EXPOSITIONES MATHEMATICAE

Expo. Math. 20 (2002): 279–285

www.urbanfischer.de/journals/expomath

Mathematical Note

Le lemme de Schur pour les représentations orthogonales

Yves Stalder [1] and Alain Valette [2]

Institut de Mathématiques – Université Neuchâtel, Rue Emile Argand 11, CH-2007 Neuchâtel, Suisse

Abstract

Let σ be an orthogonal representation of a group G on a real Hilbert space. We show that σ is irreducible if and only if its commutant $\sigma(G)'$ is isomorphic to $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ or $\mathbb{H}$. This result is an analogue of the classical Schur lemma for unitary representations. In both cases (orthogonal and unitary), a representation is irreducible if and only if its commutant is a field. If σ is irreducible, we show that there exists a unitary irreducible representation π of G such that the complexification $\sigma_{\mathbb{C}}$ is unitarily equivalent to π if $\sigma(G)' \simeq \mathbb{R}$, to $\pi \oplus \overline{\pi}$ if $\sigma(G)' \simeq \mathbb{C}$, and to $\pi \oplus \pi$ if $\sigma(G)' \simeq \mathbb{H}$ (here $\overline{\pi}$ denotes the contragredient representation of π). These results are classical for a finite-dimensional σ, but seem to be new in the general case.

1 Introduction

Soit π une représentation d'un groupe G sur un espace vectoriel sur un corps K. Dans sa forme la plus simple, le lemme de Schur affirme que, si π est (algébriquement) irréductible, alors le commutant $\pi(G)'$ de π est une algèbre à division sur K. (En effet, si $T \in \pi(G)'$, le noyau et l'image de T sont des sous-espaces invariants de π, d'où on tire que T est nul ou inversible).

Si π est irréductible et de dimension finie sur K, alors $\pi(G)'$ est une algèbre à division de dimension finie sur K. Si K est algébriquement clos (par exemple $K = \mathbb{C}$), alors le commutant est réduit aux scalaires : $\pi(G)' = K.1$. Si $K = \mathbb{R}$, alors $\pi(G)'$ est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou à l'algèbre $\mathbb{H}$ des quaternions de Hamilton (voir [Kir76], section 8.2 ou l'appendice II de [Bou82]).

Exemple 1 *Décrivons trois représentations sur* $\mathbb{R}^4$ *:*

1. $G = SO(4)$ *; la représentation standard (donnée par l'action linéaire) de* G *sur* $\mathbb{R}^4$ *est irréductible, de commutant* $\mathbb{R}$.

E-mail addresses: [1] yves.stalder@unine.ch, [2] alain.valette@unine.ch
Fax: (++41) 032-718-2817

0732-0869/02/20/3-279 $15.00/0

2. *$G = SO(2) \times O(2)$; la représentation standard de $SO(2)$ sur $\mathbb{R}^2$ est irréductible de commutant $\mathbb{C}$, celle de $O(2)$ sur $\mathbb{R}^2$ est de commutant $\mathbb{R}$. Donc la représentation "produit tensoriel externe" de ces deux représentations est une représentation de G sur $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$, irréductible de commutant $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = \mathbb{C}$.*
3. *$G = Sp(1)$; le groupe G est donc le groupe multiplicatif des quaternions de module 1. La représentation de G sur $\mathbb{R}^4$ donnée par la multipli-cation à gauche de G sur $\mathbb{H}$, est irréductible de commutant $\mathbb{H}$ (le commutant étant fourni par les multiplications à droite par les éléments de $\mathbb{H}$).*

Pour d'autres exemples, voir le livre de B. Simon [Sim96].

Pour les représentations unitaires sur un espace de Hilbert complexe, ou orthogonales sur un espace de Hilbert réel, la notion pertinente d'irréductibilité est l'irréductibilité topologique : une représentation π de G sur $\mathcal{H}_\pi$ est *irréductible* si les seuls sous-espaces invariants fermés de $\mathcal{H}_\pi$ sont $\{0\}$ et $\mathcal{H}_\pi$. Pour une représentation unitaire ou orthogonale, le *commutant* $\pi(G)'$ est le commutant de $\pi(G)$ dans l'algèbre $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ des opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{H}_\pi$. Si π est de dimension finie, ces notions coïncident bien sûr avec celles discutées plus haut.

