

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
Faculté des sciences

Un développement des systèmes logiques de Stanislaw Leśniewski

Protothétique – Ontologie – Méréologie

Thèse
présentée à la Faculté des sciences
de l'Université de Neuchâtel
pour obtenir le grade de docteur ès sciences

par
Denis Miéville



PETER LANG
Berne · Francfort-s. Main · New York
1984

**Un développement des systèmes logiques de Stanislaw Leśniewski
Protothétique – Ontologie – Méreologie**

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel, sur le rapport des membres du jury, MM. les professeurs J.-B. Grize, P.-J. Erard et V.F. Rickey (Bowling Green State University) autorise l'impression de la présente thèse.

Neuchâtel, le 21 septembre 1984

Le doyen:
H. Beck

© Editions Peter Lang SA, Berne 1984
Successeur des Editions
Herbert Lang & Cie SA, Berne

Tous droits réservés. Réimpression ou reproduction interdite par n'importe quel procédé, notamment par microfilm, xérographie, microfiche, microcarte, offset, etc.

Impression: Lang Druck SA, Liebefeld/ Berne

"Seul le pouvoir découpe le savoir.
A l'état paisible il est dense.
Je suis à la recherche de la PAIX"

Michel Serres

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Messieurs les Professeurs J.-B. Grize, directeur du Centre de recherches sémiologiques (Université de Neuchâtel, Suisse) et V.F. Rickey (Bowling Green State University, U.S.A.) qui, tout au long de ce travail, m'ont offert critiques, conseils et encouragements. Mes chaleureux remerciements vont également à Manon Miéville, ma mère, qui a remarquablement mis en forme le manuscrit de cet ouvrage.

TABLE DES MATIERES

Avant propos	1
PREMIERE PARTIE - L'HOMME ET SON OEUVRE	1
Chapitre I - ELEMENTS DE BIOGRAPHIE	3
1. Préambule	3
2. De 1886 à 1911: Philosophie	4
3. Le passage à la logique	5
4. Analyse de l'antinomie des classes	8
5. Analyse de la notion de classe	11
6. La notion de classe collective	22
7. Méréologie, ontologie, protothétique	24
8. Les modes de construction de Leśniewski	26
9. Comparaison systèmes classiques/systèmes Leśniewski	27
10. Eléments de biographie: 1919 - 1939	30
11. Jugement d'ensemble	31
12. Une oeuvre reconnue	36
DEUXIEME PARTIE - LA PROTOTHETIQUE	41
Chapitre II - LES CALCULS EQUIVALENTIELS	43
1. Préambule	43
1.1. Plan d'ensemble	43
1.2. Quelques considérations historiques	44
2. Le système équivalentiel S	48
2.1. Les axiomes	48
2.2. L'équiformité	50
2.3. Expression équivalentielle	51

2.4.	Les règles d'inférence	51
2.4.1.	Directive de détachement: dét	52
2.4.2.	Directive de substitution: sub	53
2.5.	Règles dérivées	55
2.5.1.	Directive de commutativité: comm	55
2.5.2.	Directive d'introduction du =: int	56
2.5.3.	Directive de déplacement: dpl	56
2.5.4.	Directive d'associativité: ass	57
2.6.	Quelques schémas de théorèmes	58
2.7.	La relation de transformation: tr	60
2.7.1.	Définition	60
2.7.2.	Métathéorème de la transformée	60
2.8.	La propriété de pairité	64
2.8.1.	Traduction de la directive de substitution	67
2.8.2.	Traduction de la directive de détachement	69
2.9.	Quelques métathéorèmes	70
2.10.	Organisation des résultats	77
3.	Le calcul équivalentiel quantifié SQ1	79
3.1.	Préambule	79
3.2.	Définition de l'expression équivalentielle quantifiée dans SQ1	80
3.2.1.	Résumé	81
3.3.	Les axiomes	82
3.4.	Les règles d'inférence	83
3.4.1.	La directive de substitution	83
3.4.2.	La directive de détachement	84
3.5.	Remarques générales	85
4.	Le système équivalentiel quantifié SQ2	87
4.1.	Les axiomes	87
4.2.	Les règles d'inférence	87
4.2.1.	La directive de substitution	87
4.2.2.	La directive de détachement	90
4.3.	La propriété de pairité	93
4.3.1.	Définition	95

4.4.	Quelques résultats	95
5.	Le système équivalentiel quantifié SQ3	98
5.1.	Préambule	98
5.2.	Les axiomes	98
5.3.	Les règles d'inférence	98
5.3.1.	La directive de substitution	98
5.3.2.	La directive de distribution des quantificateurs	99
5.3.2.1.	Présentation intuitive	101
5.3.2.2.	Formulation rigoureuse de la directive de distribution	103
5.3.3.	La directive de détachement	108
5.3.3.1.	Formulation rigoureuse de la directive de détachement	110
6.	Le système équivalentiel SQ4	111
6.1.	Préambule	111
6.2.	A propos de la définition	112
6.3.	Où il est question d'écriture	119
6.4.	Les axiomes	125
6.5.	Les règles d'inférence	128
6.5.1.	La directive de détachement	128
6.5.2.	La directive de distribution des quantificateurs	129
6.5.3.	La directive de substitution	130
6.5.4.	La directive de définition	130
6.5.4.1.	Généralités	130
6.5.4.2.	Formulation rigoureuse de la règle de définition	143
6.6.	Quelques thèses	147
6.7.	Qualités de SQ4	150
Chapitre III - LA PROTOETHIQUE		153
1.	Le système S1	153
1.1.	Préambule	153
1.2.	Les catégories sémantiques	154

1.2.1.	Présentation générale	154
1.2.2.	Généralisation	160
1.3.	Tarski: Une définition de la conjonction	164
1.4.	A la recherche d'un troisième axiome	174
1.5.	Les axiomes de S1	185
1.6.	Les règles d'inférence de S1	186
1.6.1.	La directive de détachement	187
1.6.2.	La directive de distribution des quantificateurs	187
1.6.3.	La directive de définition	188
1.6.3.1.	Formulation de la directive de définition	188
1.6.4.	Directive de substitution	204
1.6.4.1.	Préambule	204
1.7.	Quelques thèses	224
1.8.	Quelques métarègles	231
1.9.	Remarques	245
2.	Les protothétiques complètes	247
2.1.	Préambule	247
2.2.	Le système S2	247
2.3.	Le système S3	251
2.3.1.	La directive d'extensionnalité	253
2.3.2.	Formulation de la directive d'extensionnalité	254
2.4.	Le système S4	258
2.5.	Le système S5	259
2.5.1.	Préambule	259
2.5.2.	A la recherche d'un axiome unique	260
2.6.	Conclusion	264
TROISIÈME PARTIE - ONTOLOGIE		265
Chapitre IV - L'ONTOLOGIE		267
1.	Préambule	267
2.	Interprétation présémantique de l'épsilon	272

3.	L'axiome de l'ontologie	279
3.1.	La proposition	282
4.	Règles d'inférence de l'ontologie	284
4.1.	Préalable	284
4.2.	La directive de détachement	285
4.3.	La directive de distribution des quantificateurs	285
4.4.	Directive de substitution	285
4.5.	Les directives de définition	286
4.5.1.	Directive de définition de type protothétique	287
4.5.1.1.	Exemples de définitions ontologiques de type protothétique	288
4.5.2.	Directive de définition de type ontologique	294
4.5.2.1.	Formulation de la directive de définition ontologique de type ontologique	296
4.5.2.2.	Exemples de définitions de type ontologique	299
4.6.	Quelques démonstrations	303
4.7.	Les directives d'extensionnalité	314
4.7.1.	La directive d'extensionnalité ontologique de type protothétique	314
4.7.2.	La directive d'extensionnalité ontologique de type ontologique	319
4.7.2.1.	Formulation de la directive d'extensionnalité ontologique de type ontologique	319
5.	Les epsilons d'ordre supérieur	323
5.1.	Analogie structurelle et relationnelle	324
5.2.	Quelques théorèmes préparatoires	328
5.3.	Analogie structurel et relationnel de l'axiome pour la catégorie $S/(S/N)(S/N)$	334
6.	Quantification et interprétation	339
6.1.	Préambule	339
6.2.	L'interprétation objectuelle	340
6.3.	L'interprétation substitutionnelle	344

6.3.1.	Préambule	344
6.3.2.	Une définition	345
6.4.	Leśniewski et la quantification substitutionnelle	352
6.5.	Quantification et existence	356
6.6.	Interprétation de l'ontologie de Leśniewski	362
6.6.1.	Avertissement	362
6.6.2.	Domaine syntaxique	363
6.6.3.	Domaine sémantique	364
6.6.4.	Interprétation	368
7.	Remarques	373
QUATRIEME PARTIE -	MERELOGIE	375
Chapitre V -	LA MERELOGIE	377
1.	Préambule	377
2.	Considérations générales	378
3.	Une première approche de la classe méréologique	379
4.	Les axiomes de la méréologie	396
5.	Quelques thèses	400
6.	Quelques définitions	422
7.	Méréologie et treillis	426
7.1.	Une relation d'ordre partiel	426
7.2.	Définitions	427
7.3.	Structure de treillis borné supérieurement	430
8.	D'autres bases axiomatiques pour la méréologie	435
8.1.	Le système axiomatique de 1918	435
8.2.	Le système axiomatique de 1920	438
8.3.	Le système axiomatique de 1921	440
8.4.	Axiomes uniques	441
9.	Remarques	442
Conclusion		445
Bibliographie		451
Bibliographie relative à Stanislaw Leśniewski		463
Index		465

A V A N T - P R O P O S

Voici quelques années, J.-B. Grize, directeur du Centre de Recherches Sémiologiques de l'Université de Neuchâtel, mettait en évidence que les objets de la logique naturelle satisfont les propriétés d'une classe collective. L'approfondissement de cette notion l'a conduit à prendre conscience que ces qualités collectives étaient parentes de celles de la classe méréologique de Stanislaw Leśniewski.

Participant aux travaux de Grize, nous nous sommes intéressé à comprendre cette notion de classe méréologique ainsi qu'à cerner les systèmes logiques dans lesquels elle prend vie formelle. Cette démarche nous a conduit à pénétrer peu à peu l'oeuvre de Leśniewski, de la protothétique à sa théorie générale des ensembles, en passant par l'ontologie. La lecture des documents dont nous disposons nous a stimulé, parfois provoqué; elle nous a engagé surtout à proposer un développement des théories logiques de ce savant polonais.

L'ouvrage que nous présentons est un témoignage de cette reconstitution ainsi que l'expression de nos réflexions qui l'accompagnent.

PREMIERE PARTIE

L'HOMME ET SON OEUVRE

Chapitre 1

ELEMENTS DE BIOGRAPHIE

1. PREAMBULE

En Pologne, le développement de la logique mathématique a connu un épanouissement remarquable dans les premières décennies de notre siècle. Des noms fameux y sont aujourd'hui associés: Jan Łukasiewicz, A. Lindenbaum, A. Tarski. Des savants, aux noms compliqués pour nous, mais surtout moins connus, ont participé à cette renaissance de la logique polonaise. Cette participation n'a pas été une action de second ordre, bien au contraire. Mais le mystère de l'histoire, parfois le caractère de ceux qui ont contribué à cette élaboration scientifique ont relégué quelque peu des contributions déterminantes dans les oubliettes du temps. L'oeuvre de Stanisław Leśniewski est de celles-là.

La biographie que nous proposons retrace la vie de ce logicien et présente le cheminement de sa pensée. Il ne s'agit pas d'une étude historique, critique et systématique de l'oeuvre leśniewskienne. Notre intention est plus modeste et plus limitée. Elle consiste à situer et à signaler les réalisations scientifiques de Leśniewski; elle veut également témoigner de ses influences. Enfin, elle veut décrire les moments significatifs de l'élaboration d'une oeuvre particulièrement riche et originale.

2. De 1886 à 1911: PHILOSOPHIE

Né en Russie à Serpukhov, ville située au sud de Moscou, de parents polonais, Stanislaw Leśniewski (1886-1939)* commence sa scolarité en Sibérie. Elève, "he was shown to be [not?] adherent to any principles and intolerant of exceptions" rapporte Surma (1977, p. 191). De Sibérie, Leśniewski poursuit ses études en Allemagne où il assiste aux cours de Hans Cornélius (1863-1947). Il s'engage alors, au travers d'un mélange particulier de positivisme et de kantisme, dans le domaine de la psychologie (Kotarbinski, 1956, p. 157).

Puis c'est la rencontre avec Kazimierz Twardowski, professeur de philosophie à Lvov, alors ville polonaise, actuellement rattachée à l'U.R.S.S. Sous la direction de Twardowski, Leśniewski présente une thèse de doctorat qui portait sur: "une contribution à l'analyse des propositions existentielles" (Leśniewski, 1911). Twardowski, considéré comme le père de la philosophie polonaise, semble avoir eu une forte influence sur Leśniewski, tant par sa recherche de rigueur que par sa clarté.

... Leśniewski was deeply influenced not so much by Twardowski's philosophical opinions as by his insistence on rigor and clarity, solidly grounded in history of philosophy and logical traditions, and based on precise definition and analysis, which he inherited from Brentano and passed on to him (Luschei, 1962, pp. 18-19).

Philosophe avant tout, Leśniewski s'intéresse aux questions de "grammaire générale" ainsi qu'aux écrits relatifs à la philosophie du langage de Marty (Kotarbinski, 1967, p. 5). Influencé par les travaux logico-sémantiques de John Stuart Mill (Luschei, 1962, p. 19), il

**Luschei (1962, p. 308) cite la date du 30 mars 1886 et Sobocinski (1949-50, p. 94) celle du 18 mars 1886. Cette différence s'explique par la référence à deux calendriers différents: grégorien, respectivement julien. Surma (1977, p. 191) donne la date du 28 mars 1886. Il existe un accord concernant la date de son décès: 13 mai 1939.*

l'est probablement aussi par le 'psychologisme' du Husserl de la Philosophie der Arithmetik (Husserl, 1891). C'est la période où Lesniewski se jette avec passion dans le 'tourbillon de la spéculation philosophique' (Kotarbinski, 1976, p. 5). Il est préoccupé par le problème de la précision du langage comme élément indispensable à toute recherche philosophique.

He was convinced, at that time, that one had first to realize the meanings of words before one could philosophize with any responsibility (Kotarbinski, 1976, p.3).

Cette citation est d'importance: elle annonce le Lesniewski des explications terminologiques dont la clarté et la précision ont rarement été égalées.

3. LE PASSAGE A LA LOGIQUE

L'année 1911 est une année déterminante pour Lesniewski. La lecture de "Ueber den Satz von Widerspruch bei Aristoteles" (Lukasiewicz, 1910) le marque profondément. Il découvre la logique symbolique et l'antinomie russellienne. Cet événement important va déterminer son orientation dans le champ de la logique formelle. Lesniewski se plonge alors dans la lecture des oeuvres de Frege, de Husserl: les Logische Untersuchungen (Husserl, 1900-1901) et de Whitehead et Russell: le monumental Principia Mathematica (Whitehead et Russell, 1910-1913). Cette découverte du formalisme et du paradoxe russellien se confond, dans un premier temps au moins, avec un refus du formalisme. Lecteur attentif des Principia Mathematica, Lesniewski les décortique systématiquement pendant près de 4 ans (1914-1918). Cette lecture minutieuse lui pose problème. Lesniewski ne comprend pas le rôle du signe de l'assertion. Il n'accepte pas la définition de la classe-vide. L'étude des Principia Mathematica développe chez lui une grande méfiance à l'égard d'une logique symbolique qui se veut dépouillée de tout fondement intuitif. Cette hostilité disparaîtra lorsque Lesniewski réalisera

qu'il peut accepter les systèmes logiques comme des systèmes interprétés.

Les réactions de Leśniewski à l'égard du paradoxe russellien et les réflexions qu'elles suscitent en lui méritent attention. Formulée en 1902 dans le cadre de la théorie cantorienne des ensembles, l'antinomie russellienne provoque un réel bouleversement dans l'univers mathématique de l'époque. Cette révélation conduit à diverses recherches visant à reformuler la théorie des fondements mathématiques. Les Principia Mathematica ainsi que la théorie des ensembles que propose alors Zermelo (Zermelo, 1908) en sont deux exemples. Cependant les démarches proposées se caractérisent bien plus par une volonté d'éviter la formulation des antinomies que par le fait même de les surmonter. "... or un tel procédé n'est qu'une protection contre les contradictions qui menacent d'apparaître au dedans du système et ne surmonte pas l'antinomie elle-même" (Sobocinski, 1949-50, p. 16). En effet, la théorie des types que propose B. Russell évite l'antinomie mais ne la résoud pas.

Afin de bien comprendre la démarche de Leśniewski, il y a quelque intérêt à préciser la définition de ce qui était alors considéré comme une antinomie. Empruntons la définition de Nelson

An Antinomy is a contradiction which arises from axioms, which we believe to be correct, by the use of deductive rules, which we believe to be valid (Rickey, 1977, p.408).

Leśniewski va s'atteler au problème de la résolution des antinomies. Ses démarches se caractérisent par la discipline qu'il s'impose pour vérifier que, dans les systèmes où l'antinomie apparaît, aucune incorrection ne réside dans les règles de raisonnement, ni dans la validité des présupposés admis. Le projet de Leśniewski est donc simple dans ses intentions:

1. vérifier les règles de raisonnement;
2. vérifier la validité des présupposés.

S'il apparaissait qu'une règle de raisonnement était incorrecte ou qu'un des présupposés du système était faux, le problème de l'antinomie n'en serait plus un. En effet, déceler l'origine de la contradiction expliquerait la raison de l'existence même de l'antinomie.

La vérification des règles de raisonnement ne pose guère de problème à Leśniewski dans la mesure où la consistance de la théorie de la déduction - la logique des propositions - est déjà établie. Il étudie alors la signification des présupposés à la lumière des différents termes primitifs qu'ils contiennent: ensemble, classe, élément, ... Rappelons brièvement le climat mathématico-logique d'alors; ce rappel est de nature à caractériser l'esprit dans lequel l'analyse de Leśniewski s'est développée. On assiste aux balbutiements d'une science logique qui se cherche. Tarski n'a pas encore élaboré ses résultats relatifs au problème de la vérité. La frontière entre syntaxe et sémantique n'est pas réellement tracée. Logique et métalogue s'interpénètrent de manière non contrôlée. La théorie des ensembles ne fait qu'émerger; les définitions proposées sont souvent oiseuses et circulaires. Schröder ose inventer la classe vide qui tout en étant un ensemble, n'en est pas un. La communauté des mathématiciens est profondément perturbée par la découverte de l'antinomie russellienne. Leśniewski aborde cette situation avec un esprit critique féroce. C'est le temps de sa lecture de traités sur la théorie des ensembles, de celle des Principia Mathematica, et surtout de celle de l'oeuvre de Frege pour laquelle il n'a jamais caché son grand respect. Nous voulons restituer ici, dans leur esprit pour le moins, deux moments de ses interrogations. Le premier correspond à une des résolutions de l'antinomie russellienne qu'il propose. Le second représente le cheminement analytique par lequel Leśniewski s'oppose aux définitions de la 'classe' qui sont données à cette époque et qui le conduit à définir la notion de "classe collective".

4. ANALYSE DE L'ANTINOMIE DES CLASSES

Pour exposer la première démarche, nous nous inspirons du chapitre II de sur les fondements des mathématiques (O podstawach matematyki, Leśniewski, 1927, pp. 182-189). Les quelques pages qui le composent ont l'avantage de présenter la résolution de l'antinomie sans un lourd outil symbolique.

Formulons l'antinomie russellienne relative à la classe des classes qui ne sont pas leur propre élément. Pour ce faire, rappelons que les objets appartenant à une classe sont dits subordonnés à cette classe. Partant de là, il est possible de constituer une classe S qui soit la collection de toutes les classes non vides. Łukasiewicz dit de cette classe qu'elle est la classe des classes pleines (Łukasiewicz, 1910). Etant nécessairement une classe pleine, elle est donc subordonnée à elle-même. Remarquant qu'il existe des classes subordonnées à elles-mêmes, et sachant qu'il existe des classes qui ne sont pas subordonnées à elles-mêmes - par exemple l'ensemble des nombres naturels - rien ne défend de constituer la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes, soit R .

Une interrogation surgit alors: R est-elle subordonnée à elle-même?

Si nous répondons par l'affirmative: R est subordonnée à elle-même, nous rencontrerons un premier problème. En effet, les classes subordonnées à la classe R ne sont pas subordonnées à elles-mêmes; c'est même en raison de cette caractéristique qu'elles appartiennent à la classe R . Ainsi donc R ne peut pas être subordonnée à elle-même. Il y a contradiction.

Supposons alors que la classe R n'est pas subordonnée à elle-même. Cette hypothèse nous oblige à admettre que la classe R appartient à la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes, donc à la classe R elle-même. Situation fâcheuse puisque en ce cas, la classe R est subordonnée à elle-même.

Quelque soit donc l'hypothèse choisie, la contradiction subsiste.

Représentons formellement cette démarche. Définissons l'ensemble R :

$$1. \quad (\forall x) (\neg (x \in x) \equiv x \in R)$$

par substitution nous obtenons:

$$2. \quad \neg(R \in R) \equiv (R \in R) \quad 1, x/R$$

Il s'agit bien d'une contradiction.

Sur la base de ses propres intuitions - nous devrions dire de ses croyances - relatives à la notion de classe, Leśniewski développe ensuite un raisonnement par lequel il établit qu'aucun objet n'est la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes. En 1914, Leśniewski publiait une première analyse de l'antinomie russellienne (Leśniewski, 1914). Cette démarche est présentée et commentée par Sinisi (1976, pp. 19-34). La deuxième analyse a été publiée en 1927 (Leśniewski, 1927, pp. 187-189); elle vient d'être traduite par Sinisi (1983, pp. 14-17). Enfin, la troisième analyse de Leśniewski n'a jamais été publiée de son vivant; elle a été exposée par Sobocinski (Sobocinski, 1949-50) Nous présentons la deuxième analyse de Leśniewski.

(1) *jeżeli jakiś przedmiot jest klasą p-tów \underline{a} , to pewien przedmiot jest \underline{a}*

Si un objet est la classe des objets \underline{a} , alors un objet est \underline{a}

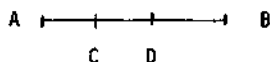
La classe est considérée comme un tout, vue comme le 'tas' d'éléments qui la constituent.

(2) *Wciąż się zdarza, iż ten a ten przedmiot jest klasą przedmiotów takich a takich i zarazem klasą przedmiotów całkiem innych*

Il arrive fréquemment qu'un objet soit la classe de tels et tels objets tout en étant la classe d'objets tout à fait différents

Explicitons davantage ce jugement: une classe générée par tels et tels objets peut être générée par des objets bien différents.

A cet égard, l'exemple d'une classe de segments donné par Lesniewski est très explicite.



AB peut être la classe des segments AC, CB, comme il peut être la classe des segments AD, DB. (Lesniewski, 1927, p. 187).

(3) *jeżeli jeden i tylko jeden przedmiot jest P, to P jest klasą p-tów P*

Si un et un seul objet est P, alors P est la classe des objets P

A la différence de la classe distributive, Lesniewski ne fait aucune distinction entre un objet P et la classe $\{P\}$.

(4) *P jest podporządkowane klasie K wtedy i tylko wtedy, gdy przy pewnym znaczeniu wyraz 'a' są spełnione warunki: α) K jest klasą p-tów \underline{a} , β) P jest \underline{a} .*

P est subordonné à la classe K si et seulement si en fonction d'une certaine signification de 'a' [s'il existe 'a'] : α) K est la classe des objets \underline{a} , β) P est un des \underline{a}

(5) *jeżeli P jest \underline{a} , to jeden i tylko jeden przedmiot jest P*

Si P est un des \underline{a} , alors un et un seul objet est P

(6) *jeżeli P jest \underline{a} , to P jest P*

Si P est un des \underline{a} , alors P est P

De (5) et (3) Lesniewski en déduit:

(7) *jeżeli P jest klasą, to P jest klasą p-tów P*

Si P est une classe, alors P est la classe des objets P

De (7) et (6)

(8) *jeżeli P jest klasą, to α) P jest klasą p-tów P, β) P jest P*

Si P est une classe, alors: α) P est la classe des objets P , β) P est P

De (8)

(9) jeżeli P jest klasą, to przy pewnym znaczeniu 'a' są spełnione warunki: α) P jest klasą p-tów \underline{a} , β) P jest \underline{a}

Si P est une classe, alors pour une certaine signification de 'a' [il existe \underline{a}]: α) P est la classe des \underline{a} , β) P est un des \underline{a}

De (9) et (4)

(10) jeżeli P jest klasą, to P jest podporządkowane klasie P

Si P est une classe, alors P est subordonnée à la classe P

De (10)

(11) żaden przedmiot nie jest klasą, nie podporządkowano sobie

aucun objet n'est une classe non subordonnée à elle-même

De (1) et (11)

(12) żaden przedmiot nie jest klasą klas, nie podporządkowanych sobie

aucun objet n'est la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes

Convaincu de ce résultat, Leśniewski ne voit plus d'antinomie. En effet, il ne croit pas en la supposition énonçant que la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes est subordonnée à elle-même, comme en la supposition contraire du reste. Il ne peut accepter l'existence de ce présupposé, comme il ne peut accepter l'existence d'un objet qui soit un rond-carré "-że żaden przedmiot nie jest okrągłym kwadratem-" (Leśniewski, 1927, p. 188). En effet, une telle proposition générerait, à coup sûr, une contradiction.

5. ANALYSE DE LA NOTION DE CLASSES

Abordons maintenant le second moment de la réflexion de Leś-

niewski annoncé plus haut, et dans lequel celui-ci s'oppose à la définition de la notion de classe telle qu'elle était alors présentée. Cette réflexion se trouve dans le chapitre III de Sur les fondements des mathématiques (Leśniewski, 1927).

Rappelons que pour Leśniewski la classe est une réalité, un objet, un 'amas', un 'tas' constitué d'éléments disjoints ou non. Elle n'est pas une invention de mathématicien, invention bien abstraite. Sa conception de la 'classe' est nourrie de l'appréhension naïve qu'il en a, de l'usage même du vocable de 'classe' ou d'ensemble' dans le langage naturel. Sa conception de la 'classe' ne s'éloigne cependant pas de celle de l'inventeur de la théorie des ensembles: Georg Cantor.

Jede Menge wohlunterschiedener Dinge kann als ein einheitliches Ding für sich angesehen werden, in welchem jene Dinge Bestandteile oder constitutive Elemente sind (Cantor, 1887, p. 83).

Chaque ensemble de choses bien distinctes qui peut être envisagé comme un tout dont elles constituent les ingrédients ou les éléments constitutifs.

Leśniewski (1927, p. 191) émet bien un doute à propos d'un autre énoncé relatif à la notion d'ensemble proposée par Cantor:

jede Zusammenfassung M , von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche 'Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen (Cantor, 1895, p. 431).

Chaque collection M réunissant en un tout des objets définis et bien distincts de notre intuition ou de notre pensée (objets appelés 'éléments' de M).

Leśniewski n'a aucune sympathie pour ce type de définition vague et peu significative, comme il n'en a aucune pour les inventions mathématiques bizarres, pour ces monstres théoriques, dit-il, comme la classe vide. Au sujet de la classe vide, il partage pleinement les vues de Frege. Dans le chapitre II de Sur les fondements des mathéma-

tiques. (Leśniewski, 1927, pp. 190-206), il cite abondamment les 'attaques' de Frege contre Dedekind et Schröder parues dans l'introduction des Grundgesetze der Arithmetik ainsi que dans l'article Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröder (Frege, 1895). La réaction de Leśniewski à l'égard de la classe vide est violente et sans appel: elle n'existe pas! Reprenant une définition, communément acceptée alors, qui pose que les éléments créent la classe de ces éléments, Leśniewski écrit (Leśniewski, 1927, p. 196):

Stojac na stanowisku, że, jeżeli jakiś przedmiot jest klasą jakichś a, \dots , to się z tych właśnie a składa, odrzucałem zawsze zgodnie... istnienie monstrów teoretycznych w rodzaju klasy kwadratowych kół, dobrze rozumiejąc, iż nie sie nie może składać z czegoś, czego wcale niema.

Acceptant que si un objet est la classe des a, \dots , alors il se compose des a , je refuse à jamais l'existence de monstres théoriques tels que la classe des cercles-carrés, car rien ne peut être créé de ce qui n'existe pas.

C'est alors qu'il cite la déclaration de Frege:

Wenn ... eine Klasse aus Gegenständen besteht, eine Sammlung, collective Vereinigung von Solchen ist, so muss verschwinden, wenn diese Gegenstände verschwinden. Wenn wir sämtliche Bäume eines Waldes verbrennen, so verbrennen wir damit den Wald. Eine leere Klasse kann es also nicht geben. (Frege, 1895, pp. 436-437).

Si une classe se compose d'objets, si une collection est la réunion collective de ces objets, alors la classe doit disparaître lorsque ces objets disparaissent. Lorsque nous brûlons la totalité des arbres d'une forêt, nous brûlons par ce moyen la forêt. Il ne peut être question de classe vide.

Leśniewski ne se contente pas d'être d'accord avec Frege sur la non existence de la classe vide. Son accord va plus loin. Il partage également la supposition selon laquelle toute classe singulière coïncide avec son propre élément. Partant de la thèse (3) (p.8) il le démontre effectivement (Leśniewski, 1927, p. 197).

(A) jeżeli jeden i tylko jeden przedmiot jest elementem klasy \underline{K} , to element klasy \underline{K} jest klasą elementów klasy \underline{K} .

Si un et un seul objet est un élément de la classe \underline{K} , alors l'élément de la classe \underline{K} est la classe des éléments de la classe \underline{K} .

(B) jeżeli \underline{X} jest klasą elementów klasy \underline{K} , to klasą \underline{K} jest tym samym przedmiotem, co \underline{X} .

Si \underline{X} est la classe des éléments de la classe \underline{K} , alors la classe \underline{K} est le même objet que \underline{X} .

Nous pouvons déduire de ces deux points:

(C) jeżeli jednem i tylko jeden przedmiot jest elementem klasy \underline{K} , to klasą \underline{K} jest tym samym przedmiotem, co element klasy \underline{K} .

Si un et un seul objet est l'élément de la classe \underline{K} , alors la classe \underline{K} est le même objet que l'élément de la classe \underline{K} .

(D) \underline{K} jest klasą jednostkową wtedy i tylko wtedy, gdy jeden i tylko jeden przedmiot jest elementem klasy \underline{K} .

\underline{K} est une classe singulière si et seulement si un et un seul objet est l'élément de la classe \underline{K} .

Le point D est la présentation d'une définition. Des points (D) et (C) nous obtenons (E).

(E) jeżeli jakaś klasą jest klasą jednostkową, to jest tym samym przedmiotem, co jedyny jej element.

Si une classe est une classe singulière, alors elle est le même objet que cet élément.

Sans prétendre à l'existence de classes singulières, Lesniewski est convaincu de la thèse (E). Il est également convaincu que tout objet n'est pas la classe dont cet objet est l'unique élément. C'est en raison de cette conviction qu'il s'oppose alors à Frege. Cette opposition va plus loin qu'un simple refus d'une définition ou qu'une 'vue' non partagée, car elle signifie l'impossibilité dans laquelle se trouve Lesniewski de comprendre Frege. Nous l'avons dit et montré, Lesniewski

est un lecteur critique féroce: aucune imprécision, aucun raisonnement fallacieux ne lui échappent. Il y a chez Frege une démarche de pensée que Leśniewski ne saisit pas. Tentons de rendre compte de cette démarche et par ce biais d'infirmier ou de partager les refus que Leśniewski oppose à Frege. Refusant l'hypothèse selon laquelle chaque classe de tels ou tels objets se compose précisément de ces objets, Frege définit la classe comme l'extension d'un concept.

Der Umfang eines Begriffes besteht nicht aus den Gegenständen, die unter den Begriff fallen, etwa wie ein Wald aus Bäumen, sondern er hat an dem Begriffe selbst und nur an diesem seinen Halt (Frege, 1895, p. 455).

L'extension d'un concept ne se compose pas des objets qui sont subsumés au concept, un peu comme une forêt se compose d'arbres, mais au contraire découle uniquement du concept.

Leśniewski avoue n'y rien comprendre (Leśniewski, 1927, p. 200). Si la classe composée des a ne constitue pas l'extension du concept a, alors qu'est-ce que cette extension du concept a? La vieille rancune de Leśniewski à l'égard des mathématiciens s'élève une fois encore. Parlant de cette extension il écrit:

że chodzi tu poprostu o jakieś przedmioty, "wymyślone" przez logików na utrapienie licznych pokoleń. (Leśniewski, 1927, p. 200).

Il s'agit tout simplement de quelques objets "inventés" par les logiciens pour le tourment de nombreuses générations.

Cet accès de mauvaise humeur ne va pas sans un désir violent de comprendre, c'est-à-dire de rechercher une formulation de la définition de l'"extension d'un concept". Une autre remarque de Frege n'éclaircit en rien les choses:

Bei solchen Functionen, deren Wert immer eine Wahrheitswert ist, kann man demnach statt, "Wertverlauf der Function" sagen "Umfang des Begriffes" und es erscheint zweckmässig, Begriff geradezu eine Function zu nennen,

deren Wert immer ein Wahrheitswert ist (Frege, 1962, p.8).

Dans le cas de fonctions dont la valeur est toujours une valeur de vérité, on peut dire à la place de "parcours des valeurs de la fonction", "extension du concept", et il paraît convenable de nommer précisément concept la fonction dont la valeur est toujours la valeur de vérité.

Nous avons voulu comprendre les difficultés de Lesniewski à saisir, à appréhender la définition de l'"extension d'un concept". Pour ce faire nous sommes retournés aux sources mêmes, les Fondements de l'arithmétique, de Frege et plus précisément les paragraphes 68 et 69. Nous empruntons la traduction française qu'en donne Claude Imbert.

Dans le paragraphe 68 nous lisons :

La direction de la droite a est l'extension du concept "parallèle à la droite a ". La forme du triangle d est l'extension du concept "semblable au triangle d ".

...

Le nombre qui appartient au concept F est l'extension du concept: "équinomérique au concept F ". (Frege, 1969, pp. 193-194).

Ces quelques lignes ne nous éclairent en rien sur ce que pourrait être l'"extension d'un concept". Continuons notre lecture.

Peut-être voit-on mal la justesse de cette définition. Ne peut-on pas comprendre autre chose sous les termes: extension de concept? Ce qu'il faut entendre par là ressort clairement des énoncés premiers que l'on peut formuler concernant les extensions de concept. Ce sont:

I. leur identité

II. qu'une extension est plus vaste que l'autre. (Frege, 1969, p. 194).

L'espoir de trouver quelques précisions dans la suite du § 69 reste vain. Une note relative à l'extension d'un concept n'explique rien :

Je pense qu'on pourrait dire tout simplement "concept" à la place de "extension du concept" (Frege, 1969, p. 194).

Paragraphe "dense et obscur" dit C. Imbert (1969, p. 53). Nous ne pouvons que partager cet avis. Il semble en effet que Frege n'a pas su donner de l'extension d'un concept une définition satisfaisante. Imbert, encore, suggère une explication qui rend compte de la difficulté qu'a eue Frege à définir clairement la notion d'"extension de concept".

Il semble que Frege, cherchant à discerner une notion pour laquelle le vocabulaire n'est pas encore fixé, ait quelque peine à distinguer l'extension du concept, en tant qu'elle est une classe d'équivalence qui peut être incluse dans une autre classe plus vaste, et cette même classe en tant qu'elle est un élément, une unité pour employer les termes de Frege, dans l'ensemble quotient. D'où les précautions de langage, et les nombreux retours sur la notion d'extension du concept. C. Imbert, 1969, p. 54).

C. Imbert poursuit:

En conséquence, si le nombre, en tant qu'objet, est élément de l'ensemble quotient, il ne saurait être inclus dans une classe définie sur l'ensemble initial. L'ambiguïté signalée naît de ce que Frege n'a aucun moyen, ni dans la langue, commune ni dans l'idéographie, pour distinguer l'extension de concept, en tant qu'elle est une classe d'équivalence, de l'élément correspondant défini sur l'ensemble quotient. Il faut penser que Frege n'avait qu'un sentiment imprécis de cette différence si l'idéographie, conçue pour représenter les articulations conceptuelles que la langue ignore, n'a pas évité ce défaut (C. Imbert, 1969, p.57).

Lesniewski a vécu profondément ce 'sentiment d'imprécision' inhérent à la définition fregéenne. Nous voulons encore citer Frege qui sait bien qu'une justification, un éclaircissement de sa définition de l'extension de concept reste nécessaire.

Es bleibt also wohl nichts anderes übrig, als die Begriffs-umfänge oder Klassen als Gegenstände im eigentlichen und vollen Sinne dieses Wortes anzuerkennen, zugleich aber einzuräumen, dass die bisherige Auffassung der Worte "Umfang eines Begriffes" einer Berichtigung bedarf (Frege. 1962. pp. 255-256).

Il n'y a rien d'autre à faire que de reconnaître dans les extensions de concepts ou classes, des objets au sens pro-

pre et plein du mot, tout en admettant que la manière dont nous interprétons l'expression 'extension d'un concept' aurait besoin d'être justifiée.

A relire Frege, nous réalisons combien il lui était difficile de composer entre les exigences d'un système formel et l'élaboration d'un modèle. Il faudra attendre les résultats de Tarski pour se convaincre de la nécessité de séparer franchement l'univers d'un jeu syntaxique de celui de son interprétation sémantique. Comme le dit C. Imbert "La subtilité de la construction des fondements vient de ce que Frege mène de front la construction des énoncés et la construction du modèle de ces énoncés". Dans cet amalgame il est normal qu'apparaissent des zones obscures que, seule, la distinction tranchée entre domaine syntaxiques et domaine sémantique aide à éclaircir. Peut-on dire que Tarski a puisé dans l'oeuvre de Frege les éléments qui ont contribué à la genèse de ses résultats? Il nous est difficile de l'affirmer maintenant. Mais lorsque l'on sait que son oeuvre s'est construite sur celle de Leśniewski, il est des associations qui ne nous semblent pas sans signification. Nous ne pouvons pas imputer uniquement à Frege la responsabilité du mystère qui s'attache à l'expression "extension de concept". Au début du siècle, cette "chose" mal définie est analysée par d'autres auteurs. Comme il arrive souvent, la même expression prend des significations différentes, ce qui rend la quête de Leśniewski plus difficile encore, et il avoue (Leśniewski, 1927, p. 202) ne pas avoir trouvé de solution à la lecture, en particulier, des écrits de Zermelo (Zermelo, 1908).

Il reste bien sûr la lecture des Principia Mathematica, mais Leśniewski en ressort insatisfait. Nous voulons terminer l'exposé de ce deuxième moment de la réflexion de Leśniewski en présentant ses désaccords avec Whitehead et Russell, désaccords relatifs à la notion de classe. Comme le fait Leśniewski (1927, pp. 202-203) citons un passage significatif des Principia Mathematica. Son intérêt pour notre propos excuse sa relative longueur.

Classes. The symbols for classes, like those for descriptions, are, in our system, incomplete symbols: their "uses" are defined, but they themselves are not assumed to mean anything at all. That is to say, the uses of such symbols are so defined that, when the "definiens" is substituted for the "definiendum", there no longer remains any symbol which could be supposed to represent a class. Thus classes, so far as we introduce them, are merely symbolic or linguistic conveniences, not genuine objects as their members are if they are individuals.

It is an old dispute whether formal logic should concern itself mainly with intensions or with extensions. In general, logicians whose training was mainly philosophical have decided for intensions, while those whose training was mainly mathematical have decided for extensions. The facts seem to be that, while mathematical logic requires extensions, philosophical logic refuses to supply anything except intensions. Our theory of classes recognizes and reconciles these two apparently opposite facts, by showing that an extension (which is the same as a class) is an incomplete symbol, whose use always acquires its meaning through a reference to intension.

In the case of descriptions, it was possible to "prove" that they are incomplete symbols. In the case of classes, we do not know of any equally definite proof, though arguments of more or less cogency can be elicited from the ancient problem of the One and the Many*. It is not necessary for our purposes, however, to assert dogmatically that there are no such things as classes. It is only necessary for us to show that the incomplete symbols which we introduce as representatives of classes yield all the propositions for the sake of which classes might be thought essential. When this has been shown, the mere principle of economy of primitive ideas leads to the nonintroduction of classes except as incomplete symbols.

* Briefly, these arguments reduce to the following: If there is such an object as a class, it must be in some sense "one" object. Yet it is only of classes that "many" can be predicated. Hence, if we admit classes as objects, we must suppose that the same object can be both one and many, which seems impossible.

(Whitehead, Russell, 1910, I, p. 75).

Dans ce passage Lesniewski retient les trois points suivants:

1. Les symboles de classe sont utilisés comme des commodités linguistiques ou symboliques. Rien n'est dit de ce que peut être une classe, sinon qu'elle est la même chose qu'une extension et qu'elle n'est pas un objet authentique.
2. Le refus d'accepter la classe comme un objet; cette impossibilité se soutient du fait qu'un objet ne peut être à la fois un et plusieurs.
3. Une imprécision gênante dans ce qui est écrit, qui ne peut que désorienter davantage un lecteur en quête d'informations précises. En effet, le fait que: "The symbols for classes...are incomplete symbols" et "...an extension (which is the same as a class) is an incomplete symbol..." ne contribue pas à donner de la classe une définition ferme.

Nous avons relu les trois chapitres de l'introduction des Principia Mathematica en nous plaçant du point de vue de Lesniewski, c'est-à-dire en recherchant une définition de contenu. Dans cette intention, notre attente de trouver une définition claire de la notion d'extension a été déçue. Voici ce que nous avons trouvé:

When two functions are formally equivalent, we may say that they have the same extension. In this definition, we are in close agreement with usage. We do not assume that there is such a thing as an extension; we merely define the whole phrase "having the same extension".

...

Since extensional functions are many and important, it is natural to regard the extension as an object, called a class, which is supposed to be the subject of all the equivalent statements about various formally equivalent functions. (Whitehead, Russell, 1910, p. 77).

Lesniewski recherche une définition concrète, réelle de la classe. Dans cet esprit, il est manifeste que le recours à la définition de l'extension pour éclairer celle de classe ne l'aide en rien. Ce qu'il sent dans ces définitions l'inquiète. Il perçoit que Whitehead et Russell, comme Frege du reste, mettent en question l'existence des

classes telles qu'il en a l'intuition.

Sa réponse, ou plutôt le sentiment qu'il ressent à la lecture des oeuvres citées, s'exprime de manière bien ironique:

Czuając w "klasach" pp. Whiteheada i Russella, podobnie jak w "zakresach prosię" Fregego, zapach mitycznych okazów z obfitej galerji przedmiotów "wymyślonych", nie mogą się ze swej strony pozbyćskłonnosci do solidaryzowania się "na kredyt" z wątpliwościami autorów, by przedmioty, będące takimi "klasami", istniały no świecie. (Leśniewski, 1927, pp. 204-205).

De la notion de "classe" de Whitehead et Russell, comme de celle d'"extension de concept" de Frege, émane une odeur particulière, celle des échantillons mythiques provenant de la riche exposition des objets "inventés". Je ne peux pas m'empêcher d'être solidaire - à crédit - avec les doutes des auteurs concernant l'existence de telles classes.

Pour Leśniewski, la classe est bien réelle, ce n'est pas uniquement une commodité symbolique ou linguistique. La classe est un objet, un "amas", le "tas" des objets qui la constituent. Parler de l'existence d'une telle classe fait sens. Whitehead et Russell voudraient également considérer la classe de cette façon. Somme toute, la notion de classe est un produit de l'observation. Les présupposés qui lui sont associés ne permettent cependant plus de lui attribuer une valeur existentielle. Russell le reconnaît clairement:

Nous avons déjà vu que les classes ne peuvent pas être regardées comme des espèces d'individus, à cause de la contradiction relative aux classes qui ne sont pas membres d'elles-mêmes... Nous ne pouvons pas considérer les classes d'une manière purement extensionnelle... comme des amas ou des agglomérations. Si nous étions tentés de le faire, nous ne pourrions comprendre comment il peut y avoir une classe telle que la classe nulle, qui n'a pas de membre du tout et ne peut être considérée comme un "amas"; nous trouverions aussi bien difficile de comprendre comment il arrive qu'une classe qui n'a qu'un membre ne soit pas identique à ce membre. (Russell, 1970, p. 217, première édition 1918).

La position russellienne est ferme dans ce paragraphe; elle l'était moins dans les Principia Mathematica.

A class 'which is the same as a manifold or aggregate' is all the objects satisfying some propositional function. (Whitehead, Russell, 1910, p. 24).

Il est intéressant de remarquer que la critique sévère formulée par Leśniewski à l'égard des Principia Mathematica naît d'une incompréhension de l'intention des auteurs. Whitehead et Russell attachent une grande importance au formalisme. Ils privilégient la forme par rapport au contenu. Leśniewski, lui, fait une lecture qui ne quitte jamais ce qui relie les formes au réel. Il ne peut donc trouver dans les Principia Mathematica ce qu'ils ne donnent pas à voir.

6. LA NOTION DE CLASSE COLLECTIVE

La longue démarche que nous venons de présenter montre combien l'appréhension de Leśniewski de la notion de classe diffère de celles de Russell, Frege, Zermelo, ... Née de l'analyse de l'antinomie russellienne et du refus des définitions proposées par les auteurs cités, la notion de classe que Leśniewski va élaborer - classe collective ou classe méréologique - se construit donc sur son intuition de l'organisation des objets dans le monde, sur sa profonde conviction que seuls les objets, les individus existent. Elle s'élève, non à l'écart du monde de la mathématique d'alors, mais dans un rapport de méfiance à l'encontre d'une mathématique qui s'efforce d'inventer des outils particuliers - des objets bizarres disait-il - pour préserver en fait sa valeur opérationnelle.

La première réussite qu'on doit à Leśniewski est d'avoir montré que les présupposés supposés vrais dans le système où apparaît l'antinomie ne le sont pas. Par là, il a su montrer que l'antinomie russellienne n'en était pas une. Cette confusion naît, en effet, de l'amalgame inacceptable de deux notions de la classe, une notion distributive et une notion collective. Sobocinski les précise:

La classe distributive

L'expression "classe (a)" n'est au sens distributif, qu'un nom apparent qui remplace le terme bien connu de la logique classique "l'extension des objets a". Si l'on prend le terme "classe" dans ce sens, la formule " $A \in Kl(a)$ " signifie la même chose que "A est un élément de l'extension des objets a", c'est-à-dire, plus brièvement " $A \in a$ ". (Sobocinski, 1949-50, p. 240).

La classe collective

Par contre, le terme "classe collective" est un nom réel: on ne peut pas l'éliminer en le ramenant à aucune autre conception de la logique. Au sens collectif, l'expression "classe (a)" indique un objet existant réellement, composé de tous les objets du domaine des objets a. En d'autres mots, s'il nous est donné un domaine quelconque des objets a, nous pouvons à l'aide du terme "classe" pris au sens collectif obtenir un objet composé uniquement des objets appartenant au domaine indiqué, des objets a. (Sobocinski, 1949-50, p. 241).

Le formalisme utilisé par Sobocinski est en fait dû à Leśniewski. Dans son acception distributive, l'expression $A \in Kl(a)$ doit se lire: A appartient à la classe des a. Dans son acception collective, cette même expression se lit: A est la classe des a. Quant à l'expression $A \in a$, elle peut s'interpréter ainsi: l'objet désigné par A est un des objets désignés par a - A est un des a. L'épsilon " \in " possède des propriétés différentes de celle du signe d'appartenance de la théorie des ensembles, le " \in ". Il serait donc faux de leur attribuer la même signification.

Grize propose une analyse extrêmement claire de la démarche de Leśniewski (Grize, 1973, pp. 77-100). Partant de présupposés relatifs à la classe, présupposés jugés "parfaitement acceptables", l'auteur met en évidence qu'ils sont inacceptables dans les deux interprétations, distributive d'une part, et collective d'autre part. Analysant ces présupposés, il montre que soit "leur apparente acceptabilité repose en fait sur la confusion spontanée des deux interprétations", soit

"les deux interprétations sont incompatibles entre elles" (Grize, 1973, p. 27).

La deuxième réussite de Leśniewski est d'avoir créé des systèmes qui remplissent le même rôle que les Principia Mathematica: celui de fonder les mathématiques. Pour cette tâche, Leśniewski n'a besoin ni de la notion de "classe vide", ni de celle de "classe abstraite". Il a certes recours à une théorie des catégories sémantiques, mais, bien que jouant un rôle analogue à la théorie des types de Russell, celle-ci n'est pas une simple "thérapie" élaborée pour échapper aux contradictions. Les catégories sémantiques sont considérées comme une structure linguistique qui permet d'exprimer des "distinctions grammaticales".

Im J. 1922 habe ich eine Konzeption der "semantischen Kategorien" skizziert, die mir diese oder jene einer jeden intuitiven Begründung für mich entbehrenden "Hierarchien der Typen" ersetzen sollten, und die, wenn ich überhaupt mit Sinn reden wollte, ich heute mich gezwungen fühlen würde anzunehmen, auch wenn keine "Antinomien" auf der Welt beständen (Leśniewski, 1929, p.14).

En 1922, j'ai esquissé une conception de "catégories sémantiques" qui devait remplacer la "hiérarchie des types". A mon avis, cette dernière manquait de fondements intuitifs. En fait, je voudrais avouer qu'aujourd'hui je me sentirais convaincu d'accepter la théorie des catégories sémantiques, même s'il n'existait aucune "antinomie" dans le monde.

7. MÉRÉOLOGIE, ONTOLOGIE, PROTOTHÉTIQUE

L'élaboration de la notion de classe collective amène Leśniewski à construire au cours des années 1914-1917 une nouvelle théorie déductive, la méréologie. Cette théorie n'est pas à proprement parler logique car les termes et les axiomes qui la fondent ne sont pas déductibles des principes logiques.

[Cette théorie] précise les relations plus générales entre les objets pouvant exister dans l'univers, par rapport aux

propriétés du terme "classe collective" ainsi qu'à celles des autres termes qu'on pourrait définir dans le cadre de la méréologie à l'aide du terme "classe collective" (Sobocinski, 1949-50, p. 254).

La volonté de formaliser les raisonnements logiques que Leśniewski avait utilisés de manière intuitive dans l'analyse de l'antinomie se concrétise au cours des années 1919-1921 par la construction d'une théorie générale des noms: l'ontologie. Slupecki nous donne la raison du choix de ce nom:

The only primitive term of Professor Stanislaw Leśniewski's system of the Calculus of Names -ontologie- is the verb "is"...

