit via le résultat suivant.

Théorème 1.3.5 (Serre-Swan). Soit X un espace compact. Alors il y a équivalence de catégories entre deux notions : "les projecteurs dans $M_n(C(X))$ " et "les fibrés vectoriels complexes sur X ". Plus précisément, il existe un isomorphisme de monoïdes :

$$V(C(X)) \cong \text{Vect}_{\mathbb{C}}(X).$$

Ainsi pour X compact, en utilisant la complétion, on a $K_0(C(X))$ est isomorphe à $K^0(X)$, la K -théorie topologique de X , i.e. la complétion des classes d'isomorphismes des fibrés vectoriels complexes sur X avec la somme de Whitney. À présent, pour un espace localement compact X , la K -théorie topologique réduite est définie par

$$K^0(X) := \text{Ker}(i^* : K^0(X_{\infty}) \rightarrow K^0(*)),$$

où X_{∞} est le compactifié à un point de X et $i : * \rightarrow X$ l'adjonction d'un point base sur X . Par conséquent, la définition 1.3.3 se justifie par le but de garder un isomorphisme de Swan dans le cas général. On termine cette section par quelques exemples :

Exemple 1.3.6. 1. $K_0(\mathbb{C}) \cong K_0(C(*)) \cong K^0(*) \cong \mathbb{Z}[1]$;

2. Plus généralement, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$K_0(M_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z},$$

l'isomorphisme venant de la trace canonique sur $M_n(\mathbb{C})$;

3. $K_0(\mathcal{B}(\mathcal{H})) = 0$, pour un espace de Hilbert \mathcal{H} de dimension infinie. Cela s'explique par le fait que $V(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \cong \{0, \dots, \infty\}$. De plus $K_0(\mathcal{K}(\mathcal{H})) = \mathbb{Z}$;

4. Si $X = \mathbb{T}$, le cercle unité, alors $K_0(C(\mathbb{T})) \cong K^0(\mathbb{T}) \cong \mathbb{Z}[1]$.

K_1 -groupes et K -groupes d'ordre supérieur

On vient de voir que le groupe K_0 donne de l'informations sur les projections de notre C^* -algèbre. Le groupe K_1 capture l'information relative aux unitaires.

Pour un espace topologique X , on dit que deux points a, b dans X sont homotopes dans X et on note $a \sim_h b$ si il existe une fonction continue $v: [0, 1] \rightarrow X$ telle que $v(0) = a$ et $v(1) = b$. La relation \sim_h est une relation d'équivalence sur X .

Définition 1.3.7. Soit A une C^* -algèbre, pas nécessairement à unité. On considère le système inductif formé des algèbres de matrices $U_n(\tilde{A})$, i.e. le groupe des unitaires de $M_n(\tilde{A})$, et des inclusions

$$\begin{aligned} U_n(\tilde{A}) &\rightarrow U_{n+1}(\tilde{A}) \\ U &\mapsto \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On note $U_\infty(\tilde{A})$ la limite inductive de ce système. On définit la relation d'équivalence d'homotopie sur $U_\infty(\tilde{A})$:

$$u \sim_1 v \iff \exists m : \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{m \times m} \sim_h \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{m \times m}, \quad u, v \in U_\infty(\tilde{A}).$$

Définition 1.3.8. Pour chaque C^* -algèbre A , on définit le groupe

$$K_1(A) := U_\infty(\tilde{A}) / \sim_1,$$

muni de la loi

$$[u]_1 + [v]_1 = [u \oplus v]_1, \quad u, v \in U_\infty(\tilde{A}).$$

Proposition 1.3.9 (Image standard de K_1). *Soit A une C^* -algèbre. Alors*

$$K_1(A) = \{[u]_1 : u \in U_\infty(\tilde{A})\},$$

et l'application $[\cdot]_1 : U_\infty(\tilde{A}) \rightarrow K_1(A)$ a les propriétés suivantes :

1. $[1]_1 = 0$;
2. Si $u, v \in U_n(\tilde{A})$ et $u \sim_h v$, alors $[u]_1 = [v]_1$;
3. Si $u, v \in U_n(\tilde{A})$, alors $[uv]_1 = [vu]_1 = [u]_1 + [v]_1$.

Ainsi, $K_1(A)$ peut être vu comme un groupe multiplicatif abélien.

Si $\phi : A \rightarrow B$ est un $*$ -homomorphisme entre C^* -algèbres, alors $\tilde{\phi}$ induit un $*$ -homomorphisme de $U_\infty(\tilde{A})$ dans $K_1(B)$ par

$$\phi_*(u) = [\tilde{\phi}(u)]_1, \quad u \in U_\infty(\tilde{A}).$$

Ainsi, K_1 peut être vu comme un foncteur covariant de la catégorie des C^* -algèbres dans celle des groupes abéliens.

Exemple 1.3.10. 1. $K_1(\mathbb{C}) = K_1(M_n(\mathbb{C})) = 0$;

2. Plus généralement, $K_1(\mathcal{B}(\mathcal{H})) = 0$ pour tout espace de Hilbert \mathcal{H} ;

3. $K_1(C(\mathbb{T})) = \mathbb{Z}$.

On peut définir les K -groupes d'ordre supérieur, et en particulier K_1 , à partir de K_0 . Soit A une C^* -algèbre. On considère la suspension de A :

$$SA = \{f \in C(\mathbb{T}, A) : f(1) = 0\}.$$

On pose alors :

$$K_n(A) = K_0(S^n(A)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Résultats fondamentaux

On termine cette partie en énonçant quelques résultats essentiels de K -théorie.

Théorème 1.3.11 (Continuité de la K -théorie). Si A est une C^* -algèbre apparaissant comme limite inductive d'un système $(A_n, \varphi_{n,m})$ de C^* -algèbres, alors $(K_*(A_n), \varphi_{nm,*})$ est un système inductif de groupe abélien et on a :

$$K_*(A) = K_*(\varinjlim A_n) = \varinjlim K_*(A_n).$$

Théorème 1.3.12 (Stabilité de la K -théorie). Soit \mathcal{K} l'algèbre des opérateurs compacts. Il existe un isomorphisme

$$K_*(A) \cong K_*(A \otimes \mathcal{K}),$$

induit par le $*$ -homomorphisme $e: A \rightarrow A \otimes \mathcal{K}$ donné par $a \mapsto a \otimes e_{00}$, où $(e_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ est la base de \mathcal{K} définie par $e_{ij}(e_k) = \delta_{ik}e_j$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.3.13 (Demi-exactitude de la K -théorie). Soit

$$0 \rightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \rightarrow 0,$$

une suite exacte courte de C^* -algèbres. Alors la suite :

$$K_*(I) \xrightarrow{\varphi_*} K_*(A) \xrightarrow{\psi_*} K_*(B),$$

est exacte, i.e. $\text{Im}(\varphi_*) = \text{Ker}(\psi_*)$.

De plus si la suite se scinde, alors la suite se scinde également en K -théorie. En particulier, on a :

$$K_*(A \oplus B) = K_*(A) \oplus K_*(B).$$

Théorème 1.3.14. Le foncteur K_* est homotopiquement invariant, i.e. si ϕ et ψ sont des $*$ -homomorphismes homotopes, alors $\phi_* = \psi_*$.

Théorème 1.3.15 (Suite exacte à 6-termes et naturalité). Soit $0 \rightarrow A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \rightarrow 0$ une suite exacte courte de C^* -algèbres. Alors il existe une suite exacte à 6-termes :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A) & \xrightarrow{\phi_*} & K_0(B) & \xrightarrow{\psi_*} & K_0(C) \\ \partial_1 \uparrow & & & & \downarrow \partial_0 \\ K_1(C) & \xleftarrow{\psi_*} & K_1(B) & \xleftarrow{\phi_*} & K_1(A), \end{array}$$

qui est naturelle dans le sens suivant : si on a une autre suite exacte courte :

$$0 \rightarrow A' \xrightarrow{\phi'} B' \xrightarrow{\psi'} C' \rightarrow 0$$

telle que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\phi} & B & \xrightarrow{\psi} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\phi'} & B' & \xrightarrow{\psi'} & C' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & K_0(A') & \longrightarrow & K_0(B') & \longrightarrow & K_0(C') \\
 & \nearrow & \uparrow & & \nearrow & & \downarrow \\
 K_0(A) & \longrightarrow & K_0(B) & \longrightarrow & K_0(C) & \longrightarrow & K_0(C') \\
 \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & K_1(C') & \longleftarrow & K_1(B') & \longleftarrow & K_1(A') \\
 & \nearrow & \uparrow & & \nearrow & & \downarrow \\
 K_1(C) & \longleftarrow & K_1(B) & \longleftarrow & K_1(A) & \longleftarrow & K_1(A')
 \end{array}$$

Les suites exactes à 6-termes sont des outils particulièrement efficaces pour calculer la K -théorie de C^* -algèbres, notamment quand celles-ci proviennent d'extensions. On verra par la suite les suites exactes à 6-termes de Pimsner-Voiculescu dans le cas des produits croisés par un groupe libre. Pour l'instant, nous illustrons la puissance de ce résultat via l'exemple de $C(\mathbb{T}^n)$. Dans ce but, nous donnons encore deux résultats majeurs.

Théorème 1.3.16. Soit A une C^* -algèbre. Alors il existe un isomorphisme naturel, noté θ , entre $K_1(A)$ et $K_0(SA)$.

Théorème 1.3.17 (Périodicité de Bott). Soit A une C^* -algèbre. Alors il existe un isomorphisme, noté β , entre $K_0(A)$ et $K_1(SA)$.

Ainsi en combinant ces deux résultats on déduit :

$$K_0(A) \cong K_0(S^2(A)), \quad K_1(A) \cong K_1(S^2(A)).$$

Par conséquent la K -théorie des C^* -algèbres est 2-périodique. Regardons à présent la suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow S\mathbb{C} \xrightarrow{i} C(\mathbb{T}) \xrightarrow{e_1} \mathbb{C} \rightarrow 0,$$

où e_1 est l'application d'évaluation en 1. Ainsi, on obtient la suite exacte à 6-termes :

$$\begin{array}{ccccc}
 K_0(S\mathbb{C}) & \xrightarrow{i_*} & K_0(C(\mathbb{T})) & \xrightarrow{(e_1)_*} & K_0(\mathbb{C}) \\
 \partial_1 \uparrow & & & & \downarrow \partial_0 \\
 K_1(\mathbb{C}) & \xleftarrow{(e_1)_*} & K_1(C(\mathbb{T})) & \xleftarrow{i_*} & K_1(S\mathbb{C}),
 \end{array}$$

On a déjà compris que $K_0(\mathbb{C})$ et $K_0(C(\mathbb{T}))$ sont isomorphes à \mathbb{Z} . De plus par les théorèmes 1.3.16 et 1.3.17, on a :

$$K_0(S\mathbb{C}) \cong K_1(\mathbb{C}) = 0, \quad K_1(S\mathbb{C}) \cong K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}.$$

D'où la suite exacte à 6-termes se déroule :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{(e_1)_*} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} K_1(C(\mathbb{T})) \rightarrow 0.$$

Comme $(e_1)_*[1] = [1]$, on déduit que $(e_1)_*$ est l'identité. Par exactitude, ∂_0 est l'application

nulle. Par conséquent i_* est un isomorphisme, ce qui implique :

$$K_1(C(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z}.$$

Un générateur explicite est donc donné par l'inclusion de \mathbb{T} dans \mathbb{C} , noté ι .
On remarque qu'on peut généraliser :

Théorème 1.3.18. Soit X un espace compact non-vide. Alors

$$K_0(C(X \times \mathbb{T})) \cong K_0(C(X)) \oplus K_1(C(X)) \cong K_1(C(X \times \mathbb{T})).$$

En effet, il suffit de considérer la suite exacte courte

$$0 \rightarrow SC(X) \xrightarrow{i} C(X \times \mathbb{T}) \xrightarrow{\psi} C(X) \rightarrow 0,$$

où $\psi(f)(x) = f(x, 1)$, $f \in C(X \times \mathbb{T})$. Cette suite admet une section

$$\sigma(f)(x, \lambda) = f(x), \quad f \in C(X).$$

D'où

$$K_*(C(X \times \mathbb{T})) \cong K_*(SC(X)) \oplus K_*(C(X)).$$

On déduit donc par récurrence :

$$K_*(C(\mathbb{T}^n)) \cong \mathbb{Z}^{2^{n-1}}.$$

1.3.2. Suites exactes à 6-termes de Pimsner-Voiculescu

On présente dans cette partie l'outil principal permettant de calculer les K -groupes de produit croisé d'algèbre par un groupe libre.

$A \rtimes \mathbb{Z}$

Soit A une C^* -algèbre unitaire et $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(A)$ une action de \mathbb{Z} sur A . Par les arguments du chapitre précédent, on voit $A \rtimes_{\alpha, r} \mathbb{Z}$ comme l'algèbre engendrée par A et un unitaire u tel que $\alpha(x) = uxu^*$ pour tout $x \in A$.

Soit S une isométrie non-unitaire et soit $C^*(S)$ la C^* -algèbre générée par S . On peut prendre, par exemple, l'opérateur de décalage à droite sur $l^2(\mathbb{N})$. Posons encore $T := I - SS^*$.

Définition 1.3.19. L'algèbre de Toeplitz pour le couple (A, α) est la C^* -sous-algèbre de $(A \rtimes_{\alpha, r} \mathbb{Z}) \otimes C^*(S)$ générée par $A \otimes I$ et $u \otimes S$. Elle se note $\mathcal{T}_{A, \alpha}$ ou simplement \mathcal{T} lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Comme on peut le lire dans [PV80], il existe un $*$ -homomorphisme $\varphi: \mathcal{K} \rightarrow C^*(S)$ donné par $\varphi(e_{i,j}) = S^i T S^{*j}$ tel que $\text{Im}(\varphi)$ est un idéal fermé engendré par T dans $C^*(S)$. Ainsi, l'algèbre quotient $C^*(S)/\text{Im}(\varphi)$ est isomorphe à $C(\mathbb{T})$, où l'image de S dans $C(\mathbb{T})$ est la fonction identité z sur \mathbb{T} . On obtient donc une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\varphi} C^*(S) \xrightarrow{p} C(\mathbb{T}) \rightarrow 0.$$

Remarquons à présent que \mathcal{T} est invariant par l'automorphisme de $(A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}) \otimes C^*(S)$ donné par $u \otimes I$. Ainsi on peut définir une \mathbb{Z} -action sur \mathcal{T}

$$\tilde{\alpha}(n)(x) = (u \otimes I)^n x (u \otimes I)^{*n}.$$

Soit $J \subset \mathcal{T}$ l'idéal fermé engendré par $1 \otimes T$. On a un *-homomorphisme injectif $\psi: A \otimes \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{T}$ donné par

$$\psi(a \otimes e_{i,j}) = u^i a u^{*j} \otimes \varphi(e_{i,j}).$$

De plus, $\psi(A \otimes \mathcal{K}) = J$ et $((A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}) \otimes \varphi(\mathcal{K})) \cap \mathcal{T} = J$. Par conséquent on obtient la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow (A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}) \otimes \mathcal{K} \rightarrow (A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}) \otimes C^*(S) \rightarrow (A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}) \otimes C(\mathbb{T}) \rightarrow 0.$$

Comme $((A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}) \otimes \varphi(\mathcal{K})) \cap \mathcal{T} = J$ et que l'algèbre \mathcal{T}/J peut être identifiée avec la C^* -sous-algèbre de $A \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{Z} \otimes C(\mathbb{T})$ générée par $A \otimes 1$ et $u \otimes z$ qui est isomorphe à $A \rtimes \mathbb{Z}$, alors on obtient l'extension de Toeplitz :

$$0 \rightarrow A \otimes \mathcal{K} \xrightarrow{\psi} \mathcal{T} \xrightarrow{p} A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

De plus, en regardant $d: A \rightarrow \mathcal{T}$ défini par $d(a) = a \otimes I$ et en considérant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{d} & \mathcal{T} \\ & \searrow i & \downarrow p \\ & & A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z} \end{array}$$

on peut montrer qu'en K -théorie, on obtient le diagramme commutatif pour $j = 0, 1$ (cf. lemme 2.1 et 2.2 de [PV80]) :

$$\begin{array}{ccc} K_j(A \otimes \mathcal{K}) & \xrightarrow{\psi_*} & K_j(\mathcal{T}) \\ \cong \uparrow & & \uparrow d_* \\ K_j(A) & \xrightarrow{id_* - \alpha_*^{-1}} & K_j(A). \end{array}$$

De plus, comme d_* est un isomorphisme (cf. lemme 2.3 [PV80]) on obtient :

Théorème 1.3.20. Sous les isomorphismes induits par d et l'inclusion e de A dans $A \otimes \mathcal{K}$, l'extension de Toeplitz induit la suite exacte à six termes :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A) & \xrightarrow{id - \alpha_*^{-1}} & K_0(A) & \xrightarrow{i_*} & K_0(A \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{Z}) \\ \partial_1 \uparrow & & & & \downarrow \partial_0 \\ K_1(A \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{Z}) & \xleftarrow{i_*} & K_1(A) & \xleftarrow{id - \alpha_*^{-1}} & K_1(A) \end{array},$$

où ∂_1 est l'application d'indice et ∂_0 est l'application exponentielle.

Comme nous voulons faire des calculs explicites, on explique comment fonctionnent ∂_1 et ∂_0 . Considérons premièrement

$$\partial_1 : K_1(A \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{Z}) \rightarrow K_0(A).$$

Pour une classe $[x]_1 \in K_1(A \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{Z})$ donnée par $x \in \mathcal{U}_n(A \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{Z})$, prenons $x^* \in \mathcal{U}_n(A \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{Z})$ de telle sorte que $[x \oplus x^*]_1 = [I_{2n}]_1$. En effet ceci découle du lemme de Whitehead (voir lemme 2.1.5 de [RLLL00] pour plus de détails). Ensuite, il suffit de trouver un $y \in \mathcal{U}_{2n}(\mathcal{T}_{A,\alpha})$ tel que

$$p(y) = x \oplus x^*.$$

En notant p_n la matrice diagonale dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathcal{T}_{A,\alpha})$ formée des n premiers éléments diagonaux par $1 \otimes I$ et les n derniers par 0, on a

$$yp_n y^* - p_n \in \ker(p) = \text{Im}(\psi).$$

Ainsi, il existe un unique $z \in \mathcal{M}_{2n}(A \otimes \mathcal{K})$ tel que

$$\psi(z) = yp_n y^* - p_n.$$

En définissant $P_n = I_n \oplus 0_n \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$, on obtient que $z + P_n$ est une projection dans $\mathcal{M}_{2n}((A \otimes \mathcal{K})^\sim)$ et donc par construction, on obtient :

$$\partial_1([x]_1) = [z + P_n]_0 - [P_n]_0.$$

En guise d'exemple, nous montrons le lemme suivant.

Lemme 1.3.21. *Soit A une C^* -algèbre unitaire. Considérons le produit croisé $A \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{Z}$ où l'action α est représentée par l'unitaire abstrait $u \in C^*\mathbb{Z} \subset A \rtimes \mathbb{Z}$. Alors $\partial_1([u]_1) = -[1]_0$.*

Démonstration. Soit $N = \begin{pmatrix} u \otimes S & 1 \otimes T \\ 0 & u^* \otimes S^* \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_2(\mathcal{T})$. Ainsi, on a bien $p(N) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$. Regardons alors $Np_1 N^* - p_1 = \begin{pmatrix} -1 \otimes T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En prenant $z = \begin{pmatrix} -1 \otimes e_{0,0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(A \otimes \mathcal{K})$, on a bien $\psi(z) = \begin{pmatrix} -1 \otimes T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, on a que $\partial_1([u]_1) = -[-z]_0$. Avec l'isomorphisme $K_0(A \otimes \mathcal{K}) \cong K_0(A)$, l'élément $[-z] = [1 \otimes e_{0,0}]$ correspond à $[1]$. \square

Il existe des projections privilégiées lorsque l'on s'intéresse à ∂_0 .

Définition 1.3.22. Une projection de Rieffel dans $A \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{Z}$ est un élément auto-adjoint et idempotent s'écrivant sous la forme $p = u^* x_1^* + x_0 + x_1 u$, où u est l'unitaire abstrait décrivant l'action de \mathbb{Z} et $x_0, x_1 \in A$.

On déduit immédiatement de $p^* = p$ que x_0 doit être auto-adjoint. et de $p^2 = p$, les trois relations suivantes caractérisant une projection de Rieffel :

- $x_0 = x_0^2 + \alpha^{-1}(x_1^* x_1) + x_1 x_1^*$;
- $x_1 = x_0 x_1 + x_1 \alpha(x_0)$;
- $0 = \alpha^{-1}(x_1) x_1$.

Définition 1.3.23. La projection de support gauche (resp. droit) d'un élément $x \in A$ est définie comme la projection sur la fermeture de $\text{Im}(x)$ (resp. comme la projection sur $(\text{Ker}(x))^\perp$) et est notée l_x (resp. r_x).

De plus, on a $l_x x = x$ et $x r_x = x$ pour tout $x \in A$. Si x est auto-adjoint, alors $r_x = l_x$.

Grâce à la proposition suivante, on connaît l'image par ∂_0 de ces projections.

Proposition 1.3.24 (Pimsner-Voiculescu, [PV80]). *Soit $p = u^* x_1^* + x_0 + x_1 u$ une projection de Rieffel dans $A \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{Z}$. Alors l'unitaire $\exp(2\pi i x_0 l_{x_1})$ est dans A et*

$$\partial_0([p]_0) = [\exp(2\pi i x_0 l_{x_1})],$$

où l_{x_1} est la projection de support gauche de x_1 .

$A \rtimes \mathbb{F}_n$

De manière plus générale mais néanmoins similaire au cas du produit croisé $A \rtimes \mathbb{Z}$, Pimsner et Voiculescu ont obtenu dans [PV82] une nouvelle suite exacte à six termes pour le cas des produits croisés par des groupes libres.

On commence par introduire l'extension de Toeplitz pour les produits croisés avec \mathbb{F}_n . Soit $\{g_1, \dots, g_n\}$ un ensemble de générateurs de \mathbb{F}_n . On considère pour Γ_k le sous-ensemble de \mathbb{F}_n constitué des mots réduits ne terminant pas par g_k^{-1} . On remarque que pour $i \neq j$, on a $e \in \Gamma_i$, $\gamma_j \Gamma_i = \Gamma_i$ et $\gamma_i \Gamma_i = \Gamma_i \setminus \{e\}$.

Soit A une C^* -algèbre à unité vue comme algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert H . On considère une action de $\mathbb{F}_n \curvearrowright A$ notée α . De plus on suppose que l'action α est donnée par une représentation unitaire $g \mapsto v_g$ de \mathbb{F}_n sur H , i.e. $v_g \alpha v_g^* = \alpha(g)a$. On voit $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{F}_n$ comme la C^* -algèbre des opérateurs sur $\ell^2(\mathbb{F}_n, H) \cong \ell^2(\mathbb{F}_n) \otimes H$ générée par les opérateurs $\pi(a) = 1 \otimes a$ et $(u_g k)(h) = v_g k(g^{-1}h)$. On notera u_i pour u_{g_i} .

Chaque Γ_k détermine une extension de Toeplitz de $A \otimes \mathcal{K}$ par $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{F}_n$. Pour le voir, on considère $\ell^2(\Gamma_k, H) \subset \ell^2(\mathbb{F}_n, H)$ et soient ρ_k , U_j ($j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$) et S_k , la restriction de π , resp. u_j ($j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$) et resp. u_k . L'algèbre de Toeplitz $\mathcal{T}_{n,k}$ est la C^* -algèbre générée par $\rho_k(A)$, $U_1, \dots, U_{k-1}, S_k, U_{k+1}, \dots, U_n$. On pose comme dans le cas précédent :

$$T_k = I - S_k S_k^*$$

la projection orthogonale de $\ell^2(\Gamma_k, H)$ sur $\delta_e \otimes H$.

Constatons que $U_i \rho_k(a) U_i^* = \rho_k(\alpha(g_i)a)$ ($i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$) et $S_k^* \rho_k(a) S_k = \rho_k(\alpha(g_k^{-1})a)$. Comme dans la section précédente, on peut montrer que J_k , l'idéal fermé dans $\mathcal{T}_{n,k}$ engendré par T_k , est isomorphe à $\mathcal{K}(\ell^2(\Gamma_k)) \otimes A$. En effet, il suffit de considérer $e(g, g')$ le système de matrices élémentaires et de regarder $\psi_{n,k}$ donnée par :

$$e(g', g) \otimes a \mapsto \omega(g') T_k \omega(g^{-1}) \rho_k(\alpha(g)a),$$

où $\omega(g)$ pour $g = g_{i_1}^{l_1} \dots g_{i_m}^{l_m}$ est obtenu en remplaçant g_j ($j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$) par U_j , g_k^l par S_k^l et g_k^{-l} par S_k^{*l} ($l > 0$).

Le lemme 1.1 de [PV82] nous donne l'extension de Toeplitz :

$$0 \rightarrow A \otimes \mathcal{K} \xrightarrow{\psi_{n,k}} \mathcal{T}_{n,k} \xrightarrow{P_{n,k}} A \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{F}_n \rightarrow 0,$$

où la surjection $P_{n,k}$ est définie par : $P_{n,k}(\rho_k(a)) = \pi(a)$, $P_{n,k}(U_j) = u_j$ ($j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$), $P_{n,k}(S_k) = u_k$.

De plus $\rho_k(A) \cup \{U_j : j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}\}$ détermine un $*$ -homomorphisme injectif $d_k : A \rtimes_{\alpha'} \mathbb{F}_{n-1} \rightarrow \mathcal{T}_{n,k}$. On note i l'inclusion canonique de A dans $A \rtimes_{\alpha'} \mathbb{F}_{n-1}$ de sorte à avoir $d_k \circ i = \rho_k$.

D'autre part en notant $\alpha_k : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(A)$ l'action donnée par $\alpha_k(n) = \alpha(g_k^n)$, on obtient l'algèbre de Toeplitz de 1.3.2 qu'on note $\mathcal{T}(A, \alpha_k, \mathbb{Z})$. Ainsi en utilisant le lemme 1.2 de [PV82] il existe un $*$ -homomorphisme injectif noté t de $\mathcal{T}(A, \alpha_k, \mathbb{Z})$ dans $\mathcal{T}_{n,k}$ de sorte que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
& A & \\
d \swarrow & & \searrow \rho_k \\
\mathcal{T}(A, \alpha_k, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{t} & \mathcal{T}_{n,k}
\end{array}$$

De plus, comme dans la section 1.3.2, on peut montrer qu'on a le diagramme commutatif (cf. lemme 1.3 de [PV82]) pour $j = 0, 1$:

$$\begin{array}{ccc}
K_j(A \otimes \mathcal{K}) & \xrightarrow{\psi_{n,k^*}} & K_j(\mathcal{T}_{n,k}) \\
\cong \uparrow & & \uparrow \rho_{k^*} \\
K_j(A) & \xrightarrow{\text{id}_* - \alpha_{k^*}^{-1}} & K_j(A)
\end{array}$$

Dans le deuxième chapitre de l'article [PV82], les auteurs montrent que d_{k^*} est un isomorphisme pour $j = 0, 1$. Ainsi on obtient le théorème suivant.

Théorème 1.3.25. (Théorème 3.1, [PV82]) L'extension de Toeplitz induit la suite exacte à six termes :

$$\begin{array}{ccccc}
K_0(A) & \xrightarrow{i_* \circ (\text{id}_* - \alpha_{k^*}^{-1})} & K_0(A \rtimes_{\alpha'} \mathbb{F}_{n-1}) & \xrightarrow{k_*} & K_0(A \rtimes_{\alpha, r} \mathbb{F}_n) \\
\partial_1 \uparrow & & & & \downarrow \partial_0 \\
K_1(A \rtimes_{\alpha, r} \mathbb{F}_n) & \xleftarrow{k_*} & K_1(A \rtimes_{\alpha'} \mathbb{F}_{n-1}) & \xleftarrow{i_* \circ (\text{id}_* - \alpha_{k^*}^{-1})} & K_1(A)
\end{array}$$

où ∂_1 est l'application d'indice, ∂_0 est l'application exponentielle et k est l'inclusion naturelle de $A \rtimes \mathbb{F}_{n-1}$ dans $A \rtimes \mathbb{F}_n$.

Il existe une autre suite exacte à six termes. On considère

$$B_n = \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{T}_{n,i} \mid P_{n,1}(t_1) = \dots = P_{n,n}(t_n) \right\}$$

le produit fibré des C^* -algèbres $\mathcal{T}_{n,i}$ au-dessus de $A \rtimes \mathbb{F}_n$. Ainsi, on obtient la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow (A \otimes \mathcal{K})^n \xrightarrow{\bigoplus_{k=1}^n \psi_{n,k}} B_n \xrightarrow{P_n} A \rtimes \mathbb{F}_n \rightarrow 0.$$

On définit $R_n : A \rightarrow B_n$ par

$$R_n(a) = \rho_1(a) \oplus \dots \oplus \rho_n(a).$$

On voit que B_n est généré par $R_n(A)$ et les isométries :

$$\Sigma_{n,j} = U_j \oplus \dots \oplus U_j \oplus S_j \oplus U_j \oplus \dots \oplus U_j \quad (1 \leq j \leq n).$$

Le lemme 3.4 de [PV82] permet d'affirmer que R_n induit en K -théorie un isomorphisme et ainsi on obtient :

Théorème 1.3.26. (Théorème 3.5, [PV82]) Le diagramme suivant est une suite exacte :

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{i=1}^n K_0(A) & \xrightarrow{\sigma_*} & K_0(A) & \xrightarrow{i_*} & K_0(A \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{F}_n) \\ \partial_1 \uparrow & & & & \downarrow \partial_0 \\ K_1(A \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{F}_n) & \xleftarrow{i_*} & K_1(A) & \xleftarrow{\sigma_*} & \bigoplus_{i=1}^n K_1(A) \end{array},$$

où

1.

$$\sigma_* = \sum_{i=1}^n \text{id}_* - \alpha_{i_*}^{-1};$$

2. i_* est l'inclusion de A dans $A \rtimes_{\mathbb{F}_n}$ au niveau de la K -théorie ;

3. Pour $j = 0, 1$:

$$\partial_j = \bigoplus_{i=1}^n \partial_j^i,$$

avec ∂_j^i est l'homomorphisme de connexion en K -théorie entre $K_j(A \rtimes_{\mathbb{F}_n})$ et $K_{j+1}(A \otimes K)$ associé à l'extension de Toeplitz de Γ_i .

On termine cette section par la démonstration du résultat suivant qui généralise le lemme 1.3.21.

Proposition 1.3.27. Soit A une C^* -algèbre unitaire. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on considère $\alpha_i \in \text{Aut}(A)$ de sorte à définir une action α de \mathbb{F}_n sur A . Alors

$$\partial_1 : K_1(A \rtimes \mathbb{F}_n) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n K_0(A),$$

envoie $[u_i]_1$ sur $(0, \dots, 0, \underbrace{-[1]_0}_{i\text{-ème coordonnée}}, 0, \dots, 0)$,

où les unitaires $u_i \in C_r^*(\mathbb{F}_n) \subset A \rtimes_{\mathbb{F}_n}$ proviennent des générateurs de \mathbb{F}_n .

En utilisant le lemme 1.2 de [PV82], il existe un $*$ -homomorphisme injectif $D_n : B_{n-1} \rightarrow B_n$ tel que

$$D_n(R_{n-1}(a)) = R_n(a) \quad \text{et} \quad D_n(\Sigma_{n-1,j}) = \Sigma_{n,j}.$$

Ainsi $R_n = D_n \circ \dots \circ D_1$.

Lemme 1.3.28. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes \mathcal{K})^n & \xrightarrow{\bigoplus_{i=1}^n \psi_{n,i}} & B_n \\ i_k \uparrow & & R_n^k \uparrow \\ A \otimes \mathcal{K} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{T}(A, \alpha_k, \mathbb{Z}), \end{array}$$

où R_n^k est définie par $R_n^k(a) = R_n(a)$ pour $a \in A$ et $R_n^k(S_k) = \Sigma_{n,k}$.

Remarque 1.3.29. Comme $\mathcal{T}(A, \alpha_k, \mathbb{Z})$ est générée par S_k et $\rho_k(A)$, alors R_n^k est bien définie.

Démonstration. Comme $\psi(A \otimes \mathcal{K}) = J_k$ et J_k étant un idéal engendré par T_k , il suffit de vérifier que cela commute pour T_k . Ainsi regardons

$$\begin{aligned} R_n^k \circ \psi(1 \otimes e_{0,0}) &= R_n^k(T_k) \\ &= \rho_1(1) \oplus \dots \oplus \rho_n(1) - U_1 U_1^* \oplus \dots \oplus U_{k-1} U_{k-1}^* \oplus S_k S_k^* \oplus U_{k+1} U_{k+1}^* \oplus \dots \oplus U_n U_n^* \\ &= 0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus T_k \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0 \\ &= \bigoplus_{i=1}^n \psi_{n,i}(0, \dots, 0, 1 \otimes e_{0,0}, 0, \dots, 0) = \bigoplus_{i=1}^n \psi_{n,i}(i_k(1 \otimes e_{0,0})). \end{aligned}$$

□

Lemme 1.3.30. *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{P_n} & A \rtimes_{\alpha} \mathbb{F}_n \\ R_n^k \uparrow & & \uparrow i \\ \mathcal{T}(A, \alpha_k, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{p} & A \rtimes_{\alpha_k} \mathbb{Z}. \end{array}$$

En effet on a $P_n \circ R_n^k(\rho_k(A)) = \pi(A) = i \circ p(A)$ et $P_n \circ R_n^k(S_k) = u_k = i \circ p(S_k)$. Ainsi, on obtient le diagramme commutatif page 104 de [Poo18] :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (A \otimes \mathcal{K})^n & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & A \rtimes_{\alpha, r} \mathbb{F}_n \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow i_k & & \uparrow R_n^k & & \uparrow i \\ 0 & \longrightarrow & A \otimes \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{T}(A, \alpha_k, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & A \rtimes_{\alpha_k} \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \end{array}$$

En combinant avec la naturalité de la suite exacte à six termes, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & K_0((A \otimes \mathcal{K})^n) & \longrightarrow & K_0(B_n) & \longrightarrow & K_0(A \rtimes_{\alpha, r} \mathbb{F}_n) \\ & \nearrow & \uparrow & \nearrow & \uparrow & \nearrow & \downarrow \\ K_0(A \otimes \mathcal{K}) & \longrightarrow & K_0(\mathcal{T}(A, \alpha_k, \mathbb{Z})) & \longrightarrow & K_0(A \rtimes \mathbb{Z}) & \longrightarrow & K_1((A \otimes \mathcal{K})^n) \\ & \nearrow & \uparrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & K_1(A \rtimes_{\alpha, r} \mathbb{F}_n) & \longleftarrow & K_1(B_n) & \longleftarrow & K_1(A \otimes \mathcal{K}) \\ & \nearrow & \uparrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\ K_1(A \rtimes \mathbb{Z}) & \longleftarrow & K_1(\mathcal{T}(A, \alpha_k, \mathbb{Z})) & \longleftarrow & K_1(A \otimes \mathcal{K}). & & \end{array}$$

Comme $K_0(A) \cong K_0(A \otimes \mathcal{K})$ et $K_0((A \otimes \mathcal{K})^n) \cong \bigoplus_{i=1}^n K_0(A \otimes \mathcal{K})$, alors en considérant le carré vertical gauche, on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} K_0(A) & \xrightarrow{\iota_k} & \bigoplus_{i=1}^n K_0(A) \\ \partial_1^k \uparrow & & \uparrow \partial_1 \\ K_1(A \rtimes \langle \gamma_k \rangle) & \longrightarrow & K_1(A \rtimes_{\alpha, r} \mathbb{F}_n). \end{array}$$

Par le lemme 1.3.21, on a $\partial_1^k([u_i]) = -[1] \in K_0(A)$. On conclut en constatant que ι_k envoie $-[1]$ sur la k -ème composante du n -tuple $(0, \dots, 0, -[1], 0, \dots, 0)$.

1.3.3. Description géométrique et analytique de la K -homologie

Dans cette section, nous allons considérer le côté gauche de la conjecture de Baum-Connes. Il existe essentiellement deux approches pour introduire la K -homologie ; celle que l'on appellera géométrique et qui est due aux travaux de Baum et Douglas (voir [BD82]), ainsi que celle de Davis et Lück (voir [DL98]) qui est basée sur la construction d'un foncteur. Afin de pouvoir se référer et utiliser les résultats de O. Isely dans [Ise11], nous introduirons la K -homologie géométrique. De ce fait, cette section est complètement basée sur le chapitre 2 de [Ise11].

Description géométrique de la K -homologie

Algèbres de Clifford et le groupe $\text{Spin}(n)$

On donne une introduction rapide aux algèbres de Clifford et à la géométrie spin. Un lecteur intéressé peut aller voir [LM16] pour de plus amples informations.

Définition 1.3.31. Soit K un corps de caractéristique différente de 2, et soient V un espace vectoriel sur K et $Q: V \rightarrow K$ une forme quadratique. Une algèbre de Clifford pour Q est une K -algèbre associative et unitale $C(Q)$ avec une application linéaire $j: V \rightarrow C(Q)$ telle que pour tout $v \in V$, on a :

$$j(v)^2 = Q(v) \cdot 1_{C(Q)},$$

satisfaisant la propriété universelle suivante : pour chaque K -algèbre associative et unitale A et pour toute application linéaire $i: V \rightarrow A$ telle que $i(v)^2 = Q(v) \cdot 1_A$ pour tout $v \in V$, il existe un unique morphisme d'algèbres $\phi: C(Q) \rightarrow A$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & C(Q) \\ & \searrow i & \downarrow \phi \\ & & A \end{array}$$

L'application j est injective et génère multiplicativement $C(Q)$.

Proposition 1.3.32. Soit K un corps, V un K -espace vectoriel et Q une forme quadratique sur V . Considérons l'algèbre tensorielle de V ,

$$T(V) = K \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^*} \bigotimes_{i=1}^n V,$$

et on note $I(Q)$ l'idéal de $T(V)$ généré par l'ensemble $\{v \otimes v - Q(v)\mid v \in V\}$. Alors $T(V)/I(Q)$ est une algèbre de Clifford pour Q .

La propriété universelle d'une algèbre de Clifford pour une forme quadratique Q implique l'unicité, à isomorphismes d'algèbres près. Ainsi, en parlant de l'algèbre de Clifford pour une forme quadratique Q , on la regardera comme le quotient de la proposition ci-dessus.

Proposition 1.3.33. Soit V un K -espace vectoriel et Q_1, Q_2 deux formes quadratiques sur V . Alors

$$C(Q_1 \oplus Q_2) \cong C(Q_1) \otimes C(Q_2).$$

On rappelle également qu'une forme quadratique sur un K -espace vectoriel V induit une forme bilinéaire B_Q sur V en définissant pour tout $v_1, v_2 \in V$:

$$B_Q(v_1, v_2) = \frac{1}{2}(Q(v_1 + v_2) - Q(v_1) - Q(v_2)).$$

De plus on a, pour $v_1, v_2 \in V$ tels que $B_Q(v_1, v_2) = 0$, l'égalité suivante dans $C(Q)$:

$$v_1 \cdot v_2 = -v_2 \cdot v_1.$$

Théorème 1.3.34. Soient V un K -espace vectoriel de dimension n et Q une forme quadratique. Il existe une base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V telle que la forme bilinéaire associée à Q est donnée par

$$B_Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.

De plus le K -espace vectoriel $C(Q)$ est de dimension 2^n . Une base étant donnée par :

$$\{1\} \cup \{v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_s} \mid 1 \leq s \leq n, 1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n\}.$$

On s'intéresse dans notre cas aux algèbres de Clifford réelles et complexes.

Définition 1.3.35. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'algèbre de Clifford réelle définie négative de \mathbb{R}^n , notée $Cl^-(n)$, est celle associée à la forme quadratique sur \mathbb{R}^n définie par :

$$Q(x_1, \dots, x_n) = -x_1^2 - \dots - x_n^2,$$

pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Par exemple $Cl^-(1)$ est isomorphe à \mathbb{C} via l'application que envoie e_1 sur i . Pour $n = 2$, on a $Cl^-(2)$ est isomorphe à l'algèbre des quaternions \mathbb{H} .

Définition 1.3.36. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'algèbre de Clifford réelle définie positive de \mathbb{R}^n , notée $Cl^+(n)$, est celle associée à la forme quadratique sur \mathbb{R}^n définie par :

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2,$$

pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Pour $n = 1$, on a $Cl^+(1) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ en envoyant e_1 sur $(1, -1)$. Et $Cl^+(2) \cong \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ via l'homomorphisme

$$\begin{aligned} Cl^+(2) &\rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ e_1 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ e_2 &\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Définition 1.3.37. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'algèbre de Clifford complexe de \mathbb{C}^n , notée $Cl^c(n)$, est celle associée à la forme quadratique sur \mathbb{C}^n définie par :

$$Q(z_1, \dots, z_n) = z_1^2 + \dots + z_n^2,$$

pour tout $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

Proposition 1.3.38. Soit Q une forme quadratique sur un espace vectoriel réel V . On définit sur le complexifié $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ de V la forme quadratique complexe $Q_{\mathbb{C}}$ par

$$Q_{\mathbb{C}}(v \otimes z) = Q(v)z^2$$

pour tout $v \in V$ et $z \in \mathbb{C}$. Alors $C(Q_{\mathbb{C}}) \cong C(Q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Il est alors évident que le complexifié de $Cl^+(n)$ ou de $Cl^-(n)$ est, dans les deux cas, $Cl^c(n)$. En effet les isomorphismes sont donnés par :

$$\begin{array}{ccc} Cl^+(n) \otimes \mathbb{C} & \rightarrow & Cl^c(n) \quad \text{et} \quad Cl^-(n) \otimes \mathbb{C} \rightarrow Cl^c(n) \\ e_j \otimes 1 & \mapsto & f_j \quad \quad \quad e_j \otimes 1 \mapsto if_j \end{array}$$

où $(e_j)_{j=1}^n$ et $(f_j)_{j=1}^n$ sont les bases canoniques de \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n .

On a également la proposition suivante.

Proposition 1.3.39. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$Cl^-(n+2) \cong Cl^+(n) \otimes Cl^-(2) \quad \text{et} \quad Cl^+(n+2) \cong Cl^-(n) \otimes Cl^+(2).$$

Ainsi on obtient le corollaire :

Corollaire 1.3.40. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Si $n = 2k$, alors

$$Cl^c(n) \cong \bigotimes_{i=1}^k M_2(\mathbb{C}) \cong \text{End}(\mathbb{C}^{2^k}).$$

2. Si $n = 2k + 1$, alors

$$Cl^c(n) \cong \bigotimes_{i=1}^k M_2(\mathbb{C}) \oplus \bigotimes_{i=1}^k M_2(\mathbb{C}) \cong \text{End}(\mathbb{C}^{2^k}) \oplus \text{End}(\mathbb{C}^{2^k}).$$

Définition 1.3.41. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \{2k, 2k+1\}$, on appelle \mathbb{C}^{2^k} l'espace vectoriel de n -spineurs et on le note Δ_n . La représentation spinorielle de dimension n est la représentation de $Cl^c(n)$ sur Δ_n donnée par l'isomorphisme du corollaire.

On construit alors deux groupes intéressants à partir de $Cl^-(n)$ et $Cl^c(n)$. Un élément de $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est inversible dans $Cl^-(n)$ car :

$$x \cdot \frac{-1}{\|x\|^2} x = \frac{-1}{\|x\|^2} x \cdot x = 1.$$

Ainsi si $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, son inverse est noté $-x$. De même manière un élément inversible dans \mathbb{C}^n est inversible dans $Cl^c(n)$.

Définition 1.3.42. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Le groupe $\text{Pin}(n)$ est défini comme le sous-groupe de $(Cl^-(n))^\times$ généré par les éléments de S^{n-1} , i.e. est formé par les éléments de la forme

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_m,$$

où $m \geq 1$ et $x_i \in S^{n-1}$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$.

2. Le groupe $\text{Spin}(n)$ est le sous-groupe de $\text{Pin}(n)$ engendré par les produits contenant un nombre pair d'éléments de S^{n-1} .
3. Le groupe $\text{Spin}^c(n)$ est le sous-groupe de $(Cl^c(n))^\times$ généré par $\text{Spin}(n)$ et \mathbb{T} .

Comme $\text{Spin}(n) \cap \mathbb{T} = \{1, -1\}$, on obtient alors :

$$\text{Spin}^c(n) \cong (\text{Spin}(n) \times \mathbb{T}) / \{(1, 1), (-1, -1)\}.$$

La topologie sur le groupe $\text{Spin}(n)$ est donnée par la restriction de la représentation spinorielle à $\text{Spin}(n) \subset Cl^-(n) \subset Cl^c(n)$. Ainsi on obtient une représentation fidèle sur Δ_n et par conséquent une application injective de $\text{Spin}(n)$ dans $\mathcal{M}_{2^k}(\mathbb{C})$, où k est tel que $n \in \{2k, 2k + 1\}$. Alors on munit $\text{Spin}(n)$ de la topologie induite de $\mathcal{M}_{2^k}(\mathbb{C})$.

Exemple 1.3.43. Pour $n = 1$, on a vu que $Cl^-(1) \cong \mathbb{C}$. Ainsi $\text{Pin}(1)$ est formé par les produits de i et $-i$ et donc $\text{Pin}(1) = \{1, -1, i, -i\}$. Par conséquent, on a $\text{Spin}(1) \cong \mathbb{Z}_2$ et $\text{Spin}^c(1) = \mathbb{T}$.

Pour $n \geq 1$, on définit l'application linéaire $\gamma : Cl^-(n) \rightarrow Cl^-(n)$ par $\gamma(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\gamma(x \cdot y) = \gamma(x) \cdot \gamma(y)$ pour tout $x, y \in Cl^-(n)$.

Proposition 1.3.44. Soit $n \geq 1$. On définit $(\lambda(x))(y) = x \cdot y \cdot \gamma(x)$ pour $x \in \text{Pin}(n)$ et $y \in \mathbb{R}^n$. Alors l'application λ de $\text{Pin}(n)$ dans $SO(n)$ est continue et surjective. De plus on a :

1. $\ker(\lambda) = \{-1, 1\}$;
2. $\lambda^{-1}(SO(n)) = \text{Spin}(n)$;
3. $\text{Spin}(n)$ est connexe si $n \geq 2$, simplement connexe si $n \geq 3$ et $\lambda|_{\text{Spin}(n)}$ est le revêtement universel $SO(n)$.

Ainsi λ donne une application bien définie continue et surjective :

$$\begin{aligned} \lambda &: \text{Spin}^c(n) \rightarrow SO(n) \\ [x, y] &\mapsto \lambda(x). \end{aligned}$$

Exemple 1.3.45 (Cas de $Cl^-(2)$). On rappelle que $Cl^-(2)$ est isomorphe à \mathbb{H} l'algèbre des quaternions via l'homomorphisme qui envoie e_1 sur i et e_2 sur j . On rappelle que S^1 peut être vu comme l'ensemble

$$\{\cos(\theta)i + \sin(\theta)j \mid \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Comme $(\cos(\theta)i + \sin(\theta)j)(\cos(\theta')i + \sin(\theta')j) = \cos(\pi + \theta - \theta') + \sin(\pi + \theta - \theta')k$, alors $\text{Spin}(2) \cong \mathbb{T}$. Ainsi on a $\text{Spin}^c(2) \cong (\mathbb{T} \times \mathbb{T}) / \{(1, 1), (-1, -1)\}$. De plus pour $x_1 = \cos(\theta)i + \sin(\theta)j$ et $x_2 = \cos(\theta')i + \sin(\theta')j$, on a

$$\begin{aligned} (\lambda(x_1 \cdot x_2))(i) &= \cos(2\theta - 2\theta')i + \sin(2\theta - 2\theta')j \\ (\lambda(x_1 \cdot x_2))(j) &= \cos(2\theta - 2\theta')j + \sin(2\theta - 2\theta')i. \end{aligned}$$

Comme \mathbb{R}^2 est vu dans \mathbb{H} comme le sous-espace engendré par i et j , alors $x \in Spin(2)$ donné par $\theta \in [0, 2\pi]$, $\lambda(x)$ est simplement la rotation d'angle 2θ . En identifiant $SO(2)$ avec \mathbb{T} , l'application λ devient simplement $\lambda(x) = x^2$.

Structure G -Spin^c sur les variétés et K -homologie équivariante

On commence par introduire les fibrés.

Définition 1.3.46. Un fibré est la donnée d'un quadruplet (E, B, F, π) , où E, B, F sont des espaces topologiques, $\pi: E \rightarrow B$ est une surjection continue, appelée application de projection, satisfaisant une condition de trivialisatation locale, précisée ci-dessous. On appelle E l'espace total, B espace de base du fibré et F la fibre. On demande que pour chaque $x \in B$, il existe un voisinage $U \subset B$ de x tel que qu'il existe un homéomorphisme $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ de sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F, \\ \downarrow \pi & \swarrow \pi_1 & \\ U & & \end{array}$$

où π_1 est la projection sur le premier facteur. Ainsi pour tout $p \in B$, $\pi^{-1}(\{p\})$ est homéomorphe à la fibre F . Comme pour chaque fibré $\pi: E \rightarrow B$ est une application ouverte, B est muni de la topologie quotient déterminée par π .