L'exemple suivant généralise la proposition 1 du Chapitre V, §2 de [Bou68].

Exemple 2 *Soit π une représentation orthogonale irréductible d'un groupe G. Notons encore π son extension à l'algèbre de groupe $\mathbb{C}G$. S'il existe $a \in \mathbb{C}G$ tel que $\mathcal{D} := Im(\pi(a))$ soit de dimension finie impaire, alors $\pi(G)' \cong \mathbb{R}$. En particulier, s'il existe $g \in G$ tel que $I - \pi(g)$ est de dimension finie impaire, alors $\pi(G)' \cong \mathbb{R}$.*

En effet, si on prend $U \in \pi(G)'$, U commute à $\pi(a)$ et donc $U(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D}$ est de dimension impaire, l'opérateur $U|_{\mathcal{D}}$ possède une valeur propre α réelle. Le sous-espace $\mathcal{K} = \ker(U - \alpha I)$ est fermé, π-invariant et contient $\mathcal{D}$. Par irréductibilité de π on a $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ d'où $U = \alpha I$.

Pour obtenir le cas particulier, on remarque que $I - \pi(g) = \pi(\delta_e - \delta_g)$, où δ_g désigne la masse de Dirac au point g. On prend donc $a = \delta_e - \delta_g$. □

Pour les représentations unitaires, le lemme de Schur s'énonce comme suit : une représentation unitaire π de G est irréductible si et seulement si $\pi(G)' = \mathbb{C}.1$. Cet énoncé est tout-à-fait classique (voir [Lan75], Appendice 1) : la preuve est une application du théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints bornés sur un espace de Hilbert complexe.

Notre but ici est de démontrer un lemme de Schur pour les représentations orthogonales [1], qui est l'analogue exact de l'énoncé rappelé au début pour les représentations sur des espaces vectoriels réels de dimension finie. Notons que des représentations orthogonales irréductibles apparaissent naturellement dans des questions liées aux fonctions conditionnellement de type négatif (voir [VK84], Théorème 1 ; [Sha00], 6.1 ; [LSV]).

Théorème 1 *Soit σ une représentation orthogonale de G sur un espace de Hilbert réel. La représentation σ est irréductible si et seulement si $\sigma(G)'$ est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.*

[1]Ce résultat est peut-être connu, mais nous n'en avons pas trouvé trace dans la littérature

Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert réel, le *complexifié* de $\mathcal{H}$ est l'espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, muni du produit scalaire

$$\langle \xi \otimes \lambda | \eta \otimes \mu \rangle = \langle \xi | \eta \rangle \overline{\lambda} \mu$$

$(\xi, \eta \in \mathcal{H};\ \lambda, \mu \in \mathbb{C})$. Si σ est une représentation orthogonale de G sur $\mathcal{H}_\sigma$, la *complexifiée* de σ est la représentation unitaire $\sigma_{\mathbb{C}}$ de G sur $(\mathcal{H}_\sigma)_{\mathbb{C}}$ donnée par $\sigma_{\mathbb{C}}(g) = \sigma(g) \otimes 1$ pour $g \in G$.

Le résultat suivant, classique pour les représentations de dimension finie (voir [Kir76], Théorème 3 de la section 8.2), décrit la complexifiée d'une représentation orthogonale irréductible. Avant de l'énoncer, rappelons la notion de représentation conjuguée d'une représentation unitaire. Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert complexe, notons $\overline{\mathcal{H}}$ l'espace de Hilbert avec les mêmes vecteurs et la même addition que $\mathcal{H}$, mais la multiplication scalaire donnée par

$$(\lambda, \xi) \mapsto \overline{\lambda}\xi \qquad (\lambda \in \mathbb{C}, \xi \in \mathcal{H})$$

et le produit scalaire donné par

$$[\xi|\eta] = \overline{\langle \xi | \eta \rangle} \qquad (\xi, \eta \in \mathcal{H}).$$

Si π est une représentation unitaire de G sur $\mathcal{H}_\pi$, la *représentation conjuguée* de π est la représentation unitaire $\overline{\pi}$ de G sur $\overline{\mathcal{H}_\pi}$ donnée par $\overline{\pi}(g) = \pi(g)$ pour $g \in G$.