...This was by no means the only reason for Leśniewski to have given his system a name indicating of the branches of philosophy. Thus in Leśniewski's article "On the Foundations of Mathematics" [Leśniewski, 1931, p. 163] we read: "I used the term 'ontology' for the theory I developed, as this was not opposed to my 'linguistic intuition', just in view of the fact that I formulated in that theory a sort of 'general principles of being'". (Slupecki, 1955, p.7).

L'ontologie couvre la théorie du syllogisme, l'algèbre de la logique et la théorie des relations. La protothétique - théorie des thèses premières - est la "dernière" des théories leśniewskiennes. Elle est en fait le produit d'une nécessité, celle de baser les raisonnements de l'ontologie et de la méréologie sur les lois d'un système des propositions. La protothétique est un calcul des propositions élargi. Ce système correspond à un système des propositions quantifiées où la quantification ne porte pas uniquement sur des variables propositionnelles mais également sur des variables de foncteurs.

Ainsi, l'ordre chronologique de la création des systèmes de Leśniewski est l'inverse de leur ordre logique. En effet, la méréologie se base sur les deux systèmes déductifs que sont l'ontologie et la protothétique et, l'ontologie, à son tour, se fonde sur la protothétique qui constitue le système de base.

8. LES MODES DE CONSTRUCTION DE LEŚNIEWSKI

Nous parlons ici abondamment de système

Bien que Leśniewski pense toujours en termes de systèmes interprétés, il est possible, bien sûr, de les considérer à l'image des systèmes formels classiques. Cependant, cette comparaison doit être menée avec précaution. En effet, les systèmes formels de Leśniewski sont établis d'une manière très particulière. Leur élaboration est contrôlée par des règles dont la formulation et l'utilisation sont très particulières: les règles de procédures. Ces règles sont explicitées par les explications terminologiques.

Ces explications (1) précisent tout d'abord quels "mots" sont considérés dans le système, puis quels en sont les "termes". Elles (2) forment une terminologie qui désigne les "éléments constitutants" significatifs de ce qui est écrit dans le système, par exemple "quantificateur", "sous-quantificateur". Elles (3) nous apprennent à former des "complexes de mots et de termes" qui nous permettent d'inscrire des expressions que nous pouvons qualifier de bien formées. Enfin, et surtout, elles (4) s'achèvent par la formulation des règles d'inférences: les règles de procédures. Les explications terminologiques ne présentent pas de caractère récursif (inductif), elles sont des énoncés définitoires utilisés par Leśniewski pour parler de ces systèmes formels. Les explications terminologiques, une fois exprimées d'une manière entièrement formelle, constituent l'explicitation de la métalangue utilisée par Leśniewski pour parler de ces systèmes. Leur originalité consiste non en une volonté de présenter une catégorisation des "marques" qui apparaissent dans un système - mais de caractériser ces "marques" en fonction de leur forme et de leur position dans une inscription. Comme le dit Kearns:

The [terminological explanations] do not refer to the meanings of the terms in the system - these terms are characterized by means of their shapes and positions... The terminological explanations should not be considered as expressions in a formal system, they are statements in the

language used by Leśniewski. (Kearns, 1967, p. 66).

Ces explications terminologiques - quarante-neuf pour la protothétique (Leśniewski, 1929, pp. 59-76) et cinquante-sept pour l'ontologie (Leśniewski, 1930, pp. 116-128) - sont exprimées à l'aide du symbolisme de la protothétique et de l'ontologie. Ce fait est significatif de la pensée leśniewskienne. Nous développerons ce point lorsque nous expliciterons la notion de système formel interprété.

9. COMPARAISON SYSTEMES CLASSIQUES / SYSTEMES LEŚNIEWSKI

L'analogie avec la présentation usuelle des systèmes formels paraît, à première vue sinon justifiée, en tous les cas pertinente. Une telle comparaison n'est cependant pas fondée. Pour le montrer, nous rappelons brièvement comment se présente les systèmes formels standard (ou classiques). Elle nous permettra de mieux expliciter les différences entre les systèmes leśniewskiens et les systèmes classiques.

On appelle système formel la donnée des objets suivants:

- I. Un vocabulaire (il s'agira en général d'un ensemble dénombrable de symboles);
- II. Un procédé de formation de formules (la notion de formule est l'analogue de celle de phrase grammaticalement correcte et consiste en une suite finie de symboles du vocabulaire; le procédé de formation sera en général effectif...);
- III. Une liste d'axiomes (dont chacun sera une formule);
- IV. Une liste finie de règles qui permettent de déduire une formule *A* (ou chacun des éléments d'un ensemble de formules) d'une formule *B* (ou d'un ensemble de formules).
(Encyclopédie Universalis, Vol. 10, 1974, p. 54).

En vue de mettre en évidence les différences et les similitudes des présentations leśniewskienne et classique, nous allons analyser ces divers points.

Point I

Partons de la présentation classique et choisissons un sous-ensemble de cet ensemble dénombrable de symboles; par exemple celui dont on dit qu'il est constitué d'un ensemble de variables d'objets. L'usage les inscrit telle une suite de lettres particulières: x, y, z, ... Dans les systèmes classiques, la 'caractérisation' de ces symboles, ici des variables d'objets, est fixée par le genre des symboles choisis. Le symbole x ne peut pas, dans ce contexte, représenter autre chose qu'une variable d'objet, nous ne pourrions pas lui attribuer une valeur de foncteur, par exemple. Rien de tel dans les systèmes lesniewskiens. Le même symbole x pourrait tout aussi bien être le symbole d'une variable d'objet que celui d'une variable de foncteur. Ne nous leurrons pas, une telle liberté n'est pas inconditionnelle. Elle est liée aux procédures de construction des systèmes de Lesniewski, procédures qui permettent d'éviter toute confusion. Ainsi, dans les systèmes de Lesniewski, tous les "termes" n'ont pas un type prédéterminé, il s'agit d'une marque. En elle-même, une marque n'appartient pas à une catégorie sémantique; elle n'a pas, prise isolément, de signification sémantique. La catégorie sémantique d'une marque particulière se précise en contexte. L'appartenance d'une marque à une catégorie particulière est déterminée d'une part partiellement par sa forme et par la place qu'elle occupe dans l'inscription à laquelle elle appartient et, d'autre part, par la relation que cette marque soutient avec d'autres marques qui ont été précédemment inscrites.

Point II

Les explications terminologiques ne proposent pas, à strictement parler, de règles de formation. Les règles de formation ainsi que celles de transformation de thèses (théorèmes) sont intimement liées les une aux autres dans ce que nous avons désigné sous l'expression de règles de procédures. Nous expliciterons ce problème lorsque nous aborderons l'analyse du point IV.

Point III

Les systèmes leśniewskiens ne peuvent pas non plus se passer d'une liste d'axiomes. Si ces axiomes jouent le rôle de thèses premières, comme le font les axiomes dans les systèmes classiques, ils le font de manière différente.

Contrary to the fashion prevailing among mathematicians Leśniewski insisted that only true propositions should be allowed as axioms of a deductive theory and that only those rules of transformation should be admitted which embodied intuitively valid rules of inference (Lejewski, 1958, p.150).

Cette remarque est importante. Leśniewski a conçu des systèmes logiques qui conservent constamment une dimension rattachée au réel. Ils ne sont pas une construction symbolique que l'on interprète par la suite. Les axiomes du calcul des propositions de Leśniewski, la protothétique, sont les expressions formalisées qui décrivent l'intuition profonde qu'il possède des lois, des relations et des constantes susceptibles de construire la logique des propositions.

The constants in Leśniewski's systems have meaning from the first. Their meaning is not conferred upon them by the axioms, rather it is the meaning they already have that makes the axioms true. (Kearns, 1967, p. 64).

Les axiomes ont encore une autre fonction. Ils sont les formules de base qui inscrivent les premiers symboles que le système a sélectionné, et sur lesquels ce dernier va pouvoir se développer. Les termes qui composent un axiome ne réfèrent pas à des listes de symboles préalablement définies; c'est l'organisation contextuelle d'un terme dans un axiome qui, comme dans une expression bien formée d'ailleurs détermine son appartenance sémantique ainsi que son statut de variable ou de constante.

Point IV

Nous l'avons dit, dans les systèmes de Leśniewski, les règles

de formation et celles de transformation ne présentent pas entre elles une frontière tranchée. Au premier temps de l'élaboration d'un système leśniewskien il y a les axiomes - non pas des schémas d'axiomes -; partant de là, et utilisant les règles d'inférences - les règles de procédures - nous pouvons créer de nouvelles thèses - théorèmes - en fonction de ce que le système contient à ce moment-là. Ainsi, ces systèmes ne sont pas donnés ou pré-supposés exister une fois pour toutes; ils se construisent peu à peu, c'est une explosion progressive de thèses qui se réalise dans l'espace et le temps. Il n'y a pas tout d'abord les expressions bien formées, puis ensuite celles particulières dont on démontre qu'elles sont des théorèmes. Il ne s'agit pas d'un luxe d'élégance ou d'une originalité gratuite. Cette façon de faire répond à la conviction profonde de Leśniewski. Un langage logique se présente un peu à l'image d'un discours qui se constitue et se développe dans le temps. Non à un langage pré-établi, mais des langages possibles. Ainsi, il serait faux de considérer le système de la protothétique ou le système de l'ontologie. C'est au pluriel qu'il faut en parler. Partant d'une axiomatique et des règles de procédures nous avons une grande liberté, mais une liberté contrôlée, de construire des systèmes et de les "orienter" en cours d'élaboration. On pourrait être tentés de représenter les systèmes leśniewskiens à l'image des systèmes classiques. Cela signifie fixer un ensemble de symboles et n'utiliser qu'eux. Ce faisant, on ne pourrait toutefois représenter qu'une partie des systèmes potentiels de Leśniewski. Non seulement on trahirait dans une certaine mesure l'esprit attaché à la construction des systèmes proposés par Leśniewski, mais on figerait encore ses systèmes.

10. ELEMENTS DE BIOGRAPHIE: 1919-1939

Tout en conduisant ses activités de recherches dans le champ de la logique, celui de la sémantique et celui des fondements des mathématiques, Leśniewski enseigne la philosophie des mathématiques à l'Université de Varsovie (1919-1939). Cette période voit se créer un centre de logique. Leśniewski y travaille en collaboration étroite

avec, notamment, Łukasiewicz et Kotarbinski; il participe également à la fondation d'une nouvelle revue Fundamenta Mathematicae, qui paraît dès 1920.

In Warsaw a period of splendour in the field of mathematical logic and the foudation of mathematics had begun

écrit Surma (1977, p. 194). Il n'y a pas à en douter lorsque l'on sait les noms prestigieux qui ont gravité autour et collaboré avec Lesniewski et Łukasiewicz: A. Tarski, A. Lindenbaum, K. Twadorwski, B. Sobocinski, M. Wajsberg, J. Ślipecki, Cz. Lejewski, H. Hiż...

Il est des questions sans réponse, la suivante est de celles-ci: "que serait-il advenu de cette effervescence - de ce bouillement scientifique - si la peste nazie ne l'avait ni dispersée, ni décimée"?

11. JUGEMENT D'ENSEMBLE

De l'oeuvre de Lesniewski pourrait se dégager, en première impression, l'idée d'une création principalement orientée par des intérêts de pur formalisme. Il serait faux de le croire, car ses systèmes formels représentent, avant tout, la formulation de ses intuitions logiques.

Intuitive interpretation, meaning, and truth concerned him [Lesniewski] more than mere formal consistency and technique; and his formal systems themselves represent the codification of his intuitive logic developed, systematized, axiomatized, symbolized, and formalized over the years... Formalization served him but as a precision instrument of rigor and clarity, an effective technique in the service of meaning and truth. He formalized his terminological explanations and directives with great care-but not because he favored formalization for its own sake. He was too concerned with interpretation to enjoy even formally consistent. (Luschei, 1962, p.50).

Ces quelques lignes de Luschei montrent bien que Lesniewski n'a jamais cessé d'être un philosophe, un type de philosophe qui sen-

tait la nécessité et le besoin de communiquer les résultats de ses recherches de la manière la plus claire et la plus rigoureuse qui soit; le choix du formalisme s'imposait. La réalisation de ce choix est d'une qualité rare.

There are many "pure" formalists among logicians and mathematicians but there are few "pure" formalists among philosophers. For philosophers are, for the most part, pre-occupied with the problem of meaning. Whether they deal with expressions of ordinary language or with logical formulae, they are concerned with interpretation rather than with formal elegance alone. The doctrine of "pure" formalists could perhaps be condensed into the following motto: formalization before interpretation. Lesniewski's principle would lead in the reverse (Lejewski, 1958, p. 151).

Lesniewski ne croit pas en l'utilité d'un pur jeu symbolique. Un système formel non basé sur l'intuition est déficient. Les constantes - celles qui apparaissent dans les axiomes - ont une signification dès le départ. Parlant de ces constantes, Kearns écrit:

Their meaning is not conferred upon them by the axioms, rather it is the meaning they already have that makes the axioms true. Of course, we understand the meaning of these terms by considering how they are employed in the axioms; this is the reason why Lesniewski thinks that it is useful to formalize intuition (Kearns, 1967, pp. 64-65).

Notre oeil de logicien d'aujourd'hui ne décèle pas une confusion dans cette attitude, mais l'"amalgame" des niveaux syntaxique et sémantique. Il est "écrit" quelque chose dont on dit qu'il "a cette interprétation". Il faudra attendre l'avènement des théories sur la vérité de Tarski pour clarifier pleinement ce problème.

Nous ne pouvons pas résister à la tentation de citer Lesniewski lui-même qui se définit comme un intuitionniste confirmé, doublé d'un formaliste radical.

Ich sähe keinen Widerspruch darin, wenn ich behaupten wollte, dass ich eben deshalb beim Aufbau meines Systems einen ziemliche radikalen "Formalismus" treibe, weil ich

ein verstockter "Intuitionist" bin: indem ich mich beim Darstellen von verschiedenen deduktiven Theorien bemühe, in einer Reihe sinnvoller Sätze eine Reihe von Gedanken auszudrücken, welche ich über dieses oder jenes Thema hege, und die einen Sätze aus den anderen Sätzen auf eine Weise abzuleiten, die mit den Schlussweisen harmonisieren würde, welche ich "intuitiv" als für mich bindend betrachte, kenne ich keine wirksamere Methode, den Leser mit meinen "logischen Intuitionen" bekannt zu machen, als die Methode der "Formalisierung" der darzuliegenden deduktiven Theorien, die jedoch keineswegs unter dem Einfluss solch einer "Formalisierung" aufhören, aus lauter sinnvollen Sätzen zu bestehen, welche für mich intuitive Geltung haben. (Leśniewski, 1929, p. 78).

Je ne vois aucune contradiction en disant que, par conséquent, j'ai pratiqué un "formalisme" plutôt radical dans la construction de mon système, tout en étant un "intuitionniste" obstiné: je me suis efforcé de représenter différentes théories de la déduction, d'exprimer à l'aide d'une succession de propositions sensées, une succession de pensées que je possédais sur tel et tel topique, et de dériver une proposition d'une autre d'une telle manière qu'elle s'harmonise avec la méthode que je considérais comme 'intuitivement' déductive. Je ne connais aucune méthode plus effective pour partager mes intuitions logiques avec le lecteur que la méthode qui consiste à "formaliser" les théories déductives exposées. Néanmoins, sous l'influence d'une telle 'formalisation', ces théories ne cessent, en aucune manière, de consister uniquement en des propositions sensées qui gardent pour moi une valeur intuitive.

Dans les affirmations qui précèdent, quelque chose nous gêne. Notre embarras naît d'un terme que la logique ne devrait pas connaître, nous voulons parler de l'intuition. De quelle intuition s'agit-il? D'une intuition empirique, d'une intuition rationnelle ou métaphysique, voire même divinatrice? Cette intuition a-t-elle quelque chose à voir avec la logique intuitionniste de Heyting? Non assurément pas!

Le problème de l'intuition chez Leśniewski n'est pas simple. A plusieurs reprises Leśniewski fait part de sa profonde conviction en "l'intuitive, l'irrésistible validité" de ses axiomes, de ses méthodes de définition et d'inférence.

[ich hätte] mir nicht die Mühe der Systematisierung und der vielmaligen skrupulösen Kontrollierung der Direktiven meines Systems gegeben, wenn ich nicht in die Thesen dieses Systems einen gewissen ganz bestimmten, eben diesen und nicht einen anderen, Sinn legen würde, bei dem für mich die Axiome des Systems und die in den Direktiven zu diesem System kodifizierten Schluss- und Definitionsmethoden eine unwiderstehliche intuitive Geltung haben. (Lesniewski, 1929, p. 78).

je n'aurais pas pris la peine de systématiser et de fréquemment contrôler scrupuleusement les directives de mon système, si je n'avais pas introduit dans les thèses de ce système un certain sens complètement déterminé - uniquement celui-ci et pas un autre - sens en vertu duquel ses axiomes, ses directives finales, et ses directives de définitions, codifiés pour ce système, possèdent pour moi une irréfutable et intuitive validité.

Se référant aux écrits de Lesniewski, Jordan écrit:

Lesniewski did not consider a formalized system as a play with signs, a game of chess, or anything of this kind. He believed in the absolute truth of some assumptions and formed his opinions about different systems from this point of view. (Jordan, 1967, p. 385).

Cette remarque ne nous permet cependant pas de caractériser ses suppositions, ses hypothèses essentielles. Nous pourrions multiplier les références concernant "l'intuition chez Lesniewski". Aucune analyse n'offre de solution satisfaisante. Y en a-t-il une du reste? Lesniewski lui-même s'est gardé de proposer une explication.

The psychic "sources" of my axioms are my intuitions, which simply means, that I believe in the truth of my axioms, but I am unable to say why I believe, since I am not acquainted with the theory of causality. My axioms do not have a logical "source", which simply means that these axioms do not have proofs within my system, just as in general no axioms, in the nature of things, have proofs in that system for which they are axioms. I am quite unable to answer the question, what is the "objective value" of my axioms, nor any other similar questions, which concern the exponents of the so-called theory of knowledge - because I admit sadly and to my clear disadvantage, that despite my most sincere wishes, I am still unable to

understand even one of the problems, which occur in the just mentioned respectable "science". (Leśniewski, 1916, p.4).

Rappelons que Leśniewski a construit un système des fondements de la mathématique. La connaissance qu'il possédait de l'antinomie russellienne et la résolution qu'il en a proposée ont motivé cette construction. L'esprit avec lequel il a abordé cette situation est rélateur. "Leśniewski is choosing to understand rather than to invent" (Kearns, 1967, p. 63). Il refuse de considérer la mathématique comme détachée du réel.

Under the pervasive influence of Russell's investigation, the problem of the 'antinomies' has become a central problem in the intellectual efforts of a number of eminent mathematicians. Again and again these efforts depart significantly from the historico-intuitive basis from which the 'antinomies' have developed. This has contributed to the deterioration of the feeling of the difference between the mathematical sciences, construed as deductive theories serving to formulate the heterogeneous reality of the world in the most exact laws, and those noncontradictory deductive systems which indeed assure the possibility of obtaining on their basis a wealth of continually new theorems, but which, however, are simultaneously characterized by a lack of any intuitive-scientific advantages linking them to reality. (Leśniewski, 1983, p.8).

La position de Leśniewski relative au rôle des théories déductives le conduit à concevoir des systèmes logiques qui sont profondément associés à une réflexion sur le discours pour en parler.

L'oeuvre de Leśniewski étonne par sa richesse, sa précision et son originalité. Nous ne pouvons pas manquer d'être surpris de savoir ses contributions si peu, voire si mal connues. Cette surprise s'explique cependant. Lorsque Leśniewski décide de "formaliser" ses différents systèmes au moyen de ses explications terminologiques, les Principia Mathematica sont bien connus au sein de la communauté des logiciens et des mathématiciens. Ils signifient plus qu'une simple réalité scientifique. Ils ont également imposé le choix d'un langage, d'un style, d'un point de vue surtout. Une certaine unité dans le courant

scientifique d'alors s'est cristallisée autour des Principia Mathematica, offrant peu d'espace à d'autres approches. Dans une certaine mesure, Leśniewski a été victime de cette situation, tout comme McCall du reste. En effet, l'esprit constructif des systèmes de Leśniewski est une caractéristique que les Principia Mathematica ne considèrent pas. Le rôle qu'il attribue à la définition s'écarte profondément du statut abrégatif communément accepté. Enfin, sa conception de la notion de classe diffère grandement de celle qui est définie dans les Principia Mathematica.

On aurait cependant tort d'imputer uniquement la raison de la méconnaissance des oeuvres de Leśniewski à la publication préalable de celles de Whitehead et Russell. Leśniewski a peu publié. Des raisons qui tiennent à son haut niveau d'exigence relativement à la qualité de ce qui devrait être publié en sont partiellement responsables. Le Père Bochenski nous avouait, dans une conversation, que Leśniewski avait résolu près de trois cents antinomies; il a publié moins de dix résolutions. Il est également nécessaire d'ajouter qu'un grand nombre de documents, de notes et d'articles dus à Leśniewski ont été détruits pendant l'insurrection de Varsovie. Enfin, des raisons d'ordre linguistique contribuent à expliquer la non-immédiateté de la diffusion des oeuvres de Leśniewski. En effet, le polonais et le russe n'étaient pas alors des langues idéales pour une rapide diffusion scientifique. (Luschei, 1962, p.44).

12. UNE OEUVRE RECONNUE

Terminons cette biographie en présentant très sommairement l'importance et l'influence de Leśniewski sur des personnages de grande importance scientifique. Le plus bel hommage que nous pouvons lui rendre est d'"écouter" ces personnalités scientifiques affirmer ce qu'ils doivent au maître polonais.

I have learned most from Professor Stanislaw Leśniewski. I explicitly indicate this in the various places in the texts, but those indications pertain only to the most important points. But I admit that all my reflections have been imbued with the influence of that extraordinary intellect of whose priceless gifts favourable fortune has enabled me to partake for many years in almost daily contact. I am decidedly a pupil of Professor Leśniewski whom I have the pleasure here of thanking cordially and respectfully for all he has ever taught me. (Kotarbinski, 1966, XII).

Kazimierz Ajdukiewicz, dans sa contribution relative aux connexions syntaxiques, écrit:

We shall base our work here on the relevant results of Leśniewski, adding on our part a symbolism, in principle applicable to almost all languages, which makes it possible to formally define and examine the syntactic connexion of a word pattern (Ajdukiewicz, 1967, pp. 207-208).

Tarski, dans son étude sur le concept de vérité relate:

Les remarques faites à ce propos [définition de l'expression 'proposition vraie'] ne constituent pas, dans la majeure partie, les résultats de mes propres recherches. Elles reflètent les idées développées par Stanislaw Leśniewski dans ses cours donnés à l'Université de Varsovie depuis 1919-1920, dans ses interventions au cours de discussions et dans ses entretiens privés. Il en est ainsi en particulier de la presque totalité de ce que je dirai des expressions entre guillemets et des antinomies sémantiques. (Tarski, 1972, p. 162, note 1).

Parlant des fondements du principe d'individualisation qui ne peut pas être résolu à partir de la métaphysique d'Aristote, Łukasiewicz affirme que la résolution de ce problème requiert "a more solid basis" et que cette base existe.

I am referring to a logical system created by my colleague Leśniewski and called by him "ontology". This system is little known in this country, because neither the author himself has ever given a full account of it, nor are the respective papers easily accessible. It is an extremely rich system and built up with the utmost care and precision, so that it deserves our highest attention. (Łukasiewicz, 1953, p. 77).

La distinction entre logique et métalogue peut être attribuée à Leśniewski. Même si cette distinction n'a pas été explicitement énoncée, elle a été effectivement employée. Il ne s'agit pas uniquement d'un sentiment qui se dégage à la lecture des "Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik" (Leśniewski, 1929) ou des "Ueber die Grundlagen der Ontologie" (Leśniewski, 1930), mais bien d'une réalité; Leśniewski réalise une distinction franche entre le langage logique et le métalangage qui permet d'en parler. Notre conviction est partagée par Luschei et Jordan notamment.

In his seminal lectures from 1919 onward, Leśniewski was the first (at least in modern times, to Tarski's knowledge) to attain, express clearly, and appreciate the consequences of certain fundamental insights, anticipating Russell, Ramsey, and Gödel. Recognizing that semantic concepts are relative to the "object" language or theory discussed, which may not coincide with thought it may be part of the "metalanguage" in which it is discussed. Leśniewski stressed the distinction between these correlatives. (Luschei, 1962, pp. 34-35).

Et,

A rather misty and somewhat loose relation between logic and the theory of proof gained in precision when Hilbert introduced the fundamentally important distinction between mathematics and metamathematics, meaning by the latter a system of rules having mathematical formulae for their object. Simultaneous, in close relation to Hilbertean idea, the Lwow-Warsaw School formulated the distinction between logic and metalogic.

...

The introduction of special metalogical notation is advisable for reasons of convenience, as it enables us to avoid an excessive use of quotation marks and guarantees a certain conciseness and elegance in speech and writing. Not only this, it was justified later on by its fruitfulness and the numerous important results it yielded.

...

Historically speaking the incentive in this direction was given by Leśniewski. (Jordan, 1967, pp. 365-367).

Nous pourrions multiplier les exemples et les citations qui établissent l'importance, l'originalité et la richesse des contributions de Leśniewski. Nous préférons les présenter peu à peu en exposant un développement de ses systèmes logiques.

DEUXIEME PARTIE

LA PROTHETIQUE

CHAPITRE II - LES CALCULS EQUIVALENTIELS

1. PREAMBULE

Nous avons montré l'importance de la découverte de l'antinomie russellienne dans le cheminement de la pensée de Leśniewski. Cette découverte -révélation- le projette littéralement dans l'univers de la logique. Nous avons esquissé la manière dont il résoud la contradiction. Enfin, nous avons présenté, de façon très sommaire il est vrai, les systèmes logiques de Leśniewski.

La construction de la protothétique ne s'est pas imposée d'un seul coup, elle s'est progressivement développée. En 1929, Leśniewski expose notamment le calcul équivalentiel S ainsi que cinq calculs des propositions, $S1 - S5$. Il ne fournit aucune information relative aux différentes analyses qui l'ont amené, à partir du système S , à concevoir le système $S1$. Nous nous sommes donné comme objectif de présenter un développement de systèmes logiques qui établit un lien entre le calcul le plus élémentaire développé par Leśniewski, S , et le système $S1$, qui sans être un système achevé de la protothétique en possède les caractéristiques essentielles. Nous présentons cette histoire sous la forme d'une genèse possible de la construction des systèmes de la protothétique. Partant du calcul équivalentiel le plus réduit, S , nous nous sommes demandé de quelle manière atteindre la protothétique élémentaire $S1$ en introduisant de nouvelles règles.

Chaque reconstitution d'un système intermédiaire se conçoit comme une extension du système qui le précède immédiatement. Tout se passe comme si les limites d'un système, son incapacité à recouvrir un calcul des propositions, nous donnaient la clé de l'élaboration d'un nouveau système. L'édification des systèmes que nous proposons recouvre probablement la démarche de Leśniewski. En effet, le développement suc-

cessif des protothétiques non élémentaires qu'il expose (Leśniewski, 1929) participe du même esprit.

Sur la base du calcul équivalentiel S, quatre nouveaux systèmes, SQ1 - SQ4, peuvent être postulés car, selon nous, ils représentent des étapes nécessaires qui permettent d'atteindre le système élémentaire de la protothétique, S1. Notre construction n'est pas uniquement motivée par cet objectif génétique, mais également par un objectif didactique: il s'agit de profiter de la présentation de systèmes simples pour, d'une part, inscrire une terminologie précise et, d'autre part, amener le lecteur à s'imprégner peu à peu du caractère dynamique et créatif des systèmes de Leśniewski.

1.2. QUELQUES CONSIDERATIONS HISTORIQUES

L'élaboration progressive des systèmes de Leśniewski s'inscrit dans le courant de pensée particulier à l'école polonaise de logique. Une fois encore, la conception de Leśniewski s'oppose à celle des Principia Mathematica. Le statut de la définition proposée par Whitehead et Russell, en effet, ne le satisfait pas.

Beide Ausgaben des Systems der Herren Whitehead und Russell besitzen auffällige Mängel... Insbesondere -ist auf dem Grunde dieses Systems die Sache der Festsetzung der Bedingungen fatal gestellt, denen irgendein Ausdruck genügen soll, damit man ihn als ein Definition annehmen oder als ein neues Theorem zu dem System hinzufügen darf. (Leśniewski, 1929, p.6).

Les deux versions du système de Whitehead et Russell possèdent des faiblesses frappantes... En particulier le problème de l'établissement des conditions qu'une expression quelconque doit satisfaire de manière à être acceptée comme une définition ou a être introduite comme une nouvelle thèse, embarrasse les fondements de ce système.

Il n'accepte pas de considérer les définitions comme de simples abréviations. Il les considère comme suffisamment importantes pour être

plus que des commodités linguistiques. Pour lui, les définitions introduisent toujours des idées nouvelles.

[Leśniewski's] work resulted in the rejection of the view that definitions are conventional abbreviations for economy and convenience in the presentation of a formal system, without which the system can do as well. Far from being an "expedient in presentation" or a "mere assignment of names", definitions are an act of choosing the complex and various ideas which are to become the object of study. (Jordan, 1967, pp. 362-363).

Leśniewski veut assigner un statut de thèse aux définitions. Son intention est de formuler une règle susceptible d'inscrire dans les systèmes formels des définitions qui ne soient ni des axiomes, ni des expressions imposées de l'extérieur par l'usage d'un signe qui n'appartient pas au système. Les idées introduites par le moyen des définitions vont apparaître comme des idées nouvelles construites en fonction de ce qui existe déjà, issues de celles qui sont déjà présentes. Elles expriment donc la potentialité de ce qui existe déjà. D'autre part, Leśniewski est également convaincu par le "principe d'économie" qui consiste à formuler les axiomes en utilisant le minimum de termes primitifs. Il a étudié les travaux de H.M. Sheffer. Ce dernier, en 1912, avait montré que deux foncteurs particuliers pris l'un ou l'autre comme unique terme primitif, étaient susceptibles de définir tous les autres foncteurs. Notons cependant que Peirce déjà avait mis en évidence l'existence d'un tel foncteur; il l'appelait alors l'amphéc, c.à.d., l'incompatibilité. (Blanché, 1970, p. 344).

En 1917, J.G.P. Nicod avait réussi à fonder la théorie de la déduction sur un seul axiome exprimé à l'aide de l'unique foncteur primitif appelé la "barre de Sheffer":

$P \mid q \mid r \mid :: t \mid . t \mid t \mid : : s \mid q \mid : p \mid s \mid . p \mid s$

(Leśniewski, 1929, p.10).

Sheffer et Nicod, tout comme Russel du reste, utilisent un signe spécial pour les définitions.

A definition is a declaration that a certain newly introduced symbol or combination of symbols is to mean the same as a certain other combination of symbols of which the meaning is already known. ...

We will give the names of definiendum and definiens respectively to what is defined and to that which it is defined as meaning. We express a definition by putting the definiendum to the left and the definiens to the right, with the sign "=" between, and the letters "Df" to the right of definiens. It is to be understood that the signe "=" and the letters "Df" are to be regarded as together forming one symbol...

It is to be observed that a definition is, strictly speaking, no part of the subject in which it occurs. ... Thus although we employ definitions and do not define "definition", yet "definition" does not appear among our primitive ideas, because the definitions are not part of our subject, but are strictly speaking, mere typographical conveniences.

(Whitehead. Russell, 1910, pp. 11-12).

Nous avons déjà dit que cette attitude face au problème de la définition gêne Leśniewski. Il 'sent' dans ce signe de la définition "...=Df..." comme une espèce de second signe primitif. Cette gêne révèle bien plus sa position novatrice par rapport au problème de la définition qu'une querelle de fond avec les auteurs des Principia Mathematica.

Il s'attèle à la tâche qui consiste à formuler d'une part les axiomes, et, d'autre part, les règles fondant les différents systèmes de la protothétique.

Die Definitionen -und Schlussdirektiven bemühte ich mich in einer solchen Weise zu formulieren, dass man sie mit Leichtigkeit den verschiedenen Systemen der Protothetik anpassen könnte- in Abhängigkeit von den verschiedenen primitiven Terminen, auf welchen die erwähnten Systeme aufgebaut werden sollten. (Leśniewski, 1929, p. 14).

Je me suis astreint à formuler les directives de définition ainsi que les directives finales de telle manière qu'elles pouvaient facilement être adaptée aux différents systèmes

de la protothétique, relativement aux différents termes primitifs sur lesquels les systèmes mentionnés pouvaient être construits.

Ce projet lui prendra du temps. Il commencera par examiner la possibilité de construire des systèmes élémentaires basés sur la biconditionnelle comme unique signe primitif. Ce foncteur lui semble en effet un bon candidat pour exprimer les définitions dans un système formel.

In den axiomatischen Forschungen konzentrierte ich mich auf die Aufgabe der Konstruierung eines möglichst einfachen Axiomensystems für das, ..., wenn auch in der Praxis noch nicht realisierte, System der Protothetik, welches auf das Äquivalenzzeichen, als den einzigen primitiven Termin, gestützt ist. (Leśniewski, 1929, pp. 14-15).

Dans les recherches axiomatiques, je me suis concentré sur la tâche de construire un système axiomatique, le plus simple possible, pour la protothétique, quand bien même en pratique, elle n'était pas encore réalisée. Ce système axiomatique est basé sur l'équivalence [la biconditionnelle] comme unique terme primitif.

Le premier système consiste en le calcul équivalentiel S.

2. LE SYSTEME EQUIVALENTIEL S

Il s'agit comme nous l'avons dit du système le plus élémentaire. Il est le point de départ, dans la quête de Leśniewski, de la construction des systèmes de la protothétique. Deux intentions sous-tendent sa recherche: d'une part une volonté de construire les systèmes logiques sur une base axiomatique ne comportant qu'un seul foncteur primitif: la biconditionnelle et, d'autre part, la volonté d'élaborer une procédure autorisant à introduire les définitions comme des thèses des systèmes. *Kukasiewicz* déclare (1967, p. 80) que *Leśniewski* a été le premier à reconnaître que le système équivalentiel bivalent pouvait être axiomatisé et, *Surma* (1977, p. 204) affirme que *Leśniewski* a été le premier à axiomatiser un tel calcul. Il a établi cette construction sur la base de deux axiomes et de deux règles d'inférence: la directive de substitution et la directive de détachement.

2.1. LES AXIOMES

$$A1 \quad ((p=r) \equiv (q=p)) \equiv (r=q)$$

$$A2 \quad (p \equiv (q=r)) \equiv ((p=q) \equiv r)$$

Ces deux axiomes contiennent un unique foncteur; il s'agit du foncteur \equiv formateur de propositions à partir de deux arguments propositionnels. Nous pouvons observer que seules les trois variables propositionnelles p , q , r sont inscrites dans les axiomes. D'emblée deux remarques d'importance s'imposent.

1) *Leśniewski* considère ses systèmes logiques comme des systèmes interprétés. Ainsi, les axiomes ne sont pas considérés comme un groupe de symboles qui ne prendraient "sens" qu'après une interprétation. Une fois inscrits les deux axiomes A1 et A2, on sait qu'ils contiennent des variables propositionnelles et que celles-ci sont interconnectées par le foncteur constant de biconditionnelle. Les catégories sémantiques des composants des axiomes leur donnent valeur de thé-

ses premières. L'axiome A1 propose une organisation formelle qui permettra d'établir la propriété de transitivité pour la relation d'équivalence et l'axiome A2 énonce la loi d'associativité pour l'opération de biconditionnelle.

2) La seconde remarque concerne une caractéristique essentielle des systèmes de Leśniewski. On n'y propose ni de schémas de thèses ni de métavariabes. Ainsi on ne dispose pas d'expressions schématiques qui engloberaient en un seul temps toutes les situations particulières possibles. Leśniewski a toujours considéré que ses systèmes se développaient dans l'espace et le temps, qu'ils avaient possibilité de croissance infinie. A chaque étape de la construction d'un système, les expressions sont donc en nombre fini. Cette croissance est nécessairement déterminée par les axiomes et les directives du système, mais cette détermination n'est pas univoque. Les directives qui seront fournies, notamment celle de définition, préserveront une grande liberté de choix dans la construction. Une analogie formulée par Luschei exprime de manière particulièrement éclairante cette caractéristique:

... their directives like genes controlling without completely determining their growth, so as to preserve the design and maintain proper functioning of the system. (Luschei, 1962, p. 127).

Cette expansion contrôlée des systèmes de Leśniewski, liée à cette liberté constructive d'inscrire peu à peu des constantes ou des foncteurs nouveaux nous incite à parler, comme le fait Simons (1982, p. 167) pour l'ontologie, de systèmes au pluriel. A chaque étape d'une construction, l'ensemble des thèses inscrites constitue l'expression d'un système particulier. Toutefois, maintenant, il est plus intéressant de considérer les systèmes élémentaires dans leur potentialité; c'est ce que nous ferons. A cette pluralité constructive il faut y ajouter une dimension nominaliste. En effet, dans la conception de Leśniewski, deux expressions inscrites en des endroits différents et ayant la même organisation symbolique ne sont pas considérées comme la même expression; on les dira simplement équiiformes. Cette propriété mérite d'être présentée.

2.2. L'EQUIFORMITE

Deux inscriptions -deux marques écrites ou deux groupes de marques écrites- sont équiformes si et seulement si elles sont composées du même nombre de symboles -mots- et si à chaque place correspondante de chaque inscription correspond un symbole de même forme.

Les expressions "place correspondante" et "même nombre" d'éléments n'exigent aucune explication. Il n'en va pas de même pour les notions de symbole -mot- et de même forme. Précisons-les. Par "marque", "symbole", plus généralement "mot" nous désignons une unité graphique, discrète, isolée ou non dans une inscription. Ainsi PEIRCE est une inscription composée de six mots alors que PEIRCE est également une inscription mais composée d'un seul mot; il n'y a qu'un seul symbole graphiquement distinct. Le bon sens incite à considérer la lecture des inscriptions de manière linéairement horizontale. Ainsi, par "même forme", nous signifions que les inscriptions sont homéomorphes, c'est-à-dire superposables par translation, sans rotation.

Les deux inscriptions distinctes p et p sont équiformes. PAIR et AIR ne sont pas équiformes mais possèdent des ingrédients équiformes: AIR.

L'inscription $p \equiv q$ est équiforme à elle-même.

La propriété "être équiforme" est donc réflexive, comme elle est aussi symétrique et transitive: c'est une relation d'équivalence. Nous verrons qu'elle joue un rôle important dans la formulation des directives de transformation propres aux systèmes de la protothétique.

Nous avons choisi de présenter les systèmes logiques simples de manière très conventionnelle. L'usage de définitions inductives et de métavariabes sera donc abondant. Ce choix est guidé d'une part par des motifs liés à la simplicité d'une telle présentation et, d'autre part par notre volonté de respecter la réalité historique: celle qui reflète les premières tentatives encore hésitantes de Leśniewski à

la recherche d'un système des propositions. Le système S dont nous allons parler est élémentaire. Il se construit à partir d'un ensemble E , au plus dénombrable de variables propositionnelles, $E = \{p, q, r, \dots\}$. Il possède un seul foncteur constant, $=$, la biconditionnelle; il s'agit d'un foncteur formateur de proposition à partir de deux arguments propositionnels. Il contient les deux axiomes, $A1$ et $A2$. Enfin, deux règles d'inférence permettent d'inscrire l'ensemble des thèses.

2.3. EXPRESSION EQUIVALENTIELLE

Dans le système S , les propositions sont toutes des expressions équivalentielles. Définissons cet ensemble de manière inductive.

1. Une variable propositionnelle est une expression équivalentielle.
2. Si A, B sont des expressions équivalentielles, $(A=B)$ est une expression équivalentielle.
3. Rien n'est une expression équivalentielle sinon par ce qui précède.

Convention: nous supprimerons la paire de parenthèses extérieures d'une expression équivalentielle.

2.4. LES REGLES D'INFERENCE

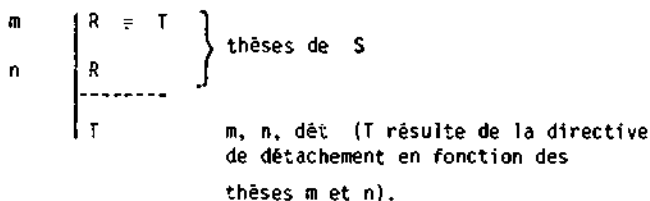
Nous présentons ces règles -directives- sans exploiter d'emblée le formalisme développé par Leśniewski. Nous n'exposerons donc point ici les explications terminologiques qu'il donne. Ce choix est motivé par notre volonté de rendre ces explications plus accessibles dans un premier temps. L'apprentissage du langage formalisé des explications terminologiques est en effet d'une réelle difficulté pour celui qui n'a pas déjà une certaine connaissance de la protothétique et de l'ontologie. En effet, les explications terminologiques sont systématiquement exposées -en plus des termes primitifs particuliers- à l'aide de termes et du formalisme de la protothétique et de l'ontologie. Il

s'agit, bien sûr, de l'expression formalisée de la métalangue. Nous cherchons plutôt à donner accès à la compréhension des systèmes logiques de Leśniewski en en parlant dans une langue naturelle. Une fois ces systèmes assimilés, il sera aisé de les traduire dans le formalisme de la métalangue.

2.4.1. DIRECTIVE DE DETACHEMENT: dét

Cette directive offre une analogie certaine avec la règle bien connue de détachement de la conditionnelle, que l'on appelle parfois règle du "modus ponens". Nous ne ferons pas ici la distinction qu'opère Łukasiewicz (1963). Cette directive permet d'obtenir une nouvelle thèse du système S à partir de deux autres thèses du système préalablement inscrites, à la condition que celles-ci aient entre elles une relation formelle bien déterminée.

Soit deux thèses de S. Si l'une est équivalente à l'argument gauche de l'expression équivalentielle qui constitue l'autre thèse, alors il est possible d'introduire l'argument droit de cette thèse comme thèse du système. L'argument gauche (respectivement droit) d'une expression équivalentielle consiste en la partie gauche (respectivement droite) du connecteur dominant de cette expression. Schématisons cette règle:



2.4.2. DIRECTIVE DE SUBSTITUTION: sub

Cette directive permet d'introduire dans le système S une nouvelle thèse à partir d'une thèse préalablement inscrite dans S en substituant à chaque occurrence d'une variable équiforme une expression équivalentielle équiforme. Schématisons cette directive.

Soit $A(p)$ une thèse de S contenant la variable propositionnelle p.

m	$A(p)$ ----- $A(E)$	thèse de S (thèse obtenue par sub. à partir de la thèse $A(p)$ en substituant aux variables équiformes à p dans A, une expression équivalentielle équiforme à E.) Notation: $m, \frac{p}{E}$
---	---------------------------	--

Afin de réduire la longueur des démonstrations nous nous autorisons à utiliser des substitutions simultanées.

Sur la base de ce que nous avons présenté, déduisons quelques thèses.

T1	$\{(q \equiv r) \equiv (r \equiv q)\} \equiv \{r \equiv r\}$	A1	$p/q, q/r$
T2	$\{(r \equiv (q \equiv r)) \equiv ((r \equiv q) \equiv r)\} \equiv \{(q \equiv r) \equiv (r \equiv q)\}$	A1,	$p/r, r/q \equiv r, q/r \equiv q$
T3	$\{r \equiv (q \equiv r)\} \equiv \{(r \equiv q) \equiv r\}$	A2,	p/r
T4	$\{q \equiv r\} \equiv \{r \equiv q\}$	T2, T3,	dét.
T5	$r \equiv r$	T4, T1,	dét.

Cette numérotation diffère de celle de Leśniewski (1929, pp. 16-22).

Arrêtons-nous un instant et observons la thèse T5. Elle montre que la variable propositionnelle r a une relation d'équivalence avec elle-même et que cette relation est réflexive. Mais elle ne le dit que pour cette inscription, d'une part, parce que notre système ne comporte que 7 thèses et rien d'autres et, d'autre part, parce que nous ne disposons pas de métavariabes. Toutefois, penser le système S

dans sa potentialité comme la réalisation théorique de ce qu'il peut promettre est conceptuellement beaucoup plus riche. A cette fin, comme nous l'avons fait d'ailleurs pour la présentation des directives de transformation, nous parlerons en termes de métavariabes dans le sens d'une généralisation. Cela signifie que nous considérons toute thèse de S comme le support d'une généralisation à toutes les expressions équivalentielles possibles qui sont susceptibles de se conformer au moule de la thèse. Cette façon de faire nécessite, en partant d'une thèse particulière, de penser à une infinité de substitutions possibles. Nous percevons donc ici l'intérêt qu'il y aurait à utiliser le quantificateur universel.

Ce qui vient d'être dit peut paraître ambigu. N'y a-t-il pas quelque incompatibilité entre l'intention de Leśniewski de proposer des systèmes spatio-temporels et cette volonté de considérer le système S dans sa potentialité? En fait, d'une part, le système S rend compte dans sa conception même de certaines hésitations. Le calcul équivalentiel, tel qu'il l'expose, ne présente pas encore clairement les caractéristiques des systèmes achevés. D'autre part, il y a sens à s'interroger sur les propriétés non pas d'un système privilégié, mais de tous les systèmes possibles et, ceci par rapport au mode de construction qui est proposé.

For Leśniewski, a formal system exists in space and time, and it contains just those results which have actually been deduced. This means that there are no unproved theorems of a formal system. However, this claim does not make proofs of completeness and consistency either trivial or senseless. These proofs must be understood as proofs about all possible well-formed formulas or theorem, rather than as proofs about this or that ideal system. Any problems connected with potentiality or possibility are different from those which result from admitting abstract entities. To say that every well-formed formula which can be constructed will either be provable or contradictory is not to say anything which commits us to recognizing the formal system containing the theorems. (Kearns, 1967, p. 66).

2.5. REGLES DERIVEES

Les quelques règles que nous présentons serviront avant tout, d'alléger les démonstrations.

2.5.1. DIRECTIVE DE COMMUTATIVITE: comm

Cette directive énonce que pour toute expression équivalente qui est une thèse de S , il est toujours possible de commuter les arguments du foncteur biconditionnel dominant.

Schématiquement, cela correspond à la transformation suivante:

m		A \equiv B	thèse de S

		B \equiv A	m, comm

Ce résultat est, en fait, un cas particulier attaché aux thèses de S de la propriété de commutativité inhérente au connecteur logique de biconditionnelle. La thèse T4, écrite en termes de métavariabes, donne à voir cette propriété:

1	A \equiv B	thèse de S
2	(A \equiv B) \equiv (B \equiv A)	T4, p/A, q/B
3	B \equiv A	2, 1, dét

Partant de l'expression $A \equiv B$ considérée comme une thèse du système, en utilisant la thèse T4 ainsi que la directive de détachement, on obtient immédiatement la thèse $B \equiv A$.

Sobocinski (1960) a établi des métarègles de procédures en relation avec la protothétique, notamment, une métarègle qui s'apparente à la directive comm. Ses métarègles sont en relation avec le système complet de la protothétique. Nous aurons l'occasion d'y revenir.

2.5.2. DIRECTIVE D'INTRODUCTION DU \equiv : int.

Partant de deux thèses A et B, préalablement inscrites dans S, cette directive autorise à introduire la thèse $A \equiv B$.

schéma:

m	A	thèse de S
n	B	thèse de S

	A \equiv B	m, n, int.

Justifions ce résultat.

Soit A et B, deux thèses de S

1. A	thèse de S
2. B	thèse de S
3. $(A \equiv (B \equiv (A \equiv B))) \equiv ((A \equiv B) \equiv (A \equiv B))$	A2, p/A, q/B, r/A \equiv B
4. $((A \equiv B) \equiv (A \equiv B)) \equiv (A \equiv (B \equiv (A \equiv B)))$	3, comm
5. $(A \equiv B) \equiv (A \equiv B)$	T5, r/A \equiv B
6. $A \equiv (B \equiv (A \equiv B))$	4, 5, dét.
7. $B \equiv (A \equiv B)$	6, 1, dét.
8. A \equiv B	7, 2, dét.

2.5.3. DIRECTIVE DE DEPLACEMENT: dpl.

Cette directive permet d'introduire une nouvelle thèse du système S à partir de deux autres thèses du système préalablement inscrites, à la condition que celles-ci aient entre elles une relation formelle bien déterminée.

Soit deux thèses de S qui sont des expressions équivalentielles. Si l'argument droit de la première est équiforme à l'argument gauche de la seconde, alors il est possible d'introduire comme thèse dans le système une expression équivalentielle dont l'argument gauche est équiforme à l'argument gauche de la première thèse, et dont l'argument

droit est équiforme à l'argument droit de la seconde. Schématisons cette règle.

m	A=B	}	thèses de S
n	B=C		
	A=C		
			m, n, dpl.

Justifions ce résultat.

Soit $A=B$ et $B=C$, deux thèses de S.

1. $A=B$ thèse de S
2. $B=C$ thèse de S
3. $((B=A) \equiv (C=B)) \equiv (A=C)$
A1, p/B, r/A, q/C
4. $B=A$ 1, comm
5. $C=B$ 2, comm
6. $(B=A) \equiv (C=B)$ 4, 5, int
7. $A=C$ 3, 6, dét

2.5.4. DIRECTIVE D'ASSOCIATIVITE: ass.

Cette directive permet d'introduire une nouvelle thèse du système S à partir d'une autre thèse du système préalablement inscrite, à la condition que celle-ci possède un argument droit qui soit une expression équivalentielle. Cette directive découle directement de l'axiome A2.

Schématisons cette règle.

Soit $A \equiv (B=C)$ une thèse de S

1. $A \equiv (B=C)$ thèse de S
2. $(A \equiv (B=C)) \equiv ((A=B) \equiv C)$
A2, p/A, q/B, r/C
3. $(A=B) \equiv C$ 1, 2, ass

Les propriétés de commutativité et d'associativité attachées au connecteur logique \equiv permettent de transformer de manière quasi mécanique toute thèse de S. Observons quelques transformations à partir de la thèse T4.

T4	$(q \equiv r) \equiv (r \equiv q)$	
T6	$(r \equiv q) \equiv (q \equiv r)$	T4, comm
T7	$((r \equiv q) \equiv q) \equiv r$	T6, ass
T8	$r \equiv ((r \equiv q) \equiv q)$	T7, comm
T9	$(r \equiv (r \equiv q)) \equiv q$	T8, ass
:		
:		

Nous établirons une méthode d'inscription plus générale que cette approche basée sur les directives que nous venons de présenter. Pour l'instant nous nous contenterons de ces directives pour démontrer quelques théorèmes qui nous serviront dans la suite de notre propos.