Définition 1.3.47. Soit $\pi: E \rightarrow B$ un fibré de fibre F . Une section est une application continue $s: B \rightarrow E$ telle que pour tout $b \in B$ on a $\pi(s(b)) = b$.

Définition 1.3.48. Un fibré vectoriel réel sur B est la donnée d'un espace total E , d'un espace de base B , d'une application de projection $\pi: E \rightarrow B$ et pour tout $b \in B$ la fibre au dessus de b , $\pi^{-1}(b)$, possède une structure d'espace vectoriel réel de dimension finie, notée E_b . De plus, pour tout $b \in B$, il existe un voisinage U de b , un nombre naturel n et un homéomorphisme $h: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ tel que chaque $h_x: v \mapsto h(x, v)$ soit un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Définition 1.3.49. Un fibré G -principal sur B est la donnée $\pi: P \rightarrow B$ et d'une action continue de G sur P telle que pour tout $b \in B$, il existe un voisinage U de b et un homéomorphisme G -équivariant $\varphi: U \times G \rightarrow \pi^{-1}(U)$.

Autrement dit, c'est un fibré muni d'une action continue de G préservant les fibres, agissant librement et transitivement sur celles-ci de sorte que pour tout $b \in B$, l'application $G \rightarrow P_b$ $g \mapsto yg$ soit un homéomorphisme. Ainsi, P/G est homéomorphe à B .

Soit G un groupe localement compact, Hausdorff et dénombrable à l'infini. On considère alors un fibré vectoriel V sur une G -variété propre, lisse, connexe et avec bord M . On demande de plus que V soit G -équivariant c'est-à-dire que l'action de G sur V envoie linéairement la fibre de x sur la fibre de gx , pour $g \in G$.

Si V est muni d'une orientation G -invariante et d'une structure euclidienne, on notera $SO(V)$ le fibré sur M dont la fibre sur $x \in M$ est formée par la base orthonormale orientée positive de la fibre de x dans V . Ainsi $SO(V)$ est un fibré $SO(n)$ -principal G -équivariant.

Définition 1.3.50. Supposons que V soit comme ci-dessus. Alors une structure G - Spin^c sur V est la donnée d'un fibré P $\text{Spin}^c(n)$ -principal G -équivariant sur M et d'une application G -équivariante Λ de P dans $SO(V)$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} P \times \text{Spin}^c(n) & \longrightarrow & P \\ \downarrow \Lambda \times \lambda & & \downarrow \Lambda \\ SO(V) \times SO(n) & \longrightarrow & SO(V) \longrightarrow M. \end{array}$$

V muni de cette structure a une orientation. En considérant son opposé, i.e. V avec l'orientation inverse, noté $-V$, il est possible de construire une structure G - Spin^c . Dans la littérature, la construction de la structure G - Spin^c sur $-V$ s'appelle la structure G - Spin^c opposée.

Définition 1.3.51. Supposons que V soit muni de deux structures G - Spin^c de fibrés sous-jacents P_1, P_2 et d'applications Λ_1, Λ_2 . On dira que les deux structures sont équivalentes s'il existe un homéomorphisme de fibrés, à la fois G -équivariant et $\text{Spin}^c(n)$ -équivariant, de P_1 vers P_2 tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{f} & P_2 \\ \downarrow \Lambda_1 & & \downarrow \Lambda_2 \\ SO(V) & & \end{array}$$

Lorsque l'on considère une variété riemannienne orientée M , on peut prendre comme V le fibré tangent TM . Dans ce contexte, on dit que M est une G - Spin^c -variété lorsque TM est muni d'une structure G - Spin^c . Si G est le groupe trivial, on dira que M est une Spin^c -variété.

Exemple 1.3.52. On peut mettre une structure Spin^c sur \mathbb{T} . En effet, \mathbb{T} est une variété munie de l'orientation provenant de la base de l'espace tangent au point $e^{2\pi i t} \in \mathbb{T}$ donnée par le chemin :

$$\begin{array}{ccc}]0, 1[& \rightarrow & \mathbb{T} \\ s & \mapsto & \exp(2\pi i(t + s - \frac{1}{2})) \end{array}$$

pour tout $t \in [0, 1]$. En munissant \mathbb{T} de la métrique induite par la restriction de la métrique usuelle de \mathbb{R}^2 , on obtient une variété riemannienne orientée. Le fibré $SO(T\mathbb{T})$ est isomorphe au cercle \mathbb{T} car $T\mathbb{T} \cong \mathbb{T} \times \mathbb{R}$. Ainsi le fibré $\text{Spin}^c(1)$ -principal est $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ vu comme un fibré sur \mathbb{T} par la projection sur la première coordonnée, de fibre $\text{Spin}^c(1) \cong \mathbb{T}$ et l'action donnée par la multiplication standard de \mathbb{T} .

De manière plus générale, on a :

Proposition 1.3.53. Supposons que M est une variété riemannienne orientée telle que son fibré tangent TM soit trivial, i.e. $TM = M \times \mathbb{R}^n$. Alors M possède une structure Spin^c .

En effet, il suffit de prendre le fibré trivial $\text{Spin}^c(n)$ -principal $P = M \times \text{Spin}^c(n)$ et de prendre la G -application $Id \times \lambda : P \rightarrow M \times SO(n) = SO(TM)$.

Si l'on suppose que M possède une structure G - Spin^c , alors il est clair qu'une G -sous-variété N de même bord que M hérite de cette structure par restriction.

Proposition 1.3.54. *Une structure $G\text{-Spin}^c$ sur M induit une structure de $G\text{-Spin}^c$ sur son bord ∂M .*

La dernière propriété de stabilité de cette structure dont nous avons besoin est la suivante :

Proposition 1.3.55. *Supposons que le bord de M ne soit pas vide et que G agisse de manière triviale sur $[0, 1]$. Alors une structure $G\text{-Spin}^c$ sur M induit une structure $G\text{-Spin}^c$ sur $M \times [0, 1]$.*

On peut à présent définir les K -cycles G -équivalents.

Définition 1.3.56. Soient X un G -espace et Y un sous-espace fermé de X qui est G -invariant. Un K -cycle G -équivalent sur le couple (X, Y) est un triplet (M, E, ϕ) , où :

- (1) M est une G -variété propre, lisse, G -compacte, avec bord, ayant une structure $G\text{-Spin}^c$;
- (2) E est un fibré vectoriel complexe sur M qui est G -équivalent ;
- (3) ϕ est une G -application de M dans X telle que $\phi(\partial M) \subset Y$.

De plus on dira que le K -cycle est pair, respectivement impair, si chaque composante connexe de M est de dimension paire, respectivement impaire.

Un exemple simple d'un tel K -cycle est de partir d'un G -espace X qui est lui-même une variété satisfaisant les conditions de (1). Ainsi $(X, X \times \mathbb{C}^k, Id_X)$ est un K -cycle sur $(X, \partial X)$.

Lorsque l'on considère le couple (X, \emptyset) , on parlera de K -cycles sur X au lieu de sur (X, \emptyset) . Dans ce contexte un tel K -cycle est nécessairement composé d'une variété sans bord.

On aimerait mettre à présent une relation d'équivalence sur l'ensemble des K -cycles sur (X, Y) .

Définition 1.3.57. Soient X un G -espace et Y un sous-espace fermé de X qui est G -invariant. Supposons que (M_1, E_1, ϕ_1) et (M_2, E_2, ϕ_2) sont deux K -cycles sur (X, Y) avec P_1 et P_2 comme fibrés G -équivalents $\text{Spin}^c(n)$ -principaux. Alors (M_1, E_1, ϕ_1) et (M_2, E_2, ϕ_2) sont isomorphes s'il existe un difféomorphisme G -équivalent $f : M_1 \rightarrow M_2$ tel que :

1. $P_1 \cong f^*(P_2)$ en tant que fibrés G -équivalents $\text{Spin}^c(n)$ -principaux sur M_1 .
2. $E_1 \cong f^*(E_2)$ en tant que fibrés vectoriels complexes G -équivalents sur M_1 .
3. $\phi_1 = \phi_2 \circ f$.

On remarque que deux K -cycles isomorphes doivent avoir la même parité.

Définition 1.3.58. Soient X un G -espace et Y un sous-espace fermé de X qui est G -invariant. Un bordisme pour la paire (X, Y) est la donnée suivante :

1. L est une G -compact $G\text{-Spin}^c$ -variété propre, lisse et avec bord ;
2. un fibré vectoriel complexe G -équivalent F sur L ;
3. une G -application $\psi : L \rightarrow X$;
4. une fonction G -invariante et lisse $h : \partial L \rightarrow \mathbb{R}$ ayant -1 et 1 comme valeur régulière et telle que $\psi(h^{-1}([-1, 1])) \subset Y$.

La dernière condition implique que $M_+ := h^{-1}([1, \infty[)$ et $M_- = h^{-1}(]-\infty, -1])$ sont des sous-variétés G -invariantes de bords ∂L . Ainsi $(M_+, F|_{M_+}, \psi|_{M_+})$ et $(M_-, F|_{M_-}, \psi|_{M_-})$ sont deux K -cycles sur (X, Y) par les propriétés de stabilité de la structure de $G\text{-Spin}^c$. Dans ce cas, on dit que $(M_+, F|_{M_+}, \psi|_{M_+})$ est bordant à $(-M_-, F|_{M_-}, \psi|_{M_-})$.

Considérons une dernière opération sur ces K -cycles. Soient X un G -espace, Y un sous-espace

fermé de X qui est G -invariant et (M, E, ϕ) un K -cycle sur (X, Y) . On suppose qu'on dispose d'un fibré vectoriel réel de dimension paire V sur M qui est muni d'une structure de G -Spin^c. On peut alors considérer $V \oplus \mathbb{R}$ et le munir d'une structure de G -Spin^c. On restreint alors cette structure au fibré en disques de $V \oplus \mathbb{R}$ et l'on considère son bord M_V , qui est le fibré en sphères de $V \oplus \mathbb{R}$. Par la proposition 1.3.54, on peut également munir M_V d'une structure de G -Spin^c et l'on note P_V son fibré G -équivariant Spin^c(n)-principal. On construit alors un fibré vectoriel complexe G -équivariant $P_V \times_{\text{Spin}^c(n)} \Delta_n$ que l'on appelle fibré spinoriel. Comme n est pair la représentation spinorielle de Spin(n) se décompose en somme directe de deux sous-représentations irréductibles, ce qui induit une \mathbb{Z}_2 graduation du fibré spinoriel. Regardons alors la partie graduée paire du fibré spinoriel associé à la structure de G -Spin^c et notons-la S_V . Considérons de plus S_V^* le fibré dual de S_V . On a alors la proposition suivante :

Proposition 1.3.59. $(M_V, S_V^* \otimes \pi_V^*(E), \phi \circ \pi_V)$ est un K -cycle sur (X, Y) , où $\pi_V : M_V \rightarrow M$ est la restriction de la projection de $V \oplus \mathbb{R}$ sur M .

Définition 1.3.60. Soient X un G -espace et Y un sous-espace fermé de X qui est G -invariant. Sur la classe de tous les K -cycles sur (X, Y) , on considère la relation d'équivalence générée par les isomorphismes et les trois relations élémentaires préservant la parité suivantes :

1. Si (M, E_1, ϕ) et (M, E_2, ϕ) sont deux K -cycles, alors

$$(M \amalg M, E_1 \amalg E_2, \phi \amalg \phi) \sim (M, E_1 \oplus E_2, \phi);$$

2. Si (M_1, E_1, ϕ_1) et (M_2, E_2, ϕ_2) sont bordants, alors

$$(M_1, E_1, \phi_1) \sim (M_2, E_2, \phi_2);$$

3. Si (M, E, ϕ) est un K -cycle et V est un fibré vectoriel de dimension paire muni d'une structure de G -Spin^c, alors

$$(M, E, \phi) \sim (M_V, S_V^* \otimes \pi_V^*(E), \phi \circ \pi_V).$$

On note alors $K_0^G(X, Y)$, respectivement $K_1^G(X, Y)$, l'ensemble des classes d'équivalences des K -cycles G -équivariants pairs, respectivement impairs.

Sur ces ensembles, on définit une addition :

$$[M_1, E_1, \phi_1] + [M_2, E_2, \phi_2] := [M_1 \amalg M_2, E_1 \amalg E_2, \phi_1 \amalg \phi_2].$$

Cette opération est associative et commutative. Il est clair que le neutre de cette loi est $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ et que l'inverse de $[M, E, \phi]$ est donnée par $[-M, E, \phi]$, où $-M$ est simplement M muni de la structure de G -Spin^c opposée. Ainsi on obtient le résultat suivant.

Théorème 1.3.61. Pour chaque couple (X, Y) avec X un G -espace et Y un sous-espace fermé G -invariant, les ensembles $K_0^G(X, Y)$ et $K_1^G(X, Y)$ sont des groupes abéliens pour la loi définie ci-dessus. Ils forment ce qu'on appelle la K -homologie géométrique G -équivariante de la paire (X, Y) .

Lorsque $Y = \emptyset$, on écrit $K_i^G(X)$ à la place de $K_i^G(X, \emptyset)$ pour $i = 0, 1$.
Soit (X, Y) et (X', Y') deux paires formées de G -espaces et sous-espaces G -invariants. Soit $f :$

$X \rightarrow X'$ une G -application telle que $f(Y) \subset Y'$. Alors f induit un homomorphisme pour $j = 0, 1$

$$f_* : K_j^G(X, Y) \rightarrow K_j^G(X', Y')$$

en posant simplement pour $[M, E, \phi] \in K_j^G(X, Y)$:

$$f_*([M, E, \phi]) = [M, E, f \circ \phi].$$

Ainsi cette K -homologie G -équivariante peut être vue, en analogie à la K -théorie, comme un foncteur covariant entre la catégorie des paires formées d'un G -espace et d'un sous-espace fermé G -invariant et la catégorie des groupes abéliens.

Proposition 1.3.62. *Soient X, X' deux G -espaces et f_1, f_2 deux G -applications de X dans X' . Si f_1 et f_2 sont G -homotopes, alors $(f_1)_* = (f_2)_*$. En particulier si X et X' ont même G -type d'homotopies, alors $K_j^G(X) \cong K_j^G(X')$, pour $j = 0, 1$.*

Rappelons qu'une G -application f est une application continue et G -équivariante entre deux G -espaces X, X' , i.e. $f(gx) = gf(x)$ pour tout $g \in G$ et $x \in X$. Deux G -applications sont dites homotopes s'il existe une homotopie G -équivariante entre elles, où G agit trivialement sur $[0, 1]$. Afin de faire un lien avec la K -théorie des C^* -algèbres, il nous faut faire un petit aparté sur la KK -théorie de Kasparov.

KK -théorie de Kasparov et K -homologie Analytique

La KK -théorie permet de généraliser à la fois la K -théorie et la K -homologie. Elle a été introduite par G. Kasparov dans les années 80 et elle est inspirée de la théorie sur les modules de Fredholm due à Atiyah lors de ses travaux sur son célèbre théorème d'indice.

Définition 1.3.63. Soit A une C^* -algèbre. Un Hilbert C^* -module sur A est un A -module droit H venant avec un produit scalaire à coefficients dans A , i.e. une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow A$ satisfaisant pour tout $\xi, \xi', \eta \in H$ et $x \in A$:

- $\langle \xi + \xi', \eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle + \langle \xi', \eta \rangle$;
- $\langle \xi, \eta x \rangle = \langle \xi, \eta \rangle x$;
- $\langle \xi, \eta \rangle = \langle \eta, \xi \rangle^*$;
- $\langle \xi, \xi \rangle \geq 0$ dans A et $\langle \xi, \xi \rangle = 0$ si et seulement si $\xi = 0$,

et tel que H soit complet pour la norme :

$$\|\xi\| := \|\langle \xi, \xi \rangle\|^{1/2}$$

pour tout $\xi \in H$.

Ainsi on remarque qu'un Hilbert C^* -module sur \mathbb{C} est simplement un espace de Hilbert complexe. C'est donc une généralisation du concept d'espace de Hilbert. De plus si H est un espace de Hilbert alors on remarque que $H \otimes_{\mathbb{C}} A$ est un C^* -module sur A en définissant le produit scalaire :

$$\langle \xi \otimes x, \eta \otimes y \rangle := \langle \xi, \eta \rangle \otimes x^* y$$

pour tout $\xi, \eta \in H$ et $x, y \in A$.

Définition 1.3.64. Soit H un Hilbert C^* -module sur A .

1. On note $\mathcal{L}_A(H)$ l'ensemble des opérateurs linéaires de H dans H ayant un adjoint, i.e. $\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, T^*\eta \rangle$ pour tout $\xi, \eta \in H$. Ainsi $\mathcal{L}_A(H)$ muni de la norme opérateur est une C^* -algèbre.
2. Un opérateur $T \in \mathcal{L}_A(H)$ est de rang fini s'il s'écrit comme combinaison linéaire d'opérateurs de la forme $T_{\xi, \xi'}$ où

$$T_{\xi, \xi'}(\eta) = \xi' \langle \xi, \eta \rangle$$

pour $\xi, \xi' \in H$.

3. Un opérateur $T \in \mathcal{L}_A(H)$ est compact s'il est la limite en norme d'opérateurs de rang fini.

Ces définitions sont simplement des généralisations du cas d'un espace de Hilbert.

Définition 1.3.65. Soient A et B deux G - C^* -algèbres. On appelle un cycle de Kasparov G -équivariant sur (A, B) la donnée du triplet (H, π, F) , où :

1. H est un Hilbert C^* -module sur B muni d'une représentation unitaire ρ de G dans le sens

$$\langle \rho(g)(\xi), \rho(g)(\eta) \rangle = g \cdot \langle \xi, \eta \rangle$$

pour tout $g \in G$ et $\xi, \eta \in H$.

2. π est une représentation de la C^* algèbre A sur H , i.e. un $*$ -homomorphisme de A dans $\mathcal{L}_B(H)$, qui est covariant dans le sens

$$\rho(g)\pi(x)\rho(g^{-1}) = \pi(g \cdot x)$$

pour tout $g \in G$ et $x \in A$.

3. F est un opérateur dans $\mathcal{L}_B(H)$ tel que l'application de G dans $\mathcal{L}_B(H)$ définie par $g \mapsto \rho(g)F\rho(g^{-1})$ soit fortement continue et tel que pour tout $x \in A$ et $g \in G$ les quatre opérateurs :

$$\pi(x)(F^2 - \text{Id}_H), \pi(x)(F^* - F), [\pi(x), F], [\rho(g), F]$$

sont compacts.

De plus si H est \mathbb{Z}_2 -gradué et que ρ et π préservent la graduation tandis que F la renverse, on dit que le cycle est pair. Sinon il est impair.

On peut définir une opération sur les K -cycles en prenant la somme directe des Hilbert C^* -modules, représentations et opérateurs.

En guise d'exemple prenons un $*$ -homomorphisme entre deux G - C^* -algèbres A, B que l'on note ϕ . Alors $(B, \phi, 0)$ est un cycle impair sur (A, B) . En effet B peut être vu comme un Hilbert C^* -module sur lui-même. L'action de G sur B donne une représentation sur B . De plus ϕ donne une représentation de A sur B par les opérateurs multiplications.

Exemple 1.3.66. On considère M une variété compacte et soient E, E' deux fibrés vectoriels sur M . On suppose que G est trivial. Posons $\Gamma^\infty(E)$ (resp. $\Gamma^\infty(E')$) l'ensemble des sections lisses sur E (resp. sur E') et regardons :

$$D : \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(E')$$

un opérateur différentiel elliptique de degré 1. Considérons alors le Hilbert \mathbb{Z}_2 -gradué $\mathcal{H} := L^2(M, E) \oplus L^2(M, E')$. Soit alors $\pi : C(M) \rightarrow \mathcal{H}$ le $*$ -homomorphisme donnée par les opérateurs

de multiplication ponctuelle. Soit $\Xi : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ une fonction impaire lisse positive sur \mathbb{R}_*^+ et telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} \Xi(x) = 1$. Définissons alors l'opérateur

$$F := \begin{pmatrix} 0 & \Xi(D)^* \\ \Xi(D) & 0 \end{pmatrix}$$

où $\Xi(D)$ est donné par le calcul fonctionnel continu.

On peut démontrer que (H, π, F) est un cycle pair sur $(C(M), \mathbb{C})$.

On veut à présent, comme dans le cas des K -cycles géométriques, mettre une relation d'équivalence.

Définition 1.3.67. Soit A, B deux G - C^* -algèbres et $(H, \pi, F), (H', \pi', F')$ deux cycles de Kasparov sur (A, B) de même parité.

1. Le cycle (H, π, F) est dit dégénéré si chacun des quatre opérateurs compact de la définition 1.3.65 est nul pour tout $g \in G$ et $x \in A$.
2. Les deux cycles sont dit homotopes si $H = H', \rho = \rho', \pi = \pi'$, et qu'il existe un chemin continu pour la norme opérateur $(F_t)_{t \in [0,1]} \subset \mathcal{L}_B(H)$ tel que $F_0 = F$ et $F_1 = F'$ et que pour tout $t \in [0, 1]$ le triplet (H, π, F_t) est un cycle sur (A, B) de même parité.
3. Les deux cycles sont dit unitairement isomorphes s'il existe une application continue, bijective et A -linéaire $\psi : H \rightarrow H'$ qui préserve le produit scalaire, et dans le cas pair la graduation, telle que $\rho'(g) \circ \psi = \psi \circ \rho(g), \pi'(x) \circ \psi = \psi \circ \pi(x)$ et $F' \circ \psi = \psi \circ F$ pour tout $g \in G$ et $x \in A$.
4. Finalement les cycles (H, π, F) et (H', π', F') sont équivalents s'il existe deux cycles dégénérés (H_0, π_0, F_0) et (H'_0, π'_0, F'_0) de même parité tels que

$$(H, \pi, F) \oplus (H_0, \pi_0, F_0) \quad \text{et} \quad (H', \pi', F') \oplus (H'_0, \pi'_0, F'_0)$$

sont homotopes à isomorphismes unitaires près.

C'est une relation d'équivalence et on a :

Théorème 1.3.68. Avec les notations de la définition ci-dessus, l'ensemble des classes d'équivalence des cycles pairs, respectivement impairs, est un groupe abélien avec la loi provenant de la somme directe de cycles, noté $KK_0^G(A, B)$, respectivement $KK_1^G(A, B)$. Ces deux groupes sont appelés les KK -groupes G -équivariants de (A, B) .

Il est clair, par la définition de la relation d'équivalence, que le neutre de ces groupes est la classe représentant les cycles dégénérés. De plus, si $(H_0 \oplus H_1, \pi_0 \oplus \pi_1, F)$ est un cycle pair de Kasparov sur (A, B) , où F est donné par $F = \begin{pmatrix} 0 & F_{10} \\ F_{01} & 0 \end{pmatrix}$ respectivement à la graduation du Hilbert C^* -module. Alors l'inverse est donné par $(H_1 \oplus H_0, \pi_1 \oplus \pi_0, F')$ avec $F' = \begin{pmatrix} 0 & F_{01} \\ F_{10} & 0 \end{pmatrix}$ où l'on a simplement renversé la graduation. Pour le voir, il suffit de considérer la somme des deux cycles et de montrer que ce cycle est homotope à un cycle dégénéré. Dans le cas non-gradué, l'inverse de $[H, \pi, F]$ est donné par $[H, \pi, -F]$.

Dans ce contexte, on a également la notion de foncteur qui intervient. Soient A, B, C trois

G - C^* -algèbres et soit (H, π, F) un cycle sur (A, B) . En considérant un $*$ -homomorphisme G -équivariant $\phi: C \rightarrow A$, on peut construire à partir de (H, π, F) un cycle de Kasparov G -équivariant de même parité sur (C, B) . En effet, il suffit de considérer le triplet $(H, \pi\phi, F)$. Ainsi ϕ induit un homomorphisme

$$\phi^* : KK_j^G(A, B) \rightarrow KK_j^G(C, B)$$

pour $j = 0, 1$.

De l'autre côté en considérant un $*$ -homomorphisme G -équivariant $\phi: B \rightarrow C$, on peut construire naturellement un Hilbert C^* -module sur C en considérant $H \otimes_B C$. Ainsi $(H \otimes_B C, \pi \otimes \text{Id}_C, F \otimes \text{Id}_C)$ est un cycle sur (A, C) de même parité que (H, π, F) . Donc ϕ induit un homomorphisme

$$\phi_* : KK_j^G(A, B) \rightarrow KK_j^G(A, C)$$

pour $j = 0, 1$.

Ainsi KK_j^G peut être vu comme un bifoncteur, contravariant en la première variable et covariant en la seconde, de la catégorie des G - C^* -algèbres et des G -équivariants $*$ -homomorphismes dans la catégorie des groupes abéliens et des homomorphismes.

De plus on a la propriété :

$$KK_j^G(A, \mathbb{C}) \oplus KK_j^G(B, \mathbb{C}) \cong KK_j^G(A \oplus B, \mathbb{C}).$$

Donnons à présent la définition de la K -homologie analytique.

Définition 1.3.69. Soit A une G - C^* -algèbre. La K -homologie analytique G -équivariante de A est le groupe \mathbb{Z}_2 gradué $KK_0^G(A, \mathbb{C}) \oplus KK_1^G(A, \mathbb{C})$.

On termine cette sous-section par quelques résultats importants permettant de faire le lien entre la K -théorie analytique des C^* -algèbres et cette K -homologie analytique.

Théorème 1.3.70 (Isomorphisme de Bott). Soit A une G - C^* -algèbre et $j \in \{0, 1\}$. Alors on a :

$$KK_j^G(SA, \mathbb{C}) \cong KK_{1-j}^G(A, \mathbb{C}),$$

où SA est la suspension de A .

Théorème 1.3.71. Soit A une C^* -algèbre. Alors

$$KK_j(\mathbb{C}, A) \cong K_j(A)$$

pour $j = 0, 1$.

On termine cette section par l'exemple de $C(\mathbb{T})$. Par le résultat précédent, on déduit :

$$KK_0(C(\mathbb{T}), \mathbb{C}) \cong \mathbb{Z} \cong KK_1(C(\mathbb{T}), \mathbb{C}).$$

D'un côté, un générateur de $KK_0(C(\mathbb{T}), \mathbb{C})$ peut être donné par le K -cycle dégénéré $[\mathbb{C} \oplus 0, e_1 \oplus 0, 0]$, où e_1 est l'évaluation en $1 \in \mathbb{T}$. De l'autre côté, en suivant [MV03], un générateur de $KK_1(C(\mathbb{T}), \mathbb{C})$ est donné en considérant l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$ avec la représentation par multiplication ponctuelle de $C(\mathbb{T})$ sur $L^2(\mathbb{T})$. L'opérateur F est donné par :

$$F(e_k) = \text{sgn}(k)e_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

où $\{e_k = e^{ikt} : k \in \mathbb{Z}\}$ est la base de $L^2(\mathbb{T})$ et sgn est la fonction signe.

1.3.4. Espaces propres, G -CW-complexes et Espace classifiant

Avant d'établir un lien entre les différentes théories de K -homologie introduites, on donne une introduction à certaines notions capitales lorsque l'on s'intéresse à définir le côté topologique de Baum-Connes : l'espace classifiant des actions propres.

On commence par la notion de propriété d'un espace.

Définition 1.3.72. Un G -espace X est dit propre si pour tout $x \in X$ il existe un triplet (V, H, f) où :

- V est un voisinage ouvert de x tel que $G \cdot V \subset V$;
- H est un sous-groupe compact;
- $f : V \rightarrow G/H$ est une G -application.

Si de plus l'espace X est localement compact, alors X est propre si et seulement si l'application suivante

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \rightarrow & X \times X \\ (g, x) & \mapsto & (g \cdot x, x) \end{array}$$

est propre, i.e. la pré-image d'un compact de $X \times X$ est compacte dans $G \times X$.

Définition 1.3.73. Un G -espace propre X est universel pour les actions propres de G si pour tout G -espace Y , il existe une G -application de Y dans X , unique à G -homotopies près.

Proposition 1.3.74. *Il existe un G -espace universel pour les actions propres de G . On le note $\underline{E}G$.*

Pour G discret, un modèle de cet objet peut être construit par functorialité en utilisant les co-ensembles G/H avec H sous-groupe fini de G . Pour plus de détails sur la construction, on peut lire [MV03] page 6.

Définissons à présent un G -CW-complexe.

Définition 1.3.75. Un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow f \\ C & \xrightarrow{g} & D, \end{array}$$

est un diagramme de push-out si pour chaque paire d'applications $\varphi : B \rightarrow X$ et $\psi : C \rightarrow X$ telles que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \\ C & \xrightarrow{\psi} & X, \end{array}$$

il existe une unique application $\eta : D \rightarrow X$ telle que $\eta \circ f = \varphi$ et $\eta \circ g = \psi$.

Définition 1.3.76. Un G - CW -complexe X est un G -espace venant avec une filtration G -invariante

$$X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset \bigcup_{n \geq 0} X^n = X$$

et donc muni de la topologie finale. De plus, pour tout n , X^n est obtenu de X^{n-1} en attachant des cellules G -équivariante de dimension n , i.e. il existe un diagramme de G -push-out

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n \times S^{n-1} & \longrightarrow & X^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_n \times B^n & \longrightarrow & X^n, \end{array}$$

où Δ_n est un G -espace discret pour tout n .

On remarque que si G est le groupe trivial, alors on obtient la définition d'un CW -complexe standard. Ainsi X^n est appelé le n -squelette de X et X est de dimension n si $X^n = X$ mais $X^{n-1} \neq X$.

Lemme 1.3.77. *Si G est un groupe discret, alors un G - CW -complexe est propre si et seulement si tous ses stabilisateurs sont finis.*

Définition 1.3.78. Un CW -complexe avec groupe fondamental G et comme revêtement universel contractile EG est appelé l'espace classifiant de G , ou un modèle pour BG , que l'on note BG .

On donne une caractérisation d'être universel lorsque G est discret afin de trouver quelques exemples :

Théorème 1.3.79. Soit X un G -espace propre métrisable avec X/G paracompact. Alors X est universel si et seulement si d'une part pour tout sous-groupe fini H de G , on a les H -points fixes $X^H \neq \emptyset$ et d'autre part les projections canoniques $X \times X \rightarrow X$ sont G -homotopes.

On rappelle ici la définition de paracompact :

Définition 1.3.80. Un espace X est paracompact si tout recouvrement ouvert possède un raffinement localement fini, i.e. pour $\{U_\alpha\}$ un recouvrement ouvert, il existe un autre recouvrement ouvert $\{V_\beta\}$ tel que pour tout α il existe β avec $V_\beta \subset U_\alpha$ et pour tout x dans X il existe un voisinage de x ne rencontrant qu'un nombre fini de V_β .

Des exemples importants de tels espaces sont les CW -complexes.

Remarque 1.3.81. Dans un espace paracompact X , il existe toujours des partitions de l'unité subordonnées à tout recouvrement ouvert, i.e. si $\{U_\alpha\}$ est un recouvrement ouvert alors il existe $(\varphi_\alpha) \subset C_c(X)$ telle que $\text{supp}(\varphi_\alpha) \subset U_\alpha$, $0 \leq \varphi_\alpha \leq 1$ et :

$$\sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x) = 1, \quad \forall x \in X.$$

Exemple 1.3.82 (exemples d'espaces classifiants). • Si G est un groupe fini ou compact, alors chaque G -espace est trivialement propre. Ainsi $\{*\}$ est universel.

- À l'autre extrême, si G est un groupe ne contenant aucun sous-groupe compact non-trivial, alors $\underline{EG} = EG$. Ainsi, si G est discret et sans torsion, il suffit de connaître EG .
- Si H est un sous-groupe fermé de G , alors \underline{EG} est aussi un modèle pour \underline{EH} .
- Soit G un groupe discret, alors l'ensemble des probabilités à support fini

$$\left\{ \varphi : G \rightarrow [0, 1] \mid \varphi \text{ est à support fini et } \sum_{g \in G} \varphi(g) = 1 \right\}$$

muni de la topologie induite par la métrique $d(\varphi, \psi) = \sup_{g \in G} |\varphi(g) - \psi(g)|$ est un modèle pour \underline{EG} , où G agit par translations.

Terminons cette liste d'exemples par les groupes libres \mathbb{F}_n . Un modèle pour $\underline{E}\mathbb{F}_n$ est donnée par son graphe de Cayley. En effet le graphe de Cayley est un arbre qui peut être vu comme un \mathbb{F}_n - CW -complexe avec stabilisateurs finis.

Lorsque l'on s'intéresse à des produits semi-directs de la forme $G = N \rtimes H$, les deux propositions suivantes peuvent être utiles.

Proposition 1.3.83. *Supposons que G est un produit semi-direct $G = N \rtimes H$ avec N un sous-groupe discret d'un espace vectoriel réel de dimension finie V et $H \subset GL(V)$ tel que $H(N) = N$. Alors un modèle pour \underline{EG} est $V \times \underline{EH}$.*

Proposition 1.3.84. *Avec les hypothèses et notations de ci-dessus, on a également :*

$$BG = BN \times_H EH.$$

On termine ce petit chapitre par un théorème important lorsque l'on considère le côté gauche de Baum-Connes :

Théorème 1.3.85. Si G est un groupe discret et sans torsion, alors :

$$KK_j^G(C_0(\underline{EG}), \mathbb{C}) \cong KK_j(C_0(BG), \mathbb{C}),$$

pour $j = 0, 1$.

1.3.5. Lien entre la K -homologie géométrique et analytique

Dans ce paragraphe on note $K_j^G(X, Y)$ la K -homologie G -équivariante géométrique d'un G -espace X et de sous-espace Y , et conformément à la notation de la section précédente $KK_j^G(A, B)$ est la K -homologie G -équivariante analytique de la paire de G - C^* -algèbres A, B .

Le théorème suivant permet de faire le lien entre les deux théories de K -homologie définies précédemment.

Théorème 1.3.86. Soit G un groupe de Lie compact. Soit X un G - CW -complexe G -compact et Y un sous-complexe fermé G -invariant. Alors il existe un isomorphisme naturel pour $j = 0, 1$:

$$\nu_j : K_j^G(X, Y) \rightarrow KK_j^G(C_0(X \setminus Y), \mathbb{C}).$$

Une preuve complète de ce théorème se trouve dans [BOOSW10], et dans [BHS07] dans le cas où G est trivial. Pour plus d'informations sur l'équivalence des K -homologies différentes,

on invite le lecteur à regarder [HR00] et [MV03]. Ici, on explique comment cet isomorphisme est construit. Soit (M, E, ϕ) un K -cycle sur (X, Y) , où M est une variété riemannienne avec bord, connexe et de dimension impaire. On considère alors la connexion de Levi-Civita sur son fibré tangent :

$$\nabla^{LC} : \Gamma^\infty(TM) \rightarrow \Gamma^\infty(TM \otimes T^*M).$$

Alors cette connexion peut être étendue au produit tensoriel du fibré spinoriel venant de la structure G -Spin^c de M et E , c'est-à-dire il existe une connexion

$$\nabla : \Gamma^\infty(S \otimes E) \rightarrow \Gamma^\infty(S \otimes E \otimes T^*M),$$

telle que :

$$\nabla((\chi \cdot f_S) \otimes f_E) = \chi \cdot \nabla(f_S \otimes f_E) + (\nabla^{LC}(\chi) \cdot f_S) \otimes f_E$$

pour tout $\chi \in \Gamma^\infty(TM)$, $f_S \in \Gamma^\infty(S)$, $f_E \in \Gamma^\infty(E)$. On considère ensuite la composition suivante :

$$\Gamma^\infty(S \otimes E) \xrightarrow{\nabla} \Gamma^\infty(S \otimes E \otimes T^*M) \cong \Gamma^\infty(S \otimes TM \otimes E) \rightarrow \Gamma^\infty(S \otimes E),$$

où la dernière application vient de la multiplication de Clifford. On obtient ainsi un opérateur différentiel elliptique de degré 1, noté D_E , qui n'est autre qu'un opérateur de Dirac. Ainsi comme dans 1.3.66, on considère une fonction impaire lisse Ξ et on pose $F_E = \Xi(D_E)$ qui est un opérateur borné de $L^2(M, S \otimes E)$. Finalement en prenant π la représentation de $C_0(M)$ sur $L^2(M, S \otimes E)$ donnée par la multiplication point par point, on obtient un K -cycle de Kasparov sur $(C_0(M), \mathbb{C})$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \nu_1 : K_1^G(X, Y) &\rightarrow KK_1^G(C_0(X \setminus Y), \mathbb{C}) \\ [M, E, \phi] &\mapsto (\phi^*|_{C_0(X \setminus Y)})([L^2(M, S \otimes E), \pi, F_E]). \end{aligned}$$

Pour ν_0 , on considère une variété de dimension paire et la construction est exactement la même sauf que S devient \mathbb{Z}_2 -graduée. On donne un analogue de ce théorème dans le cas où G est discret (voir [BHS10]).

Théorème 1.3.87. Si G est un groupe discret et X est un G -CW-complexe G -compact propre. Alors

$$K_j^G(X) \cong KK_j^G(C_0(X), \mathbb{C})$$

pour $j = 0, 1$.

Terminons cette partie en considérant deux exemples.

- Si $M = *$ alors la structure G -Spin^c sur M est donnée par le fibré $Spin^c(0)$ -principal. Alors le fibré spinoriel est $S = * \times (\mathbb{C} \oplus 0) = \mathbb{C} \oplus 0$. On considère le fibré trivial $E = \mathbb{C}$ sur $*$ et donc $S \otimes E = \mathbb{C} \oplus 0$. Comme $T^* = 0$, alors $\nabla = 0$ et donc D_E également. Ainsi F_E est l'opérateur nul. Ainsi pour X un G -CW-complexe propre G -compact, on a :

$$\nu_0([*, \mathbb{C}, \phi : * \rightarrow X]) = \phi^*[\mathbb{C}, \text{Id}_{\mathbb{C}} \oplus 0, 0].$$

Ainsi $K_0(*)$ est engendré par $[*, \mathbb{C}, \text{Id}_*]$ car $K_0(*) \cong K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$.

- On a vu que la K -homologie analytique de $C(\mathbb{T})$, pour $i = 0, 1$, les $KK_i(C(\mathbb{T}), \mathbb{C})$ sont isomorphes à \mathbb{Z} . Un générateur de $KK_0(C(\mathbb{T}), \mathbb{C})$ est donnée par $[\mathbb{C}, e_1 \oplus 0, 0]$, où e_1 est l'évaluation en 1. $KK_1(C(\mathbb{T}), \mathbb{C})$ est généré par $[L^2(\mathbb{T}), \pi, F]$, où π est la représentation

de $C(\mathbb{T})$ sur $L^2(\mathbb{T})$ donnée par la multiplication ponctuelle et $F(e_n) = \text{sgn}(n)e_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, où $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est la base trigonométrique de $L^2(\mathbb{T})$.

En définissant

$$\delta_1'' := [*, \mathbb{C}, * \rightarrow \{1\} \subset \mathbb{T}] \in K_0(\mathbb{T})$$

et

$$\gamma_1'' := [\mathbb{T}, \mathbb{T} \times \mathbb{C}, \text{Id}|_{\mathbb{T}}] \in K_1(\mathbb{T}),$$

on a bien $\nu_0(\delta_1'') = [\mathbb{C}, e_1 \oplus 0, 0]$ et $\nu_1(\gamma_1'') = [L^2(\mathbb{T}), \pi, F]$.

1.3.6. Isomorphisme de Bott et suite exacte à six termes en K -homologie

Soit X un G -espace propre. On considère la suspension de la G - C^* -algèbre $C_0(X)$:

$$\begin{aligned} SC_0(X) &= \{f \in C(I, C_0(X)) \mid f(0) = 0 = f(1)\} \\ &\cong \{f \in C_0(X \times I) \mid f(x, 0) = 0 = f(x, 1) \forall x \in X\} \\ &\cong C_0(X \times \overset{\circ}{I}), \end{aligned}$$

où $I = [0, 1]$ et $\overset{\circ}{I}$ est l'intérieur de I . Par le théorème 1.3.70, on a pour $j = 0, 1$:

$$KK_j^G(C_0(X \times \overset{\circ}{I}), \mathbb{C}) \cong KK_{1-j}^G(C_0(X), \mathbb{C}).$$

Ainsi par 1.3.87, on a donc l'équivalent de l'isomorphisme de Bott pour la K -homologie géométrique.

Théorème 1.3.88 (Isomorphisme de Bott). Soit G un groupe de Lie compact. Soit X un G -CW-complexe G -compact propre. Alors

$$\begin{aligned} \partial_0 : K_j^G(X \times I, X \times \partial I) &\rightarrow K_{1-j}^G(X \times \{0\}) \cong K_{1-j}^G(X) \\ [M, E, \phi] &\mapsto [\partial_0 M := \phi^{-1}(X \times \{0\}) \cap \partial M, E|_{\partial_0 M}, \phi|_{\partial_0 M}] \end{aligned}$$

est un isomorphisme pour $j = 0, 1$.

Un inverse explicite de ∂_0 peut être construit de la manière suivante. En utilisant la stabilité de la structure de G -Spin^c de la proposition 1.3.55, on a :

$$\begin{aligned} K_{1-j}^G(X) &\rightarrow K_j^G(X \times I, X \times \partial I) \\ [M, E, \phi] &\mapsto [M \times I, E \times I, \phi \times \text{Id}_I] \end{aligned}$$

pour $j = 0, 1$.

Terminons en donnant une suite exacte à six termes qui sera utile pour des calculs explicites de K -homologie.

Soit X un G -espace muni d'une action de \mathbb{Z} donnée par un homéomorphisme G -équivariant $\alpha : X \rightarrow X$. On définit le mapping torus :

$$M_{X, \alpha} := (X \times I) / \sim,$$

où $(x, 0) \sim (\alpha(x), 1)$ pour tout $x \in X$. On lui confère une structure de G -espace par l'action

$g \cdot [x, t] := [g \cdot x, t]$. Ainsi X peut être vu comme un G -sous-espace fermé de $M_{X,\alpha}$ via l'injection :

$$\begin{aligned} i : X &\rightarrow M_{X,\alpha} \\ x &\mapsto [x, 0]. \end{aligned}$$

Théorème 1.3.89. Supposons que G soit un groupe de Lie compact. Soit X un G - CW -complexe G -compact propre et α un homéomorphisme G -équivariant de X . Alors on a une suite exacte à six termes naturelle :

$$\begin{array}{ccccc} K_0^G(X) & \xrightarrow{\sigma_*} & K_0^G(X) & \xrightarrow{i_*} & K_0^G(M_{X,\alpha}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1^G(M_{X,\alpha}) & \xleftarrow{i_*} & K_1^G(X) & \xleftarrow{\sigma_*} & K_1^G(X) \end{array}$$

où :

1. $\sigma_* = \text{Id} - \alpha_*^{-1}$;
2. Les flèches verticales sont simplement la composition $\partial_0 \circ (q_*)^{-1} \circ i'_*$ avec q_* l'isomorphisme venant de l'application quotient et i'_* étant l'inclusion de la paire $(M_{X,\alpha}, \emptyset)$ dans $(M_{X,\alpha}, X)$.

1.3.7. Application d'assemblage

Afin de définir l'application d'assemblage dans la conjecture de Baum-Connes, il nous faut au préalable deux théorèmes importants dûs à Kasparov dans le contexte de la KK -théorie (voir [Kas95]).

Théorème 1.3.90. Soit A, B et C trois G - C^* -algèbres séparables. Alors il existe un couplage bilinéaire

$$\begin{aligned} KK_i^G(A, B) \times KK_j^G(B, C) &\rightarrow KK_{i+j}^G(A, C) \\ (\gamma, \delta) &\mapsto \gamma \otimes_B \delta \end{aligned}$$

où $i, j \in \{0, 1\}$ et $i + j$ est pris modulo 2, tel que :

- Le couplage est contravariant en A et covariant en C ;
- Si D est une autre G - C^* -algèbre séparable, alors

$$(\gamma \otimes_B \delta) \otimes_C \zeta = \gamma \otimes_B (\delta \otimes_C \zeta)$$

pour tout $\gamma \in KK_i^G(A, B)$, $\delta \in KK_j^G(B, C)$ et $\zeta \in KK_k^G(C, D)$;

- Si $B = A$ et $\gamma = [A, \text{Id}_A, 0]$, alors $\gamma \otimes_A \delta = \delta$ et de manière similaire si $B = C$ et $\delta = [B, \text{Id}_B, 0]$, alors $\gamma \otimes_C \delta = \gamma$.

Ce couplage définit un produit associatif sur les KK -groupes qui s'appelle le produit de Kasparov.

Considérons A, B deux G - C^* -algèbres et $[p] \in K_0(A) \cong KK_0(\mathbb{C}, A)$. La projection p induit un $*$ -homomorphisme $\bar{p} : \mathbb{C} \rightarrow A$ en posant $\bar{p}(1) = p$. Alors le produit de Kasparov de $[p]$ avec la classe $[H, \pi, F] \in KK_j(A, B)$ est donc la classe $[H, \pi\bar{p}, F] \in KK_j(\mathbb{C}, B) \cong K_j(B)$ pour $j = 0, 1$.

Théorème 1.3.91. Soit A, B deux G - C^* -algèbres. Alors pour $j = 0, 1$, il existe un homomorphisme de descente :

$$J_G : KK_j^G(A, B) \rightarrow KK_j(A \rtimes_r G, B \rtimes_r G).$$

De plus si A et B sont séparables, cet homomorphisme commute avec le produit de Kasparov.

Définition 1.3.92. Soit X un G -espace propre. La K -homologie G -équivariante à support G -compact de X est pour $j = 0, 1$:

$$RK_j^G(X) := \operatorname{colim} KK_j^G(C_0(Y), \mathbb{C})$$

où la colimite est la limite inductive du système formé par les sous-espaces G -compact Y de X avec l'inclusion et induit par les isomorphismes en KK -théorie.

Si X est G -compact, alors $RK_j^G(X) = KK_j^G(C_0(X), \mathbb{C})$ et donc réduit à la K -homologie analytique. Ainsi si G est discret et sans torsion avec espace classifiant BG compact, on a :

$$RK_j^G(\underline{EG}) = KK_j(C_0(BG), \mathbb{C})$$

pour $j = 0, 1$.

Soit X un G -espace propre et G -compact. Il existe, voir [Val02], une fonction réelle positive $f_X \in C_c(X)$ telle que

$$\int_G f_X(gx) dg = 1.$$

On définit alors une projection dans l'algèbre de convolution $C_c(G, C_0(X))$:

$$p_X(g)(x) := (f_X(x)f_X(g^{-1}x))^{1/2}.$$

Ainsi on obtient une classe dans $K_0(C_0(X) \rtimes_r G) \cong KK_0(\mathbb{C}, C_0(X) \rtimes_r G)$.

On compose alors l'homomorphisme du théorème 1.3.91 et le produit de Kasparov pour obtenir un homomorphisme noté $\mu_{j,X}^G$:

$$KK_j^G(C_0(X), \mathbb{C}) \xrightarrow{J_G} KK_j(C_0(X) \rtimes_r G, C_r^*(G)) \xrightarrow{[p_X]} KK_j(\mathbb{C}, C_r^*(G)).$$

Par propriété universelle de la colimite, on obtient une application, appelée l'application d'assemblage ou application de Baum-Connes :

$$\mu_j^G : RK_j^G(\underline{EG}) \rightarrow K_j(C_r^*(G)),$$

pour $j = 0, 1$. Remarquons que lorsque l'on considère un groupe G discret, sans torsion avec BG compact, l'application de Baum-Connes est simplifiée puisqu'il suffit de considérer $\mu_{j,BG}^G$.

Conjecture 1.3.93 (Baum-Connes, 1982). *L'application d'assemblage est un isomorphisme pour tout groupe G localement compact, de Hausdorff et dénombrable à l'infini.*

Cette application d'assemblage est naturelle dans le sens suivant :

Théorème 1.3.94 (Corollaire 1.2, [MV03]). Pour un monomorphisme $\alpha : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$, il existe un

diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 RK_i^{\Gamma_1}(\underline{E}\Gamma_1) & \xrightarrow{\mu_i^{\Gamma_1}} & K_i(C_r^*(\Gamma_1)) \\
 \downarrow \alpha_* & & \downarrow \alpha_* \\
 RK_i^{\Gamma_2}(\underline{E}\Gamma_2) & \xrightarrow{\mu_i^{\Gamma_2}} & K_i(C_r^*(\Gamma_2))
 \end{array}$$

Cette conjecture peut être étendue à un cas plus général. En effet, la même construction fonctionne en remplaçant \mathbb{C} par une G - C^* -algèbre A . Plus précisément, on définit la K -homologie G -équivariante à support G -compact et à coefficients dans A de $\underline{E}G$ par la colimite du système formé par les groupes :

$$KK_*^G(C_0(X), A),$$

où la limite est prise parmi les sous-espaces G -compacts X de $\underline{E}G$ ordrés par l'inclusion. Ainsi, on obtient la conjecture de Baum-Connes à coefficients :

Conjecture 1.3.95 (Baum-Connes à coefficients, 1982). *Soit A une G - C^* -algèbre. Alors $\mu_*^{G,A}$ est un isomorphisme pour tout groupe G localement compact, de Hausdorff et dénombrable à l'infini.*

Cependant, en 2001, les auteurs de [HLS02] ont donné des contre-exemples à cette dernière conjecture.

