

# Interprétation quantitative des essais de traçage dans les aquifères karstiques.

## Partie 1: Introduction théorique à l'utilisation des modèles à "Boîte noire".

Laszlo KIRALY

*Centre d'Hydrogéologie de l'Université de Neuchâtel  
11, rue Emile-Argand, CH-2007 NEUCHATEL (Switzerland)*

### Table des matières

<b>1. Introduction.</b>	2
1.1. But de l'étude.	2
1.2. Présentation du rapport.	3
<b>2. Le modèle à boîte noire: principe général.</b>	5
2.1. Système réel, schéma abstrait, modèle numérique.	5
2.2. Le schéma à boîte noire.	6
2.3. Prévision de la restitution d'un traceur à une source karstique. Application du schéma à boîte noire.	10
<b>3. Présentation des fonctions de transfert.</b>	13
3.1. Remarques préliminaires.	13
3.2. La réponse impulsionnelle.	13
3.3. La réponse indicelle.	17
3.4. La réponse de référence.	18
<b>4. Convolution, déconvolution.</b>	24
4.1. Remarques préliminaires.	24
4.2. L'intégrale de convolution.	25
4.3. Remarques sur la forme discrétisée de l'intégrale de convolution.	28
4.4. Déconvolution: la méthode numérique "directe".	32
4.5. Remarques sur la déconvolution "directe".	34
<b>5. Conclusions.</b>	39
<b>6. Références.</b>	40
<b>Annexe A, Annexe B</b>	41 et 42

## PREAMBULE

Le rapport, composé de quatre parties, est une introduction à l'utilisation de programmes d'ordinateur permettant de calculer la fonction de transfert normalisée à partir des essais de traçage et de simuler la restitution d'un polluant pour une chronique d'entrée quelconque. Chronologiquement ce sont les deuxième, troisième et quatrième parties qui ont été rédigées d'abord. La rédaction de la première partie a été décidée relativement tardivement pour expliciter certaines notions de base n'ayant pu être développées en détail dans les rapports de Y. ROSSIER et de H. FISCH.

Il faut préciser que l'auteur de cette première partie n'a participé ni à l'élaboration des programmes de calcul présentés dans les deuxième, troisième et quatrième parties, ni à la rédaction du texte de ces trois dernières parties. Il n'a, par conséquent, pas eu la possibilité de corriger d'éventuelles incohérences dans l'utilisation des termes techniques ou dans l'explication de certaines notions de base.

# 1 Introduction.

## 1.1 But de l'étude.

Habituellement, les essais de traçage sont analysés d'un point de vue qualitatif uniquement: un traçeur est injecté dans un aquifère et la localisation des points où il réapparaît permet de définir des connections souterraines.

Dans le cadre de l'établissement de nouvelles bases légales relatives à la protection des eaux, un approfondissement des connaissances sur le transport de substances en milieux karstique s'avère nécessaire. Il est indispensable, entre autres, de développer des méthodes permettant l'approche quantitative du problème du transport de substances dans ces milieux. Ces méthodes devraient permettre une meilleure estimation des conséquences de l'introduction d'un polluant dans le système, que ce soit au moment de la délimitation d'une zone de protection ou, après un accident, au moment de prendre des mesures visant à en limiter les effets.

En 1991 le CHYN a été mandaté par l'OFEFP pour établir et tester une méthodologie qui, en utilisant les résultats des essais de traçage, permettrait de prévoir ou de simuler la réponse d'un aquifère karstique soumis à une pollution. Si *les modèles de simulation déterministes* à éléments finis sont indispensables à l'étude théorique et à la solution "exacte" de ce type de problèmes, leur utilisation dans la pratique se heurte rapidement à une très grande difficulté: on ne connaît pour ainsi dire jamais la géométrie et la densité du réseau karstique très perméable dans les aquifères réels.

Il faut souligner, en effet, que notre connaissance des nappes d'eau souterraines dans les roches carbonatées est extrêmement fragmentaire et lacunaire. Si l'on possède beaucoup de renseignements géologiques sur les aquifères karstiques (structure, lithologie, etc.), les études hydrogéologiques se réduisent, le plus souvent, soit à des essais de traçage, soit à l'analyse de l'hydrogramme et de la composition chimique (ou isotopique) des sources karstiques. Les forages étant rares, nous connaissons peu de chose sur la distribution réelle des potentiels hydrauliques et, ce qui est beaucoup plus grave, sur la distribution réelle des perméabilités à l'intérieur de ces aquifères. La connaissance du champ des perméabilités ou du champ des écoulements étant indispensable à la mise en oeuvre des modèles de transport à éléments finis, on imagine aisément que les prévisions obtenues à l'aide de ces modèles contiendraient, inévitablement, des incertitudes considérables.

Sachant que, dans l'état actuel de nos connaissances, la qualité des prévisions sera de toute façon assez médiocre, nous avons renoncé à l'utilisation des modèles à éléments finis disponibles au CHYN pour nous tourner vers des techniques qui sont peut-être moins performantes, mais très nettement plus rapides et moins chères.

En nous basant sur une étude bibliographique réalisée par un des collaborateurs scientifiques du Centre d'Hydrogéologie de l'Université de Neuchâtel (voir ROSSIER, 1990), nous nous sommes fixé comme but l'élaboration d'un modèle global du type *boîte noire*.

Dans ce type de modèle le système karstique est considéré globalement comme une "boîte noire" ayant une entrée et une sortie, mais où la géométrie du réseau et de l'aquifère n'apparaît jamais explicitement. Les effets de la géométrie et des processus de transport à l'intérieur de l'aquifère sont pris en compte globalement par une *fonction de transfert*<sup>1</sup> qu'il s'agit de déterminer expérimentalement à partir des essais de traçage.

Il va sans dire qu'en admettant cette simplification on réduit considérablement la puissance du modèle: la variation de la concentration du polluant ne pourrait être calculée qu'à la sortie de la "boîte noire", c'est-à-dire à l'exutoire du réseau karstique. Il s'agit en fait d'un *outil* relativement simple et d'utilisation rapide qui permet d'exécuter deux opérations importantes:

- a. Interpréter les résultats des essais de traçage en termes de *fonction de transfert*<sup>1</sup> (réponse impulsionnelle, réponse indicelle ou réponse de référence).
- b. Prévoir la *restitution du polluant* à la sortie du système connaissant la fonction de transfert et la chronique d'entrée de la substance au point d'injection.

## 1.2 Présentation du rapport.

Le rapport, composé de quatre parties, est une introduction à l'utilisation de programmes d'ordinateur permettant de calculer la fonction de transfert normalisée à partir des essais de traçage et de simuler la restitution d'un polluant pour une chronique d'entrée quelconque. Il présente deux de ces programmes, et s'adresse aux hydrogéologues qui ne sont pas eux-mêmes des spécialistes de la modélisation ou qui ne connaissent pas forcément les notions mathématiques comme l'intégrale de convolution, par exemple.

La **Première Partie** du rapport est consacrée à la présentation de la *méthodologie* et à la définition de quelques notions de base. On y trouve le *principe du modèle* à boîte noire, la définition des *fonctions de transfert*<sup>1</sup>, l'explication de *l'intégrale de convolution* et des indications sur les *conditions d'utilisation* du modèle. Les explications sont, dans la mesure du possible, illustrées par des exemples simples accompagnés de figures et de graphiques, réduisant ainsi au minimum les connaissances techniques préalablement requises.

La **Deuxième Partie** du rapport présente un programme de calcul écrit en FORTRAN 77 et utilisable sur ordinateurs VAX. Cette description est destinée aux opérateurs travaillant effectivement sur ordinateur et comprend, entre autres, la présentation du programme, ainsi que la description de la structure des fichiers utilisés. Des exemples numériques simples permettent aux utilisateurs de s'entraîner dans le maniement des programmes.

---

<sup>1</sup>Strictement parlant, le terme "fonction de transfert" désigne la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle. Par un abus de langage bien commode et souvent utilisé, nous donnons un sens beaucoup plus large à ce terme (voir section 3.1 et les remarques à la page suivante).

Dans la **Troisième Partie** on attire l'attention sur quelques problèmes liés à la détermination des réponses impulsionnelles par déconvolution des courbes de restitution empiriques, obtenues à partir des essais de traçage. Les réponses impulsionnelles représentent, en quelque sorte, des essais de traçage "normalisés", directement comparables d'un aquifère karstique à un autre, mais leur détermination pratique peut présenter de très grandes difficultés.

Enfin, la **Quatrième Partie** (en allemand) est consacrée à la présentation d'un programme de calcul utilisable sur ordinateur personnel (PC) et pouvant être distribué à un grand nombre d'utilisateurs.

Les lecteurs qui désirent approfondir leurs connaissances dans le domaine des modèles à boîte noire sont invités à consulter la thèse de G. de MARSILY (1978), plus particulièrement le Tome 2 contenant les annexes. On y trouvera non seulement beaucoup de références et d'exemples d'application à des problèmes concrets, mais aussi une présentation exhaustive des *méthodes de déconvolution*, nécessaires à la détermination de la réponse impulsionnelle des systèmes réels.

On trouvera des références plus récentes dans l'étude bibliographique de Y. ROSSIER (1990), illustrée à titre d'exemple par l'interprétation d'essais de traçage réalisés précédemment. Soulignons que certaines des méthodes d'interprétation citées dans cette étude ont été élaborées pour des milieux poreux et elles sont basées sur des hypothèses qui ne sont pas réalisées dans les aquifères karstiques. Il va sans dire qu'elles ne seront pas reprises et utilisées dans le présent rapport. Signalons, enfin, la thèse de M. DZIKOWSKI (1992) consacrée à l'étude des essais de traçage en conditions hydrodynamiques variables, sujet qui ne sera pas abordé dans ce rapport.

Il nous paraît judicieux d'insister dès maintenant sur l'importance de la notion de **fonction de transfert** et sur le sens que nous donnons à ce terme dans le rapport. Strictement parlant, ce terme désigne la transformée de Fourier de la *réponse impulsionnelle*, définie dans la section 3.2. Par un abus de langage bien commode, nous l'utiliserons comme terme général pour désigner non seulement la *réponse impulsionnelle* elle-même, mais aussi la *réponse indicielle* et la *réponse de référence* (définies dans les sections 3.3 et 3.4), toutes les trois fonctions pouvant être utilisées pour transformer une chronique des "entrées" en une chronique des "sorties". La nature et le rôle des ces trois "réponses" sont particulièrement faciles à comprendre si l'on connaît les notions correspondantes largement utilisées en hydrologie de surface:

1. L'hydrogramme unitaire correspondant à une averse "instantanée" est une *réponse impulsionnelle*.
2. L'hydrogramme unitaire correspondant à une averse de durée finie est une *réponse de référence*.
3. L'hydrogramme (ou courbe) en "S" correspondant à une averse de durée "infinie" est une *réponse indicielle*.

## 2 Le modèle à Boîte noire: Principe général.

### 2.1 Système réel, schéma abstrait, modèle numérique.

La figure 1 montre clairement que le modèle numérique n'est pas la réalité, il n'est que la réalisation d'une représentation schématique et symbolique du système réel.

La distinction entre système réel, schéma abstrait et modèle numérique nous paraît particulièrement importante, car elle permet de mettre en évidence les principaux problèmes liés à la modélisation en général, qu'il s'agisse de modèles déterministes à éléments finis ou simplement de modèles globaux à "boîte noire". La "modélisation" au sens large comprend toutes les opérations ou étapes représentées dans la figure 1. Les utilisateurs doivent être conscients de toutes ces opérations ou étapes pour pouvoir évaluer objectivement l'utilité des modèles et, surtout, pour pouvoir appréhender la signification réelle des résultats simulés. Nous pensons ici, en particulier, aux utilisateurs qui reçoivent les programmes de calcul "clé en main" et qui n'ont dû s'occuper ni de l'établissement du schéma abstrait, ni de la réalisation du modèle numérique. C'est à leur intention que nous intercalons les remarques générales suivantes, avant d'aborder les modèles à boîte noire proprement dits.

La **première étape** dans la modélisation consiste à établir une représentation schématique et symbolique du système réel. Dans ce **schéma abstrait** seul certains éléments du système réel seront pris en considération (par exemple: infiltrations, perméabilités, potentiels hydrauliques, débits aux exutoires, etc.) et les relations quantitatives entre ces éléments, exprimées généralement sous forme d'équations (schémas abstraits et symboliques par excellence!), remplaceront les processus qui se déroulent dans le système réel. La validité des équations utilisées est, le plus souvent, liée à un certain nombre de conditions ou hypothèses restrictives qui ne sont pas forcément réalisées dans chaque système réel particulier.

C'est l'utilisateur du schéma qui doit décider s'il est prêt à accepter les erreurs dues aux écarts entre les conditions idéales (définies dans le schéma) et les conditions réelles. Le schéma abstrait obtenu doit contenir non seulement les opérations mathématiques qu'il faut exécuter pour obtenir les résultats désirés (par exemple: débits, potentiels hydrauliques, concentrations, etc.), mais aussi les conditions de validité du schéma, c'est-à-dire les hypothèses restrictives sur le milieu et les processus schématisés.

Soulignons que le schéma abstrait est toujours établi dans une intention préalable, pour résoudre un problème. Suivant la nature du problème et le but de l'utilisateur, ou suivant la nature des données qui sont à la disposition de l'utilisateur, le même système réel peut être représenté par des schémas abstraits fort différents.

On devrait utiliser, par exemple, un schéma déterministe contenant des équations différentielles si l'on désire simuler les potentiels hydrauliques dans un aquifère karstique, mais on devrait se contenter d'un schéma global à boîte noire si l'on veut

simuler seulement le débit de la source, en ne disposant d'autres données que les seules précipitations. Il va sans dire que l'efficacité du schéma doit être jugée par rapport à l'intention préalablement déclarée et par rapport aux conditions pragmatiques (en particulier, présence ou absence de certains types de données) dont le modélisateur doit tenir compte. En soi, un schéma n'est ni "bon", ni "mauvais". Il devient bon ou mauvais quand on l'utilise pour représenter tel ou tel système réel particulier où l'on veut résoudre tel ou tel problème bien défini.

La **deuxième étape** correspond à la réalisation d'un programme de calcul capable d'exécuter les opérations mathématiques définies dans le schéma abstrait. C'est le **modèle numérique** ou modèle de simulation proprement dit. Les limitations, simplifications et approximations inhérentes aux méthodes numériques utilisées doivent apparaître explicitement dans la description du programme, tout comme la structure des fichiers utilisés.

En fait, le modèle numérique n'est que la réalisation, le plus souvent imparfaite, du schéma abstrait, mais la notion centrale dans la modélisation reste le schéma abstrait lui-même.

Le **transfert des résultats** simulés sur le système réel représente la **troisième opération** importante dans la modélisation. Strictement parlant, les résultats simulés ne sont "valables" que dans le cadre fortement simplifié du modèle numérique et dans les conditions restrictives indiquées par le schéma abstrait. Leur transfert raisonnable au système réel exige que l'on soit conscient de toutes les simplifications effectuées au cours de l'établissement du schéma abstrait et de la réalisation du programme de calcul.

Plus particulièrement, toute incertitude sur les données introduites dans le modèle numérique, ou sur la réalisation des conditions de validité du schéma abstrait, devrait être traduite en "marge d'incertitude" sur les résultats simulés.

On évitera ainsi le ridicule de vouloir étalonner un modèle "au centimètre près", ou vouloir faire des prédictions "au centimètre près", alors que dans le schéma abstrait on ne tient pas compte des effets locaux perturbateurs existant dans le système réel.

## 2.2 Le schéma à boîte noire.

Quand on représente les systèmes naturels par un simple schéma ou modèle à boîte noire, on le fait, le plus souvent, par nécessité et à contrecœur. On le fait parce que les processus qui se déroulent dans le système réel sont mal connus, on le fait parce qu'il n'y a pas assez de données pour utiliser les relations déterministes, on le fait parce qu'on aimerait obtenir des solutions simples, rapides et approximatives à certains problèmes pratiques, bref, on le fait presque toujours "faute de mieux". A contrecœur aussi, car les conditions de validité du schéma n'étant, pour ainsi dire, jamais entièrement satisfaites dans les systèmes naturels, on devrait accepter des erreurs relativement importantes sur les résultats obtenus par le modèle numérique.