2.6. QUELQUES SCHEMAS DE THEOREMES

T10	$(P \equiv (Q \equiv R)) \equiv ((P \equiv Q) \equiv R)$	A2, $P/P, Q/Q, R/R$
T11	$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv (R \equiv (P \equiv Q))$	T4, $Q/P \equiv Q, R/R$
T12	$(Q \equiv P) \equiv (P \equiv Q)$	T4, $Q/Q, R/P$
T13	$(((P \equiv Q) \equiv R) \equiv ((Q \equiv P) \equiv (P \equiv Q))) \equiv (R \equiv (Q \equiv P))$	A1, $P/P \equiv Q, Q/R, R/Q \equiv P$
T14	$(R \equiv (Q \equiv P)) \equiv (((P \equiv Q) \equiv R) \equiv ((Q \equiv P) \equiv (P \equiv Q)))$	T13, comm
T15	$((R \equiv (Q \equiv P)) \equiv (((P \equiv Q) \equiv R) \equiv ((Q \equiv P) \equiv (P \equiv Q)))) \equiv ((R \equiv (Q \equiv P)) \equiv ((P \equiv Q) \equiv R)) \equiv ((Q \equiv P) \equiv (P \equiv Q))$	A2, $P/R \equiv (Q \equiv P),$ $Q/(P \equiv Q) \equiv R$ $R/(Q \equiv P) \equiv (P \equiv Q)$

T16	$((R \equiv (Q \equiv P)) \equiv ((P \equiv Q) \equiv R)) \equiv ((Q \equiv P) \equiv (P \equiv Q))$	T15, T14, dét
T17	$((Q \equiv P) \equiv (P \equiv Q)) \equiv ((R \equiv (Q \equiv P)) \equiv ((P \equiv Q) \equiv R))$	T16, comm
T18	$(R \equiv (Q \equiv P)) \equiv ((P \equiv Q) \equiv R)$	T17, T12, dét
T19	$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv (R \equiv (Q \equiv P))$	T18, comm
T20	$(R \equiv (Q \equiv P)) \equiv ((Q \equiv P) \equiv R)$	T4, $^q/R$, $^r/Q \equiv P$
T21	$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv (R \equiv (Q \equiv P))$	T19, T20, dpl
T22	$((Q \equiv P) \equiv R) \equiv (R \equiv (Q \equiv P))$	T20, comm
T23	$(R \equiv (Q \equiv P)) \equiv ((R \equiv Q) \equiv P)$	A2, $^p/R$, $^q/Q$, $^r/P$
T24	$((Q \equiv P) \equiv R) \equiv ((R \equiv Q) \equiv P)$	T22, T23, dpl
T25	$((R \equiv Q) \equiv P) \equiv (P \equiv (R \equiv Q))$	T4, $^q/R \equiv Q$, $^r/P$
T26	$((Q \equiv P) \equiv R) \equiv (P \equiv (R \equiv Q))$	T24, T25, dpl
T27	$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv (R \equiv (Q \equiv P))$	T21, T22, dpl
T28	$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv ((R \equiv Q) \equiv P)$	T27, T23, dpl
T29	$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv (P \equiv (R \equiv Q))$	T28, T25, dpl
T30	$(P \equiv (R \equiv Q)) \equiv ((P \equiv R) \equiv Q)$	A2, $^p/P$, $^q/R$, $^r/Q$
T31	$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv ((P \equiv R) \equiv Q)$	T29, T30, dpl
T32	$((P \equiv R) \equiv Q) \equiv (Q \equiv (P \equiv R))$	T4, $^q/P \equiv R$, $^r/Q$
T33	$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv (Q \equiv (P \equiv R))$	T31, T32, dpl

Ces quelques thèses n'ont pas grand intérêt en elles-mêmes. Elles permettent d'observer cependant un fait intéressant: toutes les variables équiiformes d'une thèse apparaissent en nombre pair. Ce résultat, induit pour l'instant, aura à être prouvé. La relation de transformation ainsi que le métathéorème de la transformée permet d'établir cette propriété de parité, propriété essentielle attachée aux expressions équivalentielles qui sont des thèses.

2.7. LA RELATION DE TRANSFORMATION, tr.

2.7.1. DEFINITION

Une expression équivalentielle E possède la relation tr. avec une expression équivalentielle D, si et seulement si, $E \equiv D$ est une thèse, $\vdash E \equiv D$. La relation tr est transitive, réflexive et symétrique, c'est une relation d'équivalence.

2.7.2. METATHEOREME DE LA TRANSFORMEE

Pour toute expression équivalentielle E et pour toute variable P qu'elle contient, il existe - si les conditions 1-4 sont remplies - une expression équivalentielle F tel que E possède la relation de transformation avec $P \equiv F$, (c'est-à-dire, $\vdash E \equiv (P \equiv F)$)

1. P est une des variables inscrites dans E.
2. F est une expression équivalentielle qui possède un connecteur de moins que E
3. Pour toute variable X différente de P dans E, l'ensemble des variables équiiformes à X dans E est équinumérique à l'ensemble des variables équiiformes à X dans F, c.à.d., E et F contiennent le même nombre d'occurrences de chaque variable, excepté pour P.
4. L'ensemble des variables équiiformes à P dans E possède un élément de plus que l'ensemble des variables équiiformes à P dans F, c.à.d., E a une occurrence de P de plus que F.

Proposons un exemple

Soit E : $(q \equiv (p=r)) \equiv s$

Partant de l'expression équivalentielle E, il est possible d'inscrire la thèse $E \equiv (p \equiv F)$, où F est équiforme à, par exemple, $q \equiv (r \equiv s)$. L'expression F est conçue à partir des informations contenues dans E; elle possède un connecteur de moins que E, et la variable p n'y est plus présente.

Le résultat que nous proposons établit que quelque soit l'expression équivalentielle E, et quelque soit la variable P dans E, il existe F tel que $\vdash E \equiv (P \equiv F)$. Nous pourrions généraliser ce résultat pour une organisation quelconque de F conçue relativement à E, hormis un P, mais nous n'aurons pas besoin de ce résultat. La démonstration s'effectue par induction sur le nombre n de connecteurs que E possède.

Base: $n=1$

Les seuls représentants possibles sont de la forme $A \equiv B$, où A et B sont des variables propositionnelles équiformes ou non.

1. $p \equiv p$ ou, 2. $p \equiv q$
le résultat est trivial.

Hypothèse d'induction: supposons que le théorème est démontré pour toute expression équivalentielle E possédant un nombre de connecteurs inférieur à n.

Pas d'induction: démontrons le métathéorème pour une expression E possédant n connecteurs.

- a). E est une expression équivalentielle, elle possède un connecteur dominant.
- b). E possède la structure formelle $A \equiv B$, par a).
- c). La relation de transformation est réflexive.
- d). E possède la relation de transformation avec elle-même.
 $\vdash E \equiv E$ ($E \equiv E$ est une thèse), ou $\vdash E \equiv (A \equiv B)$, par b) et c).
- e). Choisissons une variable quelconque inscrite dans E, par exemple P.

- f). E est $A \equiv B$, A ou B contient la variable P, par exemple B.
- g). B possède au moins un connecteur de moins que E; B entre donc dans le champ de l'hypothèse d'induction.
- h). $\vdash B \equiv (P \equiv C)$, par g).
- i). Sur la base de ces informations, montrons qu'il est possible d'obtenir une thèse possédant la structure formelle suivante:
 $\vdash E \equiv (P \equiv F)$.

Démonstration du pas d'induction.

1	$\vdash E \equiv (A \equiv B)$	E est $A \equiv B$
2	$\vdash B \equiv (P \equiv C)$	hypothèse d'induction, h
3	$\vdash (E \equiv (A \equiv B)) \equiv ((E \equiv A) \equiv B)$	A2, P/E, Q/A, R/B
4	$\vdash (E \equiv A) \equiv B$	3, 1, dét
5	$\vdash ((B \equiv (P \equiv C)) \equiv ((E \equiv A) \equiv B)) \equiv ((P \equiv C) \equiv (E \equiv A))$	A1, P/B, R/P=C, Q/E=A
6	$\vdash (B \equiv (P \equiv C)) \equiv ((E \equiv A) \equiv B)$	2, 4, int
7	$\vdash (P \equiv C) \equiv (E \equiv A)$	5, 6, dét
8	$\vdash ((E \equiv (P \equiv C)) \equiv A) \equiv ((P \equiv C) \equiv (E \equiv A))$	T33, P/E, Q/P=C, R/A
9	$\vdash ((P \equiv C) \equiv (E \equiv A)) \equiv ((E \equiv (P \equiv C)) \equiv A)$	8, comm
10	$\vdash (E \equiv (P \equiv C)) \equiv A$	9, 7, dét
11	$\vdash ((E \equiv (P \equiv C)) \equiv A) \equiv (((P \equiv C) \equiv E) \equiv A)$	T21, P/E, Q/P=C, R/A
12	$\vdash ((P \equiv C) \equiv E) \equiv A$	11, 10, dét
13	$\vdash A \equiv ((P \equiv C) \equiv E)$	12, comm

14	$\vdash (A \equiv ((P \equiv C) \equiv E)) \equiv ((A \equiv (P \equiv C)) \equiv E)$	$A2, P/A, Q/P \equiv C, \Gamma/E$
15	$\vdash (A \equiv (P \equiv C)) \equiv E$	14, 13, dét
16	$\vdash ((A \equiv (P \equiv C)) \equiv E) \equiv ((P \equiv C) \equiv (A \equiv E))$	$T33, P/A, Q/P \equiv C, R/E$
17	$\vdash (P \equiv C) \equiv (A \equiv E)$	16, 15, dét
18	$\vdash ((P \equiv C) \equiv (A \equiv E)) \equiv (((P \equiv C) \equiv A) \equiv E)$	$A2, P/P \equiv C, Q/A, \Gamma/E$
19	$\vdash ((P \equiv C) \equiv A) \equiv E$	18, 17, dét
20	$\vdash E \equiv ((P \equiv C) \equiv A)$	19, comm
21	$\vdash ((P \equiv C) \equiv A) \equiv (A \equiv (C \equiv P))$	$T19, P/P, Q/C, R/A$
22	$\vdash (A \equiv (C \equiv P)) \equiv ((A \equiv C) \equiv P)$	$A2, P/A, Q/C, \Gamma/P$
23	$\vdash ((P \equiv C) \equiv A) \equiv ((A \equiv C) \equiv P)$	21, 22, dp1
24	$\vdash ((A \equiv C) \equiv P) \equiv (P \equiv (A \equiv C))$	$T4, Q/A \equiv C, \Gamma/P$
25	$\vdash ((P \equiv C) \equiv A) \equiv (P \equiv (A \equiv C))$	23, 24, dp1
26	$\vdash E \equiv (P \equiv (A \equiv C))$	20, 25, dp1

$E \equiv (P \equiv (A \equiv C))$ est bien de la forme $E \equiv (P \equiv F)$,

où F est $A \equiv C$

2.8. LA PROPRIÉTÉ DE PAIRITÉ

L'ensemble des thèses du système S , bien qu'infini dénombrable, ne présente guère d'intérêt en lui-même. Seules des expressions équivalentielles sont dérivables. Il est cependant pertinent de se demander d'une part, quelles sont les propriétés de S et, d'autre part, quelles relations l'ensemble des thèses de S soutient avec celui du calcul des propositions.

Leśniewski y a répondu en proposant une analyse extrêmement complète (Leśniewski, 1929, pp. 15-30). Il démontre:

... in sich [S] alle in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion beweisbaren Äquivalenzsätze und keine anderen Sätze enthält, (Leśniewski, 1929, pp. 15-16).

S contient toutes les expressions équivalentielles qui sont démontrables dans la théorie de la déduction habituelle, et aucune autre proposition.

Ce résultat est établi en considérant la démonstration de 79 thèses du système S et d'une déduction en langage naturel qui utilise deux notions nouvelles relatives aux expressions du système. Leśniewski avait remarqué (Łukasiewicz, 1967, p. 107) que dans toute thèse du système S , le nombre d'occurrences des variables équiformes est pair. Partant de cette constatation, il définit deux notions nouvelles:

- 1) Le degré d'une expression équivalentielle (Leśniewski, 1929, p.22).
- 2) L'absurdité de type n d'une expression équivalentielle (Leśniewski, 1929, p. 27).

Dans la logique des propositions, il est possible de démontrer les deux axiomes de S , comme il est possible de prouver que les deux directives conservent la validité; Leśniewski démontre ainsi que toute thèse de S est démontrable dans la logique des propositions. Il utilise la notion "d'absurdité de type n " ainsi que celle de "degré d'une expression équivalentielle" pour établir l'inverse. Pour notre part, afin d'établir ces résultats, nous utiliserons la propriété de

parité.

Lesniewski was the first to note that in all theses of the equivalential system the number of equiform variables of each shape... is even (Lukasiewicz, 1967, p. 107).

En d'autres termes, dans une thèse, chaque ensemble de variables équiformes est de cardinalité paire. Nous parlerons de propriété de parité et la désignerons par **P**.

Avant de démontrer ce résultat, nous développons un calcul qui permet de l'abrèger. Ce calcul se fonde sur l'inscription d'une séquence associée à chaque expression équivalentielle. Toute expression bien formée du système S possède des variables. Nous nous intéressons à ces variables et considérons la cardinalité de l'ensemble des variables équiformes à chaque variable. Soit A , une expression équivalentielle; nous désignons par $V(A)$ la séquence associée à A . Cette séquence indique, pour chacune des variables de A , son nom et le nombre de ses occurrences équiformes. Toute séquence $V(A)$ associée à une expression équivalentielle A prend donc la forme générale suivante:

$$V(A) = (\alpha \cdot p, \beta \cdot q, \dots, \delta \cdot r)$$

Toute séquence consiste en une liste finie de termes. Chaque terme se compose de deux unités significatives; la première est l'argument du terme, la seconde est l'indice du terme. Tout argument d'un terme indique la cardinalité de l'ensemble des variables, dans A , équiformes au nom de l'indice qui lui est associé. Pour établir la séquence d'une expression équivalentielle A , nous procédons ainsi:

1. nous inscrivons comme premier terme de la séquence le nom de la première variable que nous rencontrons lorsque nous lisons A . Cette information apparaît en indice du nombre exprimant la cardinalité de l'ensemble des variables équiformes, dans A , à cette première variable.
2. nous inscrivons comme deuxième terme de la séquence le nom de la deuxième variable (si elle existe) qui n'est pas équi-

forme à la première. Cette information apparaît en indice du nombre exprimant la cardinalité de l'ensemble des variables équiiformes dans A à cette deuxième variable.

3. nous procédons ainsi jusqu'à épuisement des variables de formes différentes dans A.

Toute expression bien formée A dans S est nécessairement finie, une séquence est donc toujours une suite finie. Toute expression équivalentielle A de S est constituée d'un nombre fini de variables; cette procédure est donc effective.

Considérons quelques exemples.

$$A1: ((p \equiv r) = (q \equiv p)) \equiv (r \equiv q)$$

Séquence associée à A1:

$$V(A1) = (2 \cdot p, 2 \cdot r, 2 \cdot q)$$

$$A2: (p \equiv (q \equiv r)) \equiv ((p \equiv q) \equiv r)$$

Séquence associée à A2:

$$V(A2) = (2 \cdot p, 2 \cdot q, 2 \cdot r)$$

$$E: (p \equiv r) \equiv ((r \equiv q) \equiv (r \equiv p))$$

Séquence associée à E:

$$V(E) = (2 \cdot p, 3 \cdot r, 1 \cdot q)$$

Seule la cardinalité de l'ensemble des variables équiiformes de chaque forme et leur nom importent. Pour notre propos, l'ordre des termes ne nous intéresse pas. Il est possible maintenant de définir la propriété de parité en utilisant la notion de séquence associée à une expression équivalentielle. Une expression équivalentielle possède la propriété de parité, si et seulement si, chaque argument de terme de la séquence qui lui est associée est un multiple de deux. La règle de substitution ainsi que celle de détachement se traduisent aisément sous forme d'un calcul qui opère sur les séquences.

2.8.1. TRADUCTION DE LA DIRECTIVE DE SUBSTITUTION

Considérons une expression E du système S . Une telle expression consiste nécessairement en un arrangement de variables équiiformes ou non équiiformes. Ces variables sont en nombre fini. Désignons-les par p, q, \dots, r .

Soit $V(E)$, la séquence associée à E .

$$V(E) = (\alpha \cdot p, \beta \cdot q, \dots, \delta \cdot r)$$

Substituer au nom d'une variable de E une expression équivalentielle B consiste à substituer à chaque variable équiiforme à cette variable, l'expression équivalentielle équiiforme à B .

Considérons un exemple:

$$A2: (p \equiv (q \equiv r)) \equiv ((p \equiv q) \equiv r)$$

$$B: p \equiv r$$

$$T: (p \equiv ((p \equiv r) \equiv r)) \equiv ((p \equiv (p \equiv r)) \equiv r) \quad A2, \quad q/p \equiv r$$

Afin de déterminer la séquence associée à T , l'expression résultant de l'application de la règle de substitution, nous proposons un calcul qui s'apparente quelque peu à la multiplication. Par abus de langage, nous dirons que le nombre β , qui exprime la cardinalité de l'ensemble des variables équiiformes à q dans $A2$, multiplie la séquence associée à l'expression substituée B .

$$V(A2) = (2 \cdot p, 2 \cdot q, 2 \cdot r)$$

$$V(B) = (1 \cdot p, 1 \cdot r)$$

La séquence de l'expression transformée T , l'expression équivalentielle obtenue par substitution, résulte d'une multiplication de séquences. La séquence $V(B)$ multiplie la séquence $V(A2)$ par rapport à la variable q , ce que nous noterons:

$$V(T) = V(B) \overset{q}{\otimes} V(A2)$$

Un tel calcul s'effectue de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
 V(T) &= V(B) \otimes^q V(A_2) \\
 &= (1p, 1r) \otimes^q (2p, 2q, 2r) \\
 &= (2p, 2.(1p, 1r), 2r) \\
 &= (2p, (2.1)p, (2.1)r, 2r) \\
 &= (2p, 2p, 2r, 2r)
 \end{aligned}$$

Cette dernière information n'est pas suffisante. En effet, les indices des termes de la séquence associée à T ne sont pas indépendants. Nous ajouterons alors, pour obtenir une séquence de termes d'indices indépendants, un principe de réduction. Nous le formulons ainsi: Si la séquence résultant d'une "multiplication" contient plusieurs termes de même indice, elle se réduit, par addition des arguments de ces termes, à une séquence dont tous les indices sont distincts. Avec ce principe de réduction, V(T) se réduit ainsi à: $V(T) = (4p, 4r)$. Rappelons que seule la cardinalité des ensembles de variables équiiformes à chaque variable nous importe. Nous nous désintéressons donc de l'ordre des termes.

GENERALISATION DU CALCUL

Soit A une expression du système de séquence

$$V(A) = (\alpha p, \beta q, \dots, \delta r) \quad \alpha, \beta, \dots, \delta \geq 1.$$

Soit E l'expression qui va être substituée à l'une des variables de A.

$$V(E) = (\gamma s, \dots, \epsilon t) \quad \gamma, \dots, \epsilon \geq 1.$$

Substituer E dans A, à une variable quelconque, q par exemple nous permet d'engendrer une nouvelle expression T.

La séquence associée à T se calcule ainsi.

$$\begin{aligned}
 V(T) &= V(E) \otimes^q V(A) \\
 &= (\gamma s, \dots, \epsilon t) \otimes^q (\alpha p, \beta q, \dots, \delta r)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\alpha p, \beta \cdot (g_s, \dots, \epsilon t), \dots, \delta r) \\
 &= (\alpha p, (\beta \cdot g)_s, \dots, (\beta \cdot \epsilon)_t, \dots, \delta r)
 \end{aligned}$$

Application du principe de réduction si nécessaire.

2.8.2. TRADUCTION DE LA DIRECTIVE DE DETACHEMENT

Cette directive ressemble à une opération de soustraction. Partons d'un exemple:

Soit l'expression A: $(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$,

et soit l'expression Q: $((p \equiv q) \equiv (q \equiv p)) \equiv (p \equiv (q \equiv (p \equiv q)))$

Grâce à la directive de détachement, nous pouvons obtenir l'expression B: $p \equiv (q \equiv (p \equiv q))$ Q, A dét.

De manière imagée, nous pourrions dire que l'expression B s'obtient par "soustraction" de l'expression A à l'expression Q. Or, notre nouvelle opération consiste précisément à produire la séquence $V(B)$ en soustrayant la séquence $V(A)$ de la séquence $V(Q)$. Une telle "soustraction" de séquence opère uniquement entre termes d'indices équiiformes. Reprenons notre exemple:

$$\begin{aligned}
 V(A) &= \{2p, 2q\} \\
 V(Q) &= \{4p, 4q\} \\
 V(B) &= V(Q) \ominus V(A) \\
 &= \{4p, 4q\} \ominus \{2p, 2q\} \\
 &= \{4p-2p, 4q-2q\} \\
 &= \{2p, 2q\}
 \end{aligned}$$

GENERALISATION DU CALCUL

Soit $V(A) = \{\epsilon p, \dots, g q\}$

Soit $V(Q) = \{\alpha p, \dots, \beta q, \dots, \delta r\}$

$$\begin{aligned}
V(B) &= V(Q) \ominus V(A) \\
&= (\alpha p, \dots, \beta q, \dots, \delta r) \ominus (\epsilon p, \dots, \zeta q) \\
&= (\alpha p - \epsilon p, \dots, \beta q - \zeta q, \dots, \delta r) \\
&= ((\alpha - \epsilon)p, \dots, (\beta - \zeta)q, \dots, \delta r)
\end{aligned}$$

Il est évident que si le résultat d'une "soustraction" de termes est nulle, l'information ne nous intéresse plus. Nous l'éliminerons donc de la séquence résultante. Il s'agit du principe d'élimination.

2.9. QUELQUES METATHEOREMES

Les métathéorèmes que nous présentons établissent les liens qui existent entre la propriété de parité d'une expression équivalente et, d'une part, les thèses de S, et, d'autre part, les tautologies du système S.

METATHEOREME P: Toute thèse du système S possède la propriété de parité **P**.

La démonstration s'effectue par induction sur le nombre n d'application des règles d'inférence.

BASE : n = 0

Les seules thèses possibles sont les axiomes

$$A1: ((p \equiv r) \equiv (q \equiv p)) \equiv (r \equiv q)$$

$$A2: (p \equiv (q \equiv r)) \equiv ((p \equiv q) \equiv r)$$

Le résultat est trivial; en effet, les séquences associées aux axiomes montrent immédiatement que ces deux thèses possèdent la propriété de parité.

$$V(A1) = (2 \cdot p, 2 \cdot r, 2 \cdot q)$$

$$V(A2) = (2 \cdot p, 2 \cdot q, 2 \cdot r)$$

HYPOTHESE D'INDUCTION: La propriété de parité **P** est conservée pour tout nombre d'application de règles d'inférence inférieur à n.

PAS D'INDUCTION : Vérifions que la propriété de parité est conservée pour n applications des règles. Il s'agit de vérifier dans ce cas que l'expression T résultant de la n ème application d'une règle d'inférence conserve la propriété P . Il est donc nécessaire de montrer que, quelque soit la règle utilisée lors de la n ème application, la propriété de parité est conservée. Deux cas sont à étudier: I. utilisation de la directive de détachement. II. utilisation de la directive de substitution.

I. La thèse T est obtenue par application de la directive de détachement. Elle résulte par application de la directive à partir de deux autres thèses qui ont été préalablement inscrites. Ces thèses sont dans la relation formelle suivante: $E \equiv T$ et E . Ces deux thèses ont été introduites par un nombre d'applications de règles inférieur à n . Ces deux thèses entrent donc dans le champ de l'hypothèse d'induction. Elles possèdent toutes deux la propriété de parité. Leur séquence associée présente une forme générale dont on sait que l'argument de chaque terme est un multiple de deux.

$$V(E \equiv F) = ((2\alpha)p, \dots, (2\beta)q, \dots, (2\gamma)t)$$

$$V(E) = ((2\epsilon)p, \dots, (2\delta)q)$$

Calculons la séquence associée à la thèse résultante T .

$$V(T) = ((2\alpha)p, \dots, (2\beta)q, \dots, (2\gamma)t) \ominus ((2\epsilon)p, \dots, (2\delta)q)$$

$$= ((2\alpha)p - (2\epsilon)p, \dots, (2\beta)q - (2\delta)q, \dots, (2\gamma)t)$$

$$= (2(\alpha - \epsilon)p, \dots, 2(\beta - \delta)q, \dots, (2\gamma)t)$$

La relation formelle entre les deux thèses, nécessaire pour admettre le détachement, garantit que ce type de "soustraction" est une opération interne: chaque terme de $V(E \equiv F)$ qui contient un indice équiforme à un terme de $V(E)$ possède un argument plus grand ou égal à celui qui lui correspond dans $V(E)$. La théorie des nombres et le principe d'élimination garantissent que la thèse T possède la propriété de parité.

11. La thèse T est obtenue par application de la directive de substitution. Elle résulte par application de la règle à partir d'une thèse E préalablement inscrite dans le système. La thèse E entre donc dans le champ de l'hypothèse d'induction. E possède la propriété de parité; tous les arguments des termes de la séquence qui lui est associée sont des multiples de deux.

$$V(E) = ((2\varepsilon)r, \dots, (2\delta)s)$$

T est obtenue par substitution d'une expression S à une des variables de E, soit r cette variable. Attribuons à S une séquence quelconque,

$V(S) = (\alpha t, \dots, \beta v)$, et calculons la séquence associée à la thèse résultante T.

$$\begin{aligned} V(T) &= V(S) \otimes^r V(E) \\ &= (\alpha t, \dots, \beta v) \otimes^r ((2\varepsilon)r, \dots, (2\delta)s) \\ &= ((2\varepsilon)(\alpha t), \dots, (2\varepsilon)(\beta v), \dots, (2\delta)s) \\ &= ((2\varepsilon\alpha)t, \dots, (2\varepsilon\beta)v, \dots, (2\delta)s) \end{aligned}$$

La théorie des nombres et le principe de réduction garantissent que la thèse T possède la propriété de parité.

Le métathéorème P est ainsi démontré. Ce résultat n'est pas négligeable. Il en est un autre, non moins important, qui permettra d'inscrire les thèses de S d'une manière quasi "mécanique".

METATHEOREME E : Toute expression équivalentielle qui possède la propriété de parité est une thèse de S.

Démonstration:

Toute expression équivalentielle possédant n variables, $n \geq 1$, non nécessairement distinctes, contient n-1 connecteurs. Toute expression équivalentielle possédant la propriété de parité possède $2 \cdot k$ variables. Sur la base de ces résultats, il s'ensuit immédiatement que toute expression équivalentielle de propriété P possède $2k-1$ connecteurs.

Notre démonstration procède par induction sur ce k.

BASE : k = 1

Les seules expressions équivalentielles possibles sont celles qui possèdent deux variables équiiformes. Elles consistent en une forme analogue à l'expression $r \equiv r$. Nous l'avons démontré, il s'agit de la thèse T5.

HYPOTHESE D'INDUCTION : Toute expression équivalentielle qui possède la propriété de parité et dont le nombre de connecteurs est fonction d'une valeur inférieure à k est une thèse de S.

PAS D'INDUCTION : Soit E une expression équivalentielle qui possède la propriété P et dont le nombre de connecteurs est fonction d'une valeur égale à k; démontrons que E est une thèse de S.

L'expression E possède au moins deux variables équiiformes: soit p ces variables.

1. $\vdash E \equiv (p \equiv D)$ Métathéorème de la transformée
2. D contient une variable équiiforme à p, par 1.
3. $\vdash D \equiv (p \equiv F)$ Métathéorème de la transformée
4. F possède la propriété de parité, par 2 et 3.
5. F entre dans le champ de l'hypothèse d'induction, par 2 et 3.
6. $\vdash F$ 4 et 5
7. $\vdash (E \equiv (p \equiv D)) \equiv ((E \equiv p) \equiv D)$ A2, P/E, Q/p, R/D
8. $\vdash (E \equiv p) \equiv D$ 7, 1, dét
9. $\vdash ((D \equiv (p \equiv F)) \equiv ((E \equiv p) \equiv D)) \equiv ((p \equiv F) \equiv (E \equiv p))$
A1, P/D, R/p $\equiv F$, Q/E $\equiv p$
10. $\vdash (D \equiv (p \equiv F)) \equiv ((E \equiv p) \equiv D)$ 2, 8, int
11. $\vdash (p \equiv F) \equiv (E \equiv p)$ 9, 10, dét
12. $\vdash (E \equiv p) \equiv (p \equiv F)$ 11, comm
13. $\vdash ((E \equiv p) \equiv (p \equiv F)) \equiv ((E \equiv p) \equiv p) \equiv F$
A2, P/E $\equiv p$, Q/p, R/F
14. $\vdash ((E \equiv p) \equiv p) \equiv F$ 13, 12, dét
15. $\vdash F \equiv ((E \equiv p) \equiv p)$ 14, comm
16. $\vdash (E \equiv p) \equiv p$ 15, 6, dét
17. $\vdash (E \equiv (p \equiv p)) \equiv ((E \equiv p) \equiv p)$ A2, P/E, Q/p, R/p

18.	$\vdash ((E \equiv p) \equiv p) \equiv (E \equiv (p \equiv p))$	17, comm
19.	$\vdash E \equiv (p \equiv p)$	18, 16, dét
20.	$\vdash (p \equiv p) \equiv E$	19, comm
21.	$\vdash p \equiv p$	T5, τ/p
22.	$\vdash E$	20, 21, dét

L'expression équivalentielle E est bien une thèse de S .

METATHEOREME T : Toute expression équivalentielle qui possède la propriété de parité est une tautologie.

Démonstration: toute expression équivalentielle de propriété **P** possède $2 \cdot k$ variables non nécessairement distinctes. Notre démonstration procède par induction sur ce k .

BASE : $k=1$

Le seul cas possible est un représentant de la forme $A \equiv A$, où A représente une variable propositionnelle. Soit $r \equiv r$ un de ses représentants. Il s'agit bien d'une tautologie que nous écrirons, conformément à la tradition, $\vdash r \equiv r$.

HYPOTHESE D'INDUCTION : Toute expression équivalentielle qui possède la propriété de parité et dont le nombre de variables est fonction d'une valeur inférieure à k , est une tautologie.

PAS D'INDUCTION : Soit E une expression équivalentielle qui possède la propriété de parité et dont le nombre de variables est fonction d'une valeur égale à k ; démontrons que E est une tautologie.

Considérons une expression équivalentielle E possédant la propriété **P** et possédant $2 \cdot k$ variables.

E possède au moins deux variables équiformes; soit p ces variables.

E possède la relation de transformation avec l'expression équivalentielle $(p \equiv p) \equiv C$. Cette relation est une relation d'équivalence.

- $(p \equiv p) \equiv C \leftrightarrow E$
- $p \equiv p$ est une tautologie

3. C possède la propriété de parité; en effet, elle est conçue par transformation à partir de l'expression E. C entre dans le champ de l'hypothèse d'induction.
4. C est donc une tautologie, par 3
5. $(p \equiv p) \equiv C$ est une tautologie, par 2 et 4
6. E est une tautologie, par 2 et 1

METATHEOREME V : Toute tautologie qui est une expression équivalentielle possède la propriété de parité.

Démonstration: Elle est faite par induction sur le nombre k de connecteurs.

BASE : $k = 1$.

Le seul cas possible est un représentant de la forme $A \equiv A$, où A représente une variable propositionnelle. Soit p cette variable. L'expression $p \equiv p$ est une tautologie; la séquence associée à cette expression équivalentielle met en évidence sa propriété de parité: $V(p \equiv p) = (2p)$.

HYPOTHESE D'INDUCTION : Toute tautologie qui est une expression équivalentielle et qui contient un nombre de connecteurs inférieur à k possède la propriété de parité.

PAS D'INDUCTION : Soit E, une tautologie qui est une expression équivalentielle contenant k connecteurs; démontrons que E possède la propriété de parité. Analysons deux situations:

1. E possède au moins deux variables équiformes; soit p ces variables. E possède la relation de transformation avec l'expression $(p \equiv p) \equiv C$. Cette relation est une relation d'équivalence.
 1. $(p \equiv p) \equiv C \equiv E$
 2. E est une tautologie
 3. $p \equiv p$ est une tautologie
 4. $(p \equiv p) \equiv C$ est une tautologie, par 1,2,3.
 5. C possède un nombre de connecteurs inférieur à k, par 1.
 6. C entre dans le champ de l'hypothèse d'induction, par 5.

7. C possède la propriété de parité, par 6.
 8. $p \equiv p$ possède la propriété de parité
 9. $(p \equiv p) = C$ possède la propriété de parité, par 7 et 8.
 10. E possède la propriété de parité, par 9 et 1.
11. L'expression équivalente E ne possède pas deux variables équiformes. Montrons dans ce cas qu'elle ne peut pas être une tautologie.
1. E contient des variables propositionnelles toutes non équiformes; soit p l'une de ces variables.
 2. $E \leftrightarrow p \equiv D$ par métathéorème de la transformée
 3. D possède des variables toutes non équiformes, par 1 et 2.
 4. D possède des variables toutes non équiformes à p, par 1 et 2
 5. D ne possède pas la propriété de parité, par 3.
 6. D possède un nombre de connecteurs inférieur à k.
 7. D n'est pas une tautologie, par 1 et contraposée de l'hypothèse d'induction.
 8. La table de vérité de D possède au moins un "zéro", par 7.
 9. Construisons la table de vérité de $p \equiv D$ et organisons les valeurs de vérité dans un ordre canonique.

p	\equiv	D
1	.	.
1	.	.
1	0	0
⋮	⋮	⋮
1	.	.
0	.	.
0	.	.
0	1	0
⋮	⋮	⋮
0	.	.

La table de vérité de $p \leftrightarrow D$ possède au moins un "zéro". Cette expression n'est donc pas une tautologie, par 1,3,4,8.

10. E n'est pas une tautologie, par 2 et 9.

Il s'ensuit de 1. et 11. que toute tautologie qui est une expression équivalentielle possède la propriété de parité.

2.10. ORGANISATION DES RESULTATS

Les résultats précédents permettent d'établir la complétude du système S . Rappelons nos conventions d'écriture:

- a) A est une thèse: $\vdash A$
- b) A est une tautologie: $\vDash A$
- c) A possède la propriété de parité: $p(A)$

Nous avons montré:

- 1. Si $\vdash A$ alors $p(A)$ métathéorème P
- 2. Si $p(A)$ alors $\vDash A$ métathéorème T
- 3. Si $\vDash A$ alors $p(A)$ métathéorème V
- 4. Si $p(A)$ alors $\vdash A$ métathéorème E

Il découle de ces résultats que:

- 5. toute thèse de S est une tautologie, par 1 et 2.
- 6. toute tautologie est une thèse de S , par 3 et 4, et donc:
- 7. Le système S est complet, par 5 et 6.

REMARQUE FINALE

Nous avons établi la complétude du système S en n'empruntant au calcul des propositions que la table de vérité de la biconditionnelle. Nous pouvons ainsi affirmer que l'ensemble des tautologies qui sont des expressions équivalentielles du calcul des propositions est équivalente à celui des thèses de S . Ces résultats sont intéressants. Ils

montrent les propriétés du système S, et, par là, ses limites par rapport au calcul des propositions. Ils nous engagent à modifier les directives ou les axiomes de telle manière qu'il nous soit possible d'obtenir un système équivalent à celui des propositions. Dans les pages suivantes nous présentons plusieurs démarches qui vont dans ce sens.

Ajoutons encore que notre démonstration de la complétude du système S diffère considérablement de celle de Surma (1973, 63-71). Partant des deux axiomes A1 et A2 et de la règle de détachement, il démontre, dans un premier temps, 20 théorèmes. Puis, s'appuyant sur la règle d'extensionnalité ainsi qu'une règle de déduction modifiée, il propose six lemmes qui permettent de conclure à la complétude du "fragment équivalentiel" du calcul classique des propositions.

3. LE CALCUL EQUIVALENTIEL QUANTIFIE SQI

3.1. PREAMBULE

Il s'agit d'aller plus loin maintenant dans notre reconstitution progressive de la logique des propositions que Leśniewski a construite.

L'étape que nous allons présenter semble naturelle. Elle répond à la question suivante: qu'obtenons-nous en quantifiant les thèses du calcul équivalentiel S?

Ce chapitre permet d'exposer à un niveau relativement élémentaire et sans passer encore par le formalisme des explications terminologiques, une terminologie relative aux systèmes de Leśniewski. Nous utiliserons tout d'abord ces explications de manière informelle. Notre intention est de modifier le calcul équivalentiel S de manière à obtenir des expressions quantifiées sans variable libre. Ceci demande à être précisé. Commençons par définir ce que nous entendons par quantification et par expliciter sous quelle forme nous l'inscrirons dans le système. Une fois encore référons-nous à Leśniewski.

W czasie, gdy jeszcze nie umiałem operować "kwantifikatorami"³, a potrzebowałem w języku potocznym, którego używałem, jakichś odpowiedników wyrazów typów " $(\exists a).f(a)$ ", " $(\exists X, a).f(X, a)$ " it. p., manych z języka "symbolicznego"⁴, posługiwałem się odpowiednimi wyrażeniami typów "przy pewnym znaczeniu wyrazu "a" $f(a)$ ", "przy pewnych znaczeniach wyrazów "X" i "a" $f(X, a)$ " it. p.; Leśniewski, 1927, p. 187).

Lorsque j'ignorais la manière d'utiliser les "quantificateurs"³ et lorsqu'il m'était nécessaire dans le langage naturel de formuler l'équivalent des expressions "symboliques"⁴ telles que " $(\exists a).f(a)$ ", " $(\exists X, a).f(X, a)$ ", etc., j'utilisais les expressions suivantes: "en fonction d'une certaine signification du mot "a" $f(a)$ ", "en fonction de certaines significations des mots "a" et "X", $f(X, a)$ ", etc... Les notes 3 et 4 renvoient d'une part à la définition du quantificateur de Peirce (1885, p. 195) et, d'autre part, à la formalisation des quantificateurs dans les Principia Mathematica (Whitehead et Russell, 1910, vol. I, p. 16)

Dans les systèmes de Leśniewski l'interprétation des quantificateurs pose un réel problème. Cette interprétation ne peut pas être qualifiée d'objectuelle (Russell, Peirce), ni de substitutionnelle (Kripke, Leblanc). Nous exposerons une réflexion relative à ce problème dans le calcul des noms, l'ontologie.

3.2. DEFINITION DE L'EXPRESSION EQUIVALENTIELLE QUANTIFIEE DANS SQ1

Une expression équivalentielle quantifiée est une expression équivalentielle précédée d'un quantificateur dans lequel est inscrit une et une seule fois tous les termes équiformes aux variables de l'expression quantifiée, l'ordre n'important pas. Une expression équivalentielle de SQ1 ne possède pas d'expression quantifiée.

Partons de l'exemple d'une expression équivalentielle quantifiée que la pratique actuelle nous fait écrire de la manière suivante:

$$(\forall p)(\forall q)(\forall r)(p \equiv (q \equiv r))$$

On y trouve trois quantificateurs dont les noms lient chaque fois une variable dans l'expression quantifiée. L'écriture choisie par Leśniewski admet, dans ce cas, un et un seul quantificateur:

$$\llbracket p \ q \ r \rrbracket \ulcorner p \equiv (q \equiv r) \urcorner$$

Le quantificateur de l'expression E est le complexe des mots $\llbracket p \ q \ r \rrbracket$; il se lit: pour tout p , pour tout q , pour tout r . Les délimitateurs du quantificateur sont les mots \llbracket et \rrbracket ; ils entourent les lieux p , q et r . Les lieux sont des termes qui possèdent des termes équiformes dans l'expression quantifiée. L'expression quantifiée s'appelle le sous-quantificateur; c'est le complexe composé du mot \ulcorner , de l'expression équivalentielle $p \equiv (q \equiv r)$ et du mot \urcorner . Les délimitateurs du sous-quantificateur sont les mots \ulcorner et \urcorner . Une généralisation est le complexe constitué d'un quantificateur et du sous-quantificateur qui lui est associé. Il est pratique de parler du quantificateur de la généralisation ou du sous-quantificateur de la généralisation. L'essence d'une

généralisation est le complexe des mots internes du sous-quantificateur de la généralisation.

3.2.1. RESUME

1. Un mot est une unité graphique, une morce.
2. Le premier mot du quantificateur est nécessairement équiforme à \perp .
3. Le dernier mot du quantificateur est nécessairement équiforme à \perp .
4. Le quantificateur vide n'existe pas. Ainsi, l'inscription $\perp \perp$ ne signifie rien dans notre système. Elle ne peut y être inscrite.
5. Les mots internes au quantificateur sont des lieurs.
6. L'ordre des lieurs dans un quantificateur n'importe pas. $\perp p q \perp \overline{p \perp q}$ et $\perp q p \perp \overline{p \perp q}$, bien que représentant la même réalité logique, ne sont toutefois pas équiformes. Sur ce point, nous sommes en désaccord avec Sobocinski (1960, p. 53). Notre présentation de l'équiformité reste cependant conforme à celle de Leśniewski.
7. Tout quantificateur ne contient qu'une seule occurrence d'un lieu. Ainsi deux lieurs équiformes ne peuvent être présents ensemble dans un même quantificateur. Cette restriction est motivée par des raisons sémantiques.
8. Deux quantificateurs ne peuvent être concaténés. Nous ne rencontrons jamais la situation suivante: $\perp p \perp q \perp \dots \overline{\quad}$
9. Le premier mot d'un sous-quantificateur est nécessairement équiforme à \ulcorner .
10. Le dernier mot d'un sous-quantificateur est nécessairement équiforme à \urcorner .
11. Le sous-quantificateur vide n'existe pas. L'inscription $\ulcorner \urcorner$ ne peut être inscrite.
12. Deux sous-quantificateurs ne peuvent être concaténés.
13. A tout quantificateur correspond un sous-quantificateur qui lui

est associé. Le sous-quantificateur s'écrit à la suite immédiate du quantificateur.

14. A tout sous-quantificateur correspond un quantificateur qui lui est associé. Le quantificateur précède immédiatement le sous-quantificateur.
15. Tout lieu d'un quantificateur lie au moins une variable dans l'essence du sous-quantificateur qui lui est associé.
16. A toute variable de l'essence d'une généralisation correspond un lieu qui lui est équiforme.
17. Un terme est un mot qui n'est pas un délimiteur ni une parenthèse.

Ces remarques générales et ces conventions terminologiques conserveront leur validité dans les systèmes logiques de Leśniewski.

Nous voulons construire un système dont toutes les thèses soient des généralisations et telles que toutes les essences des généralisations soient des expressions équivalentielles. Les thèses seront donc sans variable libre.

3.3 LES AXIOMES

$$A1 : \lrcorner pqr \lrcorner \overline{((p \equiv r) \equiv (q \equiv p)) \equiv (r \equiv q)}$$

$$A2 : \lrcorner pqr \lrcorner \overline{(p \equiv (q \equiv r)) \equiv ((p \equiv q) \equiv r)}$$

Les deux axiomes de SQ1 consistent en généralisations dont les essences sont équiformes aux axiomes A1 et A2 de S. Ils n'appellent aucun commentaire particulier quant à leur contenu. Leur organisation formelle suscite cependant une remarque. Nous savions que les termes des essences équiformes à p, q, r devaient être considérés comme des variables propositionnelles; dans S, une liste préalable de ces variables avait été posée à cet effet. Maintenant, si nous observons l'essence de chacu-

ne des deux généralisations, nous réalisons que seules deux catégories de termes sont présentes; il s'agit, d'une part, des termes qui possèdent un lieu équiiforme dans le quantificateur, et d'autre part, de ceux qui ne présentent pas cette caractéristique. Grâce à cette organisation syntaxique, nous pouvons attribuer le nom de variable aux termes qui possèdent dans le quantificateur un lieu qui leur est équiiforme et le nom de constante aux termes qui ne possèdent pas cette caractéristique. Nous verrons plus tard de quelle manière Lesniewski a procédé afin d'amener ces axiomes à montrer un peu plus. En effet, leur organisation syntaxique permet une détermination sémantique.

3.4. LES REGLES D'INFERENCE

3.4.1 LA DIRECTIVE DE SUBSTITUTION

Nous ne voulons, dans ce système, que des thèses sans variables libres; l'essence de leur généralisation consistera uniquement en une expression équivalentielle. En raison de ces deux restrictions, la puissance de la règle est relativement limitée.

T est une thèse résultant de la directive de substitution appliquée à une thèse A préalablement inscrite dans le système, si

1. A chaque variable équiiforme de A, nous substituons une expression équivalentielle équiiforme.
2. Le quantificateur de T contient des lieux équiiformes à toutes les variables de son essence et ceux-là seulement.

Remarques:

- Par la condition 1, nous savons que A est une généralisation. Cela signifie que nous ne pouvons substituer qu'à partir d'une thèse qui est une généralisation.
- La condition 2 nous engage à préciser deux mouvements dans l'inscription d'une nouvelle thèse par la règle de substitution:

* Si, après substitution, des variables non équiformes à celles de A apparaissent dans l'essence de l'expression T, alors des termes équiformes à ces variables doivent être introduits dans le quantificateur de la généralisation T.

Exemple:

$$A : \quad \lceil pq \rceil \lceil (p \equiv r) \equiv (q \equiv r) \rceil$$

$$T : \quad \lceil pqr \rceil \lceil ((p \equiv r) \equiv (p \equiv r)) \equiv (q \equiv q) \rceil \quad A, p/p \equiv r$$

* Si, après substitution, des variables équiformes à celles de A n'apparaissent pas dans l'essence de l'expression T, alors des termes équiformes à ces variables ne doivent pas être introduits dans le quantificateur de la généralisation T.

Exemple:

$$A : \quad \lceil pq \rceil \lceil (p \equiv p) \equiv (q \equiv q) \rceil$$

$$T : \quad \lceil q \rceil \lceil (q \equiv q) \equiv (q \equiv q) \rceil \quad A, p/q$$

3.4.2. LA DIRECTIVE DE DETACHEMENT

Avant d'exposer cette directive, proposons deux définitions.

On trouvera les définitions précises page 126.

La première équivalence d'une expression équivalentielle consiste en l'argument gauche (le premier argument) de son connecteur dominant.

La deuxième équivalence d'une expression équivalentielle consiste en l'argument droit (le deuxième argument) de son connecteur dominant.

Exemple:
$$E : \quad (p \equiv r) \equiv (q \equiv (r \equiv p))$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{première équivalence}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{deuxième équivalence}}$

Toute thèse du système SQ1 est une généralisation, la règle de détachement ne peut donc opérer que sous le sous-quantificateur.

T est une thèse résultant de la directive de détachement appliquée à deux thèses, A et C, préalablement inscrites dans le système et qui possèdent entre elles une relation formelle bien déterminée, si

1. L'essence de A est équiforme à la première équivalence de l'essence de C.
2. L'essence de T est équiforme à la deuxième équivalence de l'essence de C.
3. Le quantificateur de T ne contient que des lieux équiformes à toutes les variables de son essence.

Schématisons cette règle:

$$\begin{array}{l}
 m \\
 n \\
 \hline
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 \dots \overline{P} \\
 \dots \overline{P} \equiv \overline{Q} \\
 \dots \overline{Q}
 \end{array}
 \right.
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 m, n, s\text{-dét.}
 \end{array}$$

Exemple: A : $\overline{pq} \overline{(p \equiv (q \equiv p)) \equiv q}$
 C : $\overline{pqr} \overline{((p \equiv (q \equiv p)) \equiv q) \equiv ((r \equiv q) \equiv r) \equiv q}$
 T : $\overline{qr} \overline{((r \equiv q) \equiv r) \equiv q}$ A.C, s-dét.

Nous avons défini, dans le système SQ1, l'essence d'une inscription comme étant le complexe des mots internes de son sous-quantificateur. D'autre part à tout sous-quantificateur correspond nécessairement un quantificateur qui lui est associé. A et C sont donc des généralisations.

3.5. REMARQUES GENERALES

Le système SQ1 n'offre rien de plus que le système S mis à part les quantificateurs. Ces derniers permettent de discriminer les

termes variables des termes constants. La manière dont les expressions équivalentielles quantifiées ont été définies ne permet pas d'obtenir des thèses dont l'essence soit d'une autre nature que les expressions équivalentielles de S.

As Leśniewski proved, the axiomes A1 and A2 together with the customary rules of substitution and detachment (adjusted only to the system without free variables) constitutes a complete axiom system of the bi-valued equivalential calculus of propositions. (Sobocinski, 1960, p.56).

Une expression retiendra toutefois notre attention: il s'agit de la thèse $\lfloor r \rfloor \ulcorner r \urcorner$, thèse parente de T 5 que nous avons inscrite dans S. Si nous donnons au quantificateur le sens de "pour toute valeur de vérité de u, u=u", nous obtenons, dans une interprétation en termes de 0 et 1, $0 \equiv 0$ et $1 \equiv 1$, ce qui est manifestement toujours vrai. Cette expression $\lfloor u \rfloor \ulcorner u \urcorner$ exprime d'une certaine façon le 'vrai'. Ce n'est bien sûr pas la seule possibilité, mais c'est l'une des plus simples. Cette expression nous engage à concevoir une nouvelle formulation des règles de manière à introduire, via la règle de substitution, des expressions quantifiées dans l'essence des généralisations. Ceci permettrait, entre autres choses, d'envisager dans le système l'organisation du jeu du 'vrai' et du 'faux'. Nous pourrions le faire en utilisant l'expression $\lfloor r \rfloor \ulcorner r \urcorner$ ainsi que l'expression $\lfloor r \rfloor \ulcorner \neg r \urcorner$ qui semble un bon candidat pour exprimer le 'faux'. C'est cela que nous offrira le système SQ2. Une dernière remarque encore. La notion de parité attachée aux thèses du système S s'applique sans autre aux thèses de SQ1 dès lors que nous considérons indépendamment l'essence des thèses de SQ1. Ainsi, les métathéorèmes énoncés dans le système S conservent toute leur valeur dans ce nouveau système.

4. LE SYSTEME EQUIVALENTIEL QUANTIFIE SQ2

Ce système se caractérise par un enrichissement considérable de l'ensemble des thèses par rapport au système SQ1. La modification essentielle consiste à renforcer la règle de substitution. Les thèses de SQ2 conservent la caractéristique de ne présenter aucune variable libre, mais ceci ne signifie plus qu'elles soient toutes des généralisations.