2. Une nouvelle caractérisation de la propriété de Haagerup par des actions sur des espaces mesurés infinis

Lorsque l'on s'intéresse à la propriété de Haagerup dynamique, il existe un résultat important dans le cadre des actions préservant un espace de probabilité :

Théorème 2.0.1 (Théorème 2.1.3, [CCJ⁺12]). Soit G un groupe localement compact dénombrable à l'infini. Alors G a la propriété de Haagerup si et seulement si il existe une G -action préservant la mesure sur un espace standard probabilisé (S, \mathcal{B}_S, ν) avec les propriétés suivantes :

- (a) L'action de G sur S est fortement mélangeante ;
- (b) L'action admet une suite asymptotiquement invariante non-triviale.

De plus, S peut être supposé métrique et compact sur lequel G agit continûment et ν a comme support S . En effet, cela suit de la preuve du lemme 1.3 de [AEG94].

Dans le cas des actions sur des espaces mesurés infinis, il existe le théorème suivant pour les groupes dénombrables :

Théorème 2.0.2 (Théorème 7.5.1, [CCJ⁺12]). Soit Γ un groupe dénombrable. Alors Γ a la propriété de Haagerup si et seulement si il existe une Γ -action préservant la mesure sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ et un ensemble mesurable S tel que $\mu(S \Delta gS) < \infty$ pour tout $g \in \Gamma$, et la fonction $g \mapsto \mu(S \Delta gS)$ est propre sur Γ .

Cependant, dans le chapitre 7 de [CCJ⁺12], la généralisation de ce résultat aux cas des groupes non-discrets est laissée en tant que question ouverte.

Cette section est composée de deux parties distinctes. Dans la première, on démontre l'un des résultats principaux de cette thèse qui répond complètement à la question précédente. Le but est donc de caractériser la propriété de Haagerup, pour des groupes localement compacts et dénombrables à l'infini, par des actions sur des espaces de mesures infinis. On se place dans le cadre des actions préservant la mesure sur des espaces mesurés infinis et on définit la propriété bien adaptée dans cette situation :

Définition 2.0.3. Un espace mesuré (X, \mathcal{B}, μ) sur lequel G agit par automorphismes boréliens et préservant μ est appelé un système dynamique et est noté (X, \mathcal{B}, μ, G) . On dit que le système dynamique (X, \mathcal{B}, μ, G) est mélangeant, ou C_0 , si pour tous $A, B \in \mathcal{B}$ tels que $0 \leq \mu(A), \mu(B) < \infty$, on a :

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \mu(gA \cap B) = 0.$$

La première partie est donc consacrée à la démonstration du résultat suivant :

Théorème 2.0.4. Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini. Alors G a la propriété de Haagerup si et seulement si il existe un système dynamique C_0 $(\Omega, \mathcal{B}, \mu, G)$ tel que $L^\infty(\Omega)$ a une moyenne G -invariante. Plus précisément :

1. la mesure μ est σ -finie, G -invariante et $L^2(\Omega, \mu)$ est un espace de Hilbert séparable ;
2. pour tous $A, B \in \mathcal{B}$ tels que $0 \leq \mu(A), \mu(B) < \infty$, on a :

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \mu(gA \cap B) = 0;$$

3. il existe une suite de vecteurs unitaires $(\xi_n)_{n \geq 1} \subset L^2(\Omega, \mu)$ tels que $\xi_n \geq 0$ pour tout n et, pour tout compact $K \subset G$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{g \in K} \langle \pi_\Omega(g)\xi_n, \xi_n \rangle = 1.$$

La démonstration de ce théorème est donnée dans l'ordre chronologique des avancées successives durant la thèse. Elle n'est donc pas fidèle à l'article [DJZ20]. Plus précisément, on démontre le théorème pour les groupes discrets. Puis, on étend le résultat aux groupes contenant un réseaux et finalement on donne une preuve dans le cas général.

La deuxième partie de cette section s'intéresse à déterminer si une action comme dans le théorème 2.0.4 peut toujours être supposée ergodique. De plus, on traitera deux exemples de tels systèmes dynamiques ; d'une part les groupes agissant proprement sur les arbres et d'autre part $SL_2(\mathbb{R})$.

2.1. Preuve du théorème principal

Par la remarque 0.0.7, il suffit de démontrer la réciproque du théorème 2.0.4. On commence par donner une esquisse de la preuve. On suppose donc G avec la propriété de Haagerup. On considère l'espace produit $X = \prod_{n \geq 1} S$, où S satisfait toutes les propriétés du théorème 2.0.1. On munit X de l'action diagonale de G et avec une famille "convenable" \mathcal{F} de sous-ensembles de la forme $B = \prod_n B_n$ tels que le produit infini $\prod_n 2\nu(B_n)$ converge, où $B_n \in \mathcal{B}_S$ pour tout n . On construit une mesure sur $\sigma(\mathcal{F})$, la σ -algèbre engendrée par \mathcal{F} , satisfaisant :

$$\mu(B) = \prod_n 2\nu(B_n),$$

pour tout B comme ci-dessus. Ainsi on peut extraire de la famille (A_n) venant de la condition (b) du théorème 2.0.1, une suite $(X_m)_m \subset \mathcal{F}$ telle que la suite de vecteurs unitaires associés $\xi_m = 1_{X_m}$ satisfasse la condition (3) du théorème 2.0.4. Ces vecteurs sont unitaires car $\nu(A_n) = \frac{1}{2}$ pour tout n (voir théorème 2.2.2. de [CCJ⁺12]).

Pour démontrer que la condition (2) est satisfaite, on considère $A = \prod_n A_n$ et $B = \prod_n B_n$ tels que les produits infinis $\prod_n 2\nu(A_n)$ et $\prod_n 2\nu(B_n)$ convergent. Soit $\varepsilon > 0$, on choisit N assez grand tel que :

$$\frac{1}{2} - \varepsilon < \nu(A_n), \nu(B_n) < \frac{1}{2} + \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Alors en utilisant la propriété de mélange fort de l'action de G sur S (condition (a) dans le théorème 2.0.1), on peut choisir un nombre positif $\varepsilon' > 0$ adapté, un entier $m > 0$ et un compact $K \subset G$ tels que

$$\nu(gA_n \cap B_n) \leq \nu(A_n)\nu(B_n) + \varepsilon' \quad \forall g \in K^c, \forall N \leq n \leq N + m.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \mu(gA \cap B) &\leq \prod_{n=1}^{N-1} 2\nu(A_n) \cdot \prod_{n>N+m} 2\nu(A_n) \cdot \prod_{n=N}^{N+m} (2\nu(A_n)\nu(B_n) + \varepsilon') \\ &= \mu(A) \prod_{n=N}^{N+m} \frac{2\nu(A_n)\nu(B_n) + 2\varepsilon'}{2\nu(A_n)} < \varepsilon, \end{aligned}$$

car le quotient $(2\nu(A_n)\nu(B_n) + 2\varepsilon')/2\nu(A_n)$ appartient à un intervalle de la forme $(0, \delta)$ avec un δ convenable, i.e. $\delta < 1$ et tel que $\delta^{m+1} < \varepsilon/\mu(A)$.

Il s'avère que la σ -algèbre $\sigma(\mathcal{F})$ est trop grande pour que le système dynamique $(X, \sigma(\mathcal{F}), \mu, G)$ soit σ -fini et, comme observé par A. Calderi et A. Valette (cf. remarque 2.1.10), la représentation de permutations associée π_X sur $L^2(X, \mu)$ n'est pas continue quand G n'est pas discret.

C'est pourquoi la preuve se fait en plusieurs étapes : dans un premier temps on montre que le système dynamique $(X, \sigma(\mathcal{F}), \mu, G)$ est C_0 et on construit la suite de vecteurs presque invariants. Puis, dans le cas discret on restreint facilement notre système dynamique afin qu'il soit σ -fini ; ce qui termine la preuve sous cette hypothèse. Dans un second temps, on étend le résultat au groupe contenant un réseau. Pour conclure dans le cas général, on définit une σ -sous-algèbre $\sigma(\mathcal{F}_c)$ de $\sigma(\mathcal{F})$ et une mesure μ_c de sorte que pour tout $A \in \sigma(\mathcal{F}_c)$ tel que $\mu_c(A) < \infty$, on a $\lim_{g \rightarrow e} \mu_c(gA \triangle A) = 0$. Ceci implique la continuité de la représentation de permutations $\pi_X: G \rightarrow \mathcal{U}(L^2(X, \sigma(\mathcal{F}_c), \mu_c))$ et finalement on montre qu'on peut restreindre notre système dynamique pour obtenir une mesure σ -finie.

2.1.1. Preuve du Théorème 2.0.4, Partie 1

Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini avec la propriété de Haagerup. Selon le théorème 2.0.1, soit (S, \mathcal{B}_S, ν) l'espace métrique compact muni d'une probabilité ν de support S et sur lequel G agit continûment en préservant ν et satisfaisant les conditions (a) et (b).

Posons $X = \prod_{n \geq 1} S = \{(s_n)_{n \geq 1} : s_n \in S \forall n\}$. Si \mathcal{S} est une famille non-vide de sous-ensembles de X , on note $\sigma(\mathcal{S})$ la σ -algèbre engendrée par \mathcal{S} .

Définition 2.1.1. 1. On note \mathcal{F}_0 la famille des sous-ensembles de X de la forme $A = \prod_{n \geq 1} A_n$, où $A_n \in \mathcal{B}_S$ pour tout n , tel que le produit infini $\prod_{n \geq 1} 2\nu(A_n)$ existe, i.e. la suite des produits partiels $(\prod_{n=1}^N 2\nu(A_n))_{N \geq 1}$ converge vers une limite dans $[0, \infty)$. On pose également :

$$\mathcal{F}_{0,+} = \left\{ B = \prod_n B_n \in \mathcal{F}_0 : \nu(B_n) > 0 \forall n \right\}.$$

2. On définit une suite $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ de collections de sous-ensembles de X par induction : pour $n \geq 1$, on pose $\mathcal{F}_n = \{B \setminus A : A, B \in \mathcal{F}_{n-1}\}$. Finalement, on regarde :

$$\mathcal{F} := \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n.$$

Constatons que $\emptyset \in \mathcal{F}_0$ et donc $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ pour tout n .

Lemme 2.1.2. Pour tout $A, B \in \mathcal{F}_0$, on a $A \cap B \in \mathcal{F}_0$.

Démonstration. Soit $A, B \in \mathcal{F}_0$. On note $A = \prod_n A_n$ et $B = \prod_n B_n$ comme ci-dessus. Alors $\nu(A_n \cap B_n) \leq \min(\nu(A_n), \nu(B_n))$ pour tout n . S'il existe un entier n tel que $\min(\nu(A_n), \nu(B_n)) = 0$, alors le produit $\prod_{n=1}^{\infty} 2\nu(A_n \cap B_n)$ converge trivialement et donc $A \cap B \in \mathcal{F}_0$. Supposons donc que $\nu(A_n) > 0$ pour tout n et considérons le produit de probabilités conditionnelles :

$$a_N = \prod_{n=1}^N \nu(B_n|A_n) = \prod_{n=1}^N \frac{\nu(A_n \cap B_n)}{\nu(A_n)}.$$

Comme $0 \leq \nu(B_n|A_n) \leq 1$ pour tout n , on a $0 \leq a_{N+1} \leq a_N \leq 1$ pour tout N et ainsi la suite bornée monotone décroissante $(a_N)_{N \geq 1}$ converge vers $a \in [0, 1]$. Ainsi la suite :

$$\prod_{n=1}^N 2\nu(A_n \cap B_n) = a_N \cdot \prod_{n=1}^N 2\nu(A_n)$$

converge vers $a \prod_{n=1}^{\infty} 2\nu(A_n)$. \square

Lemme 2.1.3. *La famille \mathcal{F} est un semi-anneau d'ensembles de X , i.e. :*

(i) *Si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \cap B \in \mathcal{F}$;*

(ii) *Si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $B \setminus A \in \mathcal{F}$.*

En particulier, l'ensemble de toutes les réunions finies disjointes d'éléments de \mathcal{F} est un anneau d'ensembles de X . C'est un anneau engendré par \mathcal{F} , noté $\mathcal{R}(\mathcal{F})$. De plus :

(iii) *Pour tout $A \in \mathcal{F}$, il existe $B \in \mathcal{F}_0$ tel que $A \subset B$.*

Démonstration. (i) On prouve par induction sur n que pour tout $A, B \in \mathcal{F}_n$, on a $A \cap B \in \mathcal{F}$. Par lemme 2.1.2, l'ancrage est vérifié. Supposons donc que l'assertion est vraie pour $n \geq 0$, et soit $A, B \in \mathcal{F}_{n+1}$. Alors il existe $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{F}_n$ tels que $A = A_1 \setminus A_2$ et $B = B_1 \setminus B_2$. Ainsi par hypothèse d'induction, il existe $m \geq n$ tel que $A_1 \cap B_1 \in \mathcal{F}_m$. Comme

$$A \cap B = (A_1 \cap A_2^c) \cap (B_1 \cap B_2^c) = ((A_1 \cap B_1) \setminus A_2) \setminus B_2,$$

cela montre que $A \cap B \in \mathcal{F}_{m+2} \subset \mathcal{F}$.

L'assertion (ii) suit des définitions et (iii) se montre par induction sur n . \square

La prochaine étape consiste à définir une mesure convenable sur $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F}_0)$. Pour cela, on associe à chaque élément $B = \prod_n B_n \in \mathcal{F}_{0,+}$ une probabilité \mathbb{P}_B sur la σ -algèbre $\sigma(C)$ engendrée par la famille des cylindres de X , notée C . Remarquons que $\mathcal{F}_0 \subset \sigma(C)$ et donc $\sigma(\mathcal{F}_0) \subset \sigma(C)$. On définit \mathbb{P}_B comme le produit de mesures de probabilité $\otimes_n \nu_{n,B}$, où $\nu_{n,B}$ est la probabilité sur \mathcal{B}_S donnée par :

$$\nu_{n,B}(E) = \frac{\nu(E \cap B_n)}{\nu(B_n)} = \nu(E|B_n),$$

pour tout $E \in \mathcal{B}_S$ et pour tout n . Ainsi en prenant $C = \prod C_n$, où $C_n \subset S$ est un borélien pour tout n , alors $\mathbb{P}_B(C) = \prod_{n=1}^{\infty} \nu_{n,B}(C_n)$ car $C = \bigcap_N C^{(N)}$, où $C^{(N)} = C_1 \times C_2 \times \dots \times C_N \times S \times S \times \dots \in C$ et $\mathbb{P}_B(C^{(N)}) = \prod_{n=1}^N \nu_{n,B}(C_n)$ pour tout N .

On définit à présent une pré-mesure sur \mathcal{F} :

Définition 2.1.4. Pour $A \in \mathcal{F}_0$, $A = \prod_n A_n$, on pose :

$$\mu(A) := \prod_{n=1}^{\infty} 2\nu(A_n).$$

Pour $A \in \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n$, soit $B \in \mathcal{F}_0$ tel que $A \subset B$. Alors on pose :

$$\mu(A) = \begin{cases} \mathbb{P}_B(A)\mu(B) & \text{si } B \in \mathcal{F}_{0,+}, \\ 0 & \text{si } \mu(B) = 0. \end{cases}$$

On vérifie que μ est bien définie :

Lemme 2.1.5. Soit $A \in \mathcal{F}$.

(i) S'il existe $B \in \mathcal{F}_0$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$, alors $\mathbb{P}_C(A)\mu(C) = 0$ pour tout $C \in \mathcal{F}_{0,+}$ tel que $A \subset C$.

(ii) Si $B, C \in \mathcal{F}_{0,+}$ sont tels que $A \subset B \cap C$, alors on a :

$$\mathbb{P}_B(A)\mu(B) = \mathbb{P}_C(A)\mu(C). \quad (2.1.1)$$

Démonstration. (i) Si B et C sont comme ci-dessus, alors

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{P}_C(A)\mu(C) &= \mathbb{P}_C(A \cap B)\mu(C) \\ &\leq \mathbb{P}_C(C \cap B)\mu(C) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(B_n \cap C_n)}{\nu(C_n)} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} 2\nu(C_n) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \frac{2\nu(B_n \cap C_n)}{2\nu(C_n)} \cdot 2\nu(C_n) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} 2\nu(B_n \cap C_n) \leq \prod_{n=1}^{\infty} 2\nu(B_n) = 0. \end{aligned}$$

(ii) Observons premièrement que si $B, C \in \mathcal{F}_{0,+}$ sont tels que $\mu(B) = \mu(C) = 0$, alors l'égalité (2.1.1) est trivialement vraie. Par (i), l'égalité est encore vraie si $\mu(B)\mu(C) = 0$. Il reste donc à montrer l'égalité (2.1.1) quand $A \subset B \cap C$ avec $B, C \in \mathcal{F}_{0,+}$ et $\mu(B)\mu(C) > 0$.

Supposons premièrement que $A = \prod_n A_n \in \mathcal{F}_0$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_B(A)\mu(B) &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(A_n \cap B_n)}{\nu(B_n)} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} 2\nu(B_n) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \frac{2\nu(A_n \cap B_n)}{2\nu(B_n)} 2\nu(B_n) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} 2\nu(A_n \cap B_n) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} 2\nu(A_n) = \mu(A). \end{aligned}$$

De même manière, on montre que $\mathbb{P}_C(A)\mu(C) = \mu(A)$.

Pour le reste de la preuve, on fixe $B, C \in \mathcal{F}_{0,+}$ tels que $\mu(B)\mu(C) > 0$ et on définit deux mesures $\mu^{(B)}$ et $\mu^{(C)}$ sur la σ -algèbre $\sigma(C)$, contenant $\sigma(\mathcal{F})$, par :

$$\mu^{(B)}(E) := \mathbb{P}_B(B \cap E)\mu(B) \quad \forall E \in \sigma(C)$$

et similairement pour $\mu^{(C)}$. Alors $\mu^{(B)}(X) = \mathbb{P}_B(B)\mu(B) = \mu(B) < \infty$ (resp. $\mu^{(C)}(X) = \mu(C)$) et donc sont toutes deux des mesures finies sur $\sigma(C)$.

Posons $\mathcal{A} = \{A \in \sigma(\mathcal{F}) : \mu^{(B)}(A \cap B \cap C) = \mu^{(C)}(A \cap B \cap C)\}$. On a démontré que $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{A}$ et comme $B \cap C \in \mathcal{F}_0$, $X \in \mathcal{A}$. Montrons que \mathcal{A} est stable par passage au complémentaire. Soit $A \in \mathcal{A}$. Comme $B \cap C = (A^c \cap B \cap C) \sqcup (A \cap B \cap C)$, alors :

$$\begin{aligned} \mu^{(B)}(A^c \cap B \cap C) &= \mu^{(B)}(B \cap C) - \mu^{(B)}(A \cap B \cap C) \\ &= \mu^{(C)}(B \cap C) - \mu^{(C)}(A \cap B \cap C) \\ &= \mu^{(C)}(A^c \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Ainsi $A^c \in \mathcal{A}$. Finalement, on peut aisément vérifier que \mathcal{A} est une classe monotone. Ainsi, par le théorème des classes monotones, on en déduit que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F})$. □

Comme conséquence du lemme 2.1.5 et du théorème de Carathéodory, on a le résultat suivant :

Proposition 2.1.6. *La pré-mesure $\mu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est σ -additive et donc s'étend en une mesure, également notée μ , sur la σ -algèbre $\sigma(\mathcal{F})$. Cependant, μ n'est pas σ -finie ; en particulier, μ est infinie.*

Démonstration. Soit $(A^{(k)})_{k \geq 1} \subset \mathcal{F}$ une suite d'ensembles deux-à-deux disjoints tels que $A := \bigsqcup_{k \geq 1} A^{(k)}$ appartienne encore à \mathcal{F} . Soit $B \in \mathcal{F}_0$ tel que $A \subset B$. Comme $A^{(k)} \subset B$ pour tout k , si $\mu(B) = 0$, par le lemme 2.1.5, $\mu(A^{(k)}) = \mu(A) = 0$ pour tout k . Si $\mu(B) > 0$, on a :

$$\mu(A) = \mathbb{P}_B(A)\mu(B) = \sum_k \mathbb{P}_B(A^{(k)})\mu(B) = \sum_k \mu(A^{(k)}),$$

où l'on utilise le fait que \mathbb{P}_B est σ -additive. Ainsi, par le théorème de Carathéodory (voir, par exemple, théorème 11.1 de [Bil08]), μ s'étend en une mesure sur $\sigma(\mathcal{F})$.

Pour montrer que μ n'est pas σ -finie, choisissons $A \in \mathcal{B}_S$ tel que $\nu(A) = \frac{1}{2}$ et posons $A_0 = A$, $A_1 = A^c$. À présent, pour toute suite $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geq 1} \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*} =: E$, on pose $A_\varepsilon := \prod_n A_{\varepsilon_n} \in \mathcal{F}_0$. Alors $\mu(A_\varepsilon) = 1$ pour tout $\varepsilon \in E$ et $A_\varepsilon \cap A_{\varepsilon'} = \emptyset$ pour tout $\varepsilon \neq \varepsilon'$. Si μ était σ -finie, alors E serait dénombrable : en effet, il existerait une suite croissante $(X_k)_{k \geq 1}$ telle que $\mu(X_k) < \infty$ pour tout k et $\bigcup_k X_k = X$. Alors pour tout $k \geq 2$, on pose

$$E_k = \left\{ \varepsilon \in E : \mu(X_k \cap A_\varepsilon) \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

Ainsi $|E_k| \leq 2\mu(X_k)$ est finie. Comme $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(X_k \cap A_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon) = 1$ pour tout ε , alors $E = \bigcup_k E_k$ serait dénombrable ; ce qui n'est pas le cas. \square

À présent, on considère l'action diagonale de G sur $(X, \sigma(\mathcal{F}), \mu)$, i.e.

$$g \cdot (s_n)_{n \geq 1} = (gs_n)_{n \geq 1}$$

pour $g \in G$ et $(s_n)_{n \geq 1} \in X = \prod_{n \geq 1} S$.

Lemme 2.1.7. *L'action de G sur X définie ci-dessus est mesurable. En particulier, G agit par automorphismes mesurables sur $(X, \sigma(\mathcal{F}), \mu)$ et préserve μ .*

Démonstration. Soit $\alpha : G \times X \rightarrow X$ définie par $\alpha(g, (x_n)_{n \geq 1}) = (gx_n)_{n \geq 1}$. Pour montrer que α est mesurable, il suffit de montrer que la pré-image d'un élément dans \mathcal{F}_0 est mesurable.

Soit $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_0$. Pour $m \geq 1$, on définit une fonction de permutations $\beta_m : G \times X \rightarrow G \times X$ par :

$$(g, (x_n)_{n \geq 1}) \mapsto (g, (x_m, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)),$$

qui est mesurable.

Considérons $\alpha^{-1}(A)$, on a :

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(A) &= \{(g, (x_n)_{n \geq 1}) : \alpha(g, (x_n)_{n \geq 1}) \in A\} \\ &= \{(g, (x_n)_{n \geq 1}) : (gx_n)_{n \geq 1} \in A\} \\ &= \bigcap_k \{(g, (x_n)_{n \geq 1}) : gx_k \in A_k\}. \end{aligned}$$

À k fixé, comme l'action $\gamma : G \times S \rightarrow S$ donnée par $\gamma(g, s) = gs$ est continue et donc mesurable, on a :

$$\{(g, (x_n)_{n \geq 1}) : gx_k \in A_k\} = \beta_k^{-1}(\gamma^{-1}(A_k) \times S \times S \times \dots) \in \mathcal{B}(G) \times \sigma(\mathcal{F}).$$

D'où

$$\alpha^{-1}(A) = \bigcap_{n \geq 1} \beta_n^{-1} \left(\gamma^{-1}(A_n) \times \prod_{k \geq 2} S \right) \in \mathcal{B}(G) \times \sigma(\mathcal{F}).$$

En particulier, si $B \in \sigma(\mathcal{F})$ et pour $g \in G$ fixé, alors

$$gB = (g^{-1})^{-1}B \in \sigma(\mathcal{F}).$$

Ceci termine la preuve de mesurabilité de l'action de G .

On prouve à présent que l'action préserve μ . Si $A = \prod_n A_n \in \mathcal{F}_0$, alors $gA = \prod_n gA_n$ et l'égalité $\mu(gA) = \mu(A)$ se déduit du fait que l'action est diagonale et que ν est préservée par l'action de

G sur S .

Si $A \in \mathcal{F}$, soit $B \in \mathcal{F}_{0,+}$ tel que $A \subset B$ et avec $\mu(A) = \mathbb{P}_B(A)\mu(B)$. Alors $gA \subset gB$ de sorte que

$$\mu(gA) = \mathbb{P}_{gB}(gA)\mu(gB) = \mathbb{P}_B(A)\mu(B) = \mu(A),$$

pour la raison suivante : pour tout cylindre de la forme $C = C_1 \times C_2 \times \dots \times C_N \times S \times S \times \dots \in \sigma(C)$, on a :

$$\mathbb{P}_{gB}(gC) = \prod_{n=1}^N \frac{\nu(gC_n \cap gB_n)}{\nu(gB_n)} = \mathbb{P}_B(C).$$

Cette égalité tient pour tout élément de l'algèbre engendrée par les cylindres et donc pour tout élément $C \in \sigma(C)$ par unicité des mesures de probabilité qui coïncident sur des algèbres d'ensembles. En particulier, on a bien $\mu(gA) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{F}$ et donc dans l'algèbre $\mathcal{R}(\mathcal{F})$. Finalement la construction de l'extension de μ sur $\sigma(\mathcal{F})$ est donnée par :

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{m \geq 1} \mu(B_m) : (B_m)_{m \geq 1} \subset \mathcal{R}(\mathcal{F}), E \subset \bigcup_m B_m \right\}$$

pour tout $E \in \sigma(\mathcal{F})$. Ainsi pour $g \in G$ fixé, on a :

$$\mu(gE) = \inf \left\{ \sum_{m \geq 1} \mu(B_m) : (B_m)_{m \geq 1} \subset \mathcal{R}(\mathcal{F}), E \subset \bigcup_m g^{-1}B_m \right\} = \mu(E)$$

car $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ est G -invariant et que chaque recouvrement dénombrable de $E \in \sigma(\mathcal{F})$ dans la définition de $\mu(E)$ ci-dessus peut être pris de la forme :

$$E \subset \bigcup_m g^{-1}B_m,$$

avec $(B_m)_{m \geq 1} \subset \mathcal{R}(\mathcal{F})$ par G -invariance de $\mathcal{R}(\mathcal{F})$. □

On peut à présent démontrer la première partie du théorème 2.0.4 dans le cas général, c'est-à-dire l'existence, pour un groupe localement compact (non-compact) et dénombrable à l'infini ayant la propriété de Haagerup, d'un système dynamique C_0 avec une suite de vecteurs presque invariants :

Proposition 2.1.8. *Le système dynamique $(X, \sigma(\mathcal{F}), \mu, G)$ est C_0 , i.e. pour tout $A, B \in \sigma(\mathcal{F})$ tels que $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$, on a :*

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \mu(gA \cap B) = 0. \tag{2.1.2}$$

De plus, il existe une suite de vecteurs unitaires $(\xi_n) \subset L^2(X, \sigma(\mathcal{F}), \mu)$ tels que $\xi_n \geq 0$ pour tout n , et pour tout compact K de G , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{g \in K} \langle \pi_X(g)\xi_n | \xi_n \rangle = 1. \tag{2.1.3}$$

Démonstration. On commence par supposer que $A, B \in \mathcal{F}_0$ avec $A = \prod_n A_n$ et $B = \prod_n B_n$ tels que :

$$\mu(A) = \prod_n 2\nu(A_n), \quad \mu(B) = \prod_n 2\nu(B_n).$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé et prenons $\varepsilon' > 0$ assez petit tel que $\delta := 1/2 + \varepsilon' + \varepsilon'/(1/2 - \varepsilon') < 1$. Comme $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$, il existe N assez grand tel que :

$$\frac{1}{2} - \varepsilon' < \nu(A_n), \quad \nu(B_n) < \frac{1}{2} + \varepsilon' \quad \forall n \geq N.$$

Comme $\delta < 1$, il existe un entier m assez grand tel que $\delta^{m+1} < (\varepsilon/\mu(A))$. L'action de G sur S étant fortement mélangeante, il existe des sous-ensembles compacts K_n de G pour tout $n \in \{N, N+1, \dots, N+m\}$ tels que :

$$|\nu(gA_n \cap B_n) - \nu(A_n)\nu(B_n)| \leq \varepsilon' \quad \forall g \in G \setminus K_n.$$

On pose alors $K = \bigcup_{n=N}^{N+m} K_n$ qui est compact. Ainsi on a pour tout $g \in G \setminus K$:

$$\begin{aligned} \mu(gA \cap B) &\leq \prod_{n=1}^{N-1} 2\nu(A_n) \cdot \prod_{n=N}^{N+m} 2(\nu(A_n)\nu(B_n) + \varepsilon') \cdot \prod_{n \geq N+m+1} 2\nu(A_n) \\ &= \mu(A) \prod_{n=N}^{N+m} \frac{2\nu(A_n)\nu(B_n) + 2\varepsilon'}{2\nu(A_n)} \\ &= \mu(A) \prod_{n=N}^{N+m} \left(\nu(B_n) + \frac{\varepsilon'}{\nu(A_n)} \right) \\ &< \mu(A) \prod_{n=N}^{N+m} \left(\frac{1}{2} + \varepsilon' + \frac{\varepsilon'}{1/2 - \varepsilon'} \right) \\ &= \mu(A)\delta^{m+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a bien

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \mu(gA \cap B) = 0 \quad \forall A, B \in \mathcal{F}_0.$$

La même chose reste vraie pour $A, B \in \mathcal{F}$ puisqu'il existe $C, D \in \mathcal{F}_0$ avec $A \subset C$ et $B \subset D$ et $\mu(gA \cap B) \leq \mu(gC \cap D) \rightarrow 0$ lorsque $g \rightarrow \infty$. On déduit donc que l'égalité (2.1.2) est vraie pour tout élément de $\mathcal{R}(\mathcal{F})$.

Finalement, si $A, B \in \sigma(\mathcal{F})$ avec $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$, par construction de la mesure μ sur $\sigma(\mathcal{F})$, si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe deux suites $(C_k)_{k \geq 1}, (D_l)_{l \geq 1} \subset \mathcal{R}(\mathcal{F})$ telles que :

$$A \subset \bigcup_k C_k, \quad B \subset \bigcup_l D_l$$

et

$$\mu(A) \leq \sum_k \mu(C_k) < \mu(A) + \varepsilon, \quad \mu(B) \leq \sum_l \mu(D_l) < \mu(B) + \varepsilon.$$

Choisissons N assez grand tel que $\sum_{l > N} \mu(D_l) < \varepsilon/3$. Alors, on a :

$$gA \cap B \subset \left(\bigcup_{l=1}^N gA \cap D_l \right) \cup \left(\bigcup_{l > N} D_l \right).$$

On déduit

$$\mu(gA \cap B) \leq \sum_{l=1}^N \mu(gA \cap D_l) + \varepsilon/3.$$

Choisissons ensuite M assez grand tel que $\sum_{k>M} \mu(C_k) < \varepsilon/3N$. Alors, comme

$$gA \cap D_l \subset \left(\bigcup_{k=1}^M gC_k \cap D_l \right) \cup \left(\bigcup_{k>M} gC_k \right)$$

pour tout $1 \leq l \leq N$ et en utilisant la G -invariance de μ , on a :

$$\mu(gA \cap B) \leq \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N \mu(gC_k \cap D_l) + \frac{2\varepsilon}{3} \quad \forall g \in G.$$

Par la première partie de la preuve, il existe un sous-ensemble compact $K \subset G$ tel que

$$\mu(gA \cap B) < \varepsilon \quad \forall g \in G \setminus K.$$

Ceci conclut la preuve de la première assertion de la proposition.

Montrons à présent l'existence d'une suite $(\xi_n) \subset L^2(X, \sigma(\mathcal{F}), \mu)$ satisfaisant (2.1.3).

L'espace standard probabilisé (S, μ) contient une suite asymptotiquement invariante $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{B}_S$ telle que $\nu(A_n) = \frac{1}{2}$ pour tout n et pour tout ensemble compact K de G , on a :

$$\sup_{g \in K} \nu(gA_n \cap A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}. \quad (2.1.4)$$

Comme G est localement compact, dénombrable à l'infini, on peut choisir une suite croissante d'ensembles compacts $(K_n)_{n \geq 1} \subset G$ telle que $G = \bigcup_n K_n$ et telle que pour tout compact $K \subset G$, il existe un entier $m \geq 1$ tel que $K \subset K_m$. Par conséquent, en utilisant (2.1.4), pour tout $k, m \geq 1$, il existe un entier $n(k, m)$ tel que :

$$|\nu(gA_{n(k,m)} \cap A_{n(k,m)}) - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{1}{m^2k}}) \quad \forall g \in K_m.$$

On pose alors pour tout $m \geq 1$:

$$\xi_m = \mathbf{1}_{\prod_{k \geq 1} A_{n(k,m)}} \in L^2(X, \mu).$$

Par construction $0 \leq \xi_m \leq 1$ et $\|\xi_m\|_2 = 1$ pour tout m .

Soit $K \subset G$ un compact. Alors il existe $m \geq 1$ tel que $K \subset K_m$ et ainsi :

$$\begin{aligned}
1 &\geq \langle \pi_X(g)\xi_m | \xi_m \rangle = \int_X \mathbf{1}_{\prod_{k \geq 1} A_{n(k,m)}}(g^{-1}x) \mathbf{1}_{\prod_{k \geq 1} A_{n(k,m)}}(x) d\mu(x) \\
&= \int_X \mathbf{1}_{\prod_{k \geq 1} (gA_{n(k,m)} \cap A_{n(k,m)})}(x) d\mu(x) \\
&= \mu \left(\prod_{k \geq 1} (gA_{n(k,m)} \cap A_{n(k,m)}) \right) = \prod_{k \geq 1} 2\nu(gA_{n(k,m)} \cap A_{n(k,m)}) \\
&\geq \prod_{k \geq 1} 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} (1 - e^{-\frac{1}{m2^k}}) \right) = \prod_{k \geq 1} e^{-\frac{1}{m2^k}} \\
&= e^{-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m2^k}} = e^{-\frac{1}{m}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1,
\end{aligned}$$

uniformément sur K ; où la première inégalité suit de Cauchy-Schwarz. \square

Remarque 2.1.9. La construction de l'espace mesuré obtenu $(X, \sigma(\mathcal{F}), \mu)$ peut être généralisée. En effet, dans un premier temps, en fixant une variable $t > 0$, on considère \mathcal{F}_0^t la famille des sous-ensembles A de X de la forme $A = \prod_n A_n$ avec $A_n \in \mathcal{B}_S$ pour tout n et tels que $\prod_n t\nu(A_n)$ converge dans $[0, \infty)$. On définit alors \mathcal{F}_n^t et \mathcal{F}^t par $\mathcal{F}_n^t = \{A \setminus B : A, B \in \mathcal{F}_{n-1}^t\}$ et $\mathcal{F}^t = \bigcup_n \mathcal{F}_n^t$. On peut également définir μ^t comme dans la définition 2.1.4 et ensuite l'étendre sur $\sigma(\mathcal{F}^t)$. Pour $0 < t < 1$, on a donc $\prod_n t\nu(S) = \lim_{N \rightarrow \infty} t^N = 0$, et donc $\mu^t = 0$. Pour $t = 1$, la famille \mathcal{F}_0^1 contient les cylindres $A_1 \times \dots \times A_N \times S \times S \times \dots$ et donc $\mu^1 = \otimes_n \nu$. Finalement pour $t > 1$, l'espace mesuré $(X, \sigma(\mathcal{F}^t), \mu^t)$ admet une action de G qui est $\sigma(\mathcal{F}^t)$ -mesurable préservant μ^t . On peut également vérifier que le système dynamique correspondant est C_0 et, en utilisant les mêmes arguments que le lemme 2.1 de [JS87], on peut montrer qu'il existe une suite asymptotiquement invariante $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{B}_S$ telle que $\nu(A_n) = \frac{1}{t}$ pour tout n . Ainsi la proposition 2.1.8 peut être obtenue en remplaçant \mathcal{F} par \mathcal{F}^t . On remarque que le cas traité dans cette section correspond au cas particulier $t = 2$.

De manière plus générale encore, en considérant une suite d'espaces probabilisés $((S_n, \mathcal{B}_n, \nu_n))_{n \geq 1}$ et en fixant une suite $t := (t_n)_{n \geq 1}$ avec $t_n \geq 1$ pour tout n , on peut, de la même façon, construire un produit infini singulier d'espaces de probabilité $(X, \mathcal{B}_t, \mu^t)$, où la σ -algèbre \mathcal{B}_t est engendré par les éléments de la forme $A = \prod_n A_n$, avec $A_n \in \mathcal{B}_S$ pour tout n et tels que $\prod_n t_n \nu_n(A_n)$ converge.

Remarque 2.1.10. La remarque suivante est due à A. Calderi et A. Valette que nous remercions. La représentation de permutations π_X de G sur $L^2(X, \sigma(\mathcal{F}), \mu)$ n'est pas continue en général. En effet, si c'était le cas, alors on aurait :

$$\lim_{g \rightarrow e} \langle \pi_X(g)\xi | \xi \rangle = \|\xi\|_2^2 \quad \forall \xi \in L^2(X, \mu).$$

En particulier, $\lim_{g \rightarrow e} \mu(gB \cap B) = 1$ pour tout $B \in \mathcal{F}_0$ avec $\mu(B) = 1$. Choisissons alors un borélien $A \subset S$ tel que $\nu(A) = \frac{1}{2}$ et posons $B = \prod_n A \in \mathcal{F}_0$. Si $g \in G$ est tel que $\nu(gA \triangle A) > 0$, alors $\mu(gB \cap B) = 0$ car $\nu(gA \cap A) < \frac{1}{2}$. Ainsi si on peut faire tendre $g \rightarrow e$, on a prouvé que π_X n'est pas continue. C'est le cas si l'on considère $G = S = \mathbb{T}$ avec la mesure de Lebesgue normalisée.

2.1.2. Cas des groupes discrets

Par la proposition 2.1.8, il reste à démontrer le résultat suivant pour déduire le théorème 2.0.4 dans le cas des groupes discrets :

Proposition 2.1.11. *Si G est discret, il existe un sous-ensemble G -invariant $\Omega \in \sigma(\mathcal{F})$ tel que la restriction de μ à Ω soit σ -finie de sorte que l'espace de Hilbert associé $L^2(\Omega, \mu)$ soit séparable et contienne la suite de vecteurs presque invariants (ξ_n) de la proposition 2.1.8.*

Démonstration. En reprenant les notations de la preuve de la proposition 2.1.8, on pose $X_m = \prod_k A_{n(k,m)}$. Comme G est discret et donc dénombrable, on pose :

$$\Omega = \bigcup_{g \in G} \bigcup_{m \geq 1} g \cdot X_m,$$

où X_m est donc le support de ξ_m pour tout m . Ainsi, par construction, Ω est G -invariant, la restriction de μ à Ω est σ -finie et donc $L^2(\Omega, \mu)$ est séparable et contient la suite (ξ_m) . \square

Remarque 2.1.12. Pour compléter la remarque 2.1.10, on observe (en reprenant la notation de celle-ci) que si G est dénombrable et en posant $X_0 = B = \prod_n A$ et en prenant $\Omega = \bigcup_{g \in G} \bigcup_{m \geq 0} g \cdot X_m$, le vecteur unitaire $\mathbf{1}_B \in L^2(\Omega, \mu)$ satisfait la condition suivante :

$$\varphi_B(g) := \langle \pi_X(g)\mathbf{1}_B, \mathbf{1}_B \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } g = e \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce qui signifie que φ_B est la fonction définie positive δ_e , dont la construction GNS est la représentation régulière gauche de G . Ainsi, on déduit que λ_G est une sous-représentation de π_Ω . Si G n'est pas discret, on ne voit aucune raison valable pour que π_Ω contienne la régulière.

2.1.3. Cas des groupes contenant un réseau

Dans la dernière section, nous avons démontré le théorème 2.0.4 pour les groupes discrets. Dans cette partie, nous allons étendre ce résultat aux groupes localement compacts, dénombrables à l'infini contenant un réseau.

Soit G un tel groupe ayant la propriété de Haagerup et soit H un réseau. Nous noterons l'espace homogène associé $X := G/H$ et μ la probabilité G -invariante sur celui-ci. Pour construire le système dynamique associé à G , on s'appuie sur une construction introduite dans [Jol14].

Comme H est discret avec la propriété de Haagerup, par la section précédente, il existe un système dynamique $(\Omega, \mathcal{B}, H, \nu)$ avec ν H -invariante et σ -finie, qui est C_0 et tel que la représentation de permutation associée π_Ω sur $L^2(\Omega, \nu)$ contienne faiblement 1_H . On construit alors le système dynamique $(\Omega \times X, G, \nu \times \mu)$ de la manière suivante : on choisit une section borélienne régulière $\gamma : X \rightarrow G$ pour la projection canonique $p : G \rightarrow G/H = X$ et on définit $\alpha : G \times X \rightarrow H$ par

$$\alpha(g, x) = \gamma(gx)^{-1}g\gamma(x) \quad \forall g \in G, \forall x \in X.$$

Alors α est un cocycle borélien (section 4.2, [Zim13]), i.e. $\alpha(g_1g_2, x) = \alpha(g_1, g_2x)\alpha(g_2, x)$ pour tous $g_1, g_2 \in G$ et tout $x \in X$ et propre au sens de la définition 1.3 dans [Jol14]. On peut alors définir un G -espace $X \times_\alpha \Omega$ de la façon suivante : $X \times_\alpha \Omega = X \times \Omega$ en tant qu'espace mesuré muni de la mesure produit $\mu \times \nu$, et l'action de G sur $X \times \Omega$ donnée par :

$$g \cdot (x, \omega) := (gx, \alpha(g, x)\omega).$$

On montrera que cette construction nous donne bien une action de G qui est mesurable. De plus, le système $(X \times \Omega, G, \nu \times \mu)$ est C_0 avec $\mu \times \nu$ σ -finie et G -invariante. Finalement, on exhibera une suite de vecteurs presque invariants dans $L^2(X \times_\alpha \Omega)$; ce qui permettra de conclure.

Lemme 2.1.13. *L'action de G sur $X \times \Omega$ définie ci-dessus est une action mesurable, c'est-à-dire que l'application $\beta : G \times (X \times \Omega) \rightarrow X \times \Omega$ définie par $\beta(g, (x, \omega)) = (gx, \alpha(g, x)\omega)$ est mesurable.*

Démonstration. Ceci détermine bien une action grâce à la relation de cocycle, i.e. $\alpha(g_1 g_2, x) = \alpha(g_1, g_2 x) \alpha(g_2, x)$ pour tout $g_1, g_2 \in G$ et tout $x \in X$. Il reste à voir que β est mesurable. Soit $A \in \mathcal{B}(X)$ et $B \in \mathcal{B}$. Regardons

$$\beta^{-1}(A \times B) = \{(g, (x, \omega)) \in G \times (\Omega \times X) : (gx, \alpha(g, x)\omega) \in A \times B\}$$

Ainsi on obtient

$$\{(g, (x, \omega)) \in G \times (X \times \Omega) : \alpha(g, x)\omega \in B\} \cap \{(g, (x, \omega)) \in G \times (X \times \Omega) : gx \in A\}$$

qui appartient à la tribu $\mathcal{B}(G) \times \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}$ car le cocycle est mesurable et l'action sur l'espace homogène également. \square

Lemme 2.1.14. *La mesure produit $\mu \times \nu$ est σ -finie et G -invariante.*

Démonstration. Comme ν est σ -finie, alors il existe une suite d'événements de mesures finies $(E_n)_{n \geq 1}$ telle que $\Omega = \cup_{n \geq 1} E_n$. Comme μ est une probabilité, il suffit donc de poser $B_n = E_n \times X$ pour tout n afin de conclure que la mesure produit est σ -finie.

Soit $A \in \mathcal{B}(X)$ et $B \in \mathcal{B}$ et soit $g \in G$. Regardons

$$\begin{aligned} (\mu \times \nu)(g(A \times B)) &= \int_{X \times \Omega} \mathbf{1}_{g(A \times B)}(x, \omega) d(\mu \times \nu)(x, \omega) \\ &= \int_{X \times \Omega} \mathbf{1}_{A \times B}(g^{-1}x, \alpha(g^{-1}, x)\omega) d(\mu \times \nu)(x, \omega) \\ &= \int_X \mathbf{1}_A(g^{-1}x) \int_\Omega \mathbf{1}_B(\alpha(g^{-1}, x)\omega) d\nu(\omega) d\mu(x) \\ &= \int_X \mathbf{1}_A(g^{-1}x) d\mu(x) \int_\Omega \mathbf{1}_B(\omega) d\nu(\omega) \\ &= \int_X \mathbf{1}_A(x) d\mu(x) \int_\Omega \mathbf{1}_B(\omega) d\nu(\omega) \\ &= \int_{X \times \Omega} \mathbf{1}_{A \times B}(x, \omega) d(\mu \times \nu)(x, \omega) \\ &= (\mu \times \nu)(A \times B) \end{aligned}$$

où l'on utilise le théorème de Fubini ainsi que l'invariance des mesures ν et μ . \square

Proposition 2.1.15. *La représentation de permutation $\pi_{\Omega \times X}$ est unitairement équivalente à $\text{Ind}_H^G(\pi_\Omega)$.*

On rappelle, de la section 1.1.1 (voir également l'appendice E de [BdLHV08]), que $\text{Ind}_H^G(\pi_\Omega)$ agit sur l'espace de Hilbert \mathcal{H}_μ qui est l'espace des fonctions mesurables $\xi : G \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telles que :

- (a) $\xi(gh, \omega) = \pi_\Omega(h^{-1})\xi(g, \omega) = \xi(g, h\omega)$ pour tout $h \in H$ et presque tout $(g, \omega) \in G \times \Omega$;
 (b) $\|\xi\|_2^2 := \int_X \|\xi(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\mu(x) < \infty$. où l'on utilise le fait que, par (a), $g \mapsto \|\xi(g)\|_2$ dépend uniquement de la classe de $g \bmod H$.

Alors la représentation induite est définie par $(\text{Ind}_H^G(\pi_\Omega)(g)\xi)(g', \omega) = \xi(g^{-1}g', \omega)$ (où l'on utilise ici la G -invariance de μ).

Démonstration. Définissons à présent une application borélienne $\Phi : X \times_\alpha \Omega \rightarrow G \times \Omega$ par $\Phi(x, \omega) = (\gamma(x), \omega)$. Alors l'application $\xi \mapsto \xi \circ \Phi$ est une isométrie surjective de \mathcal{H}_μ sur $L^2(X \times_\alpha \Omega)$. En effet, la condition (b) ci-dessus implique que c'est bien une isométrie. Finalement, à $\xi \in \mathcal{H}_\mu$, $g \in G$ et $(x, \omega) \in X \times_\alpha \Omega$ fixés, on a :

$$\begin{aligned} \pi_{X \times_\alpha \Omega}(g)(\xi \circ \Phi)(x, \omega) &= \xi \circ \Phi(g^{-1}x, \alpha(g^{-1}, x)\omega) \\ &= \xi(\gamma(g^{-1}x), \alpha(g^{-1}, x)\omega) \\ &= \xi(\gamma(g^{-1}x)\alpha(g^{-1}, x), \omega) \\ &= \xi(\gamma(g^{-1}x)\gamma(g^{-1}x)^{-1}g^{-1}\gamma(x), \omega) \\ &= \xi(g^{-1}\gamma(x), \omega) \\ &= (\text{Ind}_H^G(\pi_\Omega)(g)\xi) \circ \Phi(x, \omega). \end{aligned}$$

Ce qui montre $\pi_{X \times_\alpha \Omega}$ et $\text{Ind}_H^G \pi_\Omega$ sont équivalentes. □

Corollaire 2.1.16. *La représentation de permutation $\pi_{X \times \Omega}$ sur $L^2(X \times \Omega, \mu \times \nu)$ est C_0 contenant faiblement la représentation triviale 1_G .*

Démonstration. En effet par le lemme précédent, on a $\pi_{X \times \Omega}$ est équivalente à $\text{Ind}_H^G(\pi_\Omega)$. En utilisant le lemme 6.1.3 de [CCJ⁺12], on déduit que $\text{Ind}_H^G(\pi_\Omega)$ est C_0 . De plus, comme 1_H est faiblement contenue dans π_Ω , alors par continuité de l'induction (voir appendice F de [BdLHV08]), on a :

$$\text{Ind}_H^G(1_H) < \text{Ind}_H^G(\pi_\Omega).$$

Mais $\text{Ind}_H^G(1_H) = \lambda_{G/H}$ sur $L^2(X, \mu)$. Comme H est un réseau, $1_G \subset \lambda_{G/H}$. Ainsi on a bien $1_G < \text{Ind}_H^G(\pi_\Omega)$. Et on peut donc conclure que $1_G < \pi_{\Omega \times X}$ par équivalence des représentations. □

Remarque 2.1.17. 1. Cette preuve admet une légère généralisation. On rappelle la définition 6.1.4 de [CCJ⁺12] : un groupe fermé H d'un groupe localement compact G est co-Følner dans G si il existe un état G -invariant sur $L^\infty(G/H)$, ou de manière équivalente si la paire $(G, G/H)$ est moyennable. Ceci est équivalent à demander que $1_G < \lambda_{G/H}$. D'où l'extension reste vraie sous les hypothèses :

Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini ayant la propriété de Haagerup et contenant un sous-groupe fermé H satisfaisant les trois conditions suivantes :

- a) Les fonctions modulaires Δ_G et Δ_H satisfont : $\Delta_G|_H = \Delta_H$;
- b) H est co-Følner dans G ;
- c) H satisfait le théorème 2.0.4.