Exemple 3 *Soit π une représentation unitaire de dimension 1, donnée par un homomorphisme $\chi : G \to U(1)$; alors $\overline{\pi}$ est équivalente à la représentation donnée par l'homomorphisme*

$$\chi^{-1} : G \to U(1); g \mapsto \chi(g^{-1}).$$

Théorème 2 *Soit σ une représentation orthogonale irréductible de G.*

1. *Si $\sigma(G)' \simeq \mathbb{R}$, alors $\sigma_{\mathbb{C}}$ est irréductible.*
2. *Si $\sigma(G)' \simeq \mathbb{C}$, alors il existe une représentation unitaire irréductible π de G, non unitairement équivalente à sa conjuguée $\overline{\pi}$, telle que $\sigma_{\mathbb{C}}$ est unitairement équivalente à $\pi \oplus \overline{\pi}$.*
3. *Si $\sigma(G)' \simeq \mathbb{H}$, alors il existe une représentation unitaire irréductible π de G telle que $\sigma_{\mathbb{C}}$ est unitairement équivalente à $\pi \oplus \pi$.*

La preuve du Théorème 1 occupe la section 2, celle du Théorème 2 la section 3. Nous avons choisi de rédiger les résultats pour les représentations de groupes, mais le contexte est beaucoup plus général : par exemple, si A est une algèbre réelle munie d'une involution $a \mapsto a^*$, et si $\sigma : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\sigma)$ est un homomorphisme d'algèbres réelles tel que $\sigma(a^*) = \sigma(a)^t$ pour $a \in A$ (où T^t désigne l'opérateur transposé de $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\sigma)$), les deux énoncés et leurs preuves ne subissent aucun changement.

2 Preuve du Théorème 1

Si la représentation orthogonale σ est réductible, la projection orthogonale sur un sous-espace invariant non trivial, est un élément non nul et non-inversible de $\sigma(G)'$; ainsi le commutant $\sigma(G)'$ n'est pas une algèbre à division, et donc n'est isomorphe à aucune des algèbres $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$.

Supposons maintenant σ irréductible. Muni de la norme-opérateur induite par $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\sigma)$, le commutant $\sigma(G)'$ est une algèbre normée réelle. La version réelle du théorème de Gelfand-Mazur (voir le Théorème 7 de la section 14 de [BD73]) affirme qu'une algèbre à division normée réelle est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$. Il nous suffit donc de montrer que $\sigma(G)'$ est une algèbre à division.

1er pas Soit $A \in \sigma(G)'$ tel que $A = A^t$. Il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda_0.1$. En effet, pour les opérateurs égaux à leur transposé sur un espace de Hilbert réel, le théorème spectral a exactement la même forme que pour les opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert complexe (voir le n° 107 de [RiNa55]) : le spectre de A est

$$\mathrm{Sp}A = \{\lambda \in \mathbb{R} : A - \lambda.1 \text{ n'est pas inversible dans } \mathcal{B}(\mathcal{H}_\sigma)\}.$$

qui est une partie compacte non-vide de $\mathbb{R}$. De plus, il existe une résolution spectrale $B \mapsto E(B)$, définie sur les boréliens B de $\mathrm{Sp}A$, telle que

$$A = \int_{\mathrm{Sp}A} \lambda \mathrm{d}E(\lambda)\,.$$

Il suffit alors de montrer que $\mathrm{Sp}A = \{\lambda_0\}$. Si ce n'était pas le cas, on trouverait $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{Sp}A$ avec $\lambda_1 < \lambda_2$. Soit alors

$$B = \{\lambda \in \mathrm{Sp}A : \lambda \leqslant \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\}\,;$$

c'est un borélien de $\mathrm{Sp}A$ et $E(B)$ est un projecteur orthogonal distinct de 0 et de 1. Comme $E(B)$ commute à tout opérateur qui commute à A, on a $E(B) \in \sigma(G)'$. Ceci contredit l'irréductibilité de la représentation σ.