4.1. LES AXIOMES

SQ2 contient des axiomes équiiformes à ceux de SQ1

$$A1 \quad \ulcorner pqr \urcorner \ulcorner ((p \equiv r) \equiv (q \equiv p)) \equiv (r \equiv q) \urcorner$$

$$A2 \quad \ulcorner pqr \urcorner \ulcorner (p \equiv (q \equiv r)) \equiv ((p \equiv q) \equiv r) \urcorner$$

4.2. LES REGLES D'INFERENCE

4.2.1. LA DIRECTIVE DE SUBSTITUTION

La transformation consiste en la possibilité de substituer aux variables équiiformes d'une thèse, non plus uniquement des expressions équivalentielles, mais également des expressions qui peuvent être des généralisations ou des formes complexes. L'écriture de plus en plus subtile des expressions du système SQ2 nous engage à modifier et à affiner notre terminologie. Les remarques et conventions terminologiques présentées en pages 81-83 conservent ici toute leur pertinence. C'est la définition de la généralisation qui subit une modification profonde. Une notion nouvelle, celle de fonction équivalentielle, est introduite.

GENERALISATION

1. Si A est une expression équivalentielle, $\ulcorner \dots \urcorner A \urcorner$ est une généralisation, si et seulement si, une variable au moins de A possède un terme équiiforme dans le quantificateur de la généralisation.

- Si A, B sont des généralisations ou des expressions équivalentielles, $\vdash A \equiv B$ est une généralisation, si et seulement si, une variable au moins de $A \equiv B$ possède un terme équiforme dans le quantificateur de la généralisation.
- Rien n'est une généralisation, sinon par ce qui précède.

Remarque: Grâce à cette définition, certaines inscriptions contiennent des variables libres, alors que d'autres présentent des généralisations dans la généralisation.

Exemples de généralisations

$$A: \vdash p q, \ulcorner (p \equiv q) \equiv r \urcorner$$

$$B: \vdash p, \ulcorner p \equiv \vdash u, \urcorner \urcorner$$

Le quantificateur de la généralisation B est p, c'est le quantificateur général. B contient dans son essence une généralisation, il s'agit de l'expression $\vdash u, \urcorner$, c'est une généralisation dans la généralisation B.

FONCTION EQUIVALENTIELLE

- Une expression équivalentielle qui possède au moins un connecteur de biconditionnelle est une fonction équivalentielle.
- Si A, B sont des fonctions équivalentielles ou des généralisations, $(A \equiv B)$ est une fonction équivalentielle.
- Rien n'est une fonction équivalentielle, sinon par ce qui précède.

Remarque: Une fonction équivalentielle se présente donc sous la forme d'une expression de deux arguments connectés par la biconditionnelle; ce n'est pas une généralisation.

Exemple de fonction équivalentielle

$$\vdash p, \ulcorner q \equiv p \equiv (r \equiv \vdash u, \urcorner)$$

FORMULATION DE LA REGLE DE SUBSTITUTION

T est une thèse résultant de la règle de substitution appliquée à une thèse A préalablement inscrite dans le système, si

1. A est une généralisation sans variable libre.
2. A chaque variable équiforme de A qui possède un lieu équiforme dans le quantificateur général de A, nous substituons une expression équiforme. Cette expression peut être une variable propositionnelle, une fonction équivalentielle ou une généralisation.
3. L'expression substituée à une variable doit rester libre pour cette variable dans l'essence de la généralisation A.
Soit une expression E. Nous disons que E est libre pour la variable p dans l'expression B(p) si mise à la place de p dans B, toutes ses variables libres restent libres.
4. Le quantificateur de T contient des lieux équiformes à toutes les variables libres de son essence, et ceux-là seulement.

Remarques:

- Par la condition 1, nous savons que A est une généralisation. Cela signifie que nous ne pouvons substituer qu'à partir d'une thèse qui est une généralisation.
- Les différents types d'expressions qu'il est possible de substituer permettent d'obtenir un ensemble relativement riche de thèses. En plus des thèses qui sont des généralisations, des thèses sans quantificateur général apparaissent. Ces dernières toutefois conservent la propriété de ne contenir que des variables liées. Montrons, dans le cas de la règle de substitution, l'inscription d'une représentant de cette catégorie.

Considérons la thèse $\ulcorner p \urcorner \ulcorner p \equiv p \urcorner$ et décidons de substituer à la variable p l'expression $\ulcorner u \urcorner \ulcorner u \urcorner$. Rappelons que les lieux ne sont pas des variables.

A: $\ulcorner p \urcorner \ulcorner p \equiv p \urcorner$

T: $\ulcorner u \urcorner \ulcorner u \equiv \ulcorner u \urcorner \urcorner$ 1, $p / \ulcorner u \urcorner$

La thèse résultante T ne possède pas de quantificateur général. Il n'y a pas de quantificateur de T, bien qu'il y en ait dans T. Ce fait nous oblige à préciser la notion d'essence. Jusqu'ici nous parlions de l'essence d'une généralisation. Il s'agissait de l'expression interne du sous-quantificateur. Cette définition suffisait dans la mesure où nous étions uniquement en présence de thèses qui étaient des généralisations. Cela n'est plus le cas maintenant et c'est la raison pour laquelle nous devons compléter la définition.

ESSENCE

L'essence d'une expression B est l'expression interne au sous-quantificateur si B est une généralisation, sinon elle est l'expression B elle-même.

Ainsi l'essence de l'expression $\ulcorner p \urcorner \ulcorner p \equiv p \urcorner$ est l'expression équiforme à $p \equiv p$; l'essence de l'expression $\ulcorner u \urcorner \ulcorner u \equiv \ulcorner u \urcorner \urcorner$ est l'expression elle-même. Cette précision rend plus explicite la condition 4. de la règle de substitution.

4.2.2. LA DIRECTIVE DE DETACHEMENT

Il est loisible d'inscrire dans le système SQ2 deux catégories formelles de thèses: celles qui sont des généralisations et celles qui n'en sont pas. Cette situation pourrait inciter à proposer une règle de détachement opérant de deux manières différentes selon la catégorie formelle des thèses en présence.

Schéma I : détachement sous le sous-quantificateur

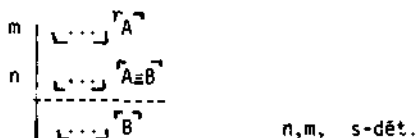
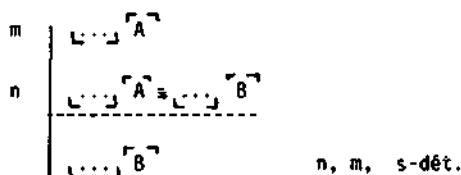


Schéma II: détachement externe au sous-quantificateur



Bien qu'apparemment souhaitable une double formulation de la règle de détachement n'est pas nécessaire. Il suffit de considérer uniquement le détachement sous le sous-quantificateur. Nous justifions ce choix lorsque nous aborderons le problème de la parité des thèses de SQ2.

FORMULATION DE LA REGLE DE DETACHEMENT

T est une thèse résultant de la règle de détachement appliquée aux thèses A, B, préalablement inscrites dans le système, si

1. A et C sont des généralisations sans variable libre.
2. L'essence de A est équiforme à la première équivalence de C.
3. L'essence de T est équiforme à la deuxième équivalence de C.
4. Le quantificateur de T ne contient que des lieux équiformes à toutes les variables libres de son essence, et que ceux-là.

Remarque: Dans l'énoncé de cette règle, il est nécessaire de spécifier que A et C sont des généralisations; le fait que nous ayons élargi la définition de l'essence d'une expression l'impose.

QUELQUES THESES DE SQ2

A2 $\vdash_{pq} \vdash (\vdash (p \equiv (q \equiv r))) \equiv ((\vdash p \equiv q) \equiv r)$

t1 $\vdash_{qr} \vdash (\vdash_{u'} \vdash u' \equiv (q \equiv r)) \equiv ((\vdash_{u'} \vdash u' \equiv q) \equiv r)$ A2, p/ $\vdash_{u'} \vdash u'$

- t2 $(\ulcorner u_j \urcorner \equiv (\ulcorner p_j \urcorner \equiv \ulcorner p \urcorner) \equiv \ulcorner r_j \urcorner \urcorner) \equiv ((\ulcorner u_j \urcorner \equiv \ulcorner p_j \urcorner \equiv \ulcorner p \urcorner) \equiv \ulcorner r_j \urcorner)$
A2, $p/\ulcorner u_j \urcorner, q/\ulcorner p \urcorner, r/\ulcorner r_j \urcorner$
- t3 $\ulcorner p q_j \urcorner \urcorner (\ulcorner p \urcorner \equiv \ulcorner q \urcorner) \equiv (\ulcorner q \urcorner \equiv \ulcorner p \urcorner) \urcorner$ thèse de SQ1, parité
- t4 $\ulcorner q_j \urcorner \urcorner (\ulcorner u_j \urcorner \equiv \ulcorner u \urcorner) \equiv (\ulcorner q \urcorner \equiv \ulcorner q \urcorner) \urcorner$ t3, $p/\ulcorner u_j \urcorner$
- t5 $\ulcorner q_j \urcorner \urcorner ((\ulcorner u_j \urcorner \equiv \ulcorner u \urcorner) \equiv (\ulcorner q \urcorner \equiv \ulcorner q \urcorner)) \equiv (((\ulcorner u_j \urcorner \equiv \ulcorner u \urcorner) \equiv \ulcorner q \urcorner) \equiv \ulcorner q \urcorner) \urcorner$
A2, $p/\ulcorner u_j \urcorner \equiv \ulcorner u \urcorner, r/q$
- t6 $\ulcorner q_j \urcorner \urcorner ((\ulcorner u_j \urcorner \equiv \ulcorner u \urcorner) \equiv \ulcorner q \urcorner) \equiv \ulcorner q \urcorner \urcorner$ t5, t4, dét.
- t7 $\ulcorner q_j \urcorner \urcorner (\ulcorner u_j \urcorner \equiv \ulcorner u \urcorner) \equiv (\ulcorner p_j \urcorner \equiv \ulcorner p \urcorner) \equiv \ulcorner p \urcorner \urcorner$
t3, $p/\ulcorner u_j \urcorner, q/\ulcorner p \urcorner \equiv \ulcorner q \urcorner$

La justification de la thèse t3 peut paraître surprenante; en effet nous la justifions en nous référant au système SQ1. Ceci n'est pas surprenant dans la mesure où SQ2 est une expansion de SQ1. Toutes les thèses de SQ1 sont donc des thèses de SQ2. La propriété de parité valable dans SQ1 permet de justifier immédiatement la thèse t3. Une question s'élevé alors! Qu'en est-il de cette propriété dans le système SQ2? La partie suivante donne une réponse à cette interrogation.

4.3. LA PROPRIÉTÉ DE PAIRITÉ

Nous avons défini plus haut (p.65) la notion de pairité d'une expression E à l'aide de la séquence $V(E)$ associée à cette expression. $V(E)$ indiquait pour chacune des variables de E la cardinalité de l'ensemble de celles qui lui sont équiiformes. La séquence associée à une expression E de $SQ1$ se définissait de la même façon en considérant l'essence de E . Les choses se compliquent toutefois un peu dans $SQ2$, puisque les essences des expressions de ce nouveau système peuvent contenir, outre des variables, un certain nombre de généralisations, et que nous voulons que les séquences associées renseignent aussi sur la cardinalité des généralisations équiiformes à chacune de celles qui figurent dans l'expression. Soit alors E une expression de $SQ2$ qui contient des variables p, q, \dots, r et des généralisations $\lfloor p \rfloor \dots \lfloor p \dots \rfloor$, $\lfloor q \rfloor \dots \lfloor q \dots \rfloor$, ... Pour éviter d'alourdir les écritures, nous nommerons ces généralisations $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$. Dès lors, la séquence $V(E)$ associée à une expression E sera de la forme:

$$V(E) = (\alpha p, \beta q, \dots, \delta r, \mu \Sigma_1, \epsilon \Sigma_2, \dots, \theta \Sigma_n)$$

où les lettres grecques, les arguments, désignent la cardinalité de l'ensemble des inscriptions équiiformes à ce que désigne leur indice.

L'établissement de la séquence $V(E)$ associée à une expression E ne pose guère de problèmes. La séquence associée à une expression E consistera en la séquence de son essence. Pour établir cette séquence, d'une part il suffit de déterminer ses termes qui rendent compte de la cardinalité de chaque ensemble de variables libres équiiformes; cette démarche est en tous points semblable à celle exposée dans le système S . D'autre part, il suffit d'effectuer un travail similaire en ne considérant que ses généralisations considérées comme des tous.

Exemples:

t1 : $\forall q, r (\exists u (u \equiv (q \equiv r)) \supset ((\exists u_j (u_j \equiv q) \supset r))$

essence de t1 : $(\exists u_j (u_j \equiv (q \equiv r)) \supset ((\exists u_j (u_j \equiv q) \supset r))$

variables libres
de

l'essence de t1 : q r q r

généralisation
de

l'essence de t1 : $\exists u_j, u_j$ désignées par $\Sigma 1$

recherche des
arguments

: 2 pour q, 2 pour r, 2 pour $\Sigma 1$

établissement
de

la séquence $V(t1)$: $V(t1) = (2q, 2r, 2\Sigma 1)$

E : $\exists p, q (\exists q, q \equiv \exists u_j (u_j \equiv (p \equiv r))$

essence de E : $\exists q, q \equiv \exists u_j (u_j \equiv (p \equiv r))$

variables libres : p r

généralisation : $\Sigma 2: \exists q, q \equiv \exists u_j (u_j \equiv (p \equiv r))$

arguments : 1 pour p, 1 pour r, 1 pour $\Sigma 2$

séquence : $V(E) = (1p, 1r, 1\Sigma 2)$

Considérons le cas d'une expression F qui n'est pas une généralisation.

L'essence de F est donc F elle-même

F : $\exists p, p \equiv (q \equiv \exists p, p \equiv q)$

variables libres : q q

généralisations : $\Sigma 3: \exists p, p \equiv p$ $\Sigma 4: \exists p, p \equiv q$

arguments : 2 pour q, 1 pour $\Sigma 3$, 1 pour $\Sigma 4$

séquence : $V(F) = (2q, 1\Sigma 3, 1\Sigma 4)$

4.3.1. DEFINITION

Il suffit maintenant de poser de nouveau la définition:

Une expression de SQ2 possède la propriété de parité **P**, si et seulement si, chaque terme de la séquence qui lui est associé possède un argument pair.

4.4. QUELQUES RESULTATS

1. La directive de détachement sous le sous-quantificateur conserve la propriété de parité.
2. La directive de substitution conserve la propriété de parité.
3. Par une démonstration analogue à celle présentée pour le système S, on verra que toute expression sans variable libre possédant la propriété de parité est celle d'une thèse de SQ2.
4. L'essence des thèses du système SQ2 possède la propriété de parité. Pour le montrer, il suffit d'effectuer une démonstration similaire - aux noms des généralisations près - à celle présentée pour le système S. Nous ne la donnons donc pas.
5. Une règle de détachement externe au sous-quantificateur n'enrichit en aucune façon l'ensemble des thèses possibles de SQ2. Esquissons une démonstration qui utilise la notion de parité.

Considérons une thèse Q de SQ2 qui n'est pas une généralisation et qui aurait été obtenue par une règle de détachement externe au sous-quantificateur. A la thèse Q est associée une séquence $V(Q)$. $V(Q)$ est constituée d'une suite de termes dont les arguments sont tous multiples de 2.

$$V(Q) \quad (2x_1, 2y_2, \dots, 2z_n)$$

Associons à chaque 'nom' différent de généralisation une variable chaque fois différente.

$$\Sigma_1 \longrightarrow p$$
$$\Sigma_2 \longrightarrow q$$
$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$
$$\Sigma_n \longrightarrow s$$

Constituons maintenant une nouvelle expression P sur le modèle de la thèse Q. Nous procédons ainsi: A chaque inscription d'une généralisation de 'nom' Σ_i , nous notons la variable qui lui est associée. Nous obtenons ainsi une expression composée uniquement de variables libres. Lisons cette expression par un quantificateur général possédant des lieux équi-formes à toutes les variables. P est donc une expression sans variable libre. L'expression P a été conçue sur la base de l'expression Q qui possède la propriété de parité. La transformation opérée conserve cette propriété: $V(P) = (2 \alpha p, 2 \beta q, \dots, 2 \gamma s)$ P possède la propriété de parité. Il s'agit donc d'une thèse de SQ2. Ainsi, pour obtenir Q en partant de la thèse P, il suffit simplement de substituer à chaque variable, la généralisation au 'nom' de laquelle elle était associée. La règle de détachement externe au sous-quantificateur n'est donc pas nécessaire.

Il y a peu d'intérêt à tenter une analyse analogue à celle des 'tables de vérité', analyse interne au système lui-même. Il est vrai que nous avons maintenant deux expressions intéressantes, $\neg u \wedge u$ et $u \wedge \neg u$ que nous pouvons interpréter comme le 'faux', respectivement le 'vrai'. Nous pouvons substituer ces deux expressions à toute variable d'une thèse. Mais nous souhaitons plus. Nous voulons inscrire dans le système même une évaluation des expressions en termes de 'vrai' et 'faux'. Toutefois, pour cela il nous faudra attendre l'introduction d'une règle de définition.

Bien que considérablement plus riche que le système précédent, SQ2 n'est cependant pas suffisamment puissant pour qu'on puisse y démontrer toutes les thèses qui paraissent intuitivement acceptables en termes du connecteur de biconditionnelle et du quantificateur. L'expression suivante en est le témoin.

$$E : \ulcorner pq \urcorner \lrcorner p \equiv q \lrcorner \ulcorner pq \urcorner \lrcorner q \equiv p \lrcorner$$

Cette expression E qu'il y aurait tout lieu d'accepter comme une thèse n'en est pas une dans SQ2. En effet, elle ne possède pas la propriété de parité.

$$V(E) = \{Z_i, Z_j\} \text{ où } Z_i : \ulcorner pq \urcorner \lrcorner p \equiv q \lrcorner$$

$$Z_j : \ulcorner pq \urcorner \lrcorner q \equiv p \lrcorner$$

Dans le système suivant SQ3, nous introduirons une nouvelle règle de transformation qui rendra possible l'inscription d'expressions telle que E comme thèses du système.

5. LE SYSTEME EQUIVALENTTEL QUANTIFIE SQ3

5.1. PREAMBULE

La présentation de ce nouveau système se justifie par les limites des systèmes précédents. Comme nous venons de le voir des expressions telles que:

$$\perp pq \ulcorner p \equiv q \urcorner \equiv \perp pq \ulcorner q \equiv p \urcorner$$

ou

$$\perp pqr \ulcorner (p \equiv r) \equiv (p \equiv q) \urcorner \equiv \perp qr \ulcorner r \equiv q \urcorner$$

ne sont pas démontrables dans SQ2. Une modification de la règle de substitution ou de celle de détachement ne saurait pallier cette lacune. En effet, aucune modification de ces règles n'est capable de rompre l'équilibre de la parité. Cette situation nous incite à proposer une nouvelle règle de transformation: la règle de distribution des quantificateurs qui, elle, transformera l'organisation interne des thèses auxquelles elle sera appliquée. Aucune thèse de SQ3 ne possède de variable libre.

5.2. LES AXIOMES

SQ3 contient des axiomes équiformes à ceux de SQ2

$$A1 : \perp pqr \ulcorner ((p \equiv r) \equiv (q \equiv p)) \urcorner \equiv (r \equiv q)$$

$$A2 : \perp pqr \ulcorner (p \equiv (q \equiv r)) \urcorner \equiv ((p \equiv q) \equiv r)$$

5.3. LES REGLES D'INFERENCE

5.3.1. LA DIRECTIVE DE SUBSTITUTION

Cette règle s'énonce de la même manière que celle qui est formulée dans le système SQ2 (cf. pp. 89-90).

5.3.2. LA DIRECTIVE DE DISTRIBUTION DES QUANTIFICATEURS

Avant de formuler cette directive, interrogeons-nous tout d'abord sur les deux exemples proposés plus haut:

$$A : \ulcorner p \urcorner \urcorner q \urcorner \equiv \ulcorner p \urcorner \urcorner q \urcorner \urcorner p \urcorner$$

$$B : \ulcorner p \urcorner \urcorner q \urcorner \urcorner (p \equiv r) \equiv (q \equiv p) \urcorner \equiv \ulcorner q \urcorner \urcorner r \equiv q \urcorner$$

Comparons ces deux expressions avec les deux thèses suivantes:

$$A^* : \ulcorner p \urcorner \urcorner (p \equiv q) \equiv (q \equiv p) \urcorner$$

$$A1 : \ulcorner p \urcorner \urcorner q \urcorner \urcorner ((p \equiv r) \equiv (q \equiv p)) \equiv (r \equiv q) \urcorner$$

Il existe un lien de parenté évident entre A et A* d'une part et B et A1 d'autre part. Tout donne à penser qu'il y a eu 'glissement' et 'duplication' complète ou partielle du quantificateur général à l'intérieur même de l'essence de généralisation. C'est bien avec cet 'esprit distributif' qu'opère la nouvelle règle.

$$\ulcorner p \urcorner \urcorner (p \equiv q) \equiv (q \equiv p) \urcorner \rightarrow \ulcorner p \urcorner \urcorner p \equiv q \urcorner \equiv \ulcorner p \urcorner \urcorner q \equiv p \urcorner$$

règle dist

Cette règle peut davantage. Appliquée à une thèse E, elle permet d'introduire dans le système une nouvelle thèse qui se caractérise par une distribution sélective des lieux du quantificateur.

Considérons l'exemple suivant:

$$E : \ulcorner p \urcorner \urcorner \ulcorner q \urcorner \urcorner p \equiv q \urcorner \ulcorner q \urcorner \urcorner q \equiv p \urcorner \urcorner.$$

Cette inscription peut surprendre de prime abord. Elle se révèle toutefois être une thèse dans le calcul propositionnel quantifié. Montrons-le en utilisant de façon très libre les règles de la déduction naturelle.

1.	p	$\neg q \supset p \supset q$	hyp.
2.		q $\neg q \supset p \supset q$	1, reit
3.		p = q	2, QE
4.		q - p	3, comm
5.		$\neg q \supset q \supset p$	2-4, QI
6.		$\neg q \supset p \supset q \supset \neg q \supset q \supset p$	1-5, \supset i
7.		$\neg q \supset q \supset p$	hyp.
8.		q $\neg q \supset q \supset p$	7, reit
9.		q - p	8, QE
10.		p - q	9, comm
11.		$\neg q \supset p \supset q$	8-10, QI
12.		$\neg q \supset q \supset p \supset \neg q \supset p \supset q$	7-11, \supset i
13.		$\neg q \supset p \supset q \supset \neg q \supset q \supset p$	6, 12, déf =
14.		p $\neg q \supset p \supset q \supset \neg q \supset q \supset p$	1-13,

La règle de distribution des quantificateurs appliquée à la thèse A* permet d'introduire dans le système l'expression E.

$$\overbrace{p \supset (\neg q \supset p \supset q) \supset (\neg q \supset q \supset p)} \longrightarrow \neg q \supset (\neg q \supset p \supset q) \supset \neg q \supset q \supset p$$

règle dist

Il s'agit maintenant de formuler cette règle avec soin. Nous procéderons en deux temps. Tout d'abord, nous présenterons cette règle de manière intuitive. Enfin, nous formulerons les directives rigoureuses qui caractérisent l'inscription d'une thèse par l'application de cette règle.

Avant d'entreprendre cet exposé quelques explications terminologiques sont nécessaires.

L'inscription A est la première équivalence de B, (respectivement la deuxième équivalence), si et seulement si,

1. B est une fonction équivalentielle, il possède donc un connecteur biconditionnel dominant.
2. A est l'argument gauche, (respectivement l'argument droit) de la fonction équivalentielle B.

L'inscription A est le premier terme, (respectivement le deuxième terme), si et seulement si, A est la première équivalence de l'essence de B, (respectivement la deuxième équivalence).

L'inscription A est un ingrédient d'une inscription B, si et seulement si, 1. A est B

ou

2. A est une partie de B

Exemples: A : $\neg p \supset p$

B : $p \supset p$

C : \equiv

A est un ingrédient de lui-même

B est un ingrédient de A

C est un ingrédient de B et A

B n'est pas un ingrédient de C.

La relation "être ingrédient" est réflexive et transitive, (elle est en fait faiblement réflexive).

5.3.2.1. PRESENTATION INTUITIVE

Soit E, une thèse inscrite dans le système SQ3. Si E est une généralisation, sans variable libre, la règle de distribution des quantificateurs peut lui être appliquée pour inscrire une nouvelle thèse T. Cette transformation consiste en la distribution de tous, ou d'une partie des lieux du quantificateur général de E dans un quantificateur qui précède le premier terme de E d'une part, et le deuxième terme de

E d'autre part.

Soit E, une généralisation, dont la forme générale est la suivante:

E : $\llbracket \alpha_1, \dots, \alpha_n \rrbracket B \equiv C$, B ou C contiennent des variables libres équi-formes à $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Par la directive de distribution des quantificateurs, il est possible de transformer E de telle manière à obtenir une thèse T.

T : $\llbracket \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_n \rrbracket \llbracket \alpha_i \dots \alpha_j \rrbracket B \equiv \llbracket \alpha_i \dots \alpha_j \rrbracket C$

$\hat{\alpha}_i$ signifie que α_i est omis de la liste.

REMARQUES

1. Le quantificateur général de T ne contient plus les lieux équi-formes à ceux qui viennent d'être distribués.
2. Le quantificateur d'un terme de T ne contient un lieu équiforme au lieu distribué que si le terme correspondant de E contient une variable libre équiforme à ce lieu.

EXEMPLES

I. A2 : $\llbracket pqr \rrbracket \underbrace{\llbracket p \equiv (q \equiv r) \rrbracket}_{\text{premier terme de A2}} \equiv \underbrace{\llbracket (p \equiv q) \equiv r \rrbracket}_{\text{deuxième terme de A2}}$

T : $\llbracket p \rrbracket \llbracket qr \rrbracket \llbracket p \equiv (q \equiv r) \rrbracket \equiv \llbracket qr \rrbracket \llbracket (p \equiv q) \equiv r \rrbracket$ A2, dist.
Les lieux q et r ont été distribués.

II. E : $\llbracket pq \rrbracket \llbracket q \equiv (p \equiv p) \rrbracket \equiv q$

T* : $\llbracket q \rrbracket \llbracket p \rrbracket \llbracket q \equiv (p \equiv p) \rrbracket \equiv q$ E, dist.
Le lieu p a été distribué

Nous voulons présenter une formulation rigoureuse de cette règle. Celle de Leśniewski (1929, pp. 59-78), très condensée, est peu aisée à appréhender de manière immédiate. C'est la raison pour laquelle nous empruntons à Rickey (1973, pp. 36-37) la structure de la présenta-

tion formelle qu'il en propose. Dans son étude, Axiomatic inscriptional syntax, part II: The syntax of protothetic, Rickey formule les règles d'inférence de la protothétique d'une manière plus accessible, tout en conservant la même rigueur que celle atteinte par Leśniewski. Nous ne décrivons pas la théorie syntaxique - General Syntax - (Rickey, 1972) qu'il a construite pour cela. Nous nous contenterons d'utiliser certaines des expressions terminologiques qu'il a développées. Notre intention vise bien plus la mise en évidence des mécanismes qui régissent l'inscription d'une thèse que la description des fondements de la théorie syntaxique. En exposant de manière formalisée cette directive de distribution dans SQ3, nous visons deux objectifs. L'un est opérationnel: proposer la démarche rigoureuse qui contrôle l'inscription d'une thèse nouvelle; l'autre objectif est de mettre en évidence une démarche de la pensée déductive qui s'écarte quelque peu de celle communément utilisée. Il nous semble en effet important de commencer à nous rapprocher de l'esprit très particulier qui règne dans les systèmes de Leśniewski. Les règles qu'il nous propose vont en quelque sorte en sens inverse de celles auxquelles nous sommes habitués. Elles ne nous disent pas que faire, mais elles contrôlent si, une inscription ayant été posée, celle-ci est en accord avec une transformation correcte. Nous avons choisi de présenter la formulation rigoureuse de la directive de distribution des quantificateurs parce qu'elle reste d'un abord relativement accessible, et que la pensée peut la cerner sans trop grande difficulté.

5.3.2.2. FORMULATION RIGoureuse DE LA DIRECTIVE DE DISTRIBUTION

A est une thèse résultant de la règle de distribution des quantificateurs appliquée à une thèse B préalablement inscrite dans le système, si

1. L'essence du premier terme de A, (respectivement le deuxième terme) est équiforme à l'essence du premier terme de B, (respectivement le deuxième terme).

2. Pour tout C, si C est un lieu de A

alors, il existe D, $\left[\begin{array}{l} \text{D est équiforme à C} \\ \text{et} \\ \text{D est un lieu de B} \end{array} \right.$

3. Pour tout C, D, E, si $\left[\begin{array}{l} \text{C est le premier terme de A et D est} \\ \text{le premier terme de B} \end{array} \right]$

ou

$\left[\begin{array}{l} \text{C est le deuxième terme de A et D est} \\ \text{le deuxième terme de B} \end{array} \right]$

et

$\left[\text{E est une variable de B} \right]$

et

$\left[\text{E est un mot de D} \right]$

alors, il existe I, $\left[\begin{array}{l} \text{I est équiforme à E} \\ \text{et} \\ \text{(I est un lieu de A} \\ \text{ou} \\ \text{l est un lieu de C)} \end{array} \right.$

4. Pour tout C, D, E, si $\left[\begin{array}{l} \text{C est le premier terme de A et D le} \\ \text{premier terme de B} \end{array} \right]$

ou

$\left[\begin{array}{l} \text{C est le deuxième terme de A et D le} \\ \text{deuxième terme de B} \end{array} \right]$

et

$\left[\text{E est un lieu de D} \right]$

alors, il existe H, $\left[\begin{array}{l} \text{H est équiforme à E} \\ \text{et} \\ \text{H est un lieu de C} \end{array} \right.$

5. Pour tout C, D, E, si $\left[\text{C est le premier terme de A et D le premier terme de B} \right]$

ou

$\left[\text{C est le deuxième terme de A et D le deuxième terme de B} \right]$

et

$\left[\text{E est un lieu de C} \right]$

alors, il existe H, $\left[\begin{array}{l} \text{(H est équiforme à E et H} \\ \text{est un ingrédient de D)} \\ \text{et} \\ \text{(H est une variable de B} \\ \text{ou} \\ \text{H est une variable de D)} \end{array} \right.$

6. Pour tout, C, D, E, F, si $\left[\text{C est le premier terme de A et D le premier terme de B} \right]$

ou

$\left[\text{C est le deuxième terme de A et D le deuxième terme de B} \right]$

et

$\left[\text{F est un lieu de A} \right]$ et

$\left[\text{E est un lieu de C} \right]$ et

$\left[\text{F est équiforme à E} \right]$

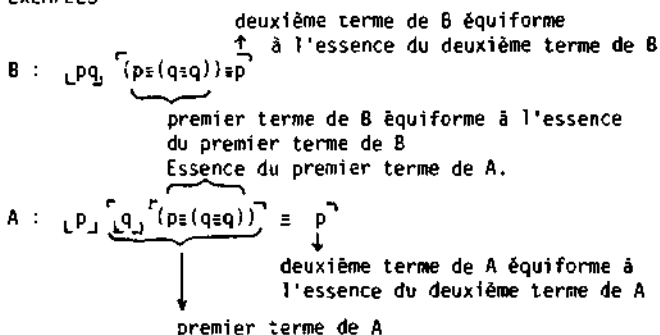
alors, il existe G, $\left[\begin{array}{l} \text{G est équiforme à E} \\ \text{et} \\ \text{G est un lieu de D} \end{array} \right.$

REMARQUES

Les points 1 et 2 précisent que la thèse B est une essence, sans spécifier s'il s'agit de l'essence d'une généralisation ou non. Cette information n'est point nécessaire. En effet, si B est une généralisation n'importe quelle transformation peut être effectuée. Si B n'est pas une généralisation, la seule transformation conforme aux conditions énoncées est la transformation triviale.

Aucune condition n'est présentée relativement au statut des variables. Cette liberté est importante. Cela signifie que cette règle pourra être utilisée quelque soit la catégorie sémantique des variables présentes. Ceci nous intéressera directement lorsque nous aborderons des systèmes où les variables ne seront pas uniquement des variables propositionnelles.

EXEMPLES



Vérifier que A résulte de la thèse B par la directive de distribution, c'est contrôler si l'inscription A répond aux conditions imposées par cette directive.

La condition 1 est remplie: l'essence du premier (deuxième) terme de A est équiforme à l'essence du premier (deuxième) terme de B.

La condition 2 impose de vérifier si le lieu de A, p, possède un lieu de B équiforme; c'est bien le cas.

Par la condition 3, il est nécessaire de contrôler si toute variable de B qui est inscrite dans son premier (deuxième) terme, possède un lieu de A équiforme ou un lieu du premier (deuxième) terme de A équiforme. Quelque soit la variable de B prise en considération, la condition 3 est vérifiée.

La condition 4 stipule: tout lieu du premier (deuxième) terme de B doit posséder un lieu du premier (deuxième) terme de A équiforme. Aucun terme de B ne possède de lieu. La condition 4, ayant la structure d'une conditionnelle, est vérifiée par "le vide", l'antécédent n'étant pas réalisé.

La condition 5 énonce que tout lieu du premier (deuxième) terme de A doit contenir une inscription du premier (deuxième) terme de B équiforme, et, posséder une variable de B équiforme ou une variable du premier (deuxième) terme de B équiforme. Seul le premier terme de A possède un lieu, q; ce lieu possède effectivement une inscription du premier terme de B équiforme, et, cette inscription est bien une variable de B.

La condition 6 impose de vérifier si, lorsqu'il existe un lieu de A équiforme à un lieu du premier (deuxième) terme de A, ce lieu est équiforme à un lieu du premier (deuxième) terme de B. Une fois encore, cette condition est vérifiée par le vide.

Considérons maintenant une inscription A* qui ne vérifie pas toutes les conditions de la directive de distribution.

$$B : \lfloor p \rfloor \overline{\lfloor p \equiv (q \equiv q) \rfloor} \equiv \overline{p}$$

$$A^* : \lfloor p \rfloor \overline{\lfloor q \rfloor \overline{\lfloor p \equiv (q \equiv q) \rfloor}} \equiv \lfloor q \rfloor \overline{p}$$

La condition 5 est violée en ce cas. En effet, le deuxième terme de A* possède un lieu, q; ce lieu possède bien une variable de B équiforme, mais ne contient pas d'inscription équiforme dans le deuxième terme de B, p.

du quantificateur général n'opèrent que sur les variables de B. Utilisant la règle de distribution il est possible de ramener le schéma 1 au schéma 2.

m. A

n. $\frac{A \equiv \text{L} \dots \text{J} \overline{\text{B}}}{\text{L} \dots \text{J} \overline{\text{B}}}$ m, n, s-dét. ext. D est $\text{L} \dots \text{J} \overline{\text{B}}$

2. La thèse A n'est pas une généralisation. Elle est de la forme $P \equiv Q$. Toutes ses variables sont liées. Une fois encore, les lieux du quantificateur général de l'expression $\text{L} \dots \text{J} \overline{\text{A} \equiv \text{B}}$ i.e. $\text{L} \dots \text{J} \overline{(P \equiv Q) \equiv \text{B}}$ n'opèrent que sur les variables de B. La règle de distribution permet de modifier cette thèse et d'obtenir l'expression $(P \equiv Q) \equiv \text{L} \dots \text{J} \overline{\text{B}}$ comme une thèse du système. Ici encore, le schéma 1 peut se ramener au schéma 2.

m. $P \equiv Q$ qui est A

n. $\frac{(P \equiv Q) \equiv \text{L} \dots \text{J} \overline{\text{B}}}{\text{L} \dots \text{J} \overline{\text{B}}}$ thèse de SQ3
m, n, s-dét. ext. D est $\text{L} \dots \text{J} \overline{\text{B}}$

Tout autre situation est exclue. Nous voyons ainsi qu'il est inutile de conserver une double action de la règle de détachement. Cette fois, contrairement à ce qui était le cas dans le système SQ2, la règle de détachement externe au sous-quantificateur, en relation avec la règle de distribution, permet de rendre compte de tous les détachements possibles.

Comme nous l'avons fait pour la règle de distribution du quantificateur, et en utilisant les mêmes références, nous proposons une formulation rigoureuse de cette règle. Bien que formulée de manière extrêmement simple, elle conservera toute sa validité dans les systèmes plus élaborés qui contiendront encore le connecteur de la biconditionnelle comme connecteur primitif.

5.3.3.1. FORMULATION RIGOUREUSE DE LA DIRECTIVE DE DETACHEMENT

A est une thèse résultant de la règle de détachement relativement à deux thèses B, C préalablement inscrites dans le système, si

1. C est équiforme à la première équivalence de B
2. A est équiforme à la deuxième équivalence de B.

Toute thèse de SQ3 n'offre qu'une organisation -bien complexe il est vrai- de variables propositionnelles quantifiées et de connecteurs, la biconditionnelle. Le projet de trouver 'autre chose' reste vain. Afin de tenter de réaliser notre intention première, viser un système complet du calcul des propositions, il est nécessaire d'envisager une démarche supplémentaire: introduire une règle de définition. C'est dans cet esprit que nous proposons un nouveau système équivalentiel quantifié, SQ4.

6. LE SYSTEME EQUIVALENTIEL SQ4

6.1. PREAMBULE

Le système précédent se caractérise par la possibilité d'inscrire des thèses dont la formulation est extrêmement riche en termes de fonctions équivalentielles et de généralisations. Il n'en reste pas moins, toutefois, que, au-delà des formes complexes accessibles dans SQ3, seules les significations logiques fondées sur la biconditionnelle sont susceptibles d'être inscrites, et rien d'autre. De manière imagée, nous pourrions dire, que le système SQ3 ne dévoile que les instances de tautologie fondées sur la biconditionnelle uniquement. L'étape que nous présentons ici, expose un moyen de dépasser une telle limitation en vue d'obtenir un calcul complet des propositions. Une manière de fournir une expansion du système SQ3 est de proposer une nouvelle directive susceptible de dépasser les limites de ce système. Le système SQ4 rend compte d'une telle alternative en proposant une directive de définition.

Le système SQ4 est conçu sur la base de deux axiomes équiiformes à ceux de SQ3, et se caractérise par la présence de quatre règles d'inférence: les directives de détachement, de substitution, de distribution des quantificateurs, mais il contiendra de plus une directive de définition. Ce système représente donc une expansion des systèmes précédents. Les thèses n'ont aucune variable libre. La quantification continue d'opérer uniquement sur des variables propositionnelles.

Le système SQ4 constitue notre dernière tentative de fonder le calcul des propositions sur les bases d'un système équivalentiel quantifié et dont la quantification ne porte que sur des variables propositionnelles. La puissance des systèmes précédents n'est pas suffisante pour introduire comme thèse autre chose qu'une organisation complexe de propositions en termes du quantificateur, de variables propositionnelles et de la biconditionnelle. Il n'y a en effet pas moyen

d'obtenir d'autres opérateurs. Les trois règles de SQ3 n'agissent que sur la 'syntaxe' du système, elles ne permettent aucune expansion 'sémantique'. La directive de définition que nous formulerons permettra cette expansion.

6.2. A PROPOS DE LA DEFINITION

Dans l'optique de Leśniewski, la définition prend une dimension autre que celle qui est communément acceptée. Il considère les définitions comme des thèses du système. Ainsi, aucun terme métadiscursif spécial ne doit être utilisé pour les formules, contrairement à la pratique de Whitehead et Russell. En effet, toutes les définitions des *Principia Mathematica* sont de la forme "A = B df", où le symbole "= df" n'appartient pas au système. Leśniewski refuse d'attribuer à la définition un statut de stricte abréviation comme le fait Russell.

A definition is a declaration that a certain newly-introduced symbol or combination of symbols is to mean the same as a certain other combination of symbols of which the meaning is already known. (Russell, 1910, p. 11).

Et plus précisément encore,

Thus although we employ definitions and do not define "definition", yet "definition" does not appear among our primitive ideas, because the definitions are no part of our subject, but are, strictly speaking, mere typographical conveniences. (Russell, 1910, p.12).

Le refus, par Leśniewski, de cette pratique assez commune tient à, mais pas uniquement, sa volonté d'élaborer un calcul des propositions qui ne contiendrait qu'un seul terme primitif,

Die Definitionen des Herrn Scheffer haben die Gestalt der Ausdrücke vom Typus "p = q" die Definitionen Nicods -die Gestalt der Ausdrücke vom Typus "p = q Df", die von den Herrn Whitehead und Russell gebraucht werden. Dieser Umstand bedingt es, dass es schwer ist zu sagen, dass z.B. die Nicodsche Theorie der Deduktion in der Tat auf dem einzigen primitiven Termin "ι" konstruiert ist. (Leśniewski, 1929, pp. 10-11).

Les définitions de Mr Scheffer ont la forme d'une expression du type " $p=q$ "; les définitions de Nicod, la forme d'une expression du type " $p=q$ Df", expressions également utilisées par Mrs Whitehead et Russell. En fonction de cette situation, il est difficile de dire, par exemple, que la théorie de la déduction de Nicod est en fait conçue sur la base de l'unique terme primitif '1'.

Il désire également donner une dimension nouvelle à la notion de définition. S'exprimant à propos de sa théorie des types, Leśniewski énonce clairement sa volonté de combler une lacune en proposant une règle de définition qui permet d'inscrire dans le système une définition qui est une thèse du système.

Ich betrachtete mein "Typentheorie" schon in dem Augenblicke, als ich sie aufbaute, nur als ein unzureichendes Palliativ, welches mir, ohne mich mit der "Antinomien" zu bedrohen, wenigstens einstweilen bei der Auslegung der grundlegenden mathematischen Theorien... das Operieren mit allen Arten der Funktionsvariablen, mit welchen ich operieren wollte, ermöglichen sollte und mir in gewissem Grade die auffälligen Lücken im Gebiete der Definitionsdirektiven ausfüllen könnte, die in den verschiedenen mir bekannten Systemen der mathematischen Logik auf ungenügende Weise formuliert oder auch überhaupt nicht formuliert werden. (Leśniewski, 1929, p. 13).

Lorsque je construisais ma théorie des types, je ne la considérais que comme un palliatif insuffisant, qui me permettait d'opérer, sans être menacé par les antinomies, avec toutes les formes de variables de fonctions que je désirais, en tous les cas, à cette époque, et relativement à l'interprétation des théories mathématiques fondamentales; elle pouvait remplir dans une certaine mesure les lacunes frappantes que j'observais dans le champ des directives de définition, directives qui sont formulées de manière insuffisante, voire même non formulée du tout, dans les différents systèmes de la logique mathématique.

Il est intéressant de remarquer que même Russell a eu quelques scrupules à ne voir dans la définition qu'une commodité linguistique. Il sentait bien de manière intuitive que ce n'est pas nécessairement de cette manière que la pensée procède.

It is a curious paradox, puzzling to the symbolic mind, that definitions, theoretically, are nothing but statements of symbolic abbreviations, irrelevant to the reasoning and inserted only for practical convenience, while yet, in the development of a subject, they always require a very large amount of thought, and often embody some of the greatest achievements of analysis. This fact seems to be explained by the theory of denoting. An object may be present to the mind, without our knowing any concept of which the said object is the instance; and the discovery of such a concept is not a mere improvement in notation. The reason why this appears to be the case is that, as soon as the definition is found, it becomes wholly unnecessary to the reasoning to remember the actual object defined, since only concepts are relevant to our deductions. In the moment of discovery, the definition is seen to be true, because the object to be defined was already in our thoughts; but as part of our reasoning it is not true, but merely symbolic, since what the reasoning requires is not that it should deal with that object, but merely that it should deal with the object denoted by the definition. (Russell, 1937, p. 63).

L'attitude de Leśniewski face au problème de la définition, comme du reste face à la conception même de ses systèmes, est fondamentalement constructive. Le qualificatif de "constructive" est à comprendre dans le sens d'une extension progressive et contrôlée de l'ensemble des thèses de ses systèmes. Cette extension est dirigée par les directives du système. Toute thèse nouvelle est syntaxiquement construite sur les matériaux contenus dans les axiomes et dans les thèses qui la précèdent. Aucune liste de symboles n'est préalablement proposée, aucune définition récursive de formules bien formées n'est énoncée. Ainsi, la directive de définition nous dit comment introduire une thèse-définition sans nous dire ce qu'il faut définir. Elle nous informe comment le faire à un moment donné, sur les bases de ce que le système contient actuellement. Avec la directive de définition nous disposons d'une liberté conditionnelle d'introduire une constante ou un foncteur constant nouveau. Les conditions portent uniquement sur la nécessité de n'introduire ni confusion ni ambiguïté, mais elles ne déterminent pas quels symboles vont être inscrits. Cependant la règle de définition fait plus que simplement introduire un terme constant

nouveau; elle peut, par l'inscription d'un tel terme, introduire une catégorie sémantique nouvelle. Au début de l'existence d'un système il n'existe que les axiomes; ces derniers ne contiennent que deux types de catégories sémantiques: la catégorie des propositions et celle des foncteurs formateurs de proposition à partir de deux arguments propositionnels. Par la règle de définition, il sera possible d'introduire d'autres foncteurs. Il y aura d'une part ceux qui appartiennent à des catégories sémantiques déjà inscrites, mais également ceux auxquels ne correspondent aucune catégorie sémantique déjà introduite. Ainsi par ce biais, non seulement un foncteur nouveau apparaît dans le système, mais également une catégorie sémantique nouvelle. Avec l'inscription d'une thèse-définition, c'est l'éclosion d'une idée nouvelle qui apparaît dans le système en fonction de ce qui le constitue déjà.

Imposer à un système la possibilité d'introduire une thèse-définition nécessite de respecter plusieurs contraintes. Premièrement nous décrirons les conditions essentielles à l'introduction de toute définition qui permettent de se mettre le plus possible à l'abri de la contradiction ou de l'ambiguïté. Bien que concernant directement notre propos, elles sont abordées en toute généralité. Ensuite, nous dirons les conditions nécessaires à l'inscription d'une thèse dans les systèmes de Leśniewski.

Que l'on considère la définition comme une simple commodité linguistique -une simple abréviation- ou au contraire que l'on attribue à la définition le statut de thèse, il n'en reste pas moins que, comme nous l'avons dit, des conditions minimales et essentielles doivent être respectées de manière à éviter contradiction et ambiguïté. Nous ne développerons ici que ce qui concerne la définition explicite. Ainsi nous négligerons le problème de la définition régressive qui utilise le terme "défini" pour "se définir". Nous empruntons cette distinction à Carnap, (1949).

L'expression d'une définition explicite consiste dans la mise

en relation de deux propositions, par exemple $A = Df B$ ou $A \equiv B$. Ce type d'énoncé veut préciser ou imposer le sens d'un symbole. Il y a donc "ce qui définit": le definiens et "ce qui est défini": le definiendum. Par tradition, nous choisissons d'écrire, ici, le definiendum à gauche du symbole de relation. Le definiendum contient le terme constant qui est défini. Le definiens est une expression bien formée, elle ne peut contenir que des symboles primitifs ou des termes constants préalablement définis. Ainsi l'ordre dans lequel nous définissons n'est pas arbitraire. Carnap parle à ce sujet de chaîne de définitions (Carnap, 1949, p. 24). Une chaîne de définitions est toujours finie, donc univoquement déterminée.

LES CONDITIONS D'UNE DEFINITION EXPLICITE

Condition 0

Le definiendum contient un, et un seul, terme nouveau, donc différent par rapport à ce qui est déjà proposé dans le système. Deux cas se présentent:

- * le definiendum consiste en un terme unique: nous parlons dans ce cas de constante;
- * le definiendum contient, en plus du terme nouveau, d'autres inscriptions -variables et parenthèses-: nous parlons alors de fonction associée à la définition et nommons le terme constant -foncteur constant. Nous verrons que le statut de la fonction associée à la définition peut être multiple.

Condition 1

Le terme nouveau ne figure pas dans le definiens. C'est bien ainsi que nous avons caractérisé la définition explicite.

Condition 2

Toute variable libre du definiens possède une inscription équilibrée comme variable libre dans le definiendum. Cette

condition est essentielle. Elle empêche l'introduction de certaines contradictions. Voyons-le sur une illustration.

Définissons la négation de manière non conforme à la condition 2 :

$$\neg(p) \equiv (\ulcorner r \urcorner \equiv p \wedge q)$$

1.	$\neg(p) \equiv (\ulcorner r \urcorner \equiv p \wedge q)$	définition
2.	$\neg(\ulcorner r \urcorner) \equiv (\ulcorner r \urcorner \equiv \ulcorner r \urcorner \wedge \ulcorner r \urcorner)$	1, $p/\ulcorner r \urcorner$, $q/\ulcorner r \urcorner$
3.	$\ulcorner r \urcorner \equiv \ulcorner r \urcorner \wedge \ulcorner r \urcorner$	th.
4.	$\neg(\ulcorner r \urcorner)$	2,3, dét., comm.
5.	$\neg(\ulcorner r \urcorner) \equiv ((\ulcorner r \urcorner \equiv \ulcorner r \urcorner) \wedge \ulcorner r \urcorner)$	1, $p/\ulcorner r \urcorner$, $q/\ulcorner r \urcorner$
6.	$(\ulcorner r \urcorner \equiv \ulcorner r \urcorner) \wedge \ulcorner r \urcorner$	4, 5, dét.
7.	$\ulcorner r \urcorner \equiv \ulcorner r \urcorner$	th.
8.	$\ulcorner r \urcorner$	6,7, dét.

Dans cette démonstration présentée de manière très libre, une contradiction apparaît. En effet, les expressions $\neg(\ulcorner r \urcorner)$ (ligne 4) et $\ulcorner r \urcorner$ (ligne 8) sont des expressions contradictoires. Cette contradiction est rendue possible par la présence d'une variable libre du définiens, q, qui ne possède pas d'inscription équiforme comme variable libre du définiendum.

Condition 3

Cette condition -inverse de la condition 2- bien que non nécessaire est souvent admise pour des raisons d'esthétique. Toute variable libre du définiendum possède une inscription équiforme comme variable libre dans le définiens. (Rickey, 1982, notes de cours).

Si l'on définit le foncteur constant $\#$ de la manière suivante: $\#(p,q) \equiv p$, cette définition impropre ne cause aucun ennui. En effet, le définiens est logiquement équivalent à $p \wedge q \equiv q$ et l'expression $\#(p,q) \equiv (p \wedge (q \equiv q))$ est une bonne définition.