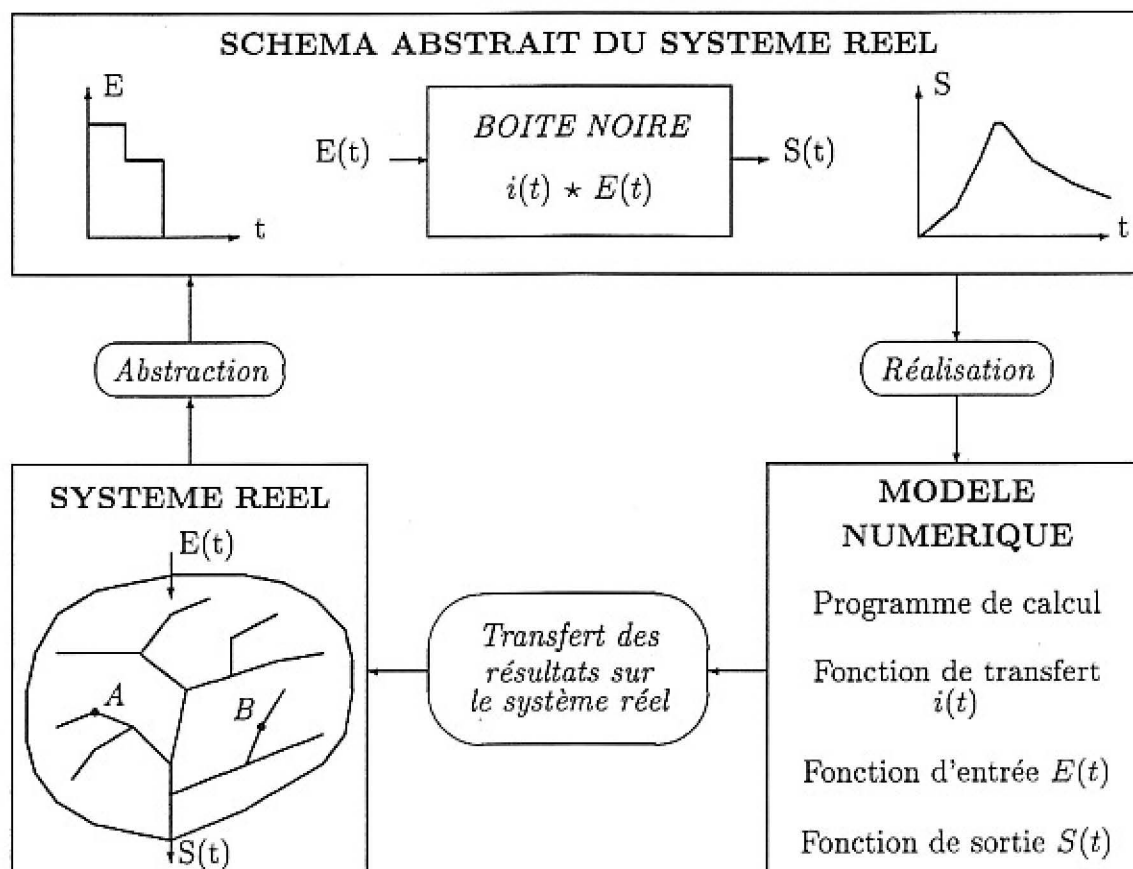


Figure 1: Principe du modèle à "boîte noire".

Le schéma à "boîte noire" sera illustré par un exemple simple, choisi dans le domaine de l'hydrologie de surface (voir figure 1). Soit le **système réel** un bassin versant, avec son réseau de rivières, sa topographie, sa couverture végétale, etc. Le débit  $S(t)$  est mesuré à l'exutoire du bassin versant et les précipitations  $E(t)$  sont enregistrées en un ou plusieurs points du bassin versant. Nous dirons que les précipitations  $E(t)$  représentent les "impulsions" que le système reçoit de l'extérieur et le débit  $S(t)$  sera la "réponse" du système réel aux impulsions reçues. Mise à part la géométrie du bassin versant et du réseau de rivières, les précipitations et le débit à l'exutoire sont les seuls éléments du système réel que nous connaissons. Dans ces conditions précaires nous avons *l'intention* ouvertement déclarée de prédire l'évolution du débit à l'exutoire à partir des seules mesures de précipitations.

Il va sans dire que, dans notre exemple, les relations déterministes entre les précipitations et le débit à l'exutoire du bassin versant sont admise a priori, mais sont extrêmement complexes. Elles sont influencées par la topographie exacte du bassin versant, par la répartition exacte de la végétation, par le champ des perméabilités dans les sols, par la répartition des intensités de pluies, etc. Moyennant quelques hypothèses simplificatrices, il serait certainement possible d'établir un schéma abstrait

déterministe du système réel, où des équations différentielles relierait les différents paramètres et variables mentionnés aux débits arrivant dans les rivières. L'utilisation d'un tel schéma exigerait, toutefois, des données dont nous ne disposons pas et, surtout, dont l'acquisition ne correspond pas à l'intention déclarée plus haut.

Renonçant à l'utilisation des schémas et modèles déterministes, nous devons nous tourner vers des techniques qui sont peut-être moins performantes, mais qui permettront d'utiliser les seules données dont nous disposons, c'est-à-dire les précipitations. Pour pouvoir réaliser l'intention préalablement déclarée, il faut examiner s'il existe une relation relativement simple qui relie *globalement* les précipitations  $E(t)$  aux débits  $S(t)$  à l'exutoire. Si la réponse est affirmative, le système réel peut être représenté, faute de mieux, par le **schéma abstrait** de la figure 1.

Dans ce schéma le système réel est symbolisé (ou représenté) par une *boîte noire* où la structure du système réel et les relations déterministes n'apparaissent pas du tout. La boîte noire ne contient, en fait, que la *fonction de transfert* abstraite  $i(t)$  qui permet de transformer les impulsion reçues par le système (précipitations  $E(t)$  ou *fonction d'entrée*) en réponse du système (débits à l'exutoire  $S(t)$  ou *fonction de sortie*). Cette transformation se fait à l'aide d'une *intégrale de convolution* et sera symbolisée par

$$S(t) = i(t) \star E(t) \equiv \int_0^t i(t - \tau) \cdot E(\tau) d\tau \quad (1)$$

où  $t$  est le temps et  $\tau$  est une variable d'intégration.

Dans cet exemple, la *fonction de transfert* correspond à l'hydrogramme unitaire, notion bien connue en hydrologie de surface. Il s'agit d'une fonction qui décrit la *réponse du système à une impulsion unitaire* ou, dans notre cas, à une "averse unitaire". C'est une *caractéristique globale* du système schématisé qu'il faut déterminer expérimentalement. Dans certaines conditions favorables, la connaissance de la fonction de transfert  $i(t)$  permet de calculer, donc de prévoir, la réponse  $S(t)$  du système pour n'importe quelle fonction d'entrée  $E(t)$ .

Deux de ces conditions sont particulièrement importantes: il s'agit de la *stationnarité* et de la *linéarité* de la fonction de transfert qu'il est indispensable de vérifier expérimentalement dans chaque système réel particulier.

1. La fonction de transfert est stationnaire si à une même fonction d'entrée correspond toujours une même fonction de sortie.
2. La fonction de transfert est linéaire si
  - à une entrée égale à  $\lambda$  fois l'impulsion unitaire correspond une sortie égale à  $\lambda$  fois la réponse à l'impulsion unitaire.
  - à une entrée égale à la somme de deux entrées "élémentaires" correspond une sortie égale à la somme des sorties obtenues pour chacune des entrées "élémentaires" séparément.

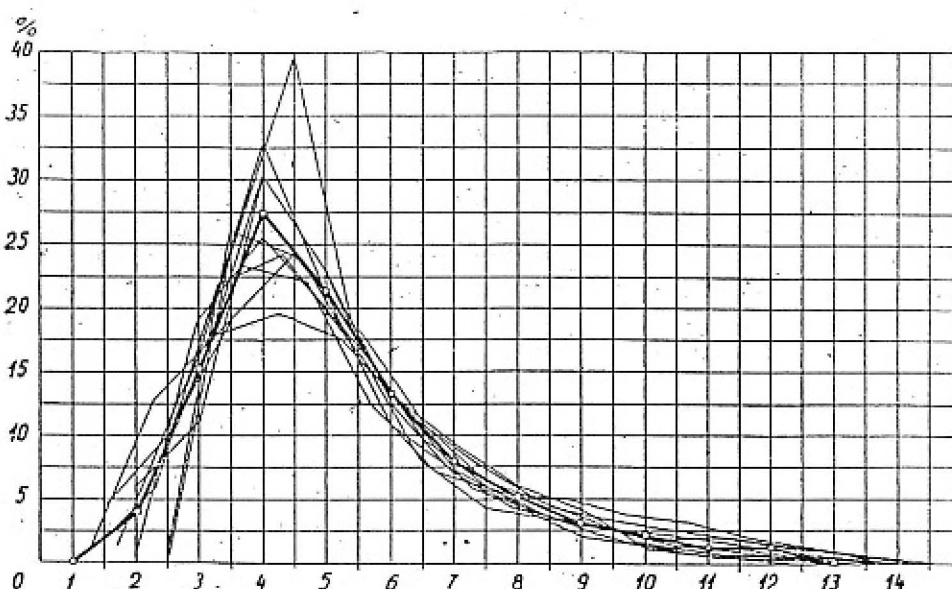


Figure 2. Hydrogramme unitaire moyen (ligne épaisse) construit à partir de 11 hydrogrammes unitaires expérimentaux (d'après NEMETH, 1954).

Si l'hydrogramme unitaire est stationnaire et linéaire, alors le schéma abstrait de la figure 1 représente parfaitement le *comportement global* du bassin versant et l'équation 1 peut être utilisée sans restriction pour prédire le débit à l'exutoire à partir des seules précipitations. C'est la situation idéale qui n'est pour ainsi dire jamais réalisée dans les systèmes naturels. En effet, dans un système aussi complexe qu'un bassin versant réel, la fonction de transfert ne sera ni tout à fait stationnaire, ni tout à fait linéaire et les hydrogrammes unitaires déterminés expérimentalement seront plus ou moins différents les uns des autres. Ces différences apparaissent clairement dans le diagramme de la figure 2 qui montre une fonction de transfert moyenne construite à partir de 11 hydrogrammes unitaires expérimentaux. La variabilité des hydrogrammes unitaires expérimentaux signifie simplement que le schéma abstrait de la figure 1 ne peut représenter, à l'aide d'une seule fonction de transfert, toute la complexité du système réel. En utilisant un seul hydrogramme unitaire "moyen" on commettra forcément une erreur et cette erreur doit être traduite en marge d'incertitude autour des débits simulés par le modèle à boîte noire.

Cette incertitude est inhérente à la simplicité de la méthode employée et, finalement, c'est l'utilisateur qui doit décider si les prévisions approximatives obtenues par le modèle lui conviennent ou non. La qualité d'un modèle à boîte noire dépendra toujours de la mesure dans laquelle la stationnarité et la linéarité de la fonction de transfert sont respectées dans le système réel simulé.

Soulignons que les diagrammes montrant la variabilité des fonctions de transfert expérimentales, comme par exemple dans la figure 2, sont d'une importance capitale pour évaluer la possibilité d'utiliser les modèles à boîte noire à la simulation de tel ou tel système réel particulier. Ils renseignent immédiatement l'utilisateur sur le "degré

de stationnarité" des fonctions de transfert expérimentales et ne laissent aucune illusion quant à l'exactitude des prévisions simulées. L'établissement de tels diagrammes devrait être une étape obligatoire dans le cadre de chaque étude particulière. La quantification de la variabilité des fonctions de transfert nous semble beaucoup plus importante que l'utilisation d'artifices de calcul pour "ajuster" les résultats du modèle aux observations.

### 2.3 Prédiction de la restitution d'un traceur à une source karstique. Application du schéma à boîte noire.

Si l'exemple précédent a permis d'illustrer la nature du schéma à boîte noire, notre véritable but consiste à prévoir la restitution d'un traceur (ou d'un polluant) à l'exutoire d'un réseau de drainage karstique, c'est-à-dire à une source karstique.

Comme il a été mentionné dans l'introduction, la complexité du transport de masse dans un aquifère karstique exigerait que ce problème soit abordé à l'aide des modèles déterministes qui existent et fonctionnent bel et bien actuellement. Malheureusement, on ne connaît, dans la plupart des cas, ni la géométrie du réseau karstique, ni les vitesses d'écoulement dans les drains et l'on doit renoncer à l'emploi d'un schéma de transport déterministe. Alors, faute de mieux, on peut utiliser le même schéma à boîte noire que précédemment. En effet, une fois construit, le schéma abstrait acquiert une certaine autonomie et devient indépendant du système réel qui était à l'origine de son établissement. Le schéma abstrait de la figure 1, par exemple, peut représenter plusieurs systèmes réels, de natures physiques très différentes, si les éléments du schéma sont interprétés différemment, de cas en cas. Il peut représenter notre problème si l'on introduit les changements suivants:

- Le bassin versant devient un aquifère karstique.
- Le réseau de rivières devient le réseau karstique très perméable.
- Les interfluves deviennent des volumes de calcaires fissurés peu perméables.
- L'exutoire du bassin versant sera la source karstique.
- La fonction d'entrée  $E(t)$  représente l'injection d'un traceur (ou d'un polluant) en un "point" du réseau karstique (par exemple au point  $A$  dans la figure 1).
- $i(t)$  est la fonction de transfert du traceur (ou du polluant) entre le point d'injection du traceur et la source karstique.
- Enfin, la fonction de sortie  $S(t)$  représente la courbe de restitution du traceur (ou du polluant) à la source karstique. Elle peut être calculée par l'intégrale de convolution de l'équation 1.

Les conditions de validité du schéma modifié et de l'équation 1 restent, bien sûr, inchangées: il faut que la stationnarité et la linéarité de la fonction de transfert  $i(t)$  soient respectées dans le système réel que le schéma abstrait est censé de représenter.

Par conséquent, avant de pouvoir utiliser l'équation 1 pour calculer la courbe de restitution d'un traceur, il faudrait répondre à une question particulièrement épineuse: comment les conditions de stationnarité et de linéarité de la fonction de transfert pourraient être satisfaites dans un système où le milieu est aussi hétérogène et le régime hydraulique est aussi variable que dans un aquifère karstique.

On comprend intuitivement (mais les schémas théoriques déterministes le confirment aussi) que la fonction de transfert d'un traceur (ou d'un polluant) sera influencée aussi bien par la position spatiale du point d'injection que par l'état hydrodynamique de l'aquifère karstique (hautes eaux ou basses eaux). Théoriquement elle ne sera stationnaire ni dans l'espace, ni dans le temps.

Ainsi, une fonction de transfert, déterminée par essai de traçage entre le point *A* et la source (voir figure 1), ne sera plus valable si l'on déplace le point d'injection au point *B*. En fait, on peut attacher une ou plusieurs fonctions de transfert à chaque point d'injection possible du système, c'est-à-dire on peut créer un ou plusieurs *champs de fonction de transfert* dans l'espace occupé par l'aquifère. C'est l'étude de la variabilité spatiale des fonctions de transfert expérimentales qui permettra de décider s'il est possible de définir une fonction de transfert "moyenne" pour l'aquifère ou, au contraire, s'il faut subdiviser le système réel en "unités", c'est-à-dire en régions où les fonctions de transfert sont à peu près semblables.

Il va sans dire que la "boîte noire" ne représentera plus l'aquifère dans son ensemble, mais seulement le transport de masse entre un point d'injection précis et l'exutoire du système, et pour un état hydrodynamique bien défini de la nappe. Cet "état hydrodynamique" devrait être défini sur l'hydrogramme des sources karstiques (crue, décrue, tarissement, importance des débits, etc.).

En principe, on ne pourrait définir aucune fonction de transfert "moyenne" utilisable partout et pour n'importe quel état hydrodynamique de l'aquifère, sauf dans le cas plutôt exceptionnel où les variabilités spatiale et temporelle des fonctions de transfert expérimentales demeurent faibles. La seule chance qui reste pour que l'on puisse considérer une fonction de transfert expérimentale comme raisonnablement stationnaire et linéaire consiste à l'utiliser toujours pour le même point d'injection et toujours pour le même état hydrodynamique, celui pour lequel elle a été déterminée. La confirmation de la stationnarité et de la linéarité par essais de traçage répétés sera nécessaire même dans ce cas.

Ces restrictions semblent particulièrement sévères, mais l'emploi du schéma à boîte noire pour les problèmes de transport de masse est à ce prix-là. En fait, les considérations qui précèdent sont plutôt théoriques, car nous connaissons peu de chose sur la variabilité réelle des fonctions de transfert expérimentales dans les aquifères karstiques. Les essais de traçage actuellement disponibles n'ont pas été systématiquement transformés en fonctions de transfert et ils ne sont pas comparables entre eux. *Il serait urgent de combler cette lacune car, finalement, les recommandations devraient se baser sur des résultats empiriques obtenus sur le terrain.*

Quoi qu'il en soit, la conséquence des considérations théoriques précédentes est grave, car elles réduisent considérablement les possibilités de prévoir la courbe de restitution d'un traceur ou d'un polluant à une source karstique.

En effet, l'utilisation de l'équation 1, donc du modèle à boîte noire, pour prévoir la restitution d'un polluant à une source karstique, et cela pour n'importe quel scénario de pollution accidentelle, est soumise aux conditions suivantes:

- On connaît le point d'injection du polluant (lieu de l'accident) et la fonction d'entrée  $E(t)$ .
- On connaît l'état hydrodynamique du système au moment de l'accident et cet état ne change pas considérablement pendant le transport vers l'exutoire.
- Il existe une fonction de transfert expérimentale  $i(t)$  pour ce point d'injection précis et pour cet état hydrodynamique précis du système.
- Dans ce cas, la fonction de sortie (restitution) peut être calculée par l'intégrale de convolution de l'équation 1:  $S(t) = \int_0^t i(t - \tau) \cdot E(\tau) d\tau$

Le tableau final est plutôt sombre, car on ne peut, évidemment, pas exiger que les pollutions accidentelles se produisent à tel ou tel endroit précis et à telle ou telle époque de l'année. Il est tout aussi impossible de déterminer les fonctions de transfert partout dans l'aquifère karstique et pour tous les états hydrodynamiques possibles de la nappe. Pour sortir de l'impasse deux directions d'études s'imposent immédiatement:

- 1 Identifier les régions à haut risque de pollution (routes, habitations, industrie) et concentrer les essais de traçage dans ces régions pour pouvoir étudier la variabilité réelle des fonctions de transfert expérimentales. Ce sont les études les plus urgentes, car les résultats expérimentaux permettraient, à la fois, de contrôler et de guider les développements plus théoriques.
- 2 Développer des méthodes permettant une interpolation acceptable des fonctions de transfert aussi bien dans l'espace (entre les points d'injection des essais de traçage) que dans le temps (entre les différents états hydrodynamiques de la nappe).