2ème pas Soit $A \in \sigma(G)'$, $A \neq 0$. Montrons que A est inversible dans $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\sigma)$. Par le théorème de l'application ouverte, il suffit de montrer que A est bijectif comme opérateur sur $\mathcal{H}_\sigma$. Pour cela, considérons l'opérateur $A^tA \in \sigma(G)'$. Par le premier pas, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $A^tA = \lambda_0.1$ (puisque A^tA est un opérateur positif non nul et que $(A^tA)^t = A^tA$). De cette égalité, il résulte que A est injectif et A^t est surjectif. En permutant les rôles de A et A^t, on voit que A est surjectif (et A^t est injectif). Donc A est bijectif, ce qui termine la preuve.

Remarque 1 Si π est une représentation **unitaire** irréductible de G, la technique ci-dessus donne une preuve non classique du lemme de Schur : $\pi(G)' = \mathbb{C}.1$. En effet, on montre d'abord que $\pi(G)'$ est une algèbre à division, puis on utilise le théorème de Gelfand-Mazur pour conclure.

Remarque 2 On peut trouver dans [Goo72] une version du théorème spectral pour les opérateurs normaux sur des espaces de Hilbert réels, dont nous n'avons pas besoin ici.

3 Preuve du Théorème 2

Nous utiliserons tout le temps le fait, facile à établir, que

$$\sigma_{\mathbb{C}}(G)' = \sigma(G)' \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

1. Si $\sigma(G)' = \mathbb{R}.1$, alors $\sigma_{\mathbb{C}}(G)' = \mathbb{C}.1$, donc $\sigma_{\mathbb{C}}$ est irréductible.
2. Si $\sigma(G)' \simeq \mathbb{C}$, choisissons un opérateur $J \in \sigma(G)'$ avec $J^2 = -1$. Comme σ est une représentation orthogonale, on a aussi $J^t \in \sigma(G)'$, donc $(J^t)^2 = -1$, et $J^t = \pm J$. Comme $J^t J$ est un opérateur positif, on doit avoir $J^t = -J$.

   Le commutant de $\sigma_{\mathbb{C}}(G)$ est isomorphe comme algèbre à

   $$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

   Cette algèbre contient exactement deux idempotents non triviaux, P_+, P_-, qu'on peut réaliser comme suit :

   $$P_+ = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + J \otimes i) \quad et \quad P_- = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 - J \otimes i).$$

   Les opérateurs P_+, P_- sont les projecteurs orthogonaux sur deux sous-espaces fermés orthogonaux, complémentaires l'un de l'autre, invariants par $\sigma_{\mathbb{C}}(G)$. En utilisant le fait que tout vecteur de $(\mathcal{H}_\sigma)_{\mathbb{C}}$ s'écrit de façon unique $\xi \otimes 1 + \eta \otimes i$ ($\xi, \eta \in \mathcal{H}_\sigma$), on voit que l'image de P_+ (resp. P_-) est l'ensemble des vecteurs de $(\mathcal{H}_\sigma)_{\mathbb{C}}$ de la forme $\xi \otimes 1 + J(\xi) \otimes i$ (resp. $\xi \otimes 1 - J(\xi) \otimes i$), pour $\xi \in \mathcal{H}_\sigma$. Notons π_+ (resp. π_-) la sous-représentation de $\sigma_{\mathbb{C}}$ sur l'image de P_+ (resp. P_-). On a donc $\sigma_{\mathbb{C}} = \pi_+ \oplus \pi_-$.