Condition 4

Le definiendum ne contient pas l'inscription de deux variables identiques. Cette condition n'est pas imposée pour éviter une contradiction, mais bien pour permettre d'éliminer certaines expressions liées à la définition. Considérons encore un exemple.

1. $*(p,p,q) \equiv (p \wedge q)$: définition

Après cette inscription, si nous rencontrons l'expression $*(p,r,q)$ qui peut s'introduire par substitution, nous ne pourrions pas éliminer l'expression. Cette situation 'bloque' en effet quelque peu la transitivité. Nous sommes donc en face de la situation suivante: Une expression B introduite par la règle de substitution et contenant le foncteur * sous la forme suivante: $*(p,r,q)$ et la définition elle-même: $*(p,p,q) \equiv (p \wedge q)$. Nous ne pourrions ainsi éliminer, à partir de B, l'expression $*(p,r,q)$. Il s'agit cependant d'une condition dont nous voulons disposer.

Il importe de préciser encore la spécification de la condition 1: "le definiendum contient un terme nouveau, donc différent, par rapport à ce qui a déjà été proposé dans le système". La nouveauté peut référer à la forme du terme défini; généralement l'équiformité renvoie à une identification sémantique, mais ce n'est pas toujours le cas. Dans les systèmes de Leśniewski, comme dans d'autres systèmes, la forme n'est pas suffisante pour juger de l'appartenance à une catégorie sémantique. C'est bien plus la catégorie sémantique des arguments et leur nombre qui importe plutôt que la forme du foncteur constant. Ses systèmes, nous l'avons dit à plusieurs reprises, ne contiennent pas de liste de symboles auxquels il est attribué une valeur sémantique. Un nouveau terme inscrit grâce à la directive de définition ne possède une identité sémantique qu'en fonction des arguments auxquels il est associé, arguments qui, eux, détiennent déjà une valeur sémantique.

Ainsi dans ces systèmes, la syntaxe n'a pas seulement une valeur 'orthographique' mais également une importance pour la 'reconnaissance sémantique'. Dans 504 nous avons donc à expliciter une écriture conforme à cet objectif. Cette écriture subira une modification profonde par rapport à celle que nous avons utilisée jusqu'alors. Les parenthèses y jouent un rôle essentiel qui n'est plus celui d'une simple 'ponctuation'. Nous allons maintenant définir et justifier une telle écriture.

6.3. OU IL EST QUESTION D'ECRIURE

Leśniewski a su présenter les directives de procédure de ses systèmes avec une précision remarquable. La formulation en est extrêmement formelle. Rigueur et précision, dans la métalangue formalisée, sont atteintes en considérant uniquement les composants qui sont en relation directe avec la signification logique d'une expression du système. Ainsi, Leśniewski va s'abstenir d'utiliser une ponctuation qui, si elle a le mérite d'assurer une lecture plus naturelle, est de fait inutile. Le choix d'une écriture qui s'inspire de l'écriture polonaise se justifie dans ce qui va suivre.

L'écriture polonaise pré- ou post-fixée permet d'éviter toute une 'ponctuation' (le parenthésage habituel ou la 'ponctuation' peano-russellienne). Certes, une telle ponctuation facilite la lecture immédiate, mais elle allonge considérablement les expressions et plus encore, elle fragmente l'information logique. De fait elle rend plus difficile le discours sur la syntaxe des expressions du système. Lorsqu'on veut, comme Leśniewski, ne parler que de l'indispensable, l'élimination de la ponctuation superflue s'impose. Bien qu'elle s'appuie sur une pratique conçue par Łukasiewicz (1966, 1970) et largement partagée par tous ceux qui ont contribué au développement de cette école de logique, l'écriture de Leśniewski est plus qu'une simple reproduction de cette façon de faire. Elle est un moyen qui permet d'inscrire, donc de déterminer, la catégorie sémantique de tout terme, de toute

fonction, de toute formule bien formée du système.

Considérons l'axiome A1:

A1 $\ulcorner pqr \urcorner \ulcorner (\ulcorner p \equiv r \urcorner) \equiv (\ulcorner q \equiv p \urcorner) \urcorner \equiv (\ulcorner r \equiv q \urcorner) \urcorner$ et l'ingrédient $(p \equiv r) \equiv (q \equiv p)$. Dans l'écriture polonaise cette expression s'écrit:

$\equiv pr \equiv qp$ (en fait $EEprEqp$)

Leśniewski propose l'inscription

$\equiv(\equiv(pr)\equiv(qp))$ (en fait $\phi(\phi(pr)\phi(qp))$). Leśniewski conserve les parenthèses. Mais, dans chacune de ces versions, les parenthèses ne remplissent pas les mêmes fonctions.

L'axiome s'écrit: $\ulcorner pqr \urcorner \ulcorner \ulcorner \equiv(\equiv(pr)\equiv(q)) \equiv (rq) \urcorner \urcorner$

Dans ce dernier exemple, l'écriture de Leśniewski est allongée, elle apparaît un peu 'lourde' voire même gratuite. Il n'en est rien bien sûr, car elle fournit par sa forme une information qui n'existe pas au même niveau dans les autres versions. Dans la version classique en effet, les parenthèses jouent le rôle de délimitateur d'unité syntaxique: les formules atomiques et leurs composés successifs. Dans la version de Leśniewski, les parenthèses vont prendre une autre signification, elles remplissent globalement trois fonctions.

1. Elles délimitent les arguments du foncteur logique sur lesquels il opère, tout comme les parenthèses normales.

2. Elles informent, en relation avec le nombre des arguments sur lesquels le foncteur opère, de la catégorie sémantique de l'opérateur.

3. Elles informent, toujours en relation avec le nombre d'arguments qu'elles délimitent, de la catégorie sémantique de ces arguments. La nature des parenthèses dans les systèmes de Leśniewski est ainsi déterminante. Afin de rendre ces propriétés plus claires rappelons et développons quelques éléments.

LES PARENTHÈSES

Il est fait un large usage des parenthèses dans les systèmes de Lesniewski. Outre les parenthèses équiiformes à (,) qui sont systématiquement utilisées, on trouve d'autres formes encore. Il n'est pas possible de fixer d'emblée la liste des parenthèses utiles. Comme nous le verrons, les conditions de leur introduction sont imposées par la règle de définition. Les parenthèses apparaissent toujours comme un couple d'inscriptions symétriques. En fait, c'est ce couple qui importe. C'est donc lui que nous considérerons comme un des termes primitifs de la métalangue utilisée pour parler des systèmes. Pour cette raison, nous introduisons le terme de parenthèses symétriques.

A est une parenthèse symétrique à la parenthèse B, si et seulement si, A et B sont deux inscriptions symétriques; elles ont entre elles la propriété d'être réciproquement en miroir (Rickey, 1973, p. 10). (,); {, } ; <, > ; ≠, ≠ sont des exemples de parenthèses symétriques; p, q aussi du reste. Nous ne devrions donc pas utiliser ces dernières formes pour inscrire des variables propositionnelles (Rickey, 1973, p. 10). Le poids de la tradition justifie cependant quelque peu cette entorse syntaxique.

PARENTHÈME

Le parenthème est une expression dont le premier et le dernier mots sont des parenthèses symétriques, à condition que ces parenthèses délimitent 'quelque chose'; les inscriptions suivantes, (pr), (rq), (=pr)= (qp) sont des parenthèmes équiiformes à certains de ceux inscrits dans l'axiome 1.

Les inscriptions {}, (=pq) ne sont pas des parenthèmes. Bien que composée de deux parenthèses symétriques, la première n'en est pas une parce qu'elle ne contient aucune inscription entre ses parenthèses. La deuxième ne répond pas aux exigences de la symétrie.

FONCTION

Une fonction est une expression composée d'un terme suivi de parenthèses. Nous qualifions une fonction composée d'un parenthème unique de fonction régulière. Il existe des fonctions d'une autre nature. Nous étendrons plus tard cette notion de fonction. Les inscriptions suivantes sont des fonctions: $\equiv(pq)$, $\ast\{tv\}$, $\circ\langle rsu \rangle$. Il s'agit de fonctions régulières.

FONCTEUR

Le terme associé à une fonction et qui précède le parenthème de la fonction est un foncteur. Dans les exemples précédents, \equiv , \ast et \circ sont des foncteurs.

ARGUMENT

Les familles d'expressions qu'il est possible d'inscrire dans un parenthème sont les arguments. Ils peuvent être de trois types:

des termes: p, q, r, \dots

des généralisations: $\{p, p\}, \{q, \equiv(pq)\}, \dots$

des fonctions: $\equiv(pq), \equiv(\equiv(pr)s), \dots$

Soit A: $\{q\equiv(rs)\}$; c'est un parenthème dont les deux arguments sont d'une part le terme q et d'autre part la fonction $\equiv(rs)$.

PARENTHÈME SIMILAIRE

A est un parenthème similaire à B, si et seulement si,

1. A et B sont des parenthèmes.
2. Leurs parenthèses symétriques sont équi-formes.
3. Leur nombre d'arguments est le même.

Ainsi, les parenthèmes $\{pq\}$ et $\{rq\}$ sont deux parenthèmes similaires, mais les parenthèmes $\{pr\}$ et $\{p\}$ ne le sont pas, comme les parenthèmes $\{pr\}$ et $\{pf\}$ du reste. Les inscriptions $\{pr\}$ et $\{p, p\}$ sont deux

parenthèmes similaires; en effet, ils ont tous deux des parenthèses symétriques équiiformes et chacun d'eux contient deux arguments, p et r pour le premier, et $\lfloor p, \lceil p \rceil$ et $\exists(qq)$ pour le second.

Revenons à l'axiome A1. De manière traditionnelle nous savons que les variantes équiiformes à p , q , et r appartiennent à la catégorie sémantique des propositions, S . Cette identification est due au fait qu'une liste de variables est donnée préalablement et que nous y reconnaissons les variables particulières p , q et r . Rien de tel chez Leśniewski. Bien que l'usage aide à identifier ces variables comme des variables propositionnelles, c'est par un autre biais qu'il faut procéder pour les reconnaître comme telles. Au temps premier de l'inscription des thèses d'un système, il n'existe que les axiomes. Leśniewski a choisi de les inscrire en utilisant, entre autres, des parenthèmes à deux arguments dont les parenthèses sont équiiformes à $($ et $)$. En conséquence c'est parce que les arguments sont inscrits dans de tels parenthèmes qu'ils appartiennent à la catégorie sémantique des propositions S . C'est aussi pour la même raison que le foncteur de biconditionnelle est un foncteur formateur de proposition à deux arguments propositionnels. Si, par la règle de la définition, l'inscription $*(st)$ s'imposait dans le système, la catégorie sémantique du foncteur $*$ ainsi que celle des arguments s et t seraient univoquement déterminées. Il s'agirait également d'un foncteur formateur de proposition à deux arguments propositionnels. De même, dans l'expression $\lfloor \lceil \alpha \rceil \lceil \alpha \rceil$ nous saurions que la catégorie sémantique des variables \lceil et \lfloor est de la catégorie des propositions.

Nous désignons la catégorie sémantique des proposition par S , et la catégorie sémantique des foncteurs formateurs de proposition à deux arguments propositionnels par: S/SS . Si, d'aventure, le système permettait l'inscription de la catégorie sémantique des foncteurs formateurs de proposition à n arguments propositionnels, nous la désignerions par $S/\underbrace{S \dots S}_n$.

Cette notion de catégorie sémantique (Ajdukiewicz, 1967, pp. 207-231) fera l'objet d'une présentation rigoureuse dans l'introduction du système de la protothétique élémentaire S1.

Le système esquissé maintenant contient les parenthèses symétriques sélectionnées par Leśniewski. Ce choix s'exprime dans les deux axiomes du système. Il s'agit en fait des seules parenthèses pour lesquelles la forme est imposée. Nous les appellerons les parenthèses primitives du système. Leur rôle est important.

A part les parenthèses fixées par les axiomes, le choix des autres que nous voudrions imposer au système est libre pour autant qu'il ne génère aucune confusion avec ce qui existe déjà au moment de leur introduction. Pour expliciter cette assertion, il faut se demander pourquoi il est nécessaire d'inscrire des parenthèses symétriques dans la description d'une fonction. L'intention même de Leśniewski fournit un élément de la réponse. Il désire en effet formuler une directive de définition de telle manière que, en présence des axiomes, il soit possible d'inscrire dans le système des expressions de n'importe quelle catégorie sémantique. Cette expansion souhaitée ne se veut liée à aucune prédétermination. Il pourrait être utile d'obtenir dans le système des expressions de même catégorie sémantique que la biconditionnelle: S/SS , de même que des foncteurs formateurs de proposition à un seul argument propositionnel: S/S , ainsi que des foncteurs formateurs de proposition à un nombre quelconque n d'arguments propositionnels. Mais Leśniewski voudrait davantage encore: des foncteurs qui n'aient pas nécessairement des arguments propositionnels. Bien que cette tentative d'obtenir des foncteurs de n'importe quelle catégorie sémantique n'aboutisse pas dans le système SQ4 (p.142), il est nécessaire d'envisager tout de même cette possibilité pour comprendre les raisons de l'écriture élaborée par Leśniewski. Un jeu raisonné sur les parenthèses symétriques associées au parenthème d'une fonction permettra de distinguer les différentes catégories sémantiques introduites, comme il rendra

possible d'introduire sans confusion de nouvelles constantes ou de nouvelles catégories.

6.4. LES AXIOMES

$$A1 \quad \ulcorner pqr \urcorner \equiv (\equiv (pr) \equiv (qp) \equiv (rq)) \urcorner$$

$$A2 \quad \ulcorner pqr \urcorner \equiv (\equiv (p \equiv (qr)) \equiv (\equiv (pq) \equiv r)) \urcorner$$

Syntaxiquement et sémantiquement parlant, les axiomes jouent un rôle de référence. C'est pourquoi nous signalons, en relation avec ce qu'ils contiennent, quelques éléments terminologiques empruntés dans leur esprit, à Rickey (Rickey, 1973, pp. 24-26).

FONCTEUR ANALOGUE

Soit A et B, deux fonctions: il s'agit chaque fois d'un terme suivi d'un parenthème.

Le foncteur C de A est dit analogue au foncteur D de B, si et seulement si, leurs parenthèmes sont similaires.

Considérons un exemple de foncteurs analogues.

$$A: \equiv (pq)$$

$$B: \equiv (\ulcorner p \urcorner \ulcorner q \urcorner \equiv (qq) \urcorner)$$

Les parenthèmes associés à A et B sont similaires; les deux foncteurs \equiv sont donc analogues.

ARGUMENT ANALOGUE

Deux arguments A et B sont analogues, si et seulement si, le parenthème associé à A est un parenthème similaire au parenthème associé à B, et que ces deux arguments correspondent chacun à la même place dans leur parenthème respectif. Dans l'exemple précédent, l'argument p dans A est analogue à l'argument $\ulcorner p \urcorner$ dans B, et l'argument q dans A est analogue à l'argument $\ulcorner q \urcorner \equiv (qq) \urcorner$ dans B.

PREMIER (DEUXIEME) ARGUMENT

A est le premier argument (respectivement le deuxième) de B, si et seulement si,

1. B est un parenthème.
2. A est un argument analogue à l'argument p (respectivement l'argument q) d'un parenthème équiforme à (pq).

Exemple. A: $(\underbrace{p_1 \ulcorner p \urcorner}_{\text{premier argument de A}} \underbrace{q_2 \ulcorner (qq) \urcorner}_{\text{deuxième argument de A}})$

PREMIER (DEUXIEME) EQUIVALENCE

A est la première équivalence (respectivement la deuxième) de B, si et seulement si,

1. Le premier mot de B est équiforme à \equiv
2. Il existe C, tel que A est le premier argument (respectivement le deuxième) de C et

B est le complexe de mots formés du premier mot de B suivi de C.

Exemple. B: $\equiv(\underbrace{q_1 \ulcorner p_2 \urcorner}_{\text{deuxième équivalence de B}} \ulcorner p \urcorner)$
première équivalence de B

PREMIER (DEUXIEME) TERME

A est le premier terme (respectivement le deuxième) de B, si et seulement si, A est la première (respectivement la deuxième) équivalence de l'essence de B.

Analysons les inscriptions C et D suivantes:

C: $\ulcorner p_1 \urcorner \equiv (pp)$

D: $\equiv(\ulcorner p_1 \urcorner \ulcorner p \urcorner \ulcorner p_1 \urcorner \ulcorner p \urcorner)$

L'inscription C est une généralisation, l'inscription D n'en est pas une. Le premier terme de C consiste en la variable p inscrite comme le premier argument du parenthème associé à la fonction $\exists(pp)$. Cette fonction constitue l'essence de la généralisation C. L'inscription D n'est pas une généralisation, l'essence de D est D elle-même. Le deuxième terme de D consiste en la généralisation $\lambda p, \ulcorner p \urcorner$ inscrite comme le deuxième argument du parenthème associé à la fonction D, $\exists(\lambda p, \ulcorner p \urcorner, \ulcorner p \urcorner)$.

SEMANTIQUE

Pour toute inscription B, le premier terme et le deuxième terme de B sont de la catégorie sémantique des propositions, S.

Sur la base de ces informations, il est maintenant possible d'attribuer une valeur de catégorie sémantique aux composants des axiomes, et ceci, sans se référer à une liste de symboles préalablement établie.

Considérons l'axiome A1.

$$\lambda pqr, \ulcorner \exists(\exists(pr)\exists(qp))\exists(rq) \urcorner$$

Le premier terme de A1 consiste en l'inscription $\exists(\exists(pr)\exists(qp))$, il s'agit d'une fonction, cette fonction est de la catégorie sémantique des propositions, S. Le deuxième terme de A1 consiste en l'inscription $\exists(rq)$, il s'agit également d'une fonction de la catégorie des propositions, S. Le premier terme du deuxième terme de A1, r, est un terme; c'est un terme de la catégorie des propositions, S. Il en va de même pour q, le deuxième terme du deuxième terme de A1. Quand est-il de l'inscription \exists dans la fonction $\exists(rq)$. Le terme \exists opère sur deux arguments de la catégorie S, r et q, et fournit la fonction $\exists(rq)$, de la catégorie des propositions, S. Il s'agit donc d'un foncteur formateur de proposition à deux arguments propositionnels, S/SS.

6. 5. LES REGLES D'INFERENCE

La présentation des directives du système SQ4 pose plusieurs problèmes. Ces problèmes sont directement liés à la possibilité d'expansion sémantique offerte par ce système et, en relation avec elle, à la nécessité d'une modification profonde de l'écriture des expressions. Le lecteur sera systématiquement confronté à une difficulté de lecture. Il n'est, en effet, pas très facile de se détacher de l'écriture classique qui semble plus naturelle. Nous tentons d'obvier à cette difficulté en offrant, dans un premier temps en tous les cas, deux types d'écriture pour chaque signification logique, l'une classique, l'autre conforme aux exigences imposées par Leśniewski. D'autre part, nous nous donnons la liberté de privilégier, selon les besoins du moment, l'une ou l'autre écriture; lorsque l'intérêt de la présentation porte sur les caractéristiques générales d'une directive ou sur l'esprit logique de tel ou tel aspect du système, une écriture traditionnelle, plus familière, est utilisée. Lorsque nous développons l'aspect purement formel, l'écriture rigoureuse est indispensable.

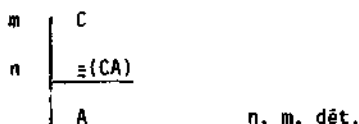
Nous formulons les directives de manière à restituer l'esprit d'un mécanisme constructif au moyen d'une approche qui se veut à la fois intuitive et malgré tout opératoire. Nous profitons de la présence de la directive de définition pour exposer la procédure rigoureuse qui permet de vérifier si, une inscription étant posée, celle-ci correspond à une thèse-définition que le système, actuellement, peut accepter. Cette présentation nous permet d'insister, une fois encore, sur l'esprit très particulier propre aux directives élaborées par Leśniewski.

6. 5.1. LA DIRECTIVE DE DETACHEMENT

Il s'agit d'un détachement externe au sous-quantificateur. Le détachement est rendu possible si le système possède deux thèses qui possèdent, entre elles, une relation formelle bien déterminée.

Soit B et C, deux thèses du système préalablement inscrites. Si B possède la forme générale $\exists(CA)$, il est alors possible d'introduire A comme une nouvelle thèse du système.

SCHEMA



FORMULATION DE LA DIRECTIVE

A est une thèse résultant de la directivem de détachement relativement à deux thèses B, C, préalablement inscrites dans le système, si

1. C est équiforme à la première équivalence de B
2. A est équiforme à la deuxième équivalence de B.

6.5.2. LA DIRECTIVE DE DISTRIBUTION DES QUANTIFICATEURS

La directive présentée rigoureusement dans SQ3 est valide dans SQ4 et s'énonce de manière semblable, (p. 103). Il est toutefois nécessaire de spécifier que les éléments terminologiques qui permettent sa présentation dans le nouveau système doivent être appréhendés dans leur nouvelle acception, c'est-à-dire, en fonction de l'écriture compatible avec celle de Leśniewski.

Un exemple permettra de fixer les choses.

$$A1 : \quad \ulcorner pqr \urcorner \ulcorner \exists(\exists(pr)\exists(qp))\exists(rq) \urcorner$$

premier terme second terme

$$T : \quad \ulcorner pq \urcorner \ulcorner (\ulcorner r \urcorner \ulcorner \exists(\exists(pr)\exists(qp)) \urcorner \ulcorner r \urcorner \ulcorner \exists(rq) \urcorner) \urcorner \quad A1, \text{ dist}$$

le lieu r a été distribué. La présence de la variable r dans le premier terme de l'essence de A1, d'une part, et dans le second terme de l'essence de A1, d'autre part, nécessite d'introduire devant l'un et l'autre termes un quantificateur contenant le lieu r .

6. 5.3. LA DIRECTIVE DE SUBSTITUTION

Nous nous contenterons d'une présentation très générale. Le désir de nous attacher plus particulièrement à la directive de définition justifie ce choix. Nous exposerons de manière plus complète la directive de substitution dans le système suivant, S1.

FORMULATION DE LA DIRECTIVE

T est une thèse résultant de la directive de substitution appliquée à une thèse A préalablement inscrite dans le système, si

1. A chaque variable équiforme de A, nous substituons une expression équiforme. Cette expression peut être une variable propositionnelle ou une constante propositionnelle préalablement inscrite, une fonction régulière de foncteurs constants préalablement inscrite, ou une généralisation construite sur la base de ce que le système possède actuellement.
2. L'expression substituée à une variable doit rester libre pour cette variable dans l'essence de la généralisation A.
3. Le quantificateur de T contient des lieurs équiformes à toutes les variables libres de son essence et à ceux-là seulement.

6. 5.4. LA DIRECTIVE DE DEFINITION

6.5.4.1 GENERALITES

Nous opérerons une distinction entre les conditions qui, d'une part, conduisent à l'introduction de termes constants de la catégorie des propositions, S, et celles qui, d'autre part, régissent l'introduction de foncteurs constants. Nous ne reviendrons pas sur les propriétés minimales de la définition exposées précédemment (pp. 116-118),

DEFINITION DE CONSTANTES

D est une thèse résultant de la règle de définition et introduisant un terme constant de la catégorie des propositions, si

1. D est une fonction équivalentielle.
2. Le deuxième terme de D est un terme constant non équiforme à un terme constant de la catégorie sémantique des propositions. S.
3. Le premier terme de D est une expression bien formée du système, sans variable libre, et construite sur la base de ce que le système contient actuellement.

Commentaires

Ecriture
traditionnelle

Ecriture compatible
avec celle de
Leśniewski

La condition 1 établit
une forme générale:

$$A \equiv B$$

$$\equiv (AB)$$

La condition 2 stipule, entre
autres, que le deuxième terme
est constitué d'un terme (mot)
unique. C'est le definiendum.

$$A \equiv t$$

$$\equiv (A^t)$$

La condition 3 impose, entre
autres, l'absence de variable
libre dans le premier terme
de D: le definiens.

$$\ulcorner p \urcorner \ulcorner p \equiv p \urcorner \equiv t$$

$$\equiv (\ulcorner p \urcorner \ulcorner \equiv (pp) \urcorner)$$

EXEMPLES DE DEFINITIONS

Dans les exemples qui suivent, nous opposerons chaque fois l'écriture traditionnelle avec celle de Leśniewski. Nous expliciterons plus tard les raisons qui ont déterminé Leśniewski à choisir le deuxième terme pour inscrire, contrairement à l'habitude, le definiendum.

$$D1 \quad \ulcorner p \urcorner^r p \approx 1 \quad ; \quad \approx (\ulcorner p \urcorner^r \approx (pp) \urcorner 1)$$

L'inscription du 1 syntaxique nous engage à proposer une définition du 0 syntaxique.

$$D2 \quad \ulcorner p \urcorner^r p \approx 0 \quad ; \quad \approx (\ulcorner p \urcorner^r p \approx 0)$$

Les expressions proposées comme définiens dans ces deux définitions n'ont rien de mystérieux, nous en avons déjà parlé (page 86). Nous les retenons ici en raison de leur simplicité. D'autres formes bien sûr sont acceptables, par exemple:

$$D1^* \quad - \ulcorner p \urcorner^r p \approx (q \approx (q \approx p)) \urcorner \approx 1 \quad ; \quad \approx (\ulcorner p \urcorner^r \approx (p \approx (q \approx (qp))) \urcorner 1)$$

$$D2^* \quad - \ulcorner p \urcorner^r p \approx q \approx \sim \quad ; \quad \approx (\ulcorner p \urcorner^r \approx (pq) \urcorner \sim)$$

Dans ces deux dernières définitions, inscrites dans le système que nous développons actuellement, il est nécessaire de choisir des définiendums (les termes constants 1 et \sim) non équiformes à ceux préalablement inscrits et de même catégorie sémantique (clause 2, p. 131).

Nous pourrions prolonger cette illustration et proposer d'autres exemples de définitions représentant d'une part le vrai et, d'autre part le faux. Une question reste encore en suspens. Est-il possible d'inscrire dans SQ4 des définitions de termes constants autres que celles du 'vrai' et du 'faux'? La réponse est négative. Seuls les termes constants appartenant à l'une des deux familles mentionnées sont susceptibles d'être inscrits dans SQ4. Si le système développé est assez puissant, il est alors possible de démontrer les thèses suivantes:

$$\begin{array}{l} 1 \approx 1 \quad ; \quad \approx (11) \\ \text{et} \\ 0 \approx \sim \quad ; \quad \approx (0\sim) \end{array}$$

DEFINITION DE FONCTEURS CONSTANTS

D est une thèse résultant de la règle de définition qui introduit un foncteur constant, si et seulement si,

1. D est une généralisation.

2. L'essence de D est une fonction équivalentielle.
3. Le second terme de D est une fonction régulière F.
4. Le foncteur de la fonction régulière F n'est pas équiforme à un terme de même catégorie sémantique déjà introduite.
5. Les arguments du parenthème de la fonction régulière F sont tous des variables propositionnelles qui possèdent un lieu équiforme dans le quantificateur de la généralisation D.
6. Les mots du second terme de D ne sont pas répétés.
7. Le premier terme de D est une expression bien formée du système en fonction de ce qu'il contient actuellement.
8. Le premier terme de D contient des variables libres et ces variables libres sont équiformes aux variables libres du second terme de D.
9. SI le parenthème P de la fonction régulière F est similaire à un parenthème Q d'une fonction B préalablement inscrite dans le système ALORS chaque argument de P est de la catégorie S.
10. SI les arguments du parenthème P de F sont équinumériques au parenthème Q d'une fonction régulière B préalablement inscrite dans le système et chaque argument de P dans F est destiné à être de la même catégorie sémantique que celui qui lui correspond dans le parenthème Q de B,
ALORS les parenthèmes P et Q sont similaires.

COMMENTAIRES

Les conditions 1 et 2 établissent une forme générale

$$D : \underline{\dots} \ulcorner R \in S \urcorner \quad ; \quad D : \underline{\dots} \ulcorner \equiv (RS) \urcorner$$

La condition 3 précise la forme générale du second terme de la généralisation D

$$D : \underline{\dots} \ulcorner R \in * \{ \dots \} \urcorner \quad ; \quad D : \underline{\dots} \ulcorner \equiv (R * \{ \dots \}) \urcorner$$

La condition 4 restreint la liberté de choisir une forme arbitraire pour le foncteur constant.

Les conditions 5 et 6 précisent le statut et la catégorie sémantique

des arguments du parenthème de la fonction définie: il s'agit des variables propositionnelles de la thèse-définition D, et chacune n'apparaît qu'une fois dans le parenthème de la fonction.

$$D: \ulcorner pq \dots r \urcorner \overline{R} \equiv * \{ pq \dots r \} \quad ; \quad D: \ulcorner pq \dots r \urcorner \overline{R} \equiv (R * \{ pq \dots r \})$$

Les conditions 7 et 8 confirment que le définiens est une expression bien formée R qui possède toutes ses variables libres équiiformes à celles du definiendum, et seulement celles-là, libres: $R_{pq \dots r}$. Elles n'impose pas l'inscription d'une unique variable de chaque forme.

$$D: \ulcorner pq \dots r \urcorner \overline{R}_{pq \dots r} \equiv * \{ pq \dots r \} \quad ; \quad D: \ulcorner pq \dots r \urcorner \overline{R}_{pq \dots r} \equiv (R_{pq \dots r} * \{ p \dots r \})$$

Les conditions 9 et 10 règlent le choix des parenthèses symétriques de manière à ne créer aucune confusion. Plus précisément, nous savons par la condition 9 que si le parenthème de la fonction définie est similaire à un parenthème d'une fonction préalablement inscrite dans le système, les arguments analogues de ces deux parenthèmes sont de la même catégorie sémantique.

La condition 10 est la condition inverse de 9. Si les arguments du parenthème 'en devenir' de la fonction définie sont équinumériques à ceux d'un parenthème d'une fonction préalablement inscrite dans le système et si les arguments correspondants sont destinés à être dans la même catégorie sémantique, les deux parenthèmes sont similaires. En bref, la condition 9 nous impose en fonction du choix des parenthèses symétriques de la fonction définie une obligation relative à la catégorie sémantique des arguments, et la condition 10 nous impose, en fonction du nombre d'arguments et de leur catégorie sémantique, une obligation relative à la forme des parenthèses symétriques. Ainsi, d'une part, tout terme, toute fonction régulière, toute expression bien formée n'appartiennent qu'à une et à une seule catégorie sémantique et, d'autre part, toute réalisation formelle conforme à l'expression d'une catégorie sémantique est déterminée contextuellement de manière univoque.

QUELQUES DEFINITIONS

Nous allons inscrire maintenant de nouvelles définitions dans le système S04 conformément aux directives exposées. Nous acceptons en plus des axiomes, les deux définitions de termes constants D1 et D2.

D3: $_P _1 \ulcorner p \rightarrow (p) \urcorner$; D3: $_P _1 \ulcorner \neg (p \rightarrow p) \urcorner$

Il s'agit de la définition du foncteur constant \rightarrow , de la catégorie sémantique de foncteur formateur de proposition à un argument propositionnel S/S. Ce foncteur unaire représente une des formes possibles de l'"assertion" d'une proposition. Ainsi, par la définition D3, le système ne s'enrichit pas uniquement d'un foncteur nouveau et d'une thèse nouvelle, mais également d'une catégorie sémantique qu'il ne contenait pas encore.

Cette définition est, bien sûr, conforme aux prescriptions imposées: c'est une généralisation; le definiendum, une fonction régulière, contient la variable p ; une variable libre équiforme à p est contenue dans le definiens; toutes deux sont liées par le quantificateur général; aucun mot n'est répété dans le definiendum; le foncteur constant \rightarrow n'est équiforme à aucun terme de même catégorie sémantique préalablement inscrit dans le système. Quant au choix des parenthèses symétriques du definiendum, il est conforme -par le vide- aux conditions 9 et 10. En effet, ces deux dernières conditions énoncent qu'il n'est nécessaire de prendre garde au choix des parenthèses symétriques que dans le cas où:

- 1) l'inscription d'un parenthème similaire à celui du definiendum existe déjà dans le système;
- 2) le parenthème 'en devenir' du definiendum contient le même nombre d'arguments qu'un parenthème déjà inscrit dans le système, et que les arguments correspondants appartiennent à la même catégorie sémantique.

Ni l'un ni l'autre des antécédents de ces conditions ne sont remplies dans D3. Le choix des parenthèses symétriques, dans ce cas, était donc libre. Nous aurions pu tout aussi bien en choisir qui soient équi-formes à { . } par exemple. Nous aurions obtenu la définition suivante:

D3* : $\ulcorner p \urcorner \vdash p \equiv \{ p \}$. En fait, notre premier choix dépend de la volonté d'obtenir une certaine systématique dans la syntaxe des fonctions du système. C'est pourquoi nous avons décidé d'inscrire tous les parenthèmes associés aux foncteurs formateurs de proposition d'arguments propositionnels avec des parenthèses symétriques équi-formes à (,). Il s'agit simplement d'avoir un code d'écriture qui permet une lecture plus facile.

D4 : $\ulcorner p \urcorner \vdash (p \equiv \vdash (p))$; D4 : $\ulcorner p \urcorner \vdash ((\equiv (pp)) \vdash (p))$

Il s'agit de la définition du foncteur \vdash de la catégorie des foncteurs formateurs de proposition à un argument propositionnel: S/S. Ce foncteur représente une des formes possibles du verum de p. C'est une définition conforme aux conditions énoncées. Contrairement à la définition D3, le choix des parenthèses symétriques équi-formes à (,) est maintenant obligatoire. Cette nécessité découle de l'introduction préalable de la définition D3 et du choix particulier de parenthèses symétriques qui l'accompagnait.

D5 : $\ulcorner p \urcorner \vdash (\ulcorner p \urcorner \vdash p) \equiv \vdash (p)$; D5 : $\ulcorner p \urcorner \vdash ((\ulcorner p \urcorner \vdash p) \vdash (p))$

Il s'agit de la définition du foncteur \vdash de la catégorie des foncteurs formateurs de propositions à un argument propositionnel: S/S. Ce foncteur représente une des formes possibles de la négation de p (traditionnellement \vdash correspond au \sim).

D6 : $\ulcorner p \urcorner \vdash (p \equiv p) \equiv \vdash (p)$; D6 : $\ulcorner p \urcorner \vdash ((\vdash (\equiv (pp))) \vdash (p))$

Il s'agit de la définition du foncteur de la catégorie sémantique S/S. Ce foncteur représente une des formes possibles de la fonction unaire, le falsum de p.

Remarquons que le définiens $\vdash (p \equiv p)$ est effectivement une expression bien formée du système en fonction de ce que ce dernier contient main-

tenant. En effet, le foncteur unaire de négation vient d'être défini; il est donc possible de l'utiliser.

Les formes \neg , \vee , \wedge , \rightarrow , \leftrightarrow n'ont pas été choisies au hasard. Ce sont celles que Leśniewski employait, mais il ne s'agit pas d'un hommage rendu à l'histoire, car ces formes sont un véritable code de reconnaissance des foncteurs. En effet, chaque foncteur est identifiable par rapport à une matrice générale caractérisant les foncteurs formateurs de propositions à un argument propositionnel. Soit 0-1 cette matrice. Une barre verticale à gauche ou à droite de la barre horizontale indique la présence de la valeur 1, son absence indique la présence de la valeur 0. Il s'agit en fait d'un moyen de résumer les valeurs de la table de vérité qui caractérise un foncteur particulier. Ainsi le foncteur \neg décrit par sa forme la transformation des valeurs suivantes.

1) $\begin{array}{c} 0-1 \\ \downarrow \\ \neg \\ \downarrow \\ 1-0 \end{array}$

Il s'agit bien du foncteur de négation, D5.

2) $\begin{array}{c} 0-1 \\ \downarrow \\ \neg \\ \downarrow \\ 0-0 \end{array}$

Falsum, D6.

3) $\begin{array}{c} 0-1 \\ \downarrow \\ \neg \\ \downarrow \\ 1-1 \end{array}$

Verum, D4.

4) $\begin{array}{c} 0-1 \\ \downarrow \\ \neg \\ \downarrow \\ 0-1 \end{array}$

Assertium, D3.

(Luschei, 1961, p. 290; Leśniewski, 1967, pp. 135-137).

De manière analogue à la définition des termes constants qui permettait d'inscrire deux familles de constantes -chacune d'entre elles représentant la même réalité logique- la règle de définition rend possible l'inscription de quatre familles de foncteurs constants unaires, chacune d'entre elles représentant la réalité opératoire d'un des quatre foncteurs unaires mentionnés. Cette possibilité qui est offerte de représenter une même réalité logique de diverses manières n'est pas

un luxe d'élégance. Elle fournit un accès souvent plus facile à certaines démonstrations (Sobocinski, 1961, note 59). Le langage logique de Leśniewski offre la possibilité de parler de manières différentes de la même signification logique; ceci n'enrichit pas uniquement le langage, mais le rend plus efficace encore.

Il est temps de s'intéresser aux foncteurs formateurs de propositions à deux arguments propositionnels. Cette catégorie sémantique S/SS est déjà représentée dans le système; en effet, la fonction \equiv (pr) est bien de cette catégorie. Ceci oblige à respecter -pour cette catégorie- le choix des parenthèses symétriques équiiformes à (,).

D7 : $\ulcorner pq \urcorner \vdash \ulcorner (\equiv(pq)) \equiv \neg \neg (pq) \urcorner$; D7 : $\ulcorner pq \urcorner \vdash \ulcorner (\equiv(\ulcorner pq \urcorner)) \neg \neg (\ulcorner pq \urcorner) \urcorner$
 definiens definiendum

Il s'agit bien d'une définition: c'est une généralisation; le definiendum est une fonction régulière; le parenthème associé à la fonction respecte le jeu des parenthèses; aucun mot n'est répété; le terme constant défini n'est équiiforme à aucun autre terme de même catégorie sémantique préalablement inscrit; enfin, les variables (libres) du definiendum possèdent des termes équiiformes (libres) dans le definiens.

Le definiens est une expression bien formée du système, construite avec ce que le système contient actuellement. Ce foncteur représente le foncteur binaire de disjonction exclusive. Afin d'identifier plus clairement les différents connecteurs définis, nous établirons systématiquement une correspondance, lorsqu'elle existe, avec les références suivantes: (Church, 1956), C, (Piaget, 1972), P. [\oplus , L ; \neq , C ; W, P]

D8 : $\ulcorner pq \urcorner \vdash \ulcorner (\equiv(pq)) \equiv \neg \neg (pq) \urcorner$; D8 : $\ulcorner pq \urcorner \vdash \ulcorner (\equiv(\ulcorner pq \urcorner)) \neg \neg (\ulcorner pq \urcorner) \urcorner$

Il s'agit également d'une 'bonne' définition. Le foncteur $\neg \neg$ représente le foncteur 'tautologique' à deux arguments. [$\neg \neg$, L ; *, P]

$$D9 : \underline{pq} \overline{\neg(-\dot{b}-(pq)) \equiv o(pq)} \quad ; \quad D9 : \underline{pq} \overline{\equiv(\neg(-\dot{b}-(pq)) o(pq))}$$

Le foncteur o représente le foncteur 'contradictoire' à deux arguments.

$$[o, L ; o, P]$$

$$D10 : \underline{pq} \overline{\neg(q \equiv -(\dot{p})) \equiv -\dot{b}(pq)} \quad ; \quad D10 : \underline{pq} \overline{\equiv(\equiv(q-(\dot{p})) -\dot{b}(pq))}$$

Le foncteur $-\dot{b}$ représente le foncteur 'négation du conséquent'.

$$[-\dot{b}, L ; \dot{q}(p), P]$$

$$D11 : \underline{pq} \overline{\neg(q \equiv \dot{p})) \equiv \dot{q}-(pq)} \quad ; \quad D11 : \underline{pq} \overline{\equiv(\equiv(q \dot{p})) \dot{q}-(pq)}$$

Le foncteur \dot{q} - représente le foncteur 'affirmation du conséquent'.

$$[\dot{q}, L ; q(p), P]$$

$$D12 : \underline{pq} \overline{\neg(\dot{p} \equiv -(q)) \equiv \dot{b}-(pq)} \quad ; \quad D12 : \underline{pq} \overline{\equiv(\equiv(\dot{p}-(q)) \dot{b}-(pq))}$$

Le foncteur \dot{b} - représente le foncteur 'négation de l'antécédent'.

$$[\dot{b}, L ; \dot{p}(q), P]$$

$$D13 : \underline{pq} \overline{\neg(\dot{p} \equiv \dot{q}(q)) \equiv -\dot{q}(pq)} \quad ; \quad D13 : \underline{pq} \overline{\equiv(\equiv(\dot{p} \dot{q}(q)) -\dot{q}(pq))}$$

Le foncteur $-\dot{q}$ représente le foncteur 'affirmation de l'antécédent'.

$$[-\dot{q}, L ; p(q), P]$$

La forme donnée aux foncteurs binaires répond également à un besoin d'identification. En rapport avec une matrice générale caractérisant les foncteurs formateurs de propositions à deux arguments propositionnels, chaque foncteur binaire y est identifié en fonction des valeurs de la table de vérité qui le caractérise.

Considérons cette matrice:

$$(00)$$

$$(10) \circ (01)$$

$$(11)$$

Une barre à gauche ou à droite ou au-dessus ou au-dessous du symbole o fournit une indication relative au résultat de l'opération dont il est question. En effet, l'inscription d'une barre signifie que le résultat de l'opération a la valeur 1, son absence la valeur 0.

Voyons-le sur un exemple.

$$1) \begin{array}{ccc} & (00) & (00) \\ (10) \rightarrow (01) & : & (10) (01) \rightarrow 1 \quad 0 \\ & & (11) & (11) & \rightarrow & 0 \quad 1 \\ & & & & & 0 \end{array}$$

Cette matricee fournit donc immédiatement la table de vérité de l'opé-

$$\text{rateur } \rightarrow : \begin{array}{l} (00) \rightarrow 0 \\ (10) \rightarrow 1 \\ (01) \rightarrow 1 \\ (11) \rightarrow 0 \end{array}$$

$$2) \quad 0 \quad 3) \quad \oplus \quad 4) \quad \rightarrow \quad 5) \quad \varphi \quad 6) \quad \delta \quad 7) \quad \neg$$

$\begin{array}{l} (00) \rightarrow 0 \\ (10) \rightarrow 0 \\ (01) \rightarrow 0 \\ (11) \rightarrow 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} (00) \rightarrow 1 \\ (10) \rightarrow 1 \\ (01) \rightarrow 1 \\ (11) \rightarrow 1 \end{array}$	$\begin{array}{l} (00) \rightarrow 0 \\ (10) \rightarrow 1 \\ (01) \rightarrow 0 \\ (11) \rightarrow 1 \end{array}$	$\begin{array}{l} (00) \rightarrow 0 \\ (10) \rightarrow 0 \\ (01) \rightarrow 1 \\ (11) \rightarrow 1 \end{array}$	$\begin{array}{l} (00) \rightarrow 1 \\ (10) \rightarrow 0 \\ (01) \rightarrow 1 \\ (11) \rightarrow 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} (00) \rightarrow 0 \\ (10) \rightarrow 1 \\ (01) \rightarrow 0 \\ (11) \rightarrow 1 \end{array}$
---	---	---	---	---	---

Notre inscription de la biconditionnelle sous la forme δ dérange quelque peu cette systématique, mais elle suit l'usage. Leśniewski proposait une forme conforme au code d'identification mentionné. Nous l'avons indiqué en page 120, il s'agit du symbole

$$\delta, 8) \quad \delta$$

$$\begin{array}{l} (00) \rightarrow 1 \\ (10) \rightarrow 0 \\ (01) \rightarrow 0 \\ (11) \rightarrow 1 \end{array}$$

Les définitions D7-D13 inscrivent sept foncteurs binaires constants nouveaux. Les axiomes imposaient la présence de la biconditionnelle. Actuellement notre système est riche de huit foncteurs binaires différents. Y en a-t-il d'autres de cette catégorie-là? Sans être normale, la réponse est double. Il y en a d'autres, mais qui ne peuvent décrire que la réalité opératoire d'un des huit foncteurs que le système contient déjà. Surma propose un résultat quelque peu étonnant en rapport avec ce système:

Notice that the first order propositional logic based on equivalence as the only primitive connective, i.e., the logic of pure equivalence with quantifiers binding only propositional variables gives nothing essentially new. In other words, quantifiers over propositional variables make it possible to define two propositional constants... and four functions of one argument... hut nothing more (Surma, 1977, p. 199).

Il n'en est rien comme on l'a vu. Il est vrai cependant que les opérateurs binaires inscrits dans ce système n'ont qu'une importance relative. Aucune de leurs combinaisons n'est susceptible de 'générer' un calcul complet des propositions. L'excellent article de Scharle (1961) A diagram of the functions of the two-valued propositional calculus, nous a motivé à conduire une analyse particulière des opérateurs des systèmes logiques de Leśniewski. Dans cette étude, nous organisons ces opérateurs en fonction de leur propriété d'en engendrer d'autres. Les résultats que nous avons obtenus s'opposaient avec ceux de Surma.

Un résultat mérite d'être mentionné; il concerne les mécanismes opératoires fondamentaux de la logique interpropositionnelle bivalence examinée par Piaget (1971, pp. 259-81). Etudiant la structure de l'ensemble des opérations interpropositionnelles, Piaget organise les seize opérations binaires en fonction de leur inverse, de leur réciproque et de leur corrélatrice. Quatre 'quaternes' sont dégagés: chacun d'eux est formé d'un ensemble de quatre opérations. On sélectionne d'abord deux groupes de quatre opérations. La caractéristique essentielle de chaque groupe (quaterne) réside dans le fait que chaque opération qui y est associée possède de façon distincte, une opération directe.

	Directe	Inverse	Réciproque	Corrélatrice
Quaterne A	$p \vee q$	$\bar{p} \cdot \bar{q}$	$p \mid q$	$p \cdot q$
Quaterne B	$p \supset q$	$p \cdot \bar{q}$	$q \supset p$	$\bar{p} \cdot q$

Un troisième quaterne d'opérations se caractérise par le fait que d'une part, la réciproque y est identique à l'opération directe et que, d'au-

tre part, la corrélatrice est identique à l'inverse.

	Directe	Inverse	Réciproque	Corrélatrice
Quaterne C	$p \equiv q$	$p \equiv q$	$p \equiv q$	$p \equiv q$
	$p * q$	(o)	$p * q$	(o)

Enfin un quatrième quaterne d'opérations se caractérise par le fait que d'une part, l'opération directe est identique à la corrélatrice et que, d'autre part, la réciproque est identique à l'inverse.

	Directe	Inverse	Réciproque	Corrélatrice
Quaterne D	$p (q)$	$\bar{p} (q)$	$\bar{p} (q)$	$p (q)$
	$q (p)$	$\bar{q} (p)$	$\bar{q} (p)$	$q (p)$

Il est intéressant de remarquer que les opérateurs $-o-$, $o-$, $-\phi-$, ϕ définis dans S04 correspondent au quaterne C et que les opérateurs $-b-$, $q-$, $-q-$, $b-$ définis dans S04, correspondent au quaterne D. Aucune correspondance avec les quaternes A et B ne peut être trouvée dans S04. Il n'est pas possible de définir, dans ce système, un opérateur binaire auquel on pourrait associer de manière distincte, une opération inverse, une opération réciproque et une opération corrélatrice.

La règle de définition propre à S04 peut encore plus. Au-delà des foncteurs formateurs de propositions à un, respectivement deux arguments propositionnels, elle rend possible l'introduction de tout foncteur formateur de proposition à n ($n \in \mathbb{N}$) arguments propositionnels, mais seulement ceux-là. La restriction imposée par la règle de définition (clause 5) en est responsable; en effet, elle ne permet d'inscrire dans le parenthème de la fonction définie que des variables propositionnelles. Ainsi toute variable contenue dans une thèse de S04 est une variable propositionnelle. De plus, par le jeu même des différentes directives de S04, toute variable propositionnelle d'une thèse est une variable liée.

Proposons, à des fins d'illustration, deux définitions de

foncteurs constants formateurs de propositions à plus de deux arguments propositionnels.

$$D 14 : \ulcorner pqr \urcorner \ulcorner ((p \equiv q) \equiv r) \equiv \phi(pqr) \urcorner ; \ulcorner pqr \urcorner \ulcorner (\equiv (\equiv (pq) r) \phi(pqr)) \urcorner$$

C'est une 'bonne' définition: il s'agit d'une généralisation; le definiendum est une fonction régulière: le choix des parenthèses symétriques est conforme -par le vide- aux conditions 9 et 10. Ce choix particulier est motivé par notre volonté de systématiser les résultats. Le jeu des variables libres dans le definiendum et le definiens est respecté; le definiendum ne présente aucune répétition de mots; le foncteur constant ϕ de la fonction $\phi(pr)$ n'est pas de la même catégorie sémantique. Ce foncteur représente le foncteur 'triconditionnel' de la catégorie S/SSS.

$$D 15 : \ulcorner pqr \urcorner \ulcorner (-\delta(pq) \equiv (-o(rs))) \equiv \alpha(pqrs) \urcorner ; \\ \ulcorner pqr \urcorner \ulcorner (\equiv (-\delta(pq) \vdash (-o(rs))) \alpha(pqrs)) \urcorner$$

D 15 est également une 'bonne' définition du foncteur α de catégorie S/SSSS.

6.5.4.2. FORMULATION RIGoureuse DE LA REGIE DE DEFINITION

Cette formulation ne présente pas une distinction explicite entre la définition de constantes propositionnelles et celle de foncteurs constants.

A est une thèse résultant de la directive de définition en fonction d'une thèse B préalablement inscrite, si

1. Le premier mot de l'essence de A n'est pas une variable de A.
2. Le premier mot du deuxième terme de A n'est pas une variable de A.
3. Le premier mot du deuxième terme de A n'est pas équiforme à une constante de même catégorie sémantique préalablement introduite.

4. Pour tout C : SI C est un terme et
C est un mot du premier terme de A

ALORS, il existe G, C est un lieu de la généralisation G
ou
il existe D, D est un ingrédient de A et
C est une variable de D
ou
C est équiforme à un foncteur constant préalablement introduit.

5. Pour tout C, D : SI D est un ingrédient de A et C est un lieu de la généralisation D

ALORS, il existe E, E est une variable équiforme à C dans D.