En attendant les résultats de ces études on peut toujours s'inspirer des rares fonctions de transfert actuellement disponibles, mais en explicitant clairement les incertitudes dont les prévisions simulées seront entachées. Ou alors, on peut renoncer à toute action.

Dans ce chapitre nous avons mis en évidence quelques problèmes généraux, mais importants, liés à l'emploi des modèles à boîte noire pour la simulation des systèmes naturels. Les chapitres suivants seront consacrés à la présentation de notions plus spécifiques, comme les fonctions de transfert ou l'intégrale de convolution.

### 3 Présentation des fonctions de transfert: la réponse impulsionnelle, la réponse indicielle et la réponse de référence.

#### 3.1 Remarques préliminaires.

Le terme "fonction de transfert" ("Übergangsfunktion") est considéré ici dans un sens large et quelque peu différent de la terminologie strictement définie. Nous l'utilisons comme un terme général qui désigne toute fonction permettant de transformer une fonction d'entrée  $E(t)$  en une fonction de sortie  $S(t)$  d'un système représenté par une boîte noire (voir symbole  $i(t)$  dans le schéma de la figure 1). Il peut y avoir plusieurs types de fonction de transfert dont certains sont particulièrement difficiles à déterminer expérimentalement:

- La réponse impulsionnelle est la réponse du système à une impulsion "instantanée" de 1 *Dirac* (voir plus bas). Elle doit être calculée par déconvolution, à partir de la courbe de restitution d'un essai de traçage.
- La réponse indicielle est la réponse du système à une fonction de saut unitaire (ou *Heaviside*). Elle pourrait être obtenue par une injection continue de très longue durée, mais pratiquement irréalisable.
- La "réponse de référence" est la réponse du système à une impulsion de référence, de durée et de forme arbitrairement fixées. Elle peut être obtenue à partir de la courbe de restitution de n'importe quel essai de traçage réussi.

Ce chapitre est consacré à leur présentation, en mentionnant les possibilités ou les restrictions que leur utilisation implique.

#### 3.2 La réponse impulsionnelle.

La réponse impulsionnelle  $i(t)$  est la réponse du système à une impulsion unitaire de 1 *Dirac*.

Si cette définition est simple, la notion de l'impulsion unitaire l'est beaucoup moins. Admettons, en effet, que l'impulsion unitaire représente l'injection de 1 *kg* de traceur dans le système karstique. Avec un débit massique de  $E_1 = 1 \text{ kg/heure}$  la durée de l'injection sera  $\Delta t_1 = 1 \text{ heure}$  et la courbe de restitution du traceur à la source karstique représentera la fonction de transfert pour cette fonction d'entrée.

La même quantité pourrait être injectée, par exemple, avec un débit massique de  $E_2 = 5 \text{ kg/heure}$  pendant  $\Delta t_2 = 0.2 \text{ heure}$  ou encore avec un débit massique de  $E_3 = 10 \text{ kg/heure}$  pendant  $\Delta t_3 = 0.1 \text{ heure}$ . La réponse du système sera chaque fois différente, donc la fonction de transfert dépendra de la forme, plus particulièrement de la durée  $\Delta t$  des impulsions (voir figure 3). Soulignons que l'intégrale des fonctions  $E_1$ ,

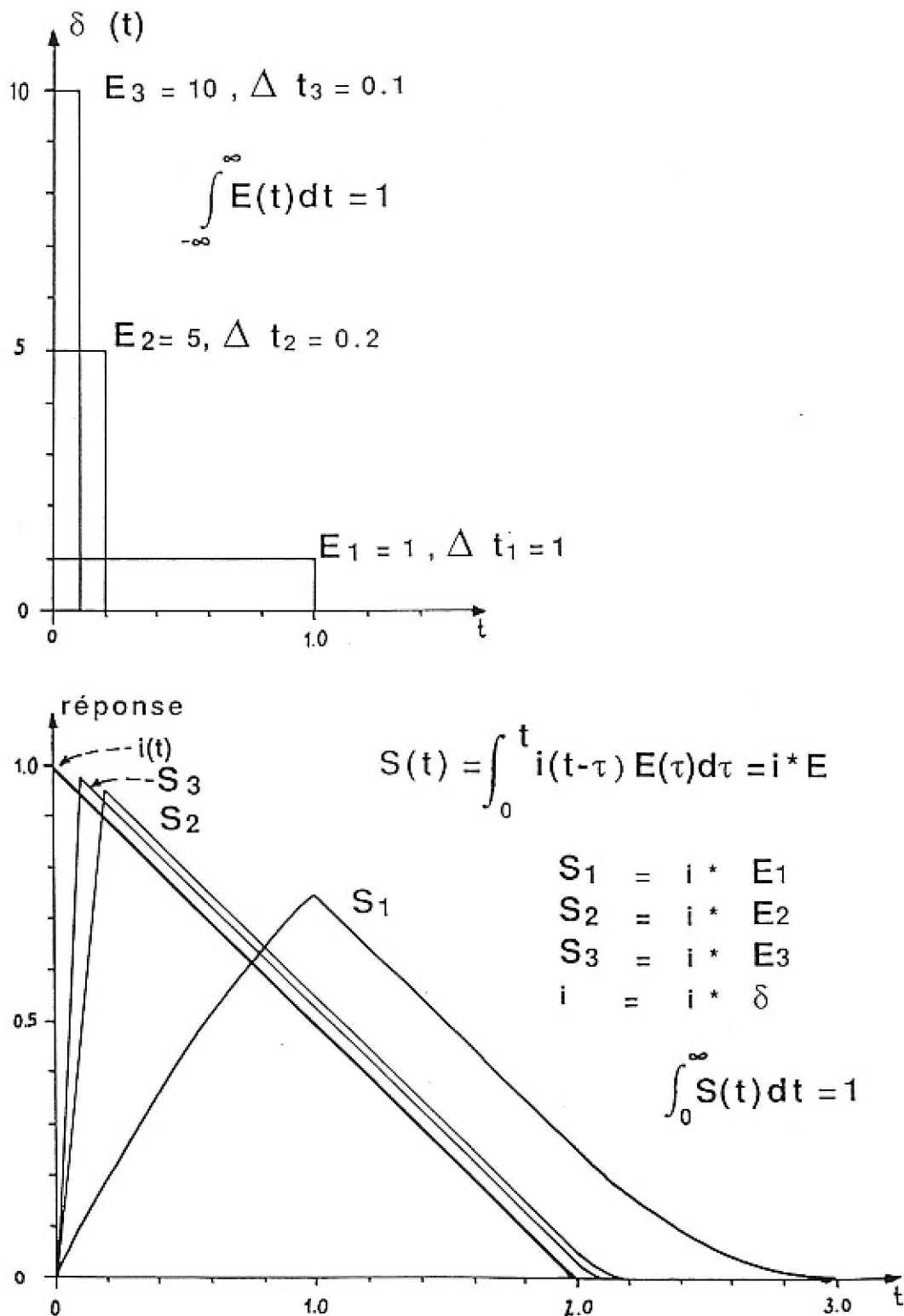


Figure 3: Réponses correspondant à des "impulsions unitaires" de formes différentes.

$E_2$  et  $E_3$  (c'est-à-dire la masse totale injectée) reste toujours égale à 1 quelle que soit la durée  $\Delta t$  de ces impulsions rectangulaires:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(t) dt = 1$$

Continuons à injecter toujours 1 kg de traceur tout en diminuant la durée de l'injection. Si l'exigence de l'intégrale unitaire est maintenue et la durée de l'injection  $\Delta t$  tend vers zéro, on obtient une fonction abstraite appelée *Dirac* ou  $\delta(t)$  qui représente une impulsion, de durée infiniment petite et de débit massique infiniment grand, au moment  $t = a$ .

Formellement la fonction de *Dirac* est définie par les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} \delta(t - a) &= 0 && \text{si } t \neq a \\ \delta(t - a) &= \infty && \text{si } t = a \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= 1 \end{aligned}$$

Par définition l'impulsion unitaire est égale à 1 *Dirac* et la réponse du système à une impulsion de 1 *Dirac* est appelée *réponse impulsionnelle*  $i(t)$ .

Les diagrammes de la figure 3 montrent comment la fonction de sortie  $S(t)$  tend vers la réponse impulsionnelle  $i(t)$  quand la fonction d'entrée  $E(t)$  tend vers la fonction de Dirac  $\delta(t)$ . L'intégrale sous la courbe  $i(t)$  doit être, évidemment, égale à 1, c'est-à-dire la somme des sorties doit être égale à la somme des entrées.

Il va sans dire que dans la pratique on ne peut pas produire une impulsion  $\delta(t)$  de 1 *Dirac* lors des essais de traçage et il n'est même pas sûr que la fonction d'entrée produite  $E(t)$  soit de forme rectangulaire et de courte durée. Cela signifie que la fonction de sortie  $S(t)$  observée à une source karstique après un essai de traçage ne pourrait pas être assimilée sans autre à la réponse impulsionnelle proprement dite du système. Cette dernière devrait être calculée à partir de la relation  $S(t) = i(t) \star E(t)$  et en utilisant l'opération inverse de la convolution, c'est-à-dire en déconvoluant la fonction de sortie observée  $S(t)$  par la fonction d'entrée  $E(t)$ , supposée connue et de durée quelconque.

Pour autant que les résultats de la déconvolution soient raisonnables, la réponse impulsionnelle obtenue peut être utilisée pour calculer la fonction de sortie  $S(t)$  à l'aide de l'équation 1 pour n'importe quel type de fonction d'entrée  $E(t)$ , quelles que soient sa forme et sa durée.

$$S(t) = \int_0^t i(t - \tau) \cdot E(\tau) d\tau \quad (1)$$

où  $t$  est le temps et  $\tau$  est une variable d'intégration.

L'avantage principal et indéniable de la réponse impulsionnelle est que son emploi n'implique aucune restriction sur les fonctions d'entrée utilisées pour la simulation.

Un autre avantage, tout aussi indéniable pour l'hydrogéologue, réside dans le fait que les réponses impulsionnelles obtenues par déconvolution sont directement comparables d'un point d'injection à l'autre ou d'un aquifère karstique à l'autre, puisqu'elles représentent, toutes, la réponse du système à une impulsion "normalisée" à 1 *Dirac*. L'étude de la variabilité des réponses impulsionnelles pour un grand nombre d'essais de traçage contribuerait certainement à une meilleure compréhension des phénomènes de transport dans le réseau karstique. Il faut souligner, toutefois, que la déconvolution des courbes de restitution expérimentales présente de très grandes difficultés qui seront analysées ultérieurement.

### 3.3 La réponse indicielle.

La réponse indicielle, désignée  $h(t)$ , est la réponse du système à une fonction de "saut" unitaire  $H(t)$ , appelée aussi fonction de Heaviside, qui satisfait aux conditions suivantes:

$$\begin{aligned} H(t-a) &= 0 & \text{si } t < a \\ H(t-a) &= 1 & \text{si } t > a \end{aligned}$$

On peut l'imaginer comme une injection continue de débit massique égal à 1 *kg/heure* qui commence au moment  $t = a$  et dure "assez longtemps" ( $t \rightarrow \infty$ ) pour que la concentration à la sortie du système se stabilise. Il est utile de considérer  $H(t)$  comme l'intégrale de la fonction de Dirac et de considérer  $\delta(t)$  comme la dérivée de  $H(t)$ . La fonction  $H(t)$  est souvent utilisée pour définir des fonctions d'entrée "en escalier" ou des impulsions rectangulaires. Par exemple

$$E(t) = H(t-a) - H(t-b)$$

représente une impulsion rectangulaire entre les moments  $t = a$  et  $t = b$ .

La réponse du système à une fonction d'entrée, de forme et de durée quelconque, sera donnée par

$$S(t) = E(0) \cdot h(t) + \int_0^t \frac{d}{dt} E(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau \quad (2)$$

Il s'agit de l'intégrale de convolution de la réponse indicielle et de la dérivée de la fonction d'entrée par rapport au temps.

Il va sans dire que la fonction de sortie obtenue sera exactement la même que celle calculée à l'aide de la réponse impulsionnelle et en utilisant l'équation 1. On peut donner la préférence à l'équation 1 ou à l'équation 2 (la dérivée de la fonction d'entrée pourrait être, par exemple, beaucoup plus simple que la fonction d'entrée elle-même), car le passage de la réponse impulsionnelle  $i(t)$  à la réponse indicielle  $h(t)$  est très facile,

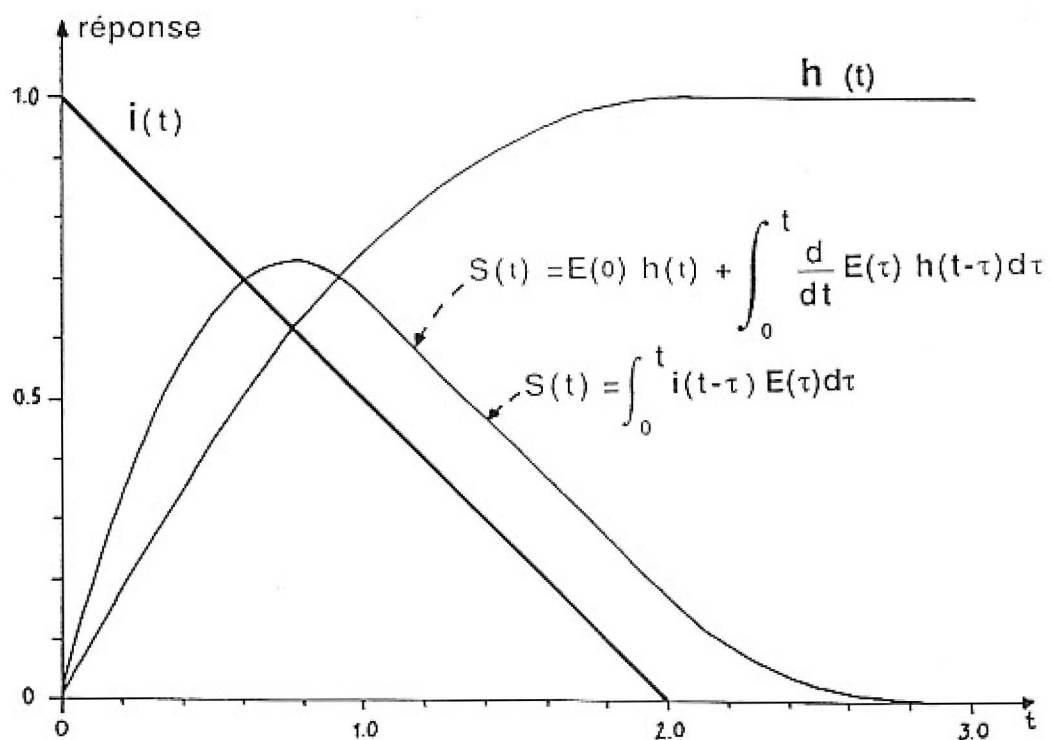
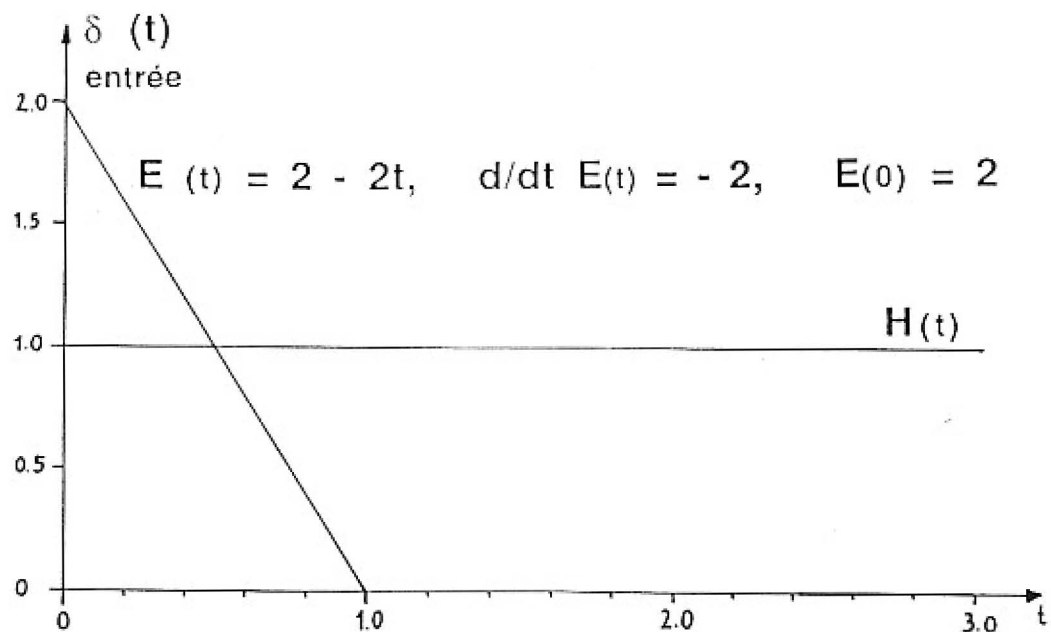


Figure 4: Réponse impulsionnelle  $i(t)$  et réponse indicielle  $h(t)$  pour un système théorique. La réponse  $S(t)$  du système à une impulsion triangulaire peut jouer le rôle de "réponse de référence".

tout comme le passage inverse:

$$h(t) = \int_0^t i(t-\tau) \cdot H(\tau) d\tau$$

$$i(t) = h(t) \text{ déconvoluée par } H(t)$$

où  $H(t)$  est la fonction de saut unitaire. Autrement dit,  $h(t)$  est obtenue en convoluant la réponse impulsionnelle connue avec la fonction de saut unitaire et  $i(t)$  est obtenue en déconvoluant la réponse indicielle connue par la même fonction de saut unitaire. En fait, on peut démontrer que la réponse impulsionnelle est la dérivée de la réponse indicielle par rapport au temps:  $i(t) = dh(t)/dt$ .