   Montrons que π_- est unitairement équivalente à la conjuguée de π_+. Pour cela, considérons l'application

   $$\alpha : \mathcal{H}_{\pi_-} \to \mathcal{H}_{\pi_+} : \xi \otimes 1 - J(\xi) \otimes i \mapsto \xi \otimes 1 + J(\xi) \otimes i;$$

   c'est une bijection anti-linéaire qui entrelace π_- et π_+. De plus, en utilisant $J^t = -J$ on vérifie que pour $\xi, \eta \in \mathcal{H}_\sigma$:

   $$\langle \alpha(\xi \otimes 1 - J(\xi) \otimes i) | \alpha(\eta \otimes 1 - J(\eta) \otimes i) \rangle = \overline{\langle \xi \otimes 1 - J(\xi) \otimes i | \eta \otimes 1 - J(\eta) \otimes i \rangle}.$$

   Ceci montre que α réalise une équivalence unitaire entre π_- et $\overline{\pi_+}$.

   Il reste à montrer que π_+, π_- sont inéquivalentes et irréductibles. Mais si $V : \mathcal{H}_{\pi_+} \to \mathcal{H}_{\pi_-}$ est une équivalence unitaire entre π_+ et π_-, alors dans la décomposition $(\mathcal{H}_\sigma)_{\mathbb{C}} = \mathcal{H}_{\pi_+} \oplus \mathcal{H}_{\pi_-}$, l'opérateur $\begin{pmatrix} 0 & V^* \\ V & 0 \end{pmatrix}$ est un élément de $\sigma_{\mathbb{C}}(G)'$ qui est linéairement indépendant de P_+, P_-. De même, si π_+ est réductible, on trouve un opérateur non scalaire $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\pi_+})$ qui commute à $\pi_+(G)$, et TP_+ est encore un élément de $\sigma_{\mathbb{C}}(G)'$ qui est linéairement indépendant de P_+, P_-. Dans les deux cas, on contredit le fait que $\dim_{\mathbb{C}} \sigma_{\mathbb{C}}(G)' = 2$.

3. Si $\sigma(G)' \simeq \mathbb{H}$, choisissons une base $1, i, j, k$ de $\sigma(G)'$ vérifiant les relations usuelles ; elle permet de définir la conjugaison quaternionnienne $q \mapsto \overline{q}$ sur $\sigma(G)'$: c'est un anti-automorphisme involutif de $\sigma(G)'$, qui permet à son tour de définir la norme d'un élément ; $N(q) = \overline{q}q$. D'autre part, le passage à l'opérateur transposé $q \mapsto q^t$ définit un second anti-automorphisme involutif de $\sigma(G)'$.
Assertion : $q^t = \overline{q}$ pour $q \in \sigma(G)'$.
En effet, par le théorème de Skolem-Noether (voir [Coh77], section 10.7), deux anti-automorphismes involutifs de $\sigma(G)'$ sont conjugués par un automorphisme intérieur de $\sigma(G)'$: il existe $u \in \sigma(G)'$, avec $N(u) = 1$, tel que $q^t = \overline{u}.\overline{q}.u$ pour tout $q \in \sigma(G)'$. D'autre part, on montre comme dans le second pas de la preuve du Théorème 1, que pour $q \in \sigma(G)'$ il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $q^t.q = \lambda_0.1$. Donc
$$q^t.q = \overline{u}.\overline{q}.u.q = \lambda_0.1$$
En prenant les normes, on trouve $\lambda_0 = N(q)$, pour tout $q \in \sigma(G)'$. Si $N(q) = 1$, on voit que $\overline{u}.\overline{q}.u.q = 1$, donc u commute à tout élément de norme 1 dans $\sigma(G)'$; ainsi $u = \pm 1$, ce qui démontre l'assertion.
Munissons $\sigma_{\mathbb{C}}(G)' \simeq \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ de l'involution anti-linéaire $(q \otimes \lambda)^* = q^t \otimes \overline{\lambda}$. Notons $M_2(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices 2×2 à coefficients complexes, munie de l'involution anti-linéaire $A \mapsto A^*$ (où A^* désigne la transposée conjuguée de la matrice A). Définissons $\alpha : \sigma_{\mathbb{C}}(G)' \to M_2(\mathbb{C})$ sur la base :
$$\alpha(1 \otimes 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \ \alpha(i \otimes 1) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} ;$$
$$\alpha(j \otimes 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \ \alpha(k \otimes 1) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} .$$
$\alpha : \sigma_{\mathbb{C}}(G)' \to M_2(\mathbb{C})$ est un isomorphisme d'algèbres complexes qui, par l'assertion précédente, satisfait $\alpha(T^*) = \alpha(T)^*$ pour tout $T \in \sigma_{\mathbb{C}}(G)'$.
Posons $P_1 = \alpha^{-1}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$, $P_2 = \alpha^{-1}(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ et $E = \alpha^{-1}(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$. Les opérateurs P_1, P_2 sont les projecteurs orthogonaux sur deux sous-espaces fermés orthogonaux, complémentaires l'un de l'autre, invariants par $\sigma_{\mathbb{C}}(G)$. Notons π_1 (resp. π_2) la sous-représentation de $\sigma_{\mathbb{C}}$ sur l'image de P_1 (resp. P_2). On a donc $\sigma_{\mathbb{C}} = \pi_1 \oplus \pi_2$.
Il reste à montrer que π_1, π_2 sont unitairement équivalentes et irréductibles. Mais la restriction de E à $\mathcal{H}_{\pi_1}$ est un opérateur unitaire de $\mathcal{H}_{\pi_1}$ sur $\mathcal{H}_{\pi_2}$ qui entrelace π_1 et π_2. D'autre part, si π_1 était réductible, on trouverait un opérateur non scalaire $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\pi_1})$ qui commute à $\pi_1(G)$, et TP_1 serait un élément de $\sigma_{\mathbb{C}}(G)'$ linéairement indépendant de P_1, P_2, E, E^* : ce qui contredirait le fait que $\dim_{\mathbb{C}} \sigma_{\mathbb{C}}(G)' = 4$.