6. Pour tout C : SI C est un lieu de la généralisation A

ALORS, il existe D, D est un mot du premier terme de A
et
D est une variable équiforme à C dans A

7. Pour tout C : SI C est un lieu de la généralisation A

ALORS, il existe D, D est un mot du deuxième terme de A
et
D est une variable équiforme à C dans A

8. Pour tout D, E, F : SI

F est un mot du premier terme de A	et
D est un mot du premier terme de A	et
F est une variable équiforme à D dans la généralisation E	

ALORS

F et D sont identiques	
ou	
F est de la même catégorie sémantique que D	

9. Pour tout C : SI C est une généralisation et C est un ingrédient interne à A

ALORS, il existe D, E, F,

D est de la catégorie sémantique des propositions	
et	
E est un ingrédient d'une thèse préalablement inscrite	
et	
F est un ingrédient de A	
et	
D dans E est un argument analogue à C dans F	

10. Pour tout C, D : SI C est une généralisation et C est un ingrédient de A et D est l'essence de C

ALORS,

D est un mot	
ou	
il existe E, D est une fonction analogue à la fonction E préalablement introduite	

11. Pour tout C : SI C est une fonction et C est un ingrédient du premier terme de A

ALORS, | il existe D, | D est une généralisation et
| | C est l'essence de D
| |
| | ou
| il existe D, | C est une fonction analogue à
| | la fonction D préalablement
| | introduite

12. Pour tout C, D : SI D est interne à C et C est le parenthème du deuxième terme de A

ALORS, D est une variable de la généralisation A

13. Les mots du deuxième terme de A ne sont pas répétés.

14. Pour tout C, SI C est un mot interne au parenthème du deuxième terme de A

ALORS, C est de la catégorie sémantique des propositions

15. Pour tout C: SI | C est le parenthème du second terme de A et

| il existe F, | F est une fonction régulière préalablement inscrite, qui est de la catégorie sémantique des propositions
| |
| | et
| | les arguments du parenthème de F sont équinumériques avec les arguments du parenthème C
| |
| | et
| | les arguments du parenthème C sont destinés à être dans la même catégorie sémantique que les arguments correspondants du parenthème de F

ALORS, | le parenthème C et le parenthème de F sont similaires.

16. Pour tout C, D : SI

C est le parenthème du deuxième terme de A	et
D est le parenthème d'une fonction préalablement introduite	et
C et D sont similaires	

ALORS, les arguments de C sont destinés à être dans la même catégorie sémantique que les arguments correspondants de D.

Remarques

Les conditions 6, 7 et 13 imposent que les variables du definiendum (s'il y en a) soient toutes non équiiformes et que le definiens contiennent également ces variables, et seulement celles-là.

Les conditions 15 et 16 établissent le jeu de la bonne écriture des parenthèses symétriques de la fonction définie et ceci de manière à ne créer aucune confusion avec ce qui existe déjà.

Cette exposition de la directive de définition est motivée par notre volonté de mettre en évidence une dernière fois l'esprit qui caractérise les règles de transformation de Leśniewski. Elles ne disent pas ce qu'il faut faire pour inscrire une thèse, mais, une chose étant posée, elles contrôlent si elle est en accord avec ce qu'il est possible d'inscrire actuellement comme thèse du système.

6.6. QUELQUES THESES

Nous allons présenter quelques thèses; certaines d'entre elles ne seront pas démontrées, il s'agit de celles qui l'ont été dans les systèmes précédents. Quant aux autres, seules des indications de démonstration seront proposées. Nous utiliserons le terme \sim en lieu et place de \vdash , et ceci, uniquement pour des raisons qui relèvent de la tradition.

T1	$\ulcorner p \urcorner \equiv (pp)$	théorème
D1	$\equiv (\ulcorner p \urcorner \equiv (pp) \uparrow)$	définition
T2	1	T1, D1, dét.
D2	$\equiv (\ulcorner p \urcorner \uparrow p \uparrow 0)$	définition
T3	$\equiv (0 \ulcorner p \urcorner \uparrow p \uparrow)$	D2 comm
T4	$\equiv (00)$	T1, P/O
T5	$\equiv (1 \ulcorner p \urcorner \equiv (pp) \uparrow)$	D1, comm
T6	$\equiv (11)$	T1, P/I
T7	$\equiv (\equiv (1 \equiv (00)) \equiv (\equiv (10)0))$	A2, P/I, Q/O, R/O
T8	$\equiv (\equiv (\equiv (10)0) \equiv (1 \equiv (00)))$	T7, comm
T9	$\equiv (\equiv (\ulcorner p \urcorner \uparrow p \uparrow \equiv (10)) \sim (\equiv (10)))$	D5, p/(10)
T10	$\equiv (\ulcorner p \urcorner \uparrow p \uparrow \equiv (\equiv (10) \sim (\equiv (10))))$	T9, comm, A2, dét.
T11	$\equiv (0 \equiv (\equiv (10) \sim (\equiv (10))))$	T10, T3, A1, dét.
T12	$\equiv (1 \equiv (00))$	T2, T4, \equiv int.
T13	$\equiv (\equiv (10)0)$	T12, T7, dét.
T14	$\equiv (0 \equiv (10))$	T13, comm
T15	$\equiv (\equiv (0 \equiv (10)) \sim (\equiv (10)))$	T11, A2, dét.
T16	$\sim (\equiv (10))$	T14, T15, dét.
T17	$\equiv (\equiv (\equiv (01)0) \sim (\equiv (01)))$	analogue T11
T18	$\ulcorner pq \urcorner \equiv (\equiv (\equiv (pq)p)q)$	théorème
T19	$\equiv (\equiv (\equiv (01)0)1)$	T18, p/0, q/1
T20	$\equiv (1 \equiv (\equiv (01)0))$	T19, comm
T21	$\equiv (\equiv (01)0)$	T2, T20, dét.
T22	$\sim (\equiv (01))$	T21, T17, dét.
T23	$\equiv (\equiv (\ulcorner p \urcorner \uparrow p \uparrow 0) \sim (0))$	D5, p/0

T24	$\equiv (\underline{p} \underline{p} \equiv (0 \sim (0)))$	T23, A2, dét.
T25	$\equiv (0 \equiv (0 \sim (0)))$	T3, T24, A1, dét.
T26	$\equiv (\equiv (00) \sim (0))$	T25, A2, dét.
T27	$\sim (0)$	T26, T4, dét.

L'aspect privilégié au travers de ces quelques thèses est le jeu des valeurs de vérité du foncteur de négation et du foncteur de biconditionnelle. Cette démarche peut également se généraliser à tout foncteur inscrit dans le système. Ainsi, en partant de la définition D4 et D8

$$D4 : \underline{p} \underline{p} \equiv (\equiv (pp) \leftrightarrow (p))$$

$$D8 : \underline{pq} \equiv (\leftrightarrow (\equiv (pq)) \rightarrow (pq))$$

il est aisé d'inscrire

$$T28 \quad \rightarrow (11)$$

$$T29 \quad \rightarrow (00)$$

$$T30 \quad \rightarrow (10)$$

$$T31 \quad \rightarrow (01)$$

Il serait intéressant d'exprimer en une thèse le jeu des valeurs de vérité de la biconditionnelle. Si nous disposions de la conjonction φ dans **SQ4** nous pourrions obtenir la thèse T*:

$$T^* : \varphi(\equiv(11))\varphi(\sim(\equiv(10)))\varphi(\sim(\equiv(01)))\equiv(00))$$

Ceci n'est pas réalisable. **SQ4** n'est pas suffisamment puissant pour inscrire la conjonction. Nous pourrions le montrer en déroulant une démonstration par induction qui se base sur l'ordre d'introduction des définitions. Nous ne ferons que l'esquisser.

1. Une fonction t-régulière est une fonction régulière qui possède n arguments, $n \geq 0$. Une constante est donc une fonction t-régulière.
2. Toute définition dans **SQ4** est une fonction t-régulière formateur de proposition à arguments propositionnels tous différents - di-

rective de définition -.

3. Soit une fonction t-régulière à n arguments tous non équi-formes. La table de vérité associée à cette fonction possède 2^n valeurs, k valeurs 1 et $2^n - k$ valeurs 0. Le couple $(k, 2^n - k)$ est une caractéristique de cette fonction.
4. La caractéristique d'une fonction t-régulière est dite non impaire si et seulement si, le produit $k \cdot (2^n - k)$ est pair ou nul.
5. La fonction t-régulière exprimant la conjonction possède une caractéristique qui n'est pas non impaire.
6. La démonstration met en évidence que tout définiendum défini dans SQ4 est une fonction t-régulière possédant une caractéristique non impaire.
7. La base de l'induction vérifie que la première définition est bien une fonction de cette catégorie. En ce cas, le définiens ne peut être construit qu'en fonction de ce que contiennent les axiomes. S'il s'agit d'une fonction équivalentielle, le résultat est trivial. Si le définiens est une généralisation, la démonstration est plus délicate. En effet, il est nécessaire de la développer sous sa forme normale conjonctive en y remplaçant les variables liées par 1 puis par 0.

$$\vdash p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \supset q \quad \vdash q \cdot 0 \equiv q$$

On montre alors que cette forme possède la propriété de non-impairité.

8. Sous l'hypothèse d'induction que la $n-1$ ^{ème} définition possède la dite propriété, le pas d'induction est simple à réaliser.

6.7. QUALITES DE SQ4

Le système représente d'une certaine manière l'aboutissement des tentatives visant à fonder un calcul des propositions sur la base d'un calcul équivalentiel quantifié dans lequel la quantification ne

porte que sur des variables propositionnelles. Ceci est bien plus un résultat que le constat d'un échec. Au travers du système **SQ4** transparaît déjà l'esprit des "véritables" systèmes de la protothétique et, plus encore, la conception que Leśniewski défendait de la notion du langage: une conception apparentée à celle du langage naturel.

- Le langage se développe de manière constructive et non pré-déterminée.
- Le langage s'accommode à son propre développement et crée ses propres 'opérateurs'.
- Toute extension du langage est contextuellement déterminée.
- Les définitions sont porteuses d'idées nouvelles, elles sont créatrices.
- Toute forme n'est pas univoquement déterminée.

... in Leśniewskian languages, as in natural languages, expressions of the same form can enjoy a variety of significance. But these directives do not merely reduce the ambiguity latent in using analogous forms of expression within the same language, they eliminate ambiguity. (Canty, 1969, p. 458).

Terminons en relevant une dernière qualité de ce système, qualité qui s'étend d'ailleurs à tous les systèmes de la protothétique. Le théorème de Tarski sur la vérité soutient un lien étroit avec le théorème d'incomplétude de Gödel. Paraphasant Gauthier (Gauthier, 1978, p. 128), nous pourrions écrire: si un système est indécidable, la vérité de ce système ne peut être représentée dans le même système. Or les systèmes de la protothétique sont décidables. Une vérité interne au système peut y être définie. C'est ce qu'offre déjà **SQ4**.

CHAPITRE III - LA PROTOHETIQUE

1. LE SYSTEME S1

1.1. PREAMBULE

La longue démarche présentée dans le chapitre précédent aboutit à une conclusion inévitable: la logique des propositions bivalentes ne peut se concevoir sur les bases d'un calcul équivalentiel quantifié dont la quantification ne porte que sur des variables propositionnelles. Leśniewski poursuit donc ses travaux. Ses réflexions le conduisent à conserver une base axiomatique aussi réduite que possible. Les axiomes ne contiendront, en plus des délimitateurs et des parenthèses 'primitives', que des inscriptions de la catégorie des propositions ainsi que de celles des foncteurs formateurs de propositions à deux arguments propositionnels. La réussite de son projet a été rendue possible grâce à une découverte faite par A. Tarski. Ce dernier était parvenu à démontrer que dans une logique des propositions du second ordre -logique dont la quantification opère sur des variables propositionnelles ainsi que sur des variables de foncteur formateur de proposition à arguments propositionnels- la conjonction peut s'exprimer à l'aide de la biconditionnelle. Ce résultat est quelque peu surprenant.

Im J. 1922 hat Herr Tarski die paradoxe Entdeckung gemacht, die in der Feststellung bestand, dass bei entsprechender Verwertung der Funktionsvariablen und Quantifikatoren alle bekannten Funktionen der Theorie die Deduktion mittels der Äquivalenzfunktion, angenommen als die einzige primitive Funktion, definiert werden können (Leśniewski, 1929, p.11).

En 1922, Monsieur Tarski a fait une découverte paradoxale; il a établi qu'avec une utilisation appropriée des variables de fonctions et des quantificateurs, toutes les fonctions connues de la théorie de la déduction peuvent être définies au moyen de la fonction équivalence (la biconditionnelle) comme unique fonction primitive.

Ceci va permettre à Leśniewski de réaliser son projet: établir un calcul complet des propositions, S1, sur la base d'un seul

foncteur primitif, la biconditionnelle. Nous savons également l'importance qu'il attachait à ce foncteur dans la description d'une règle de définition. Cependant il veut plus et ne voit aucune raison de limiter la portée de la quantification aux seules variables propositionnelles ainsi qu'à celles des foncteurs formateurs de proposition à arguments propositionnels. Il va donc formuler des règles -substitution, détachement, distribution, définition- susceptibles de s'appliquer à un quantificateur qui opère sur des variables de toute catégorie sémantique. Pour ce faire, il faut disposer de 'noms' pour les variables. Or, nous l'avons vu, les systèmes de Leśniewski se caractérisent par le fait qu'ils ne contiennent aucune liste de 'noms' pour les variables. Il est donc nécessaire de procéder de manière différente. Les règles du système indiquent comment introduire de nouvelles inscriptions -en fait comment les inventer- de manière à ne produire aucune confusion avec ce qui existe déjà. Nous le verrons, cette introduction se réalisera par le biais de la règle de définition ainsi que par celle de substitution.

Avant d'aborder à proprement parler le système S1, nous présenterons maintenant de façon précise la théorie des catégories sémantiques (introduite pp. 123-4). Importante en elle-même, elle joue un rôle considérable dans l'énoncé des règles du système. Nous développerons ensuite la démarche qui a amené Tarski au théorème qui établit une relation entre la conjonction et son expression en termes de biconditionnelle et d'un quantificateur.

1.2. LES CATEGORIES SEMANTIQUES

1.2.1. PRESENTATION GENERALE

En 1922, Leśniewski élabore une théorie des catégories sémantiques. C'est d'une certaine manière l'aboutissement d'une analyse de la théorie ramifiée des types et donc des paradoxes. C'est également une nécessité épistémologique profondément ancrée dans la conception

que Leśniewski a du langage. En effet, il conçoit les catégories sémantiques de manière analogue aux distinctions grammaticales qu'opère le langage. Bien que née des paradoxes, Leśniewski affirme que sa théorie répond à plus que cela: à une nécessité.

Im J. 1922 habe ich eine Konzeption der "semantischen Kategorien" skizziert, die mir diese oder jene einer jeden intuitiven Begründung für mich entbehrenden "Hierarchien der Typen" ersetzen sollten, und die, wenn ich überhaupt mit Sinn reden wollte, ich heute mich gezwungen fühlen würde anzunehmen, auch wenn keine "Antinomien" auf der Welt beständen. (Leśniewski, 1929, p. 14).

En 1922, j'ai esquissé une conception de "catégories sémantiques" qui devait remplacer la "hiérarchie des types". A mon avis, cette dernière manquait de fondements intuitifs. En fait, je voudrais avouer qu'aujourd'hui je me sentirais convaincu d'accepter la théorie des catégories sémantiques, même s'il n'existait aucune "antinomie" dans le monde.

Une précision s'impose. Bien que remplissant en partie la même fonction que la théorie des types de Russell, la théorie sémantique ne peut y être assimilée.

Leśniewski's theory of semantical categories is in some ways similar to the simple theory of type, but it has much in common with the categories of a natural language and is perhaps best considered as a theory of "parts of speech". (Canty, 1969, p. 459).

Le nom de sémantique peut surprendre. En effet, ceux qui se sont plongés dans les explications terminologiques ou leurs équivalents simplifiés et commentés par F.V. Rickey (1972, 1973) ressentent combien le terme de sémantique est incomplet. On voudrait pouvoir dire syntaxico-sémantique ou sémantico-syntaxique. Comme le relève Luschei:

"... for Leśniewski categories are both: semantic in intention but syntactic in formalisation". (Luschei, 1962, p.91).

Leśniewski puise son inspiration dans la sémantique des langues naturelles. La formalisation de ses systèmes est indissociable

de leur interprétation; il s'agit d'un formalisme interprété, un formalisme accepté dans la mesure où il sert à préciser, clarifier une pensée. La syntaxe ne se détache jamais de la dimension sémantique.

On a vu dans SQ4 que l'usage de la règle de définition permettait l'introduction de thèses qui inscriraient des termes constants nouveaux: des constantes propositionnelles et des foncteurs constants. Au-delà de l'inscription de ces termes, le système s'enrichit de catégories sémantiques nouvelles. C'est donc au travers de l'existence de cette règle et sur la base des trois axiomes que possèdera S1 que nous aborderons la théorie des catégories sémantiques. Pour ce faire il est nécessaire de garder à l'esprit le schéma général d'une thèse-définition et de l'étendre à l'inscription de toute définition. Nous le rappelons rapidement en privilégiant un unique aspect: les foncteurs constants.

A est une thèse définition.

- A est une généralisation dont l'essence E est une fonction équivalente ($R \approx S ; \approx (RS)$).
- Le premier terme de E consiste en une expression B bien formée du système, construite sur la base de ce que le système contient actuellement. C'est le definiens.
- Le second terme de E consiste en une fonction D. (Dans un premier temps, nous ne considérons que les fonctions régulières (p. 122)). Cette fonction est constituée d'un terme constant non équiforme à une constante de même catégorie sémantique. Le terme constant est suivi d'un parenthème. Les arguments du parenthème sont des variables de catégories sémantiques quelconques pour autant qu'elles ont été préalablement introduites dans le système. Les termes du second terme, qui correspond au definiendum, ne sont pas répétés.
- A chaque variable libre du definiens correspond une variable équiforme dans le definiendum.

- A chaque variable libre du definiendum correspond une variable équiforme dans le definiens.
- Le quantificateur général de A ne possède que des lieurs équiformes aux variables libres du definiendum.

Schéma A: $\underbrace{\ulcorner v_1 \dots v_n \urcorner}_{\text{definiens}} \underbrace{\vDash B_{v_1 \dots v_n} \equiv \{v_1 \dots v_n\}}_{\text{definiendum}}$

ou $\ulcorner v_1 \dots v_n \urcorner \vDash \{B_{v_1 \dots v_n} \bullet \{v_1 \dots v_n\}\}$

Nous ne répétons pas ici la procédure permettant d'inscrire sans confusion les parenthèses symétriques.

C'est sur la base d'une succession de définitions que nous établirons l'expression de différentes catégories sémantiques. Nous visons, par là, une présentation générale des catégories sémantiques.

Considérons les trois axiomes de S1

- A1 $\ulcorner pqr \urcorner \ulcorner \{ (p \equiv r) \equiv (q \equiv p) \} \equiv (r \equiv q) \urcorner$;
- A2 $\ulcorner pqr \urcorner \ulcorner \{ p \equiv (q \equiv r) \} \equiv \{ (p \equiv q) \equiv r \} \urcorner$;
- A3 $\ulcorner gp \urcorner \ulcorner f \urcorner \ulcorner g(pp) \equiv r \urcorner \ulcorner \{ f(rr) \equiv g(pp) \} \equiv r \urcorner \ulcorner \{ f(rr) \equiv g(p \equiv \ulcorner q \urcorner \ulcorner q \urcorner p) \} \equiv \ulcorner q \urcorner \ulcorner g(qp) \urcorner \urcorner$

Ils contiennent des expressions de deux catégories sémantiques.

1. La catégorie S au travers de, par exemple, l'inscription des variables p, q, r, la fonction $\equiv(p,r)$, la généralisation $\ulcorner q \urcorner \ulcorner g(qp) \urcorner$, ou les axiomes eux-mêmes.
- 1]. La catégorie S/SS, au travers notamment du foncteur de la biconditionnelle \equiv et des variables de foncteurs équiformes à f, g.

Acceptons comme acquis dans S1 (SQ4 est un fragment de S1) les définitions inscrites dans SQ4. Il y a celles qui sont de la catégorie S/S

et celles de la catégorie des foncteurs formateurs de proposition à n arguments propositionnels $S/S...S$; le foncteur constant Δ en est un exemple. n fois

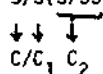
La description d'une catégorie sémantique est rapidement complexe. Nous avons choisi une forme d'écriture particulière pour la représenter. Dans la protothétique, la catégorie sémantique primitive est celle des propositions S . A partir de cette catégorie, des formes complexes sont générées $C/C_1...C_n$. Chaque forme complexe représente la catégorie sémantique d'un foncteur. Un foncteur opère sur des arguments dont la catégorie sémantique de chacun d'eux est déterminable et engendre une fonction dont la catégorie sémantique est également déterminable. Soit $C/C_1...C_n$ la forme générale d'une catégorie sémantique complexe. Les C_i , situés à droite de la barre oblique, désignent les catégories sémantiques des arguments sur lesquels opère de manière ordonnée le foncteur. Le C , situé à gauche de la barre oblique, désigne la catégorie sémantique de la fonction engendrée. Lorsque l'un des C ou C_i est une catégorie sémantique complexe, sa description est entourée d'une paire de parenthèses, sinon cela ne sera pas le cas. D'autre part, nous n'inscrivons pas de parenthèses extérieures à la forme définitive $C/C_1...C_n$.

Analysons une nouvelle définition bien construite.

Ex. 1. $\ulcorner f p \urcorner \equiv \Delta \{ p f \}$; $\ulcorner f p \urcorner \equiv (f(p p) \Delta \{ p f \})$

le foncteur constant défini opère sur deux arguments. Le premier argument p du parenthème $\{ p f \}$ est équiforme au premier argument p du parenthème $(p p)$; p est donc de la catégorie S . Le deuxième argument f du parenthème $\{ p f \}$ est équiforme au foncteur variable f qui opère sur deux arguments propositionnels (cf. A3); f est donc de la catégorie S/SS . La fonction $\Delta \{ p f \}$ est le deuxième argument de la fonction $\equiv(--)$ qui constitue l'essence de la définition. La fonction $\Delta \{ p f \}$ est donc de la catégorie des propositions S . Il découle de ces observations que Δ est un foncteur formateur de proposition à deux arguments: le

premier est de la catégorie S, le second de la catégorie S/SS. La catégorie sémantique de Δ s'écrit ainsi S/S(S/SS)



C_2 est une forme complexe, sa description est donc entourée d'une paire de parenthèses.

$$\text{Ex. 2. } \llbracket gq_1 \rrbracket g(q) \equiv * [qg] \rrbracket ; \llbracket gq_1 \rrbracket \equiv (g(q) * [qg]) \rrbracket$$

Un nouveau foncteur $*$ opère également sur deux arguments. Le premier est équiforme à la variable q inscrite dans un parenthème équiforme à (q) . Le choix particulier des parenthèses symétriques équiformes à $(,)$ d'un parenthème ne possédant qu'un argument détermine la catégorie sémantique de q . C'est en effet de cette façon que nous avons défini dans SQ4 les foncteurs de catégorie S/S (déf. D3-D6). q est donc de la catégorie S. Pour des raisons semblables, le foncteur variable g est de la catégorie S/S. Le foncteur $*$ est donc de la catégorie sémantique des foncteurs formateurs de proposition à deux arguments; le premier est de la catégorie S, le second de la catégorie S/S. La catégorie sémantique du foncteur $*$ se décrit donc ainsi: S/S(S/S).

$$\text{Ex. 3. } \llbracket kpf_1 \rrbracket (k \{o\} \equiv k \{pf\}) * \diamond \langle kpf \rangle \rrbracket ; \\ \llbracket kpf_1 \rrbracket \equiv (\equiv (k \{o\} \equiv k \{pf\}) \diamond \langle kpf \rangle) \rrbracket$$

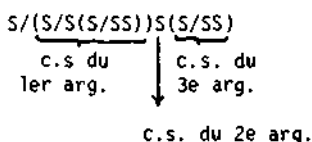
Le nouveau foncteur \diamond opère sur trois arguments. Le premier est équiforme à la variable k . k est un foncteur variable qui précède le parenthème $\{pf\}$ de la fonction $k \{pf\}$. k est donc de la catégorie C_1 : S/S(S/SS) (Ex. 1)

Le deuxième est équiforme à la variable p dans le parenthème $\{pf\}$ ou (pp) . p est donc de la catégorie C_2 : S.

Le troisième argument est équiforme à la variable f dans le parenthème $\{pf\}$; f est donc de la catégorie C_3 : S/SS.

Le foncteur \diamond est donc un foncteur formateur de proposition à trois arguments; le premier est de la catégorie C_1 , le deuxième de la catégorie C_2 et le troisième de la catégorie C_3 .

La catégorie sémantique de \diamond se décrit donc ainsi:



1.2.2. GENERALISATION

Il est possible de décrire l'ensemble de toutes les catégories sémantiques de manière récursive.

1. S est une catégorie sémantique

2. Si C et C_1, \dots, C_n sont des catégories sémantiques, alors

$C / C_1 C_2 \dots C_n$ est une catégorie sémantique; il s'agit de celle qui possède n arguments de catégories C_1 , respectivement C_2, \dots respectivement C_n et qui engendre la catégorie C.

3. Rien n'est une catégorie sémantique sinon par ce qui précède.

(Adjukiewicz, 1967; Bar-Hillel, 1950; Rickey, 1977)

Cette description des catégories sémantiques est peu élégante. Nous l'avons cependant choisie dans la mesure où d'une part, elle rend bien compte de la fragmentation des catégories sémantiques de la séquence des arguments et, d'autre part, elle sépare, sans équivoque, la valeur obtenue C de celles des arguments. La description fractionnelle horizontale de Adjukiewicz ou celle verticale de Davis (Davis, 1975) ne nous semblent pas d'une lecture plus facile. On peut observer qu'en proto-sémantique toute catégorie se décrit comme une combinatoire de la catégorie sémantique primitive S. Dans la présentation discursive des catégories sémantiques, l'expression C peut surprendre. Pourquoi

ne pas avoir choisi la valeur S qui serait conforme aux exemples proposés? La réponse est simple; elle passe encore par la règle de définition. Jusque là nous proposons des définitions de foncteurs de fonctions régulières. La règle de définition rend possible l'introduction de foncteurs associés à des fonctions d'une autre nature. Il s'agit de ceux que Sobocinski nomme "multi-link-functors" (1970, p. 53) et que Küng (1982, p. 140) appelle "many-link-functors". Nous leur donnerons le nom de foncteurs paramétrés. Nous agissons ainsi non pour allonger la liste de leurs dénominations, mais bien parce que cette traduction dénote exactement ce qu'ils sont.

La fonction régulière a été définie comme suit: il s'agit d'un terme (le foncteur) suivi d'un parenthème.

Exemples: $\equiv(pq)$ $\Delta\{pf\}$
 $\sim(p)$ $\circ\langle kdf \rangle$

La fonction paramétrée se définit ainsi:

il s'agit d'un terme (le foncteur) suivi de plus d'un parenthème.

Exemples: $\circ\{pqr\}(s)$ $\circ\{p\{qr\}(st)$ $\downarrow \uparrow fp \uparrow \downarrow r \downarrow (q)$

Nous ne nous occuperons pas maintenant du jeu syntaxique qui commande leur inscription. Nous postulons simplement leur existence possible via la règle de définition et c'est sur cette base que nous les abordons pour déterminer les catégories sémantiques qui leur sont associées.

Généralisons la notion de définition par le schéma

A: $\downarrow \alpha_1 \dots \alpha_n \uparrow \{ \beta \} \alpha_1 \dots \alpha_n \equiv \downarrow \alpha_1 \dots \alpha_n \uparrow \dots \{ \alpha_k \dots \alpha_n \} \uparrow$

La seule modification essentielle consiste dans la présence possible de plusieurs parenthèmes après l'inscription du terme constant.

Exemple:

$$A: \underbrace{\text{pqrt}}_1 \underbrace{\left[((p \equiv q) \equiv (r \equiv t)) \equiv \forall \{p\} \{q\} (t) \right]}_2 ;$$

$$\underbrace{\text{pqrt}}_1 \underbrace{\left[\underbrace{\equiv (\equiv pq) \equiv (rt)}_{1^{\text{er}} \text{ argument}} \underbrace{\forall \{p\} \{q\} (t)}_{2^{\text{e}} \text{ argument}} \right]}_2$$

Les arguments de l'essence de cette généralisation appartiennent tous les deux à la catégorie sémantique S, en effet ils sont arguments de la fonction $\equiv(--)$

$$F: \forall \{p\} \{q\} (t) : S$$

Considérons l'ingrédient I: $\forall \{p\} \{q\}$ de cette fonction F. I précède le parenthème (t), c'est donc un foncteur (variable). Agissant sur l'argument d'un parenthème de parenthèses symétriques équi-formes à (.), ce foncteur opère sur un argument de la catégorie S. Il appartient donc à la catégorie S/S.

$$I: \forall \{p\} \{q\} : S/S.$$

Considérons maintenant l'ingrédient J: $\forall \{p\}$ du foncteur I. Cet ingrédient opère sur le parenthème $\{q\}$ à deux arguments et forme le foncteur I décrit plus haut. La valeur des catégories sémantiques des arguments q et r est donnée au travers d'inscriptions équi-formes du définiens. q et r appartiennent tous deux à des parenthèmes similaires à (pq), il s'agit donc de la catégorie des propositions. Ainsi le foncteur $\forall \{p\}$ est un foncteur formateur de foncteur de la catégorie S/S, à deux arguments propositionnels.

$$K: \forall \{p\} : (S/S)/SS$$

Il reste à déterminer la catégorie sémantique du foncteur constant défini. Ce foncteur opère sur un argument équi-forme à p. p dans le définiens est inscrit dans un parenthème similaire à (pq). p est donc de la catégorie des propositions S. Ainsi \forall est un foncteur formateur de foncteur, de même catégorie que celle de K, à un argument

propositionnel

$\nabla : ((S/S)/SS)/S$

Illustrons encore ce mécanisme par un exemple plus complexe.

$\lfloor_{pqfg} \overline{(f(pp) \equiv g(q)) \equiv * \{g\} \{q\} \{pf\}} \rfloor ;$

$\lfloor_{pqfg} \overline{\equiv (f(pp)g(q)) * \{g\} \{q\} \{pf\}} \rfloor$

F : $* \{g\} \{q\} \{pf\} : S$

I : $* \{g\} \{q\} : S/S(S/SS)$

I est un foncteur formateur de proposition à deux arguments propositionnels:

- le premier p est de la catégorie S
- le deuxième f est de la catégorie S/SS

J : $* \{g\} : (S/S(S/SS))/S$

J est un foncteur qui opère sur un argument propositionnel q. Il forme un foncteur de même catégorie que celle de I

K : $* : ((S/S(S/SS))/S)/(S/S)$

Le foncteur * opère sur un seul argument g de la catégorie S/S et forme un foncteur de la même catégorie que celle de J.

Ces deux exemples font voir la raison pour laquelle, dans le cadre de la protothétique, la catégorie sémantique C n'est pas nécessairement de celle des propositions.

Au-delà des expressions complexes qui viennent d'être exposées transparait la richesse potentielle de l'ensemble des catégories sémantiques de la protothétique. Canty a montré la possibilité d'attribuer d'une manière univoquement déterminée un nombre à chaque catégorie sémantique. Sa méthode est parente de celle de Gödel (Canty, 1969).

Agissant ainsi il lui est possible d'ignorer la forme des parenthèses symétriques qui, en relation avec le nombre d'arguments, caractérise la catégorie sémantique d'un foncteur. Une seule forme lui suffit, mais une forme indicée du nombre qui caractérise la catégorie sémantique du foncteur en question.

Terminons enfin cette présentation des catégories sémantiques en les associant encore davantage aux systèmes de la protothétique. Les axiomes proposent des inscriptions de la catégorie primitive S . La règle de définition rend possible l'introduction d'un terme constant d'une quelconque catégorie sémantique. Cette catégorie sémantique est décrite comme une combinatoire en termes de S . Quelque soit la description d'une catégorie sémantique $C/C_1 \dots C_n$ (où tout C est fonction de S), il sera possible via la règle de définition d'obtenir une constante de cette catégorie. Si la règle de définition n'épuise pas tous les cas possibles -ils sont inépuisables- elle a le pouvoir de les envisager tous. Deux modes de pensée se combinent, l'une constructive, l'autre récursive.

1.3. TARSKI: UNE DÉFINITION DE LA CONJONCTION

Leśniewski désire, nous l'avons dit, dépasser les limites inhérentes aux systèmes S - S_4 . Son objectif est clair: construire un système qui, sur la base d'un unique foncteur propositionnel primitif, la biconditionnelle, permet de définir tous les foncteurs constants du calcul propositionnel. S_4 offre une solution partielle, mais encore insuffisante, seuls 4 foncteurs unaires et 8 foncteurs binaires peuvent être inscrits. Il s'agit donc de modifier les règles d'inférence des systèmes précédents et de proposer une nouvelle base axiomatique.

Ein weiteres Entwicklungsstadium der Protothetik habe ich erhalten, indem ich über die Frage nachdachte, mittels welchen Axiome und Direktiven man das im vorhergehenden und besprochene System S verstärken müsste, um aus ihm ein System des gewöhnlichen "Aussagenkalküls" zu erhalten, vervollständig durch die Hinzufügung der These, die be-

sagt, dass $\ulcorner pqf, \ulcorner p \equiv q. \text{a. } f(p) \equiv f(q) \urcorner$, zugleich mit allen Konsequenzen dieser These. (Leśniewski, 1929, p.30).

J'ai obtenu une nouvelle étape de développement de la protothétique en réfléchissant à la question suivante: au moyen de quels axiomes et directives le système S, discuté précédemment, doit-il être renforcé de manière à obtenir un système du calcul ordinaire des propositions complété par l'addition de la thèse $\ulcorner pqf, \ulcorner p \equiv q. \text{a. } f(p) \equiv f(q) \urcorner$ et de toutes les conséquences qui en découlent.

La réalisation de ce projet est dans une grande mesure due à Tarski. La solution qu'il propose nécessite donc d'être présentée. Au début des années 20, Tarski étudie avec Leśniewski, il collabore également avec lui. Tarski deviendra en 1923 l'unique docteur que formera Leśniewski (Leśniewski, 1929, p.8). C'est dans sa thèse de doctorat sur le terme primitif de la logistique que Tarski énonce et démontre le résultat fort intéressant dont nous avons parlé: dans un calcul des propositions du deuxième ordre, un calcul dans lequel les variables peuvent également être des variables de foncteurs propositionnels, la conjonction peut s'exprimer à l'aide de la biconditionnelle comme unique foncteur constant.

Écoutons Tarski:

Le problème pour lequel j'offre une solution est le suivant: est-il possible de construire un système de la logistique comportant comme seul signe primitif le signe d'équivalence (en plus bien sûr, des quantificateurs)? Ce problème me semble intéressant pour les raisons suivantes. Nous savons qu'il est possible de construire le système de la logistique à l'aide d'un seul terme primitif, utilisant pour cela, soit le signe de l'implication, si l'on veut suivre l'exemple de Russell, soit l'idée de Sheffer qui introduit spécialement à cet effet le signe d'incompatibilité. Pour réellement parvenir à ce but, il faut se garder de faire entrer dans les énoncés des définitions tout terme constant particulier, distinct à la fois du terme primitif adopté, des termes préalablement définis, et du terme à définir. Le signe d'équivalence employé comme terme primitif présente à ce point de vue l'avantage de permettre strictement cette règle et de donner en même temps aux définitions une forme aussi naturelle que commode, celle d'une équivalence. (Tarski, 1972, pp. 3-4).

Cette citation, de caractère introductif, présente également une remarque quelque peu surprenante. Tarski fait référence à deux constructions du système de la logistique à l'aide d'un seul terme primitif. Si, dans cette perspective, l'idée de Sheffer -le signe d'incompatibilité- rencontre notre total accord, nous ne pouvons accepter que les dix axiomes de Russell rendent compte de cette possibilité, mais peu importe ici.

La solution offerte par Tarski prend la forme du théorème suivant:

$$\vdash_{LQ} \ulcorner \ulcorner p \equiv \ulcorner r \urcorner \urcorner \equiv \ulcorner p \equiv f(r) \urcorner \urcorner \equiv \ulcorner \ulcorner q \equiv f(r) \urcorner \urcorner \equiv p \wedge q \urcorner$$

Cette thèse est fondamentale pour Lesniewski. C'est pourquoi nous allons présenter le cheminement démonstratif suivi par Tarski.

Nous commencerons par inscrire des foncteurs unaires D3-D6 qu'il a été possible de définir dans SQ4. Cette manière de faire n'est pas ambiguë. En effet, Tarski travaille dans un système des propositions du deuxième ordre, un système dans lequel les variables peuvent être de la catégorie des propositions ou de la catégorie des foncteurs propositionnels. Le système SQ4 apparaît ainsi comme un fragment du système que Tarski utilise. Ensuite nous exposerons les déductions de Tarski (1972, pp. 5-7); elles sont reproduites avec des modifications mineures. Nous utiliserons généralement la technique de la déduction naturelle et certaines directives établies dans les systèmes précédents.

Définitions

D3	$\ulcorner \ulcorner p \equiv \ulcorner \ulcorner p \urcorner \urcorner \urcorner \equiv \sim(p) \urcorner$	Négation
D4	$\ulcorner \ulcorner p \urcorner \equiv A(p) \urcorner$	Assertion
D5	$\ulcorner \ulcorner p \equiv p \urcorner \equiv V(p) \urcorner$	Verum
D6	$\ulcorner \ulcorner p \equiv \sim(p) \urcorner \equiv F(p) \urcorner$	Falsum

Théorème 1 $\neg p \supset V(p)$

- | | | | |
|------|----|---|-----------|
| dém. | 1. | $\neg p \supset p \supset V(p)$ | D5 |
| | 2. | $\neg p \supset p$ | théorème |
| | 3. | $\neg p \supset p \supset \neg \neg p \supset V(p)$ | 1, dis. |
| | 4. | $\neg p \supset V(p)$ | 2,3, dét. |

Théorème 2 $\neg p \supset q \supset V(q) \supset p$

- | | | | | |
|------|----|-----|---|-----------------|
| dém. | 1. | p | $\neg q \supset p \supset V(q)$ | hyp. |
| | 2. | | $p \supset \neg q \supset V(q)$ | 1, dis. |
| | 3. | | $\neg q \supset V(q)$ | Th. 1 |
| | 4. | | p | 2,3, dét. |
| | 5. | | $\neg q \supset p \supset V(q) \supset p$ | 1-5 $\supset i$ |
| | 6. | | $\neg p \supset q \supset V(q) \supset p$ | 1-6, $\neg i$ |

Théorème 3 $\neg p \supset q \supset \neg q \supset V(q)$

- | | | | |
|----|-----|--|------------------|
| 1. | p | p | hyp. |
| 2. | | q | 1, reit. |
| 3. | | $\neg q \supset V(q)$ | Th. 1 |
| 4. | | $p \supset \neg q \supset V(q)$ | 2,3, $\supset i$ |
| 5. | | $\neg q \supset p \supset \neg q \supset V(q)$ | 2-4, $\neg i$ |
| 6. | | $p \supset \neg q \supset \neg q \supset V(q)$ | 1-5, $\supset i$ |
| 7. | | $\neg p \supset q \supset \neg q \supset V(q)$ | 1-6, $\neg i$ |

Théorème 4 $\vdash p \supset q \vdash p \supset V(q) \vdash p$ Th. 2, Th. 3

Théorème 5 $\vdash p \supset q \vdash f \supset p \supset r \vdash f(r) \supset r \supset q \supset f(r) \supset q$

1.	$p \supset q$	$\vdash f \supset p \supset r \vdash f(r) \supset r \supset q \supset f(r) \supset q$	hyp.
2.		$\vdash p \supset r \supset p \supset V(r) \supset r \supset q \supset V(r)$	1, \supset e, f/V
3.		$\vdash p \supset r \supset p \supset V(r) \supset p$	Th. 4
4.		$\vdash r \supset p \supset V(r) \supset p$	3, \supset e p/p
5.		$\vdash r \supset q \supset V(r) \supset q$	3, \supset e, p/q
6.		$\vdash pqrst, p \supset q, r \supset q \supset s, \wedge, r \supset t : \supset : p \supset s \supset t$ loi \wedge	
7.		$p \supset p \supset q$	2, 4, 5, 6
8.		$p \supset p \supset q$	7, Ax. 2
9.		$\vdash p' \supset p \supset p'$	th.
10.		$p \supset p$	9, \supset e
11.		q	10, 8, \supset e
12.		$\vdash f \supset p \supset r \supset p \supset f(r) \supset r \supset q \supset f(r) \supset q$	1-12, \supset i
13.		$\vdash p \supset q \vdash f \supset p \supset r \supset p \supset f(r) \supset r \supset q \supset f(r) \supset q$	1-13, \supset i

Théorème 6 $\vdash p \rightarrow (\neg q \rightarrow (p \rightarrow A(q)))$

1.	p	$p \rightarrow (p)$	hyp.
2.		\underline{p}	hyp.
3.		$p \rightarrow (p)$	1, reit.
4.		$\neg(p)$	2,3, $\rightarrow e$
5.		$\neg(p)$	2,2,4, $\rightarrow i$
6.		p	5,1 $\rightarrow e$
7.		$(p \rightarrow (p))$	1,5,6, $\rightarrow i$
8.		$\underline{\neg q} : p \rightarrow q$	hyp.
9.		$p \rightarrow (p)$	8, $\rightarrow e$, $q / \neg(p)$
10.		$\neg(p \rightarrow \neg(p))$	7, reit.
11.		$\neg q \rightarrow p \rightarrow q$	8,9,10, $\rightarrow i$
12.		$\underline{\neg q} : p \rightarrow A(q)$	hyp.
13.		$q : \underline{q} : p \rightarrow A(q)$	12, reit.
14.		$p \rightarrow A(q)$	13, $\rightarrow e$, q/q
15.		$\underline{\neg q} : q \rightarrow A(q)$	04
16.		$q \rightarrow A(q)$	15, $\rightarrow e$, q/q
17.		$A(q) \rightarrow q$	16, com.
18.		$A(q) \rightarrow q \rightarrow p \rightarrow A(q) \rightarrow p \rightarrow q$	17,14, Ax1, $p/A(q)$, q/p , r/q
19.		$p \rightarrow q$	17,14,18, $\rightarrow e$
20.		$\neg q \rightarrow p \rightarrow q$	13-19, $\rightarrow i$
21.		$\neg : q \rightarrow p \rightarrow q$	11, reit.
22.		$\neg \neg q \rightarrow p \rightarrow A(q)$	12, 20,21 $\rightarrow i$
23.		$\neg p \rightarrow \neg q \rightarrow p \rightarrow A(q)$	1-22, $\rightarrow i$

Théorème 7 $\vdash \neg(p \supset r) \supset (p \supset A(r)) \equiv \neg(r \supset q) \supset (r \supset A(r))$

- | | | |
|----|---|----------------------|
| 1. | $\neg(p \supset r) \supset (p \supset (r \supset A(r)))$ | th. 6 |
| 2. | $\neg(q \supset \neg(r \supset q) \supset A(r))$ | th. 6 |
| 3. | $\neg(r \supset p \supset A(r))$ | 1, \supset -e, p/p |
| 4. | $\neg(r \supset q \supset A(r))$ | 2, \supset -e, q/q |
| 5. | $\neg(r \supset p \supset A(r)) \supset \neg(r \supset q \supset A(r))$ | 3,4, \wedge i |
| 6. | $\neg(p \supset p \supset q) \equiv \neg(p) \equiv \neg(q)$ | loi logique |
| 7. | $(r \supset p \supset A(r)) \supset (r \supset q \supset A(r))$ | 5,6 |
| 8. | $\neg(p \supset r) \supset (p \supset A(r)) \supset \neg(r \supset q) \supset (r \supset A(r))$ | 1-7, \supset -i |

Théorème 8 $\vdash (p \supset f, p \supset \neg(r \supset p \supset f(r)) \supset (r \supset q \supset f(r))) \supset p$

- | | | |
|----|---|---------------------------|
| 1. | $(p \supset f) \supset (r \supset p \supset f(r)) \supset (r \supset q \supset f(r))$ | hyp. |
| 2. | $p \supset (r \supset p \supset A(r)) \supset (r \supset q \supset A(r))$ | 1, \supset -e f/A |
| 3. | $\neg(p \supset r) \supset (p \supset A(r)) \supset (r \supset q \supset A(r))$ | th.7 |
| 4. | $(r \supset p \supset A(r)) \supset (r \supset q \supset A(r))$ | 3, \supset -e, p/p, q/q |
| 5. | p | 2,4 \equiv e |
| 6. | $(f \supset p \supset (r \supset p \supset f(r))) \supset (r \supset q \supset f(r)) \supset p$ | 1-5, \supset i |
| 7. | $(p \supset f) \supset (p \supset \neg(r \supset p \supset f(r)) \supset (r \supset q \supset f(r))) \supset p$ | 1-6, \supset i |

Arrêtons-nous quelques instants. Deux théorèmes revêtent une importance particulière pour définir la conjonction en termes de la biconditionnelle uniquement. Il s'agit des théorèmes 5 et 7. Schématisons-les ainsi :

Th. 5 $\vdash \neg(p \supset r) \supset (Fpq \supset q)$

Th. 8 $\vdash \neg(p \supset r) \supset (Fpq \supset p)$

La tentation est grande d'établir les théorèmes suivants :

$\vdash \neg(p \supset r) \supset (Fpq \supset .p \wedge q)$ et $\vdash \neg(p \supset r) \supset (p \wedge q \supset Fpq)$ ce qui permettrait d'obtenir

$$\vdash \neg(p \supset r) \supset (Fpq \equiv .p \wedge q)$$

C'est ainsi que va procéder Tarski.

Théorème 9 $\vdash (pq \supset f) \supset (\neg p \supset f(r) \supset \neg q \supset f(r)) \supset p \wedge q$

1.	pq	$\vdash f \supset (\neg p \supset f(r) \supset \neg q \supset f(r))$	hyp.
2.		$\vdash (pq \supset f) \supset (\neg p \supset f(r) \supset \neg q \supset f(r)) \supset p$	th. 8
3.		$\vdash (pq \supset f) \supset (\neg p \supset f(r) \supset \neg q \supset f(r)) \supset q$	th. 5
4.		$\vdash (f \supset (\neg p \supset f(r) \supset \neg q \supset f(r))) \supset p$	2, ... e, p/p, q/q
5.		$\vdash (f \supset (\neg p \supset f(r) \supset \neg q \supset f(r))) \supset q$	3, ... e, p/p, q/q
6.		p	1, 4, $\supset e$
7.		q	1, 5, $\supset e$
8.		$p \wedge q$	6, 7, $\wedge i$
9.		$\vdash (f \supset (\neg p \supset f(r) \supset \neg q \supset f(r))) \supset p \wedge q$	1-8, $\supset i$
10.		$\vdash (pq \supset f) \supset (\neg p \supset f(r) \supset \neg q \supset f(r)) \supset p \wedge q$	1-9, $\supset i$

Théorème 10 $\supset (pq \wedge q \supset f) \supset (\neg p \supset f(r) \supset \neg q \supset f(r))$

1.	pq	$p \wedge q$	hyp.
2.		p	$\vdash \supset e$
3.		q	
4.		$q \supset p$	
5.	f	$\vdash (pq \wedge q \supset f) \supset q \supset p \supset f(r) \supset q \supset p$	Ax1 p/f(r), r/q, q/p
6.		$f(r) \supset q \supset p \supset f(r) \supset q \supset p$	5, $\supset e$
7.		$f(r) \supset q \supset p \supset f(r)$	4, 6, $\supset e$
8.		$p \supset f(r) \supset q \supset f(r)$	7, propo. \supset
9.		$\vdash (\neg p \supset f(r) \supset \neg q \supset f(r))$	5-8, $\supset i$

10.	$\left\{ \begin{array}{l} \vdash \\ \vdash \\ \vdash \\ \vdash \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \vdash \\ \vdash \\ \vdash \\ \vdash \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \vdash \\ \vdash \\ \vdash \\ \vdash \end{array} \right.$	$\vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} p \equiv f(r) \equiv \vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} q \equiv f(r)$	9, dist.
11.				$\vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} p \equiv \vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} p \equiv f(r) \equiv \vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} q \equiv f(r)$	2, 10, \equiv i
12.				$\vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} p \equiv \vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} p \equiv f(r) \equiv \vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} q \equiv f(r)$	5-11, \cup i
13.				$\vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} p \wedge q \supset \vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} p \equiv \vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} p \equiv f(r) \equiv \vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} q \equiv f(r)$	1-12, \supset i
14.	$\vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} p \wedge q \supset \vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} p \equiv \vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} p \equiv f(r) \equiv \vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} q \equiv f(r)$	1-13, \cup i			

A partir des théorèmes 9 et 10*, le théorème 11 s'obtient sans peine.

Théorème 11 $\vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} p \equiv \vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} p \equiv f(r) \equiv \vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} q \equiv f(r) \equiv \vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} p \wedge q$

Tarski donne au théorème 10 la forme suivante:

$$\vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} p \wedge q \supset \vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} p \equiv \vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} p \equiv f(r) \equiv \vdash_{\mathcal{L}} \vdash_{\mathcal{L}} q \equiv f(r)$$

Relevons encore une fois l'importance de cette thèse, et pour cela, empruntons la terminologie de Leśniewski. La thèse 11 possède la structure formelle d'une thèse définition, ce qui va être exploité par Leśniewski.

- Il s'agit d'une généralisation A.
- Le premier terme B de l'essence de A est une expression bien formée, considérons-la comme le definiens.
- Le second terme C de l'essence de A est une fonction régulière $\wedge(pq)$; $p \wedge q$, considérons-la comme le definiendum.
- Aucun mot n'est répété dans le second terme C.
- Les variables libres du premier terme B et du second terme C possèdent des lieux équiiformes dans le quantificateur général de la généralisation A.
- Le premier terme B de l'essence de A contient des variables libres et ces variables libres sont équiiformes aux variables libres du second terme C.

Le théorème 11 offre ainsi un résultat précieux. Dans un système qui admet une quantification propositionnelle du second ordre et qui possède une règle de définition, la conjonction peut être l'objet d'une définition. Ce résultat est important puisqu'il permet de dépasser les limites propres au système SQ4. En effet, si nous disposons de la définition de la conjonction, avec l'aide de la négation définissable dans SQ4, il est donc possible d'inscrire tous les foncteurs binaires que SQ4 ne permettait pas de formuler.