Alors G satisfait le théorème 2.0.4.

2. Une construction d'une suite de vecteurs presque invariants pour $\pi_{X \times_a \Omega}$ peut être exhibée. Soit $(\xi_n)_{n \geq 1} \subset L^2(\Omega, \nu)$ la suite de vecteurs presque invariants de π_Ω . On considère les fonctions $u_n: H \rightarrow \mathbb{C}$ dans $L^\infty(H)$ définies par $u_n(h) = \langle \pi_\Omega(h)\xi_n, \xi_n \rangle$. On construit alors, comme dans [Jol14], la suite de fonctions $\hat{u}_n: G \rightarrow \mathbb{C}$ en posant

$$\hat{u}_n(g) = \int_X u_n(\alpha(g, x)) d\mu(x).$$

Par propriété du cocycle, on peut démontrer que $\hat{u}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ uniformément sur tout compact de G . En d'autres termes la suite $(h_n)_{n \geq 1} \subset L^2(X \times \Omega)$ définie par $h_n(x, \omega) = \xi_n(\omega)\mathbf{1}_X(x)$ est une suite presque invariante.

2.1.4. Cas des groupes localement compacts, dénombrables à l'infini

On commence par une remarque qu'on doit à S. Baaj : rappelons que pour un groupe G localement compact, dénombrable à l'infini agissant sur un espace mesuré (Ω, μ) , où μ est σ -finie et G -invariante, et si $L^2(\Omega, \mu)$ est séparable, alors la représentation unitaire associée π_Ω est automatiquement continue. En effet, cela suit de la proposition A.6.1. de [BdLHV08] par exemple.

Cela signifie que si nous sommes capables de restreindre l'action de G sur un tel espace mesuré, alors la preuve du théorème 2.0.4 serait complète. Malheureusement, nous n'avons pas réussi à faire de la sorte. On doit donc procéder de la façon suivante : on définit une sous-famille \mathcal{F}_c de \mathcal{F} et on construit une mesure μ_c sur $\sigma(\mathcal{F}_c)$ de sorte que la représentation π_X sur $L^2(X, \sigma(\mathcal{F}_c), \mu_c)$ soit continue, et dans un second temps, en utilisant la continuité, on restreint l'action de G sur un sous-espace mesuré σ -finie de X ayant toutes les propriétés désirées.

On se fixe une suite croissante $(K_n)_{n \geq 1}$ de sous-ensembles compacts de G avec la propriété suivante : $e \in \overset{\circ}{K}_1$, $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ pour tout n et $G = \bigcup_n K_n$. Posons $K := K_1$ qui est un voisinage compact de e .

Définition 2.1.18. 1. La famille $\mathcal{F}_{c,0}$ est la collection d'ensembles $A = \prod_n A_n \in \mathcal{F}_0$ tels que $\mu(A) = \prod_n 2\nu(A_n) = 0$ ou

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=N}^{\infty} 2\nu(gA_n \cap A_n) = 1,$$

uniformément sur K .

2. On définit la suite $(\mathcal{F}_{c,n})_{n \geq 1}$ de collections de sous-ensembles de X par induction : $\mathcal{F}_{c,n} = \{B \setminus A : A, B \in \mathcal{F}_{c,n-1}\}$, et on pose $\mathcal{F}_c := \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_{c,n}$.

On note $\sigma(\mathcal{F}_c)$ la σ -algèbre engendrée par \mathcal{F}_c ; \mathfrak{c} est une σ -sous-algèbre de $\sigma(\mathcal{F})$.

Constatons que la suite $(\prod_{k \geq 1} A_{n(k,m)})_{m \geq 1}$ construite dans la preuve de la proposition 2.1.8 est contenue dans $\mathcal{F}_{c,0}$. En effet, on a démontré que :

$$2\nu(gA_{n(k,m)} \cap A_{n(k,m)}) \in [e^{-1/m2^k}, 1], \quad \forall g \in K.$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} 1 &\geq \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=N}^{\infty} 2\nu(gA_{n(k,m)} \cap A_{n(k,m)}) \\ &\geq \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=N}^{\infty} e^{-1/m2^k} \\ &= e^{-\left(\frac{1}{m}\right) \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k}} = 1, \end{aligned}$$

uniformément sur K . Ainsi, on déduit que la suite de vecteurs unitaires presque invariants $(\xi_m)_{m \geq 1} \subset L^2(X, \sigma(\mathcal{F}_c), \mu)$. Dans le but de démontrer que $\mathcal{F}_{c,0}$ est stable par intersections finies, on a besoin du lemme élémentaire suivant :

Lemme 2.1.19. Soit $(x_k)_{k \geq 1}, (a_k)_{k \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ deux suites telles que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k \geq N} x_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k \geq N} (1 - a_k) = 1.$$

Alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k \geq N} (x_k - a_k) = 1.$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe N_0 tel que $x_k > \frac{2}{3}$ et $0 \leq a_k < \frac{1}{2}$ pour tout $k \geq N_0$. Ceci implique immédiatement :

$$(-2a_k + a_k^2)x_k \leq -\frac{3}{2}a_k x_k \leq -a_k, \quad \forall k \geq N_0.$$

Ainsi, on a pour tout $N \geq N_0$:

$$\prod_{k \geq N} x_k (1 - a_k)^2 \leq \prod_{k \geq N} (x_k - a_k) \leq \prod_{k \geq N} x_k.$$

ce qui démontre l'énoncé. □

Lemme 2.1.20. Soit $A, B \in \mathcal{F}_{c,0}$. Alors $A \cap B \in \mathcal{F}_{c,0}$.

Démonstration. Soit $A, B \in \mathcal{F}_{c,0}$ avec $A = \prod_n A_n$ et $B = \prod_n B_n$. Si A ou B est de mesure nulle, alors $\mu(A \cap B) = 0$ et donc $A \cap B \in \mathcal{F}_{c,0}$. Supposons donc $\mu(A \cap B) \neq 0$. Ainsi on a que les 5 suites suivantes :

$$\prod_{n=N}^{\infty} 2\nu(gA_n \cap A_n), \prod_{n=N}^{\infty} 2\nu(gB_n \cap B_n), \prod_{n=N}^{\infty} 2\nu(A_n \cap B_n), \prod_{n=N}^{\infty} 2\nu(A_n), \prod_{n=N}^{\infty} 2\nu(B_n)$$

convergent uniformément vers 1 sur K quand $N \rightarrow \infty$.

Comme $\nu(A_n), \nu(B_n) \neq 0$ pour tout n , on a :

$$\prod_{n=N}^{\infty} \frac{2\nu(gA_n \cap A_n)}{2\nu(A_n)}, \prod_{n=N}^{\infty} \frac{2\nu(gB_n \cap B_n)}{2\nu(B_n)}, \prod_{n=N}^{\infty} \frac{2\nu(A_n \cap B_n)}{2\nu(A_n)}, \prod_{n=N}^{\infty} \frac{2\nu(A_n \cap B_n)}{2\nu(B_n)}$$

convergent uniformément vers 1 sur K quand $N \rightarrow \infty$.

De plus,

$$\begin{aligned} 1 &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{n=N}^{\infty} \frac{2\nu(g(A_n \cap B_n) \cap (A_n \cap B_n))}{2\nu(A_n \cap B_n)} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{n=N}^{\infty} \frac{2\nu(A_n \cap B_n) - 2\nu(A_n \cap B_n \cap gA_n^c) - 2\nu(A_n \cap B_n \cap gA_n \cap gB_n^c)}{2\nu(A_n \cap B_n)} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{2\nu(A_n \setminus gA_n)}{2\nu(A_n \cap B_n)} - \frac{2\nu(B_n \setminus gB_n)}{2\nu(A_n \cap B_n)} \right). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.1.19, on va démontrer que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{2\nu(A_n \setminus gA_n)}{2\nu(A_n \cap B_n)} - \frac{2\nu(B_n \setminus gB_n)}{2\nu(A_n \cap B_n)} \right) = 1. \quad (2.1.5)$$

On doit donc vérifier :

(1)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{2\nu(B_n \setminus gB_n)}{2\nu(A_n \cap B_n)} \right) = 1;$$

(2)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{2\nu(A_n \setminus gA_n)}{2\nu(A_n \cap B_n)} \right) = 1.$$

On démontre en détails (1); et comme (2) s'obtient de manière similaire, on aura (2.1.5). On a

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{2\nu(B_n \setminus gB_n)}{2\nu(A_n \cap B_n)} \right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{2\nu(B_n \setminus gB_n)}{2\nu(A_n \cap B_n)} \right) \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=N}^{\infty} \frac{2\nu(A_n \cap B_n)}{2\nu(B_n)} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=N}^{\infty} \left(\frac{2\nu(A_n \cap B_n) - 2\nu(B_n \setminus gB_n)}{2\nu(B_n)} \right). \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{2\nu(B_n \setminus gB_n)}{2\nu(B_n)} \right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=N}^{\infty} \left(\frac{2\nu(B_n) - 2\nu(B_n \setminus gB_n)}{2\nu(B_n)} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=N}^{\infty} \frac{2\nu(B_n \cap gB_n)}{2\nu(B_n)} = 1, \end{aligned}$$

comme observé ci-dessus, on déduit le résultat. □

Les mêmes arguments que ceux énoncés dans la section précédente, i.e. du lemme 2.1.3 jusqu'à la proposition 2.1.8, nous permettent d'obtenir les propriétés suivantes :

Proposition 2.1.21. *La famille \mathcal{F}_c a les propriétés suivantes :*

- (i) Pour tout $A, B \in \mathcal{F}_c$, on a $A \cap B \in \mathcal{F}_c$ et $A \setminus B \in \mathcal{F}_c$ de sorte que \mathcal{F}_c est un semi-anneau d'ensembles, et l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de \mathcal{F}_c est un anneau engendré par \mathcal{F}_c , noté $\mathcal{R}(\mathcal{F}_c)$.
- (ii) L'action diagonale de G sur $X = \prod_n S$ est $\sigma(\mathcal{F}_c)$ -mesurable.
- (iii) Il existe une mesure $\mu_c: \sigma(\mathcal{F}_c) \rightarrow [0, \infty]$ qui est G -invariante et telle que $\mu_c(\prod_n A_n) = \prod_n 2\nu(A_n)$ pour tout $A = \prod_n A_n \in \mathcal{F}_{c,0}$.
- (iv) Le système dynamique $(X, \sigma(\mathcal{F}_c), \mu_c, G)$ est C_0 .
- (v) Soit $(A_{n(k,m)})_{k,m}$ la famille construite à la proposition 2.1.8 et posons $X_m = \prod_k A_{n(k,m)}$ et $\xi_m = \mathbf{1}_{X_m}$ pour tout $m \geq 1$. Alors $(\xi_m)_{m \geq 1}$ est une suite de vecteurs unitaires presque invariants contenue dans $L^2(X, \sigma(\mathcal{F}_c), \mu_c)$.

À présent, on peut démontrer que la représentation π_X sur $L^2(X, \sigma(\mathcal{F}_c), \mu_c)$ est continue. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $A \in \sigma(\mathcal{F}_c)$ tel que $\mu_c(A) < \infty$, on a :

$$\|\pi_X(g)\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A\|_2^2 = \int_X |\mathbf{1}_{gA} - \mathbf{1}_A|^2 d\mu_c = \int_X |\mathbf{1}_{gA} - \mathbf{1}_A| d\mu_c = \mu_c(gA \triangle A) \rightarrow 0,$$

quand $g \rightarrow e$.

Proposition 2.1.22. Soit $A \in \sigma(\mathcal{F}_c)$ tel que $\mu_c(A) < \infty$. Alors

$$\lim_{g \rightarrow e} \mu_c(gA \triangle A) = 0.$$

Démonstration. On note \mathcal{S} la famille d'ensembles $A \in \sigma(\mathcal{F}_c)$ tels que $\mu_c(A) < \infty$ et avec $\lim_{g \rightarrow e} \mu_c(gA \triangle A) = 0$. On montre les assertions suivantes.

- (i) On a $\mathcal{F}_{c,0} \subset \mathcal{S}$, i.e. $\lim_{g \rightarrow e} \mu_c(gA \triangle A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{F}_{c,0}$.

En effet, si $\mu_c(A) = 0$, l'assertion est triviale. Supposons donc que $A = \prod_n A_n$ et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=N}^{\infty} 2\nu(gA_n \cap A_n) = 1$$

uniformément sur K . Soit $(g_m)_{m \geq 1}$ une suite dans K qui converge vers e . On montre que $\mu_c(g_m A \triangle A) \rightarrow \mu_c(A)$ quand $m \rightarrow \infty$; ce qui démontrera l'énoncé puisque pour tout m , on a :

$$\begin{aligned} \mu_c(g_m A \triangle A) &= \int_X |\mathbf{1}_{g_m A} - \mathbf{1}_A| d\mu_c \\ &\leq \int_X (\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{g_m A \cap A}) d\mu_c + \int_X (\mathbf{1}_{g_m A} - \mathbf{1}_{g_m A \cap A}) d\mu_c \\ &= 2(\mu_c(A) - \mu_c(g_m A \cap A)), \end{aligned}$$

où l'on utilise la G -invariance de μ_c et le fait que $\mu_c(A) < \infty$.

Comme $\prod_{n=N}^{\infty} 2\nu(gA_n \cap A_n) \rightarrow 1$ uniformément sur K , il existe N_0 tel que :

$$\prod_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{2\nu(g_m A_n \cap A_n)}{2\nu(A_n)} \in \left(\sqrt{1 - \varepsilon}, \sqrt{1 + \varepsilon} \right), \quad \forall m.$$

Comme la représentation de G sur $L^2(\mathcal{S}, \nu)$ est continue, on a pour chaque n fixé :

$$\nu(g_m A_n \cap A_n) \rightarrow \nu(A_n), \quad m \rightarrow \infty.$$

Il existe donc M tel que pour tout $n \in \{1, \dots, N_0\}$,

$$\frac{\nu(g_m A_n \cap A_n)}{\nu(A_n)} \in [(1 - \varepsilon)^{1/2N_0}, (1 + \varepsilon)^{1/2N_0}], \quad \forall m \geq M.$$

Alors on obtient pour tout $m \geq M$:

$$\frac{\prod_{n \geq 1} 2\nu(g_m A_n \cap A_n)}{\prod_{n \geq 1} 2\nu(A_n)} = \left(\prod_{n=1}^{N_0} \frac{2\nu(g_m A_n \cap A_n)}{2\nu(A_n)} \right) \cdot \left(\prod_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{2\nu(g_m A_n \cap A_n)}{2\nu(A_n)} \right) \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon).$$

Ce qui montre que $\mu_c(g_m A \cap A) / \mu_c(A) \rightarrow 1$ et donc $\mu_c(g_m A \cap A) \rightarrow \mu_c(A)$ quand $m \rightarrow \infty$.

- (ii) Si $A, B \in \mathcal{S}$, alors $A \cap B \in \mathcal{S}$ et $A \setminus B \in \mathcal{S}$. En particulier, \mathcal{S} est un semi-anneau de X contenant $\mathcal{F}_{c,0}$. En effet, soit $A, B \in \mathcal{S}$ et soit $g \in G$. Alors

$$\begin{aligned} \mu_c(g(A \cap B) \Delta (A \cap B)) &= \int_X |\mathbf{1}_{gA} \mathbf{1}_{gB} - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B| d\mu_c \\ &\leq \int_X |\mathbf{1}_{gA}(\mathbf{1}_{gB} - \mathbf{1}_B)| d\mu_c + \int_X |\mathbf{1}_B(\mathbf{1}_{gA} - \mathbf{1}_A)| d\mu_c \\ &\leq \mu_c(gA \Delta A) + \mu_c(gB \Delta B) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quand $g \rightarrow e$. Ceci montre que $A \cap B \in \mathcal{S}$. De plus,

$$\begin{aligned} \mu_c(g(A \setminus B) \Delta (A \setminus B)) &= \int_X |\mathbf{1}_{g(A \setminus B)} - \mathbf{1}_{A \setminus B}| d\mu_c \\ &= \int_X |\mathbf{1}_{gA}(1 - \mathbf{1}_{gB}) - \mathbf{1}_A(1 - \mathbf{1}_B)| d\mu_c \\ &= \int_X |\mathbf{1}_{gA} - \mathbf{1}_A - (\mathbf{1}_{gA} \mathbf{1}_{gB} - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B)| d\mu_c \\ &\leq 2\mu_c(gA \Delta A) + \mu_c(gB \Delta B) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quand $g \rightarrow e$. Ceci montre que $A \setminus B \in \mathcal{S}$. Ainsi en combinant avec le lemme 2.1.20 on déduit que $\mathcal{F}_c \subset \mathcal{S}$.

- (iii) Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$, alors leur union $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{S}$. En particulier, \mathcal{S} est un anneau d'ensembles de X contenant $\mathcal{R}(\mathcal{F}_c)$.

Par (ii), on peut supposer que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. En posant $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$, on a :

$$\begin{aligned} \mu_c(gA \Delta A) &= \int_X \left| \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{gA_i} - \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i} \right| d\mu_c \\ &\leq \sum_{i=1}^n \mu_c(gA_i \Delta A_i) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quand $g \rightarrow e$.

(iv) Soit $A \in \sigma(\mathcal{F}_c)$ tel que $\mu_c(A) < \infty$, alors

$$\lim_{g \rightarrow e} \mu_c(gA \Delta A) = 0.$$

En effet, fixons $\varepsilon > 0$. Par construction de la mesure μ_c sur $\sigma(\mathcal{F}_c)$ et comme \mathcal{S} est un anneau d'ensembles contenant $\mathcal{R}(\mathcal{F}_c)$,

$$\mu_c(A) = \inf \left\{ \sum_{i \geq 1} \mu_c(A_i) : A_i \in \mathcal{R}(\mathcal{F}_c) \forall i, A \subset \bigcup_i A_i \right\}.$$

Par conséquent, il existe une suite $(A_i)_{i \geq 1}$ telle que $A \subset \bigcup_i A_i := B$ avec

$$\mu_c(A) \leq \sum_i \mu_c(A_i) < \mu_c(A) + \frac{\varepsilon}{5}.$$

Par (ii), on peut supposer $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. Choisissons N assez grand tel que :

$$\sum_{i > N} \mu_c(A_i) < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Soit $V \subset G$ un voisinage ouvert de e tel que :

$$\sum_{i=1}^N \mu_c(gA_i \Delta A_i) < \frac{\varepsilon}{5}, \quad \forall g \in V.$$

Ainsi pour tout $g \in V$, on a :

$$\begin{aligned} \mu_c(gA \Delta A) &\leq \int_X |\mathbf{1}_{gA} - \mathbf{1}_{gB}| d\mu_c + \int_X |\mathbf{1}_{gB} - \mathbf{1}_B| d\mu_c + \int_X |\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A| d\mu_c \\ &\leq 2\mu_c(B) + \sum_i \mu_c(gA_i \Delta A_i) \\ &\leq 2\mu_c(B \setminus A) + \sum_{i=1}^N \mu_c(gA_i \Delta A_i) + 2 \sum_{i > N} \mu_c(A_i) < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.1.23. Comme μ n'est pas σ -finie, il n'y a aucune raison pour que μ coïncide avec μ_c sur $\sigma(\mathcal{F}_c)$, même si c'est le cas sur $\mathcal{F}_c \subset \mathcal{F}$.

Lemme 2.1.24. Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \rho)$ un espace mesuré sur lequel G agit par automorphismes boréliens et tel que $\rho(gB) = \rho(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$ avec $\rho(B) < \infty$. Alors l'action de G préserve ρ , i.e. $\rho(gB) = \rho(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$.

Démonstration. S'il existait un $g \in G$ et $B \in \mathcal{B}$ tels que $\rho(B) = \infty$ et $\rho(gB) \neq \rho(B)$, alors nécessairement $\rho(gB) < \infty$. Ceci contredit l'hypothèse puisque $\rho(g^{-1}gB) = \rho(B)$ serait fini. □

Proposition 2.1.25. Il existe $\Omega \in \sigma(\mathcal{F}_c)$, G -invariant, tel que la mesure $\rho: \sigma(\mathcal{F}_c) \rightarrow [0, \infty]$, définie par $\rho(B) := \mu_c(B \cap \Omega)$ pour tout $B \in \sigma(\mathcal{F}_c)$, est σ -finie et G -invariante. De plus, l'es-

pace de Hilbert $L^2(\Omega, \rho)$ est séparable et contient la suite de vecteurs unitaires $(\xi_m)_{m \geq 1}$ de la proposition 2.1.21.

Démonstration. Soit $D = \{g_1 = e, g_2, \dots\} \subset G$ un sous-ensemble dense, dénombrable de G . Posons $Y = \bigcup_{m \geq 1} X_m$, où $X_m = \prod_k A_{n(k,m)}$ de la proposition 2.1.21 et posons

$$\Omega = \bigcup_{h \in D} hY.$$

Comme ρ sur $(X, \sigma(\mathcal{F}_c))$ est définie par

$$\rho(B) = \mu_c(B \cap \Omega)$$

pour tout $B \in \sigma(\mathcal{F}_c)$, on a bien ρ σ -finie. Il reste donc à montrer la G -invariance. Par le lemme précédent, il suffit de montrer que pour tout $g \in G$, on a $\rho(gB) = \rho(B)$ pour tout $B \in \sigma(\mathcal{F}_c)$ avec $\rho(B) < \infty$. Posons alors pour tout $i \geq 1$:

$$B_i = (B \cap g_i Y) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} g_j Y \right),$$

de sorte que $B \cap \Omega = \bigsqcup_i B_i$ et ainsi $\rho(B) = \sum_i \rho(B_i) < \infty$.

On a :

$$\rho(gB) \geq \rho(g(B \cap \Omega)) = \sum_i \rho(gB_i).$$

Pour i fixé, soit $(h_n^{(i)})_{n \geq 1} \subset D$ une suite telle que $h_n^{(i)} \rightarrow gg_i$ quand $n \rightarrow \infty$. On a

$$\rho(gB_i) \geq \rho(gB_i \cap h_n^{(i)} g_i^{-1} B_i) \quad \forall n$$

et de plus :

$$\rho(gB_i \cap h_n^{(i)} g_i^{-1} B_i) = \mu_c(gB_i \cap h_n^{(i)} g_i^{-1} B_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu_c(gB_i) = \mu_c(B_i).$$

Par conséquent $\rho(gB_i) \geq \mu_c(B_i)$ et donc :

$$\rho(gB) \geq \sum_i \rho(gB_i) \geq \sum_i \mu_c(B_i) = \mu_c(B \cap \Omega) = \rho(B).$$

D'où

$$\rho(B) \leq \rho(gB) \leq \rho(g^{-1}gB) = \rho(B).$$

Pour conclure la séparabilité de $L^2(\Omega, \rho)$ suit de la dénombrabilité de D ainsi que de sa densité dans G . \square

2.2. Discussion sur l'ergodicité

Un système dynamique C_0 au sens de la définition 1.1.12 n'est pas nécessairement ergodique. En effet, on rappelle l'exemple suivant : on considère l'action de $G = \mathbb{Z}$ muni de la topologie discrète agissant par translations sur l'espace mesuré σ -fini $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ où μ désigne la mesure de Lebesgue. On a bien une action par automorphismes boréliens et la mesure μ est G -invariante puisque c'est la mesure de Haar de \mathbb{R} .

De plus l'action est "ergodique" sur les événements de mesure finie. En effet soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ de mesure finie tel que $x + A = A \quad \forall x \in \mathbb{Z}$. Supposons par l'absurde que $\mu(A) \neq 0$. Alors par régularité de μ , il existe un ouvert U de mesure non nulle tel que $U \subset A$. Ainsi il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $[a, b] \subset A$. D'où

$$\bigcup_{x \in \mathbb{Z}} [x + a, x + b] \subset A.$$

Ce qui implique que $\mu(A) = \infty$; ce qui est une contradiction.

Cependant en prenant $A = (0, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z}$, on a $x + A = A$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$. Mais $\mu(A) = \mu(\mathbb{R} \setminus A) = \infty$. Ce qui montre que l'action de \mathbb{Z} n'est pas ergodique.

La fonction $x \mapsto \mu((x + A) \cap B)$ est continue pour tous $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ puisque \mathbb{Z} est discret. De plus, il est évident que cette fonction est C_0 pour tout intervalle borné de la forme $A = [a, b]$ et $B = [c, d]$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Soit $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ de mesure finie. On a :

$$\infty > \mu(A) = \mu(A \cap \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n + 1]) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu(A \cap (n, n + 1]).$$

Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe n_A et n_B assez grand tel que $\mu(A \cap [-n_A, n_A]^c) < \epsilon$ et $\mu(B \cap [-n_B, n_B]^c) < \epsilon$. En posant pour A (la décomposition pour B se fait de la même manière), $A_1 = A \cap [-n_A, n_A]^c$ et $A_2 = A \cap [-n_A, n_A]$, on obtient une décomposition de A où $A = A_1 \sqcup A_2$ avec $\mu(A_1) < \epsilon$. Ainsi en prenant $|x| > n_A + n_B$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mu((x + A) \cap B) &= \mu((x + A) \cap B_1) + \mu((x + A) \cap B_2) \\ &< \epsilon + \mu((x + A_1) \cap B_2) + \mu((x + A_2) \cap B_2) \\ &< 2\epsilon + \mu(\emptyset) = 2\epsilon, \end{aligned}$$

où l'on utilise l'invariance de μ . Ce qui démontre que le système dynamique $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{Z}, \mu)$ est C_0 .

Montrons encore que ce système contient une suite de vecteurs presque invariants. Posons $\xi_n = \frac{1}{(2n)^{1/2}} \mathbf{1}_{[-n, n]}$ pour tout n . On a bien $\|\xi_n\|_2 = 1$ pour tout n :

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\xi_n(x)} \xi_n(x) dx = \frac{1}{2n} \mu([-n, n]) = 1.$$

De plus pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle \pi_{\mathbb{R}}(x) \xi_n, \xi_n \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \xi_n(u - x) \overline{\xi_n(u)} du = \frac{1}{2n} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-n+x, n+x]}(u) \mathbf{1}_{[-n, n]}(u) du \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2n} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-n+x, n]}(u) = \frac{2n-x}{2n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ \frac{1}{2n} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-n, n+x]}(u) = \frac{2n+x}{2n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1, & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi on a bien que $\langle \pi_{\mathbb{R}}(x) \xi_n, \xi_n \rangle$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{Z} vers 1.

Remarque 2.2.1. De manière plus générale, si l'on considère un groupe G localement compact (non-compact) moyennable et H un sous-groupe discret propre de G . Alors l'action de H sur G ne sera pas ergodique, cependant le système dynamique sera C_0 dans notre sens.

Le théorème 2.0.4 caractérise la propriété de Haagerup de G en termes d'actions sur des

espaces mesurés infinis. Dans cette section, on détermine si de telles actions peuvent être supposées ergodiques. L'exemple précédent montre qu'il faut être prudent sur le choix du système dynamique C_0 . La question est donc la suivante :

Question 2.2.2. *Étant donné un groupe avec la propriété de Haagerup, existe-t-il un système dynamique associé étant C_0 et ergodique ?*

Premièrement, on donne une autre preuve du théorème 2.0.4 en utilisant des actions tordues introduites dans la section 2.5 de [MV20]. Puis, par des outils développés dans [MV20] et [AIM19], on démontrera qu'il est possible de construire de tels systèmes dynamiques.

On commence par un bref rappel sur les processus Gaussiens. On réfère à [AIM19] pour plus d'informations. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert réel séparable. Par la remarque A.7.7 de [BdLHV08], il existe un espace standard probabilisé $(\hat{\mathcal{H}}, \mu)$ et une isométrie linéaire $\iota: \mathcal{H} \hookrightarrow L^2(\hat{\mathcal{H}}, \mu)$ telle que :

- 1) Pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, $\iota(\xi)$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\|\xi\|^2$;
- 2) La famille de variables aléatoires $(\iota(\xi))_{\xi \in \mathcal{H}}$ engendre la σ -algèbre de $(\hat{\mathcal{H}}, \mu)$.

De plus, ce processus aléatoire est unique dans le sens suivant : supposons qu'il existe un autre triplet (X, ν, ι') satisfaisant (1) and (2), alors il existe une bijection bimesurable $\varphi: (\hat{\mathcal{H}}, \mu) \rightarrow (X, \nu)$ telle que $\varphi_*\mu = \nu$ et presque partout

$$\iota'(\xi) \circ \varphi = \iota(\xi),$$

pour tout $\xi \in \mathcal{H}$. On utilise les mêmes notations que [MV20] et on note ce processus Gaussien $(\hat{\xi})_{\xi \in \mathcal{H}}$. Remarquons que l'unicité de ce processus Gaussien implique que pour toute transformation orthogonale $U \in O(\mathcal{H})$, il existe un automorphisme préservant la mesure \hat{U} de $(\hat{\mathcal{H}}, \mu)$ tel que

$$\widehat{U}\xi = \hat{\xi} \circ \hat{U}^{-1}.$$

En définissant une nouvelle mesure sur $\hat{\mathcal{H}}$ par la formule $d\mu_\eta = \exp(-\frac{1}{2}\|\eta\|^2 + \hat{\eta})d\mu$ pour un vecteur fixé $\eta \in \mathcal{H}$, on remarque que la variable aléatoire

$$\hat{\xi} - \langle \xi, \eta \rangle$$

a une distribution normale $\mathcal{N}(0, \|\xi\|^2)$ par rapport à μ_η . Par conséquent, en utilisant l'unicité, il existe un automorphisme non-singulier \hat{T}_η de $(\hat{\mathcal{H}}, \mu)$ tel que

$$\hat{\xi} \circ \hat{T}_\eta^{-1} = \hat{\xi} - \langle \xi, \eta \rangle,$$

pour tout $\xi \in \mathcal{H}$. On utilise la notation $\hat{T}_\eta(\omega) = \omega + \eta$ de sorte que la formule intuitive $\langle \omega + \eta, \xi \rangle = \langle \omega, \xi \rangle + \langle \eta, \xi \rangle$ soit valable, où $\langle \omega, \xi \rangle$ désigne $\hat{\xi}(\omega)$. Un calcul montre alors que pour $V \in O(\mathcal{H})$ et $\eta \in \mathcal{H}$ on a :

$$\hat{V}(\omega + \eta) = \hat{V}(\omega) + V(\eta).$$

Par conséquent, on obtient un morphisme de $\text{Isom}(\mathcal{H})$ vers $\text{Aut}(\hat{\mathcal{H}}, [\mu])$. En particulier, pour toute action $\alpha: G \curvearrowright \mathcal{H}$ par isométries affines, on a une action gaussienne non-singulière $\hat{\alpha}: G \curvearrowright (\hat{\mathcal{H}}, \mu)$.

Soit $\pi: G \rightarrow O(\mathcal{H})$ une représentation orthogonale de G avec la propriété de Haagerup. Soit $c \in Z^1(\pi, \mathcal{H})$ un 1-cocycle propre et soit $\alpha: G \curvearrowright \mathcal{H}$ l'action affine isométrique propre associée.

Considérons alors l'espace mesurable $\Omega = \hat{\mathcal{H}} \times \mathbb{R}$ équipé de la mesure produit $\nu := \mu \otimes \lambda$, où λ désigne la mesure de Lebesgue. On définit alors l'action tordue $\beta: G \curvearrowright (\Omega, \nu)$ par la formule :

$$\beta_g(\omega, t) = (\hat{\pi}(g)\omega, t + \langle \omega, c(g^{-1}) \rangle), \quad (2.2.6)$$

de sorte que la mesure produit infinie soit préservée. Dans un premier temps, on montre que la représentation de Koopman associée à β est de classe C_0 en utilisant la proposition suivante (voir page 54 de [AIM19]) :

Proposition 2.2.3. *Soit $\sigma: G \curvearrowright X$ une action non-singulière de G sur un espace X et $\pi: G \curvearrowright L^2(X)$ la représentation de Koopman associée. Alors sont équivalents :*

- (i) $\lim_{g \rightarrow \infty} \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle = 0$ pour un certain vecteur séparateur $\xi \in L^2(X)^+$.
- (ii) π est mélangeante.

Soit $(g_n)_{n \geq 1}$ une suite dans G qui tend vers l'infini. On note X_n la variable aléatoire $\widehat{c(g_n)}$ de densité

$$\frac{1}{\|c(g_n)\| \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\|c(g_n)\|^2}\right).$$

Soit $\xi = 1 \otimes h \in L^2(\Omega, \nu)$, où $h(t) = \frac{1}{1+t^2}$. On calcule alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \pi_{\Omega}(g_n)\xi, \xi \rangle,$$

où π_{Ω} est la représentation de Koopman associée à β . Comme ν est G -invariante, on a que π_{Ω} est simplement la représentation de permutations sur $L^2(\Omega)$. Donc :

$$\begin{aligned} \langle \pi_{\Omega}(g_n)\xi, \xi \rangle &= \int_{\Omega} (\pi_{\Omega}(g_n)\xi)(u)\xi(u)d\nu(u) \\ &= \int_{\hat{\mathcal{H}} \times \mathbb{R}} \xi(\beta_{g_n^{-1}}(\omega, t))\xi(\omega, t)d(\mu \otimes \lambda)(\omega, t) \\ &= \int_{\hat{\mathcal{H}} \times \mathbb{R}} \frac{1}{1 + (t + X_n(\omega))^2} \frac{1}{1 + t^2} d(\mu \otimes \lambda)(\omega, t). \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, cette dernière intégrale est égale à :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + t^2} \left(\int_{\hat{\mathcal{H}}} \frac{1}{1 + (t + X_n(\omega))^2} d\mu(\omega) \right) dt.$$

Ainsi on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + t^2} \left(\frac{1}{\|c(g_n)\| \sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + (t + x)^2} e^{\frac{-x^2}{2\|c(g_n)\|^2}} dx \right) dt.$$

En appliquant à nouveau le théorème de Fubini-Tonelli, cette intégrale devient :

$$\frac{1}{\|c(g_n)\| \sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \frac{1}{1 + t^2} \frac{1}{1 + (t + x)^2} e^{\frac{-x^2}{2\|c(g_n)\|^2}} d\lambda(x, t).$$

En écrivant pour tout n :

$$f_n(x, t) = \frac{1}{\|c(g_n)\| \sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{1+(t+x)^2} e^{\frac{-x^2}{2\|c(g_n)\|^2}},$$

on remarque que $|f_n(x, t)| \leq \frac{C}{(1+t^2)(1+(x+t)^2)}$ pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout n suffisamment grand, où $C > 0$. En effet, comme le cocycle est propre, alors pour N assez grand on a :

$$\|c(g_n)\| \geq A > 0 \quad \forall n \geq N.$$

De plus, la suite de fonctions (f_n) converge ponctuellement vers 0, par propriété du cocycle c . En utilisant le théorème de convergence dominée, on déduit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \pi_\Omega(g_n) \xi, \xi \rangle = 0.$$

Comme ξ est un vecteur séparateur, la proposition 2.2.3 permet d'obtenir :

Proposition 2.2.4. *Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini étant $a(T)$ -moyennable. Alors π_Ω , la représentation de Koopman associée à β , est C_0 .*

Remarque 2.2.5. Constatons qu'avec une telle action la propriété de π_Ω d'être C_0 dépend uniquement du 1-cocycle, et non des propriétés de l'action p.m.p. $\hat{\pi}$.

On montre à présent que π_Ω admet une suite de vecteurs presque invariants. On considère pour tout n

$$\xi_n = 1 \otimes \frac{1}{\sqrt{2n}} 1_{[-n, n]}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \langle \pi_\Omega(g) \xi_n, \xi_n \rangle &= \frac{1}{2n} \frac{1}{\|c(g)\| \sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-x^2}{2\|c(g)\|^2}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{[-n, n]}(t) 1_{[-n, n]}(t+x) dt \right) dx \\ &= \frac{1}{2n} \frac{1}{\|c(g)\| \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{\frac{-x^2}{2\|c(g)\|^2}} (2n-x) dx + \frac{1}{2n} \frac{1}{\|c(g)\| \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{\frac{-x^2}{2\|c(g)\|^2}} (2n+x) dx \\ &= \frac{2(n + \frac{\|c(g)\|}{\sqrt{2\pi}})}{2n}. \end{aligned}$$

Ainsi par continuité du 1-cocycle, on déduit que pour tout sous-ensemble compact K de G , on a :

$$\sup_{g \in K} \langle \pi_\Omega(g) \xi_n, \xi_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Pour conclure la continuité de π_Ω est obtenue en utilisant le lemme A.6.2 page 309 de [BdLHV08]. On améliore à présent le théorème 2.0.4 (l'amélioration se trouve dans le dernier énoncé). Pour cela, on rappelle qu'un groupe localement compact est dit non-périodique si et seulement si il contient un sous-groupe discret isomorphe à \mathbb{Z} .

Théorème 2.2.6. *Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini. Alors G a la propriété de Haagerup si et seulement si G admet une action par automorphismes boréliens sur un espace mesuré (Ω, μ) tel que μ est σ -finie, G -invariante et satisfait les deux propriétés suivantes :*

1. Pour tout sous-ensemble mesurable $A, B \subset \Omega$ tels que $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$, la fonction $g \mapsto \mu(gA \cap B)$ est C_0 , i.e. $(\Omega, \mathcal{B}, \mu, G)$ est un système dynamique C_0 ;
2. Il existe une suite de vecteurs unitaires $(\xi_n)_{n \geq 1} \subset L^2(\Omega, \mu)^+$ tels que pour tout sous-ensemble compact K de G , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{g \in K} \langle \pi_\Omega(g) \xi_n, \xi_n \rangle = 1.$$

De plus, si G est non-périodique, alors le système dynamique C_0 peut être supposé ergodique.

Il reste donc à démontrer l'ergodicité. La preuve se fait en deux étapes. Premièrement, on montre la proposition 2.2.10 qui est une extension du théorème 9.1.3 de [MV20] dans le cas localement compact. Puis, on verra qu'un groupe G non-compact et non-périodique ayant la propriété de Haagerup satisfait toujours les hypothèses de cette proposition. Pour ce faire, on commence par quelques définitions et rappels qui permettent également de fixer les notations. Dans [AIM19] les auteurs introduisent une notion importante pour étudier les actions affines isométriques :

Définition 2.2.7. Soit $\alpha: G \curvearrowright \mathcal{H}$ une action affine isométrique. Alors le support de α est le sous-espace linéaire de \mathcal{H}^0 défini par

$$\text{supp}(\alpha) = \bigcap_{\mathcal{K} \in E} \mathcal{K}^0$$

où E est l'ensemble de tous les sous-espaces affines non-vides α -invariants de \mathcal{H} . Si $\text{supp}(\alpha) = \{0\}$, on dit que α est évanescence.

Par la proposition 2.10 de [AIM19], on dit que le 1-cocycle $c \in Z^1(\pi, \mathcal{H})$ est évanescence s'il existe une suite décroissante de sous-espaces H_n fermés $\pi(G)$ -invariants tels que $\bigcap_n H_n = \{0\}$ et tels que pour tout n fixé, le 1-cocycle c est cohomologue à un 1-cocycle prenant des valeurs dans H_n .

De la section 2.7 de [MV20] on rappelle un résultat important quand on s'intéresse à démontrer l'ergodicité d'une action. Soit $K \subset H$ un sous-espace fermé et $\widehat{\pi}_K: \widehat{H} \rightarrow \widehat{K}$ la factorisation naturelle préservant la mesure. Pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, on note par $\mathcal{M}(\xi + K) \subset L^\infty(\widehat{H} \times \mathbb{R})$ la sous-algèbre de von Neumann des fonctions de la forme :

$$(\omega, t) \mapsto F(\widehat{\pi}_K(\omega), t + \langle \omega, \xi \rangle), \quad F \in L^\infty(\widehat{K} \times \mathbb{R}).$$

Alors :

Proposition 2.2.8. (Proposition 2.7, [AIM19]) Soit $(\xi_i + H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces affines fermés d'un espace de Hilbert H . Notons $K = \bigcap_{i \in I} H_i$, $M = \bigcap_{i \in I} (\xi_i + H_i)$, $A = \bigcap_{i \in I} \mathcal{M}(\xi_i + H_i)$.

1. Si $M = \emptyset$, alors $A = L^\infty(\widehat{K}) \otimes 1$.
2. Si $\eta \in M$, alors $M = \eta + K$ et $A = \mathcal{M}(\eta + K)$.

Remarque 2.2.9. Rappelons qu'une action non-singulière $\sigma: G \curvearrowright X$ est faiblement mélangente si l'action diagonale $\sigma \otimes \rho: G \curvearrowright X \otimes Y$ est ergodique pour toute action p.m.p. ergodique $\rho: G \curvearrowright Y$.

On peut énoncer la proposition principale qui sera démontrée plus bas :

Proposition 2.2.10. *Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini et non-périodique. Soit $\pi : G \rightarrow O(\mathcal{H})$ une représentation orthogonale de classe C_0 et $c \in Z^1(\pi, \mathcal{H})$ un 1-cocycle évanescent n'étant pas un co-bord. Alors l'action tordue β définie par (2.2.6) est faiblement mélangeante.*

On a encore besoin d'un résultat de [AIM19] qui généralise le théorème 2.3 de [SW82].

Définition 2.2.11. Soit $\pi : G \rightarrow O(H)$ une représentation orthogonale. Un sous-ensemble dénombrable $\Lambda \subset G$ est dit mélangeant par rapport à π si pour tout $\xi, \eta \in H$, on a :

$$\lim_{g \in \Lambda, g \rightarrow \infty} \langle \pi(g)\xi, \eta \rangle = 0.$$

Définition 2.2.12. Soit $\sigma : G \curvearrowright X$ une action non-singulière. Un ensemble dénombrable $\Lambda \subset G$ est dit récurrent par rapport à σ si pour tout $B \subset X$ avec $B \neq \emptyset$ il existe une infinité de $g \in \Lambda$ tels que $gB \cap B \neq \emptyset$.

Théorème 2.2.13. (Theorem 7.13, [AIM19]) Soit $\sigma : G \curvearrowright X$ une action non-singulière et $\rho : G \curvearrowright (Y, \nu)$ une action p.m.p. Supposons qu'il existe un sous-ensemble $\Lambda \subset G$ tel que Λ est récurrent par rapport à σ et mélangeant par rapport à ρ . Alors chaque fonction $\sigma \otimes \rho$ -invariante dans $L^\infty(X \otimes Y)$ est contenue dans $L^\infty(X)$.

Avec ce résultat, nous sommes prêts à démontrer la proposition 2.2.10 :

Preuve de la proposition 2.2.10. Soit $\sigma : G \curvearrowright (Z, \rho)$ une action p.m.p ergodique quelconque et considérons l'action diagonale $\gamma : G \curvearrowright (\hat{H} \times \mathbb{R}) \times Z$. Supposons que $K \subset H$ est un sous-espace fermé $\pi(G)$ -invariant et que $c(g) \in K^\perp$ pour tout $g \in G$. En identifiant \hat{H} avec $\widehat{K} \times \widehat{K}^\perp$, on peut voir γ comme l'action gaussienne $\widehat{\pi}|_K : G \curvearrowright \widehat{K}$, l'action tordue $G \curvearrowright \widehat{K}^\perp \times \mathbb{R}$ et l'action $G \curvearrowright Z$. Prenons à présent un sous-groupe cyclique infini discret Λ de G . Alors par le théorème 9.1.2 de [MV20], l'action $\Lambda \curvearrowright \widehat{K}^\perp \times \mathbb{R} \times Z$ est conservative. Donc Λ est récurrent par rapport à cette action. De plus, par hypothèse l'action $G \curvearrowright \widehat{K}$ est mélangeante. Alors Λ est mélangeante par rapport à celle-ci. Par le théorème 2.2.13, on peut conclure que :

$$L^\infty(\widehat{H} \times \mathbb{R} \times Z)^G = 1 \otimes L^\infty(\widehat{K}^\perp \times \mathbb{R} \times Z)^G. \quad (2.2.7)$$

Par conséquent, nous sommes dans la même situation que dans la preuve de [MV20]. On peut donc conclure de la même manière. Par hypothèse c est évanescent. Il existe donc une suite décroissante de sous-espaces fermés $\pi(G)$ -invariants $H_n \subset H$ et des vecteurs $\xi_n \in H_n^\perp$ tels que

$$c(g) + \pi(g)\xi_n - \xi_n \in H_n,$$

pour tout $g \in G$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme H n'admet pas de vecteur $\pi(G)$ -invariant, les vecteurs ξ_n sont déterminés de manière unique et $P_{H_n^\perp}(\xi_m) = \xi_n$ pour tout $m \geq n$. Comme c n'est pas un co-bord, on a $\|\xi_n\| \rightarrow +\infty$ quand n tend vers l'infini. En utilisant (2.2.7) on obtient pour tout n :

$$L^\infty(\widehat{H} \times \mathbb{R} \times Z)^G \subset \mathcal{M}(\xi_n + H_n) \overline{\otimes} L^\infty(Z).$$

Avec les notations de la proposition 2.2.8, on a donc $M = \emptyset$ et par conséquent $A = 1$. Ainsi, on déduit

$$L^\infty(\widehat{H} \times \mathbb{R} \times Z)^G \subset 1 \otimes L^\infty(Z)^G = \mathbb{C}1.$$

Donc β est faiblement mélangeante. □

On termine cette section avec la remarque suivante qui conclut la preuve de l'ergodicité.

Remarque 2.2.14. Un groupe G localement compact, non-compact admet une action affine isométrique évanescence sans point fixe avec partie linéaire C_0 si et seulement si G a la propriété de Haagerup. En effet, cela suit des propositions 2.12 et 2.13 de [AIM19]. Par conséquent, la familles des groupes avec la propriété de Haagerup est une classe de groupes pour laquelle, sous l'hypothèse de non-périodicité, la proposition 2.2.10 peut être appliquée.

2.3. Exemples de systèmes dynamiques C_0

2.3.1. Groupes agissant proprement sur les arbres

Un exemple classique, où il est facile de construire un système dynamique C_0 avec une moyenne invariante comme dans le théorème 2.0.4, est donné par les groupes moyennables. En effet, il suffit de considérer la représentation régulière gauche (voir par exemple le théorème 1.1.37 ou de manière plus générale la proposition 0.0.4). L'avantage d'utiliser le foncteur Gaussien pour démontrer le théorème 2.0.4 est qu'il nous donne un accès pour exhiber de manière explicite de tels systèmes pour les groupes agissant proprement sur les arbres. On commence par quelques rappels permettant de fixer les notations. On renvoie aux préliminaires ou au chapitre 2 ainsi que l'appendice C de [BdLHV08] pour plus de détails.

Soit $T = (V, E)$ un arbre localement fini. On identifie T avec son ensemble de sommets. On note \mathbb{E} l'ensemble des arêtes orientées, où chaque arête géométrique vient avec deux orientations possibles. Pour $x, y \in V$, on note $[x, y]$ l'ensembles des arêtes orientées sur l'unique chemin géodésique reliant x à y . On dit que $e \in [x, y]$ est cohérente si e "pointe" de x vers y et incohérente sinon. Il existe alors un unique plongement $\iota : T \rightarrow H$ sur un espace de Hilbert affine H tel que :

1. $d(x, y) = \|\iota(x) - \iota(y)\|^2$;
2. H est engendré affinement par $\iota(T)$.

On voit donc T directement comme sous-ensemble de H . Supposons que G agisse proprement sur T par automorphismes, alors par unicité du plongement, l'action de G s'étend de manière unique en une action affine isométrique $\alpha : G \curvearrowright H$ avec $\alpha_g(\iota(x)) = \iota(gx)$. De plus, l'action de G sur T étant propre, on déduit en combinant les propositions 8.6 et 9.3 de [AIM19], que α est propre. Ainsi on obtient :

Exemple 2.3.1. Soit G un groupe agissant proprement sur un arbre localement fini T . Soit $\alpha : G \curvearrowright H$ son action affine isométrique propre associée. Par conséquent

$$(\hat{H}, \mu) = \left(\mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right)^{\otimes T}.$$

Cela vient de la construction standard de l'espace Gaussien, et de la propriété (2) du plongement (voir appendice A.7 de [BdLHV08] ou chapitre 2 de [CCJ⁺12]). Ainsi pour le groupe libre sur deux générateurs, \mathbb{F}_2 , soit $\alpha : \mathbb{F}_2 \curvearrowright H$ son action affine isométrique associée à son action sur son graphe de Cayley T_4 . Alors un exemple d'espace mesuré infini comme dans le théorème

2.0.4 pour \mathbb{F}_2 est donné par :

$$\left(\mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right)^{\otimes \mathbb{F}_2} \otimes (\mathbb{R}, \lambda).$$

Cela répond à une question posée par Y. Stalder.