Ces notions et relations sont illustrées par la figure 4 où nous avons représenté, pour un système théorique, la réponse impulsionnelle  $i(t)$ , la réponse indicielle  $h(t)$  correspondante, ainsi que la fonction de sortie  $S(t)$  engendrée par une impulsion triangulaire, de durée  $\Delta t = 1$ . Il s'agit d'une fonction d'entrée variable dans le temps dont l'équation et la dérivée de l'équation sont données par

$$E(t) = 2 - 2 \cdot t \quad \text{dans l'intervalle } 0 \leq t \leq 1$$

$$\frac{d}{dt}E(t) = -2 \quad \text{et } E(0) = 2$$

On vérifie facilement que les équations 1 et 2 donnent exactement la même fonction de sortie.

Soulignons que dans un aquifère karstique il est très difficile de déterminer la réponse indicielle  $h(t)$  expérimentalement, par essai de traçage. Non seulement à cause des difficultés pratiques liées à la réalisation de l'injection continue de longue durée, mais aussi et surtout à cause de l'impossibilité de satisfaire à la condition de stationnarité pendant un temps relativement long. Cela signifie que dans les aquifères karstiques  $h(t)$  devrait être calculée presque toujours à partir de la réponse impulsionnelle  $i(t)$ , pour autant que cette dernière puisse être obtenue par déconvolution de la courbe de restitution d'un essai de courte durée. Précisons que si la réponse indicielle et l'équation 2 ne sont pas utilisées dans les modèles numériques présentés dans ce rapport, leur signification théorique peut contribuer à ouvrir de nouvelles voies dans l'analyse des essais de traçage et dans la recherche indirecte des réponses impulsionnelles.

### 3.4 La réponse de référence.

Nous définissons la **réponse de référence**  $r(t)$  comme la réponse du système à une impulsion de référence, de débit massique  $E_r(t)$  et de durée de référence  $\Delta t_r$ , arbitrairement fixée lors de l'essai de traçage.

La réponse  $S(t)$  à l'impulsion triangulaire  $E(t)$  dans la figure 4, par exemple, pourrait être considérée comme une réponse de référence. En principe, la courbe de restitution de chaque essai de traçage réussi peut être transformée en réponse de référence utilisable pour des simulations ultérieures. *L'impulsion  $E_r(t)$  n'étant pas égale à 1 Dirac,*

$r(t)$  représente déjà le résultat d'une convolution (que le système a "exécutée" lors du transport vers l'exutoire) et ne devrait pas être confondue avec la réponse impulsionnelle  $i(t)$  inconnue du système, même si de temps en temps on la désigne ainsi (dans les Parties 2 et 3 du rapport, par exemple). Le terme "réponse de référence" est un néologisme et nous l'utilisons faute de mieux, tout comme la fonction elle-même, d'ailleurs.

L'emploi de la fonction  $r(t)$  s'impose uniquement dans le cas où la détermination de la réponse impulsionnelle  $i(t)$  s'avère impossible par la déconvolution simple des courbes de restitution expérimentales. De tels cas se présentent, malheureusement, très souvent dans la pratique, indiquant par là que les renseignements sur la fonction de sortie ou sur la fonction d'entrée sont erronés, ou encore les conditions de stationnarité et de linéarité n'étaient pas tout à fait respectées pendant l'essai.

Puisque les relations entre éléments du schéma abstrait de la figure 1 ne sont pas satisfaites exactement par les données empiriques dont on dispose, il faudrait se contenter d'une fonction de transfert approximative dans le modèle numérique. L'utilisation d'une telle fonction de transfert pour simuler la courbe de restitution d'un polluant à une source karstique ne pourrait donner, évidemment, que des résultats et des prévisions approximatifs. Toutefois, une estimation, même grossière, vaut mieux que pas d'estimation du tout. L'important est d'être conscient des incertitudes inhérentes à la méthode et de ne pas vouloir donner aux résultats du modèle une signification qu'ils n'ont pas.

Etant donné que les résultats d'un essai de traçage réussi peuvent être facilement transformés en une réponse de référence  $r(t)$ , c'est cette dernière qui jouera le rôle de fonction de transfert approximative et qui sera introduite dans le modèle numérique, à la place de la réponse impulsionnelle. L'utilisation de la réponse de référence à la simulation des courbes de restitution sera soumise, toutefois, à quelques restrictions et ces restrictions découlent directement des conditions de linéarité énoncées plus haut (voir page 5, paragraphe 2.1):

- à une entrée égale à  $\lambda$  fois l'entrée de référence correspondra une sortie égale à  $\lambda$  fois la réponse de référence.
- à une entrée égale à la somme de deux entrées de référence (addition des durées!!) correspondra une sortie égale à la somme des sorties obtenues pour chacune des entrées de référence séparément, c'est-à-dire à la somme des réponses de référence.

La condition de linéarité exprime simplement le principe de superposition des solutions élémentaires et ce principe est illustré d'une façon compréhensible par les diagrammes de la figure 5. Il apparaît clairement que les restrictions concernent surtout la discrétisation des fonctions d'entrée  $E(t)$  que l'on aimerait introduire dans le modèle. Admettons, en effet, que l'on désire simuler la réponse à une fonction d'entrée  $E(t)$  compliquée, fortement variable dans le temps. Si l'on veut obtenir la fonction de sortie  $S(t)$  comme la somme des réponses de référence pondérées  $\lambda_k \cdot r(t) = S_k(t)$ , alors il faut

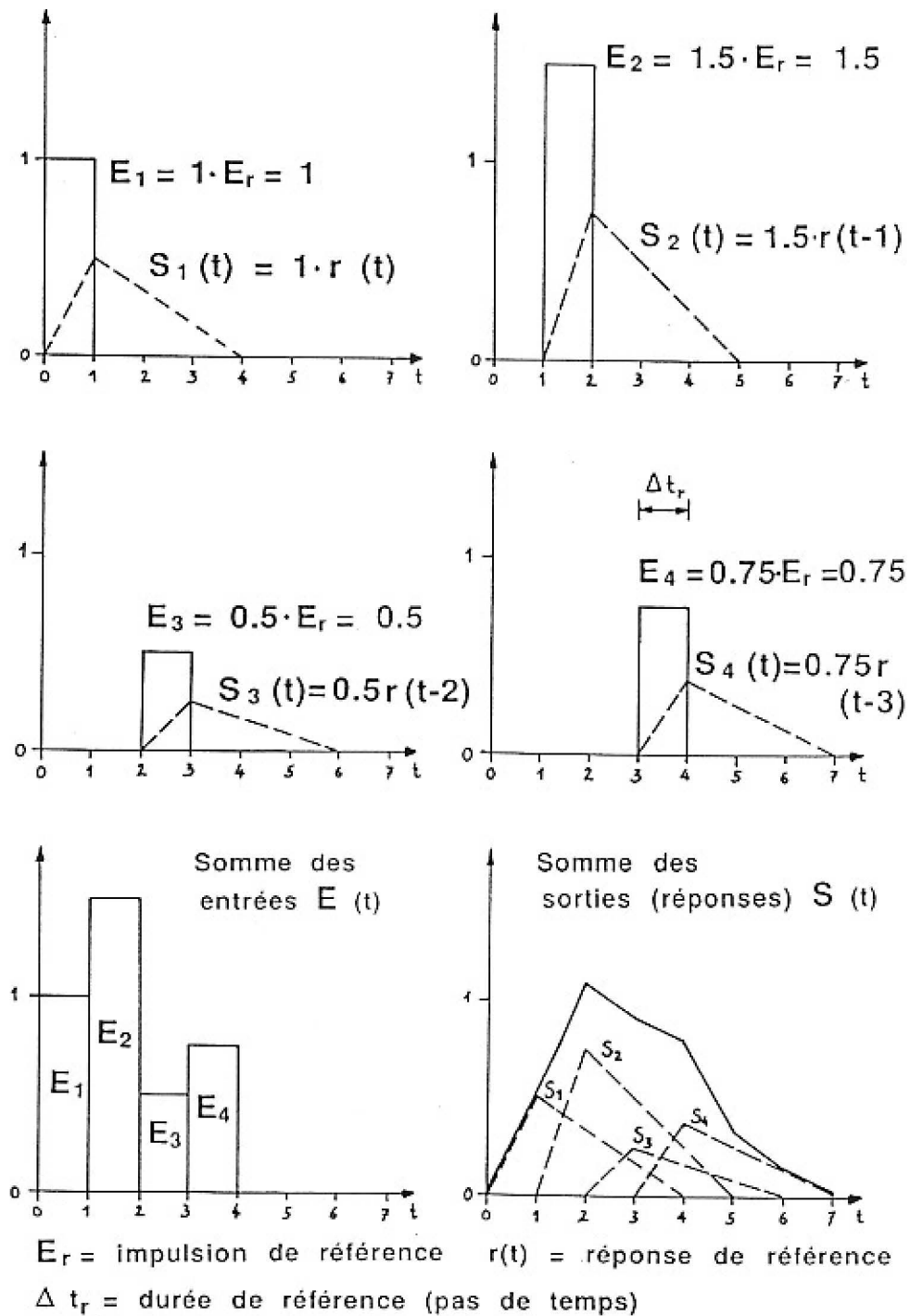


Figure 5: Utilisation de la "réponse de référence" pour simuler la fonction de sortie correspondant à une fonction d'entrée complexe.

représenter  $E(t)$  comme la somme des entrées de référence pondérées  $\lambda_k \cdot E_r(t) = E_k(t)$ , chaque entrée "élémentaire" étant de durée  $\Delta t_r$  et de la même forme que  $E_r(t)$ .

Cela signifie que, pour les calculs numériques, la discrétisation de la fonction d'entrée  $E(t)$  ne pourrait pas être choisie librement par l'utilisateur, mais doit se faire, *obligatoirement*, avec un pas de temps égale à la durée de référence  $\Delta t_r$  (défini lors de l'essai de traçage) et en juxtaposant des impulsions ayant la même forme que  $E_r(t)$ .

Si l'impulsion de référence  $E_r(t)$  est une impulsion rectangulaire, la discrétisation d'une fonction d'entrée quelconque, même fortement variable dans le temps, ne pose pas de véritable problème. On obtiendra une fonction en escalier, chaque "marche" de l'escalier étant une impulsion de référence rectangulaire  $E_r(t)$ , de durée  $\Delta t_r$  et qui est multipliée par un facteur  $\lambda_k$  (voir figure 5). La simulation d'une injection de longue durée à débit massique constant ne pose aucun problème: il suffit de sommer les réponses de référence décalées d'un pas de temps  $\Delta t_r$  les unes par rapport aux autres.

Il en va tout autrement si la réponse de référence choisie a été engendrée par une impulsion triangulaire, comme la fonction  $S(t) \rightarrow r(t)$  dans la figure 4, par exemple. La fonction d'entrée triangulaire de la figure 4 deviendra automatiquement l'impulsion de référence  $E_r(t)$ , avec  $\Delta t_r = 1$  et  $\int E_r(t) dt = 1$  (la masse totale injectée est égale à 1). Admettons que l'on veuille utiliser cette réponse de référence pour simuler l'effet d'une injection continue à débit massique constant et de durée  $3\Delta t_r = 3$  (fonction d'entrée  $E1(t)$  dans la figure 6). Si l'on connaissait la réponse impulsionnelle  $i(t)$  de la figure 4, on pourrait calculer la fonction de sortie exacte ( $S1(t)$ ) par  $\int_0^t i(t - \tau) \cdot E1(\tau) d\tau$  et les calculs numériques pourraient être exécutés avec la discrétisation (pas de temps) choisie par l'utilisateur, sans restriction.

Malheureusement, on ne connaît que la réponse de référence  $r(t)$  engendrée par l'impulsion triangulaire  $E_r(t)$ . Cela signifie que la fonction d'entrée  $E1(t)$  doit être discrétisée en observant les restrictions définies plus haut, c'est-à-dire en juxtaposant trois impulsions triangulaires, de durée  $\Delta t_r = 1$  chacune (voir figure 6). On obtient ainsi la fonction d'entrée discrétisée  $E2(t)$ , bien différente de  $E1(t)$  dont on voulait simuler les effets. A première vue, il peut même paraître déraisonnable de vouloir utiliser  $E2(t)$  à la place de  $E1(t)$ .

La réponse  $S2(t)$  du système à la fonction d'entrée  $E2(t)$  se calcule, cette fois, facilement: il suffit de sommer les réponses de référence  $r(t)$  décalées d'un pas de temps les unes par rapport aux autres. La figure 6 montre que la fonction de sortie  $S2(t)$  ne correspond pas à la solution exacte du problème posé, bien sûr, mais les écarts entre  $S2(t)$  et  $S1(t)$  sont tout de même bien moins grands que ne laissait supposer l'irrégularité de la fonction d'entrée discrétisée  $E2(t)$ . Somme toute, la fonction de sortie simulée  $S2(t)$  représente, en première approximation, une estimation acceptable de la réaction du système. Cela justifie l'utilisation des réponses de références  $r(t)$  comme fonction de transfert (faute de mieux!), à condition que l'on soit conscient des restrictions énumérées plus haut et que l'on comprenne la différence fondamentale entre

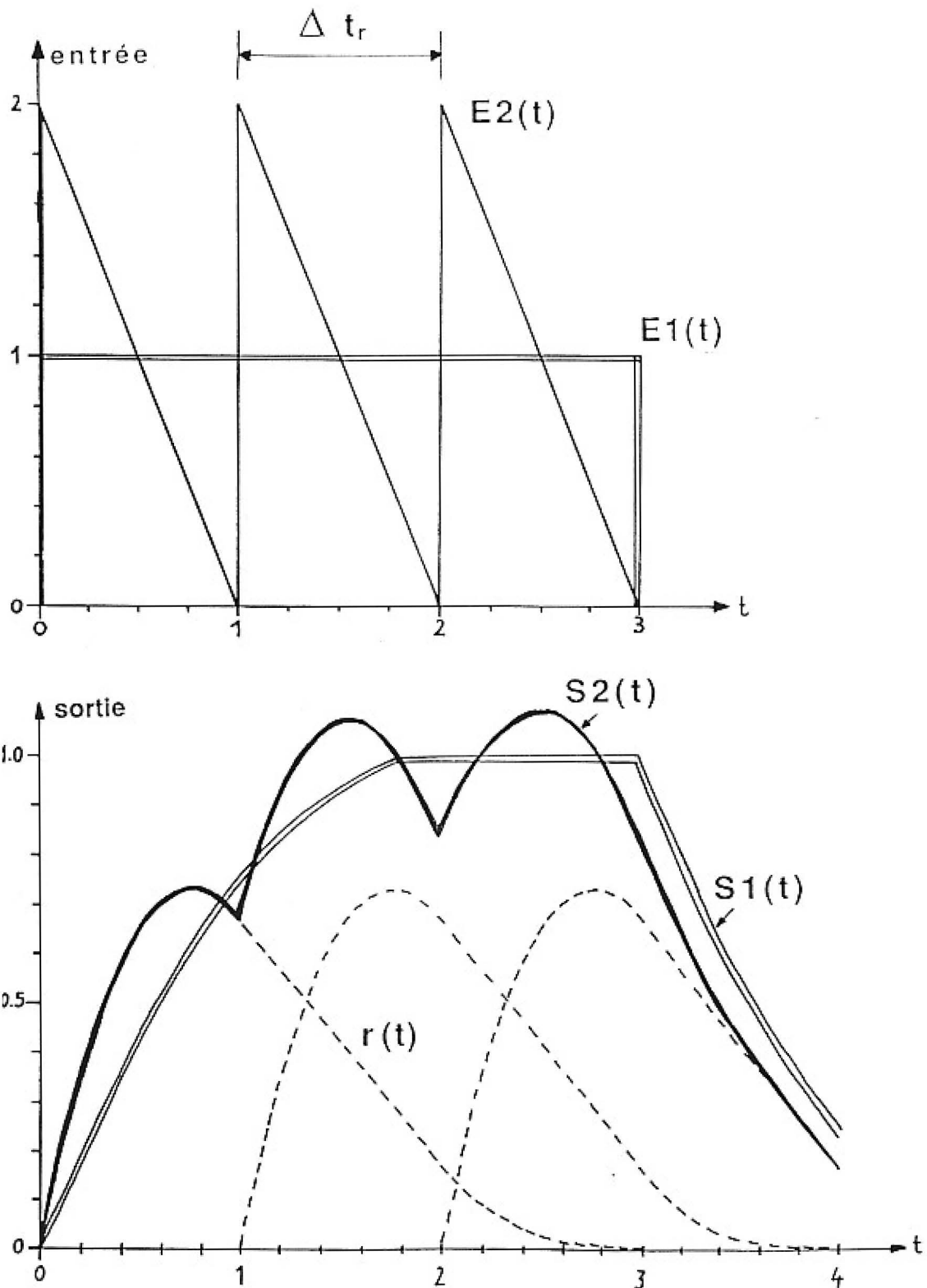


Figure 6: Effet d'une fonction d'entrée obtenue par la juxtaposition d'impulsions de référence non rectangulaires.

réponse impulsionnelle  $i(t)$  et réponse de référence  $r(t)$ . Dans la Quatrième Partie du rapport le lecteur trouvera, d'ailleurs, un exemple réel fort intéressant, où l'effet simulé d'une injection de "longue durée" est comparé à la courbe de restitution effectivement observée à une source.