1. $\vdash_{pq} p \wedge q \equiv p \supset q$; $\vdash_{pq} \neg \equiv (\equiv (p \wedge (pq) \supset (pq)))$
2. $\vdash_{pq} \neg(p) \supset q \equiv p \vee q$; $\vdash_{pq} \neg \equiv (\supset (\neg(p) \vee (pq)))$

Mais Leśniewski voulait davantage. D'une part, il ne voyait aucune raison de ne proposer qu'un calcul propositionnel quantifié du deuxième ordre. Il lui semblait raisonnable d'envisager tous les ordres possibles. D'autre part, il désirait un système susceptible d'offrir la thèse qui énonce la propriété d'extensionnalité pour les propositions:

$$\vdash_{pqf} p \equiv q \supset . f(p) \equiv f(q) \quad \text{ou} \quad \vdash_{pqf} p \equiv q \equiv \vdash_{f} f(p) \equiv f(q)$$

Cette dernière expression sera une thèse dans le système S1. C'est à partir d'elle qu'il est possible de démontrer

$$\vdash_{pqf} p \equiv q . \wedge f(p) \supset f(q) ,$$

thèse qui exprime que toute fonction qui prend pour argument des propositions est une fonction de vérité (Tarski, 1972, p.7). Cette thèse appelée aussi loi de substitution (Tarski, 1972, p. 7) permet d'exprimer la conjonction sous une forme plus condensée que celle vue plus haut, $\vdash_{pqf} \vdash_{f} p \equiv f(p) \equiv f(q) \equiv p \wedge q$

Soulignons encore qu'il est indispensable de disposer de la thèse d'extensionnalité pour les propositions afin de le montrer

Sur la base du résultat de Tarski, Leśniewski va renforcer les règles d'inférence des systèmes précédents; il va également en compléter la base axiomatique en proposant un troisième axiome. Dans la

partie suivante, nous exposerons la réflexion que Leśniewski conduit afin de formuler ce nouvel axiome.

1.4. A LA RECHERCHE D'UN TROISIEME AXIOME

L'intention de Leśniewski est précise. Le système doit connaître le principe d'extensionnalité pour les propositions et admettre une quantification sur toute variable, quelque soit sa catégorie sémantique. Leśniewski réalise ce projet d'une part en modifiant les règles de définition et de substitution et, d'autre part en prolongeant la base axiomatique des systèmes précédents. Dans un premier temps, nous nous intéresserons uniquement à l'aspect axiomatique du système S1.

Tout en considérant les axiomes A1 et A2 qui sont équiformes à ceux proposés pour le système SQ4 (p. 125), Leśniewski inscrit un troisième axiome: A3.

A3: $\ulcorner p \urcorner \ulcorner f \urcorner \ulcorner g(pp) \urcorner \equiv \ulcorner r \urcorner \ulcorner f(rr) \urcorner \equiv \ulcorner g(pp) \urcorner \equiv \ulcorner r \urcorner \ulcorner f(rr) \urcorner \equiv \ulcorner g(p \ulcorner q \urcorner p) \urcorner \equiv \ulcorner q \urcorner \ulcorner g(gp) \urcorner$

Cet axiome paraît très ésotérique. Sobocinski écrit:

The axiome A3 comprises:

- a) *The principle of bivalency expressed by equivalence and variable functors for two arguments.*
- b) *Some forms of the law of extensionality for propositions which together with A1 and A2 enable us to obtain a complete propositional calculus. (Sobocinski, 1960, pp. 56-57).*

Pour mettre en évidence ces lois et ce principe il faudrait disposer maintenant des différentes règles d'inférence du système S1. Nous procéderons autrement. Tout d'abord, nous montrerons comment Leśniewski (Leśniewski, 1929, pp. 31-33) s'est assuré que, sur la base d'un calcul propositionnel quantifié, renforcé par une des lois d'extensionnalité pour les propositions, une thèse équiforme à A3 est démontrable. Ensuite lorsque nous aurons exposé les règles d'inférence, nous montrerons que les lois énoncées sont bien des thèses de S1. Avant

d'aborder cette présentation, faisons quelques remarques à propos de la loi d'extensionnalité. Pour ce faire, nous nous appuierons encore sur les Principia Mathematica. Il est indispensable d'affirmer que si une proposition apparaît dans une inscription $f(p)$ par exemple, la valeur de vérité de cette expression ne doit dépendre que de la valeur de vérité de p et non pas de la proposition particulière p . Seules les fonctions de vérité sont considérées.

...if $p \equiv q$, we shall have $f(p) \equiv f(q)$

We may call a function $f(p)$ a "truth-function" when its arguments p is a proposition, and the truth-value of $f(p)$ depends only upon the truth-value of p (PM, p.8).

Ainsi une fonction de vérité est:

1. une fonction dont les arguments sont des propositions et qui prennent valeur sur l'ensemble $\{V, F\}$.

2. Une fonction qui est satisfaite par la condition:

(A) $\ulcorner pq \urcorner \lceil p \equiv q . f(p) . \supset f(q) \rceil$ (fonction à un argument propositionnel)

$\ulcorner pq \urcorner \lceil p \equiv q . r \equiv q . f(pr) : \supset f(q) \rceil$ (fonction à deux arguments propositionnels)

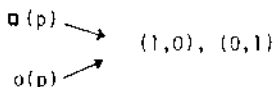
Whitehead et Russell sentent bien que toute fonction n'est pas une fonction de vérité. "Leur réponse est essentiellement fondée sur des considérations intuitives et ne semble pas convaincante". (Tarski, 1982, p.10). Il n'en reste pas moins qu'il est nécessaire d'imposer, dans les systèmes considérés, que toute fonction est une fonction de vérité. Il s'agit donc d'introduire, dans ces systèmes, la loi de substitution (A).

...quiconque regarde comme vraie la proposition (A), ou souhaite l'incorporer dans le système de la logistique doit, soit admettre cette proposition comme axiome, soit introduire un nouvel axiome qui, joint aux autres axiomes du système, implique la proposition (A). (Tarski, 1972, p. 10).

C'est ce que va faire Lesniewski. Avant de le montrer, retournons encore aux Principia Mathematica.

Two functions $\phi x, \psi x$ are called formally equivalent when each always implies the other, i.e. when $(x): \phi x \equiv \psi x$ and a proposition of this form is called a formal equivalence. ...if ϕx and ψx are formally equivalent, either may replace the other in any truth-function. ... Now to say that ϕx and ψx are formally equivalent is the same thing as to say that $\phi \hat{x}$ and $\psi \hat{x}$ have the same extension, i.e. that any value of x which satisfies either satisfies the other. ... A proposition containing a function $\phi \hat{x}$ and having this property (i.e. that its truth-value depends only upon the extension of $\phi \hat{x}$) will be called an extensional function of $\phi \hat{x}$. (PM, p.22).

Ainsi si $\alpha(p)$ et $\beta(p)$ sont formellement équivalentes, c'est-à-dire si $\vdash_p \alpha(p) \equiv \beta(p)$ cela signifie qu'elles ont la même extension, par exemple la négation.



Utilisons maintenant cette terminologie pour parler des propositions.

Si p et q sont formellement équivalentes, c'est-à-dire si $\vdash p \equiv q$, alors p et q ont même extension.



Si une proposition p apparaît dans une expression propositionnelle $f(p)$, la valeur de $f(p)$ ne dépend que de l'extension de p . Une telle fonction est appelée fonction extensionnelle de la proposition p . Autrement dit, la fonction de vérité $f(p)$ est la fonction extensionnelle de la proposition p .

Dans le système S1, Leśniewski introduira donc le principe d'extensionnalité pour les propositions et uniquement pour elles. Abordons maintenant la démarche par laquelle il s'est assuré que, dans un calcul propositionnel quantifié renforcé par un principe d'extensionnalité pour les propositions, le futur axiome A3 est un théorème,

...dass das Ax.III im gewöhnlichen "Aussagenkalkül", verstärkt durch die Hinzufügung der These, die besagt, dass (a) $[p, q, f] \vdash p \equiv q, \supset : f(p) \equiv f(q)$, beweisbar ist, habe ich mich überzeugt, ... (Leśniewski, 1929, p.31).

Je me suis convaincu que l'axiome III est démontrable dans le calcul propositionnel ordinaire si ce dernier est renforcé par la thèse suivante: (a) $\ulcorner pqf \urcorner \urcorner p \equiv q \supset . f(p) \equiv f(q) \urcorner$.

Sur la base de ce calcul, il affirme avoir établi les deux thèses suivantes:

$$(b) \quad [g, p] : g(p, p) . g(\sim(p), p) . \text{a.} \quad [q] . g(q, p) \quad \text{et}$$

$$(c) \quad [g, p] :: \sim(p) . \text{a.} : p \equiv . [q] . q : \supset : g(\sim(p) . p) \sim \text{a.} : g(p \equiv [q] . q, p)$$

(Leśniewski, 1929, p.31)

Nous démontrerons d'abord une forme simplifiée de la thèse (b), c'est-à-dire du 'principe de bivalence' pour les propositions. Ce choix est motivé par la longueur même des démonstrations. Cette forme simplifiée est

$$(b^*) \quad \ulcorner fp \urcorner \urcorner f(p) . f(\sim(p)) \text{a.} \ulcorner fq \urcorner \urcorner$$

$$\text{Th. 1} \quad \ulcorner pqf \urcorner \urcorner p \equiv q, \supset . f(p) \equiv f(q) \urcorner \quad \text{principe d'extensionnalité}$$

Th. 2 $\lfloor pq \rfloor \lceil p=q \equiv \lfloor f \rfloor \lceil f(p) \equiv f(q) \rceil \rceil$

1.	pq	$p=q$	hyp.
2.		f $p=q$	1, reit.
3.		$\lfloor pq \rfloor \lceil p=q \supset f(p) \equiv f(q) \rceil$	th.1
4.		$p=q \supset f(p) \equiv f(q)$	3, $\lfloor \rfloor e$
5.		$f(p) \equiv f(q)$	2,4, dét
6.		$\lfloor f \rfloor \lceil f(p) \equiv f(q) \rceil$	2-5, $\lfloor \rfloor i$
7.		$p=q \supset \lfloor f \rfloor \lceil f(p) \equiv f(q) \rceil$	1,6, $\equiv i$
8.		$\lfloor f \rfloor \lceil f(p) \equiv f(q) \rceil$	hyp.
9.		$A(p) \equiv A(q)$	8, $\lfloor \rfloor e$, f/A
10.		$A(p) \equiv p$	D4., $\lfloor \rfloor e$
11.		$A(q) \equiv q$	D4., $\lfloor \rfloor e$
12.		$p=q$	9,10,11, ass Ge \equiv
13.		$\lfloor f \rfloor \lceil f(p) \equiv f(q) \rceil \supset p=q$	6-12, $\supset i$
14.		$p=q \equiv \lfloor f \rfloor \lceil f(p) \equiv f(q) \rceil$	7,13, déf. \equiv
15.	$\lfloor pq \rfloor \lceil p=q \equiv \lfloor f \rfloor \lceil f(p) \equiv f(q) \rceil \rceil$		1-14. $\lfloor \rfloor i$

Th. 3 $\vdash_{pqf} \ulcorner p \equiv q . f(p) \supset f(q) \urcorner$

loi de substitution

1.		pqf	$p \equiv q . f(p)$	hyp.
2.			$p \equiv q$	1, $\wedge e$
3.			$f(p)$	1, $\wedge e$
4.			$\ulcorner pqf \urcorner \ulcorner p \equiv q \supset . f(p) \equiv f(q) \urcorner$	th. 1
5.			$f(q)$	4, $\vee e$, 2, 3, $\equiv e$
6.			$p \equiv q . f(p) \supset f(q)$	1-5, $\supset i$
7.			th.	1-6, $\ulcorner i$

Th. 4 $\vdash_{p} \ulcorner p \vee \neg(p) \urcorner$

th.

Th. 5 $\vdash_{p} \ulcorner p \equiv . p \equiv \ulcorner q \urcorner \urcorner \ulcorner q \equiv q \urcorner \urcorner$

1.	p	p	hyp.
2.		$\ulcorner q \urcorner \ulcorner q \equiv q \urcorner$	th.
3.		$p \equiv \ulcorner q \urcorner \ulcorner q \equiv q \urcorner$	1, 2, $\equiv i$
4.		$p \supset . p \equiv \ulcorner q \urcorner \ulcorner q \equiv q \urcorner$	1-3, $\supset i$
5.		$p \equiv \ulcorner q \urcorner \ulcorner q \equiv q \urcorner$	hyp.
6.		$\ulcorner q \urcorner \ulcorner q \equiv q \urcorner$	th.
7.		p	5, 6, $\equiv e$
8.		$p \equiv \ulcorner q \urcorner \ulcorner q \equiv q \urcorner \supset p$	5-7, $\supset i$
9.		$p \equiv . p \equiv \ulcorner q \urcorner \ulcorner q \equiv q \urcorner$	4, 8, déf. \equiv
10.	\vdash_{p}	$p \equiv . p \equiv \ulcorner q \urcorner \ulcorner q \equiv q \urcorner$	1-9, $\ulcorner i$

Th. 6 $\vdash p, \sim(p) \equiv \vdash \perp, q, \neg q$

1.	p	$\sim(p)$	hyp.
2.		p	hyp.
3.		$\sim(p)$	1, reit.
4.		$\perp, q, \neg q$	2,3, $\vee e$
5.		$p \supset \perp, q, \neg q$	2-4, $\supset i$
6.		$\perp, q, \neg q$	hyp.
7.		p	6, $\vee e$, q/p
8.		$\perp, q, \neg q \supset p$	6-7, $\supset i$
9.		$p \equiv \perp, q, \neg q$	5,8, def. \equiv
10.		$\sim(p) \supset p \equiv \perp, q, \neg q$	1-9, $\supset i$
11.		$p \equiv \perp, q, \neg q$	hyp.
12.		p	hyp.
13.		$p \equiv \perp, q, \neg q$	11, reit.
14.		$\perp, q, \neg q$	12,13, $\equiv e$
15.		$\sim(\perp, q, \neg q)$	th.
16.		$\sim(p)$	12,14,15, $\sim i$
17.		$p \equiv \perp, q, \neg q \supset \sim(p)$	11-16, $\supset i$
18.		$\sim(p) \equiv p \equiv \perp, q, \neg q$	10,17, def. \equiv
19.	$\vdash p, \sim(p) \equiv \vdash \perp, q, \neg q$		1-18, $\perp i$

Th. 7

$$\vdash f(p) \rightarrow (f(\ulcorner q \urcorner) \rightarrow f(\ulcorner q \equiv q \urcorner)) \rightarrow f(p)$$

1.	$f(p)$	$f(\ulcorner q \urcorner), f(\ulcorner q \equiv q \urcorner)$	hyp.
2.		$f(\ulcorner q \urcorner)$	1, $\wedge e$
3.		$f(\ulcorner q \equiv q \urcorner)$	1, $\wedge e$
4.		$\ulcorner p \urcorner \rightarrow \neg \neg(p)$	th.
5.		$p \vee \neg(p)$	4, $\vee i$
6.		$\ulcorner p \urcorner$	hyp, $\vee e$
7.		$p \equiv p \equiv \ulcorner q \equiv q \urcorner$	th.
8.		$p \equiv \ulcorner q \equiv q \urcorner$	6, 7, $\equiv e$
9.		$\ulcorner q \equiv q \urcorner \equiv p$	8, comm
10.		$\ulcorner p \equiv q \urcorner \rightarrow f(p) \equiv f(q)$	th. 1
11.		$\ulcorner q \equiv q \urcorner \equiv p \rightarrow f(\ulcorner q \equiv q \urcorner) \equiv f(p)$	10, $p/\ulcorner p \equiv q \urcorner, q/p$
12.		$f(\ulcorner q \equiv q \urcorner) \equiv f(p)$	11, 9, $d\dot{t}$
13.		$f(\ulcorner q \equiv q \urcorner)$	3, reit
14.		$f(p)$	12, 13, $d\dot{t}$
15.		$\neg \neg(p)$	hyp. $\vee e$
16.		$\neg \neg(p) \equiv p \equiv \ulcorner q \urcorner$	th. 6
17.		$p \equiv \ulcorner q \urcorner$	16, 15, $\equiv e$
18.		$\ulcorner q \urcorner \equiv p$	17, comm
19.		$\ulcorner q \urcorner \equiv p \rightarrow f(\ulcorner q \urcorner) \rightarrow f(p)$	th. 3 $p/\ulcorner q \urcorner, q/p$
20.		$f(\ulcorner q \urcorner)$	2, reit.
21.		$f(p)$	19, 18, 20, $\rightarrow e$ 2x
22.		$f(p)$	5, 6-14, 15-21, $\vee e$
23.		$f(\ulcorner q \urcorner) \rightarrow f(\ulcorner q \equiv q \urcorner) \rightarrow f(p)$	1-22, $\rightarrow i$
24.		$\ulcorner f(p) \urcorner \rightarrow (f(\ulcorner q \urcorner) \rightarrow f(\ulcorner q \equiv q \urcorner)) \rightarrow f(p)$	1-23, $\ulcorner i$

Th. 8 $\vdash_{\text{fpq}} \lceil f(p). f(\sim(p)) \rceil \supset f(q) \rceil$

1.	fpq	$f(p). f(\sim(p))$	hyp.
2.		$\vdash_{\text{pq}} \lceil p \vee \sim(p) \rceil$	th. 4
3.		$p \vee \sim(p)$	2, $\vee e$
4.		$\vdash p$	hyp. $\forall e$
5.		$p \equiv \vdash_{\text{pq}} \lceil q \equiv q \rceil$	th. 5
6.		$p \equiv \vdash_{\text{pq}} \lceil q \equiv q \rceil$	5, 4, $\equiv e$
7.		$f(p)$	1, reit, $\wedge e$
8.		$f(\vdash_{\text{pq}} \lceil q \equiv q \rceil)$	7, 6, th. 3
9.		$\sim(p) \equiv \vdash_{\text{pq}} \lceil q \equiv q \rceil$	th. 6
10.		$p \equiv \vdash_{\text{pq}} \lceil q \rceil \equiv \sim(p)$	9, comm
11.		$p \equiv \vdash_{\text{pq}} \lceil q \rceil \equiv \sim(p)$	10, ass.
12.		$\vdash_{\text{pq}} \lceil q \rceil \equiv \sim(p)$	4, 11, $\equiv e$
13.		$f(\sim(p))$	1, reit. $\wedge e$
14.		$f(\vdash_{\text{pq}} \lceil q \rceil)$	12, 13, th. 3
15.		$f(\vdash_{\text{pq}} \lceil q \equiv q \rceil). f(\vdash_{\text{pq}} \lceil q \rceil)$	8, 14, $\wedge i$
16.		$\sim(p)$	hyp. $\vee e$
17.		$\vdash_{\text{pq}} \lceil q \equiv q \rceil$	th.
18.		$\sim(p) \equiv \vdash_{\text{pq}} \lceil q \equiv q \rceil$	16, 17, $\equiv i$
19.		$f(\sim(p))$	1, $\wedge e$, reit.
20.		$f(\vdash_{\text{pq}} \lceil q \equiv q \rceil)$	18, 19, th. 3
21.		$\sim(p) \equiv \vdash_{\text{pq}} \lceil q \rceil$	th. 6
22.		$p \equiv \vdash_{\text{pq}} \lceil q \rceil$	16, 21, $\equiv e$
23.		$f(p)$	1, $\wedge e$, reit.
24.		$f(\vdash_{\text{pq}} \lceil q \rceil)$	22, 23, th. 3
25.		$f(\vdash_{\text{pq}} \lceil q \equiv q \rceil). f(\vdash_{\text{pq}} \lceil q \rceil)$	20, 24, $\wedge i$
26.		$f(\vdash_{\text{pq}} \lceil q \equiv q \rceil). f(\vdash_{\text{pq}} \lceil q \rceil)$	3, 19, 25, $\vee e$
27.		$f(q)$	26, th. 7 p/q
28.		$f(p). f(\sim(p)) \supset f(q)$	1-27, $\supset i$
29.	$\vdash_{\text{fpq}} \lceil f(p). f(\sim(p)) \rceil \supset f(q) \rceil$		1-28, $\supset i$

Th. 9 $\perp pf_3 \ulcorner f(p), f(\sim(p)) \urcorner \equiv \perp q_3 \ulcorner f(q) \urcorner$

1.	pf	f(p).f(∼(p))	hyp.
2.		q f(p).f(∼(p))	1, reit.
3.		f(q)	2, th. 8
4.		$\perp q_3 \ulcorner f(q) \urcorner$	2-3, $\perp_3 i$
5.		f(p).f(∼(p)) $\supset \perp q_3 \ulcorner f(q) \urcorner$	1-4, $\supset i$
6.		$\perp q_3 \ulcorner f(q) \urcorner$	hyp.
7.		f(p)	6, $\perp_3 e, q/p$
8.		f(∼(p))	6, $\perp_3 e, q/\sim(p)$
9.		f(p).f(∼(p))	7,8 $\wedge i$
10.		$\perp q_3 \ulcorner f(q) \urcorner \supset f(p).f(\sim(p))$	6-9, $\supset i$
11.		f(p).f(∼(p)) $\equiv \perp q_3 \ulcorner f(q) \urcorner$	5,10, déf. \equiv
12.	pf	$\ulcorner f(p), f(\sim(p)) \urcorner \equiv \perp q_3 \ulcorner f(q) \urcorner$	1-11, $\perp_3 i$

Une forme simplifiée de la thèse (C) s'obtient en considérant le principe d'extensionnalité (thèse 1):

$$(C^*) \perp pf_3 \ulcorner \sim(p) \equiv p \equiv \perp q_3 \ulcorner q \urcorner \urcorner : \supset . f(\sim(p)) \equiv f(p \equiv \perp q_3 \ulcorner q \urcorner) \urcorner$$

th. 1, $p/\sim(p), q/p \equiv \perp q_3 \ulcorner q \urcorner$

Si l'on accepte une règle de substitution de formules incomplètes, les thèses (b) et (c) s'obtiennent aisément:

$$(b) \perp gp_3 \ulcorner g(pp).g(\sim(p)p) \equiv \perp q_3 \ulcorner g(qp) \urcorner \urcorner$$

et th.9 $f/g(-,p)$

$$(c) \perp gp_3 \ulcorner (p) \equiv p \equiv \perp q_3 \ulcorner q \urcorner \urcorner : \supset . g(\sim(p)p) \equiv g(p \equiv \perp q_3 \ulcorner q \urcorner p) \urcorner (b^*) f/g(-,p)$$

Cette façon de faire n'est pas admissible dans les systèmes de Leśniewski. En effet, seule une expression bien formée, c'est-à-di-

re ayant statut de catégorie sémantique, peut être substituée.

Nous exposons maintenant le détour démonstratif qui réalise le même effet dans les systèmes de Leśniewski. Les fonctions paramétrées y jouent un rôle essentiel.

A l'aide du théorème (c), nous obtenons le théorème (e).

$$(e) \quad \ulcorner p \urcorner \ulcorner g(\sim(p)p) \equiv g(p \equiv \ulcorner q \urcorner \ulcorner q \urcorner p) \urcorner \quad (\text{Leśniewski, 1929, p. 32})$$

Considérant les théorèmes (b) et (e) ainsi que la loi logique

$$\ulcorner pqr \urcorner \ulcorner p \equiv q.(r.p. \supset s) : \supset .(r.q. \supset s) \urcorner$$

le théorème (f) est aisé à obtenir:

$$(f) \quad \ulcorner p \urcorner \ulcorner g(pp).g(p \equiv \ulcorner q \urcorner \ulcorner q \urcorner p) \equiv \ulcorner q \urcorner \ulcorner g(qp) \urcorner \urcorner \quad (\text{Leśniewski, 1929, p.32})$$

Posons le théorème (g)

$$(g) \quad \ulcorner p \urcorner \ulcorner p.q. \equiv \ulcorner f \urcorner \ulcorner p \equiv \ulcorner r \urcorner \ulcorner f(rr) \equiv p \urcorner \equiv \ulcorner r \urcorner \ulcorner f(rr) \equiv q \urcorner \urcorner \quad (\text{Leśniewski, 1929, p.32})$$

Cette thèse présente une parenté étroite avec la thèse II -le résultat de Tarski (1972, p. 7). Il s'agit de l'expression de la conjonction à l'aide de l'unique terme primitif -la biconditionnelle. Cette thèse diffère cependant de la thèse II par la présence de foncteurs binaires en lieu et place de foncteurs unaires. Elle se démontre de façon analogue à la thèse II, nous ne la fournirons donc pas.

Terminons cet exposé démonstratif en justifiant l'inscription de la thèse (h), le futur axiome A3.

Partons de la thèse (g).

$$(g) \quad \ulcorner p \urcorner \ulcorner p.q. \equiv \ulcorner f \urcorner \ulcorner p \equiv \ulcorner r \urcorner \ulcorner f(rr) \equiv p \urcorner \equiv \ulcorner r \urcorner \ulcorner f(rr) \equiv q \urcorner \urcorner \urcorner$$

substituons à $p/g(pp)$ et à $q/g(p \equiv \ulcorner q \urcorner \ulcorner q \urcorner p)$

$$\ulcorner p \urcorner \ulcorner g(pp).g(p \equiv \ulcorner q \urcorner \ulcorner q \urcorner p) \equiv \ulcorner f \urcorner \ulcorner g(pp) \equiv \ulcorner r \urcorner \ulcorner f(rr) \equiv g(pp) \urcorner \equiv \ulcorner r \urcorner \ulcorner f(rr) \equiv g(p \equiv \ulcorner q \urcorner \ulcorner q \urcorner p) \urcorner \urcorner \urcorner$$

Si l'on considère la thèse (f) et la loi logique, $\ulcorner pqr \urcorner \ulcorner p \equiv q, p \equiv r, \equiv : q \equiv r \urcorner$
la thèse A3 s'obtient facilement:

$$A3 \quad \ulcorner gp \urcorner \ulcorner f \urcorner \ulcorner g(pp) \equiv \ulcorner r \urcorner \ulcorner f(rr) \equiv g(pp) \urcorner \equiv \ulcorner r \urcorner \ulcorner f(rr) \equiv g(p \equiv \ulcorner q \urcorner \ulcorner q \urcorner p) \urcorner \urcorner \equiv \ulcorner q \urcorner \ulcorner g(qp) \urcorner \urcorner$$

Ainsi, dans un système logique qui admet une quantification sur des variables de foncteurs propositionnels et auquel est ajouté le principe d'extensionnalité pour les propositions, l'expression A3 en est un théorème.

1.5. LES AXIOMES DE S1

Le système S1 possède trois axiomes, A1 et A2 équiformes à ceux du système SQ4 et A3 dont nous venons juste de parler. On aura donc:

$$A1 \quad \ulcorner pqr \urcorner \ulcorner p \equiv r, \equiv : q \equiv p, \equiv : r \equiv q \urcorner$$

$$A2 \quad \ulcorner pqr \urcorner \ulcorner p \equiv q, q \equiv r, \equiv : p \equiv q, \equiv : r \urcorner$$

$$A3 \quad \ulcorner gp \urcorner \ulcorner f \urcorner \ulcorner g(pp) \equiv \ulcorner r \urcorner \ulcorner f(rr) \equiv g(pp) \urcorner \equiv \ulcorner r \urcorner \ulcorner f(rr) \equiv g(p \equiv \ulcorner q \urcorner \ulcorner q \urcorner p) \urcorner \urcorner \equiv \ulcorner q \urcorner \ulcorner g(qp) \urcorner \urcorner$$

ou dans l'écriture rigoureuse de Leśniewski

$$A1 \quad \ulcorner pqr \urcorner \ulcorner (\equiv (\equiv (pr) \equiv (qp)) \equiv (rq)) \urcorner$$

$$A2 \quad \ulcorner pqr \urcorner \ulcorner (\equiv (\equiv (p \equiv (qr)) \equiv (\equiv (pq) \equiv r)) \urcorner$$

$$A3 \quad \ulcorner gp \urcorner \ulcorner (\ulcorner f \urcorner \ulcorner (\equiv (g(pp) \equiv (\ulcorner r \urcorner \ulcorner (\equiv (f(rr)g(pp)) \urcorner \ulcorner r \urcorner \ulcorner (\equiv (f(rr)g(\equiv (p \ulcorner q \urcorner \ulcorner q \urcorner p) \urcorner) \urcorner) \ulcorner q \urcorner \ulcorner g(qp) \urcorner) \urcorner) \urcorner$$

Les termes qui apparaissent dans ces trois axiomes appartiennent à deux types de catégorie sémantique. D'une part, il y a les termes de la catégorie des propositions; il s'agit de toutes les variables qui sont inscrites dans des parenthèmes à deux arguments, dont les parenthèses symétriques sont équiformes à (,), c'est-à-dire p, q, r. Ensuite, il y a les termes de la catégorie des foncteurs formateurs de propositions à deux arguments propositionnels; il s'agit de tous les

termes qui précèdent un parenthème à deux arguments, dont les parenthèses symétriques sont équiformes à (,). Ces termes ont statut soit de variables, f, g (ce sont des variables parce qu'ils possèdent un lieu équiforme dans le quantificateur associé au sous-quantificateur dans lequel ils sont inscrits), soit de constante ε . Le terme ε est le seul terme primitif que contient ces axiomes.

Leśniewski tient à fournir une base axiomatique dont le nombre des catégories sémantiques est aussi réduit que possible. Il s'en explique:

...das Einführen noch einer dritten 'semantischen Kategorie' in die Axiomatik des Systems S1 wollte ich aus annähernd solchen Antrieben vermeiden, welche die Bemühungen zahlreicher Forscher in ihrem Streben nach Verringerung z.B. der Zahl der Axiome oder der Zahl der primitiven Termine dieser oder jener Theorie leiten. (Leśniewski, 1929, p.33).

Je désirais éviter d'introduire encore une troisième 'catégorie sémantique' dans l'axiomatique du système S1, et ceci, pour des raisons à peu près semblables à celles qui conduisent de nombreux chercheurs à s'efforcer de réduire, par exemple, le nombre des axiomes, ou le nombre des termes primitifs de telle ou telle théorie.

1.6. LES REGLES D'INFERENCE DE S1

Les règles d'inférence du système S1 sont au nombre de quatre.

1. Règle de détachement.
2. Règle de distribution des quantificateurs.
3. Règle de définition.
4. Règle de substitution.

Ces directives sont très semblables à celles qui sont exposées dans le système SQ4. En fait aucune modification n'altérera ou ne transformera les deux premières règles (détachement et distribution). Nous les inscrivons donc dans S1 comme nous les avons présentées dans SQ3 et SQ4. Les règles de substitution et de définition vont connaître une modification profonde par rapport à SQ4.

D'une part, la règle de substitution permettra de substituer aux variables des expressions d'une quelconque catégorie sémantique pour autant qu'elle soit déjà représentée dans le système. D'autre part, la règle de définition permettra d'inscrire un foncteur constant d'une quelconque catégorie sémantique en fonction de ce qui est préalablement inscrit.

Afin de ne pas répéter ce qui est déjà exposé, nous indiquerons les références utiles et nous résumerons simplement les explications relatives aux règles de détachement et de distribution.

1.6.1. LA DIRECTIVE DE DETACHEMENT

La formulation de cette directive est en tous points identiques à celle du système SQ4, (pp. 128-29).

1.6.2. LA DIRECTIVE DE DISTRIBUTION DES QUANTIFICATEURS

Nous nous contentons d'illustrer cette règle en partant de l'axiome A3. Nous pensons en effet inutile de reproduire les éléments exposés précédemment (pp. 103-5, p. 129)

$$A3 \quad \underline{\lambda} p \underline{\lambda} q \underline{\lambda} r \underline{\lambda} f \underline{\lambda} g (pp) \equiv \underline{\lambda} r \underline{\lambda} f (rr) \equiv g(pp) \equiv \underline{\lambda} r \underline{\lambda} f (rr) \equiv g(p \equiv \underline{\lambda} q \underline{\lambda} q \underline{\lambda} p) \equiv \underline{\lambda} q \underline{\lambda} g (qp)$$

Décidons deux applications de cette règle. La première consistera à distribuer uniquement le lieu p du quantificateur de A3 dans le quantificateur principal du premier terme de l'essence de A3, respectivement du deuxième terme:

$$A3' \quad \underline{\lambda} q \underline{\lambda} p \underline{\lambda} f \underline{\lambda} g (pp) \equiv \underline{\lambda} r \underline{\lambda} f (rr) \equiv g(pp) \equiv \underline{\lambda} r \underline{\lambda} f (rr) \equiv g(p \equiv \underline{\lambda} q \underline{\lambda} q \underline{\lambda} p) \equiv \underline{\lambda} p \underline{\lambda} q \underline{\lambda} g (qp)$$

La deuxième consistera à distribuer tous les lieux du quantificateur général de A3, g et p , dans le quantificateur principal du premier terme de l'essence de A3, respectivement du deuxième terme:

$$A3'' \quad \underline{\lambda} p \underline{\lambda} q \underline{\lambda} f \underline{\lambda} g (pp) \equiv \underline{\lambda} r \underline{\lambda} f (rr) \equiv g(pp) \equiv \underline{\lambda} r \underline{\lambda} f (rr) \equiv g(p \equiv \underline{\lambda} q \underline{\lambda} q \underline{\lambda} p) \equiv \underline{\lambda} q \underline{\lambda} p \underline{\lambda} g (qp)$$

1.6.3. LA DIRECTIVE DE DEFINITION

Cette directive est une extension de celle qui est exposée dans SQ4. Dans S1, il sera possible d'inscrire, en plus des constantes de la catégorie sémantique S et des foncteurs constants à arguments propositionnels, tout foncteur constant, quelle que soit sa catégorie sémantique. Pour cela il sera nécessaire de respecter un ordre dans l'inscription des définitions. Cet ordre n'est pas fixé à priori, il s'impose par l'orientation du développement du système en devenir. Toute définition est conçue sur ce qui a été préalablement construit. Tout foncteur est donc nécessairement d'une catégorie sémantique qui est fonction de la catégorie sémantique de base, celle des propositions S.

Tout foncteur est associé à une fonction. Une fonction peut être régulière (p. 161) -un terme suivi d'un parenthème, ou elle peut être paramétrée (p. 161) -un terme suivi de parenthèmes. Nous avons montré l'importance de la forme des parenthèses symétriques dans l'inscription d'une fonction. Cette forme, associée au nombre d'arguments du parenthème de la fonction, permet de déterminer la catégorie sémantique du foncteur de la fonction. L'existence possible de fonctions paramétrées nécessite un contrôle du choix des parenthèses symétriques encore plus subtil que celui qui est présenté dans SQ4.

Nous traiterons tout à la fois de la définition de constantes, de foncteurs de fonctions régulières et de foncteurs de fonctions paramétrées. Agissant ainsi, nous nous écartons de la présentation de Lesniewski (1929, pp.34-35) qui opère une distinction entre la directive de définition de constantes et celle de foncteurs constants.

1.6.3.1. FORMULATION DE LA DIRECTIVE DE DEFINITION

A est une thèse résultant de la directive de définition et introduit un terme constant, si

1. L'essence de A est une fonction équivalentielle

$$\llbracket \dots \rrbracket \ulcorner \mathfrak{z}(BC) \urcorner \text{ ou } \mathfrak{z}(BC)$$

2. Le deuxième terme de l'essence de A, le définiendum, est une fonction F (régulière ou paramétrée) ou une constante

$$\mathfrak{z}(B\ast)$$

$$\llbracket \dots \rrbracket \ulcorner \mathfrak{z}(B\phi\{\dots\}) \urcorner$$

ou

$$\llbracket \dots \rrbracket \ulcorner \mathfrak{z}(B\phi\{\dots\}\{\dots\}\{\dots\}) \urcorner$$

3. Le foncteur ϕ de la fonction F (ou la constante \ast) n'est pas équiforme à un terme de même catégorie sémantique.

4. Les arguments des parenthèses de la fonction F sont tous des variables qui possèdent un lieu équiforme dans le quantificateur de la généralisation A.

$$\llbracket v_1 \dots v_i \dots \rrbracket \ulcorner \mathfrak{z}(B\phi\{v_1 \dots v_i\}) \urcorner$$

ou

$$\llbracket v_1 \dots v_i \dots \rrbracket \ulcorner \mathfrak{z}(B\phi\{v_1 \dots v_{f_1}\} \dots \{v_h \dots v_{f_h}\}) \urcorner$$

5. Les mots du deuxième terme de l'essence de A ne sont pas répétés.

Deux variables équiformes ne peuvent pas être inscrites.

6. Le premier terme de l'essence de A, le définiens, est une expression bien formée du système en fonction de ce qu'il contient actuellement.

7. Si A est une généralisation, le premier terme de son essence contient des variables libres et ces variables libres sont équiformes aux variables libres du deuxième terme de A

$$\llbracket v_1 \dots v_i \dots \rrbracket \ulcorner \mathfrak{z}(B_{v_1 \dots v_i} \phi\{v_1 \dots v_i\}) \urcorner$$

ou

$$\llbracket v_1 \dots v_i \dots \rrbracket \ulcorner \mathfrak{z}(B_{v_1 \dots v_i} \phi\{v_1 \dots v_{f_1}\} \dots \{v_h \dots v_{f_h}\}) \urcorner$$

8. Si A n'est pas une généralisation, son premier terme est une expression bien formée du système relativement à ce qu'il contient actuellement, sans variable libre.
9. Si E est le dernier parenthème d'une fonction préalablement inscrite de la catégorie des propositions
 et
 les arguments de E sont équinumériques aux arguments du dernier parenthème C du definiendum de A
 et
 les arguments de E et C sont destinés à être de la même catégorie sémantique.

Alors, les parenthèses symétriques de C sont équiiformes à celles de E.

10. Si G est un parenthème d'une fonction H préalablement inscrite de la catégorie des propositions
 et
 le dernier parenthème I du definiendum de A est similaire à G
 Alors, les arguments correspondants de G et I sont destinés à être de la même catégorie sémantique
 et
 G est le dernier parenthème de H
11. Si J est une fonction préalablement inscrite de la catégorie sémantique des propositions
 et
 K est un parenthème de J
 et
 L est un parenthème de definiendum de A
 et
 les arguments de K et de L sont équinumériques
 et

les arguments correspondants de K et de L sont destinés à être de la même catégorie sémantique

et

M est un parenthème de J qui suit immédiatement K

et

N est un parenthème du definiendum de A qui suit immédiatement L

et

M est similaire à N

Alors, K est un parenthème similaire à L

12. Si O est un parenthème du definiendum de A

et

P est un parenthème du definiendum de A qui suit immédiatement O

et

O est similaire à un parenthème Q d'une fonction R préalablement inscrite de la catégorie des propositions

Alors, R possède un parenthème S qui suit immédiatement Q

et

P est similaire à S

et

les arguments correspondants de O et Q sont destinés à être de la même catégorie sémantique.

REMARQUES ET EXEMPLES

Les conditions 1-8 déterminent la forme générale d'une thèse-définition, qu'il s'agisse de la définition d'une constante ou d'un foncteur constant.

Constante: $\begin{array}{c} \text{definiendum} \\ | \\ x(0 \ d) \\ | \\ \text{definiens} \end{array}$

Foncteur constant: $L v_1 \dots v_{1a} \ulcorner (B_{v_1 \dots v_{1a}} \ulcorner \{v_1 \dots v_f\} \dots \{v_h \dots v_p\} \urcorner) \urcorner$

definiens
definiendum

foncteur constant

Insistons également sur la structuration des variables dans le definiens et le definiendum d'une thèse-définition de foncteur constant. L'un et l'autre possèdent des variables libres équiiformes et uniquement ces variables. Le quantificateur général associé à une thèse-définition possède des lieux équiiformes aux variables libres du definiens et du definiendum, et uniquement ceux-là.

Les conditions 9-12 règlent l'inscription des parenthèses symétriques des parenthèmes du definiendum. Elles n'imposent pas de formes particulières. Une forme particulière de parenthèses symétriques étant choisie, ces conditions permettent de vérifier si elle est conforme à l'état actuel du système, c'est-à-dire, si elle n'introduit pas de confusion sémantique.

A travers une succession d'exemples nous illustrerons ces différentes conditions. Les axiomes et les règles d'inférence de S1 ne 'déforment' pas ce qu'il est possible d'inscrire dans S04. Le système S1 est une expansion de S04. Les thèses de S04 conservent donc leur validité dans S1. Nous profitons de ce fait pour admettre dans S1, les définitions inscrites dans S04: les deux termes constants de la catégorie S, les quatre foncteurs formateurs de proposition à un argument propositionnel, S/S, (parenthème associé: (-)), et les 8 foncteurs formateurs de proposition à deux arguments propositionnels, S/SS, (parenthème associé: (--)). Dans un premier temps, nous définirons les huit foncteurs propositionnels binaires qu'il n'était pas possible de définir dans S04. Nous choisissons les formes proposées par Lesniewski car, rappelons leur qualité, elles permettent une identification de leur signification logique (pp. 139-140).

de cette catégorie. Ainsi, $H(p)$ étant inscrit, il est possible d'inscrire le foncteur f par exemple, comme foncteur variable de la catégorie S/S. f est de cette catégorie parce qu'il précède un parenthème à un argument dont les parenthèses symétriques sont équiiformes à $(,)$. f est une variable, parce qu'il est inscrit dans un sous-quantificateur et qu'il est directement associé à un lieu équiiforme dans le quantificateur lié à son sous-quantificateur.

$$\underbrace{f}_{\downarrow} \underbrace{\varepsilon(p \varepsilon (f(p) f(q)))}_{\downarrow} \underbrace{H(p)}_{\downarrow}$$

- $f(p)$ (ou $f(q)$) est une fonction de la catégorie des propositions.
- $f(p) \varepsilon f(q)$ est de la catégorie des propositions.
- p est de la catégorie des propositions.
- $p \varepsilon . f(p) \varepsilon f(q)$ est de la catégorie des propositions.
- $f \varepsilon \varepsilon (p \varepsilon . f(p) \varepsilon f(q))$ est de la catégorie des propositions.

En conséquence cette dernière inscription est une expression bien formée en fonction de ce que le système contient actuellement. Il était donc possible de la choisir.

- Les conditions 9 et 10 sont remplies. Les arguments du parenthème du definiendum sont équinumériques aux arguments du parenthème de la fonction préalablement inscrite, $-o-(pq)$ par exemple; ils sont destinés à être dans la même catégorie sémantique que les arguments de cette fonction. Le choix des parenthèses symétriques équiiformes à $(,)$ était le seul possible.
- Les conditions 11 et 12 sont respectées "par le vide". Il n'existe en effet aucun parenthème qui suit immédiatement l'unique parenthème du definiendum.

Dans la suite, nous ne justifierons pas systématiquement toutes les thèses que nous inscrirons.

$$D15 : \quad \ulcorner pq \urcorner \equiv (\ulcorner \sim(p \sim(q)) \urcorner \dot{\phi} \dashv (pq) \urcorner)$$

Il s'agit de la définition de la conditionnelle.

$\ulcorner \sim(p \sim(q)) \urcorner$ représente dans l'écriture conventionnelle, l'expression $\sim(p \wedge \sim q)$.

$$[\dot{\phi} \dashv, L ; \supset, P ; \supset, C]$$

$$D16 : \quad \ulcorner pq \urcorner \equiv (\ulcorner \dot{\phi} \dashv (pq) \urcorner \dashv (pq) \urcorner)$$

$$[\dashv, L ; \bar{\exists}, P ; \dot{\phi}, C]$$

$$D17 : \quad \ulcorner pq \urcorner \equiv (\ulcorner \sim(\sim(p) \sim(q)) \urcorner \dashv (pq) \urcorner)$$

Il s'agit de la définition de la disjonction.

$$[\sim, L ; \vee, P ; \vee, C]$$

$$D18 : \quad \ulcorner pq \urcorner \equiv (\ulcorner \sim(\dashv (pq)) \urcorner \dot{\delta} (pq) \urcorner)$$

$$[\dot{\delta}, L ; \dots, P ; \bar{\vee}, C]$$

$$D19 : \quad \ulcorner pq \urcorner \equiv (\dot{\phi} \dashv (\ulcorner \sim(p) \sim(q) \urcorner) \dashv (pq) \urcorner)$$

$$[\dot{\phi} \dashv, L ; \epsilon, P ; \epsilon, C]$$

$$D20 : \quad \ulcorner pq \urcorner \equiv (\ulcorner \sim(\dot{\phi} (pq)) \urcorner \dashv (pq) \urcorner)$$

$$[\dashv, L ; \dots, P ; \dot{\phi}, C]$$

$$D21 : \quad \ulcorner pq \urcorner \equiv (\ulcorner \sim(\dot{\phi} (pq)) \urcorner \dashv (pq) \urcorner)$$

$$[\dashv, L ; \dots, P ; I, C]$$

Les définitions D14-D20 et le foncteur de biconditionnelle inscrit dans les axiomes épuisent les 16 opérateurs binaires de la logique bivalente. Dans le système S1, il s'agit de l'épuisement des significations logiques que recouvrent ces 16 opérateurs, et non pas de celui des formes syntaxiques qu'ils peuvent prendre. Ainsi, il est possible d'inscrire par définition le foncteur de conditionnelle d'une autre manière.

$$D15^* : \quad \ulcorner pq \urcorner \equiv (\ulcorner \sim(\dashv (pq)) \urcorner \supset (pq) \urcorner)$$

C'est une "bonne" définition (les foncteurs \dashv , \sim ont été préalablement inscrits (D16 et D5)). Cependant la condition 4 nous impose de choisir une inscription non équivalente à $\dot{\phi} \dashv$. Si le système est assez riche, il

est possible de démontrer la thèse suivante: $\ulcorner pq \urcorner \equiv (\phi(pq) \supset (pq))$; elle exprime 'l'équivalence' de ces deux definiendum. L'utilité d'exprimer un foncteur de plusieurs manières différentes apparaît dans certaines démonstrations; la modification du definiens peut permettre une transformation plus simple.

Nous n'avons traité jusqu'ici que de trois types de définitions: les définitions de termes constants, de foncteur constant formateur de proposition à un argument propositionnel S/S, et de foncteur constant formateur de proposition à deux arguments propositionnels S/SS. Il est bien sûr possible de définir des foncteurs constants formateurs de proposition à n arguments propositionnels (cf. p. 143). Mais nous voulons maintenant nous intéresser à la définition de foncteurs constants qui opèrent sur des arguments de catégories sémantiques pouvant être différentes de celle des propositions, et plus loin, présenter la définition de fonctions paramétrées.

$$D22 : \ulcorner hfp \urcorner \equiv \underbrace{(\equiv (f(p)h(pp)) * \langle hfp \rangle)}_{\text{definiens} \quad \text{definiendum}}$$

D22 est une thèse-définition.

- C'est une généralisation dont l'essence est une fonction équivalente.
- Le jeu des variables libres dans le definiens et le definiendum est respecté.
- Le quantificateur de la généralisation possède des lieux tous équi-formes aux variables libres du definiens et du definiendum.
- Le definiendum est une fonction régulière.
- Le foncteur constant * est formateur de propositions à trois arguments. Le premier argument h est de la catégorie S/SS; en effet, dans le definiens il précède un parenthème de deux arguments dont les parenthèses symétriques sont équi-formes à {, }. Le deuxième f

est de la catégorie S/S; en effet, il précède un parenthème d'un argument dont les parenthèses symétriques sont équiiformes à (,). Le troisième p est de la catégorie S; en effet, il est contenu dans un parenthème d'un (ou deux) argument(s) dont les parenthèses symétriques sont équiiformes à (,).

- Le foncteur constant * est donc un foncteur formateur de propositions à trois arguments; sa catégorie sémantique est S/(S/SS)(S/S)S.
- Le foncteur constant * n'est pas équiiforme à un terme constant de même catégorie sémantique.
- Le choix des parenthèses symétriques du parenthème du definiendum respecte les conditions 9-12 "par le vide". En effet, le parenthème <hfp> n'est pas similaire à un parenthème préalablement inscrit.

$$D23 : \ulcorner gh \urcorner \equiv (\ulcorner p \urcorner \equiv (g(pp)h(pp))) \bullet \{gh\}$$

D23 est également une bonne définition.

- Le foncteur constant \bullet opère sur un parenthème de deux arguments qui sont de la catégorie S/SS. Il s'agit donc d'un foncteur formateur de proposition à deux arguments. Il appartient à la catégorie sémantique S/(S/SS)(S/SS).
- Ce foncteur constant \bullet n'est pas équiiforme à un foncteur constant de même catégorie sémantique.
- Le choix des parenthèses symétriques du parenthème du definiendum doit être non équiiforme à (,). Sinon il imposerait que h et g dans la fonction $\bullet(gh)$ soient de la catégorie S (cond. 9); une telle écriture conduirait à une confusion inacceptable.

$$D24 : \ulcorner vw \urcorner \equiv (\equiv (v(10)w(01))) \uparrow \{vw\}$$

D24 est une bonne définition.

- Le foncteur constant \uparrow est de la catégorie S/(S/SS)(S/SS).
- Le choix des parenthèses symétriques équiiformes à {, } est rendu nécessaire par la présence de la définition 23 (conditions 9 et 10).

Décidons de manière arbitraire d'inscrire dans notre système un foncteur de la catégorie $S/(S/(S/SS)(S/SS))(S)$. Ce foncteur doit être un foncteur formateur de propositions à deux arguments; le premier étant de la catégorie $S/(S/SS)(S/SS)$ et le second de la catégorie S .

Notre système connaît déjà ces deux catégories: $S/(S/SS)(S/SS)$ apparaît dans le système grâce à la définition D24 et S est déjà présente dans les axiomes.

$$D25 : \quad \underbrace{\Psi p}_{\text{definiens}} \equiv \underbrace{(\underbrace{k}_{\Psi} \underbrace{\varphi(\Psi(kk)p)}_{\text{definiendum}})}_{\text{definiens}} + \underbrace{\{pp\}}_{\text{definiendum}}$$

D25 est une bonne définition.

- Le jeu des variables est respecté.
- Le definiens est bien formé en fonction de ce que le système connaît actuellement. La conjonction φ est déjà inscrite, D14; Ψ est un foncteur variable de catégorie $S/(S/SS)(S/SS)$, le système connaît cette catégorie, D23 et D24.
- $+$ est un foncteur constant qui n'est pas équiforme à un foncteur de même catégorie sémantique préalablement inscrit.
- Les parenthèses symétriques du parenthème de la fonction $+\{pp\}$ ne créent aucune confusion, mais nous n'aurions pas pu choisir des parenthèses symétriques équiformes à $(,)$ ou à \langle, \rangle .

Si d'aventure le foncteur constant que nous voudrions inscrire opérerait sur des arguments dont la catégorie sémantique n'est pas encore présente dans le système, nous devrions alors les inscrire préalablement en utilisant la règle de définition.