Pour ces groupes, il est possible de trouver un tel espace mesuré d'une autre manière dans le cadre des actions non-singulières. Cela donnera un exemple explicite au théorème 0.0.9.

Considérons $\Omega(T)$ l'espace compact de toutes les orientations possibles de T . Rappelons qu'une orientation de T est une application $\omega: E(T) \rightarrow \{-1, 1\}$. On définit alors pour tous $x, y \in T$ la fonction continue $c(x, y)$ sur $\Omega(T)$ par la formule :

$$c(x, y)(\omega) = \sum_{e \in [x, y]} \omega(e) = n_e - m_e,$$

où n_e (respectivement m_e) est le nombre d'arêtes de $[x, y]$ qui sont cohérentes (resp. incohérentes) par l'orientation $\omega \in \Omega(T)$. Remarquons que $c(x, y)$ satisfait la relation de cocycle, i.e. $c(x, y) + c(y, z) = c(x, z)$ pour tout $x, y, z \in T$. À présent fixons un point-base $x_0 \in T$ et définissons une orientation aléatoire de T de la manière suivante : chaque arête $e \in E(T)$ est orientée, de manière indépendante, en direction de x_0 avec probabilité p et s'éloigne de x_0 avec probabilité $1 - p$, où $p \in [0, 1]$. Cela définit une mesure de probabilité sur $\Omega(T)$, notée $\mu_{x_0}^p$. Prenons un autre sommet $y \in T$. Orienter une arête en direction de x_0 ou de y donne le même résultat, sauf si cette arête est dans $[x_0, y]$. Comme $[x_0, y]$ est fini, alors μ_y^p est équivalente à $\mu_{x_0}^p$ et la dérivée de Radon-Nikodym est donnée par :

$$\frac{d\mu_y^p}{d\mu_{x_0}^p} = \left(\frac{1-p}{p} \right)^{-c(y, x_0)}.$$

On peut donc voir $(\Omega(T), \mu_{x_0}^p) = \prod_{e \in E(T)} (\{-1, 1\}, p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1})$. On considère le cocycle $c: G \times \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ défini par :

$$c(g, \omega) = c(x_0, gx_0)(\omega).$$

Ainsi on a $c(gh, \omega) = c(g, \omega) + c(h, g^{-1}\omega)$. On prend donc l'action tordue non-singulière de G sur $(\Omega(T) \times \mathbb{R}, \mu \otimes \lambda)$, donnée par :

$$\beta_g(\omega, t) = (g\omega, t + c(g^{-1}, \omega)). \quad (2.3.8)$$

Pour montrer que la représentation de Koopman associée est C_0 , on note X une variable aléatoire de Bernoulli à valeurs dans $\{-1, 1\}$ de paramètre p et soit $(X_e)_{e \in E(T)}$ une suite de variables aléatoires i.i.d, indexée par les arêtes, de même distribution que X . Soit $(g_n)_{n \geq 1}$ une suite dans G tendant vers l'infini. Pour tout n , on pose

$$S_n := S_{g_n x_0} = \sum_{e \in [x_0, g_n x_0]} X_e.$$

Comme l'action de G sur T est propre, on obtient un processus aléatoire $(S_n)_{n \geq 1}$ qui n'est autre qu'une marche aléatoire sur \mathbb{Z} . Prenons $p \neq \frac{1}{2}$ afin d'obtenir que S_∞ puisse être simulée par une

chaîne de Markov étant transiente. Ainsi :

$$\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n| = +\infty) = 1.$$

D'où pour presque tout ω , le cocycle $c(g, \omega)$ est propre. Il suffit donc de considérer, par exemple, le vecteur $\xi = 1 \otimes h \in L^2(\Omega \times \mathbb{R}, \mu \otimes \lambda)$, avec $h(t) = e^{-t^2}$. On obtient en utilisant le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \langle \pi(g_n)\xi, \xi \rangle &= \int_{\Omega \times \mathbb{R}} \left(\frac{1-p}{p} \right)^{-\frac{1}{2}c(g_n^{-1}x_0, x_0)(\omega)} e^{-(t+c(g_n, \omega))^2} e^{-t^2} d(\mu \otimes \lambda)(\omega, t) \\ &\leq C \int_{\Omega} \left(\frac{1-p}{p} \right)^{-\frac{1}{2}c(g_n^{-1}x_0, x_0)(\omega)} e^{-\frac{c(g_n, \omega)^2}{2}} d\mu(\omega), \end{aligned}$$

pour une certaine constante $C > 0$. Alors :

$$\langle \pi(g_n)\xi, \xi \rangle \leq C \int_{\Omega} \left(\frac{1-p}{p} \right)^{-\frac{1}{2}c(g_n^{-1}, \omega)} e^{-\frac{c(g_n, \omega)^2}{2}} d\mu(\omega)$$

Comme le cocycle est propre presque partout, en utilisant la convergence dominée, on déduit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \pi(g_n)\xi, \xi \rangle = 0.$$

De plus, comme l'action sur la seconde variable imite le comportement de l'action par translations de \mathbb{Z} sur \mathbb{R} , alors la représentation de Koopman associée à β admet une suite de vecteurs presque invariants. En effet, en considérant pour tout n :

$$\xi_n = 1 \otimes \frac{1}{\sqrt{2n}} \mathbf{1}_{[-n, n]},$$

on a :

$$\langle \pi(g)\xi_n, \xi_n \rangle = \int_{\Omega \times \mathbb{R}} \left(\frac{1-p}{p} \right)^{-\frac{1}{2}c(g^{-1}x_0, x_0)(\omega)} \mathbf{1}_{[-n, n]}(t + S_{gx_0}(\omega)) \mathbf{1}_{[-n, n]}(t) d(\mu \otimes \lambda)(\omega, t).$$

En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, on a :

$$\langle \pi(g)\xi_n, \xi_n \rangle = \int_{\Omega} \left(\frac{1-p}{p} \right)^{-\frac{1}{2}c(g^{-1}x_0, x_0)(\omega)} \frac{2n - |S_{gx_0}(\omega)|}{2n} d\mu(\omega).$$

Ainsi pour un sous-ensemble compact K de G , il reste à appliquer la convergence dominée pour conclure

$$\sup_{g \in K} \langle \pi(g)\xi_n, \xi_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Remarque 2.3.2. Dans cette construction, comme le cocycle c est à valeurs dans \mathbb{Z} , on peut remplacer l'espace mesuré infini (\mathbb{R}, λ) par (\mathbb{Z}, m) , où m est la mesure de comptage, de sorte à obtenir de l'ergodicité.

Ainsi pour le groupe libre \mathbb{F}_2 , on obtient :

Exemple 2.3.3. Soit $\sigma: \mathbb{F}_2 \curvearrowright T_4$ son action sur son graphe de Cayley. Alors un exemple explicite d'espace mesuré infini comme dans le théorème 0.0.9 est donné par :

$$(\Omega(T_4) \times \mathbb{R}, \mu \otimes \lambda).$$

2.3.2. $SL_2(\mathbb{R})$

Soit Γ un sous-groupe fermé d'un groupe localement compact G . Soit (π, H) une représentation de Γ . On rappelle que lorsque Γ est un réseau dans G , il s'avère que sa représentation induite, $\text{Ind}_\Gamma^G(\pi)$, est donnée par translations à gauche. Dans ce contexte, il existe une autre manière de construire la représentation induite, voir [Sha00]. Soit X un domaine fondamental pour G/Γ , i.e. $G = X\Gamma$. Considérons le cocycle $\alpha: G \times X \rightarrow \Gamma$ défini par :

$$\alpha(g, x) = \gamma \Leftrightarrow gx\gamma \in X.$$

Alors $\text{Ind}_\Gamma^G \pi$ peut être identifiée avec l'espace $L^2(X, H)$ et la G -action donnée par :

$$gf(x) = \pi \circ \alpha(g^{-1}, x)f(g^{-1}x).$$

Ainsi il est possible de définir une opération d'induction sur le premier groupe de cohomologie de Γ . En effet, pour $b \in Z^1(\Gamma, \pi)$, on considère, pour tout $g \in G$, la fonction $\tilde{b}: G \rightarrow \text{Ind}_\Gamma^G \pi$ définie par :

$$\tilde{b}(g)(x) = b \circ \alpha(g^{-1}, x).$$

On énonce à présent le résultat suivant, qui est un cas spécial du lemme de Shapiro :

Lemme 2.3.4. Soit G un groupe localement compact et soit Γ un réseau co-compact de G . Alors

$$H^1(\Gamma, 1_\Gamma) \cong H^1(G, \lambda_{G/\Gamma}),$$

où 1_Γ est la représentation triviale de Γ et $\lambda_{G/\Gamma}$ est la représentation quasi-régulière de G associée à Γ .

Soit à présent $G = SL_2(\mathbb{R})$. Soit Σ_g une surface de Riemann fermée de genre $g \geq 2$. Alors le groupe fondamental $\Gamma = \pi_1(\Sigma_g)$ peut être identifié avec un réseau co-compact de G par la théorie d'uniformisation. Comme $H^1(\Gamma, 1_\Gamma) = \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}) \neq 0$, considérons un 1-cocycle b pour 1_Γ . On prétend alors que le 1-cocycle \tilde{b} pour $\lambda_{G/\Gamma}$ est propre. En effet, considérons la fonction continue conditionnellement de type négative $\Psi(g) = |\tilde{b}(g)|^2$. Par le théorème de Schoenberg, on déduit alors que $\varphi = \exp(-\Psi)$ est définie positive. Soit (σ, H, ξ) le triplet GNS associé à φ . Comme b n'est pas borné, prenons une suite $(g_n)_{n \geq 1}$ dans G telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\tilde{b}(g_n)| = +\infty.$$

Ainsi, σ n'a pas de vecteur fixe non-nul. Rappelons que G a la propriété de Howe-Moore (voir [Zim13] pour plus de détails). Par conséquent σ est une représentation C_0 , ce qui implique que \tilde{b} est propre. Notons $X = G/\Gamma$ et prenons l'action tordue de G préservant la mesure sur $(X \times \mathbb{R}, \mu \otimes \lambda)$ donnée par :

$$\beta_g(x, t) = (gx, t + \tilde{b}(g^{-1})(x)).$$

On se retrouve donc dans le même cadre que précédemment (voir équation (2.3.8)). Ainsi de

manière similaire, on peut montrer que la représentation de permutations associée est C_0 avec une suite de vecteurs presque invariants.

Remarque 2.3.5. Soit G groupe localement compact ayant la propriété de Howe-Moore et possédant un réseau uniforme Γ tel que $\text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}) \neq 0$. Alors la construction ci-dessus s'applique. En utilisant la proposition 5.4 de [BV95] et le théorème 1 de [Kaz77], on déduit que $SO(n, 1)$ et $SU(n, 1)$ satisfont ces hypothèses.

3. Propriété de Haagerup dynamique et actions sur les algèbres de von Neumann

Les algèbres de von Neumann sont souvent vues comme une version non-commutative des espaces mesurés, puisque l'espace $L^\infty(\Omega, \mu)$ est une algèbre de von Neumann pour tout espace mesuré (Ω, μ) . Dans la section 1.2.3, on a vu que le théorème ci-dessous admet un cadre non-commutatif.

Théorème 3.0.1 (Théorème 2.1.3, [CCJ⁺12]). Un groupe G localement compact, dénombrable à l'infini a la propriété de Haagerup si et seulement si il admet une action préservant la mesure sur un espace standard probabilisé qui est fortement mélangeante et admettant une suite non-triviale asymptotiquement invariante.

Il est donc possible de généraliser ce résultat pour inclure le cas non-commutatif. Ceci a été fait dans le chapitre 2 de [CCJ⁺12] :

Théorème 3.0.2 (Théorème 2.1.5, [CCJ⁺12]). Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini. S'il existe une action α de G sur une algèbre de von Neumann N avec un état normal, fidèle φ qui est α -invariant et tel que α soit fortement mélangeante et N possède une suite non-triviale asymptotiquement invariante pour α et φ , alors G a la propriété de Haagerup. Réciproquement, si G a la propriété de Haagerup, alors il admet une telle action sur les facteurs suivants :

1. $N = R$, où R est le facteur hyperfini de type II_1 et $\varphi = \tau$ est la trace canonique ;
2. $N = R \otimes B$ de type II_∞ et $\varphi = \tau \otimes \omega$, où B est le facteur de type I_∞ et ω est un état normal convenable sur B ;
3. $N = R_\lambda$, où R_λ est le facteur de Powers de type III_λ et $\varphi = \varphi_\lambda$ l'état de Powers associé.

Dans le même esprit, on peut donc considérer le théorème 2.0.4 et donner une version non-commutative de celui-ci.

Théorème 3.0.3. Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini et soit N une algèbre de von Neumann. S'il existe une action de G sur N qui soit C_0 et admettant une suite presque invariante, alors G a la propriété de Haagerup.

Réciproquement, si G a la propriété de Haagerup, alors il existe une algèbre de von Neumann de chaque type pour laquelle il existe une action de G sur N étant C_0 et admettant une suite presque invariante.

Dans la section 3.1, on montre comment le théorème 2.0.4 se traduit dans le langage des algèbres de von Neumann. Plus précisément, on montre qu'un groupe a la propriété de Haagerup si et seulement si il admet une action C_0 sur $L^\infty(\Omega, \mu)$ avec une suite presque invariante. De plus, on montre que l'existence d'une telle action implique la propriété de Haagerup. Dans la section 3.2, on montre qu'une telle action existe pour tout groupe avec la propriété de Haagerup et pour toutes algèbres de von Neumann listées ci-dessous :

1. $N = L^\infty(\Omega, \mu)$, où (Ω, μ) est l'espace mesuré du théorème 2.0.4;
2. $N = B(L^2(\Omega, \mu))$;
3. Sous la condition que G admette un sous-groupe discret satisfaisant les hypothèses de la proposition 3.2.11 :

$$N = L^\infty(\Omega, \mu) \rtimes \Gamma;$$

4. Si G est unimodulaire :

$$N = B(L^2(\Omega, \mu)) \rtimes G;$$

5. $N = R_\lambda \otimes B(L^2(\Omega, \mu))$.

3.1. Des actions sur les algèbres de von Neumann à la propriété de Haagerup

Dans cette section, G sera un groupe non-compact localement compact, dénombrable à l'infini. Par commodité, on rappelle ici le théorème 2.0.4 :

Théorème 3.1.1. Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini. Alors G a la propriété de Haagerup si et seulement si il admet une action par automorphismes boréliens sur un espace mesuré (Ω, μ) tel que μ soit σ -finie, G -invariante et satisfaisant les deux propriétés suivantes :

1. pour tous ensembles $A, B \subset \Omega$ tels que $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$, la fonction $g \mapsto \mu(gA \cap B)$ est C_0 , i.e. $(\Omega, \mathcal{B}, \mu, G)$ est un système dynamique C_0 ;
2. Il existe une suite de sous-ensembles $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{B}$ de mesures $\mu(A_n) = 1$ pour tout n tels que pour tous sous-ensembles compacts K de G on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{g \in K} \mu(gA_n \Delta A_n) = 0. \quad (3.1.1)$$

Le théorème 3.1.1 peut être exprimé en termes d'actions sur l'algèbre de von Neumann commutative $L^\infty(\Omega)$. De plus, il s'avère que ce théorème admet un analogue non-commutatif. Cette section est donc dédiée à l'énoncer et montrer comment l'analogue non-commutatif implique la propriété de Haagerup. On commence par rappeler quelques préliminaires (voir section 1.2.3 ou [Tak13] pour plus de détails) :

Soit N une algèbre de von Neumann avec prédual séparable, et soit φ un poids normal fidèle semi-fini sur N . On rappelle qu'un poids sur N est l'extension linéaire sur une sous-algèbre dense d'une application $\varphi : N^+ \rightarrow [0, +\infty]$ satisfaisant les conditions suivantes :

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad x, y \in N^+; \quad \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x) \quad \lambda \geq 0.$$

Le poids est dit semi-fini si

$$\mathfrak{p}_\varphi = \{x \in N^+ : \varphi(x) < \infty\}$$

engendre N et fidèle si $\varphi(x) \neq 0$ pour tout élément non-nul $x \in N^+$. Soit

$$\mathfrak{n}_\varphi = \{x \in N : \varphi(x^*x) < \infty\},$$

et on note $L^2(N, \varphi)$ la complétion de \mathfrak{n}_φ par rapport à la norme

$$\|x\|_\varphi^2 = \varphi(x^*x) \quad x \in \mathfrak{n}_\varphi.$$

Ainsi en étendant la multiplication à gauche sur \mathfrak{n}_φ , on obtient une action de N l'espace de Hilbert $L^2(N, \varphi)$ qu'on supposera séparable. De plus, on veut disposer d'une action $\alpha: G \rightarrow \text{Aut}(N)$ telle que son extension à $L^2(N, \varphi)$ soit une représentation unitaire. Ce prérequis est satisfait sous quelques hypothèses :

Proposition 3.1.2. *Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini avec une action α sur une algèbre de von Neumann N . L'action α s'étend en une représentation unitaire sur $L^2(N, \varphi)$ si et seulement si α préserve le poids φ , c'est-à-dire $\varphi \circ \alpha_g = \varphi$ pour tout $g \in G$, et l'application $g \mapsto \varphi(x^* \alpha_g(x))$ est mesurable pour tout $x \in \mathfrak{n}_\varphi$ fixé.*

Démonstration. Il est clair que l'action donnée s'étend en une représentation unitaire sur $L^2(N, \varphi)$. Cela suit du fait que G agit par isométries sur \mathfrak{n}_φ et ainsi il suffit de considérer son extension. En d'autres termes, pour obtenir une représentation unitaire, il suffit de poser pour tout $g \in G$

$$\pi(g)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_g(x_n) \quad x \in L^2(N, \varphi),$$

où $(x_n)_{n \geq 1} \subset \mathfrak{n}_\varphi$ est n'importe quelle suite telle que $\|x_n - x\|_\varphi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. La continuité forte de π suit du lemme A.6.2 de [BdLHV08]. En effet, on a supposé $L^2(N, \varphi)$ séparable et la suite de fonctions définies par :

$$f_n: G \rightarrow \mathbb{C}: g \mapsto \langle \pi(g)x_n, x_n \rangle_\varphi = \varphi(x_n^* \alpha_g(x_n))$$

avec $(x_n)_{n \geq 1} \subset \mathfrak{n}_\varphi$, est une suite de fonctions mesurables. Par conséquent, pour tout $\xi \in L^2(N, \varphi)$ fixé, on a que l'application $g \mapsto \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle_\varphi$ est mesurable puisque c'est la limite simple de la suite $(f_n)_n$.

À présent montrons la réciproque. On a $\varphi(x^* \alpha_g(x)) = \langle \pi_g(x), x \rangle$ pour tout $x \in \mathfrak{n}_\varphi$. Comme π est fortement continu, on a bien que les applications $g \mapsto \varphi(x^* \alpha_g(x))$ sont continues et donc mesurables. Il reste donc à montrer que α préserve le poids φ . Supposons par l'absurde qu'il ne soit pas préservé. Comme c'est l'extension linéaire d'une application sur les éléments positifs de N , on peut prendre $x \in N$ et $g \in G$ tels que $\varphi(x^*x) \neq \varphi \circ \alpha_g(x^*x)$. Sans perte de généralité, on peut supposer $\varphi(x^*x) < \infty$. Cependant, ceci implique $\|x\|_\varphi^2 \neq \varphi \circ \alpha_g(x^*x) = \|\alpha_g(x)\|_\varphi^2$, ce qui contredit le fait que π est unitaire. \square

On rappelle la définition 1.2.27.

Définition 3.1.3. Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini avec une action α sur une algèbre de von Neumann N . L'action α est C_0 pour φ si son extension à $L^2(N, \varphi)$ est une représentation unitaire et

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \varphi(\alpha_g(x)y) = 0 \quad \forall x, y \in \mathfrak{n}_\varphi. \quad (3.1.2)$$

Une suite de projections $(e_k)_{k \geq 1} \subset \mathfrak{n}_\varphi$ est dite être une suite presque invariante pour α et φ si $\|e_k\|_\varphi = 1$ pour tout k et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{g \in K} \|\alpha_g(e_k) - e_k\|_\varphi = 0, \quad (3.1.3)$$

pour tout sous-ensemble compact K de G .

On montre à présent que si α est C_0 et \mathfrak{n}_φ contient une suite presque invariante pour α et φ , alors G a la propriété de Haagerup.

Proposition 3.1.4. *Supposons qu'il existe une action $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(N)$ qui est C_0 pour φ et que \mathfrak{n}_φ contient une suite presque invariante pour α et φ . Alors la représentation définie à la proposition 3.1.2 contient faiblement la représentation triviale de G et est C_0 . En particulier, G a la propriété de Haagerup.*

Démonstration. L'ensemble \mathfrak{n}_φ est total dans $L^2(N, \varphi)$ par construction, et pour tous $x, y \in \mathfrak{n}_\varphi$

$$\langle \pi(g)x, y \rangle_\varphi = \varphi(y^* \alpha_g(x)) \rightarrow 0,$$

quand $g \rightarrow \infty$. Cela prouve que π est de classe C_0 . De plus, $1_G \prec \pi$ par l'existence d'une suite presque invariante. \square

On peut désormais traduire le théorème 3.1.1 en termes d'actions sur les algèbres de von Neumann.

Corollaire 3.1.5. *G a la propriété de Haagerup si et seulement si il existe une algèbre de von Neumann commutative $L^\infty(\Omega, \mu)$ avec sa trace canonique τ semi-finie, mais infinie, et une action α de G sur cette algèbre de von Neumann qui soit C_0 pour τ et contienne une suite presque invariante pour α et τ .*

Démonstration. Si G a une telle action sur $L^\infty(\Omega)$, alors G a la propriété de Haagerup par la proposition 3.1.4. Maintenant, si G a la propriété de Haagerup, alors par le théorème 3.1.1 il existe $(\Omega, \mathcal{B}, \mu, G)$, un système dynamique C_0 , qui contient une suite de vecteurs presque invariants. On considère l'algèbre de von Neumann commutative $N = L^\infty(\Omega)$ munie de sa trace canonique donnée par $\tau = \int_\Omega d\mu$. Alors $L^2(N, \tau) = L^2(\Omega, \mu)$ est séparable puisque μ est σ -finie. L'action mesurable de G sur N est donnée par la représentation de permutations π_Ω qui préserve τ car μ est G -invariante. De plus, la condition (1) dans le théorème 3.1.1 implique que la fonction $g \mapsto \tau(x^* \alpha_g(x))$ est mesurable pour tout $x \in \mathfrak{n}_\tau$ fixé, ainsi que l'action soit C_0 pour τ . Finalement de la famille (A_n) , on considère la suite de vecteurs unitaires associées $\xi_n = \mathbf{1}_{A_n}$ dans N . Comme elle satisfait la propriété (3.1.1), alors cette suite est une suite presque invariante pour α et τ . \square

Dans la prochaine section, on construit de telles actions sur des algèbres de von Neumann non-commutatives.

3.2. Construction d'actions C_0 sur des algèbres de von Neumann

Dans cette section, G désigne un groupe localement compact, dénombrable à l'infini avec la propriété de Haagerup. Cette section est composée de trois parties. Premièrement, on commence par construire une action sur le facteur $I_\infty B(\mathcal{H})$ muni de sa trace canonique Tr et on démontre que cette action est C_0 pour Tr et qu'il existe une suite presque invariante. Deuxièmement, on donne des action sur des produits croisés de la forme $N \rtimes_\alpha G$ et sur des algèbres de von Neumann de la forme $N \rtimes_\alpha \Gamma$, avec Γ un groupe discret. Finalement, on considère des actions sur des produits tensoriels.

3.2.1. Action sur l'algèbre des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert

Comme G a la propriété de Haagerup, il existe donc une représentation (π, \mathcal{H}) de G qui est C_0 et contenant faiblement la représentation triviale. On rappelle qu'on peut supposer sans perte de généralité que \mathcal{H} est séparable. Remarquons qu'on peut utiliser le théorème 3.1.1 pour prendre $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, avec la représentation de permutations.

Ainsi considérons $N = B(\mathcal{H})$, le facteur I_∞ , muni de sa trace :

$$\mathrm{Tr}(T) = \sum_n \langle T e_n, e_n \rangle,$$

où $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de \mathcal{H} , et $T \in B(\mathcal{H})$. Soit α l'action de G sur N donnée par :

$$\alpha_g(T) = \pi(g)T\pi(g)^*.$$

On a bien que Tr est α -invariante :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\alpha_g(T)) &= \sum_n \langle \pi(g)T\pi(g)^* e_n, e_n \rangle \\ &= \sum_n \langle T\pi(g^{-1})e_n, \pi(g^{-1})e_n \rangle. \end{aligned}$$

La trace étant invariante par changement de base, on a par conséquent $\mathrm{Tr}(\alpha_g(T)) = \mathrm{Tr}(T)$.

Le résultat suivant peut être déduit de [BdLHV08] page 294.

Proposition 3.2.1. *Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable. Alors l'application Ψ de $\mathcal{H} \otimes \overline{\mathcal{H}}$ dans $L^2(B(\mathcal{H}), \mathrm{Tr})$ définie par*

$$\Psi(\xi \otimes \xi')(\eta) = \langle \eta, \xi \rangle \xi',$$

est un isomorphisme d'espaces de Hilbert.

On remercie A. Valette pour la remarque suivante :

Remarque 3.2.2. Avec la proposition 3.2.1 en tête, il est alors facile de voir que le produit tensoriel $\pi \otimes \bar{\pi}$ est unitairement équivalent à la représentation adjointe de π . Par conséquent, la proposition 3.2.4 suit des deux remarques suivantes :

1. Comme π est C_0 , alors $\pi \otimes \bar{\pi}$ est C_0 .
2. Comme π et $\bar{\pi}$ admettent des vecteurs presque invariants, alors $\pi \otimes \bar{\pi}$ également.

Néanmoins, par souci de complétude, on donne une preuve de la proposition 3.2.4 qui a l'avantage d'exhiber une suite presque invariante pour la représentation adjointe de G . De plus, cela complétera et justifiera la remarque 3.2.5.

Il reste encore à voir que l'action α est mesurable.

Proposition 3.2.3. *Soit $T \in \mathfrak{n}_{T_r}$ fixé. Alors l'application de G dans \mathbb{C} définie par $g \mapsto \mathrm{Tr}(T^* \alpha_g(T))$ est mesurable.*

Démonstration. Comme on a

$$g \mapsto \mathrm{Tr}(T^* \alpha_g(T)) = \sum_k \langle \pi(g)T\pi(g)^* e_k, T e_k \rangle,$$

il suffit de montrer que les applications $f_k: g \mapsto \langle \pi(g)T\pi(g)^*e_k, Te_k \rangle$ sont mesurables pour tout k . En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned} |f_k(g) - f_k(e)| &\leq |f_k(g) - \langle \pi(g)Te_k, Te_k \rangle| + |\langle \pi(g)Te_k, Te_k \rangle - \langle Te_k, Te_k \rangle| \\ &\leq \|\pi(g)\| \|T\| \|(\pi(g)^* - \text{Id})e_k\| \|Te_k\| + |\langle \pi(g)Te_k, Te_k \rangle - \langle Te_k, Te_k \rangle|. \end{aligned}$$

Comme $\text{SOT} \lim_{g \rightarrow e} \pi(g) = \text{Id}$, alors $f_k(g) \rightarrow_{g \rightarrow e} f_k(e)$. Ainsi pour tout k , on a bien f_k est continue. En particulier f_k est mesurable pour tout k . Donc l'application $g \mapsto (T^*\alpha_g(T))$ est mesurable puisqu'elle est limite simple de fonctions mesurables. \square

Proposition 3.2.4. *Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini avec la propriété de Haagerup. Alors il existe une action de G sur $(B(\mathcal{H}), \text{Tr})$, qui est C_0 pour la trace Tr et admet une suite presque invariante.*

Démonstration. On commence par montrer l'existence d'une suite de projections presque invariantes. Comme G a Haagerup, alors la représentation π a une suite de vecteurs unitaires $(\xi_n)_n$ dans \mathcal{H} telle que pour tout sous-ensemble compact K de G :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{g \in K} \|\pi(g)\xi_n - \xi_n\| = 0.$$

Posons $P_n = \Psi(\xi_n \otimes \xi_n)$ pour tout n . Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(P_n^*P_n) &= \sum_k \langle P_n e_k, P_n e_k \rangle = \sum_k \langle \langle e_k, \xi_n \rangle \xi_n, \langle e_k, \xi_n \rangle \xi_n \rangle \\ &= \sum_k |\langle e_k, \xi_n \rangle|^2 = \|\xi_n\|^2 = 1, \end{aligned}$$

où l'on utilise l'identité de Parseval. De plus,

$$\begin{aligned} \alpha_g(P_n)(\eta) &= \pi(g)P_n\pi(g^{-1})(\eta) \\ &= \langle \eta, \pi(g)\xi_n \rangle \pi(g)\xi_n \\ &= \Psi(\pi(g)\xi_n \otimes \pi(g)\xi_n)(\eta). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \|\alpha_g(P_n) - P_n\|^2 &= \|\pi(g)\xi_n \otimes \pi(g)\xi_n - \xi_n \otimes \xi_n\|^2 \\ &= (\|\pi(g)\xi_n\|^4 - 2\text{Re}(\langle \pi(g)\xi_n, \xi_n \rangle^2) + \|\xi_n\|^4) \\ &= 2(1 - \text{Re}(\langle \pi(g)\xi_n, \xi_n \rangle^2)). \end{aligned}$$

D'où pour tout sous-ensemble compact K de G , on a :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{g \in K} \|\alpha_g(P_n) - P_n\| = 0.$$

Il reste à voir que α est C_0 pour Tr . Premièrement, prenons des éléments de la forme $\xi_1 \otimes \eta_1, \xi_2 \otimes$

$\eta_2 \in \mathcal{H} \overline{\otimes} \mathcal{H}$ et considérons leurs images sous Ψ notées $T_{\xi_1, \eta_1}, T_{\xi_2, \eta_2} \in \mathfrak{n}_{\text{Tr}}$. On a :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(T_{\xi_1, \eta_1}^* \alpha_g(T_{\xi_2, \eta_2})) &= \sum_k \langle \pi(g) T_{\xi_2, \eta_2} \pi(g)^* e_k, T_{\xi_1, \eta_1} e_k \rangle \\ &= \sum_k \langle \pi(g) \langle \pi(g^{-1}) e_k, \xi_2 \rangle \eta_2, \langle e_k, \xi_1 \rangle \eta_1 \rangle \\ &= \langle \pi(g) \eta_2, \eta_1 \rangle \sum_k \langle \pi(g^{-1}) e_k, \xi_2 \rangle \langle e_k, \xi_1 \rangle \end{aligned}$$

Ainsi on obtient par inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\text{Tr}(T_{\xi_1, \eta_1}^* \alpha_g(T_{\xi_2, \eta_2}))| \leq \langle \pi(g) \eta_2, \eta_1 \rangle \|\xi_1\| \|\pi(g) \xi_2\|.$$

Comme π is une représentation unitaire C_0 , on déduit

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \text{Tr}(T_{\xi_1, \eta_1}^* \alpha_g(T_{\xi_2, \eta_2})) = 0.$$

À présent, prenons $T_1, T_2 \in \mathfrak{n}_{\text{Tr}}$. Par la proposition 3.2.1, il existe $\xi, \eta \in \mathcal{H} \overline{\otimes} \mathcal{H}$ qui représente T_1, T_2 . De plus, à $\varepsilon > 0$ fixé, il existe deux suites $(\xi_n), (\eta_n) \subset \mathcal{H}$ telles que :

1. $\|\xi - \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} e_n \otimes \xi_n\| \leq \varepsilon;$
2. $\|\eta - \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} e_n \otimes \eta_n\| \leq \varepsilon.$

Ainsi

$$\begin{aligned} \text{Tr}(T_1^* \alpha_g(T_2)) &= \langle \Psi \left(\xi - \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} e_n \otimes \xi_n \right), \alpha_g(\Psi(\eta)) \rangle_{\text{Tr}} + \langle \Psi \left(\sum_{n=1}^{N_\varepsilon} e_n \otimes \xi_n \right), \alpha_g(\Psi(\eta)) \rangle_{\text{Tr}} \\ &= \langle \Psi \left(\xi - \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} e_n \otimes \xi_n \right), \alpha_g(\Psi(\eta)) \rangle_{\text{Tr}} + \\ &\quad \langle \Psi \left(\sum_{n=1}^{N_\varepsilon} e_n \otimes \xi_n \right), \alpha_g \left(\Psi \left(\eta - \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} e_n \otimes \eta_n \right) \right) \rangle_{\text{Tr}} \\ &\quad + \langle \Psi \left(\sum_{n=1}^{N_\varepsilon} e_n \otimes \xi_n \right), \alpha_g \left(\Psi \left(\sum_{n=1}^{N_\varepsilon} e_n \otimes \eta_n \right) \right) \rangle_{\text{Tr}} \end{aligned}$$

Donc en utilisant Cauchy-Schwarz et le fait que α est C_0 pour les éléments de la forme T_{ξ_i, η_i} , il existe un sous-ensemble compact K de G tel que pour tout $g \in G \setminus K$:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(T_1^* \alpha_g(T_2)) &\leq \varepsilon \|T_2\|_{\text{Tr}} + \varepsilon \sqrt{\|T_1\|_{\text{Tr}} + \varepsilon} + \sum_{i,j=1}^{N_\varepsilon} \frac{\varepsilon}{N_\varepsilon^2} \\ &\leq \varepsilon (1 + \|T_2\|_{\text{Tr}} + \sqrt{\|T_1\|_{\text{Tr}} + \varepsilon}). \end{aligned}$$

□

Remarque 3.2.5. Dans le contexte du théorème 3.1.1, cette construction donne une action C_0 sur $(B(L^2(\Omega, \mu)), \text{Tr})$ relativement à la représentation de permutation π_Ω . De plus, une suite de

projections presque invariantes est donnée par la famille $(A_n)_n \subset \mathcal{B}$ en considérant

$$P_n(f) = \frac{\langle f, \mathbf{1}_{A_n} \rangle}{\mu(A_n)} \mathbf{1}_{A_n},$$

pour tout $f \in L^2(\Omega)$.

3.2.2. Actions sur des produits croisés

On commence cette section par un bref rappel sur les produits croisés de sorte à fixer la notation; on renvoie à la section 1.2.2 pour plus de détails. Soit N une algèbre de von Neumann agissant sur \mathcal{H} . Soit Γ un groupe discret et soit $\alpha: \Gamma \rightarrow \text{Aut}(N)$ une action de Γ sur N . On note $\mathcal{K} = l^2(\Gamma, \mathcal{H})$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable à valeurs dans \mathcal{H} . On considère la représentation π_α de N définie par

$$(\pi_\alpha(x)\xi)(s) = \alpha_s^{-1}(x)\xi(s), \quad \xi \in \mathcal{K}, \quad x \in N, \quad s \in \Gamma.$$

De plus, on regarde la représentation λ de Γ :

$$(\lambda(t)\xi)(s) = \xi(t^{-1}s), \quad \xi \in \mathcal{K}, \quad s, t \in \Gamma,$$

qui est covariante avec π_α , i.e.

$$\lambda(s)\pi_\alpha(x)\lambda(s)^* = \pi_\alpha \circ \alpha_s(x), \quad x \in N, \quad s \in \Gamma.$$

Définition 3.2.6. L'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_\alpha(N)$ et $\lambda(\Gamma)$ sur \mathcal{K} est appelée le produit croisé de N par α et est notée $N \rtimes_\alpha \Gamma$.

Pour chaque $x \in N \rtimes_\alpha \Gamma$ on peut associer une fonction $x: \Gamma \rightarrow N$ avec l'idée que x est représenté par $\sum \pi_\alpha(x(g))\lambda(g)$. Il est bien connu que cette fonction détermine de manière unique x ([Tak79], p.366, [Ped79], p.284). Cependant la convergence de la série n'a lieu dans aucune des topologies usuelles sur $N \rtimes_\alpha \Gamma$ ([Mer85]).

Soit φ un poids normal fidèle semi-fini sur N que l'on suppose α -invariant et soit $\hat{\varphi}$ le poids canonique induit sur $N \rtimes_\alpha \Gamma$:

$$\hat{\varphi}(x) = \varphi(x(e)), \quad x \in N \rtimes_\alpha \Gamma.$$

Proposition 3.2.7 (Corollaire 4, [Mer85]). *Pour tout $x \in N \rtimes_\alpha \Gamma$ on peut trouver une unique fonction à valeurs dans N sur Γ , aussi notée x , telle que $\sum_{s \in \Gamma} \pi_\alpha(x(s))\lambda(s)$ converge dans $L^2(N \rtimes_\alpha \Gamma, \hat{\varphi})$ vers x .*

Rappelons que " $\sum_{s \in \Gamma} \pi_\alpha(x(s))\lambda(s)$ converge dans la topologie T " signifie que la suite

$$\left\{ \sum_{g \in F} \pi_\alpha(x(g))\lambda(g) \right\}_F$$

sur l'ensemble des sous-ensembles finis F de Γ converge dans la topologie T . Pour tout $x \in N \rtimes_\alpha \Gamma$, on note $x_F = \sum_{g \in F} \pi_\alpha(x(g))\lambda(g)$. Ainsi en appliquant la proposition 3 de [Mer85] à $\hat{\varphi} \circ \pi_\alpha$ on a:

$$(\hat{\varphi}(xx^*) - \hat{\varphi}(x_F x_F^*)) \rightarrow 0. \quad (3.2.4)$$

Lemme 3.2.8. *La fonction x de Γ dans N représentant $x \in \mathfrak{n}_{\hat{\varphi}}$ est L^2 -carré sommable.*

Démonstration. Pour tout ensemble fini $F \subset \Gamma$ on a :

$$\begin{aligned} \|x_F\|_{\hat{\varphi}}^2 &= \hat{\varphi}(x_F^* x_F) = \hat{\varphi} \left(\sum_{s,t \in F} \pi_{\alpha}(\alpha_s^{-1}(x(s)^*)) \lambda(s)^* \pi_{\alpha}(x(t)) \lambda(t) \right) \\ &= \hat{\varphi} \left(\sum_{s,t \in F} \pi_{\alpha}(\alpha_s^{-1}(x(s)^* x(t))) \lambda(s^{-1}t) \right) \\ &= \varphi \left(\sum_{s \in F} \alpha_{s^{-1}}(x(s)^* x(s)) \right) \\ &= \sum_{s \in F} \varphi(\alpha_{s^{-1}}(x(s)^* x(s))) \\ &= \sum_{s \in F} \|x(s)\|_{\varphi}^2. \end{aligned}$$

On conclut en utilisant la normalité du poids et l'équation (3.2.4). \square

Supposons à présent que G admette une action C_0 avec une suite presque invariante sur (N, φ) , notée β , qui commute avec α , i.e. $\alpha_s \circ \beta_g = \beta_g \circ \alpha_s$ pour tout $s \in \Gamma$, $g \in G$. Alors on peut définir une action ι de G sur $N \rtimes_{\alpha} \Gamma$ par

$$\iota_g(x) = \sum_{s \in \Gamma} \pi_{\alpha}(\beta_g(x(s))) \lambda(s), \quad x \in N \rtimes_{\alpha} \Gamma.$$

Ainsi $\hat{\varphi}$ est ι -invariante puisque φ est β -invariante. De plus, l'action est mesurable dans le sens suivant :

Proposition 3.2.9. *Pour tout $x \in \mathfrak{n}_{\hat{\varphi}}$ fixé, l'application de G dans \mathbb{C} définie par $g \mapsto \hat{\varphi}(x^* \iota_g(x))$ est mesurable.*

Remarque 3.2.10. Pour montrer cette proposition, on a besoin de l'observation suivante. Soit F un sous-ensemble fini de Γ et considérons un élément dans N de la forme

$$\sum_{s \in F} x(s)y(s), \quad x(s), y(s) \in \mathfrak{n}_{\varphi} \quad \forall s \in F.$$

Alors on a :

$$\varphi \left(\sum_{s \in F} x(s)y(s) \right) = \sum_{s \in F} \varphi(x(s)y(s)). \quad (3.2.5)$$

Puisque $\varphi \left(\sum_{s \in F} x(s)y(s) \right)$ peut être construit de :

$$\varphi \left(\sum_{s \in F} (x(s) + y(s))^* (x(s) + y(s)) \right), \quad \varphi \left(\sum_{s \in F} y(s)^* y(s) \right), \quad \varphi \left(\sum_{s \in F} x(s)^* x(s) \right),$$

on peut montrer que la partie réelle et la partie imaginaire du membre de gauche sont égaux à celles du membre de droit dans (3.2.5).

Démonstration. Soit $x \in \mathfrak{n}_{\hat{\varphi}}$ fixé. Alors on a pour tout sous-ensemble fini $F \subset \Gamma$:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(x_F^* \iota_g(x_F)) &= \hat{\varphi} \left(\sum_{s,t \in F} \pi_{\alpha}(\alpha_s^{-1}(x(s)^*)) \lambda(s)^* \pi_{\alpha}(\beta_g(x(t))) \lambda(t) \right) \\ &= \hat{\varphi} \left(\sum_{s,t \in F} \pi_{\alpha}(\alpha_s^{-1}(x(s)^*) \beta_g(\alpha_s^{-1}(x(t)))) \lambda(s^{-1}t) \right) \\ &= \varphi \left(\sum_{s \in F} \alpha_s^{-1}(x(s))^* \beta_g(\alpha_s^{-1}(x(s))) \right) \end{aligned}$$

Par la remarque précédente et l'équation (3.2.4), on obtient :

$$\hat{\varphi}(x^* \iota_g(x)) = \sum_{s \in \Gamma} \varphi(\alpha_s^{-1}(x(s))^* \beta_g(\alpha_s^{-1}(x(s)))) .$$

Comme l'application $g \mapsto \varphi(y^* \beta_g(y))$ est mesurable pour tout $y \in \mathfrak{n}_{\varphi}$ fixé, alors $g \mapsto \hat{\varphi}(x^* \iota_g(x))$ est limite simple de fonctions mesurables. Par conséquent, elle est mesurable. \square

Proposition 3.2.11. *Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini avec la propriété de Haagerup. Soit Γ un groupe discret et soit N une algèbre de von Neumann, avec un poids fidèle normal semi-fini φ , telle que G et Γ ont des actions β et α qui commutent. Supposons que β est C_0 pour φ avec une suite presque invariante. Alors G a une action C_0 sur $N \rtimes_{\alpha} \Gamma$ avec une suite presque invariante pour $\hat{\varphi}$.*

Démonstration. On commence par montrer que l'action ι de G sur $N \rtimes_{\alpha} \Gamma$ est C_0 pour $\hat{\varphi}$. Soit $x, y \in \mathfrak{n}_{\hat{\varphi}}$ avec $x = \sum_{s \in \Gamma} \pi_{\alpha}(x(s)) \lambda(s)$ et $y = \sum_{t \in \Gamma} \pi_{\alpha}(y(t)) \lambda(t)$. Alors en utilisant la remarque précédente et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\iota_g(x)y) &= \sum_{s \in \Gamma} \varphi(\beta_g(x(s)) \alpha_s^{-1}(y(s))) \\ &\leq \sum_{s \in \Gamma} \|x(s)\|_{\varphi} \|y(s)\|_{\varphi} \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{s \in \Gamma} (\|x(s)\|_{\varphi}^2 + \|y(s)\|_{\varphi}^2) . \end{aligned}$$

Ainsi par le lemme 3.2.8 on a

$$\sum_{s \in \Gamma} (\|x(s)\|_{\varphi}^2 + \|y(s)\|_{\varphi}^2) < \infty .$$

D'où pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un sous-ensemble fini K de Γ tel que

$$\sum_{s \in K^c} (\|x(s)\|_{\varphi}^2 + \|y(s)\|_{\varphi}^2) < \varepsilon/2 .$$

De plus pour tout $h \in K$, comme β est une action C_0 pour φ , il existe un sous-ensemble compact $Q_h \subset G$ tel que

$$\varphi(\beta_g(x(h)) \alpha_h^{-1}(y(h))) < \frac{\varepsilon}{2|K|} \quad \forall g \in G \setminus Q_h .$$

Posons alors $Q = \bigcup_{h \in K} Q_h$ qui est un sous-ensemble compact de G tel que pour tout $g \in G \setminus Q$ on a :

$$\begin{aligned} |\hat{\varphi}(\iota_g(x)y)| &\leq \frac{1}{2} \sum_{s \in K^c} (\|x(s)\|_\varphi^2 + \|y(s)\|_\varphi^2) + \sum_{h \in K} |\varphi(\beta_g(x(h))\alpha_h^{-1}(y(h)))| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + |K| \frac{\varepsilon}{2|K|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

À présent, par hypothèse il existe une suite presque invariante $(e_k)_{k \geq 1}$ pour β et φ . Donc en considérant la suite suivante :

$$x_n = \pi_\alpha(e_n)\lambda(e),$$

on obtient une suite presque invariante pour ι et $\hat{\varphi}$ car pour tout k on a :

$$\|\iota_g(x_k) - x_k\|_{\hat{\varphi}} = \|\beta_g(e_k) - e_k\|_\varphi.$$

□

Remarque 3.2.12. Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini avec la propriété de Haagerup. Alors en utilisant le corollaire 3.1.5, il existe une action C_0 de G avec une suite de projections presque invariantes sur $L^\infty(\Omega)$. Supposons qu'il existe un groupe Γ agissant sur $L^\infty(\Omega)$ et qui commute avec la G -action. Alors en utilisant la proposition 3.2.11, il existe une action C_0 de G sur le produit croisé $L^\infty(\Omega) \rtimes \Gamma$ avec une suite presque invariante. De plus, si l'action de Γ est libre et ergodique, on obtient une action de G avec les propriétés désirées sur une algèbre de von Neumann de type II_∞ . La même chose peut être déduit pour $B(L^2(\Omega)) \rtimes \Gamma$.

Notre prochain objectif est de considérer des actions de G sur le produit croisé $N \rtimes_\alpha G$, où α est une action C_0 avec une suite presque invariante dans N . Dans ce contexte, on rappelle que le W^* -produit croisé peut être vu comme la fermeture faible de l'*-algèbre d'opérateurs $K(G, N)$ (les fonctions bornées σ -faiblement continues à support compact). Pour chaque $y \in K(G, N)$ et $\xi \in L^2(G, \mathcal{H})$, en considérant la représentation régulière $(\pi_\alpha \times \lambda, L^2(G, \mathcal{H}))$, on a :

$$((\pi_\alpha \times \lambda)y)\xi(t) = \int_G (\pi_\alpha(y(s))\lambda(s)\xi)(t)ds = \int_G \pi(\alpha_{t^{-1}}(y(s)))\xi(s^{-1}t)ds.$$

De plus, on rappelle que l'involution et la convolution dans $K(G, N)$ sont définies par :

$$\begin{aligned} y^*(t) &= \Delta(t)^{-1}\alpha_t(y(t^{-1})^*) \\ (y \times z)(t) &= \int y(s)\alpha_s(z(s^{-1}t))ds, \end{aligned}$$

pour tous $y, z \in K(G, N)$, où Δ est la fonction modulaire. On renvoie à [Ped79] pour plus de détails sur les W^* -produits croisés avec des groupes localement compacts. Considérons un poids fidèle normal semi-fini φ sur N . En utilisant le théorème 3.1 of [Haa78b], on dispose du poids dual $\tilde{\varphi}$, qui n'est autre que pour $x \in K(G, N)$:

$$\tilde{\varphi}((\pi_\alpha \times \lambda)(x^* \times x)) = \varphi((x^* \times x)(e)).$$

On suppose à présent qu'il existe une action C_0 de G sur N , notée α , avec une suite presque invariante pour φ . On peut considérer le W^* -produit croisé $N \rtimes_\alpha G$ muni du poids fidèle normal

semi-fini $\tilde{\varphi}$. On définit une action ι de G sur $N \rtimes_{\alpha} G$ par :

$$\iota_g(x) = \Delta(g)^{-1} \lambda(g) x \lambda(g)^*, \quad x \in N \rtimes_{\alpha} G.$$

Pour $x \in K(G, N)$, on a :

$$(\iota_g(x)\xi)(t) = \Delta(g)^{-1} \int \pi(\alpha_{t^{-1}g}(x(s))) \xi(s^{-1}t) ds.$$

De plus, en utilisant le théorème 3.1 parties (c) et (d) de [Haa78b], on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\iota_g(x^* \times x)) &= (\varphi \circ \pi_{\alpha}^{-1}) \circ T(\iota_g(x^* \times x)) \\ &= (\varphi \circ \pi_{\alpha}^{-1})(\lambda(g) \pi_{\alpha}((x^* x)(e)) \lambda(g)^*) \\ &= \varphi(\alpha_g((x^* x)(e))), \end{aligned}$$

pour $x \in K(G, N)$. D'où ι préserve $\tilde{\varphi}$.