L'exemple de la figure 6 est instructif à plus d'un titre et nous y reviendrons encore souvent dans les chapitres ultérieurs. Pour le moment citons seulement le cas où l'utilisateur ne connaît pas exactement la forme de l'impulsion de référence  $E_r(t)$ . Il considère que la réponse de référence  $r(t)$  a été engendrée par une impulsion rectangulaire "équivalente" ( $\Delta t_r = 1$ , masse totale injectée = 1) et non par une impulsion triangulaire, variable dans le temps. En juxtaposant trois impulsion rectangulaires il peut, cette fois, parfaitement représenter la fonction d'entrée  $E1(t)$  dans la figure 6, mais cette exactitude est toute illusoire. En effet, en sommant les trois réponses de référence dans la figure 6 on obtient de nouveau la fonction  $S2(t)$  qui représentera toujours, qu'on le veuille ou non, la réponse à trois impulsions triangulaires juxtaposées. Cela signifie que pour les besoins du calcul numérique on pourrait toujours remplacer la forme exacte des impulsions de référence  $E_r(t)$  par des impulsions rectangulaires "équivalentes", mais les résultats calculés correspondront toujours à la forme réelle (et très souvent inconnue) des impulsion de référence.

Pour faciliter les calculs numériques, on a l'habitude de discrétiser aussi la réponse de référence  $r(t)$ , en utilisant le même pas de temps  $\Delta t_r$  que pour la discrétisation de la fonction d'entrée (voir les exemples numériques dans la Deuxième Partie du rapport).

Etant donné que le temps peut, ainsi, être "mesuré" en unités de durée de référence  $\Delta t_r$ , la fonction de sortie  $S(t)$  sera calculée, pour chacun des  $N$  pas de temps, par une des formes discrétisées de l'intégrale de convolution, c'est-à-dire par simple sommation:

$$S(j) = \sum_{k=0}^j r(j-k) \cdot E(k) \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, N \quad (3)$$

Le temps "réel" est facilement retrouvé ensuite à la fin de chaque intervalle de temps par  $t = (j + 1) \cdot \Delta t_r$ .

Dans les figures 4, 5 et 6 nous avons utilisé des fonctions d'entrée dont la durée était longue par rapport à la durée de la restitution, le but étant de montrer la différence entre réponse impulsionnelle et réponse de référence. La figure 3 montre clairement que si la durée de la fonction d'entrée est faible par rapport à la durée de la restitution, la réponse de référence normée (surface sous la courbe de restitution étant normée à 1) diffère peu de la réponse impulsionnelle. Dans ce cas, surtout si la déconvolution de la courbe de restitution présente des difficultés (oscillations, distorsion), on peut utiliser la réponse de référence normée à la place de la réponse impulsionnelle "exacte" (voir aussi DOERFLINGER 1996).

## 4 Convolution, déconvolution.

### 4.1 Remarques préliminaires.

Le principe de la convolution a déjà été implicitement présenté au paragraphe 3.4 et dans les figures 5 et 6, à propos de l'utilisation des réponses de référence. Il n'exprime rien d'autre que la superposition des "solutions élémentaires" correspondant aux "entrées élémentaires". Dans la figure 5, par exemple, la fonction d'entrée globale est subdivisée en quatre entrées élémentaires  $E1$ ,  $E2$ ,  $E3$  et  $E4$ , de durée  $\Delta t_r$  chacune. A ces entrées élémentaires correspondent quatre réponses ou sorties élémentaires  $S1$ ,  $S2$ ,  $S3$  et  $S4$ . Pour trouver la valeur de la fonction de sortie globale au moment  $t = 2$ , on somme les valeurs des sorties élémentaires que l'on trouve sur la verticale correspondante à  $t = 2$  (voir figure 5f, en bas, à droite). On comprend aisément que si  $\Delta t_r$  tend vers zéro, les sorties élémentaires tendent vers des réponses impulsionnelles pondérées. Il y aura une infinité d'entrées élémentaires et une infinité de sorties élémentaires, c'est-à-dire que de la sommation des valeurs discrètes indiquée par l'équation 3, il faut passer à l'intégrale de fonctions, telle qu'elle est définie dans l'équation 1.

La convolution numérique des fonctions discrétisées, c'est-à-dire approchées par des fonctions en escalier, est abondamment expliquée dans la Deuxième Partie du rapport par Y. ROSSIER. Les calculs numériques sont illustrés par des exemples simples que le lecteur n'aura aucune difficulté à exécuter lui-même et nous ne voulons pas répéter ces démonstrations ici.

Par contre, nous aimerions *apporter quelques précisions sur les équations 1 et 3 à l'intention des "naturalistes"*. En effet, si les diagrammes de la figure 5 montrent le principe de la convolution, ils ne visualisent pas vraiment les fonctions et opérations contenues dans les équations 1 et 3. On cherchera en vain, dans ces équations, les sorties élémentaires comme  $S1$ ,  $S2$ ,  $S3$  et  $S4$  dans la figure 5, par exemple. Elles n'y apparaissent pas, car elles ne sont jamais complètement calculées. Il est, en effet, inutile de s'encombrer d'une longue liste contenant toutes les valeurs de toutes les "sorties élémentaires", quand il faut en sommer quelques unes seulement, celles qui se trouvent sur la même "verticale" (une par sortie élémentaire!). Inversement, on chercherait en vain dans les figures 5 et 6 la fonction  $r(j - k)$ , telle qu'elle apparaît dans la équation 3. Et surtout, on aurait de la peine à répondre à une question pourtant légitime: comment représenter sur les diagrammes de ce type l'intégrale de convolution (telle qu'elle apparaît dans l'équation 1) d'une fonction d'entrée analytique et non discrétisée avec une réponse impulsionnelle analytique et non discrétisée? Comment pourrait-on représenter la somme d'une infinité de sorties élémentaires sur un diagramme comme celui de la figure 5f?

Puisque les diagrammes habituellement présentés ne donnent pas une véritable visualisation graphique des équations 1 et 3, ces dernières passent pour être "très abstraites", c'est-à-dire peu compréhensibles pour les naturalistes. Dans ce qui suit nous allons expliciter les fonctions et opérations telles qu'elles apparaissent effectivement dans les équations 1 et 3.

## 4.2 L'intégrale de convolution.

L'intégrale de convolution, telle qu'elle se présente dans l'équation 1, n'est pas toujours facile à comprendre pour les naturalistes. Explicitons les différents termes qui s'y trouvent.

$$S(t) = i(t) * E(t) \equiv \int_0^t i(t - \tau) \cdot E(\tau) d\tau \quad (1)$$

où  $S(t)$ ,  $E(t)$  et  $i(t)$  sont la fonction de sortie, la fonction d'entrée et la réponse impulsionnelle (sensu stricto). Dans cette expression  $t$  est le temps et  $\tau$  est une variable d'intégration qui a aussi la dimension d'un temps.

En fait,  $t$  et  $\tau$  désignent tous les deux le temps, mais pendant que  $\tau$  parcourt l'intervalle  $[0, t]$  où il faut intégrer, la valeur de  $t$  reste fixée, constante. La valeur de l'intégrale définie sur l'intervalle  $[0, t]$  sera la valeur  $S(t)$  de la fonction de sortie au moment  $t$ .

Maintenant on peut augmenter le temps d'une quantité  $\Delta t$ ,  $\tau$  va parcourir le nouvel intervalle d'intégration  $[0, (t + \Delta t)]$ , la valeur de l'intégrale définie sera attribuée à  $S(t + \Delta t)$  et ainsi de suite. L'emploi de deux variables pour désigner le temps est, donc, pleinement justifié, car pendant que  $t$  croît d'une façon monotone,  $\tau$  fait des "va-et-vient" sur les intervalles d'intégration.

L'expression que nous devons intégrer sur l'intervalle  $[0, t]$  est le produit de deux fonctions:  $i(t - \tau)$  et  $E(\tau)$ .  $E(\tau)$  est la fonction d'entrée et la position de son origine est fixe sur l'axe des temps. La fonction  $i(t - \tau)$  correspond à la réponse impulsionnelle dont l'origine est translatée au point  $t$  et qui est "retournée" par rapport à un axe de symétrie vertical passant par le point  $t$  (voir figure 7c). De cette façon on est assuré qu'une valeur de  $E(\tau)$  et une valeur bien définie de  $i(t - \tau)$  qui doit la multiplier, se trouvent effectivement "face à face", c'est-à-dire qu'elles occupent le même emplacement sur l'axe des temps. Le produit  $i(t - \tau) \cdot E(\tau)$  des deux fonctions peut, ainsi, être facilement intégré sur le domaine où toutes les deux sont différentes de zéro. Si le temps augmente d'une quantité  $\Delta t$ , la réponse impulsionnelle "retournée" est translatée au point  $(t + \Delta t)$ , le produit  $i((t + \Delta t) - \tau) \cdot E(\tau)$  des deux fonctions est intégré sur le nouveau domaine commun et ainsi de suite.

Tout cela apparaît très clairement sur les diagrammes de la figure 7 où nous présentons un exemple simple: il s'agit de calculer la fonction de sortie  $S1$  dans la figure 3 (voir aussi paragraphe 3.2) en appliquant l'intégrale de convolution de l'équation 1. La réponse impulsionnelle, reprise de la figure 3, est représentée sur le diagramme 7a:

$$i(\tau) = 1 - 0.5 \tau \quad \text{dans l'intervalle} \quad 0 \leq \tau \leq 2$$

La figure 7b montre que la fonction  $i(\tau - t)$ , où  $t$  est considéré comme constant pendant que  $\tau$  varie, représente la même réponse impulsionnelle, mais translatée au point  $t$ . Le diagramme 7c montre, enfin, ce qui nous intéresse vraiment: l'allure de la fonction  $i(t - \tau)$ . C'est toujours la réponse impulsionnelle, translatée au point  $t$  sur l'axe des temps

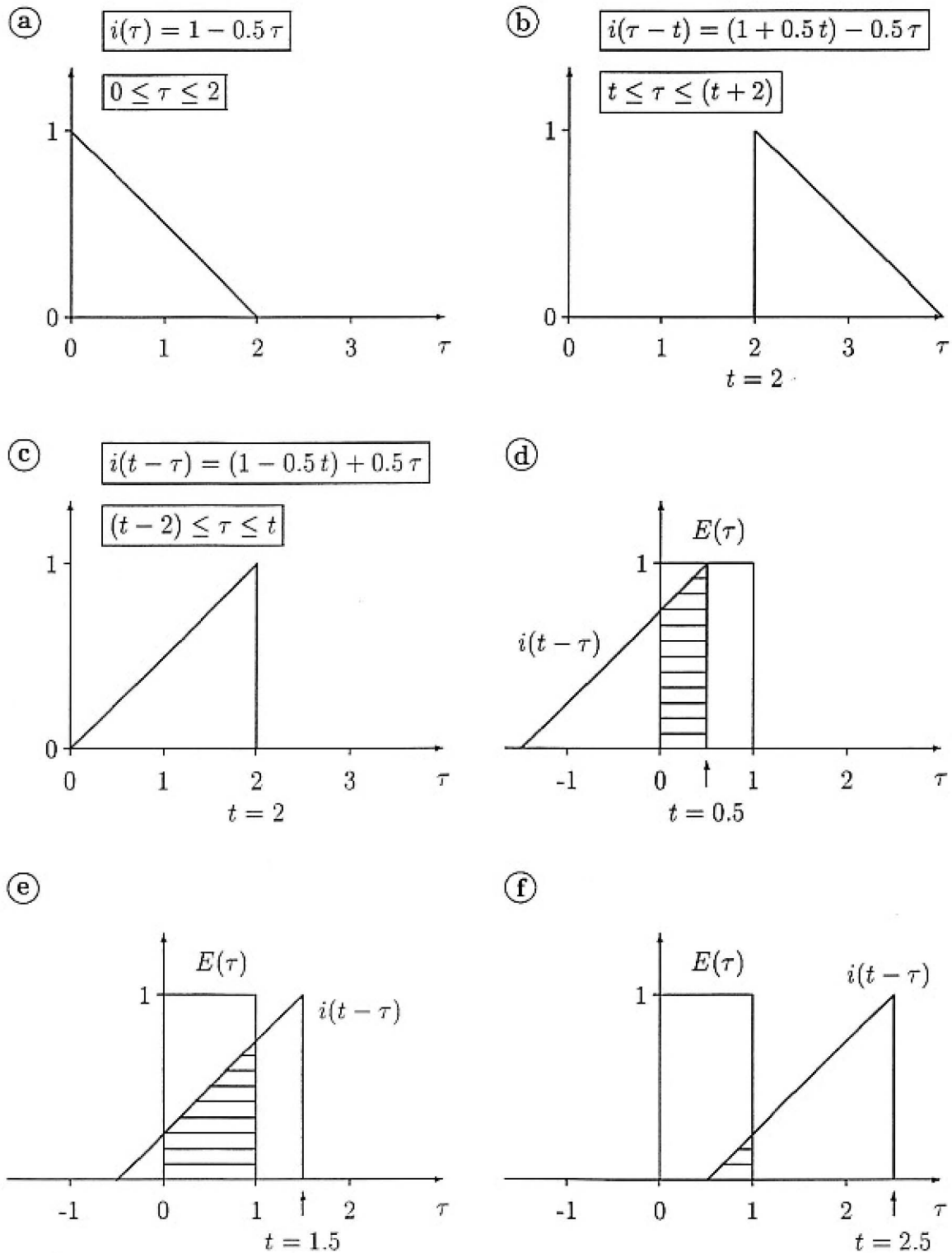


Figure 7: Visualisation de la fonction  $i(t - \tau)$  et de l'intégrale de convolution (surfaces hachurées) dans la formule  $S(t) = \int_0^t i(t - \tau) \cdot E(\tau) d\tau$ .

et réfléchi symétriquement par rapport à un axe vertical passant par  $t$ . L'équation de cette fonction est donnée par

$$i(t - \tau) = (1 - 0.5t) + 0.5\tau \quad \text{dans l'intervalle} \quad (t - 2) \leq \tau \leq t$$

On comprend aisément qu'en faisant varier  $t$ , la réponse impulsionnelle retournée glissera le long de l'axe des temps et représentera une infinité de fonctions: une pour chaque valeur de  $t$ . La signification de la fonction  $i(t - \tau)$  est ainsi clarifiée et sa visualisation ne pose aucun problème.

Passons maintenant à l'intégrale de convolution. La fonction d'entrée  $E(\tau)$  sera identique à la fonction d'entrée  $E1$  dans la figure 3:

$$E(\tau) = 1 \quad \text{dans l'intervalle} \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

Dans ce cas particulièrement favorable, le produit des deux fonctions  $i(t - \tau) \cdot E(\tau)$  est immédiatement donné pour n'importe quelle valeur de  $t$ : c'est le segment de  $i(t - \tau)$  qui se trouve entre  $\tau = 0$  et  $\tau = 1$ . La surface sous ce segment représente l'intégrale de convolution, c'est-à-dire la valeur de la fonction de sortie  $S(t)$  au moment  $t$ . Sur les diagrammes 7d, 7e et 7f l'intégrale de convolution est visualisée pour  $t = 0.5$ ,  $t = 1.5$  et  $t = 2.5$ . Il va sans dire que la grandeur de ces surfaces correspond exactement à la valeur de la fonction de sortie  $S1$  dans la figure 3 pour  $t = 0.5$ ,  $t = 1.5$  et  $t = 2.5$ .

Soulignons que les figures 7d, 7e et 7f représentent effectivement l'équation 1: les fonctions  $E(\tau)$  et  $i(t - \tau)$ , ainsi que l'intégrale continue y apparaissent explicitement, telles qu'elles sont définies dans l'équation 1.

Si la fonction d'entrée et la réponse impulsionnelle sont simples, la fonction de sortie peut être donnée par une formule analytique. Pour l'exemple de la figure 7 nous aurons:

$$S(t) = \int_A^B [(1 - 0.5t) + 0.5\tau] \cdot 1 \, d\tau = [(1 - 0.5t)\tau + 0.25\tau^2]_A^B$$

$$\text{avec} \quad A = \text{Max}[(t - 2), 0] \quad \text{et} \quad B = \text{Min}[t, 1]$$

L'expression analytique et les limites d'intégration  $A$  et  $B$  dépendent, bien sûr, de la valeur de  $t$ :

$$\text{Pour } t = 0.5 \quad A = 0 \quad B = 0.5$$

$$S(0.5) = [0.75\tau + 0.25\tau^2]_0^{0.5} = (0.75)(0.5) + (0.25)(0.25) = 0.4375$$

$$\text{Pour } t = 1.5 \quad A = 0 \quad B = 1$$

$$S(1.5) = [0.25\tau + 0.25\tau^2]_0^1 = (0.25)(1) + (0.25)(1) = 0.5000$$

Il va sans dire que la visualisation de l'intégrale de convolution n'est pas toujours aussi simple que dans l'exemple de la figure 7. Dans la figure 8, la réponse impulsionnelle et la fonction d'entrée varient, toutes les deux, dans le temps. Pour une valeur donnée de  $t$  il faut représenter d'abord la fonction  $i(t - \tau) \cdot E(\tau)$  et c'est la surface sous cette courbe qui correspondra à l'intégrale de convolution (voir aussi Annexe A).