Ceci termine la preuve du Théorème 2.

Dans [LSV], on trouvera une preuve d'un résultat légèrement moins précis que le Théorème 2 : si σ est une représentation orthogonale irréductible de G, il existe une représentation unitaire irréductible π de G telle que $\sigma_{\mathbb{C}}$ est unitairement équivalente soit à π, soit à $\pi \oplus \overline{\pi}$, soit à $\pi \oplus \pi$; la preuve ne fait pas appel au lemme de Schur.

Nous remercions Pierre de la Harpe pour nous avoir signalé l'Exemple 2 et pour plusieurs remarques sur une première version de l'article.

Références

[BD73] F.F. Bonsall et J. Duncan.
Complete normed algebras.
Springer-Verlag, 1973.

[Bou68] N. Bourbaki
Groupes et algèbres de Lie, Chapitres IV, V et VI.
Hermann, 1968.

[Bou82] N. Bourbaki
Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 9.
Masson, 1982.

[Coh77] P.M. Cohn.
Algebra (volume 2).
Wiley, 1977.

[Goo72] R.K. Goodrich.
The spectral theorem for real Hilbert space.
Acta Sci. Math. (Szeged), 33 :123–127, 1972.

[Kir76] A.A. Kirillov.
Elements of the theory of representations.
Springer-Verlag, 1976.

[Lan75] S. Lang.
$SL_2(\mathbb{R})$.
Addison-Wesley, 1975.

[LSV] N. Louvet, Y. Stalder, et A. Valette.
Sur une caractérisation par Shalom de la propriété (T) de Kazhdan.
En préparation.

[RiNa55] F. Riesz et B. Sz.-Nagy.
Leçons d'analyse fonctionnelle.
Gauthiers-Villars, Akadémiai Kiadó, 1955.
Deuxième édition.

[Sha00] Y. Shalom.
Rigidity of commensurators and irreducible lattices.
Invent. Math., 141 :1–54, 2000.

[Sim96] B. Simon.
Representations of finite and compact groups.
Grad. Stud. in Math. 10, Amer. Math. Soc., 1996.

[VK84] A.M. Vershik et S.I. Karpushev.
Cohomology of groups in unitary representations, the neighbourhood of the identity and conditionally positive definite functions.
Math. USSR Sbornik, 47 :513–526, 1984.

Received: 25.02.2002