Proposition 3.2.13. *Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini, unimodulaire avec la propriété de Haagerup. Soit N une algèbre de von Neumann, avec un poids fidèle normal et semi-fini φ telle que G a une action C_0 α avec une suite presque invariante pour φ . Alors G a une action C_0 sur $N \rtimes_{\alpha} G$ avec une suite presque invariante pour $\tilde{\varphi}$.*

Remarque 3.2.14. Comme G est unimodulaire, on a $\Delta \equiv 1$. Cependant dans le but d'exhiber où cette hypothèse est nécessaire dans ce résultat, il a été décidé de commencer la preuve en considérant un groupe localement compact, dénombrable à l'infini quelconque.

Démonstration. On commence par montrer que l'action ι de G sur $N \rtimes_{\alpha} G$ est C_0 . Soit $x, y \in K(G, N) \cap n_{\tilde{\varphi}}$ et supposons sans perte de généralité que $\|x\|_{\tilde{\varphi}} = \|y\|_{\tilde{\varphi}} = 1$. Ainsi, en rappelant que G est premièrement supposé être un groupe localement compact, dénombrable à l'infini quelconque, on regarde :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}((x + \iota_g(y))^*(x + \iota_g(y))) &= \varphi((x + \iota_g(y))^* \times (x + \iota_g(y))(e)) \\ &= \varphi\left(\int (x + \iota_g(y))^*(s) \alpha_s((x + \iota_g(y))(s^{-1})) ds\right) \\ &= \varphi\left(\int \Delta(s)^{-1} \alpha_s((x + \iota_g(y))(s^{-1})^*) \alpha_s((x + \iota_g(y))(s^{-1})) ds\right) \end{aligned}$$

D'où :

$$\varphi\left(\int \Delta(s)^{-1} \alpha_s(x(s^{-1})^* + \Delta(g)^{-1} \lambda(g) y(s^{-1})^* \lambda(g)^*) \alpha_s(x(s^{-1}) + \Delta(g)^{-1} \lambda(g) y(s^{-1}) \lambda(g)^*) ds\right).$$

En utilisant la relation de covariance et en faisant le changement de variable $u = s^{-1}$, on obtient :

$$\varphi\left(\int [\alpha_{u^{-1}}(x(u)^*) + \Delta(g)^{-1} \alpha_{u^{-1}g}(y(u)^*)] [\alpha_{u^{-1}}(x(u)) + \Delta(g)^{-1} \alpha_{u^{-1}g}(y(u))] du\right).$$

Comme φ est normal, on a alors :

$$\int \|x(u) + \Delta(g)^{-1} \alpha_g(y(u))\|_\varphi^2 du = \int \|x(u)\|_\varphi^2 + 2\operatorname{Re} (\langle x(u), \Delta(g)^{-1} \alpha_g(y(u)) \rangle_\varphi) + \Delta(g)^{-2} \|y(u)\|_\varphi^2 du.$$

À présent on utilise l'hypothèse que G est unimodulaire et donc $\Delta = 1$. Ainsi :

$$\tilde{\varphi}((x + \iota_g(y))^*(x + \iota_g(y))) = \tilde{\varphi}(x^*x) + \tilde{\varphi}(y^*y) + 2\operatorname{Re} \left(\int \varphi(x(u)^* \alpha_g(y(u))) du \right).$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\langle x(u), \alpha_g(y(u)) \rangle_\varphi \leq \|x(u)\|_\varphi \|y(u)\|_\varphi \leq \frac{1}{2} (\|x(u)\|_\varphi^2 + \|y(u)\|_\varphi^2).$$

Comme $x, y \in \mathfrak{n}_{\tilde{\varphi}}$, ce sont donc des fonctions de carré intégrable (c'est l'analogue du lemme 3.2.8 pour les groupes localement compacts). Ainsi en utilisant de la convergence dominée et le fait que x, y soient à supports compacts, on déduit :

$$\lim_{g \rightarrow \infty} 2\operatorname{Re} \left(\int \varphi(x(u)^* \alpha_g(y(u))) du \right) = 0,$$

Il en résulte

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}(x \iota_g(y)) = 0 \quad \forall x, y \in K(G, N),$$

ce qui montre que ι est C_0 pour $\tilde{\varphi}$.

Par hypothèse, il existe une suite presque invariante $(e_k)_{k \geq 1}$ pour α et φ . Considérons une fonction continue $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ à support compact et prenons

$$x_n = e_n f.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \|\iota_g(x_n) - x_n\|_\varphi^2 &= \int \|\alpha_g(x_n(u)) - x_n(u)\|_\varphi^2 du \\ &= \int \|\alpha_g(e_n) - e_n\|_\varphi^2 |f(u)|^2 du. \end{aligned}$$

Par conséquent pour tout sous-ensemble compact $K \subset G$, on a bien :

$$\sup_{g \in K} \|\iota_g(x_n) - x_n\|_\varphi^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

3.2.3. Actions sur les produits tensoriels

Proposition 3.2.15. *Soit G un groupe localement compact, dénombrable à l'infini avec la propriété de Haagerup et soient N et M deux algèbres de von Neumann avec des poids fidèles normaux semi-finis φ_N et φ_M telles que G a une action C_0 sur N avec une suite presque invariante et G a une action sur M qui s'étend en une représentation unitaire sur $L^2(M, \varphi_M)$*

et admettant une suite presque invariante. Alors G a une action C_0 sur $N \overline{\otimes} M$ avec une suite presque invariante.

Démonstration. Soit α l'action de G sur N et β l'action de G sur M . On prend $\varphi = \varphi_N \otimes \varphi_M$. Par la définition 4.2 and la proposition 4.3 de [Tak13], on sait que φ est un poids sur $N \overline{\otimes} M$. On montre que l'action $\gamma = \alpha \otimes \beta$ de G sur $N \overline{\otimes} M$ est C_0 et admet une suite presque invariante.

Premièrement, constatons que $L^2(N \overline{\otimes} M, \varphi_N \otimes \varphi_M) = L^2(N, \varphi_N) \overline{\otimes} L^2(M, \varphi_M)$. Comme les deux extensions de α et β à $L^2(N, \varphi_N)$ et $L^2(M, \varphi_M)$ respectivement sont des représentations unitaires, on a bien que γ s'étend en une représentation unitaire. Comme α est C_0 pour φ_N , par la proposition 3.1.4 son extension est C_0 . Comme le produit tensoriel d'une représentation C_0 avec une autre représentation est C_0 , alors γ est C_0 pour φ .

Finalement, par la proposition 3.1.4 les deux extensions de α et β ont des vecteurs presque invariants. D'où γ a des vecteurs presque invariants. \square

Remarque 3.2.16. Avec ce résultat, on peut construire des nouveaux exemples d'algèbres de von Neumann qui ont une action C_0 de G avec une suite presque invariante. Du corollaire 3.1.5 et de la proposition 3.2.4, on sait que G a une telle action sur $L^\infty(\Omega)$ et sur $B(\mathcal{H})$. De plus, par le théorème 3.0.2, G a une action sur le facteur hyper-fini R de type II_1 muni de sa trace τ et sur le facteur de Powers R_λ avec l'état de Powers φ_λ . Ainsi par la proposition 3.2.15, on sait que G a une action C_0 avec une suite presque invariante sur $L^\infty(\Omega) \overline{\otimes} R$, $B(\mathcal{H}) \overline{\otimes} R$, $L^\infty(\Omega) \overline{\otimes} R_\lambda$ et $B(\mathcal{H}) \overline{\otimes} R_\lambda$. Ainsi on a des exemples d'algèbres de von Neumann de type II_∞ et de type III.

4. Baum-Connes explicite pour certains produits semi-directs de \mathbb{Z}^2 par \mathbb{F}_2

Le but de cette section est de rendre explicite la conjecture de Baum-Connes pour certains produits semi-directs de \mathbb{Z}^2 par \mathbb{F}_2 , où le groupe libre est vu comme sous-groupe libre de rang 2 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Dans un premier temps, on dégage les caractéristiques communes aussi bien du côté analytique que topologique pour ces groupes abstraits, i.e. sans aucune hypothèse sur les générateurs du groupe libre. Dans un second temps, on traite deux exemples où l'on décrit explicitement le membre de gauche ainsi que le membre de droit :

1. $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes S$, où S désigne le groupe de Sanov. On rappelle ici que S est engendré librement par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes C$, où C désigne le sous-groupe des commutateurs de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On rappelle que C est engendré librement par les deux commutateurs $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On se base notamment sur les travaux de O.Isely [Ise11]. C'est pourquoi on commence par rappeler certains résultats de sa thèse.

4.1. K -théorie et K -homologie pour certains produits semi-directs de \mathbb{Z}^2 par \mathbb{Z}

K -théorie

On commence par s'intéresser à la K -théorie des fonctions continues sur le tore \mathbb{T}^2 dans le but d'extraire des générateurs explicites. Ainsi on pourra calculer explicitement la K -théorie des C^* -algèbres de groupes de la forme $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$. Cette partie s'appuie entièrement sur le chapitre 3 de [Ise11].

4.1.1. K -théorie de $C(\mathbb{T}^2)$

Comme corollaire du théorème 1.3.18, nous avons déjà déterminé de manière abstraite les K -groupes de $C(\mathbb{T}^2)$. En effet, nous avons déduit :

$$K_*(C(\mathbb{T}^2)) \cong \mathbb{Z}^2.$$

À présent, dans le but de déterminer des générateurs explicites, nous utilisons la suite exacte à 6 termes de Pimsner et Voiculescu et les isomorphismes

$$C(\mathbb{T}^2) \cong C_r^*(\mathbb{Z}^2) \cong C_r^*(\mathbb{Z}) \rtimes_{\tau} \mathbb{Z} \cong C(\mathbb{T}) \rtimes_{\tau} \mathbb{Z},$$

où τ est l'action triviale de \mathbb{Z} .

Soient $\pi_i \in C(\mathbb{T}^2)$ les i -ème fonctions coordonnées, pour $i = 1, 2$ et soit $\iota \in C(\mathbb{T})$ l'inclusion de \mathbb{T} dans \mathbb{C} . Ainsi, vues comme C^* -algèbres, $C(\mathbb{T})$ est engendrée par ι et $C(\mathbb{T}^2)$ est engendrée

par π_1 et π_2 . En regardant $C(\mathbb{T}^2)$ comme le produit croisé décrit ci-dessus, on a que $C(\mathbb{T})$ est la C^* -sous-algèbre générée par π_2 , et π_1 est l'unitaire représentant l'action τ . En effet,

$$\pi_1 \pi_2 \pi_1^* = \pi_1 \pi_1^* \pi_2 = \pi_2 = \tau(\pi_2).$$

Ainsi les homomorphismes $\text{id} - \tau_*^{-1}$, dans la suite exacte à 6 termes associée à ce produit croisé, sont nuls en K_0 et K_1 . On obtient alors deux suites exactes courtes :

1.

$$0 \rightarrow K_0(C(\mathbb{T})) \xrightarrow{i_*} K_0(C(\mathbb{T}^2)) \xrightarrow{\partial_0} K_1(C(\mathbb{T})) \rightarrow 0;$$

2.

$$0 \rightarrow K_1(C(\mathbb{T})) \xrightarrow{i_*} K_1(C(\mathbb{T}^2)) \xrightarrow{\partial_1} K_0(C(\mathbb{T})) \rightarrow 0.$$

On en déduit $K_0(C(\mathbb{T}^2)) \cong \mathbb{Z}^2$ est généré par $[1] = i_*([1])$ et une pré-image de $[t]$ par ∂_0 . De même, on a que $K_1(C(\mathbb{T}^2)) \cong \mathbb{Z}^2$ est généré par $[\pi_2] = i_*([t])$ et une pré-image de $[1]$ par ∂_1 .

Proposition 4.1.1. *L'homomorphisme*

$$\partial_1 : K_1(C(\mathbb{T}^2)) \rightarrow K_0(C(\mathbb{T}))$$

envoie $[\pi_1]$ sur $-[1]$.

Démonstration. Conséquence du lemme 1.3.21. □

Corollaire 4.1.2. *Le groupe $K_1(C(\mathbb{T}^2)) \cong \mathbb{Z}^2$ est généré par $[\pi_1]_1$ et $[\pi_2]_1$.*

Considérons pour tout $t \in [0, 1]$ les matrices

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} \cos^4(\frac{\pi}{2}t) + \sin^4(\frac{\pi}{2}t) & \cos^3(\frac{\pi}{2}t) \sin(\frac{\pi}{2}t) - \sin^3(\frac{\pi}{2}t) \cos(\frac{\pi}{2}t) \\ \cos^3(\frac{\pi}{2}t) \sin(\frac{\pi}{2}t) - \sin^3(\frac{\pi}{2}t) \cos(\frac{\pi}{2}t) & 2 \cos^2(\frac{\pi}{2}t) \sin^2(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix},$$

et

$$X_1(t) = \cos(\frac{\pi}{2}t) \sin(\frac{\pi}{2}t) \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t) \sin(\frac{\pi}{2}t) & \sin^2(\frac{\pi}{2}t) \\ -\cos^2(\frac{\pi}{2}t) & -\cos(\frac{\pi}{2}t) \sin(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix}.$$

Comme $X_0(0) = X_0(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $X_1(0) = X_1(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on peut voir X_i comme des fonctions continues de \mathbb{T} dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, i.e. $X_i \in \mathcal{M}_2(C(\mathbb{T}))$ pour $i = 0, 1$. On peut ainsi construire une projection de Rieffel dans $\mathcal{M}_2(C(\mathbb{T}^2))$ (les relations caractérisant une projection de Rieffel sont satisfaites) :

$$P(y, \exp(2\pi it)) := \begin{pmatrix} \bar{y} & 0 \\ 0 & \bar{y} \end{pmatrix} X_1^*(t) + X_0(t) + X_1(t) \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix},$$

pour $y \in \mathbb{T}$ et $t \in [0, 1]$.

Proposition 4.1.3. *L'homomorphisme*

$$\partial_0 : K_0(C(\mathbb{T}^2)) \rightarrow K_1(C(\mathbb{T}))$$

envoie $[P]$ sur $[t]$.

Démonstration. On utilise la proposition 1.3.24. Considérons $l_{X_1}(t) = \text{proj}_{\text{Im}(X_1(t))}$. Comme $\text{Im}(X_1(t))$ est engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi}{2}t) \\ -\cos(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix}$ pour $t \neq 0, 1$ et vaut $\{0\}$ sinon, alors

$$l_{X_1}(t) = \begin{pmatrix} \sin^2(\frac{\pi}{2}t) & -\cos(\frac{\pi}{2}t)\sin(\frac{\pi}{2}t) \\ -\cos(\frac{\pi}{2}t)\sin(\frac{\pi}{2}t) & \cos^2(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix},$$

si $t \neq 0, 1$ et $l_{X_1}(t) = 0$ sinon.

Définissons alors $L(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ par

$$L(t) := \begin{pmatrix} \sin^2(\frac{\pi}{2}t) & -\cos(\frac{\pi}{2}t)\sin(\frac{\pi}{2}t) \\ -\cos(\frac{\pi}{2}t)\sin(\frac{\pi}{2}t) & \cos^2(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix}$$

pour tout $t \in [0, 1]$.

Il est facile de contrôler que $L(t)$ est idempotent et que $X_0(t)L(t) = \sin^2(\frac{\pi}{2}t)L(t)$ pour tout t . De plus, on a $\exp(2\pi i X_0(t)L(t)) = \exp(2\pi i X_0(t)l_{X_1}(t))$ pour tout $t \in [0, 1]$.

En effet, il suffit de le montrer pour $t = 0, 1$. Le cas $t = 0$ est évident car $X_0(0)L(0) = 0$.

Regardons

$$\begin{aligned} \exp(2\pi i X_0(1)L(1)) &= \exp\left(2\pi i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(2\pi i)^n}{n!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n \\ &= I_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\exp(2\pi i) - 1) \\ &= I_2 \\ &= \exp(2\pi i X_0(1)l_{X_1}(1)) \end{aligned}$$

En regardant le chemin continu $c : [0, 1] \rightarrow GL_2(C(\mathbb{T}))$ défini par $c_r(t) = \exp(2\pi i \sin^2(\frac{\pi}{2}t)L(rt))$ pour tout $r, t \in [0, 1]$, on a dans K_1 :

$$\begin{aligned} [\exp(2\pi i X_0(t)l_{X_1}(t))] &= [\exp(2\pi i X_0(t)L(t))] \\ &= [\exp(2\pi i \sin^2(\frac{\pi}{2}t)L(t))] \\ &= [c_1(t)] \\ &= [c_0(t)] \\ &= \left[\exp\left(2\pi i \sin^2(\frac{\pi}{2}t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \right] \\ &= [\exp(2\pi i \sin^2(\frac{\pi}{2}t))], \end{aligned}$$

pour tout t .

Finalement en combinant avec le chemin continu $c' : [0, 1] \rightarrow GL_2(C(\mathbb{T}))$ défini par $c'_r(t) = \exp(2\pi i (rt + (1-r)\sin^2(\frac{\pi}{2}t)))$, on déduit que $\partial_0([P]) = [t]$. \square

Corollaire 4.1.4. *Le groupe $K_0(C(\mathbb{T}^2)) \cong \mathbb{Z}^2$ est généré par $[1]$ et $[P]$.*

4.1.2. K -théorie de $C_r^*(\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z})$

Soit $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$, où $\alpha \in \text{Aut}(\mathbb{Z}^2) = GL_2(\mathbb{Z})$. On commence par rappeler comment se transforme l'action α dans $C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$. On note, en toute généralité

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

L'action α s'étend en un automorphisme de $C_r^*(\mathbb{Z}^2)$ et donne ainsi pour $f \in C_c(\mathbb{Z}^2)$ et $\chi \in \widehat{\mathbb{Z}^2}$:

$$\int_{\mathbb{Z}^2} (\alpha \cdot f)(g) \chi(g) dg = \int_{\mathbb{Z}^2} f(\alpha^{-1}(g)) \chi(g) dg = \int_{\mathbb{Z}^2} f(g) \chi(\alpha(g)) dg.$$

D'où l'action sur $C(\widehat{\mathbb{Z}^2})$ correspondant à α via la transformée de Fourier est :

$$(\alpha \cdot f)(\chi) = f(\alpha \cdot \chi).$$

En identifiant $\widehat{\mathbb{Z}^2} \cong \mathbb{T}^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot \chi_{(t,s)})(m, n) &= \chi_{(t,s)}(am + bn, cm + dn) \\ &\simeq \exp(2\pi i(amt + bnt + cms + dns)) \\ &= \exp(2\pi i((at + cs)m + (bt + ds)n)) \\ &\simeq \chi_{(at+cs, bt+ds)}(m, n), \end{aligned}$$

pour tout $(e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s}) \in \mathbb{T}^2$, $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$. Ainsi on obtient que α donne lieu à l'automorphisme de $C(\mathbb{T}^2)$ venant de l'homéomorphisme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^2 & \rightarrow & \mathbb{T}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x^a y^c, x^b y^d) \end{array}.$$

Par conséquent on obtient que la C^* -algèbre

$$C_r^*(\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}) \cong C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha, r} \mathbb{Z},$$

est générée par trois unitaires v, w, u satisfaisant les relations :

1. $uvu^* = \alpha(v) = v^a w^c$;
2. $uwu^* = \alpha(w) = v^b w^d$;
3. $vw = wv$,

où la C^* -algèbre commutative $C(\mathbb{T}^2)$ est vue comme l'algèbre de rotation \mathcal{A}_0 .

Par Pimsner et Voiculescu on a donc la suite exacte à six termes :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C(\mathbb{T}^2)) & \xrightarrow{\text{id}-\alpha_*^{-1}} & K_0(C(\mathbb{T}^2)) & \xrightarrow{i_*} & K_0(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha, r} \mathbb{Z}) \\ \uparrow \partial_1 & & & & \downarrow \partial_0 \\ K_1(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha, r} \mathbb{Z}) & \xleftarrow{i_*} & K_1(C(\mathbb{T}^2)) & \xleftarrow{\text{id}-\alpha_*^{-1}} & K_1(C(\mathbb{T}^2)), \end{array}$$

où i est l'inclusion de $C(\mathbb{T}^2)$ dans $C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{Z}$ donnée par $i(\pi_1) = v$ et $i(\pi_2) = w$.

Soit $x' \in \mathcal{U}(C(\mathbb{T}^2))$ qu'on suppose fixe pour l'action α de \mathbb{Z} déterminée par l'unitaire u . Définissons $x := i(x')$ de telle sorte que $uxu^* = x$. Ainsi on trouve une surjection de $C(\mathbb{T}^2)$ dans $C^*(u, x)$:

$$\begin{array}{ccc} C(\mathbb{T}^2) & \rightarrow & C^*(u, x) \\ \pi_1 & \mapsto & u \\ \pi_2 & \mapsto & x. \end{array}$$

Notons $P_{u,x}$ l'image de P par l'extension au niveau matriciel de cette surjection. Ainsi par naturalité de la suite de Pimsner-Voiculescu et par la proposition 4.1.3, on obtient directement le résultat suivant :

Proposition 4.1.5. *Soit $x' \in \mathcal{U}(C(\mathbb{T}^2))$ fixe par α . Alors l'homomorphisme*

$$\partial_0 : K_0(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{Z}) \rightarrow K_1(C(\mathbb{T}^2))$$

envoie $[P_{u,x}]$ sur $[x']$.

De plus un résultat important que l'on retrouve page 87 de [Ise11] est le suivant :

Proposition 4.1.6. *Supposons que α soit de déterminant 1, i.e. $ad - bc = 1$. Alors l'homomorphisme*

$$\alpha_*^{-1} : K_0(C(\mathbb{T}^2)) \rightarrow K_0(C(\mathbb{T}^2))$$

est l'identité.

Ainsi on en déduit que dans K_0 l'homomorphisme induit par $\text{id} - \alpha^{-1}$ est nul. Ce qui implique que $[\alpha^{-1}(P)]_0 = [P]_0$. Par conséquent, il existe un élément $D_\alpha \in \mathcal{M}_2(C(\mathbb{T}^2))$ tel que $D_\alpha^* D_\alpha = P$ et $D_\alpha D_\alpha^* = \alpha^{-1}(P)$. On définit alors :

1. $E_\alpha := i(D_\alpha)$ et $P_{v,w} := i(P)$;
2. $Q_\alpha^\mu := E_\alpha^*(u^* \oplus u^*)P_{v,w} + I_2 - P_{v,w}$.

Lemme 4.1.7. *L'élément Q_α^μ est un unitaire dans $\mathcal{M}_2(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{Z})$.*

Démonstration. Par définition de E_α , on a :

$$\begin{aligned} P_{v,w}(u \oplus u)E_\alpha &= (u \oplus u)\alpha^{-1}(P_{v,w})E_\alpha \\ &= (u \oplus u)E_\alpha E_\alpha^* E_\alpha \\ &= (u \oplus u)E_\alpha P_{v,w}. \end{aligned}$$

Ainsi $P_{v,w}$ commute avec $(u \oplus u)E_\alpha$ et donc également avec son adjoint. En utilisant ce fait, on montre facilement que $Q_\alpha^\mu(Q_\alpha^\mu)^* = I_2$ et $(Q_\alpha^\mu)^* Q_\alpha^\mu = I_2$. \square

Proposition 4.1.8. *L'homomorphisme*

$$\partial_1 : K_1(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{Z}) \rightarrow K_0(C(\mathbb{T}^2))$$

envoie $[Q_\alpha^\mu]$ sur $[P]$.

Démonstration. Dans notre cas, l'extension de Toeplitz est

$$0 \rightarrow C(\mathbb{T}^2) \otimes \mathcal{K} \xrightarrow{\psi} \mathcal{T}_{C(\mathbb{T}^2), \alpha} \xrightarrow{p} C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha, r} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Une pré-image de $Q_\alpha^u \oplus (Q_\alpha^u)^*$ par p est donnée par la matrice M suivante :

$$\begin{pmatrix} E_\alpha^*(u^* \oplus u^*)P_{v,w} \otimes S^* + (I_2 - P_{v,w}) \otimes I & 0 \\ P_{v,w} \otimes T & P_{v,w}(u \oplus u)E_\alpha \otimes S + (I_2 - P_{v,w}) \otimes I \end{pmatrix}.$$

De plus $M \in \mathcal{U}_4(\mathcal{T}_{C(\mathbb{T}^2), \alpha})$ et donc en rappelant que $p_2 = (1 \otimes I) \oplus (1 \otimes I) \oplus 0 \oplus 0 \in \mathcal{M}_4(\mathcal{T}_{C(\mathbb{T}^2), \alpha})$, on a

$$Mp_2M^* - p_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_{v,w} \otimes T \end{pmatrix}.$$

En prenant $z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P \otimes e_{0,0} \end{pmatrix}$, on a bien $\psi(z) = Mp_2M^* - p_2$. Ainsi

$$\partial_1([Q_\alpha^u]) = [P_2 \oplus (P \otimes e_{0,0})] - [P_2] = [P \otimes e_{0,0}],$$

où $P_2 = I_2 \oplus 0_2$. On conclut en rappelant que $[P \otimes e_{0,0}]$ est envoyé sur $[P]$ par l'isomorphisme $K_0(C(\mathbb{T}^2) \otimes \mathcal{K}) \cong K_0(C(\mathbb{T}^2))$. \square

En revenant à la suite de Pimsner-Voiculescu, on déduit, en utilisant la proposition 4.1.6, la suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow K_0(C(\mathbb{T}^2)) \xrightarrow{i_*} K_0(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_0} \text{Im}(\partial_0) \rightarrow 0.$$

Ainsi étant des groupes abéliens libres, la suite se scinde et on trouve :

$$K_0(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \cong K_0(C(\mathbb{T}^2)) \oplus \text{Im}(\partial_0).$$

De manière similaire, on a :

$$0 \rightarrow \text{Ker}(\partial_1) \rightarrow K_1(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_1} K_0(C(\mathbb{T}^2)) \rightarrow 0,$$

et donc

$$K_1(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \cong \text{Ker}(\partial_1) \oplus K_0(C(\mathbb{T}^2)).$$

De plus en utilisant l'exactitude de la suite et le premier théorème d'isomorphisme, on a :

$$\text{Ker}(\partial_1) \cong K_1(C(\mathbb{T}^2))/\text{Im}(\sigma_*), \quad \text{Im}(\partial_0) = \text{Ker}(\sigma_*).$$

Il suffit donc de comprendre $\text{id} - \alpha_*^{-1}$ en K_1 pour conclure. On termine cette section en énonçant les résultats de O. Isely dont nous aurons besoin :

Théorème 4.1.9. On suppose α de déterminant 1, de trace 2 et que $b = 0, c \neq 0$. Alors :

1. Le groupe $K_0(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_\alpha \mathbb{Z})$ est isomorphe à \mathbb{Z}^3 . Les générateurs sont donnés par $[1]$, $[P_{v,w}]$ et $[P_{u,w}]$.
2. Le groupe $K_1(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_\alpha \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_{|c|}$. Les générateurs sont donnés par les éléments sans torsion $[Q_\alpha^u]$, $[u]$ et $[v]$, ensemble avec la classe $[w]$, d'ordre $|c|$.

Théorème 4.1.10. On suppose α de déterminant 1, de trace 1 ou 3. Alors

1. Le groupe $K_0(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z})$ est isomorphe à \mathbb{Z}^2 . Les générateurs sont donnés par [1] et $[P_{v,w}]$.
2. Le groupe $K_1(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z})$ est isomorphe à \mathbb{Z}^2 . Les générateurs sont donnés par $[u]$ et $[Q_{\alpha}^u]$.

K -homologie

De manière analogue au calcul de K -théorie, on commence par s'appuyer sur les travaux d'Olivier Isely [Ise11] pages 109-119, chapitre 4. Ainsi, par ses calculs, on connaîtra la K -homologie du tore ainsi que de l'espace classifiant de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$; ce qui nous permettra de calculer le côté gauche dans notre cas.

4.1.3. K -homologie de \mathbb{T}^2

L'espace \mathbb{T}^2 peut être vu comme un mapping torus trivial :

$$\mathbb{T}^2 \cong M_{\mathbb{T}, \text{Id}}.$$

De plus on rappelle que \mathbb{T} est vu dans \mathbb{T}^2 via l'injection $i_1 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ donnée par $i_1(x) = (x, 1)$ pour tout $x \in \mathbb{T}$. Ainsi par 1.3.89, on a :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathbb{T}) & \xrightarrow{0} & K_0(\mathbb{T}) & \xrightarrow{(i_1)_*} & K_0(\mathbb{T}^2) \\ \uparrow \partial & & & & \downarrow \partial \\ K_1(\mathbb{T}^2) & \xleftarrow{(i_1)_*} & K_1(\mathbb{T}) & \xleftarrow{0} & K_1(\mathbb{T}). \end{array}$$

Ainsi en se rappelant que $K_i(\mathbb{T}) \cong \mathbb{Z}$ pour $i = 0, 1$, on obtient la suite exacte courte pour $j = 0, 1$:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow K_j(\mathbb{T}^2) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Comme \mathbb{Z} est un groupe abélien libre, alors

$$K_i(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z}^2,$$

pour $i = 0, 1$. Ainsi on déduit directement que $K_1(\mathbb{T}^2)$ est généré par $\gamma'_1 := i_*(\gamma''_1) = [\mathbb{T}, \mathbb{T} \times \mathbb{C}, i_1]$ et une pré-image de δ'_1 par ∂ . De même que $K_0(\mathbb{T}^2)$ est généré par $\delta'_1 := i_*(\delta''_1) = [*, \mathbb{C}, * \rightarrow \{(1, 1)\}]$ et une pré-image de γ'_1 par ∂ .

On va démontrer dans un premier temps que $\gamma'_2 := [\mathbb{T}, \mathbb{T} \times \mathbb{C}, i_2]$ est une pré-image de δ'_1 par ∂ .

Lemme 4.1.11. *Il existe un bordisme dans $K_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{T})$ entre $(\mathbb{T}, \mathbb{T} \times \mathbb{C}, i_2)$ et l'opposé de $(I, I \times \mathbb{C}, i_2 \circ \exp')$, où $\exp'(t) = e^{2\pi it}$ pour tout $t \in I$.*

Démonstration. Regardons l'application continue

$$f : \mathbb{T} \times I \rightarrow \mathbb{T} \\ (e^{2\pi it}, s) \mapsto \begin{cases} \exp(\pi i \frac{4t-s}{2-s}) & \text{si } t \in [\frac{s}{4}, 1 - \frac{s}{4}] \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque que f restreinte à $\mathbb{T} \cong \mathbb{T} \times \{0\}$ est l'identité. On considère alors le bordisme avec les notations de 1.3.58 :

1. $L := \mathbb{T} \times I$ muni de la structure de $\{e\}$ -Spin^c héritée de \mathbb{T} comme dans 1.3.55.
2. $F := L \times \mathbb{C}$ le fibré complexe trivial.
3. $\Psi : L \rightarrow \mathbb{T}^2$ définie par $\Psi(x) = (1, f(x))$ pour tout $x \in L$.
4. Finalement l'application lisse $h : \mathbb{T} \times \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ est donné par $h(e^{2\pi it}, 0) = -7$ et $h(e^{2\pi it}, 1) = 1 - \cos(2\pi t)$ pour tout $t \in I$.

Ainsi dans $K_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{T})$ on a bien un bordisme car $h^{-1}([-1, 1]) = \{(e^{2\pi it}, 1) \mid t \in [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]\}$ et donc $\Psi(h^{-1}([-1, 1])) = \{(1, 1)\} \subset \mathbb{T} \times \{1\}$. De plus

$$(M_-, F|_{M_-}, \Psi|_{M_-}) = (\mathbb{T} \times \{0\}, \mathbb{T} \times \mathbb{C}, \text{Id}|_{\mathbb{T}})$$

et

$$(M_+, F|_{M_+}, \Psi|_{M_+}) = \left(\left\{ (e^{2\pi it}, 1) \mid t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right] \right\}, M_+ \times \mathbb{C}, \Psi|_{M_+}(e^{2\pi it}, 1) = (1, e^{\pi i(4t-1)}) \right).$$

Cette dernière étant isomorphe à l'opposé de $(I, I \times \mathbb{C}, i_2 \circ \exp')$ via :

$$\begin{aligned} I &\rightarrow M_+ \\ t &\mapsto \exp\left(2\pi i \frac{2t+1}{4}\right). \end{aligned}$$

□

Proposition 4.1.12. *L'homomorphisme $\partial : K_1(\mathbb{T}^2) \rightarrow K_0(\mathbb{T})$ envoie γ'_2 sur δ'_1 .*

Démonstration. Du théorème 1.3.89, on a $\partial = \partial_0 \circ (\text{Id} \times \exp'_*)^{-1} \circ i_*$. Ainsi on doit montrer :

$$i_*(\gamma'_2) = ((\text{Id} \times \exp'_*) \circ \partial_0^{-1})(\delta'_1).$$

D'un côté on a $i_*(\gamma'_2) = [\mathbb{T}, \mathbb{T} \times \mathbb{C}, i_2]$ dans $K_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{T})$. De l'autre, on a :

$$\partial_0^{-1}(\delta'_1) = [I, I \times \mathbb{C}, \{1\} \times \text{Id}|_I] \in K_1(\mathbb{T} \times I, \mathbb{T} \times \partial I).$$

Donc

$$((\text{Id} \times \exp'_*) \circ \partial_0^{-1})(\delta'_1) = [I, I \times \mathbb{C}, \{1\} \times \exp'] = [I, I \times \mathbb{C}, i_2 \circ \exp'].$$

Par le lemme précédent, on a bien $[I, I \times \mathbb{C}, i_2 \circ \exp'] = [\mathbb{T}, \mathbb{T} \times \mathbb{C}, i_2]$ dans $K_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{T})$. □

Corollaire 4.1.13. *Le groupe $K_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z}^2$ est généré par γ'_1 et γ'_2 .*

De même manière on démontre que $\delta'_2 = [\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}, \text{Id}|_{\mathbb{T}^2}]$ est une pré-image de γ'_1 par ∂ .

Proposition 4.1.14. *L'homomorphisme $\partial : K_0(\mathbb{T}^2) \rightarrow K_1(\mathbb{T})$ envoie δ'_2 sur γ'_1 .*

Démonstration. Il suffit, comme précédemment de regarder :

1. $i_*(\delta'_2) = [\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}, \text{Id}|_{\mathbb{T}^2}]$ dans $K_0(\mathbb{T}^2, \mathbb{T})$.
2. $((\text{Id} \times \exp'_*) \circ \partial_0^{-1})(\gamma'_1) = [\mathbb{T} \times I, \mathbb{T} \times I \times \mathbb{C}, \text{Id}|_{\mathbb{T}} \times \exp']$.

Le second membre étant isomorphe au premier en utilisant quasiment le même bordisme que précédemment; l'unique différence étant de prendre dans tous les K -cycles le produit avec \mathbb{T} . □

Corollaire 4.1.15. *Le groupe $K_0(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z}^2$ est généré par δ'_1 et δ'_2 .*

4.1.4. K -homologie de l'espace classifiant de $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$

Soit $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$, où $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$. Par la proposition 1.3.84, on a donc $BG = \mathbb{T}^2 \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, où l'action diagonale de \mathbb{Z} est donnée par la translation sur \mathbb{R} et est induite par α sur $B\mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2$. Plus précisément l'automorphisme α induit un homéomorphisme, noté également α , qui est l'application classifiante du fibré \mathbb{Z}^2 -principal $\mathbb{R}^2 \times_{\mathbb{Z}^2} \mathbb{Z}^2$:

$$\alpha : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \\ (x, y) \mapsto (x^a y^b, x^c y^d).$$

En effet si l'on note $\alpha^*(\mathbb{R}^2)$ le tiré en arrière par α du fibré $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, on a :

$$\alpha^*(\mathbb{R}^2) = \{(x, y, t, s) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid \alpha(x, y) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s})\}$$

est isomorphe en tant que fibré \mathbb{Z}^2 -principal à $\mathbb{R}^2 \times_{\mathbb{Z}^2} \mathbb{Z}^2$ via l'isomorphisme \mathbb{Z}^2 -équivariant :

$$f : \mathbb{R}^2 \times_{\mathbb{Z}^2} \mathbb{Z}^2 \rightarrow \alpha^*(\mathbb{R}^2) \\ [(t, s), (m, n)] \mapsto (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s}, at + bs + m, ct + ds + n).$$

De plus il est clair que BG est homéomorphe à $M_{\mathbb{T}^2, \alpha}$. On peut donc utiliser le théorème 1.3.89 :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathbb{T}^2) & \xrightarrow{\sigma_*} & K_0(\mathbb{T}^2) & \xrightarrow{i_*} & K_0(BG) \\ \uparrow \partial & & & & \downarrow \partial \\ K_1(BG) & \xleftarrow{i_*} & K_1(\mathbb{T}^2) & \xleftarrow{\sigma_*} & K_1(\mathbb{T}^2). \end{array}$$

Définissons un élément particulier dans $K_0(BG)$ relatif à $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}^2$ un lacet lisse fixe par α , i.e. $\alpha(\varphi(x)) = \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{T}$. Supposons φ injective et notons T_{φ} le sous-espace de $M_{\mathbb{T}^2, \alpha}$ donné par les classes $[\varphi(x), t]$ pour $x \in \mathbb{T}$ et $t \in I$. Il est évident que T_{φ} est homéomorphe à \mathbb{T}^2 . En effet, il suffit de considérer l'application définie par $[\varphi(x), t] \mapsto (x, e^{2\pi i t})$. Définissons alors $\delta_{\varphi} := [\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}, \mathbb{T}^2 \cong T_{\varphi} \subset M_{\mathbb{T}^2, \alpha}]$. Ainsi par naturalité de la suite exacte à six-termes et en utilisant la proposition 4.1.14, on déduit directement la proposition suivante :

Proposition 4.1.16. *Si $\alpha(\varphi) = \varphi$, alors l'homomorphisme $\partial : K_0(BG) \rightarrow K_1(\mathbb{T}^2)$ envoie δ_{φ} sur l'élément $[\mathbb{T}, \mathbb{T} \times \mathbb{C}, \varphi]$.*

Il nous faut également regarder l'injection de \mathbb{T} dans BG :

$$i_3 : \mathbb{T} \rightarrow BG \\ e^{2\pi i t} \mapsto [1, 1, t].$$

Ainsi en prenant $\gamma_3 := [\mathbb{T}, \mathbb{T} \times \mathbb{C}, i_3]$, en utilisant également la naturalité et la proposition 4.1.12, on obtient :

Proposition 4.1.17. *L'homomorphisme $\partial : K_1(BG) \rightarrow K_0(\mathbb{T}^2)$ envoie γ_3 sur δ'_1 .*

O. Isely a eu besoin à ce stade, et nous devons également le réutiliser dans notre cas, d'établir un lien entre la K -homologie d'un CW -complexe connexe X et son homologie standard. Cette connexion est due aux travaux de Michel Matthey dans [M⁺02].

Théorème 4.1.18. Soit X un CW -complexe connexe de dimension plus petite ou égale à 3. Alors il existe des isomorphismes :

$$\text{ch}_0 \oplus \text{ch}_2 : K_0(X) \rightarrow H_0(X) \oplus H_2(X)$$

et

$$\text{ch}_1 \oplus \text{ch}_3 : K_1(X) \rightarrow H_1(X) \oplus H_3(X)$$

qui sont compatibles avec les caractères de Connes-Chern et naturels si $\dim(X) \leq 2$.

Dans les bons cas, on peut donc se restreindre à l'homologie standard pour déterminer la K -homologie géométrique. Pour un usage ultérieur, on s'attarde à décrire les inverses des caractères de Chern ch_j :

$$\beta_j : H_j(X) \rightarrow K_{j(\text{mod}2)}(X).$$

Comme X est connexe, la projection de X sur un point $*$ donne un isomorphisme $H_0(X) \cong H_0(*)$. De plus, on a $H_0(*) \cong K_0(*)$ en envoyant sa classe fondamentale sur le cycle $[\ast, \mathbb{C}, \text{Id}_\ast]$. Ainsi l'adjonction d'un point-base dans X fournit un homomorphisme $K_0(*) \rightarrow K_0(X)$. La composition de ces trois applications définit l'homomorphisme :

$$\beta_0 : H_0(X) \rightarrow K_0(X).$$

Soit $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow X$ un lacet. D'une part, le lacet définit un K -cycle $[\mathbb{T}, \mathbb{T} \times \mathbb{C}, \varphi]$ dans $K_1(X)$. Par conséquent, on a un homomorphisme $\kappa : \pi_1(X) \rightarrow K_1(X)$ qui est bien défini par la proposition 1.3.62. D'autre part, on dispose de l'homomorphisme :

$$\varphi_* : H_1(\mathbb{T}) \rightarrow H_1(X).$$

On a alors $\beta_1(\varphi_*([\mathbb{T}])) = \kappa([\varphi])$.

Finalement on rappelle de [Tho54] que pour un élément $x \in H_2(X)$, il existe une surface de genre au moins 1, notée Σ_x , et une application continue :

$$f_x : \Sigma_x \rightarrow X$$

telle que $(f_x)_*$ envoie la classe fondamentale $[\Sigma_x] \in H_2(\Sigma_x)$ sur x . Alors :

$$\beta_2(x) = [\Sigma_x, \Sigma_x \times \mathbb{C}, f_x].$$

Proposition 4.1.19. Dans $K_1(\mathbb{T}^2)$, on a :

$$[\mathbb{T}, \mathbb{T} \times \mathbb{C}, i_1^{k_1} i_2^{k_2}] = k_1 \gamma'_1 + k_2 \gamma'_2,$$

pour tout $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Le lacet

$$\begin{aligned} i_1^{k_1} i_2^{k_2} : \mathbb{T} &\rightarrow \mathbb{T}^2 \\ x &\mapsto (x^{k_1}, x^{k_2}) \end{aligned}$$

est clairement homotope à la concaténation de k_1 lacets i_1 et k_2 lacets i_2 . Ainsi on a :

$$[i_1^{k_1} i_2^{k_2}] = k_1 [i_1] + k_2 [i_2]$$

dans $\pi_1(\mathbb{T}^2)$. Définissons alors l'homomorphisme

$$\begin{aligned} \kappa : \pi_1(\mathbb{T}^2) &\rightarrow K_1(\mathbb{T}^2) \\ [\phi] &\mapsto [\mathbb{T}, \mathbb{T} \times \mathbb{C}, \phi]. \end{aligned}$$

Cet homomorphisme est bien défini car si on a deux K -cycles (M, E, φ_1) et (M, E, φ_2) sur un G -espace X et φ_1 est G -homotope à φ_2 , alors les deux K -cycles sont bordants et définissent donc la même classe dans K_1 . Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned} [\mathbb{T}, \mathbb{T} \times \mathbb{C}, i_1^{k_1} i_2^{k_2}] &= \kappa([i_1^{k_1} i_2^{k_2}]) \\ &= \kappa(k_1[i_1] + k_2[i_2]) \\ &= k_1\kappa([i_1]) + k_2\kappa([i_2]) \\ &= k_1\gamma'_1 + k_2\gamma'_2. \end{aligned}$$

□

Supposons à présent que l'action α est de déterminant 1. On a alors l'analogie du résultat 4.1.6 de K -théorie :

Proposition 4.1.20. *L'homomorphisme $id - \alpha_*^{-1} : K_0(\mathbb{T}^2) \rightarrow K_0(\mathbb{T}^2)$ est identiquement nul.*

Démonstration. Comme $\det(\alpha^{-1}) = 1$, alors α^{-1} induit un homéomorphisme préservant l'orientation de \mathbb{T}^2 . Par conséquent, il est nécessaire que α_*^{-1} soit l'identité sur l'homologie paire de \mathbb{T}^2 . On conclut en utilisant le théorème 4.1.18. □

Un résultat de géométrie important que nous utiliserons, dû à Steenrod, est le fait que toute variété de dimension 3 orientable est parallélisable. Ainsi on déduit directement que $M_{\mathbb{T}^2, \alpha}$ est une variété compacte lisse parallélisable. Ainsi par la proposition 1.3.53, on a que $B(\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z})$ est une Spin^c -variété avec fibré $\text{Spin}^c(3)$ -principal trivial. D'où le triplet $(M_{\mathbb{T}^2, \alpha}, M_{\mathbb{T}^2, \alpha} \times \mathbb{C}, \text{id}_{M_{\mathbb{T}^2, \alpha}})$ définit un K -cycle impair sur BG . Notons $\gamma_4 := [M_{\mathbb{T}^2, \alpha}, M_{\mathbb{T}^2, \alpha} \times \mathbb{C}, \text{id}_{M_{\mathbb{T}^2, \alpha}}]$.

Proposition 4.1.21. *L'homomorphisme $\partial : K_1(BG) \rightarrow K_0(\mathbb{T}^2)$ envoie γ_4 sur δ'_2 .*

Démonstration. Comme $\partial = \partial_0 \circ (q_*)^{-1} \circ i'_*$, il suffit de montrer :

$$i'_*(\gamma_4) = (q_* \circ \partial_0^{-1})(\delta'_2).$$

D'un côté on a que $(q_* \circ \partial_0^{-1})(\delta'_2) = [\mathbb{T}^2 \times I, \mathbb{T}^2 \times I \times \mathbb{C}, q]$. Cet élément dans $K_1(M_{\mathbb{T}^2, \alpha}, \mathbb{T}^2)$ est le même que $i'_*(\gamma_4)$ via le bordisme donné par :

- la variété $M_{\mathbb{T}^2, \alpha} \times I$;
- le fibré complexe $M_{\mathbb{T}^2, \alpha} \times I \times \mathbb{C}$;
- L'application $\Psi : M_{\mathbb{T}^2, \alpha} \times I \rightarrow M_{\mathbb{T}^2, \alpha}$ définie par :

$$\Psi([x, t], s) = \begin{cases} [x, \frac{4t-s}{4-2s}] & \text{si } t \in [\frac{s}{4}, 1 - \frac{s}{4}] \\ [x, 0] & \text{si } t < \frac{s}{4} \\ [x, 1] & \text{si } t > 1 - \frac{s}{4}. \end{cases}$$

- La fonction lisse

$$\begin{aligned} h : M_{\mathbb{T}^2, \alpha} \times \partial I &\rightarrow \mathbb{R} \\ ([x, t], 0) &\mapsto -7 \\ ([x, t], 1) &\mapsto 1 - \cos(2\pi t). \end{aligned}$$

□

Par la proposition 4.1.20, on déduit la suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow K_0(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{i_*} K_0(BG) \xrightarrow{\partial} \text{Im}(\partial) \rightarrow 0,$$

et par conséquent $K_0(BG) \cong K_0(\mathbb{T}^2) \oplus \text{Im}(\partial)$. Les générateurs étant donnés par $\delta_1 := [*, \mathbb{C}, * \rightarrow \{(1, 1), 0\}] \subset BG$ et $\delta_2 := [\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}, i]$ avec les pré-images par ∂ des générateurs de $\text{Im}(\partial) = \text{Ker}(\sigma_*)$. De même manière on a :

$$0 \rightarrow \text{Ker}(\partial) \rightarrow K_1(BG) \xrightarrow{\partial} K_0(\mathbb{T}^2) \rightarrow 0,$$

et donc $K_0(BG) \cong \text{Ker}(\partial) \oplus K_0(\mathbb{T}^2)$. Ainsi $K_1(BG)$ est généré par γ_3 et γ_4 avec les générateurs de $\text{Ker}(\partial)$. De plus par le premier théorème d'isomorphisme, on a :

$$\text{Ker}(\partial) = \text{Im}(i_*) \cong K_1(\mathbb{T}^2)/\text{Ker}(i_*) = K_1(\mathbb{T}^2)/\text{Im}(\sigma_*).$$

Lemme 4.1.22. Dans la base $\{\gamma'_1, \gamma'_2\}$ de $K_1(\mathbb{T}^2)$, σ_* est donnée par la matrice $I_2 - \alpha^{-1}$.

Démonstration. La classe γ'_1 est envoyée par α^{-1} sur $[\mathbb{T}, \mathbb{T} \times \mathbb{C}, \alpha^{-1} \circ i_1]$ avec $(\alpha^{-1} \circ i_1)(x) = (x^d, x^{-c})$ pour tout $x \in \mathbb{T}$. Ainsi par la proposition 4.1.19 on a $[\mathbb{T}, \mathbb{T} \times \mathbb{C}, \alpha^{-1} \circ i_1] = d\gamma'_1 - c\gamma'_2$. D'où :

$$\sigma_*(\gamma'_1) = (1 - d)\gamma'_1 + c\gamma'_2.$$

De même manière on calcule $\sigma_*(\gamma'_2) = b\gamma'_1 + (1 - a)\gamma'_2$. □

En définissant $\gamma_j := i_*(\gamma'_j)$ pour $j = 1, 2$, on déduit le théorème suivant :

Théorème 4.1.23 (Isely). Soit $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$. Supposons $\det(\alpha) = 1$, $b = 0$ et $c \neq 0$.

1. Le groupe $K_0(BG)$ est isomorphe à \mathbb{Z}^3 généré par δ_1 , δ_2 et δ_{i_1} .
2. Le groupe $K_1(BG)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_{|c|}$ donné par les générateurs sans torsion $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_1$ ensemble avec la classe γ_2 , d'ordre $|c|$.