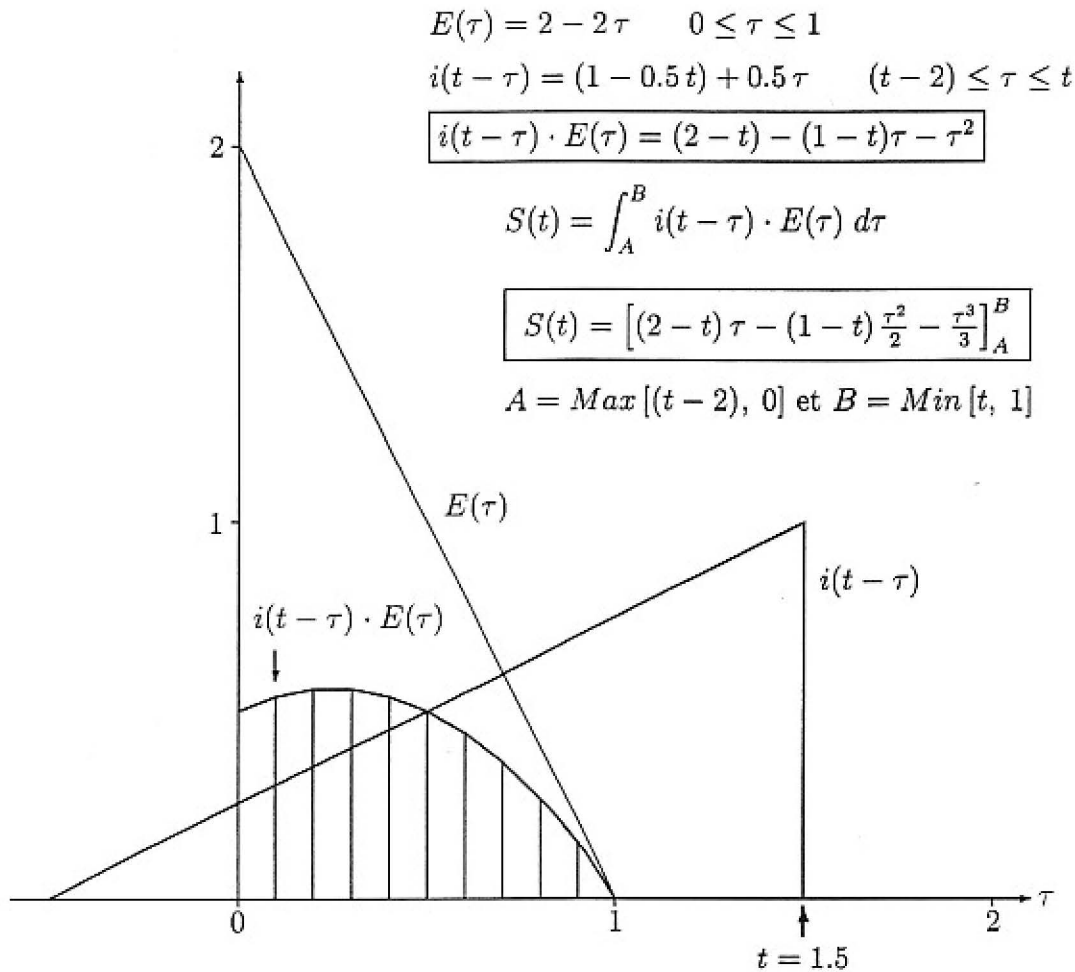


Figure 8: Visualisation de la fonction  $i(t - \tau)$  et de l'intégrale de convolution (surface hachurée) dans la formule  $S(t) = \int_0^t i(t - \tau) \cdot E(\tau) d\tau$  pour  $t = 1.5$ .

### 4.3 Remarques sur la forme discrétisée de l'intégrale de convolution.

Si les fonctions d'entrée ou la réponse impulsionnelle sont compliquées ou irrégulières, l'intégration analytique est impossible et il faut recourir à la discrétisation des fonctions. Elle consiste à subdiviser le domaine de validité d'une fonction en intervalles de temps égaux, de durée  $\Delta t$ , appelée pas de temps. Sur chaque intervalle (ou pas de temps) la fonction à discrétiser est approchée par une fonction constante, "moyenne". On obtient ainsi une fonction en escalier qui représente le mieux la fonction de départ pour un pas de temps donné. Dans ce qui suit, les intervalles seront numérotés de  $j = 0$  à  $j = N$ , le temps "réel" pouvant être calculé au milieu de chaque intervalle par  $t = (j + 0.5) \cdot \Delta t$ . La numérotation des intervalles commence à zéro (et non à 1) pour mieux mettre en évidence l'analogie entre l'équation 1 et l'équation 3.

Si la fonction d'entrée et la réponse impulsionnelle (sensu stricto) sont discrétisées avec le même pas de temps  $\Delta t$ , le calcul numérique de l'intégrale de convolution est

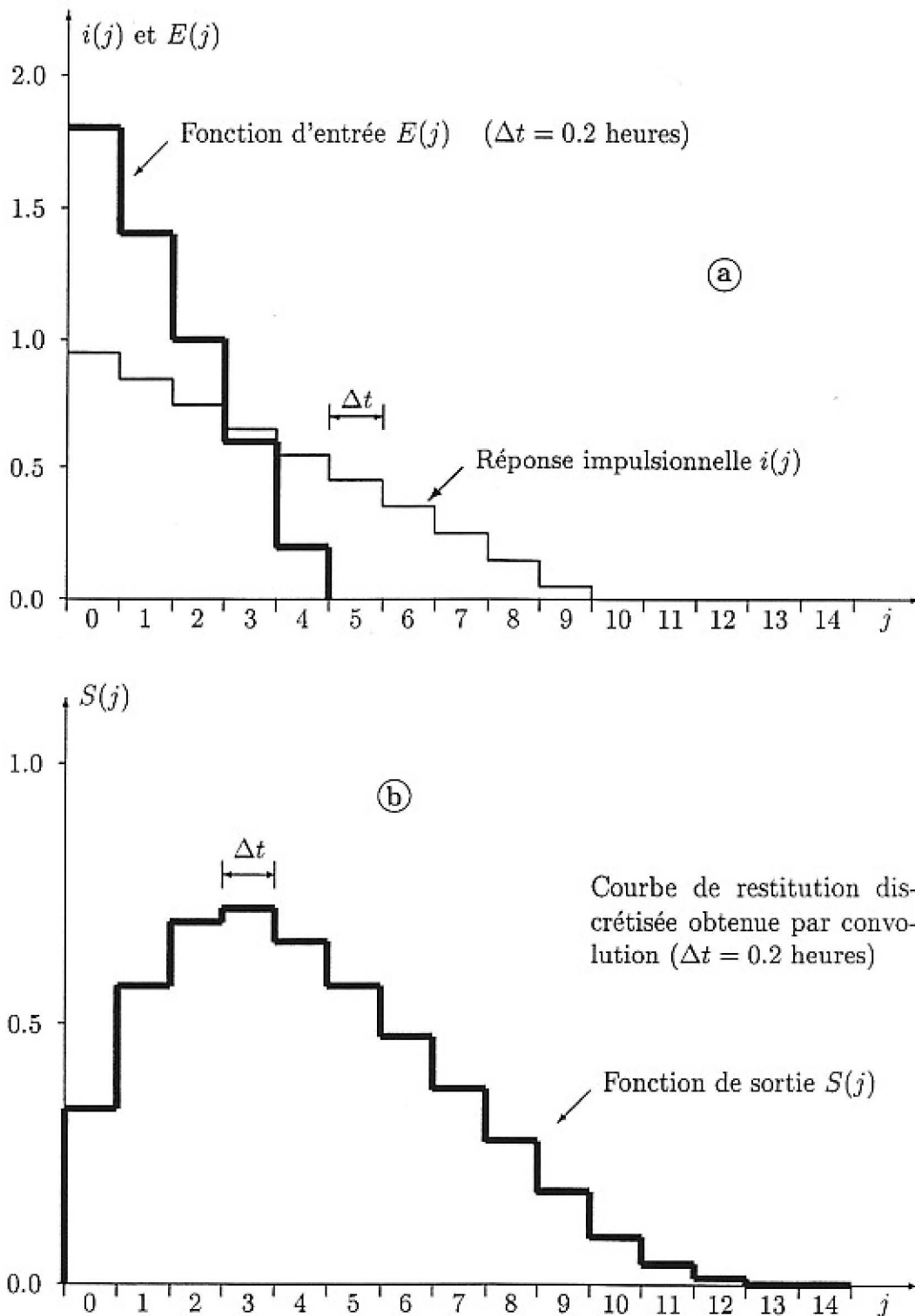


Figure 9: Utilisation de la forme discrétisée de l'intégrale de convolution: données (figure 9a) et résultats (figure 9b) discrétisés.

particulièrement facile par l'équation 4

$$S(j) = \Delta t \cdot \sum_{k=0}^j i(j-k) \cdot E(k) \quad (4)$$

qui n'est pas tout à fait la même que l'équation 3, réservée à l'utilisation des réponses de référence:

$$S(j) = \sum_{k=0}^j r(j-k) \cdot E(k) \quad (3)$$

En utilisant l'équation 3 on ne fait que sommer les réponses de référence pondérées par  $E(k)$ , c'est-à-dire on somme les fonctions de sortie "élémentaires", comme dans les figures 5 et 6. En fait, il ne s'agit pas d'une vraie intégrale du produit de deux fonctions, mais d'une simple sommation des produits suivant le principe de superposition des solutions élémentaires.

L'équation 4, par contre, est une forme discrétisée de l'équation 1. La fonction de transfert n'est pas la réponse de référence, mais la véritable réponse impulsionnelle discrétisée et l'utilisateur est libre de choisir le pas de temps comme il veut (ce qui n'est pas le cas pour la réponse de référence). En utilisant la réponse impulsionnelle sensu stricto, on doit calculer une véritable intégrale du produit des fonctions en escalier, c'est-à-dire on doit multiplier la somme de ces produits par la largeur  $\Delta t$  des escaliers pour obtenir des "surfaces", comme dans les figures 7 et 8. L'utilisation de l'équation 4 est illustrée par la figure 9. Nous avons repris la même réponse impulsionnelle  $i(t)$  et la même fonction d'entrée triangulaire  $E(t)$  que dans la figure 4, mais sous forme discrétisée (voire figure 9a). La fonction de sortie de la figure 9b a été calculée à l'aide de l'équation 4 et elle représente exactement la forme discrétisée de la fonction de sortie  $S(t)$  de la figure 4.

Comprendre la différence entre les équations 3 et 4 nous paraît particulièrement important, car elle montre, mieux que de longs discours, les restrictions liées à l'utilisation des réponses de référence. On comprend aussi que beaucoup de fonctions de transfert, qualifiées de "réponses impulsionnelles", ne sont que de vulgaires réponses de référence.

Revenons brièvement aux fonctions  $i(j-k)$  et  $r(j-k)$ . Par analogie avec la fonction  $i(t-\tau)$ , elles représentent la réponse impulsionnelle ou la réponse de référence discrétisées, translatées jusqu'à l'intervalle  $j$  et retournées autour d'un axe de symétrie vertical passant par le milieu de l'intervalle  $j$ . Il est évident que la figure 5, par exemple, ne représente pas l'équation 3, car la fonction  $r(j-k)$  n'y apparaît pas. Dans l'exemple de la figure 10, la fonction d'entrée et la réponse de référence (discrétisée!) ont été reprises de la figure 5. La fonction  $r(j-k)$  et les opérations indiquées dans l'équation 3 apparaissent clairement pour  $j=1$  et  $j=5$ .

Sur le diagramme 10a la réponse de référence  $r(k)$ , ou désignée simplement  $r_k$ , est représentée par la suite normale des "escaliers":  $r_0, r_1, r_2$  et  $r_3$ . Dans la figure 10c la suite est inversée: de gauche à droite on a  $r_3, r_2, r_1$  et  $r_0$ . Le but de cette inversion autour de l'axe vertical passant par l'intervalle pour lequel on veut calculer la valeur  $S(j)$ , est particulièrement bien mis en évidence par les diagrammes 10c et 10d. De

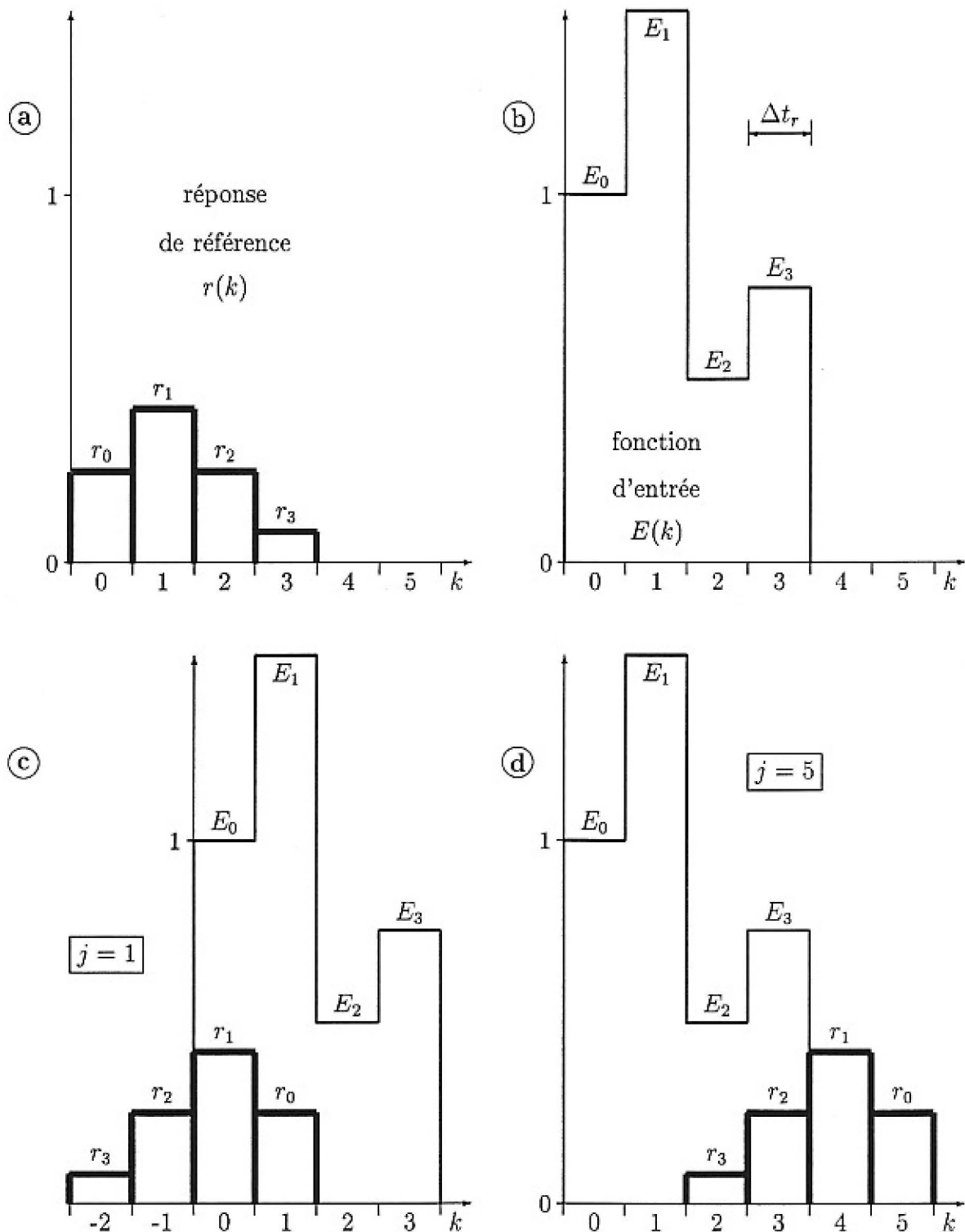


Figure 10: Visualisation de la réponse de référence discrétisée  $r(k)$  et de la fonction  $r(j - k)$  dans la formule  $S(j) = \sum_{k=0}^j r(j - k) \cdot E(k)$  pour  $j = 1$  et  $j = 5$ .

cette façon, les valeurs de la fonction d'entrée que l'on doit multiplier par des valeurs précises de la réponse de référence se trouvent effectivement "face à face", avec le bon décalage, et l'on peut utiliser un algorithme simple (équation 3) pour calculer la valeur de la fonction de sortie:

$$S(1) = r_1 \cdot E_0 + r_0 \cdot E_1 \quad \text{et} \quad S(5) = r_3 \cdot E_2 + r_2 \cdot E_3$$

On obtiendra, évidemment la même fonction de sortie que dans la figure 5, mais cette fois "discrétisée" comme fonction en escalier.

Ainsi, il est possible de donner une représentation graphique claire et simple de toutes les fonctions et de toutes les opérations qui apparaissent dans les équations de convolution, que ce soit dans leur forme continue ou dans leur forme discrétisée. Ces représentations graphiques peuvent aider les "naturalistes" à mieux comprendre les équations utilisées dans les programmes de calcul et, par là même, à mieux utiliser les programmes eux-mêmes.

#### 4.4 Déconvolution: la méthode numérique "directe".

Pour pouvoir utiliser l'équation 1 ou sa forme discrétisée, l'équation 4, on doit connaître la réponse impulsionnelle pour un point d'injection donné et pour un état hydrodynamique donné de la nappe d'eau souterraine. Comme nous l'avons déjà mentionné, la courbe de restitution d'un essai de traçage  $S(t)$  (ou la réponse de référence  $r(t)$ ) n'est pas la réponse impulsionnelle  $i(t)$  (voir page 15). Cette dernière doit être calculée en déconvoluant la courbe de restitution  $S(t)$  par la fonction d'entrée  $E(t)$  de l'essai de traçage, supposée connue.