Théorème 4.1.24 (Isely). Soit $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$. Supposons $\det(\alpha) = 1$ et $\text{tr}(\alpha) \in \{1, 3\}$. Alors :

1. Le groupe $K_0(BG)$ est isomorphe à \mathbb{Z}^2 et est engendré par δ_1 et δ_2 .
2. Le groupe $K_1(BG)$ est isomorphe à \mathbb{Z}^2 et est engendré par γ_3 et γ_4 .

Ces théorèmes nous permettront de calculer la K -homologie géométrique de l'espace classifiant de notre groupe, i.e. $\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{F}_2$.

4.2. K -théorie et K -homologie pour certains produits semi-directs de \mathbb{Z}^2 par \mathbb{F}_2

4.2.1. $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{F}_2$, avec \mathbb{F}_2 un sous-groupe de rang 2 dans $SL_2(\mathbb{Z})$

Caractéristiques communes

Soit \mathbb{F}_2 un groupe libre de rang 2 dans $SL_2(\mathbb{Z})$, engendré par les matrices α_1 et α_2 . Comme dit précédemment, dans cette section on ne donne pas de description précise des acteurs en jeu dans la conjecture de Baum-Connes pour $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{F}_2$. Nous allons plutôt collecter quelques caractéristiques communes à tous les sous-groupes libres de rang 2 de $SL_2(\mathbb{Z})$.

Le côté gauche

Dans cette partie, on utilise la description géométrique de la K -homologie pour décrire le membre de gauche de la conjecture. On rappelle que comme G est discret, sans torsion et avec un espace classifiant compact, alors le côté gauche de la conjecture se ramène à calculer la K -homologie de son espace classifiant. BG peut être vu comme un CW -complexe connexe de dimension 3 (voir ci-dessous). En utilisant le théorème 4.1.18, on peut donc se ramener à de l'homologie standard afin de calculer la K -homologie de BG .

On démarre par la description de l'espace classifiant de notre groupe. Par la proposition 1.3.83 on a $\underline{EG} = \mathbb{R}^2 \times T_4$, où T_4 est l'arbre de Cayley de \mathbb{F}_2 par rapport à α_1, α_2 . Comme G est sans torsion, nous avons en fait $EG = \underline{EG} = \mathbb{R}^2 \times T_4$. L'action de G sur EG est donnée par :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad G \times EG &\rightarrow EG \\ ((z, \omega), (x, s)) &\mapsto \varphi(z, \omega)(x, s) = (z + \omega x, \omega s), \end{aligned}$$

Ainsi $BG = EG/G$ est un fibré. Les fibres sont des tores et la base est $X = \bigvee_{i=1}^2 \mathbb{T}$, i.e. le bouquet de deux cercles collés en un point base x_0 . L'application $\mathbb{R}^2 \times T_4 \rightarrow T_4$ passe au quotient et définit l'application $\pi : BG \rightarrow X$.

En considérant que $\Gamma_i =: \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha_i} \mathbb{Z}$ agit de manière affine sur \mathbb{R}^2 et par translation sur \mathbb{R} via l'application quotient $\Gamma_i \rightarrow \mathbb{Z}$, on pose $Y_i = \Gamma_i \backslash (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ pour $i = 1, 2$. Ainsi BG peut être également obtenu en collant ensemble Y_1 et Y_2 le long du tore au-dessus de x_0 . En effet, il suffit de constater que $Y_i \rightarrow \mathbb{T}$ est un fibré en tores au-dessus d'un cercle pour $i = 1, 2$. De plus, remarquons que $B\Gamma_i = Y_i$. En utilisant la section précédente, Y_i peut être vu comme un mapping torus :

$$M_{\mathbb{T}^2, \alpha_i}.$$

Par le théorème 4.1.18, on a :

$$K_0(BG) \cong H_0(BG) \oplus H_2(BG) \quad \text{et} \quad K_1(BG) \cong H_1(BG) \oplus H_3(BG).$$

On commence donc par calculer les groupes d'homologies $H_n(BG)$ pour $n = 0, 1, 2, 3$ afin de déterminer abstraitement $K_0(BG)$ et $K_1(BG)$. Pour ce faire, on utilise la suite exacte longue en homologie de Mayer-Vietoris. Comme BG est connexe, on a $H_0(BG) \cong \mathbb{Z}$. De plus, comme

$BG = Y_1 \cup Y_2$ et $Y_1 \cap Y_2 = \mathbb{T}^2$, on obtient :

$$\begin{array}{c} 0 = H_3(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{\Phi} H_3(Y_1) \oplus H_3(Y_2) \xrightarrow{\Psi} H_3(BG) \\ \downarrow \partial \\ \rightarrow H_2(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{\Phi} H_2(Y_1) \oplus H_2(Y_2) \xrightarrow{\Psi} H_2(BG) \\ \downarrow \partial \\ \rightarrow H_1(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{\Phi} H_1(Y_1) \oplus H_1(Y_2) \xrightarrow{\Psi} H_1(BG) \longrightarrow 0, \end{array}$$

où les homomorphismes Φ, Ψ, ∂ sont simplement induits par la suite exacte courte de complexes de chaînes formés par les suites :

$$0 \rightarrow C_n(Y_1 \cap Y_2) \xrightarrow{\varphi} C_n(Y_1) \oplus C_n(Y_2) \xrightarrow{\psi} C_n(Y_1 \cup Y_2) \rightarrow 0$$

avec $\varphi(x) = (x, x)$, $\psi(x, y) = x - y$ et ∂ étant l'application de bord.

Lemme 4.2.1. *L'application $\Psi : H_3(Y_1) \oplus H_3(Y_2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow H_3(BG)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Par la suite exacte de Mayer-Vietoris, il suffit de montrer que l'application $i_i : H_2(\mathbb{T}^2) \rightarrow H_2(Y_i)$ induite par l'injection de \mathbb{T}^2 dans Y_i est injective pour $i = 1, 2$. Pour cela, on considère la suite exacte à 6 termes associée au mapping torus Y_i :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathbb{T}^2) & \xrightarrow{(\text{Id} - \alpha_i)_*} & K_0(\mathbb{T}^2) & \xrightarrow{i_*} & K_0(Y_i) \\ \partial \uparrow & & & & \downarrow \partial \\ K_1(Y_i) & \xleftarrow{i_*} & K_1(\mathbb{T}^2) & \xleftarrow{(\text{Id} - \alpha_i)_*} & K_1(\mathbb{T}^2). \end{array}$$

Par la proposition 4.1.20, $(\text{Id} - \alpha_i)_* : K_0(\mathbb{T}^2) \rightarrow K_0(\mathbb{T}^2)$ est l'application nulle. Ainsi on déduit la suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow K_0(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{i_*} K_0(Y_i) \xrightarrow{\partial} \text{Im}(\partial) \rightarrow 0.$$

Donc $K_0(Y_i) \cong K_0(\mathbb{T}^2) \oplus \text{Im}(\partial)$. En combinant avec le théorème 4.1.18, on a $K_0(Y_i) \cong \text{Im}(\partial) \oplus H_0(\mathbb{T}^2) \oplus H_2(\mathbb{T}^2)$, ce qui démontre l'assertion. \square

Corollaire 4.2.2. *L'inclusion $i : \mathbb{T}^2 \hookrightarrow BG$ (comme fibre au-dessus de x_0) induit une injection $i_* : H_2(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \rightarrow H_2(BG)$.*

Démonstration. On factorise i par l'inclusion $i_1 : \mathbb{T}^2 \hookrightarrow Y_1$ et l'inclusion $Y_1 \hookrightarrow BG$. Alors $(i_1)_*$ est injective sur $H_2(\mathbb{T}^2)$ par la preuve du lemme 4.2.1. De plus, $\Psi|_{H_2(Y_1)}$ est injective par la suite de Mayer-Vietoris ; ce qui complète la preuve. \square

Pour $i = 1, 2$, on note :

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Lemme 4.2.3.

$$H_1(BG) = \mathbb{Z}^2 \oplus (\mathbb{Z}^2 / \langle (a_1 - 1, c_1), (b_1, d_1 - 1), (a_2 - 1, c_2), (b_2, d_2 - 1) \rangle).$$

Démonstration. On utilise le fait bien connu que $H_1(BG) = G^{ab}$, où G^{ab} désigne l'abélianisé de G . Une présentation de G est donnée par :

$$G = \langle x, y, \alpha_1, \alpha_2 \mid xy = yx, \alpha_i x \alpha_i^{-1} = x^{a_i} y^{c_i}, \alpha_i y \alpha_i^{-1} = x^{b_i} y^{d_i} \ (i = 1, 2) \rangle.$$

Par conséquent une présentation de G^{ab} (vu comme groupe additif) est donnée par :

$$G^{ab} = \langle x, y, \alpha_1, \alpha_2 : (a_i - 1)x + c_i y = 0, b_i x + (d_i - 1)y = 0 \ (i = 1, 2) \rangle.$$

En identifiant le groupe abélien libre sur x, y avec \mathbb{Z}^2 par $x = (1, 0), y = (0, 1)$, on obtient le résultat désiré. □

Pour finir, en combinant le théorème 4.1.18 avec le lemme 4.2.1, le lemme 4.2.3 et le corollaire 4.2.2, on déduit :

Corollaire 4.2.4. 1. $K_0(BG) = H_0(BG) \oplus H_2(BG) = \mathbb{Z} \oplus \text{Im}(\Psi) \oplus \text{Im}(\partial)$,
et $\text{Im}(\Psi)$ contient une copie de \mathbb{Z} ;

2.

$$\begin{aligned} K_1(BG) &= H_1(BG) \oplus H_3(BG) \\ &= (\mathbb{Z}^2 \oplus (\mathbb{Z}^2 / \langle (a_1 - 1, c_1), (b_1, d_1 - 1), (a_2 - 1, c_2), (b_2, d_2 - 1) \rangle)) \oplus \mathbb{Z}^2. \end{aligned}$$

Le côté droit

Notre outil principal est la suite exacte à 6 termes de Pimsner-Voiculescu pour les produits croisés par un groupe libre. En effet, comme $C_r^*(G) \cong C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha, r} \mathbb{F}_2$, on peut calculer la K -théorie de $C_r^*(G)$ en utilisant le théorème 4.2.19. Par la proposition 4.1.6, l'application α_{*i}^{-1} est l'identité sur $K_0(C(\mathbb{T}^2))$ pour $i = 1, 2$. Par conséquent la suite exacte à 6 termes (dans notre cas $n = 2$) se déroule en deux suites exactes courtes :

1.

$$0 \rightarrow K_0(C(\mathbb{T}^2)) \xrightarrow{i_*} K_0(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha, r} \mathbb{F}_2) = K_0(C_r^*(G)) \xrightarrow{\partial_0} \text{Im}(\partial_0) \rightarrow 0; \quad (4.2.1)$$

2.

$$0 \rightarrow \text{Im}(i_*) \xrightarrow{i_*} K_1(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha, r} \mathbb{F}_2) = K_1(C_r^*(G)) \xrightarrow{\partial_1} \bigoplus_{i=1}^2 K_0(C(\mathbb{T}^2)) \rightarrow 0. \quad (4.2.2)$$

Théorème 4.2.5. 1. $K_0(C_r^*(G)) = \mathbb{Z}^2 \oplus \text{Im}(\partial_0)$.

De plus, l'application d'assemblage μ_G en degré 0 est une bijection de $\text{Im}(i_*) = \mathbb{Z}^2 \subset K_0(BG)$ restreinte au premier terme \mathbb{Z}^2 de $K_0(C_r^*(G))$.

2. $K_1(C_r^*(G)) = \text{Im}(i_*) \oplus \mathbb{Z}^4$.

De plus, l'application d'assemblage μ_G en degré 1 induit une surjection de $H_1(BG)$ sur un terme $\text{Im}(i_*) \oplus \mathbb{Z}^2$ de $K_1(C_r^*(G))$.

Démonstration. La structure des K -groupes provient du fait que $\text{Im}(\partial_0)$ et $K_0(C(\mathbb{T}^2))$ sont des groupes abéliens libres.

L'énoncé à propos de μ_G en degré 0 provient de la naturalité de l'application d'assemblage appliquée à l'inclusion $i: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{F}_2$ et avec l'injectivité de $i_*: K_0(\mathbb{T}^2) \rightarrow K_0(BG)$ (voir corollaire 4.2.2) et de $i_*: K_0(C^*(\mathbb{Z}^2)) \rightarrow K_0(C_r^*(G))$.

Afin de prouver l'énoncé à propos de μ_G en degré 1, on rappelle que, pour un groupe discret arbitraire H , la restriction de μ_H à $H_1(BH) = H^{ab}$ consiste à envoyer un élément $h \in H^{ab}$ sur sa classe $[u_h]_1$ dans $K_1(C_r^*(H))$ (voir théorème 1.4 de [MV03]). Ainsi, dans notre cas par le lemme 4.2.3, on a :

$$H_1(BG) = \mathbb{Z}^2 \oplus (\mathbb{Z}^2 / \langle (a_1 - 1, c_1), (b_1, d_1 - 1), (a_2 - 1, c_2), (b_2, d_2 - 1) \rangle).$$

D'où μ_G envoie le second terme sur $\text{Im}(i_*)$. Le premier terme \mathbb{Z}^2 est engendré par α_1, α_2 et μ_G est injective sur ce terme. En effet, comme G est K -moyennable (voir [JV83]), alors on peut remplacer $K_*(C_r^*(G))$ par $K_*(C^*(G))$ et la composition des applications quotients :

$$G \rightarrow \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2^{ab} = \mathbb{Z}^2,$$

induit une application (voir théorème 1.1 et corollaire 1.3 [MV03]) :

$$K_1(C^*G) \rightarrow K_1(C^*(\mathbb{Z}^2)) = \mathbb{Z}^2$$

qui envoie les classes de α_1, α_2 sur les générateurs de $K_1(C^*(\mathbb{Z}^2)) = \mathbb{Z}^2$.

□

4.2.2. Le cas de $\mathbb{Z}^2 \rtimes S$, avec S le groupe de Sanov

On considère dans cette section $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} S$, où S est le groupe libre de rang 2 avec générateurs $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Le côté gauche

Dans le but d'énoncer le résultat principal de cette partie, on rappelle de la section 4.1.2 certains éléments privilégiés dans $K_j(Y_i)$ ($j = 0, 1$). Soit $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}^2$ un lacet supposé fixe par α_i , i.e. $\alpha_i(\varphi(x)) = \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{T}$. Alors, si φ est injectif, on note T_φ le sous-espace de Y_i donné par l'ensemble des classes d'équivalence $[\varphi(x), t]$, où $x \in \mathbb{T}$, $t \in I$. Remarquons que T_φ est homéomorphe à un tore via l'application :

$$\begin{aligned} T_\varphi &\rightarrow \mathbb{T}^2 \\ [\varphi(x), t] &\mapsto (x, \exp(2\pi it)). \end{aligned}$$

On définit $\delta_\varphi = [\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}, \mathbb{T}^2 \cong T_\varphi \subset Y_i] \in K_0(B\Gamma_i)$. Pour $K_1(B\Gamma_i)$, on considère premièrement ι_1 (respectivement ι_2) l'inclusion de \mathbb{T} dans le premier (resp. le second) facteur de $\mathbb{T} \times \mathbb{T} = \mathbb{T}^2$. On définit ainsi pour $k = 1, 2$ les classes $\gamma_k = [\mathbb{T}, \mathbb{T} \times \mathbb{C}, i \circ \iota_k] \in K_1(B\Gamma_i)$. Finalement, on rappelle qu'un élément important en K -homologie est donné par l'application :

$$\begin{aligned} i_3: \mathbb{T} &\rightarrow B\Gamma_i \\ e^{2\pi it} &\mapsto [1, 1, t], \end{aligned}$$

représentant le cercle de base et est noté $\gamma_3^i = [\mathbb{T}, \mathbb{T} \times \mathbb{C}, i_3]$. Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.2.6. 1. Le groupe $K_0(BG)$ est isomorphe à \mathbb{Z}^4 et les générateurs sont donnés par $\delta_1 = [*, \mathbb{C}, * \rightarrow x_0 \subset BG]$, $\delta_2 = [\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}, i]$, δ_{i_1} et δ_{i_2} .

2. Le groupe $K_1(BG)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Les générateurs sont donnés par les éléments sans-torsion $\gamma_4^1 = [M_{\mathbb{T}^2, \alpha_1}, M_{\mathbb{T}^2, \alpha_1} \times \mathbb{C}, \text{Id}_{M_{\mathbb{T}^2, \alpha_1}}]$, $\gamma_4^2 = [M_{\mathbb{T}^2, \alpha_2}, M_{\mathbb{T}^2, \alpha_2} \times \mathbb{C}, \text{Id}_{M_{\mathbb{T}^2, \alpha_2}}]$, γ_3^1 et γ_3^2 , ensemble avec les classes γ_1 et γ_2 d'ordre 2.

Lemme 4.2.7. L'application $\Phi : H_1(\mathbb{T}^2) \rightarrow H_1(Y_1) \oplus H_1(Y_2)$ est injective.

Démonstration. Comme $H_1(B\Gamma_i) = \Gamma_i^{ab}$ pour $i = 1, 2$, on a comme présentations de groupes abéliens :

1. $H_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2 = \langle v, w \rangle$;
2. $H_1(Y_1) = \Gamma_1^{ab} = \langle v, w, \alpha_1 : 2v = 0 \rangle$;
3. $H_1(Y_2) = \Gamma_2^{ab} = \langle v, w, \alpha_2 : 2w = 0 \rangle$.

Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} (i_{1*}, i_{2*}) = \Phi : H_1(\mathbb{T}^2) &\rightarrow H_1(Y_1) \oplus H_1(Y_2) \\ v &\mapsto (v, v) \\ w &\mapsto (w, w), \end{aligned}$$

est injective. □

Par le lemme 4.2.7, on déduit directement le corollaire suivant :

Corollaire 4.2.8. L'homomorphisme $\partial : H_2(BG) \rightarrow H_1(\mathbb{T}^2)$ est l'application nulle. □

D'un côté on sait grâce au lemme 4.2.1 que $H_3(BG) \cong H_3(Y_1) \oplus H_3(Y_2)$ et d'un autre côté on a les deux suites exactes courtes suivantes :

$$1. \quad 0 \rightarrow H_2(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \xrightarrow{\Phi} H_2(Y_1) \oplus H_2(Y_2) \xrightarrow{\Psi} H_2(BG) \rightarrow 0; \quad (4.2.3)$$

$$2. \quad 0 \rightarrow H_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\Phi} H_1(Y_1) \oplus H_1(Y_2) \xrightarrow{\Psi} H_1(BG) \rightarrow 0. \quad (4.2.4)$$

Théorème 4.2.9. Les groupes d'homologie pour le CW -complexe BG de dimension 3 sont :

1. $H_3(BG) = \mathbb{Z}^2$;
2. $H_2(BG) = \mathbb{Z}^3$;
3. $H_1(BG) = \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

En particulier $K_0(BG) \cong \mathbb{Z}^4$ et $K_1(BG) \cong \mathbb{Z}^4 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On rappelle également que pour un élément $x \in H_2(X)$, il existe une surface de genre $g \geq 1$, notée Σ_x , et une application continue $f_x : \Sigma_x \rightarrow X$ telle que $(f_x)_*$ envoie la classe fondamentale $[\Sigma_x] \in H_2(\Sigma_x)$ sur x . Ainsi l'inverse de $\text{ch}_2 : K_0(X) \rightarrow H_2(X)$, noté β_2 , envoie x sur $[\Sigma_x, \Sigma_x \times \mathbb{C}, f_x]$. Nous sommes prêt à démontrer le théorème 4.2.9.

Démonstration. La première égalité suit du lemme 4.2.1 et du fait que Y_i , $i = 1, 2$, sont des variétés de dimension 3. Pour la troisième, on abélianise G et on obtient comme présentation de groupe abélien :

$$G^{ab} = \langle v, w, \alpha_1, \alpha_2 : 2v = 2w = 0 \rangle.$$

D'où $H_1(BG) \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Ainsi la partie principale de la preuve est de montrer la deuxième égalité. Pour cela on utilise la suite (4.2.3) et le théorème 4.1.18. Par le corollaire 4.1.15, $K_0(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$ est engendré par $\delta'_1 = [*, \mathbb{C}, * \rightarrow \{(1, 1)\} \subset \mathbb{T}^2]$, $\delta'_2 = [\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}, \text{Id}_{\mathbb{T}^2}]$. De plus, on a $\beta_2([\mathbb{T}^2]) = \delta'_2$, où $[\mathbb{T}^2]$ représente la classe fondamentale du tore, qui génère $H_2(\mathbb{T}^2)$. En considérant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_2(\mathbb{T}^2) & \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} & H_2(Y_1) \oplus H_2(Y_2) \\ \downarrow \beta_2 & & \downarrow \beta_2 \oplus \beta_2 \\ K_0(\mathbb{T}^2) & \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} & K_0(Y_1) \oplus K_0(Y_2), \end{array}$$

on a $(i_{1*}, i_{2*})(\delta'_2) = \delta_2^1 \oplus \delta_2^2$, où $\delta_2 = [\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}, i]$ un générateur de $K_0(Y_i)$ par le théorème 4.1.23, $i = 1, 2$. Par le théorème 4.1.18, on a que l'image de δ_2 par ch_2 est un générateur, respectivement, de $H_2(Y_1)$ et $H_2(Y_2)$. Par conséquent l'image de $[\mathbb{T}^2]$ par Φ est généré par $\text{ch}_2(\delta_2^1) \oplus \text{ch}_2(\delta_2^2)$, qui est un élément primitif dans $H_2(Y_1) \oplus H_2(Y_2)$. De plus, $H_2(Y_i) = \mathbb{Z}^2$ pour $i = 1, 2$, grâce au théorème 4.1.23 :

$$H_0(Y_i) \oplus H_2(Y_i) \cong K_0(Y_i) = \mathbb{Z}^3.$$

En utilisant la suite (4.2.3), on déduit :

$$H_2(BG) \cong \mathbb{Z}^4 / \langle \text{ch}_2(\delta_2^1) \oplus \text{ch}_2(\delta_2^2) \rangle = \mathbb{Z}^3,$$

ce qui termine la preuve. □

Pour être complètement explicite, on doit encore trouver des générateurs. On démarre avec $H_0(BG)$. Comme BG est connexe, il suffit (voir section 4.1.2), de considérer :

$$\begin{array}{ccc} \beta_0 : H_0(BG) & \rightarrow & K_0(BG) \\ [x_0] & \mapsto & \delta_1 = [*, \mathbb{C}, * \rightarrow x_0 \subset BG]. \end{array}$$

Ainsi δ_1 correspond à la contribution de $H_0(BG)$ dans $K_0(BG)$. Les autres générateurs de $K_0(BG)$ viennent de $H_2(BG)$. Par le théorème 4.1.23, pour $i = 1, 2$ on a $K_0(Y_i) \cong \mathbb{Z}^3$ avec générateurs δ_1, δ_2 and δ_{ι_i} , où ι_i l'injection de \mathbb{T} dans le i -ème facteur de $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$. Par conséquent, en utilisant la suite (4.2.3), on déduit la première partie du théorème 4.2.6.

Pour $K_1(BG)$, on commence par $H_3(BG)$. Pour $i = 1, 2$ on a $H_3(Y_i)$ est engendré par la classe fondamentale $[Y_i]$. Par le théorème 4.1.23, ces classes correspondent à $\gamma_4^i = [M_{\mathbb{T}^2, \alpha_i}, M_{\mathbb{T}^2, \alpha_i} \times \mathbb{C}, \text{Id}_{M_{\mathbb{T}^2, \alpha_i}}]$ dans $K_1(Y_i)$ pour $i = 1, 2$. Comme $H_3(BG) \cong H_3(Y_1) \oplus H_3(Y_2)$, on a que la contribution de $H_3(BG)$ dans $K_1(BG)$ est donnée par γ_4^1 and γ_4^2 .

Regardons finalement $H_1(BG)$. Premièrement, on a γ_3^i correspondant à l'espace de base, i.e. le cercle, de Y_i . De plus, on dispose également de γ_1 and γ_2 dans $K_1(BG)$ qui viennent de $K_1(\mathbb{T}^2)$. Plus précisément, par le corollaire 4.1.13, on a $K_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z}^2$ généré par $\gamma_1' = [\mathbb{T}, \mathbb{T} \times \mathbb{C}, \iota_1]$ et $\gamma_2' = [\mathbb{T}, \mathbb{T} \times \mathbb{C}, \iota_2]$, qui correspondent aux cercles fondamentaux du tore. Ainsi en composant avec l'inclusion naturelle i de \mathbb{T}^2 dans le mapping torus, on a $\gamma_1 = [\mathbb{T}, \mathbb{T} \times \mathbb{C}, i \circ \iota_1]$ et $\gamma_2 = [\mathbb{T}, \mathbb{T} \times \mathbb{C}, i \circ \iota_2]$. À nouveau par le théorème 4.1.23, pour $i = 1, 2$, on a $K_1(Y_i) \cong \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_2$

généralisé par les éléments sans-torsion γ_4^i , γ_3^i et $\gamma_{2i(\text{mod } 3)}$ ensemble avec les classes γ_i d'ordre 2. Par conséquent, en utilisant la suite (4.2.4), on déduit la seconde partie du théorème 4.2.6.

Le côté droit

On commence par décrire la C^* -algèbre de G . Comme $C_r^*(G) \cong C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha} S$, elle est engendrée par quatre unitaires abstraits v, w, u_1, u_2 satisfaisant les relations suivantes :

1. $u_1 v u_1^* = \alpha_1(v) = v$ et $u_2 v u_2^* = \alpha_2(v) = v w^2$;
2. $u_1 w u_1^* = \alpha_1(w) = v^2 w$ et $u_2 w u_2^* = \alpha_2(w) = w$;
3. $v w = w v$,

On rappelle de la section 4.1, en tant que C^* -algèbre, $C(\mathbb{T}^2)$ est engendrée par π_i , pour $i = 1, 2$. De plus, par corollaire 4.1.2, on a $K_1(C(\mathbb{T}^2)) \cong \mathbb{Z}^2$ est engendré par $[\pi_1]$ et $[\pi_2]$. Pour K_0 , on a besoin de considérer les deux matrices suivantes, $t \in [0, 1]$:

1.

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} \cos^4(\frac{\pi}{2}t) + \sin^4(\frac{\pi}{2}t) & \cos^3(\frac{\pi}{2}t) \sin(\frac{\pi}{2}t) - \sin^3(\frac{\pi}{2}t) \cos(\frac{\pi}{2}t) \\ \cos^3(\frac{\pi}{2}t) \sin(\frac{\pi}{2}t) - \sin^3(\frac{\pi}{2}t) \cos(\frac{\pi}{2}t) & 2 \cos^2(\frac{\pi}{2}t) \sin^2(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix} ;$$

2.

$$X_1(t) = \cos(\frac{\pi}{2}t) \sin(\frac{\pi}{2}t) \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t) \sin(\frac{\pi}{2}t) & \sin^2(\frac{\pi}{2}t) \\ -\cos^2(\frac{\pi}{2}t) & -\cos(\frac{\pi}{2}t) \sin(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi en définissant :

$$P(y, e^{2\pi i t}) := \begin{pmatrix} \bar{y} & 0 \\ 0 & \bar{y} \end{pmatrix} X_1^*(t) + X_0(t) + X_1(t) \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix},$$

pour $y \in \mathbb{T}$ et $t \in [0, 1]$, on obtient une projection de Rieffel dans $\mathcal{M}_2(C(\mathbb{T}^2))$. Par corollaire 4.1.4, on a $K_0(C(\mathbb{T}^2)) \cong \mathbb{Z}^2$ est engendré par $[1]$ et $[P]$.

Le but est de rendre la suite du théorème 4.2.19 complètement explicite dans notre cas. Avant cela, dans l'optique de rappeler les notations, on énonce quelques préliminaires vus dans la section précédente. On considère, pour $i = 1, 2$, le produit croisé $C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha_i} \mathbb{Z}$, où \mathbb{Z} s'identifie avec $\langle \alpha_i \rangle$. On dispose de l'inclusion naturelle de $C(\mathbb{T}^2)$ dans $C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha_i} \mathbb{Z}$ donnée par $i(\pi_1) = v$ and $i(\pi_2) = w$. Soit $x' \in \mathcal{U}(C(\mathbb{T}^2))$ qu'on suppose fixé par α_i . Ainsi en définissant $x := i(x')$, on a $u_i x u_i^* = x$. Alors on obtient une injection de $C(\mathbb{T}^2)$ dans $C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha_i} \mathbb{Z}$. En effet, on a une surjection de $C(\mathbb{T}^2)$ sur $C^*(u_i, x)$, la C^* -sous-algèbre de $C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha_i} \mathbb{Z}$ générée par u_i et x , donnée par :

$$\begin{array}{ccc} C(\mathbb{T}^2) & \rightarrow & C^*(u_i, x) \\ \pi_1 & \mapsto & u_i \\ \pi_2 & \mapsto & x. \end{array}$$

On note $P_{u_i, x}$ l'image de P par l'extension de cette surjection au niveau matriciel.

Ainsi, on a $[\alpha_i^{-1}(P)] = [P]$. Par définition, il existe $D_{\alpha_i} \in \mathcal{M}_2(C(\mathbb{T}^2))$ tel que :

$$D_{\alpha_i} D_{\alpha_i}^* = \alpha_i^{-1}(P) \quad \text{and} \quad D_{\alpha_i}^* D_{\alpha_i} = P.$$

Afin d'énoncer le théorème principal de cette section, on rappelle les éléments importants introduits dans la section précédente :

1. $E_{\alpha_i} := i(D_{\alpha_i})$ and $P_{v,w} := i(P)$;
2. $Q_{\alpha_i}^{u_i} := E_{\alpha_i}^*(u_i^* \oplus u_i^*)P_{v,w} + I_2 - P_{v,w}$.

Théorème 4.2.10. 1. Le groupe $K_0(C_r^*(G))$ est isomorphe à \mathbb{Z}^4 . Les générateurs sont donnés par $[1]$, $[P_{v,w}]$, $[P_{u_1,v}]$ et $[P_{u_2,w}]$.

2. Le groupe $K_1(C_r^*(G))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^4 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Les générateurs sont donnés par les éléments sans-torsion $[u_1]$, $[u_2]$, $[Q_{\alpha_1}^{u_1}]$ et $[Q_{\alpha_2}^{u_2}]$, ensemble avec les classes $[v]$ et $[w]$ d'ordre 2.

On dispose donc de la suite exacte à six termes du produit croisé par le groupe libre à deux générateurs :

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{i=1}^2 K_0(C(\mathbb{T}^2)) & \xrightarrow{\sigma_*} & K_0(C(\mathbb{T}^2)) & \xrightarrow{i_*} & K_0(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha,r} S) \\ \partial_1 \uparrow & & & & \downarrow \partial_0 \\ K_1(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha,r} S) & \xleftarrow{i_*} & K_1(C(\mathbb{T}^2)) & \xleftarrow{\sigma_*} & \bigoplus_{i=1}^2 K_1(C(\mathbb{T}^2)). \end{array}$$

Comme dans la section précédente, on applique la proposition 4.1.6 pour déduire les deux suites exactes courtes (4.2.1) et (4.2.2). Étant un sous-groupe de $\bigoplus_{i=1}^2 K_1(C(\mathbb{T}^2))$ qui est libre, $\text{Im}(\partial_0)$ est également libre. Par conséquent (4.2.1) se scinde et donne :

$$K_0(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha,r} S) \cong K_0(C(\mathbb{T}^2)) \oplus \text{Im}(\partial_0), \quad (4.2.5)$$

généralisé par $i_*([1]) = [1]$, $i_*([P]) = [P_{v,w}]$ et les pré-images par ∂_0 des générateurs de $\text{Im}(\partial_0) = \text{Ker}(\sigma_*)$. De manière similaire, de la suite (4.2.2) on déduit :

$$K_1(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha,r} S) \cong \bigoplus_{i=1}^2 K_0(C(\mathbb{T}^2)) \oplus \text{Ker}(\partial_1). \quad (4.2.6)$$

En utilisant la proposition 1.3.27 on remarque que $K_1(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha,r} S)$ est engendré par $[u_1]$, $[u_2]$ et les pré-images par ∂_1 de $([P], 0)$ et $(0, [P])$, ensemble avec $\text{Ker}(\partial_1) \cong K_1(C(\mathbb{T}^2))/\text{Im}(\sigma_*)$.

En effet en utilisant l'exactitude de la suite ainsi que le premier théorème d'isomorphisme, on a :

$$\text{Ker}(\partial_1) = \text{Im}(i_*) \cong K_1(C(\mathbb{T}^2))/\text{Ker}(i_*) = K_1(C(\mathbb{T}^2))/\text{Im}(\sigma_*).$$

Le prochain résultat utilise les notations introduites précédemment.

Lemme 4.2.11. *L'application*

$$\partial_0 : K_0(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha,r} S) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^2 K_1(C(\mathbb{T}^2))$$

envoie $[P_{u_1,x}]$ sur $([x'], 0)$ et $[P_{u_2,x}]$ sur $(0, [x'])$.

Démonstration. On a à disposition le diagramme commutatif suivant en K -théorie, qui apparaît naturellement lorsque l'on considère des extensions de Toeplitz associées au produit croisé réduit par un groupe libre (voir [PV82] pour plus de détails ou voir la preuve de la proposition

1.3.27) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & K_0((A \otimes \mathcal{K})^n) & \longrightarrow & K_0(B_n) & \longrightarrow & K_0(A \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{F}_n) \\
 & \nearrow & \uparrow & & \nearrow & & \downarrow \\
 K_0(A \otimes \mathcal{K}) & \longrightarrow & K_0(\mathcal{T}_{n,i}) & \longrightarrow & K_0(A \rtimes \mathbb{Z}) & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \\
 & & K_1(A \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{F}_n) & \longleftarrow & K_1(B_n) & \longleftarrow & K_1((A \otimes \mathcal{K})^n) \\
 & \nearrow & \uparrow & & \nearrow & & \downarrow \\
 K_1(A \rtimes \mathbb{Z}) & \longleftarrow & K_1(\mathcal{T}_{n,i}) & \longleftarrow & K_1(A \otimes \mathcal{K}) & &
 \end{array}$$

En considérant le carré vertical droit, on obtient dans notre cas :

$$\begin{array}{ccc}
 K_0(C(\mathbb{T}^2) \rtimes \langle u_i \rangle) & \longrightarrow & K_0(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha,r} S) \\
 \downarrow \partial_0^i & & \downarrow \partial_0 \\
 K_1(C(\mathbb{T}^2)) & \xrightarrow{\iota_i} & \bigoplus_{i=1}^2 K_1(C(\mathbb{T}^2)).
 \end{array}$$

Par la proposition 4.1.5 on a $\partial_0^i([P_{u_i,x}]) = [x']$ et en composant avec ι_i , qui est le plongement dans la i -ème composante, on déduit le résultat. \square

Lemme 4.2.12. *L'application*

$$\partial_1 : K_1(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha,r} S) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^2 K_0(C(\mathbb{T}^2))$$

envoie $[Q_{\alpha_1}^{u_1}]$ sur $([P], 0)$ et $[Q_{\alpha_2}^{u_2}]$ sur $(0, [P])$.

Démonstration. Premièrement, par le lemme 4.1.7, on a que $Q_{\alpha_i}^{u_i}$ est un unitaire dans

$$\mathcal{M}_2(C_r^*(\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha_i} \mathbb{Z}))$$

pour $i = 1, 2$. Par conséquent, on peut considérer le carré vertical gauche du diagramme introduit précédemment :

$$\begin{array}{ccc}
 K_0(C(\mathbb{T}^2)) & \xrightarrow{\iota_i} & \bigoplus_{i=1}^2 K_0(C(\mathbb{T}^2)) \\
 \partial_1^i \uparrow & & \partial_1 \uparrow \\
 K_1(C(\mathbb{T}^2) \rtimes \langle u_i \rangle) & \longrightarrow & K_1(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha,r} S).
 \end{array}$$

Par la proposition 4.1.8, on a $\partial_1^i([Q_{\alpha_i}^{u_i}]) = [P]$ pour $i = 1, 2$. En composant avec ι_i , on déduit le résultat. \square

Finalement, il reste à étudier l'application σ dans K_1 , i.e. déterminer son noyau ainsi que son image. Cependant, dans la base de $\bigoplus_{i=1}^2 K_1(C(\mathbb{T}^2))$

$$\{([\pi_1], 0), ([\pi_2], 0), (0, [\pi_1]), (0, [\pi_2])\},$$

cet homomorphisme est exactement décrit par la matrice :

$$I_4 - \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour être plus rigoureux, on doit préciser qu'il s'agit en fait de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

qui caractérise σ_* .

Par conséquent $\text{Ker}(\sigma_*) \cong \mathbb{Z}^2$ engendré par $([\pi_1], 0)$ et $(0, [\pi_2])$. Tandis que $\text{Im}(\sigma_*) \cong 2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$ engendré par $2[\pi_1]$ et $2[\pi_2]$. En combinant (4.2.5), (4.2.6), ainsi que le lemme 4.2.11 et le lemme 4.2.12 on déduit le théorème 4.2.10.

Pour être complet, il reste à identifier les éléments D_{α_i} pour caractériser sans équivoque $\mathcal{Q}_{\alpha_1}^{u_1}$ et $\mathcal{Q}_{\alpha_2}^{u_2}$. Définissons pour $y \in \mathbb{T}$ et $t \in [0, 1]$, la matrice :

$$B(y, t) := \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t) & -\sin(\frac{\pi}{2}t) \\ \sin(\frac{\pi}{2}t) & \cos(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix}.$$

On remarque que B n'est pas un élément de $C(\mathbb{T}^2)$ car $B(y, 0) \neq B(y, 1)$ pour tout $y \in \mathbb{T}$. Posons alors $D_{\alpha_1} = B(\pi_2^2 \oplus 1)B^*P$. On a bien $D_{\alpha_1} \in \mathcal{M}_2(C(\mathbb{T}^2))$ car :

$$B(y, 0)(\pi_2^2(y, \exp(0)) \oplus 1)B^*(y, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

et

$$B(y, 1)(\pi_2^2(y, \exp(2\pi i)) \oplus 1)B^*(y, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = I_2.$$

De plus en constatant que $B^*B = BB^* = I_2$, on obtient facilement que :

$$D_{\alpha_1}^* D_{\alpha_1} = P^* B((\pi_2^2)^* \oplus 1) B^* B(\pi_2^2 \oplus 1) B^* P = P^2 = P.$$

Et de même :

$$\begin{aligned} D_{\alpha_1} D_{\alpha_1}^* &= B(\pi_2^2 \oplus 1) B^* P P^* B((\pi_2^2)^* \oplus 1) B^* \\ &= B(\pi_2^2 \oplus 1) B^* P B((\pi_2^2)^* \oplus 1) B^* \\ &= B(\pi_2^2 \oplus 1) B^* B((\pi_1)^* \oplus 1) B^* p_1 B(\pi_1 \oplus 1) B^* B((\pi_2^2)^* \oplus 1) B^* \\ &= B(\pi_2^2(\pi_1)^* \oplus 1) B^* p_1 B(\pi_1(\pi_2^2)^* \oplus 1) B^* \\ &= B(\alpha_1^{-1}(\pi_1) \oplus 1) B^* p_1 B(\alpha_1^{-1}(\pi_1^*) \oplus 1) B^* \\ &= \alpha_1^{-1}(B(\pi_1 \oplus 1) B^* p_1 B(\pi_1^* \oplus 1) B^*) \\ &= \alpha_1^{-1}(P), \end{aligned}$$

où l'on utilise le fait que $P = B(\pi_1^* \oplus 1)B^* p_1 B(\pi_1 \oplus 1)B^*$.

Par des calculs similaires on montre que $D_{\alpha_2} = B(\pi_1^* \oplus 1)B^* P$ est tel que $D_{\alpha_2} D_{\alpha_2}^* = D_{\alpha_2}^* D_{\alpha_2} = P$.

Ainsi on choisit de prendre :

1. $Q_{\alpha_1}^{\mu_1} = E_{\alpha_1}^*(u_1^* \oplus u_1^*)P_{v,w} + I_2 - P_{v,w}$;
2. $Q_{\alpha_2}^{\mu_2} = E_{\alpha_2}^*(u_2^* \oplus u_2^*)P_{v,w} + I_2 - P_{v,w}$.

On termine cette section par la démonstration du résultat suivant sur l'application d'assemblage :

Théorème 4.2.13. 1. L'application d'assemblage μ_0^G est un isomorphisme ;
2. L'application d'assemblage μ_1^G est une bijection en dimension 1 et non-nulle en dimension 3.

On donne à présent la définition d'être Baum-Connes essentiel pour une variété (voir définition 1.4 de [HKRS08]).

Définition 4.2.14. Une Spin^c -variété orientée fermée M est dite Baum-Connes essentielle si l'image de sa classe fondamentale sous la composition des applications :

$$K_*(M) \xrightarrow{c_*} K_*(B\pi_1(M)) \xrightarrow{\mu_*} K_*(C_r^*(\pi_1(M)))$$

est non-nulle.

On est prêt pour la preuve du théorème 4.2.13.

Démonstration. Pour la première partie, par le théorème 4.2.5 il nous reste à regarder l'application d'assemblage sur le second terme $\text{Im}(\partial_0)$. Pour cela, il suffit de considérer les deux injections non-triviales de $\iota_i: \mathbb{Z}^2 \hookrightarrow G$ données par, resp. aux présentations de groupes abéliens, $\mathbb{Z}^2 = \langle x, y \rangle$ et $G = \langle v, w, \alpha_1, \alpha_2 | \alpha_1 v \alpha_1^{-1} = v, \alpha_1 w \alpha_1^{-1} = v w^2, \alpha_2 v \alpha_2^{-1} = v^2 w, \alpha_2 w \alpha_2^{-1} = w \rangle$:

$$\iota_1(x) = v, \iota_1(y) = \alpha_1 \quad \text{et} \quad \iota_2(x) = w, \iota_2(y) = \alpha_2.$$

En utilisant le théorème 1.3 de [MV03], on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K_0(B\mathbb{Z}^2) & \xrightarrow{\mu_0^{\mathbb{Z}^2}} & K_0(C_r^*(\mathbb{Z}^2)) \\ \downarrow \iota_{i*} & & \downarrow \iota_{i*} \\ K_0(BG) & \xrightarrow{\mu_0^G} & K_0(C_r^*(G)). \end{array}$$

Ainsi on déduit $\mu_0^G(\delta_{\iota_1}) = [P_{u_1,v}]$ et $\mu_0^G(\delta_{\iota_2}) = [P_{u_2,w}]$.

Pour μ_1^G en dimension 1, on a déjà vu (voir théorème 4.2.5 que $\mu_1^G(\gamma_3^i) = [u_i]$ pour $i = 1, 2$). Montrons alors que l'image de γ_1 (resp. γ_2) par μ_1^G est bien $[v]$ (resp. $[w]$). Mais ceci est évident en considérant l'inclusion naturelle de \mathbb{Z}^2 dans G et en utilisant le théorème 1.3 de [MV03]. En effet, on a

$$\begin{array}{ccc} K_1(B\mathbb{Z}^2) & \xrightarrow{\mu_0^{\mathbb{Z}^2}} & K_1(C_r^*(\mathbb{Z}^2)) \\ \downarrow i_* & & \downarrow i_* \\ K_1(BG) & \xrightarrow{\mu_0^G} & K_1(C_r^*(G)), \end{array}$$

d'où $i_* \circ \mu_1^{\mathbb{Z}^2}(\gamma'_i) = \mu_1^G(\gamma_i)$ pour $i = 1, 2$. Mais on sait que $i_* \circ \mu_1^{\mathbb{Z}^2}(\gamma'_i) = i_*([\pi_i])$. La deuxième assertion de la seconde partie du théorème se déduit directement du théorème 1.5 de [HKRS08] avec le théorème 5.4 page 304 de [LM16] appliqués aux mapping torus $M_{\mathbb{T}^2, \alpha_i}$. En effet, en regardant ensuite les inclusions $i: \Gamma_i \rightarrow G$ on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K_1(B\Gamma_i) & \xrightarrow{\mu_1^{\Gamma_i}} & K_1(C_r^*(\Gamma_i)) \\ \downarrow i_* & & \downarrow i_* \\ K_1(BG) & \xrightarrow{\mu_1^G} & K_1(C_r^*(G)). \end{array}$$

Comme $\mu_0^{\Gamma_i}(\gamma'_i) \neq 0$ dans $K_1(C_r^*(\Gamma_i))$, on a bien l'assertion énoncée. \square

4.2.3. Le cas de $\mathbb{Z}^2 \rtimes C$, avec C le sous-groupe des commutateurs de $SL_2(\mathbb{Z})$

Dans cette section, on considère le groupe $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha} C$, où C est le sous-groupe des commutateurs de $SL_2(\mathbb{Z})$. Il s'avère que C est un groupe libre sur les deux générateurs $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ and $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Le côté gauche

Dans cette partie, on utilise les mêmes notations que dans la section 4.2.2. Par conséquent, on adopte également le même point de vue de la K -homologie et on utilise la même stratégie pour décrire la K -homologie de l'espace classifiant de G . En d'autres termes cette partie est dédiée à démontrer le résultat suivant :

Théorème 4.2.15. 1. Le groupe $K_0(BG)$ est isomorphe à \mathbb{Z}^4 et engendré par $\delta_1 = [* , \mathbb{C} , * \rightarrow x_0 \subset BG]$, $\delta_2 = [\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}, i]$, $[\Sigma_{x_1}, \Sigma_{x_1} \times \mathbb{C}, f_{x_1}]$ et $[\Sigma_{x_2}, \Sigma_{x_2} \times \mathbb{C}, f_{x_2}]$, avec $x_1, x_2 \in H_2(BG)$, deux éléments explicites.

2. Le groupe $K_1(BG)$ est isomorphe à \mathbb{Z}^4 . Les générateurs sont donnés par les éléments sans-torsion $\gamma_4^1 = [M_{\mathbb{T}^2, \alpha_1}, M_{\mathbb{T}^2, \alpha_1} \times \mathbb{C}, \text{Id}_{M_{\mathbb{T}^2, \alpha_1}}]$, $\gamma_4^2 = [M_{\mathbb{T}^2, \alpha_2}, M_{\mathbb{T}^2, \alpha_2} \times \mathbb{C}, \text{Id}_{M_{\mathbb{T}^2, \alpha_2}}]$, γ_3^1 et γ_3^2 .

En utilisant le théorème 4.1.24 et le corollaire 4.2.2, la longue suite de Mayer-Vietoris nous donne dans ce cas :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cong} & H_3(BG) & & \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow & & \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\Psi} & H_2(BG) & & \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow & & \\ \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cong} & H_1(BG) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

En effet un présentation de groupe pour G est :

$$G = \langle v, w, u_1, u_2 : u_1 v u_1^{-1} = v^2 w, u_1 w u_1^{-1} = v w, u_2 v u_2^{-1} = v w, u_2 w u_2^{-1} = v w^2, v w = w v \rangle.$$

On déduit donc $H_1(BG) = G^{ab} = \mathbb{Z}^2$ engendré par u_1, u_2 .

Théorème 4.2.16. Les groupes d'homologie pour le CW -complexe BG de dimension 3 sont :

1. $H_3(BG) = \mathbb{Z}^2$;
2. $H_2(BG) = \mathbb{Z}^3$;
3. $H_1(BG) = \mathbb{Z}^2$.

En particulier $K_0(BG) \cong \mathbb{Z}^4$ et $K_1(BG) \cong \mathbb{Z}^4$.

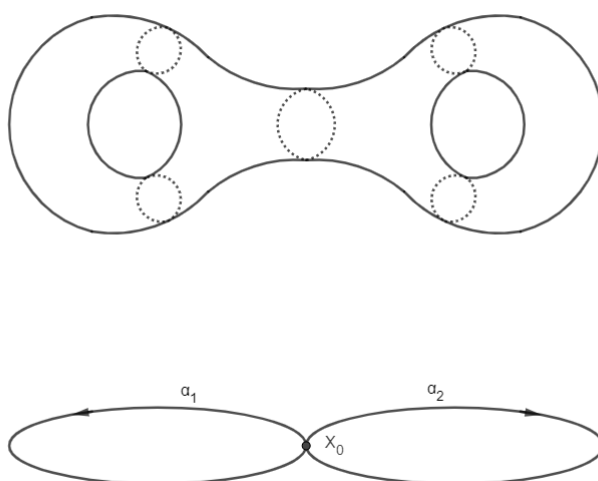
Démonstration. Il reste à démontrer la deuxième assertion. On dispose de la suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow \text{Ker}(\partial) \rightarrow H_2(BG) \rightarrow H_1(\mathbb{T}^2) \rightarrow 0.$$

D'où $H_2(BG) \cong \text{Im}(\Psi) \oplus H_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z}^3$. □

Comme dans la section précédente, la contribution de $H_3(BG)$ dans $K_1(BG)$ est donnée par les γ_4^i pour $i = 1, 2$. Le calcul de G^{ab} nous montre que la contribution de $H_1(BG)$ dans $K_1(BG)$ est donnée par les éléments sans-torsion γ_3^i pour $i = 1, 2$.

Pour $K_0(BG)$, comme dans la section précédente, on a la contribution de $H_0(BG)$ donnée par δ_1 . De plus, par le corollaire 4.2.2, la classe fondamentale du tore $[\mathbb{T}^2]$ nous fournit un élément sans-torsion de $H_2(BG)$, qui est δ_2 . Il reste à trouver des générateurs de $H_2(BG)$ venant de $\text{Im}(\partial)$. Une première approche serait de considérer des applications de tores dans BG . On peut donc s'essayer à créer un programme qui permette d'en trouver (voir Annexe A). Cependant, aucun résultat n'a été trouvé par cette méthode. C'est pourquoi, on considère des applications de surface de genre 2, notée Σ_2 . Soit $e_1 \in \mathbb{Z}^2 = H_1(\mathbb{T}^2)$ le premier cercle fondamental du tore au-dessus de x_0 . Alors $e_2 \in \mathbb{Z}^2$ est tel que $(\alpha_1 - \text{Id}_2)e_2 = e_1$. Il existe donc une paire de pantalon dans le tore qui réalise le cobordisme entre e_1 et $\alpha_1 e_2, e_2$. À présent, en propageant e_2 le long de α_1 , on obtient un cylindre ayant comme bord $e_2, \alpha_1 e_2$ dans la fibre au-dessus de x_0 . En répétant l'argument de l'autre côté avec $e_1, -e_2, -\alpha_2^{-1} e_2$, on obtient un élément, noté x_1 , dans $H_2(BG)$:



Par construction, x_1 est tel que $\partial x_1 = e_1$. Par conséquent x_1 est l'un des générateurs de $H_2(BG)$ qui nous donne le premier élément non-trivial $[\Sigma_{x_1}, \Sigma_{x_1}, f_{x_1}]$ dans $K_0(BG)$. Le deuxième est obtenu exactement de la même manière. Ceci termine cette section.

Le côté droit

On commence cette section par définir quelques éléments dans $K_0(C_r^*(G))$. Soit $F(u_1, u_2)$ l'ensemble des mots réduits composés des deux unitaires u_1, u_2 . En suivant les idées de l'appendice de [PV80], on définit ce que l'on appellera une projection de Rieffel généralisée, i.e. un élément auto-adjoint idempotent de la forme :

$$p = W^* \tilde{X}_1^* + \tilde{X}_0 + \tilde{X}_1 W$$

dans $\mathcal{P}_n(C(\mathbb{T}^2) \rtimes C)$, où $W \in \mathcal{U}_n(F(u_1, u_2))$, $\tilde{X}_0, \tilde{X}_1 \in \mathcal{M}_n(C(\mathbb{T}^2))$ pour un certain n . De $p^* = p$, on déduit directement $\tilde{X}_0^* = \tilde{X}_0$. Constatons que les autres relations vont fortement dépendre du choix de W . Considérons à présent la projection de Rieffel généralisée suivante :

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_1^* \\ \omega_2^* & 0 & 0 \\ 0 & \omega_3^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & X_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & X_{33}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & X_0^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & X_0^{(3)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & X_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 \\ \omega_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2.7)$$

où $\omega_i \in F(u_1, u_2)$ va induire une \mathbb{Z} -action α_i sur $C(\mathbb{T}^2)$ pour $i = 1, 2, 3$. De $p^2 = p$, on obtient les relations suivantes :

1. $X_0^{(1)} = X_0^{(1)^2} + \alpha_1^{-1}(X_{33}^* X_{33}) + X_{11} X_{11}^*$;
2. $X_0^{(2)} = X_0^{(2)^2} + \alpha_2^{-1}(X_{11}^* X_{11}) + X_{22} X_{22}^*$;
3. $X_0^{(3)} = X_0^{(3)^2} + \alpha_3^{-1}(X_{22}^* X_{22}) + X_{33} X_{33}^*$;
4. $X_{11} = X_0^{(1)} X_{11} + X_{11} \alpha_2(X_0^{(2)})$;
5. $X_{22} = X_0^{(2)} X_{22} + X_{22} \alpha_3(X_0^{(3)})$;
6. $X_{33} = X_0^{(3)} X_{33} + X_{33} \alpha_1(X_0^{(1)})$;
7. $\alpha_2^{-1}(X_{11}) X_{22} = 0$;
8. $\alpha_3^{-1}(X_{22}) X_{33} = 0$;
9. $\alpha_1^{-1}(X_{33}) X_{11} = 0$.

On donne à présent quelques remarques sur ces relations pour une utilisation future. Considérons $\Delta_{X_{33}}$ (resp. $\rho_{\alpha_2^{-1}(X_{11})}$) la projection de support gauche de X_{33} (resp. la projection de support droit de $\alpha_2^{-1}(X_{11})$) dans l'algèbre de von Neumann enveloppante de $C(\mathbb{T}^2)$. Alors (8)(resp. (7)) donne :

$$\alpha_3^{-1}(X_{22}) \Delta_{X_{33}} = 0 \text{ (resp. } \rho_{\alpha_2^{-1}(X_{11})} X_{22} = 0).$$

De (3) (resp. (2)), il découle :

$$\begin{aligned} X_{33} X_{33}^* &= \Delta_{X_{33}} (X_0^{(3)} - X_0^{(3)^2}) = (X_0^{(3)} - X_0^{(3)^2}) \Delta_{X_{33}} \\ \text{(resp. } \alpha_2^{-1}(X_{11}^* X_{11}) &= (X_0^{(2)} - X_0^{(2)^2}) \rho_{\alpha_2^{-1}(X_{11})} = \rho_{\alpha_2^{-1}(X_{11})} (X_0^{(2)} - X_0^{(2)^2}). \end{aligned}$$

De (6) (resp. (4)), on déduit :

$$\Delta_{X_{33}} X_0^{(3)} X_{33} = X_0^{(3)} X_{33} \text{ (resp. } \alpha_2^{-1}(X_{11}) X_0^{(2)} \rho_{\alpha_2^{-1}(X_{11})} = \alpha_2^{-1}(X_{11}) X_0^{(2)}),$$

et avec $X_0^{(3)} = X_0^{(3)*}$ (resp. $X_0^{(2)} = X_0^{(2)*}$), on a :

$$[X_0^{(3)}, \Delta_{X_{33}}] = 0 \text{ (resp. } [X_0^{(2)}, \rho_{\alpha_2^{-1}(X_{11})}] = 0).$$

Finalement, de ces relations, on a également :

$$\alpha_3^{-1}(X_{22})(X_0^{(3)^n} - X_0^{(3)})\Delta_{X_{33}} = 0. \quad (4.2.8)$$

À présent on construit deux projections de Rieffel généralisées dans $\mathcal{P}_6(C(\mathbb{T}^2) \rtimes C)$. Pour $t, \theta \in [0, 1]$, on pose dans (4.2.7) :

$X_{11} = X_1(\theta), X_{22} = X_1(t), X_{33} = X_1(t + \theta)$, ensemble avec $X_0^{(1)} = X_0(\theta), X_0^{(2)} = X_0(t), X_0^{(3)} = X_0(t + \theta)$, où X_0, X_1 sont les matrices définies dans la section 4.2.2 et on prend $\omega_1 = u_1, \omega_2 = u_1^*u_2, \omega_3 = u_2^*$. On notera cette projection p_1 . La deuxième projection, notée q_1 , est obtenue exactement de la même manière en posant :

$X_{11} = X_1(\theta), X_{22} = X_1(t), X_{33} = X_1(t)$, avec $X_0^{(1)} = X_0(\theta), X_0^{(2)} = X_0(t), X_0^{(3)} = X_0(t), \omega_1 = u_2^*u_1, \omega_2 = u_1^*u_2, \omega_3 = 1$. On définit alors p_2 (resp. q_2) de manière similaire à p_1 (resp. q_1) en remplaçant le rôle de u_1 par u_2 et vice-versa et en adaptant \tilde{X}_1 et \tilde{X}_0 .

Lemme 4.2.17. p_i et q_i sont des projections de Rieffel généralisées ($i = 1, 2$).

Démonstration. Cela suit du fait que X_0, X_1 satisfassent déjà les trois relations caractérisant une projection de Rieffel dans $C(\mathbb{T}) \rtimes_{\text{id}} \mathbb{Z}$. On montre, en guise d'exemple, la première relation de p_1 ; les autres sont obtenues de la même manière. Comme $\alpha_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, on a alors $\alpha_1^{-1}(X_{33}) = X_1(\theta)$. Par conséquent (1) devient

$$X_0(\theta) = X_0(\theta)^2 + X_1(\theta)^*X_1(\theta) + X_1(\theta)X_1(\theta)^*,$$

qui est l'une des relations de la projection de Rieffel $P(y, e^{2\pi i\theta}) \in \mathcal{M}_2(C(\mathbb{T}^2))$. \square

Le reste de la section est consacré à démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.2.18. 1. Le groupe $K_0(C_r^*(G))$ est isomorphe à \mathbb{Z}^4 . Les générateurs sont donnés par $[1], [P_{v,w}], [p_1]_0 - [q_1]_0$ and $[p_2]_0 - [q_2]_0$.

2. Le groupe $K_1(C_r^*(G))$ est isomorphe à \mathbb{Z}^4 . Les générateurs sont donnés par les éléments sans-torsion $[u_1], [u_2], [Q_{\alpha_1}^{u_1}]$ et $[Q_{\alpha_2}^{u_2}]$.

Dans ce cas, nous utiliserons la seconde suite exacte à 6 termes de Pimsner-Voiculescu pour les produits croisés réduits par un groupe libre, que nous rappelons ici (voir théorème 1.3.25) :

Théorème 4.2.19. Le diagramme suivant est une suite exacte à 6 termes :

$$\begin{array}{ccccc} K_1(A) & \xrightarrow{i_*(\text{id}_* - \alpha(g_n^{-1})_*)} & K_1(A \rtimes_{\alpha',r} \mathbb{F}_{n-1}) & \xrightarrow{k_*} & K_1(A \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{F}_n) \\ \uparrow \partial_0 & & & & \downarrow \partial_1 \\ K_0(A \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{F}_n) & \xleftarrow{k_*} & K_0(A \rtimes_{\alpha',r} \mathbb{F}_{n-1}) & \xleftarrow{i_*(\text{id}_* - \alpha(g_n^{-1})_*)} & K_0(A) \end{array},$$

où k_* est l'inclusion naturelle de $A \rtimes_{\alpha',r} \mathbb{F}_{n-1}$ dans $A \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{F}_n$.

Comme $\text{Tr}(\alpha_i) = 3$, par la proposition 4.1.6 et la preuve du théorème 4.1.10 dans [Ise11], on déduit que $i_*(\text{id}_* - \alpha(g_n^{-1})_*)$ sont les applications nulles en K_0 et K_1 . Par conséquent la suite exacte à 6-termes se déroule dans notre cas en deux suites exactes courtes :

1.

$$0 \rightarrow K_0(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha_1} \mathbb{Z}) \xrightarrow{k_*} K_0(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha,r} C) \xrightarrow{\partial_0} K_1(C(\mathbb{T}^2)) \rightarrow 0; \quad (4.2.9)$$

2.

$$0 \rightarrow K_1(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha_1} \mathbb{Z}) \xrightarrow{k_*} K_1(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha,r} C) \xrightarrow{\partial_1} K_0(C(\mathbb{T}^2)) \rightarrow 0. \quad (4.2.10)$$

Ainsi on a :

Lemme 4.2.20. *Pour $i = 0, 1$*

$$K_i(C_r^*(G)) = \mathbb{Z}^4.$$

Il reste donc à trouver les générateurs de ces groupes. On démarre avec $K_0(C_r^*(G))$. En utilisant le théorème 4.1.10, on sait déjà que $[1], [P_{v,w}]$ sont 2 générateurs venant de la contribution de $K_0(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha_1} \mathbb{Z})$. Il reste donc à démontrer la proposition suivante :

Proposition 4.2.21. *L'application*

$$\partial_0 : K_0((C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha,r} C) \rightarrow K_1(C(\mathbb{T}^2))$$

envoie $[p_1]_0 - [q_1]_0$ sur $[w]$ et $[p_2]_0 - [q_2]_0$ sur $[v]$.

Démonstration. L'application de connexion ∂_0 est associée à l'extension de Toeplitz suivante (revoir section 1.3.2) :

$$0 \rightarrow C(\mathbb{T}^2) \otimes \mathcal{K} \xrightarrow{\psi} \mathcal{T}_1 \xrightarrow{\pi} C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha,r} C \rightarrow 0.$$

On rappelle que \mathcal{T}_1 est l'algèbre de Toeplitz vue comme C^* -sous-algèbre de $(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha,r} C) \otimes C^*(S)$ générée par $u_1 \otimes S, u_2 \otimes I$ et $x \otimes I, x \in C(\mathbb{T}^2)$. À présent un π -relevé auto-adjoint de p_1 au niveau matriciel est donné par :

$$\begin{aligned} a = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_1^* X_{33}^* \otimes S^* \\ \omega_2^* X_{11}^* \otimes S & 0 & 0 \\ 0 & \omega_3^* X_{22}^* \otimes I & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0^{(1)} \otimes I & 0 & 0 \\ 0 & X_0^{(2)} \otimes I & 0 \\ 0 & 0 & X_0^{(3)} \otimes I \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} 0 & X_{11} \omega_2 \otimes S^* & 0 \\ 0 & 0 & X_{22} \omega_3 \otimes I \\ X_{33} \omega_1 \otimes S & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarquons :

$$a^2 = a - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^{-1}(X_{11}^* X_{11}) \otimes T & 0 \\ 0 & 0 & X_{33} X_{33}^* \otimes T \end{pmatrix},$$

où $T = I - S S^*$. En utilisant les relations décrites précédemment, on obtient :

$$a^2 = a + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (X_0^{(2)^2} - X_0^{(2)}) \rho_{\alpha_2^{-1}(X_{11})} \otimes T & 0 \\ 0 & 0 & (X_0^{(3)^2} - X_0^{(3)}) \Delta_{X_{33}} \otimes T \end{pmatrix}.$$

En définissant pour tout n :

$$M_n := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (X_0^{(2)^n} - X_0^{(2)})\rho_{\alpha_2^{-1}(X_{11})} \otimes T & 0 \\ 0 & 0 & (X_0^{(3)^n} - X_0^{(3)})\Delta_{X_{33}} \otimes T \end{pmatrix},$$

on a

$$a^n = a + M_n.$$

En effet, par récurrence, supposons que l'assertion est vraie pour n . Alors :

$$\begin{aligned} a^{n+1} &= aa^n = a(a + M_n) = a^2 + aM_n \\ &= a + M_2 \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_1^* X_{33}^* \otimes S^* \\ \omega_2^* X_{11}^* \otimes S & 0 & 0 \\ 0 & \omega_3^* X_{22}^* \otimes I & 0 \end{pmatrix} M_n \\ &+ \begin{pmatrix} X_0^{(1)} \otimes I & 0 & 0 \\ 0 & X_0^{(2)} \otimes I & 0 \\ 0 & 0 & X_0^{(3)} \otimes I \end{pmatrix} M_n \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & X_{11}\omega_2 \otimes S^* & 0 \\ 0 & 0 & X_{22}\omega_3 \otimes I \\ X_{33}\omega_1 \otimes S & 0 & 0 \end{pmatrix} M_n. \end{aligned}$$

Par conséquent, en développant et en utilisant les relations, on a :

$$\begin{aligned} a^{n+1} &= a + M_2 \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^* X_{22}^* (X_0^{(2)^n} - X_0^{(2)})\rho_{\alpha_2^{-1}(X_{11})} \otimes T \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (X_0^{(2)^{n+1}} - X_0^{(2)^2})\rho_{\alpha_2^{-1}(X_{11})} \otimes T & 0 \\ 0 & 0 & (X_0^{(3)^{n+1}} - X_0^{(3)^2})\Delta_{X_{33}} \otimes T \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_{22}\omega_3 (X_0^{(3)^n} - X_0^{(3)})\Delta_{X_{33}} \otimes T \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La dernière matrice s'annule par la relation (4.2.8). De plus :

$$\omega_3^* X_{22}^* (X_0^{(2)^n} - X_0^{(2)})\rho_{\alpha_2^{-1}(X_{11})} = \omega_3^* X_{22}^* \rho_{\alpha_2^{-1}(X_{11})} (X_0^{(2)^n} - X_0^{(2)}) = 0.$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} a^{n+1} &= a + M_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (X_0^{(2)^{n+1}} - X_0^{(2)^2})\rho_{\alpha_2^{-1}(X_{11})} \otimes T & 0 \\ 0 & 0 & (X_0^{(3)^{n+1}} - X_0^{(3)^2})\Delta_{X_{33}} \otimes T \end{pmatrix} \\ &= a + M_{n+1}, \end{aligned}$$

ce qui démontre l'assertion.

Ainsi via l'assertion, on déduit :

$$\begin{aligned} &\exp(2\pi ia) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \otimes T + 1 \otimes (I - T) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(2\pi i X_0^{(2)} \rho_{\alpha_2^{-1}(X_{11})}) \otimes T + 1 \otimes (I - T) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(2\pi i X_0^{(3)} \Delta_{X_{33}}) \otimes T + 1 \otimes (I - T) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi au niveau matriciel, en utilisant l'isomorphisme $K_1(C(\mathbb{T}^2) \otimes \mathcal{K}) \cong K_1(C(\mathbb{T}^2))$, on déduit :

$$\begin{aligned} \partial_0([p_1]_0) &= [\exp(2\pi i X_0^{(2)} \rho_{\alpha_2^{-1}(X_{11})})]_1 + [\exp(2\pi i X_0^{(3)} \Delta_{X_{33}})]_1 \\ &= [\exp(2\pi i X_0^{(2)} \rho_{X_{22}})]_1 + [\exp(2\pi i X_0^{(3)} \Delta_{X_{33}})]_1. \end{aligned}$$

On revient à la définition de X_{33} pour p_1 afin de calculer $[\exp(2\pi i X_0^{(3)} \Delta_{X_{33}})]_1$. On remarque que $(X_1)_{12}$ et $(X_1)_{21}$ sont des fonctions 2-périodiques, on doit donc les étendre par 1-périodicité afin d'avoir $X_{33} \in \mathcal{M}_2(C(\mathbb{T}^2))$. Donc on a :

$$X_{33} = \begin{cases} X_1(t + \theta) & \text{si } 0 \leq t + \theta \leq 1 \\ X_1(t + \theta - 1) & \text{si } 1 \leq t + \theta \leq 2. \end{cases}$$

En utilisant les calculs faits dans la preuve de la proposition 3.1.3 dans [Ise11], on obtient :

$$[\exp(2\pi i X_0^{(3)} \Delta_{X_{33}})]_1 = [\exp(2\pi i s)]_1,$$

où

$$s(t, \theta) = \begin{cases} \sin^2(\pi/2(t + \theta)) & \text{if } 0 \leq t + \theta \leq 1 \\ \sin^2(\pi/2(t + \theta - 1)) & \text{if } 1 \leq t + \theta \leq 2. \end{cases}$$

De plus, l'application $c : [0, 1] \rightarrow GL_2(C(\mathbb{T}^2))$ définie par :

$$c_r(t, \theta) = \exp(2\pi i(rx(t, \theta) + (1 - r)s(t, \theta))),$$

(avec $x(t, \theta) = t + \theta$ si $0 \leq t + \theta \leq 1$, et $x(t, \theta) = t + \theta - 1$ sinon) nous fournit un chemin continu dans les éléments inversibles de $C(\mathbb{T}^2)$ reliant $\exp(2\pi i s)$ à vw .

Il reste à calculer $[\exp(2\pi i X_0^{(2)} \rho_{X_{22}})]_1$. On rappelle que la projection de support droit de $X_{22} = X_1(t)$ est la projection sur $\text{Ker}(X_1(t))^\perp$. Mais le sous-espace $\text{Ker}(X_1(t))^\perp$ est clairement engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t) \\ \sin(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix}$ si $t \neq 0, 1$ et est $\{0\}$ si $t = 0, 1$. Ainsi,

$$\rho_{X_1}(t) = \begin{pmatrix} \cos^2(\frac{\pi}{2}t) & \sin(\frac{\pi}{2}t) \cos(\frac{\pi}{2}t) \\ \sin(\frac{\pi}{2}t) \cos(\frac{\pi}{2}t) & \sin^2(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix},$$

si $t \neq 0, 1$ et $\rho_{X_1}(0) = 0 = \rho_{X_1}(1)$. Définissons pour tout $t \in [0, 1]$:

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos^2(\frac{\pi}{2}t) & \sin(\frac{\pi}{2}t) \cos(\frac{\pi}{2}t) \\ \sin(\frac{\pi}{2}t) \cos(\frac{\pi}{2}t) & \sin^2(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct montre que :

$$X_0(t)R(t) = \cos^2(\frac{\pi}{2}t)R(t).$$

Ainsi en suivant la preuve de la proposition 3.1.3 dans [Ise11], on a :

$$[\exp(2\pi i X_0^{(2)} \rho_{X_{22}})]_1 = [\exp(2\pi i \cos^2(\frac{\pi}{2}t))]_1 = [v]_1.$$

Finalement, on a :

$$\partial_0([p_1]_0) = 2[v]_1 + [w]_1.$$

De la même manière, on peut montrer

$$\partial_0([q_1]_0) = 2[v]_1.$$

Par conséquent, on a bien $\delta_0([p_1] - [q_1]) = [w]$. Ce qui termine la preuve. \square

Il reste à traiter $K_1(C_r^*(G))$. En utilisant la suite (4.2.10) et le théorème 4.1.10, on a que $[u_1]$ et $[Q_{\alpha_1}^{u_1}]$ sont des générateurs de $K_1((C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha,r} C))$ venant de $K_1(C_r^*(\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha_1} \mathbb{Z}))$. Par conséquent, pour conclure cette section, il suffit de montrer le lemme suivant :

Lemme 4.2.22. *L'application*

$$\partial_1 : K_1(C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha,r} C) \rightarrow K_0(C(\mathbb{T}^2))$$

envoie $[u_2]$ sur $-[1]$ et $[Q_{\alpha_2}^{u_2}]$ sur $[P]$.

Démonstration. Le lemme suit de la naturalité et des lemmes 1.3.21 et 4.1.8. Montrons néanmoins la seconde assertion. On considère l'extension de Toeplitz :

$$0 \rightarrow C(\mathbb{T}^2) \otimes \mathcal{K} \xrightarrow{\psi} \mathcal{T}_2 \xrightarrow{\pi} C(\mathbb{T}^2) \rtimes_{\alpha,r} C \rightarrow 0,$$

une pré-image de $Q_{\alpha_2}^{u_2} \oplus (Q_{\alpha_2}^{u_2})^*$ par π au niveau matriciel est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} E_{\alpha_2}^*(u_2^* \oplus u_2^*)P_{v,w} \otimes S^* + (I_2 - P_{v,w}) \otimes I & 0 \\ P_{v,w} \otimes T & P_{v,w}(u_2 \oplus u_2)E_{\alpha_2} \otimes S + (I_2 - P_{v,w}) \otimes I \end{pmatrix},$$

où l'on utilise les notations de la section précédente. De plus, en considérant $p_2 = (1 \otimes I) \oplus (1 \otimes I) \oplus 0 \oplus 0$, on a :

$$Mp_2M^* = \begin{pmatrix} 1 \otimes I & 0 \\ 0 & P_{v,w} \otimes T \end{pmatrix}.$$

Comme $Mp_2M^* - p_2 = 0 \oplus (P_{v,w} \otimes T)$, alors une pré-image par ψ au niveau matriciel est donnée par $0 \oplus (P \otimes e_{0,0})$. Ce qui permet de conclure. \square

Remarque 4.2.23. L'analogie du théorème 4.2.13 dans ce cas est un travail en cours. En dimension 2, μ_0^G est plus compliquée à décrire que dans le cas précédent. En effet, on a vu qu'on

ne dispose plus de suffisamment de tores différents; qui apparaissent après passage au quotient de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ dans $B(\mathbb{Z}^2 \rtimes S)$. Ceci a pour conséquence qu'il faut, dans ce cas, jouer avec des surfaces de genre 2 et essayer de comprendre l'application d'assemblage pour de telles surfaces. En considérant Σ_2 comme une somme connexe de tores et en utilisant des résultats comme le théorème 2.1 de [BMV05], on peut espérer obtenir explicitement l'isomorphisme de μ_0^G . Dans le cas de μ_1^G , on peut néanmoins garantir le même résultat que dans le théorème 4.2.13. En effet, la preuve reste identique. Cependant, nous ne savons pas comment gérer, de manière explicite, l'application d'assemblage en dimension strictement plus grande que 2. C'est pourquoi, nous n'avons pas pu, pour le moment, garantir la bijectivité de μ_1^G en dimension 3; ce qui impliquerait l'isomorphisme de μ_1^G dans les deux cas.

A. Annexe Code Python

Cette annexe est entièrement dédiée au problème d'existence d'applications de tore dans BG , où $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes C$ (voir section 4.2.3). Le but est de trouver une application de tores représentant un élément de $H_2(BG)$ qui soit non-nul par l'application de bord ∂ . On peut formuler le problème de la manière suivante :

On dispose d'un alphabet composé de 4 lettres A, B, A^{-1}, B^{-1} représentant respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}$. Le programme doit regarder tous les mots possibles de longueur n que l'on peut former à partir de ces lettres en évitant la redondance ; par exemple, le mot $ABA^{-1}ABA$ est en réalité le même que $ABBA$ car dans la multiplication matricielle $A^{-1}A = \text{Id}$. En d'autres termes, on désire créer une liste formée des mots réduits de longueur n sur cet alphabet. À partir de cette liste, on sélectionne les mots qui, une fois évalués (c'est-à-dire qu'on a procédé à la multiplication matricielle), ont comme trace $+/- 2$. En effet, ceci équivaut à demander que le déterminant soit égal à $+/- 1$ ce qui permet de trouver un vecteur dans \mathbb{Z}^2 , i.e. représentant un cercle dans le tore au-dessus de x_0 dans BG , qui soit "fixé" ; ce qui permet le recollement de ce cercle dans BG et ainsi obtenir une application de tore. On sépare cette liste étoffée en 2 :

1. Liste des mots sans exposant entier $|k| > 1$, i.e. on a pas deux fois la même lettre de suite qui apparaît dans le mot. En d'autres termes on a donc une alternance de lettres ; par exmple, $ABA^{-1}B^{-1}$ serait un mot dans cette liste tandis que $AAB^{-1}A^{-1}BA^{-1}$ n'y serait pas.
2. tous les autres.

Pour tous ces mots possibles, on calcule le vecteur propre dans \mathbb{Z}^2 associé au mot ω , que l'on note v . Dans un second temps, puisque chaque paire (ω, v) calculée par le programme A.0.1 réalise une application du tore dans l'espace classifiant de notre groupe, on désire donc effectuer le calcul de l'application de bord pour cet élément. Il y a deux cas :

1. À partir d'un mot dans la sous-liste 1), on fait le calcul suivant ; par exemple pour le mot $ABA^{-1}B^{-1}$, on considère son vecteur propre dans \mathbb{Z}^2 que l'on note v et ensuite on fait $-v + B^{-1}v - A^{-1}B^{-1}v + BA^{-1}B^{-1}v$. Ainsi, on lit le mot ω de droite à gauche et on somme les images consécutives de v en alternant les signes avec la condition d'arrêt suivante : quand le mot commence par B ou B^{-1} , dans l'exemple B^{-1} , on termine au dernier B ou B^{-1} du mot (le plus à gauche possible) et respectivement pour A ou A^{-1} . En effet, ce calcul suit de la description explicite de ∂ appliquée à notre cas (voir page 150 de [Hat05]). On note l'image par l'application de bord v_ω . Le programme garde donc en mémoire la paire (ω, v_ω) .
2. À partir d'un mot dans la liste 2), on fait le calcul suivant ; par exemple pour le mot $AAB^{-1}A^{-1}BA^{-1}$, on considère son vecteur propre dans \mathbb{Z}^2 que l'on note v et ensuite on fait $-v + A^{-1}v - BA^{-1}v + A^{-1}BA^{-1}v - B^{-1}A^{-1}BA^{-1}v + A^2B^{-1}A^{-1}BA^{-1}v$, où à la dernière étape on a directement "sauté" en considérant A^2 . Ainsi, il faut que le programme détecte où il y a des lettres consécutives et qu'il transforme le mot, par exemple $AABABB$ en A^2BAB^2 , afin qu'il puisse reprendre le même algorithme que décrit précédemment sur les puissances ; ici $-v + B^2v - AB^2v + BAB^2v$.

Pour ce code et le suivant, j'ai demandé de l'aide à un doctorant de l'institut d'informatique, Rémi Dulong. Voici ci-dessous le programme :

```

Programme A.0.1. import numpy as np
from numpy.linalg import inv, eigvals, eig
from itertools import permutations
from sympy import *
import multiprocessing
import pickle

A = np.matrix('1, 1; 1, 2')
B = np.matrix('2, 1; 1, 1')

matrix = {
    "A": A,
    "B": B,
    "a": inv(A),
    "b": inv(B),
}

#-----
# Part 1 : Generate
#-----

def remove_useless_matrices(words_zip):
    ret = []
    for (word, word_value) in words_zip:
        if not np.array_equal(word_value, np.identity(2)):
            if abs(np.trace(word_value)) == 2:
                ret.append((word, word_value))
    return ret

# Gets a word, and converts it in the actual matrix product
def compute_word_value(word):
    result = matrix[word[-1]] # Last matrix
    for i in range(len(word) - 2, -1, -1):
        result = np.dot(matrix[word[i]], result) # Multiply from right to left
    return result

# Creates all combinations that are considered valid
def generate_all_valid_words(word_len):

    alphabet = 'ABab'
    words = list(alphabet)

```

```

# Generate all words (each process has a prefix assigned)

for i in range(word_len-1):
    nb_words=len(words)
    for j in range(nb_words):
        word = words.pop(0) # "consumes" the first element of the list
        invert_last = word[-1].swapcase()
        valid_letters = alphabet.replace(invert_last, '')
        for letter in valid_letters:
            words.append(word+letter)

return words

#-----
# Part 2 : Compute
#-----

def find_eigenvect_in_z(word):
    M = Matrix(word.astype(int))
    evec_in_z = M.eigenvects(simplify=True)[0][2][0]

    return evec_in_z

# Transforms 'AABb' in ['ABb', [2, 1, 1]]
def analyse_power(word):

    word_clean=""
    powers=[]

    i=0 # Position in the word
    while i<len(word):
        j=1 # Number of repetitions of the word[i] character
        while (i+j)<len(word):
            if word[i+j]==word[i]:
                j+=1
            else:
                break

        word_clean +=word[i]
        powers.append(j)
        i+=j

    return (word_clean, powers)

```

```

def compute_v_w(word, eigenvect):

    word, powers = analyse_power(word)

    v = eigenvect
    sum = -v
    temp = v
    stop_letter = word[-1].lower() # "a" or "b", in lowercase

    for i in range(len(word)-1, -1, -1):
        if stop_letter not in ''.join(word[0:i+1].lower()):
            # Check everything in lowercase
            break

        # Directly apply when we have several times the same matrix
        for k in range(powers[i]):
            temp = matrix[word[i]]*temp

        if i % 2 == 0:
            sum = sum - temp
        else:
            sum = sum + temp

    return sum

def compute_all_v_w(words):
    eigenvects = [find_eigenvect_in_z(word_value) for (word, word_value) in words]

    v_ws = []
    for i in range(len(words)):
        v_ws.append(compute_v_w(words[i][0], eigenvects[i]))

    return v_ws

#-----
#   Parallelization
#-----

# Takes a list of prefixes, generates all valid words from this prefix.
# If we generate the prefixes before, this function is independant
# and can be parallelized.
def generate_and_check_all_valid_from_prefix(prefix_word_len):
    prefix = prefix_word_len[0]

```

```

word_len = prefix_word_len[1]
alphabet = 'ABab'
words = prefix

# Generate all words (each process has a prefix assigned)

for i in range(word_len-1):
    nb_words=len(words)
    for j in range(nb_words):
        word = words.pop(0) # "consumes" the first element of the list
        invert_last = word[-1].swapcase()
        valid_letters = alphabet.replace(invert_last, '')
        for letter in valid_letters:
            words.append(word+letter)

# Filter these words

words_values = [compute_word_value(word) for word in words]
words = [[words[i], words_values[i]] for i in range(len(words))]

final_words = remove_useless_matrices(words)

# Compute vectors
v_ws = compute_all_v_w(final_words)

final_words = [word[0] for word in final_words]

return [final_words, v_ws]

#-----
# Part 3 : Main
#-----

def main(n):
    print("=====",n,"=====")
    print("Generate and filter useful words...")

stage_before_parallelism = 3
# We create prefixes of 3 characters before parallelization

# Compute prefixes
prefixes = generate_all_valid_words(stage_before_parallelism)

```

```

# Start parallel code
prefixes = [[prefix], n-len(prefix)+1] for prefix in prefixes]
pool = multiprocessing.Pool(processes=len(prefixes))
ret = pool.map(generate_and_check_all_valid_from_prefix, prefixes)

results = []

# Join results
for element in ret:
    for i in range(len(element[0])):
        results.append([element[0][i], element[1][i]])

return(results)

if __name__=="__main__":

    # We create a file named "vectors-X.data"
    # and dump all the valid pairs of
    # words + vectors inside to check them later.
    # On a 40 cores machine, going to i=14 takes
    # only some minutes.

    for i in range(4, 16, 2): # 4 to 14
        print("Processing i=", i, "...")
        with open('vectors-'+str(i)+'.data', 'wb') as vectorfile:
            a = main(i)
            pickle.dump(a, vectorfile)

```

Enfin, pour chaque mot ω de longueur n , on a associé un vecteur v_ω . Le but étant de trouver deux applications du tores dans BG telles que leurs images par ∂ génèrent le réseau $\mathbb{Z}^2 = H_1(\mathbb{T}^2)$, on fait, dans un second programme, le déterminant de la matrice formée de v_{w_1} et v_{w_2} mis en colonne, pour chaque paire de mots possibles w_1, w_2 . Si le déterminant vaut en valeur absolue 1, il faut que le programme retourne la paire w_1, w_2 ainsi que v_{w_1} et v_{w_2} .

```

Programme A.0.2. import numpy as np
from itertools import permutations
from sympy import *
import pickle

def check_all_combinations_det(vectors):
    ret = False

    tests = list(permutations(vectors,2))
    nb_tests = len(tests)
    for i in range(len(tests)):

```

```

if(i%1000==0):
    # Prints something every 1000 combinations tested
    # to keep track of progress.
    print("test", i, "/ ", nb_tests)

vec1 = tests[i][0]
vec2 = tests[i][1]

M = Matrix([[vec1[0], vec2[0]], [vec1[1], vec2[1]]])

if abs(M.det()) == 1:
    # Immediately print the 2 vectors
    print("-----THIS PAIR WORKS !-----")
    print("Vect 1: ", vec1)
    print("Vect 2:", vec2)
    print("-----")
    ret = [vectors.index(vec1), vectors.index(vec2)]
return ret

for i in range(4, 16, 2):
    with open('vectors-'+str(i)+'.data', 'rb') as vectorfile:
        # Loads the pairs (word, vector) stored in each file
        v_words = pickle.load(vectorfile)

vectors = [v_word[1] for v_word in v_words]
indexes = check_all_combinations_det(vectors)

if(indexes):
    # Looks for the words associated with these vectors
    print(" Word 1 :", v_words[indexes[0]])
    print(" Word 2 :", v_words[indexes[1]])
    print("-----")

```

Remarque A.0.3. On remarque que dans le programme A.0.1, Rémi Dulong a également parallélisé le code afin de permettre une plus grande force de calcul. On a donc pu tester toutes les paires de mots de longueur 4 jusqu'à 16; sans résultat. Ceci est probablement dû au fait que les seuls mots valides sont à ces longueurs-ci sont des conjugués de commutateurs de la forme $[A^{+1}, B^{-1}]$ ou $[A, B]^2$.

Bibliographie

- [ABA⁺21] Sara Azzali, Sarah L Browne, Maria Paula Gomez Aparicio, Lauren C Ruth, and Hang Wang. K-homology and k-theory of pure braid groups. *arXiv preprint arXiv :2105.07848*, 2021.
- [AEG94] Scot Adams, George A Elliot, and Thierry Giordano. Amenable actions of groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, pages 803–822, 1994.
- [AIM19] Yuki Arano, Yusuke Isono, and Amine Marrakchi. Ergodic theory of affine isometric actions on Hilbert spaces. *arXiv preprint arXiv :1911.04272*, 2019.
- [AJV19] Maria Paula Gomez Aparicio, Pierre Julg, and Alain Valette. The baum–connes conjecture : an extended survey. In *Advances in noncommutative geometry*, pages 127–244. Springer, 2019.
- [BBM00] M Bachir Bekka, Mohammed El Bachir Bekka, and Matthias Mayer. *Ergodic theory and topological dynamics of group actions on homogeneous spaces*, volume 269. Cambridge University Press, 2000.
- [BBV99] Cédric Béguin, Hela Bettaieb, and Alain Valette. K-theory for c^* -algebras of one-relator groups. *K-theory*, 16(3) :277–298, 1999.
- [BC00] Paul Baum and Alain Connes. Geometric k-theory for lie groups and foliations. *Enseignement Mathématique*, 46(1/2) :3–42, 2000.
- [BCH94] Paul Baum, Alain Connes, and Nigel Higson. Classifying space for proper actions and k-theory of group c^* -algebras. *Contemporary Mathematics*, 167 :241–241, 1994.
- [BD82] Paul Baum and Ronald G Douglas. Index theory, bordism, and k-homology. *Contemp. math*, 10 :1–31, 1982.
- [BdLHV08] Bachir Bekka, Pierre de La Harpe, and Alain Valette. *Kazhdan’s property (T)*. Cambridge university press, 2008.
- [BHS07] Paul Baum, Nigel Higson, and Thomas Schick. On the equivalence of geometric and analytic k-homology. *arXiv preprint math/0701484*, 2007.
- [BHS10] Paul Baum, Nigel Higson, and Thomas Schick. A geometric description of equivariant k-homology for proper actions. *Quanta of maths*, 11 :1–22, 2010.
- [Bil08] Patrick Billingsley. *Probability and measure*. John Wiley & Sons, 2008.
- [BJS88] Marek Bozejko, Tadeusz Januszkiwicz, and Ralf J Spatzier. Infinite coxeter groups do not have kazhdan’s property. *Journal of Operator Theory*, pages 63–67, 1988.
- [BMV05] Hela Bettaieb, Michel Matthey, and Alain Valette. Unbounded symmetric operators in k-homology and the baum–connes conjecture. *Journal of Functional Analysis*, 229(1) :184–237, 2005.

- [BO08] Nathaniel Patrick Brown and Narutaka Ozawa. *C*-Algebras and Finite-Dimensional Approximations*, volume 88. American Mathematical Soc., 2008.
- [BOOSW10] Paul Baum, Hervé Oyono-Oyono, Thomas Schick, and Michael Walter. Equivariant geometric k -homology for compact lie group actions. In *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, volume 80, pages 149–173. Springer, 2010.
- [Bur91] Marc Burger. Kazhdan constants for $sl(3, \mathbb{Z})$. 1991.
- [BV95] Mohammed EB Bekka and Alain Valette. Lattices in semi-simple lie groups, and multipliers of group C^* -algebras. *Astérisque*, (232) :67–80, 1995.
- [CCJ⁺12] Pierre-Alain Cherix, Michael Cowling, Paul Jolissaint, Pierre Julg, and Alain Valette. *Groups with the Haagerup property : Gromov's a -T-menability*, volume 197. Birkhäuser, 2012.
- [CDH10] Indira Chatterji, Cornelia Druțu, and Frédéric Haglund. Kazhdan and haagerup properties from the median viewpoint. *Advances in Mathematics*, 225(2) :882–921, 2010.
- [Cha86] C Charlap. Leonard; beierbach groups and flat manifolds, 1986.
- [Cho83] Marie Choda. Group factors of the haagerup type. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, 59(5) :174–177, 1983.
- [Dan21] Alexandre I Danilenko. Haagerup property and kazhdan pairs via ergodic infinite measure preserving actions. *arXiv preprint arXiv :2102.07126*, 2021.
- [Dav96] Kenneth R Davidson. *C*-algebras by example*, volume 6. American Mathematical Soc., 1996.
- [Del77] Patrick Delorme. 1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de lie semi-simples et résolubles. produits tensoriels continus de représentations. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 105 :281–336, 1977.
- [DJZ20] Thiebout Delabie, Paul Jolissaint, and Alexandre Zumbrunnen. A new characterization of the haagerup property by actions on infinite measure spaces. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, page 1–20, 2020. Published on line.
- [DL98] James F Davis and Wolfgang Lück. Spaces over a category and assembly maps in isomorphism conjectures in k - and l -theory. *K-theory*, 15(3) :201–252, 1998.
- [Gro88] Mikhael Gromov. Rigid transformations groups. In D. Bernard and Y. Choquet Bruhat, editors, *Géométrie différentielle, variétés complexes, feuilletages riemanniens (Paris 1986)*, volume 33, pages 65–139. Hermann, Paris, 1988.
- [Gui72] Alain Guichardet. *Sur la cohomologie des groupes topologiques II*. Centre de mathématiques de l'École polytechnique, 1972.
- [Haa78a] Uffe Haagerup. An example of a non nuclear C^* -algebra, which has the metric approximation property. *Inventiones mathematicae*, 50(3) :279–293, 1978.
- [Haa78b] Uffe Haagerup. On the dual weights for crossed products of von neumann algebras ii : application of operator valued weights. *Mathematica Scandinavica*, 43(1) :119–140, 1978.
- [Hat05] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2005.

- [HK01] Nigel Higson and Gennadi Kasparov. E-theory and kk-theory for groups which act properly and isometrically on hilbert space. *Inventiones mathematicae*, 144(1) :23–74, 2001.
- [HKRS08] Bernhard Hanke, Dieter Kotschick, John Roe, and Thomas Schick. Coarse topology, enlargeability, and essentialness. In *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure*, volume 41, pages 473–495, 2008.
- [HLS02] Nigel Higson, Vincent Lafforgue, and Georges Skandalis. Counterexamples to the baum—connes conjecture. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 12(2) :330–354, 2002.
- [HR00] Nigel Higson and John Roe. *Analytic K-homology*. OUP Oxford, 2000.
- [Ise11] Olivier Isely. K-theory and k-homology for semi-direct products of \mathbb{Z}^2 by \mathbb{Z} . *Université de Neuchâtel*, pages 79–91, 2011.
- [Jol02] Paul Jolissaint. Haagerup approximation property for finite von neumann algebras. *Journal of Operator Theory*, pages 549–571, 2002.
- [Jol14] Paul Jolissaint. Proper cocycles and weak forms of amenability. *arXiv preprint arXiv :1403.0207*, 2014.
- [JS87] Vaughan FR Jones and Klaus Schmidt. Asymptotically invariant sequences and approximate finiteness. *American Journal of Mathematics*, pages 91–114, 1987.
- [JV83] Pierre Julg and Alain Valette. K-moyennabilité pour les groupes opérant sur les arbres. *CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, 296(23) :977–980, 1983.
- [Kas83] Gennadii Georgievich Kasparov. An index for invariant elliptic operators, k-theory, and representations of lie groups. In *Doklady Akademii Nauk*, volume 268, pages 533–537. Russian Academy of Sciences, 1983.
- [Kas88] Gennadi G Kasparov. Equivariantkk-theory and the novikov conjecture. *Inventiones mathematicae*, 91(1) :147–201, 1988.
- [Kas95] GG Kasparov. K-theory, group c-algebras, and higher signatures (conspectus). *Novikov conjectures, index theorems and rigidity*, 1 :101–146, 1995.
- [Kaz67] David A Kazhdan. Connection of the dual space of a group with the structure of its close subgroups. *Functional analysis and its applications*, 1(1) :63–65, 1967.
- [Kaz77] David Kazhdan. Some applications of the weil representation. *Journal d'analyse mathématique*, 32(1) :235–248, 1977.
- [Kei] Conrad Keith. $SL_2(\mathbb{Z})$. [https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/SL\(2,Z\).pdf](https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/SL(2,Z).pdf).
- [KJ95] Gennadi Kasparov and Pierre Julg. Operator k-theory for the group $su(n, 1)$. 1995.
- [Laf98] Vincent Lafforgue. Une démonstration de la conjecture de baum-connes pour les groupes réductifs sur un corps p-adique et pour certains groupes discrets possédant la propriété (t). *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 327(5) :439–444, 1998.
- [Laf02] Vincent Lafforgue. K-thé bivariente pour les algèbres de banach et conjecture de baum-connes. *Inventiones mathematicae*, 149(1) :1–95, 2002.

- [LM16] H Blaine Lawson and Marie-Louise Michelsohn. *Spin Geometry (PMS-38), Volume 38*. Princeton university press, 2016.
- [M⁺02] Michel Matthey et al. Mapping the homology of a group to the k -theory of its c^* -algebra. *Illinois Journal of Mathematics*, 46(3) :953–977, 2002.
- [Mar73] Grigorii Aleksandrovich Margulis. Explicit constructions of concentrators. *Problemy Peredachi Informatsii*, 9(4) :71–80, 1973.
- [Mer85] Richard Mercer. Convergence of fourier series in discrete crossed products of von neumann algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 94(2) :254–258, 1985.
- [Mis74] Alexandr Sergeevich Mishchenko. Infinite-dimensional representations of discrete groups, and higher signatures. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, 38(1) :81–106, 1974.
- [MV03] Guido Mislin and Alain Valette. *Proper group actions and the Baum-Connes conjecture*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [MV20] Amine Marrakchi and Stefaan Vaes. Nonsingular gaussian actions : beyond the mixing case. *arXiv preprint arXiv :2006.07238*, 2020.
- [MY01] Igor Mineyev and Guoliang Yu. The baum-connes conjecture for hyperbolic groups. *arXiv preprint math/0105086*, 2001.
- [OO01] Hervé Oyono-Oyono. Baum–connes conjecture and group actions on trees. *K-theory*, 24(2) :115–134, 2001.
- [OOT15] Rui Okayasu, Narutaka Ozawa, and Reiji Tomatsu. Haagerup approximation property via bimodules. *arXiv preprint arXiv :1501.06293*, 2015.
- [Oyo01] H Oyono. Baum-connes conjecture and extensions. *J. reine angew. Math*, 532 :133–149, 2001.
- [Ped79] Gert K. Pedersen. *C^* -algebras and their automorphism groups, volume 14 of London Math*. 1979.
- [Poo18] Sanaz Pooya. An explicit approach to the baum-connes conjecture for some semi-direct products. *Université de Neuchâtel*, page 103, 2018.
- [PV80] Mihai Pimsner and Dan Voiculescu. Exact sequences for k -groups and ext-groups of certain cross-product c^* -algebras. *Journal of Operator Theory*, pages 93–118, 1980.
- [PV82] Mihai Pimsner and Dan Voiculescu. K -groups of reduced crossed products by free groups. *Journal of Operator Theory*, pages 131–156, 1982.
- [RLLL00] Mikael Rørdam, Flemming Larsen, Flemming Larsen, and N Laustsen. *An introduction to K -theory for C^* -algebras*. Number 49. Cambridge University Press, 2000.
- [RS⁺00] Hans Reiter, Jan Derk Stegeman, et al. *Classical harmonic analysis and locally compact groups*. Number 22. Courier Corporation, 2000.
- [SB77] Jean-Pierre Serre and Hyman Bass. *Arbres, amalgames, SL_2* . Société mathématique de France Paris, 1977.

- [Sha00] Yehuda Shalom. Rigidity, unitary representations of semisimple groups, and fundamental groups of manifolds with rank one transformation group. *Annals of Mathematics*, 152(1) :113–182, 2000.
- [SW82] Klaus Schmidt and Peter Walters. Mildly mixing actions of locally compact groups. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(3) :506–518, 1982.
- [Tak79] Masamichi Takesaki. *Theory of operator algebras I*. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.
- [Tak13] Masamichi Takesaki. *Theory of operator algebras II*, volume 125. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Tho54] René Thom. Quelques propriétés globales des variétés différentiables. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 28(1) :17–86, 1954.
- [Val02] Alain Valette. *Introduction to the Baum-Connes conjecture*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [VGG73] Anatolii M Vershik, Izrail M Gel'fand, and MI Graev. Representations of the group $sl(2, r)$, where r is a ring of functions. *Russian Mathematical Surveys*, 28(5) :87, 1973.
- [VGG74] Anatolii Moiseevich Vershik, Izrail Moiseevich Gel'fand, and Mark Iosifovich Graev. Irreducible representations of the group g_x and cohomologifs. *Functional Analysis and Its Applications*, 8(2) :151–153, 1974.
- [vN29] John von Neumann. Zusatz zur arbeit" zur allgemeinen theorie des masses". *Fundamenta Mathematicae*, 13(1), 1929.
- [Zim13] Robert J Zimmer. *Ergodic theory and semisimple groups*, volume 81. Springer Science & Business Media, 2013.