Une présentation exhaustive des méthodes de déconvolution se trouve dans la thèse de G. de MARSILY (1978), plus particulièrement dans le Tome 2 contenant les annexes. Ici nous nous contenterons d'une brève présentation de la méthode de *déconvolution "directe"*, utilisée par Y. ROSSIER (1992) dans ses programmes de calcul (voir la deuxième partie du rapport). Le point de départ est formé par l'équation 4

$$S(j) = \Delta t \cdot \sum_{k=0}^j i(j-k) \cdot E(k) \quad (4)$$

qui représente, en fait, un système d'équations linéaires:

$$\begin{aligned} S(0) &= \Delta t \cdot [i(0) \cdot E(0)] \\ S(1) &= \Delta t \cdot [i(1) \cdot E(0) + i(0) \cdot E(1)] \\ S(2) &= \Delta t \cdot [i(2) \cdot E(0) + i(1) \cdot E(1) + i(0) \cdot E(2)] \\ S(3) &= \Delta t \cdot [i(3) \cdot E(0) + i(2) \cdot E(1) + i(1) \cdot E(2) + i(0) \cdot E(3)] \\ S(4) &= \Delta t \cdot [i(4) \cdot E(0) + i(3) \cdot E(1) + i(2) \cdot E(2) + i(1) \cdot E(3) + i(0) \cdot E(4)] \\ &\dots \end{aligned}$$

ou, sous forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} S(0) \\ S(1) \\ S(2) \\ S(3) \\ S(4) \\ \dots \end{Bmatrix} = \Delta t \cdot \begin{bmatrix} E(0) & & & & & \\ E(1) & E(0) & & & & \\ E(2) & E(1) & E(0) & & & \\ E(3) & E(2) & E(1) & E(0) & & \\ E(4) & E(3) & E(2) & E(1) & E(0) & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} i(0) \\ i(1) \\ i(2) \\ i(3) \\ i(4) \\ \dots \end{Bmatrix} \quad (5)$$

En principe la *réponse impulsionnelle*  $i(k)$  peut être calculée aisément par

$$\begin{Bmatrix} i(0) \\ i(1) \\ i(2) \\ i(3) \\ i(4) \\ \dots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E(0) & & & & & \\ E(1) & E(0) & & & & \\ E(2) & E(1) & E(0) & & & \\ E(3) & E(2) & E(1) & E(0) & & \\ E(4) & E(3) & E(2) & E(1) & E(0) & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}^{-1} \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot \begin{Bmatrix} S(0) \\ S(1) \\ S(2) \\ S(3) \\ S(4) \\ \dots \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Etant donné que la matrice des coefficients est triangulaire dans l'équation 5, nous n'avons même pas besoin de l'invertir pour obtenir les valeurs  $i(k)$ . Une rapide inspection montre, en effet, que  $i(0)$  peut être calculé directement à partir de la première équation du système 5. Connaissant  $i(0)$ , on peut utiliser la deuxième équation pour calculer  $i(1)$ . Connaissant  $i(0)$  et  $i(1)$  on utilise la troisième équation pour calculer  $i(2)$  et ainsi de suite:

$$\begin{aligned} i(0) &= \frac{1}{E(0)} \left[ \frac{S(0)}{\Delta t} \right] \\ i(1) &= \frac{1}{E(0)} \left[ \frac{S(1)}{\Delta t} - i(0) \cdot E(1) \right] \\ i(2) &= \frac{1}{E(0)} \left[ \frac{S(2)}{\Delta t} - i(1) \cdot E(1) - i(0) \cdot E(2) \right] \\ i(3) &= \frac{1}{E(0)} \left[ \frac{S(3)}{\Delta t} - i(2) \cdot E(1) - i(1) \cdot E(2) - i(0) \cdot E(3) \right] \\ i(4) &= \frac{1}{E(0)} \left[ \frac{S(4)}{\Delta t} - i(3) \cdot E(1) - i(2) \cdot E(2) - i(1) \cdot E(3) - i(0) \cdot E(4) \right] \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

L'algorithme peut être résumé par l'équation 7, où  $\Delta t$  est le pas de temps de discrétisation et  $E(0) \neq 0$ .

$$\boxed{i(j) = \frac{1}{E(0)} \cdot \left[ \frac{S(j)}{\Delta t} - \sum_{k=1}^j i(j-k) \cdot E(k) \right]} \quad (7)$$

## 4.5 Remarques sur la déconvolution "directe"

La méthode de déconvolution directe donne de bons résultats si la fonction d'entrée et la fonction de sortie correspondent exactement à une équation de convolution. Utilisons l'équation 7 pour déconvoluer, par exemple, la fonction de sortie  $S(j)$  de la figure 9 par la fonction d'entrée exacte  $E(j)$  de la même figure. Les valeurs numériques se trouvent dans l'annexe B et le résultat de la déconvolution est représenté graphiquement dans la figure 11. On voit immédiatement que la réponse impulsionnelle  $i(j)$  obtenue par déconvolution est exactement la même que la réponse impulsionnelle utilisée pour calculer la fonction de sortie  $S(j)$  par convolution (voir figure 9).

Si la fonction de sortie et la fonction d'entrée sont entachées d'erreurs, c'est-à-dire ne correspondent pas exactement à une équation de convolution, le système d'équations linéaires 6 ou 7 devient très instable. Les erreurs entraînent en général des *oscillations* ou distorsions sur la réponse impulsionnelle et lui enlèvent tout caractère physique raisonnable (voir aussi DE MARSILY 1978). Or, dans le cas des essais de traçage réels souvent on ne connaît pas la forme exacte de la fonction d'entrée. Dans beaucoup de cas on mesure la masse injectée et la durée approximative de l'injection et l'on suppose que la fonction d'injection peut être représentée par un rectangle. C'est probablement la pire hypothèse que l'on puisse faire pour la fonction d'entrée.

Reprenons l'exemple précédent, mais remplaçons la fonction d'entrée triangulaire (exacte) par une fonction d'entrée rectangulaire équivalente (même masse injectée et même durée d'injection). Le résultat de la déconvolution par la fonction d'entrée erronée est représentée dans la figure 12: la réponse impulsionnelle obtenue n'est pas interprétable, car elle montre des oscillations dénuées de sens.

Dans le cas des essais de traçage réels où l'on ne connaît pas la forme exacte de la fonction d'entrée, il faudrait éviter l'utilisation d'une fonction d'entrée rectangulaire. Nous suggérons, dans ces cas, de déconvoluer la fonction de sortie observée par une fonction d'entrée triangulaire "équivalente" qui respecte la masse injectée et la durée d'injection.

Même si le triangle ne représente pas la fonction d'entrée exacte, les oscillations seront considérablement atténuées. Nous avons appliqué cette méthode pour la déconvolution d'une courbe de restitution réelle (mise à notre disposition par Mlle. N. Doerflinger), représentée dans la figure 13a. La courbe de restitution (qui présente déjà des irrégularités a été déconvoluée d'abord par une fonction d'entrée rectangulaire équivalente (voir figure 13b), ensuite par une fonction d'entrée triangulaire équivalente (voir figure 13c). Les graphiques de la figure 13 montrent clairement les avantages de la fonction d'entrée triangulaire.

Si les fonctions d'entrée triangulaires ont des avantages indéniables, elles ne peuvent pas supprimer les irrégularités contenues dans la fonction de sortie observée (voir figure 13c). Si la courbe de restitution est entachée d'erreurs manifestes, il nous semble raisonnable de lisser la fonction de sortie et déconvoluer la courbe lissée. La figure 14 montre que la qualité des réponses impulsionnelles est considérablement améliorée.

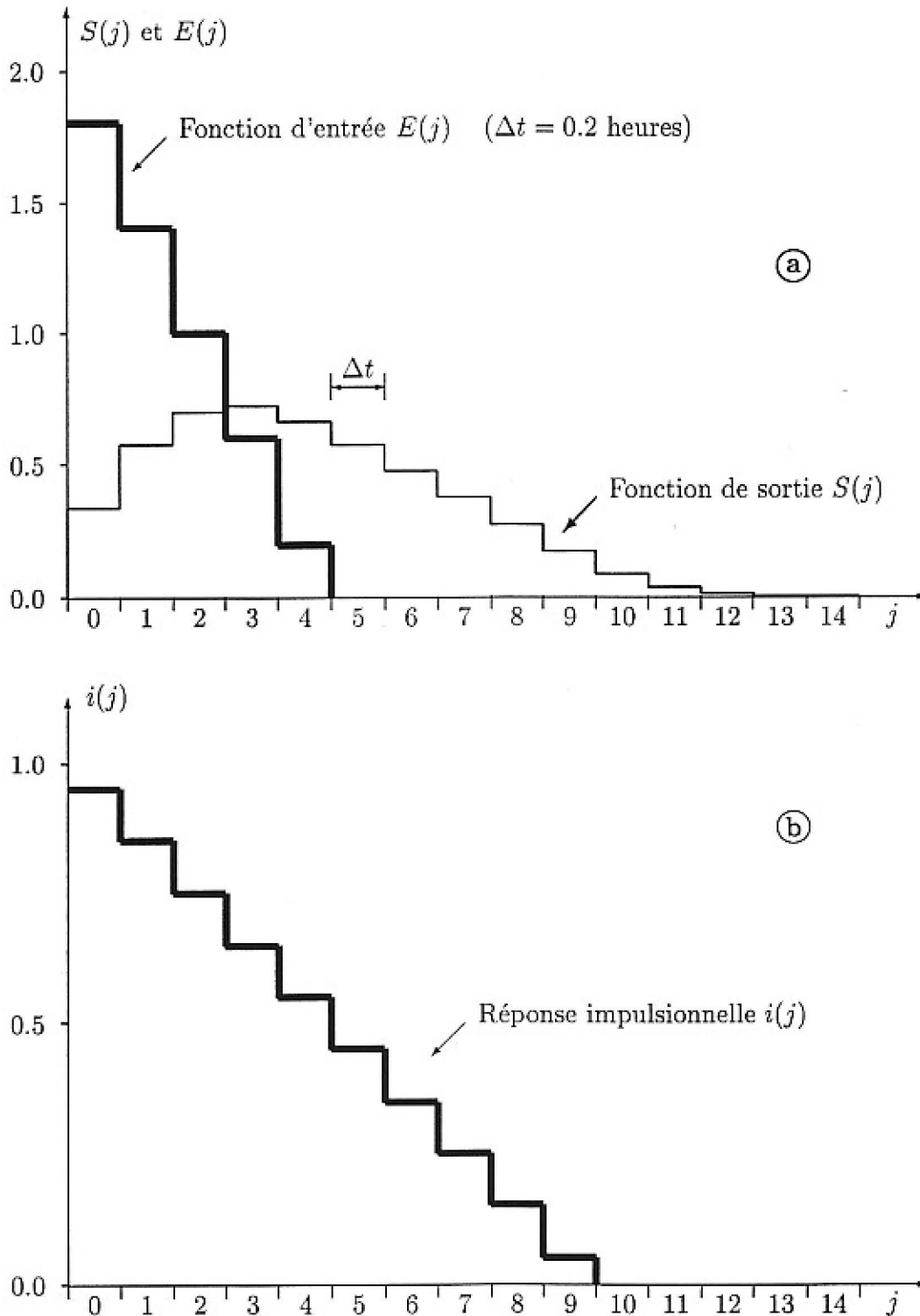


Figure 11: Réponse impulsionnelles  $i(j)$  obtenue en déconvoluant la fonction de sortie  $S(j)$  par la fonction d'entrée exacte  $E(j)$ .

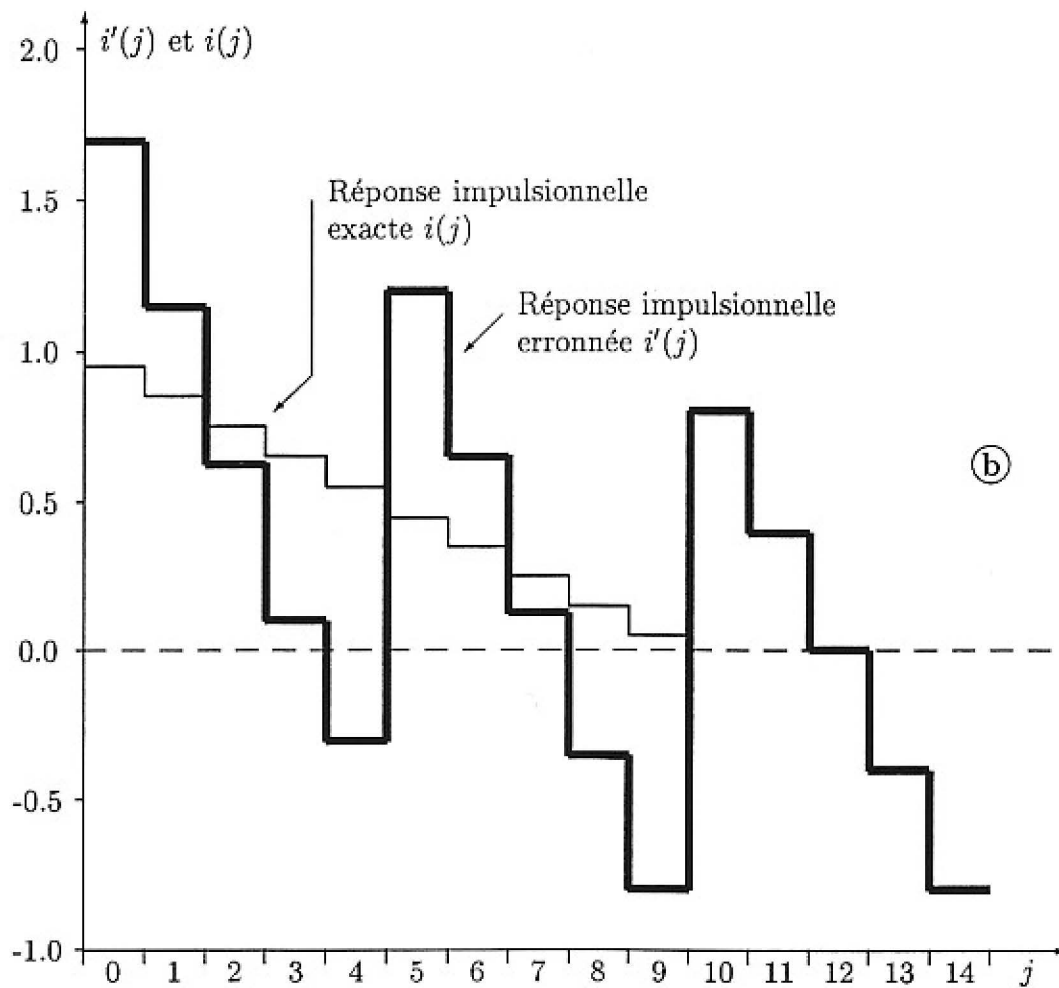
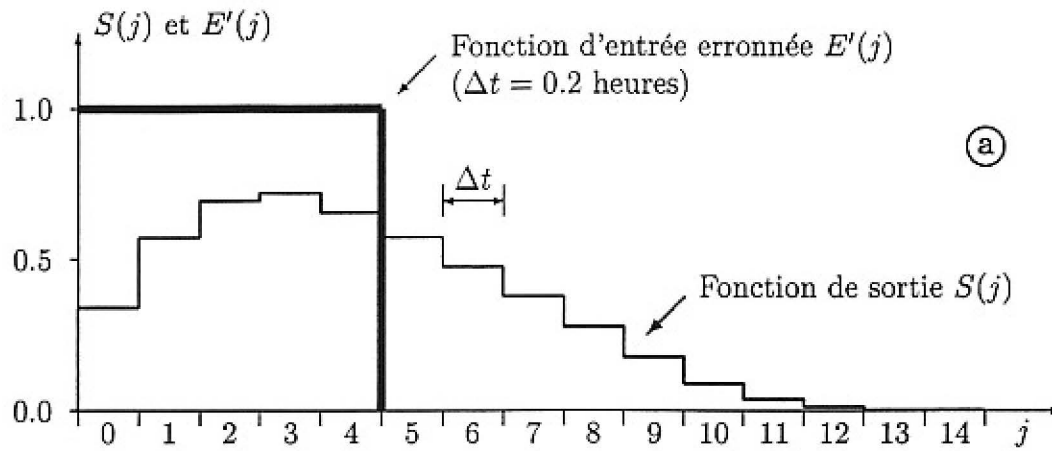
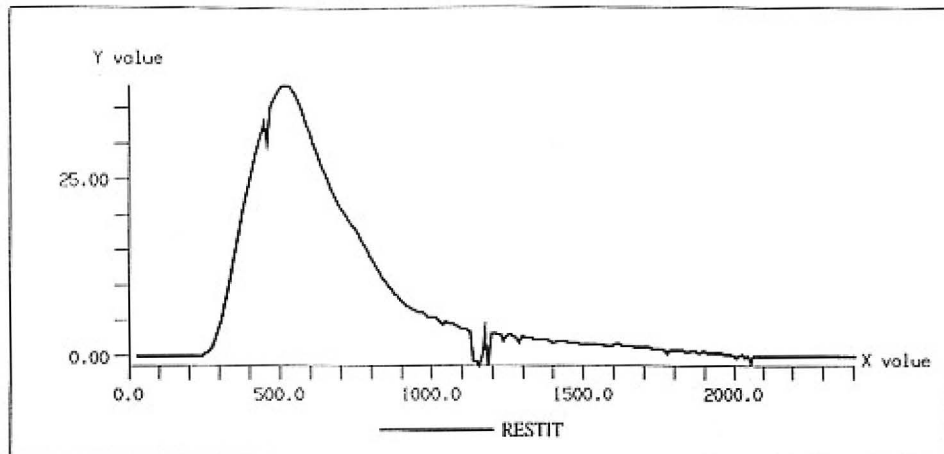
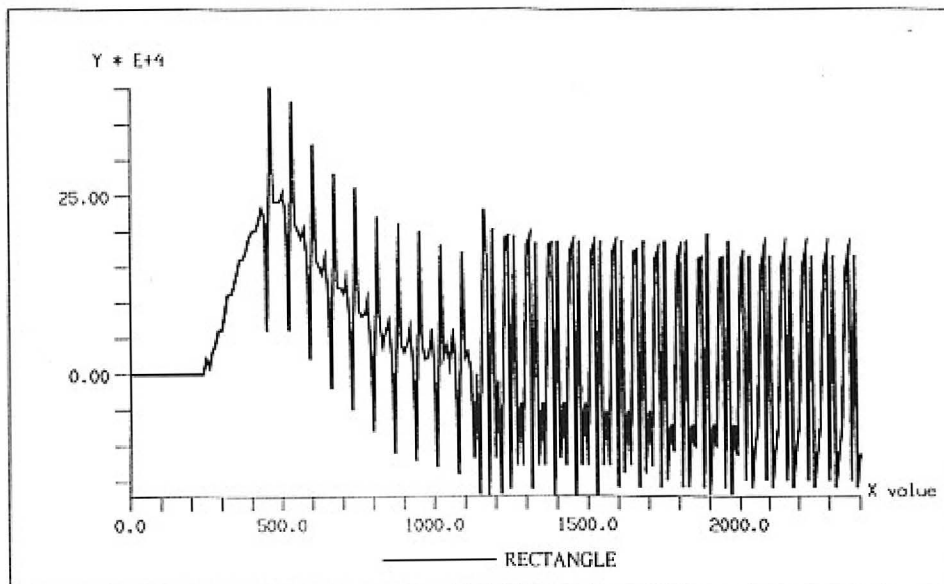


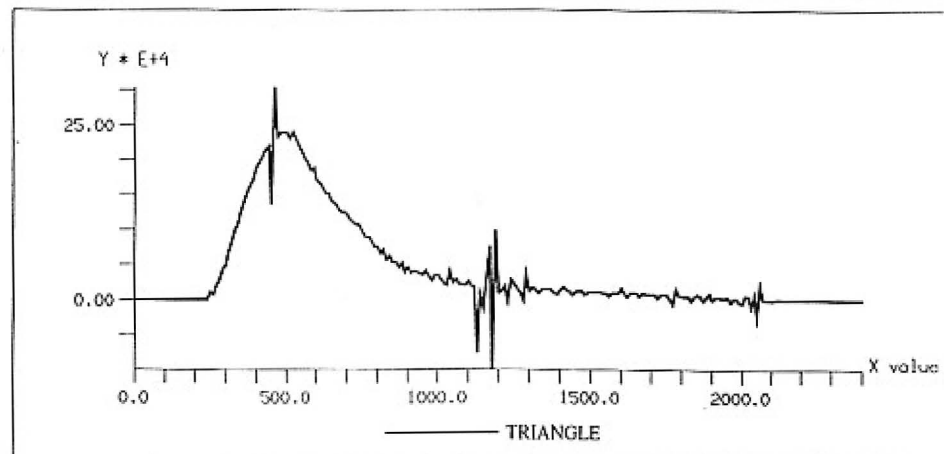
Figure 12: Réponse impulsionnelles  $i'(j)$  obtenue en déconvoluant la fonction de sortie  $S(j)$  par la fonction d'entrée erronnée  $E'(j)$ . Comparez  $i'(j)$  avec la réponse impulsionnelle exacte  $i(j)$  obtenue dans la figure 11.



a.

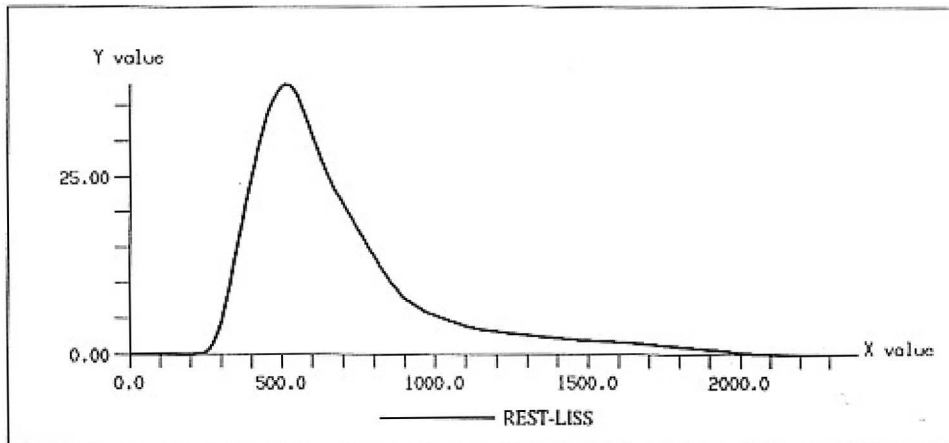


b.

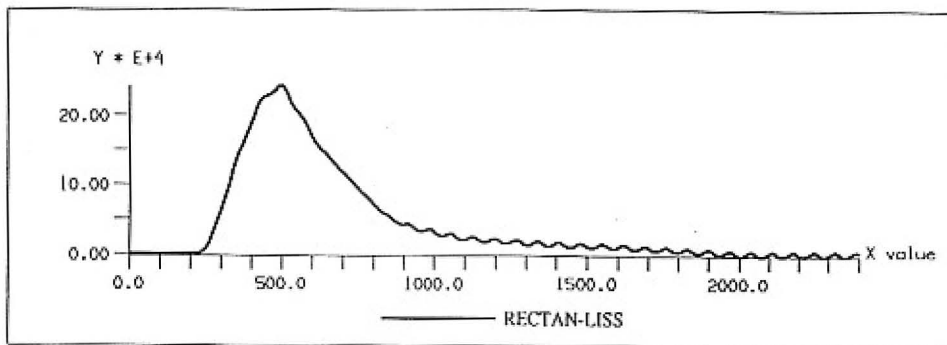


c.

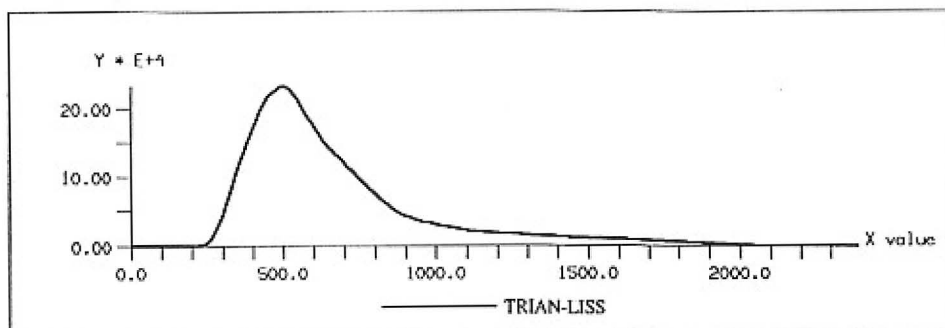
Figure 13: Courbe de restitution réelle (a) déconvoluée par une fonction d'entrée rectangulaire (b) et une fonction d'entrée triangulaire (c).



a.



b.



c.

Figure 14: Courbe de restitution réelle lissée (a) déconvoluée par une fonction d'entrée rectangulaire (b) et une fonction d'entrée triangulaire (c).

## 5 Conclusions

Les modèles à "boîte noire" décrits dans les 4 parties de ce rapport sont basés sur une représentation schématique et fortement simplifiée du système réel. Dans ce type de modèle le système karstique est considéré globalement comme une "boîte noire" ayant une entrée et une sortie, mais où la géométrie du réseau et de l'aquifère n'apparaît jamais explicitement. Les effets de la géométrie et des processus de transport à l'intérieur de l'aquifère sont pris en compte globalement par la *réponse impulsionnelle* du système qu'il s'agit de déterminer expérimentalement à partir des essais de traçage.

La qualité d'un modèle à boîte noire dépendra toujours de la mesure dans laquelle la *stationnarité* et la *linéarité* de la réponse impulsionnelle sont respectées dans le système réel simulé. Ces conditions de validité n'étant, pour ainsi dire, jamais entièrement satisfaites dans les systèmes naturels, on devrait accepter des erreurs relativement importantes sur les résultats obtenus par le modèle numérique. Cette incertitude est inhérente à la simplicité de la méthode employée et c'est l'utilisateur qui doit décider si les prévisions approximatives obtenues par le modèle lui conviennent ou non.

Soulignons que les diagrammes montrant la *variabilité des fonctions de transfert* expérimentales, comme par exemple dans la figure 2, sont d'une importance capitale pour évaluer la possibilité d'utiliser les modèles à boîte noire à la simulation de tel ou tel système réel particulier. Ils renseignent immédiatement l'utilisateur sur le "degré de stationnarité" des fonctions de transfert expérimentales et ne laissent aucune illusion quant à l'exactitude des prévisions simulées. L'établissement de tels diagrammes doit être une étape obligatoire dans le cadre de chaque étude particulière. Pour la comparaison des fonctions de transfert nous suggérons d'utiliser les *réponses indicielles* que l'on peut facilement obtenir à partir des réponses impulsionnelles (voir aussi DOERFLINGER 1996).

Très probablement on ne pourrait définir aucune réponse impulsionnelle "moyenne" utilisable partout et pour n'importe quel état hydrodynamique de l'aquifère, sauf dans le cas exceptionnel où les variabilités spatiale et temporelle des fonctions de transfert expérimentales demeurent faibles. La seule chance qui reste pour que l'on puisse considérer une réponse impulsionnelle expérimentale comme raisonnablement stationnaire et linéaire consiste à l'utiliser toujours pour le *même point d'injection* et toujours pour le *même état hydrodynamique*, celui pour lequel elle a été déterminée. La confirmation de la stationnarité et de la linéarité par essais de traçage répétés sera nécessaire même dans ce cas.

Mentionnons enfin que la méthode de déconvolution directe donne de bons résultats si la fonction d'entrée et la fonction de sortie correspondent exactement à une équation de convolution. Si la fonction de sortie et la fonction d'entrée sont entachées d'erreurs, la réponse impulsionnelle obtenue par déconvolution présentera, souvent, des *oscillations*. Pour diminuer ces oscillations on peut commencer par lisser la courbe de restitution expérimentale. Il faut ensuite, à tout prix, éviter les fonctions d'entrée rectangulaires en les remplaçant par une *fonction d'entrée triangulaire équivalente*.

## 6 Références

- DOERFLINGER N., 1994: Interprétation des essais de traçage en milieu karstique. Etude pilote: application du programme DYEBOX basé sur le modèle boîte noire. *Rapport du Centre d'Hydrogéologie de Neuchâtel.*
- DOERFLINGER N., 1996: Advances in karstic groundwater protection strategy using tracing tests analysis and multiattribute vulnerability mapping (EPIK method). *Thèse de doctorat, Centre d'Hydrogéologie de Neuchâtel.*
- DZIKOVSKI M., 1992: L'analyse des systèmes-traçages à débit variable et volume constant. Possibilités d'application en milieu karstique. *Thèse de doctorat, Université des Sciences et technologies de Lille.*
- FIESCH H., 1992: Quantitative Auswertung von Markiersuchen in Karstgrundwasserleitern. Vierter Teil: PC-Programm BBOX: Programmbeschreibung. *Rapport du Centre d'Hydrogéologie de Neuchâtel. Version provisoire, 33 p.*
- JEANNIN P.-Y., ROSSIER Y., BOURRET F., 1990: Essai de traçage dans la région des Rochats (Provence, Vd). *Rapport du Centre d'Hydrogéologie de Neuchâtel.*
- DE MARSILY G., 1978: De l'identification des systèmes hydrogéologiques. *Thèse de doctorat d'Etat ès sciences naturelles, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI., 2 tomes*
- NEMETH E., 1954: Hydrologie et hydrométrie (*en hongrois*). *Tankönyvkiadó, Budapest, 662 p.*
- ROSSIER Y., 1990: Aspects particuliers de l'hydrodynamique des milieux karstiques. Etude pilote. Première partie: étude théorique de la méthodologie du traceur. *Rapport du Centre d'Hydrogéologie de Neuchâtel. Version corrigée par N. Doerflinger en 1995.*
- ROSSIER Y., 1990: Aspects particuliers de l'hydrodynamique des milieux karstiques. Etude pilote. Deuxième partie: pratique de la méthodologie du traceur à partir d'exemples. *Rapport du Centre d'Hydrogéologie de Neuchâtel. Version corrigée par N. Doerflinger en 1995.*
- ROSSIER Y., 1992: Interprétation quantitative des essais de traçage dans les aquifères karstiques. Deuxième partie: Programme de calcul utilisable sur VAX écrit en FORTRAN 77. *Rapport du Centre d'Hydrogéologie de Neuchâtel. Version provisoire, 36 p.*
- ROSSIER Y., 1992: Interprétation quantitative des essais de traçage dans les aquifères karstiques. Troisième partie: Problèmes liés à la normalisation de la réponse indicelle. Recommandation pour l'essai de traçage. *Rapport du Centre d'Hydrogéologie de Neuchâtel. Version provisoire, 24 p.*

## Annexe A

### Exemple de solution analytique

Dans la figure 4 la fonction de sortie  $S(t)$  résulte de la convolution d'une réponse impulsionnelle triangulaire  $i(t)$  par une fonction d'entrée triangulaire  $E(t)$ . Etant donné que les fonctions  $i(t)$  et  $E(t)$  sont simples, nous pouvons utiliser l'équation 1 pour obtenir la solution analytique de  $S(t)$ :

$$S(t) = i(t) \star E(t) \equiv \int_0^t i(t - \tau) \cdot E(\tau) d\tau \quad (1)$$

L'intégrande est visualisée dans la figure 8 et nous donnons ici la solution analytique pour l'intégrale de convolution.

$$E(\tau) = 2 - 2\tau \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

$$i(t - \tau) = (1 - 0.5t) + 0.5\tau \quad (t - 2) \leq \tau \leq t$$

$$i(t - \tau) \cdot E(\tau) = (2 - t) - (1 - t)\tau - \tau^2 \quad \text{intégrande}$$

$$S(t) = \int_A^B [(2 - t) - (1 - t)\tau - \tau^2] d\tau \quad \text{et}$$

$$S(t) = \left[ (2 - t)\tau - (1 - t)\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3} \right]_A^B$$

$$\text{avec } A = \text{Max} [(t - 2), 0] \text{ et } B = \text{Min} [t, 1]$$

Nous avons utilisé cette solution analytique pour calculer les valeurs numériques de la fonction de sortie  $S(t)$  pour les temps  $t = 0.2, 0.4, 0.6, \dots 3.0$  heures. Ces valeurs peuvent être comparées aux valeurs obtenues à l'aide de l'équation 4, c'est-à-dire à l'aide de la forme discrétisée de l'équation 1 (voir Annexe B).

t	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
$S(t)$	0.0000	0.3413	0.5706	0.6960	0.7253	0.6666	0.5666	0.4666	0.3666

t	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
$S(t)$	0.2666	0.1666	0.0852	0.0360	0.0106	0.0013	0.0000

## Annexe B

### Exemple de solution discrétisée

Valeurs numériques pour l'exemple de convolution présenté dans la figure 9 et pour les exemples de déconvolution présentés dans les figures 11 et 12. Pour la convolution numérique nous utilisons l'équation 4 et pour la déconvolution l'équation 7:

$$S(j) = \Delta t \cdot \sum_{k=0}^j i(j-k) \cdot E(k) \quad (4)$$

$$i(j) = \frac{1}{E(0)} \cdot \left[ \frac{S(j)}{\Delta t} - \sum_{k=1}^j i(j-k) \cdot E(k) \right] \quad (7)$$

Réponse impulsionnelle discrétisée  $i(j)$  ( $\Delta t = 0.2$  heures).

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$i(j)$	0.95	0.85	0.75	0.65	0.55	0.45	0.35	0.25	0.15	0.05

Fonction d'entrée triangulaire discrétisée  $E(j)$  ( $\Delta t = 0.2$  heures).

j	0	1	2	3	4
$E(j)$	1.8	1.4	1.0	0.6	0.2

Fonction de sortie  $S(j)$  obtenue par convolution numérique en utilisant l'équation 4. Discrétisation avec  $\Delta t = 0.2$  heures (voir figure 9). Comparez les résultats à la solution analytique de l'Annexe A.

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$S(j)$	0.342	0.572	0.698	0.728	0.67	0.57	0.47	0.37	0.27	0.17
j	10	11	12	13	14					
$S(j)$	0.088	0.038	0.012	0.002	0.0					

Réponse impulsionnelle obtenue en déconvoluant la fonction de sortie  $S(j)$  par la fonction d'entrée triangulaire exacte  $E(j)$  (voir figure 11).  $\Delta t = 0.2$  heures.

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$i(j)$	0.95	0.85	0.75	0.65	0.55	0.45	0.35	0.25	0.15	0.05

Réponse impulsionnelle erronée  $i'(j)$  obtenue en déconvoluant la fonction de sortie  $S(j)$  par une fonction d'entrée rectangulaire erronée  $E'(j)$  (voir figure 12). Observez les oscillations de  $i'(j)$  ( $\Delta t = 0.2$  heures).

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$i'(j)$	1.71	1.15	0.63	0.15	-0.29	1.21	0.65	0.13	-0.35	-0.79

**Remarque importante.**

Les valeurs numériques de la *réponse impulsionnelle* et de la *fonction d'entrée* que l'on trouve dans les tableaux de l'annexe B se rapportent *au milieu des intervalles de temps*  $\Delta t$ . Autrement dit, ces valeurs numériques correspondent aux temps "réels"  $t$  calculés par l'équation  $t = (j + 0.5) \cdot \Delta t$ .

Les valeurs numériques de la *fonction de sortie discrétisée*, par contre, se rapportent *à la fin des intervalles de temps*  $\Delta t$ . Autrement dit, les temps "réels" correspondant aux valeurs numériques des fonctions de sortie (convoluées ou observées) se calculent par l'équation  $t = (j + 1) \cdot \Delta t$ .