Abordons maintenant l'inscription des fonctions paramétrées et rappelons la forme générale de leur définition.

$$\underbrace{v_1 \dots v_i}_{\text{definiens}} \equiv \underbrace{(B_{v_1 \dots v_i} \underbrace{\varphi(v_1 \dots v_f)}_{\text{definiendum}} \dots \underbrace{\{v_h \dots v_l\}}_{\text{definiendum}})}_{\text{definiens}}$$

Intéressons-nous plus particulièrement au definiendum:

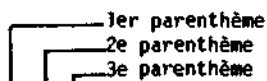
$$\{v_1, \dots, v_r, \dots, \{v_h, \dots, v_p\}\}$$

De manière schématique, nous inscrivons des parenthèses dont les parenthèses symétriques ne sont pas équiiformes dans la fonction paramétrée, $\{, \} \dots \{, \}$. Ce fait est imposé par la condition 6: les mots du second terme de l'essence de A (la définition) ne sont pas répétés. Cette condition n'est bien sûr pas suffisante; la présence de plusieurs parenthèses impose un contrôle très précis du jeu des inscriptions de leurs parenthèses symétriques.

$$\underline{D26} : \{pqr, \{ \equiv (p \equiv (qr)) \equiv \{p\} \{q\} (r) \} \}$$

definiens definiendum

D26 est une bonne définition. Analysons la catégorie sémantique du foncteur \equiv . Pour cela, il est nécessaire d'étudier les différents éléments qui composent la fonction paramétrée.



- $\equiv \{p\} \{q\} (r)$ est de la catégorie sémantique des propositions S.
- $\equiv \{p\} \{q\}$ est un foncteur variable qui opère sur un parenthème à un argument propositionnel (r). (Le choix des parenthèses symétriques équiiformes à (,) est donc nécessaire). (cf. D3) Sa catégorie sémantique est S/S.
- $\equiv \{p\}$ est un foncteur variable qui opère sur un parenthème à un argument propositionnel {q}. (La condition 6 interdit dans ce cas l'inscription de parenthèses symétriques équiiformes à (,)). Sa catégorie sémantique est (S/S)/S.
- \equiv est un foncteur constant qui opère sur un parenthème d'un argument propositionnel {p}. (La condition 6 interdit l'inscription de parenthèses symétriques équiiformes à (,) et à {, }). Sa catégorie sémantique est ((S/S)/S)/S.

- Bien qu'équiforme au foncteur de la fonction $\equiv(pq)$, le foncteur constant \equiv inscrit par D26 n'est pas équiforme à un foncteur constant de même catégorie sémantique préalablement inscrit dans le système, il était donc possible de le choisir.

D27: $\lfloor \text{pqrst} \rfloor \equiv (\equiv(\equiv(pq)\equiv(\equiv(rst)))) * \{pq\}\{rs\}(t)$

Avant de justifier le choix des parenthèses symétriques du parenthème du definiendum, nous désirons mettre en évidence les catégories sémantiques qui y apparaissent.

$*\{pq\}\{rs\}(t)$ catégorie sémantique S

$*\{pq\}\{rs\}$ est un foncteur variable qui opère sur un parenthème à un argument propositionnel; le choix des parenthèses symétriques équiformes à (,) est donc nécessaire.
Catégorie sémantique: S/S.

$*\{pq\}$ est un foncteur variable qui opère sur un parenthème à deux arguments propositionnels.
Catégorie sémantique: (S/S)/SS.

$*$ est un foncteur constant qui opère sur un parenthème à deux arguments propositionnels.
Catégorie sémantique: ((S/S)/SS)/SS

- La condition 6 nous impose de choisir pour chaque parenthème des parenthèses symétriques non équiformes.

$*\{pq\}\{rs\}(t)$

3ème parenthème
2ème parenthème
1er parenthème

Le choix des parenthèses symétriques du 3e parenthème est imposé par la définition D3.

Le choix des parenthèses symétriques des 1er et 2e parenthèmes ne provoque aucune confusion. Ils sont certes équiformes aux parenthèses symétriques du 1er et 2e parenthèmes de la définition 26, mais leur nom-

bre d'arguments est différent, et cela suffit pour éliminer toute confusion. Ainsi les conditions 11 et 12 sont réalisées par le vide.

Construisons un contre-exemple pour expliciter davantage ce mécanisme qui règle les possibilités de choix des parenthèses.

$D^* : \underline{pqrs} \left[\exists (\exists (pq) \exists (rs)) \bullet \langle pq \rangle (rs) \right]$

$\bullet \langle pq \rangle (rs)$ catégorie sémantique S

$\bullet \langle pq \rangle$ foncteur variable qui opère sur un parenthème à deux arguments propositionnels. Les parenthèses symétriques du parenthème (rs) doivent être équiiformes à (,).
Catégorie sémantique: S/SS.

\bullet foncteur constant qui opère sur un parenthème à deux arguments propositionnels.
Catégorie sémantique: (S/SS)/SS.

Cette définition viole la condition 12. En effet

- $\langle pq \rangle$ est un parenthème de la fonction $\bullet \langle pq \rangle (rs)$ dans D^* .
- (rs) est un parenthème dans D^* qui suit $\langle pq \rangle$
- $\langle pq \rangle$ est similaire au 1er parenthème du définiendum de D27.
- Le définiendum de D27 possède un parenthème (rs) qui suit $\langle pq \rangle$

Mais (rs) dans D^* et (rs) dans D27 ne sont pas des parenthèmes similaires.

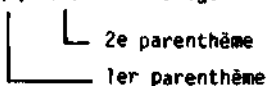
D^* n'est donc pas une bonne définition.

Si nous voulons corriger cette expression, nous devons donc inscrire d'autres parenthèses symétriques équiiformes ni à $\langle \rangle$ ni à $\langle \rangle$.

Deuxième contre-exemple

$D^{**} : \underline{pqr} \left[\exists (\langle \rangle (pq)r) \bullet \langle pq \rangle (r) \right]$

$\bullet \langle pq \rangle (r)$ Catégorie sémantique: S



• $\langle pq \rangle$ est un foncteur variable opérant sur un parenthème à un argument propositionnel; le choix des parenthèses symétriques équi-formes à (,) dans (r) est nécessaire.
Catégorie sémantique: S/S.

• est un foncteur variable opérant sur un parenthème à deux arguments propositionnels.
Catégorie sémantique: (S/S)/SS

D** n'est pas une bonne définition. En effet, le choix des parenthèses symétriques du 1er parenthème viole la condition 11:

- $\langle pq \rangle$ est un parenthème de D**.
- $\langle rs \rangle$ est un parenthème d'une thèse préalablement inscrite, D27.
- les arguments de $\langle rs \rangle$ et $\langle pq \rangle$ sont équinumériques et chaque argument correspondant est destiné à être dans la même catégorie sémantique.
- (r) est un parenthème qui suit $\langle pq \rangle$ dans D**
- (t) est un parenthème qui suit $\langle rs \rangle$ dans D27
- (r) dans D** est similaire à (t) dans D27.

MAIS $\langle pq \rangle$ et $\langle rs \rangle$ ne sont pas similaires.

Terminons cette présentation par une définition d'une fonction paramétrée conforme aux conditions énoncées.

D28 :

$$\perp_{hgp} \equiv (\perp_s \perp_o (h(ss)g(pp)) \square \langle h \rangle \langle g \rangle (p)) \overline{\quad}$$

D28 respecte les conditions générales d'une bonne définition.

Le jeu des parenthèses symétriques du parenthème du definiendum ne crée aucune confusion.

$\square \langle h \rangle \langle g \rangle (p)$ Catégorie sémantique: S

$\sigma \langle h \rangle \langle g \rangle$ est un foncteur variable qui opère sur un argument propositionnel. Il est donc nécessaire d'inscrire des parenthèses symétriques équiiformes à (,) dans le parenthème (p).

Catégorie sémantique: S/S.
 $\sigma \langle h \rangle$ est un foncteur variable qui opère sur un argument de la catégorie S/SS. g est de cette catégorie parce qu'il précède, dans le definiens, un parenthème similaire à (pq).

Catégorie sémantique: (S/S)/(S/SS).

σ est un foncteur constant qui opère sur un argument de la catégorie S/SS. h est de cette catégorie parce qu'il précède, dans le definiendum, un parenthème similaire à (pq).

Catégorie sémantique: ((S/S)/(S/SS))/(S/SS).

Le choix des parenthèses symétriques des parenthèmes $\langle h \rangle$ et $\langle g \rangle$ est conforme par le vide aux conditions 11 et 12. En effet, le système, avant l'introduction de la thèse D28, ne contenait pas de parenthèmes similaires à ceux-là, ni de parenthèmes dont l'argument est de la même catégorie que h dans $\langle h \rangle$ ou g dans $\langle g \rangle$.

1.6.4. DIRECTIVE DE SUBSTITUTION

1.6.4.1. PREAMBULE

Il est communément admis que Hilbert et Bernays ont été les premiers à formuler convenablement une règle de substitution. Dans la présentation de la formalisation du calcul des propositions Hilbert écrit ceci

Aus der Bedeutung der Ersetzbarkeit entnehmen wir zunächst folgende allgemeinen Substitutionsregeln:

S1: Es sei ein Ausdruck U durch \mathfrak{B} ersetzbar; A, \dots, K seien die in U, \mathfrak{B} vorkommenden Variablen, und es entstehe U' aus U, \mathfrak{B}' aus \mathfrak{B} , indem für die Variablen A, \dots, K die Ausdrücke $\mathfrak{A}, \dots, \mathfrak{K}$ gesetzt werden; dann ist auch U' durch \mathfrak{B}' ersetzbar.

S2: Es sei der Ausdruck U durch \mathfrak{B} ersetzbar, der Ausdruck \mathfrak{C} enthalte U als Bestandteil, und aus \mathfrak{C} entstehe \mathfrak{C}' , indem an Stelle des Bestandteils U der Ausdruck \mathfrak{B} gesetzt werde; dann ist \mathfrak{C}' durch \mathfrak{B} ersetzbar.

Wir stellen ferner eine Reihe von spezielleren Ersetzbarkeiten, die sich aus den Definitionen der Wahrheitsfunktionen in Verbindung mit der Regel S1 ergeben, als „Ersetzungsregeln“ zusammen. (Hilbert, 1934, p.49)

Ces règles dérivées concernent la conjonction et la disjonction, la négation, la réduction (Kürzung) et l'expansion (Erweiterung) d'expressions et l'élimination de la conditionnelle ainsi que de la biconditionnelle. L'esprit de ces règles de remplacement présage l'introduction des règles de la déduction naturelle. Pour le calcul des prédicats, Hilbert et Bernays étendent et adaptent les règles générales de substitution du calcul des propositions. Ils proposent notamment deux règles: "der Regel der Einsetzung für die Individuen-Variablen" et "der Regel der gebundenen Individuen-Variablen" (Hilbert, 1934, pp. 87-119). Cinq ans plus tôt, Leśniewski publiait un article dans lequel la règle de substitution est correctement et formellement décrite, "... it should be noted that Leśniewski had already done it... in 1929" (Rickey, 1973, p.39).

Les systèmes de Leśniewski diffèrent profondément de ceux de la tradition hilbertienne. La règle de substitution (remplacement) participe de cette même différence. Les systèmes de Leśniewski ne con-

tiennent à priori aucune liste de variables et permettent l'introduction de constantes et de variables d'une quelconque catégorie sémantique. Il est donc nécessaire de formuler une règle de transformation qui organise la substitution non pas en disant ce qui est substitué à, mais qui expose les conditions qui régissent la mise en place d'expressions nouvelles en lieu et place de variables. A l'approche pré-déterministe de la tradition hilbertienne s'oppose celle sémantique et structurelle de Leśniewski. Précisons ces qualificatifs. L'ensemble des catégories sémantiques est potentiellement illimité. La règle de substitution doit donc prendre en compte la coordination sémantique. D'autre part, elle doit contrôler l'agencement des expressions nouvelles substituées aux variables. Ce contrôle s'effectue sur la base d'une analyse de la structure même de la thèse sur laquelle opère la règle de substitution. Une substitution n'est possible qu'à partir d'une thèse qui est une généralisation. Seules les variables qui ont un lieu équiforme dans le quantificateur général de la thèse en question (et qui lui sont directement associés) sont concernés par l'opération de substitution. Les conditions de substitution règlent la transformation en s'appuyant sur la structure de l'essence de la thèse sur laquelle la règle agit. La succession des mots et la catégorie sémantique des termes qui composent cette essence sont déterminantes. Il y a d'une part les mots fixes, les mots qui ne seront pas modifiés par la substitution et les autres, les variables, qui sont l'objet de la substitution.

Considérons deux exemples.

ex. 1 E: $\ulcorner p, q \urcorner = \ulcorner pp \urcorner$ thèse

1. décision: substituer q à p dans E: p/q

2. essence de E: $\equiv (p p)$
 $\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$

3. découpage en mots: $\equiv (p p)$

 mots 1 2 3 4 5

généralisation est toujours de la catégorie S. Les termes qui la composent ne créent aucune confusion.

6. Détermination des mots fixes: mots 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 16, 17.

7. Remplacement de tout ce qui n'est pas mot fixe par le substitutum

$$\begin{array}{c} \equiv (\exists (\underbrace{\text{p}}_{\text{p}} \text{p} \text{---}) \sim (\text{---})) \\ ||| ||| ||| ||| \\ \equiv (\exists (\underbrace{\text{p}}_{\text{p}} \text{p} \text{---}) \underbrace{\text{q}}_{\text{q}} \text{---} (\text{qp}) \text{---}) \sim (\underbrace{\text{q}}_{\text{q}} \text{---} (\text{qp}) \text{---}) \end{array}$$

8. Une dernière étape consiste à ajuster les lieux du quantificateur général (s'il y a lieu) de la thèse obtenue par substitution.

$$D' \quad \underbrace{\text{p}}_{\text{p}} \text{---} (\exists (\underbrace{\text{p}}_{\text{p}} \text{p} \text{---}) \underbrace{\text{q}}_{\text{q}} \text{---} (\text{qp}) \text{---}) \sim (\underbrace{\text{q}}_{\text{q}} \text{---} (\text{qp}) \text{---})) \text{---}$$

Proposons tout d'abord les conditions générales qu'il est nécessaire de respecter afin d'obtenir une thèse par substitution.

A est une thèse résultant de la règle de substitution relativement à une thèse B préalablement inscrite dans le système, si

1. B est une généralisation.
2. A chaque variable équiforme de B qui possède un lieu équiforme dans le quantificateur général de B à laquelle il est directement associé, une expression équiforme E est substituée.
3. L'expression E est de la même catégorie sémantique que la variable à laquelle E a été substituée.
4. L'expression substituée à la variable doit rester libre pour cette variable dans l'essence de la généralisation B.
5. Le quantificateur général de A contient des lieux équiformes à toutes les variables libres de son essence et à celles-là seulement.
6. Si une inscription destinée à avoir statut de variable est substituée à une variable, cette inscription ne peut être équiforme à une constante préalablement inscrite dans le système.

Leśniewski propose une directive de substitution qui ne dit pas ce qui est substitué pour les variables. Une inscription étant posée, cette directive fournit le moyen de contrôler si elle est en accord avec les conditions générales attachées à toute substitution, et ceci, en fonction des thèses qui sont actuellement inscrites dans le système. Avant de formuler cette directive, proposons quelques définitions terminologiques.

FONCTION DERIVEE

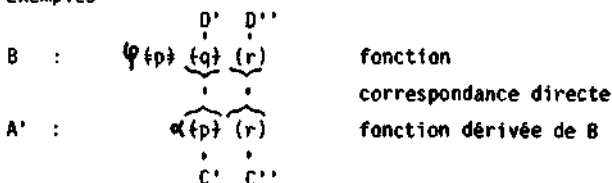
A est une fonction dérivée de la fonction B, si et seulement si,

1. A possède un nombre égal ou inférieur de parenthèses au nombre des parenthèses de B.
2. Les parenthèses de A sont en correspondance directe avec un ingrédient terminal des parenthèses de B

et

chaque parenthèse C de A est similaire au parenthème D de B qui lui correspond directement.

Exemples



C' est similaire à D' et C'' est similaire à D''

A'' : $\beta \{q\} \{s\} \{t\}$ fonction dérivée de B

A''' : $\gamma \{p, r, p\}$ fonction dérivée de B

Contres-exemples

E' : *{r} {s} {t} {v} fonction non dérivée de B. Le parenthème {r} n'est en correspondance directe avec aucun parenthème de B.

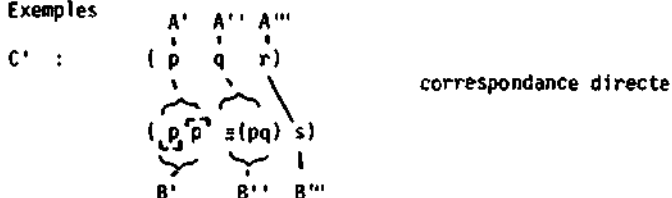
E'' : ofar} (r) fonction non dérivée de B. Le parenthème {ar} est en correspondance directe avec {q}, mais il ne s'agit pas de deux parenthèmes similaires.

ARGUMENT ANALOGUE

L'argument A d'un parenthème C est analogue à un argument B d'un parenthème D, si et seulement si,

1. C et D sont des parenthèmes similaires.
2. L'argument A est en correspondance directe avec l'argument B.

Exemples



L'argument A' (respectivement A'', A''') dans C' est analogue à l'argument B' (respectivement B'', B''') dans B'

Contres-exemples

C'' : $(p q)$ correspondance directe

D'' : $[\alpha \beta]$

L'inscription p (respectivement q) n'est pas un argument analogue à α (respectivement β) car les parenthèmes C'' et D'' ne sont pas similaires.

C'' : $(p q)$ non correspondance directe

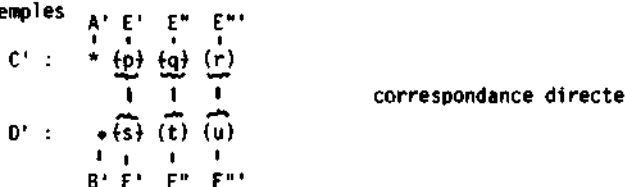
D'' : $(p q r)$

FONCTEUR ANALOGUE

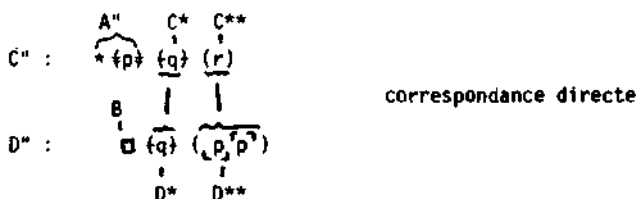
Le foncteur A de la fonction C est analogue au foncteur B de la fonction D, si et seulement si,

1. Le nombre de parenthèmes de C qui suit A est égal au nombre de parenthèmes de D qui suit B.
2. Chaque parenthème E de C est similaire au parenthème F de D qui est son correspondant direct.

Exemples



les foncteurs * et \diamond sont analogues



Les foncteurs * $\{p\}$ et \square sont analogues

contre-exemple



Les parenthèmes E et F ne sont pas similaires. les foncteurs * et \diamond ne sont donc pas analogues.

ANALOGUE

L'inscription A est analogue à B, si et seulement si,

1. A existe
2. A est un foncteur analogue à B

ou

A est un argument analogue à B.

1.6.4.2. FORMULATION DE LA DIRECTIVE DE SUBSTITUTION

A est une thèse résultant de la règle de substitution relativement à une thèse B préalablement inscrite dans le système, si

1. A existe.

Condition 1 - Les tests à effectuer présupposent l'existence d'une expression sur laquelle opérer: A existe. Il n'est rien dit ici de la structure formelle de A. Ainsi, si B est: $\llcorner p, \ulcorner z(pp) \rrcorner$ une expression quelconque satisfait la condition 1, par exemple:

A' : $\llcorner q, \ulcorner a(qq) \rrcorner$

A'' : $\llcorner q, \ulcorner *z \rrcorner$
comme

A''' : e!aar} d'ailleurs.

2. L'essence de A est le complexe des a.

Condition 2 - Elle précise quelque peu la structure formelle de A, cela peut être une généralisation ou non, et son essence est décomposée en éléments désignés par le nom général a.

3. Les a sont équinumériques aux mots internes du sous-quantificateur de B.

Condition 3 - Pour qu'une expression A soit une réalisation conforme à la règle, il est nécessaire que les éléments de son essence désignés par a soient en correspondance directe avec les mots internes au sous-quantificateur de B.

B : $\lfloor p \rfloor \equiv (pp)$
 A' : $\lfloor q \rfloor \equiv (qq)$
 a

correspondance directe

B : $\lfloor p \rfloor \equiv (pp)$
 A'' : $\lfloor q \rfloor \equiv ((qq) \equiv (qq))$
 a

correspondance directe

Contre-exemple

B : $\lfloor p \rfloor \equiv (pp) ?$
 A''' : $\lfloor q \rfloor \equiv (pqr)$
 a'

non correspondance directe

4. Si D est un mot interne au sous-quantificateur de B

et

E est un mot des a

et

E et D sont en correspondance directe

Alors D est une variable de B

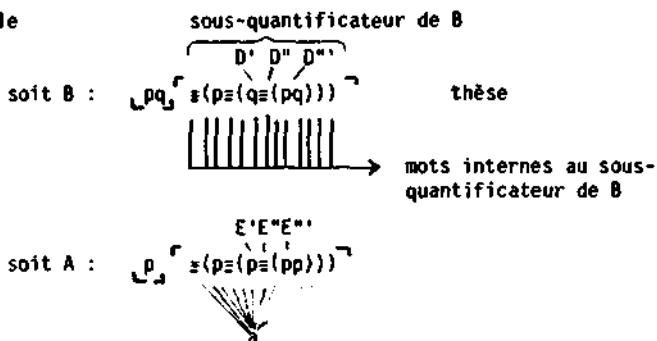
ou

D est équiforme à E.

Condition 4 - Elle est vérifiée si: 1) il y a correspondance directe entre les éléments de l'essence de A désignés par a et les mots internes au sous-quantificateur de B, 2) à chaque correspondance directe entre un mot D interne au sous-quantificateur de B et un des éléments E

désignés par a , D est une variable de B ou D est équiforme à E .

I. Exemple



Choisissons trois témoins: D' , D'' , D''' et leurs correspondants directs: E' , E'' , E''' .

Les expressions B et A possèdent la correspondance directe exposée en 1).

D' et E' sont en correspondance directe, et D' est une variable de B .

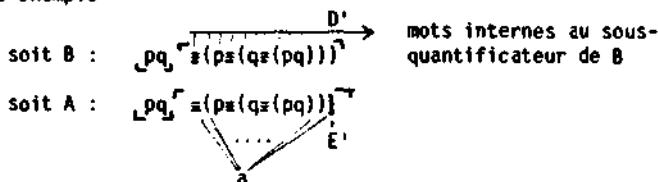
D'' et E'' sont en correspondance directe et ils sont équiformes.

D''' et E''' sont en correspondance directe, D''' est une variable de B et

D''' et E''' sont équiformes.

Les dix autres correspondants directs remplissent également la sous-condition 2); ainsi B et A remplissent structurellement la condition 4.

11. Contre-exemple



A et B possèdent la correspondance directe imposée par 1) mais D' et E', tout en étant en correspondance directe, ne remplissent pas le conséquent de la sous-condition 2):

D' n'est pas une variable de B,
ni

D' n'est équiforme à E'.

5. Si D est un mot interne au sous-quantificateur de B

et

E est un mot de a

et

E et D sont en correspondance directe

Alors E est un terme

ou

E est une généralisation

ou

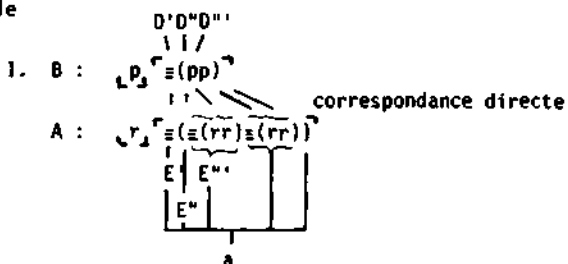
E est une fonction

ou

E est équiforme à D.

Condition 5 - Elle impose le statut possible des éléments désignés par a. Si les mots internes au sous-quantificateur de B sont en correspondance directe avec chaque élément E désigné par a, alors E est un terme ou une généralisation ou une fonction ou est équiforme à son correspondant direct dans B.

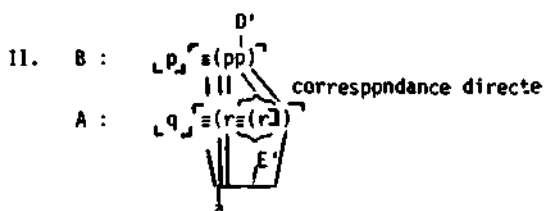
Exemple



L'expression A remplit la condition 5, la sous-condition de correspondance directe est satisfaite et chaque élément désigné par a est terme ou fonction ou possède un correspondant direct qui lui est équiforme.

- E' est un terme, il est également équiforme à D'.
- E'' est équiforme à D''.
- Le correspondant directe de D''' est E''' : $\exists(rr)$, il s'agit d'une fonction.

Contre-exemple



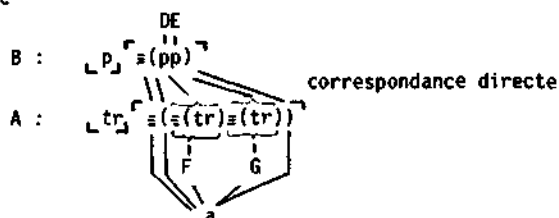
La sous-condition de correspondance directe est satisfaite, mais E' n'est pas un terme, ni une fonction, ni une généralisation, et n'est pas équiforme à D'.

6. Si D est une variable de la généralisation B, équiforme à E
 et
 F est un des a
 et
 F et D sont en correspondance directe
 et
 G est un des a
 et
 E et G sont en correspondance directe
- Alors G et F sont équiformes.

Condition 6 - Elle impose la conservation des formes équiformes. Si B possède deux variables équiformes, alors les deux correspondants directs

qui leur sont associés sont également équiiformes entre eux.

Exemple



D et E sont équiiformes dans B.

Les correspondants directs F et G dans A sont équiiformes.

La restriction aux variables de B s'explique par le fait que seules les variables ne sont pas des mots fixes; la conservation de l'équiiformité ne peut être brisée que par elles.

7. Si D est un ingrédient de l'essence de B
- et
- E est un lieu de D
- et
- F est une variable de la généralisation B liée par K
- et
- F est un ingrédient de D
- et
- E est un mot dans l'essence de B
- et
- G est un des a
- et
- E et G sont en correspondance directe
- et
- F est un mot dans l'essence de B
- et
- H est un des a
- et

F et H sont en correspondance directe

et

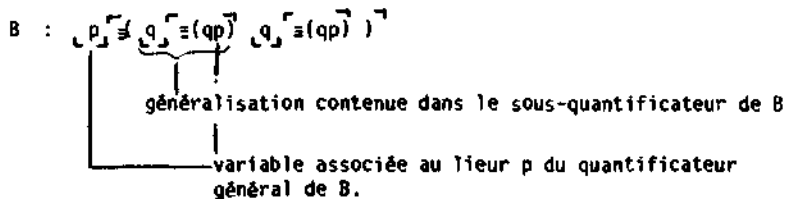
L est un ingrédient de A

et

I est une variable de la généralisation L, liée par G

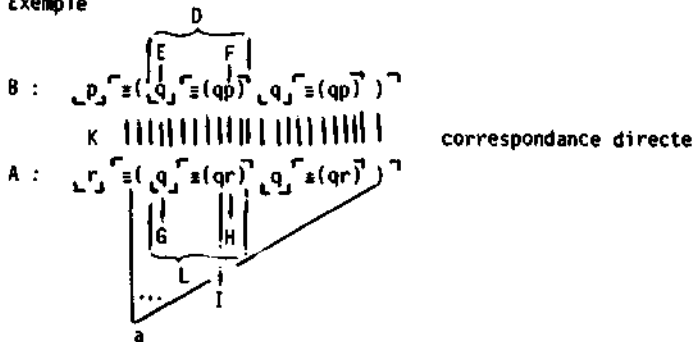
Alors I n'est pas un ingrédient de H.

Condition 7 - Elle est intéressante. Elle impose que toute expression substituée à une variable dans B doit rester libre pour cette variable. Il n'y a de précaution à prendre que lorsque le sous-quantificateur de B possède une généralisation et que l'essence de cette généralisation contient une variable associée à un lieu du quantificateur général de B.



En présence d'une telle expression B, la condition 7 empêche d'accepter pour A, toute expression qui aurait pour correspondant direct du p considéré, un élément désigné par a qui serait une expression possédant q libre.

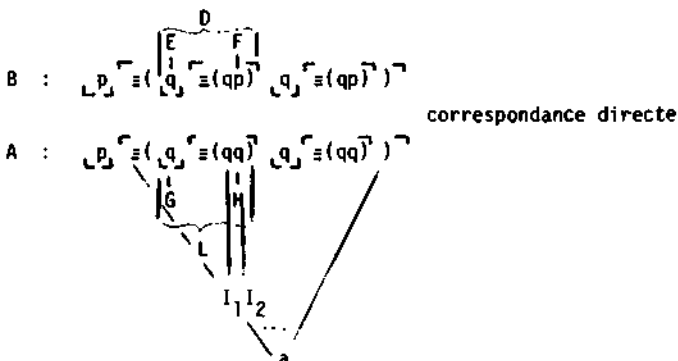
Exemple



Si l est une variable équiforme au lieu G dans L , alors l n'est pas un ingrédient de H .

Ce qui est bien le cas dans notre exemple; ce que désigne l n'est pas un ingrédient de H .

Contre-exemple



Cette expression ne peut être acceptée. En effet, si l est une variable équiforme au lieu G dans L , alors l n'est pas un ingrédient de H . La variable l_1 dans L tout en étant équiforme au lieu G ne pose pas problème. Mais l_2 , qui est H , est dans un ingrédient de H . Il est nécessaire que l_2 ne soit pas ingrédient de H .

8. Si D est un lieu de la généralisation A

et

E est équiforme à D

et

E est ingrédient de B

alors il existe F , E est un lieu de la généralisation F

ou

il existe F, G , F est un ingrédient de B

et

G est une variable de la généralisation F ,
liée par G

Condition 8 - Si un lieu de A est équiforme à un terme E de B, alors E est un lieu de B ou, E est un lieu d'une généralisation contenue dans l'essence de B ou E est une variable de B, ou E est une variable d'une généralisation contenue dans l'essence de B.

9. Si D est un terme
et
D est un mot de A
alors il existe G, D est un lieu de la généralisation G
ou
il existe G, D est une variable de la généralisation G
et
G est un ingrédient de A
ou
D est une constante de la protothétique, préalablement
introduite.

Condition 9 - Tout terme de A est un lieu de A ou un lieu dans A, ou une variable de A, ou une variable dans A ou une constante préalablement introduite.

10. Si E est un ingrédient de A
et
D est un lieu de la généralisation E
alors il existe F, F est une variable de la généralisation E,
liée par D.

Condition 10 - A tout lieu de (ou dans) A, correspond une variable au moins qui lui est directement associée.

11. Si E est un ingrédient de A
et
F est une variable de la généralisation E et
D est une variable de la généralisation E, équiforme à F

alors F est identique à D

ou

F est de la même catégorie sémantique que D

Condition 11 - Deux termes variables équi-formes d'une généralisation de (ou dans) A sont de même catégorie sémantique.

12. Si D est une généralisation

et

D est un ingrédient de A

et

D est différent de A

alors il existe E, G, H, E est de la catégorie sémantique des propositions

et

G est un ingrédient de B

et

H est un ingrédient de A

et

E dans G est un argument analogue à

D dans H

Condition 12 - Si, à une variable dans B, nous substituons une généralisation, il est nécessaire de s'assurer que cette variable est bien de la catégorie des propositions. En effet, une généralisation est toujours de la catégorie des propositions. Le test s'effectue en comparant les arguments de deux parenthèses G et H. G est un parenthème d'une thèse préalablement inscrite dans le système. H est un parenthème de A. La généralisation D, argument de H, doit être un argument analogue à l'argument E, de la catégorie des propositions de G. La condition est remplie si les parenthèses sont similaires.

Exemple

B : $\ulcorner p \urcorner \equiv (pp)$

A : $\ulcorner \ulcorner p \urcorner \equiv (\ulcorner p \urcorner \ulcorner p \urcorner) \urcorner$

G : (pp) arguments du parenthème G

H : $(\ulcorner p \urcorner \equiv (\ulcorner p \urcorner \ulcorner p \urcorner))$

arguments du parenthème H

Il s'agit bien de deux parenthèmes similaires; ils ont tous les deux le même nombre d'arguments et possèdent des parenthèses symétriques équiformes: (--). D'autre part, la variable p dans G est bien de la catégorie sémantique des propositions.

13. Si D est une généralisation

et

D est un ingrédient de A

et

E est l'essence de D

alors E est un mot

ou

il existe F, F est une fonction (régulière ou paramétrée) préalablement inscrite dans le système, de la catégorie sémantique des propositions

et

E est une fonction dérivée de F

Condition 13 - Seule la règle de définition permet d'introduire de nouvelles catégories sémantiques. Rester en conformité avec la règle de substitution nécessite de ne considérer que les catégories préalablement introduites à un instant donné. La condition 13 règle partiellement cette obligation.

Toute essence de (ou dans) A peut être un mot ou une fonction dérivée d'une fonction que le système connaît déjà. S'il s'agit d'un mot, les

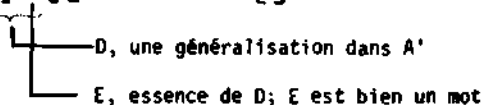
conditions précédentes garantissent que c'est une variable d'une catégorie sémantique préalablement introduite dans le système.

Exemple

B : $\ulcorner p \urcorner \equiv (pp)$

C : $\ulcorner pq \urcorner \equiv (\equiv (p \equiv (qr)) \wedge \overbrace{\{p\} \{q\} \{r\}}^F)$

A' : $\equiv (\ulcorner p \urcorner \ulcorner p \urcorner)$ B, $p/\ulcorner p \urcorner$



A'' : $\ulcorner \varphi p \urcorner \equiv (\varphi \{p\} \{r\}) \varphi \{p\} \{r\}$ B, $p/\varphi \{p\} \{r\}$

F est une fonction paramétrée préalablement inscrite de la catégorie des propositions, définition C.

L'inscription $E, \varphi \{p\} \{r\}$ est bien une fonction dérivée de la fonction F

14. Si D est une fonction
 et
 D est un ingrédient de A
- alors D est identique à A
 ou
 il existe E, E est une généralisation
 et
 D est l'essence de E
 ou
 il existe E, F, F est de la même catégorie sémantique
 que E dans une thèse préalablement
 inscrite
 et
 D est une fonction dérivée de F
 et
 il existe I, J, I est un ingrédient de A
 et
 J est un ingrédient d'une
 thèse préalablement
 inscrite
 et
 D dans I est analogue
 à E dans J

Condition 14 - Si D est une fonction de (ou dans) A, trois situations sont possibles.

1. D est A

ex: B : $\underbrace{p}_D \text{ } \underbrace{\equiv(pp)}$

A : $\underbrace{\equiv(11)}_D$ p/1; cette inscription n'est plus une généralisation. Elle ne contient plus de variable. C'est bien une fonction.

2. La fonction D est l'essence d'une généralisation de (ou dans) A.

ex. 1 B : $\underbrace{p}_D \text{ } \underbrace{\equiv(pp)}$

A : $\underbrace{q}_D \text{ } \underbrace{\equiv(qq)}$ p/q; D est l'essence de A, c'est une fonction.

ex. 2 B : $\underbrace{p}_D \text{ } \underbrace{\equiv(pp)}$

A : $\underbrace{q}_D \text{ } \underbrace{\equiv(\underbrace{p}_{D'} \text{ } \underbrace{\equiv(pq)})}_{E'} \underbrace{\underbrace{p}_{D''} \text{ } \underbrace{\equiv(pq)}}_{E''} \text{ } p / \underbrace{p}_{D'} \text{ } \underbrace{\equiv(pq)}$

E' et E'' sont deux généralisations dans A.

3. D est une fonction dérivée d'une fonction d'une catégorie sémantique que le système connaît déjà, et D est un argument analogue dans un parenthème de A, à un argument d'un parenthème préalablement inscrit.

Exemple

Soit la définition d'une fonction paramétrée:

$$\underbrace{pqr}_F \text{ } \underbrace{\equiv(\equiv(p \equiv(qr))) * \{p\} \{q\} \{r\}}_F$$

Soit B : $\underbrace{p}_{E'E''} \text{ } \underbrace{\equiv(pp)}_J$

F est bien une fonction; de cette dernière composons la fonction dérivée D : $\bullet\{q\}(r)$

F est de la catégorie sémantique des propositions, comme D d'ailleurs.

$$A : \llbracket qr \rrbracket = (\underbrace{\bullet\{q\}(r)}_{D'} \quad \underbrace{\bullet\{q\}(r)}_{D''})$$

I

A est une inscription conforme aux conditions imposées par la règle de substitution. En effet, et conformément à la troisième sous-condition de la condition 14, D' et D'' sont des fonctions et D' et D'' sont respectivement arguments analogues à des arguments d'un parenthème préalablement introduit, par exemple J.

1.7. QUELQUES THESES

Les démonstrations suivantes offrent avant tout un support illustratif aux règles d'inférence du système S1. Nous utiliserons cependant certains résultats dans la suite de notre travail.

Les systèmes de Les¹iewski se caractérisent par le fait que l'ensemble des thèses se développe dans l'espace et le temps. Chaque inscription est ou n'est pas une thèse en fonction des conditions imposées par les directives. Cette décidabilité joue sur ce qui a été préalablement inscrit. Ainsi, chaque inscription acceptée est une démonstration. Il est évident cependant que certaines thèses particulières nous intéressent plus que d'autres. Il est souvent nécessaire, pour les inscrire, de fournir préalablement des thèses qui contribuent à leur inscription. Dans cette perspective, nous parlons de construction démonstrative. Ainsi, une telle construction se caractérise par l'inscription d'une succession de thèses, dont seule la dernière nous importe vraiment.

Jouer le jeu absolu de l'inscription d'un ensemble de thèses qui se développe dans l'espace et le temps en fonction de ce que le

système a préalablement accepté est irréalisable ici. En effet, la justification de chaque étape nécessiterait trop d'espace. Nous nous sommes déterminé à résumer certaines transformations. Ainsi, nous nous référons parfois à des thèses de systèmes élémentaires, dont nous savons par ailleurs qu'ils peuvent être plongés dans S1. Il nous arrive également de proposer des transformations qui sont en fait le résultat d'une succession de transformations conformes aux directives. Si nous prenons une grande liberté dans l'écriture des thèses c'est que nous désirons avant tout privilégier tel aspect d'un résultat plutôt que tel autre. Pour faciliter la compréhension logique d'un résultat, nous sacrifions la rigueur totale imposée par les directives du système.

Lesniewski a démontré la thèse suivante en utilisant les axiomes et les directives de S1:

T 381 $\ulcorner \text{gpq} \urcorner \text{paq} \cdot \text{g}(p) \text{zg}(q) \urcorner$ (Lesniewski, 1939, p. 137).

Il s'agit de la thèse qui énonce le principe d'extensionnalité pour les propositions. C'est bien cette loi que Lesniewski désire pour ces systèmes (p. 173). L'inscription de cette thèse nécessite la démonstration de plusieurs dizaines d'autres thèses dont certaines comportent près de deux cents mots. La thèse 202 en est un exemple.

$$\begin{aligned}
 & \text{T202. } \ulcorner \text{p} \urcorner \phi \left(\phi \left(\ulcorner \text{r} \urcorner \phi \left(\ulcorner \text{r} \urcorner \phi \left(\ulcorner \text{p} \urcorner \phi \left(\ulcorner \text{p} \urcorner \right) \right) \right) \right) \ulcorner \text{r} \urcorner \phi \left(\ulcorner \text{r} \urcorner \phi \right. \right. \\
 & \left. \left. \phi \left(\ulcorner \text{p} \urcorner \phi \ulcorner \text{r} \urcorner \right) \phi \left(\ulcorner \text{p} \urcorner \right) \right) \right) \phi \left(\phi \left(\ulcorner \text{p} \urcorner \phi \left(\ulcorner \text{p} \urcorner \right) \phi \left(\phi \left(\ulcorner \text{p} \urcorner \phi \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \ulcorner \text{p} \urcorner \right) \phi \left(\ulcorner \text{r} \urcorner \phi \left(\ulcorner \text{r} \urcorner \phi \left(\ulcorner \text{p} \urcorner \phi \left(\ulcorner \text{p} \urcorner \right) \right) \right) \ulcorner \text{r} \urcorner \phi \left(\ulcorner \text{r} \urcorner \phi \left(\phi \left(\ulcorner \text{p} \urcorner \phi \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \ulcorner \text{r} \urcorner \right) \phi \left(\ulcorner \text{p} \urcorner \right) \right) \right) \right) \right) \left[\text{T33} : \ulcorner \text{r} \urcorner \phi \left(\ulcorner \text{r} \urcorner \phi \left(\ulcorner \text{p} \urcorner \phi \left(\ulcorner \text{p} \urcorner \right) \right) \right) \ulcorner \text{r} \urcorner \right. \\
 & \left. \ulcorner \text{r} \urcorner \phi \left(\ulcorner \text{r} \urcorner \phi \left(\phi \left(\ulcorner \text{p} \urcorner \phi \ulcorner \text{r} \urcorner \right) \phi \left(\ulcorner \text{p} \urcorner \right) \right) \right) \right] / \text{q} : \phi \left(\ulcorner \text{p} \urcorner \phi \left(\ulcorner \text{p} \urcorner \right) \right) \urcorner
 \end{aligned}$$

Lesniewski, 1939, page 108)

Nous utiliserons la thèse d'extensionnalité pour les propositions comme un résultat démontré. En effet, inscrire cette thèse sur la base des trois axiomes de S1 nécessiterait une longue étude et mériterait un ouvrage à soi seul, (Leśniewski, 1939), (Sobocinski, 1960), (Sjupecki, 1953). Le lecteur comprendra que nous ne développons pas davantage la démonstration de la thèse d'extensionnalité pour les propositions.

Voici quelques théorèmes plus rapides à démontrer, et que nous ne numéroterons pas.

Théorème $\varphi(11)$

dém.	1.	$\perp p q, \ulcorner f, \urcorner p \equiv . f(p) \equiv f(q) \urcorner \equiv \varphi(pq) \urcorner$	déf. 013
	2.	$\ulcorner f, \urcorner 1 \equiv . f(1) \equiv f(1) \urcorner \equiv \varphi(11)$	1, $\perp, \perp e$, $p/1$, $q/1$
	3.	$\perp p q, \ulcorner p \equiv . p \equiv . q \equiv q \urcorner$	thèse
	4.	$\ulcorner f, \urcorner 1 \equiv . 1 \equiv . f(1) \equiv f(1) \urcorner$	3, $\perp, \perp e$, $p/1, q/f(1)$
	5.	$1 \equiv \ulcorner f, \urcorner 1 \equiv . f(1) \equiv f(1) \urcorner$	4, dist
	6.	1	thèse
	7.	$\ulcorner f, \urcorner 1 \equiv . f(1) \equiv f(1) \urcorner$	6, 5, dét.
	8.	$\varphi(11)$	7, 2 dét.

Théorème $\sim(\varphi(00))$

	1.	$\perp p q, \ulcorner f, \urcorner p \equiv . f(p) \equiv f(q) \urcorner \equiv \varphi(pq) \urcorner$	déf. 013
	2.	$\ulcorner f, \urcorner 0 \equiv . f(0) \equiv f(0) \urcorner \equiv \varphi(00)$	1, $\perp, \perp e$, $p/0$, $q/0$
	3.	$\perp p, \ulcorner p \equiv . p, \urcorner p \urcorner \equiv \sim(p) \urcorner$	déf.
	4.	$\varphi(00) \equiv \perp p, \ulcorner p \urcorner \equiv \sim(\varphi(00))$	3, $\perp, \perp e$, $p/\varphi(00)$
	5.	$\perp p, \ulcorner p \urcorner \equiv 0$	déf.
	6.	$\perp p q, \ulcorner p \equiv . p \equiv . q \equiv q \urcorner$	thèse
	7.	$\ulcorner f, \urcorner 0 \equiv . 0 \equiv . f(0) \equiv f(0) \urcorner$	6, $\perp, \perp e$, $p/0$, $q/f(0)$
	8.	$0 \equiv \ulcorner f, \urcorner 0 \equiv . f(0) \equiv f(0) \urcorner$	7, dist
	9.	$\perp p, \ulcorner p \urcorner \equiv \ulcorner f, \urcorner 0 \equiv . f(0) \equiv f(0) \urcorner$	8, 5, Ax1
	10.	$\perp p, \ulcorner p \urcorner \equiv \varphi(00)$	2, 9, Ax1
	11.	$\varphi(00) \equiv \perp p, \ulcorner p \urcorner$	10, comm.
	12.	$\sim(\varphi(00))$	11, 4, dét.

Théorème $\sim(\varphi(10))$

dém.	1.	$\vdash_{\text{pq}} \ulcorner \ulcorner p \equiv f(p) \equiv f(q) \urcorner \equiv \varphi(pq) \urcorner$	déf. D13
	2.	$\ulcorner \ulcorner 1 \equiv f(1) \equiv f(0) \urcorner \equiv \varphi(10) \urcorner$	1, $\ulcorner \ulcorner e. p/1, q/0 \urcorner$
	3.	$\vdash_{\text{pq}} \ulcorner p \equiv :. p \equiv q \equiv r :. q \equiv r \urcorner$	thèse
	4.	$\ulcorner \ulcorner 1 \equiv :. 1 \equiv f(1) \equiv f(0) :. f(1) \equiv f(0) \urcorner$	3, $\ulcorner \ulcorner e. p/1, q/f(1), p/f(0) \urcorner$
	5.	$1 \equiv \ulcorner \ulcorner 1 \equiv f(1) \equiv f(0) :. f(1) \equiv f(0) \urcorner$	4, dist
	6.	1	thèse
	7.	$\ulcorner \ulcorner 1 \equiv f(1) \equiv f(0) :. f(1) \equiv f(0) \urcorner$	6,5, dét.
	8.	$\ulcorner \ulcorner 1 \equiv f(1) \equiv f(0) \urcorner \equiv \ulcorner \ulcorner f(1) \equiv f(0) \urcorner \urcorner$	7 dist
	9.	$\varphi(10) \equiv \ulcorner \ulcorner f(1) \equiv f(0) \urcorner \urcorner$	2,8, Ax.1
	10.	$\vdash_{\text{pq}} \ulcorner p \equiv q. \equiv \ulcorner \ulcorner f(p) \equiv f(q) \urcorner \urcorner$	thèse
	11.	$1 \equiv 0. \equiv \ulcorner \ulcorner f(1) \equiv f(0) \urcorner \urcorner$	10, $\ulcorner \ulcorner e. p/1, q/0 \urcorner$
	12.	$\vdash_{\text{pq}} \ulcorner p \equiv :. p \equiv q. \equiv \bar{q} \urcorner$	thèse
	13.	$1 \equiv :. 1 \equiv 0. \equiv 0$	12, $\ulcorner \ulcorner e. p/1, q/0 \urcorner$
	14.	$1 \equiv 0. \equiv 0$	6,13, dét.
	15.	$0 \equiv \ulcorner \ulcorner f(1) \equiv f(0) \urcorner \urcorner$	14, 11, Ax.1
	16.	$\varphi(10) \equiv 0$	15, 9, Ax. 1
	17.	$\vdash_{\text{p}} \ulcorner p^1 \equiv 0 \urcorner$	déf.
	18.	$\varphi(10) \equiv \ulcorner \ulcorner p^1 \urcorner \urcorner$	16, 17, Ax.1
	19.	$\vdash_{\text{p}} \ulcorner p \equiv \ulcorner \ulcorner p^1 \urcorner \urcorner. \equiv \sim(p) \urcorner$	déf.
	20.	$\varphi(10) \equiv \ulcorner \ulcorner p^1 \urcorner \urcorner. \equiv \sim(\varphi(10))$	19, $\ulcorner \ulcorner e. p/\varphi(10) \urcorner$
	21.	$\sim(\varphi(10))$	18, 20, dét.

L'inscription de ces trois théorèmes met en évidence la possibilité d'introduire dans 51 les valeurs de vérité d'un foncteur propositionnel.

Théorème $\vdash_{\mathcal{L}} g(pp).g(\sim(p)p) \equiv_{\mathcal{L}} g(qp)^{\sim}$

1. $\vdash_{\mathcal{L}} f_r f_r g(pp) \equiv_{\mathcal{L}} r_r f_r(rr) \equiv_{\mathcal{L}} g(pp) \equiv_{\mathcal{L}} r_r f_r$ Ax. 3
 $(rr) \equiv_{\mathcal{L}} g(p \equiv_{\mathcal{L}} q_r q^{\sim} p)^{\sim} \equiv_{\mathcal{L}} g(qp)^{\sim}$
2. $\vdash_{\mathcal{L}} p q_r f_r p \equiv_{\mathcal{L}} r_r f_r(rr) \equiv_{\mathcal{L}} p \equiv_{\mathcal{L}} r_r f_r(rr) \equiv_{\mathcal{L}} q^{\sim}$ déf.
 $\equiv_{\mathcal{L}} p.q$
3. $\vdash_{\mathcal{L}} p q_r f_r g(pp) \equiv_{\mathcal{L}} r_r f_r(rr) \equiv_{\mathcal{L}} g(pp) \equiv_{\mathcal{L}} r_r f_r$
 $f_r(rr) \equiv_{\mathcal{L}} g(p \equiv_{\mathcal{L}} q_r q^{\sim} p)^{\sim} \equiv_{\mathcal{L}} g(pp).g(p \equiv_{\mathcal{L}} q_r$
 $q^{\sim} p)^{\sim}$ 2, $p/g(pp), q/g(p \equiv_{\mathcal{L}} q_r q^{\sim} p)$
4. $\vdash_{\mathcal{L}} p q_r f_r g(pp).g(p \equiv_{\mathcal{L}} q_r q^{\sim} p) \equiv_{\mathcal{L}} q_r g(qp)^{\sim}$ Ax. 1, 1, 3
5. $\vdash_{\mathcal{L}} p q_r p \equiv_{\mathcal{L}} q_r q^{\sim} \equiv_{\mathcal{L}} \sim(p)^{\sim}$ déf.
6. $\vdash_{\mathcal{L}} \sim(p) \equiv_{\mathcal{L}} p \equiv_{\mathcal{L}} q_r q^{\sim} \equiv_{\mathcal{L}} f_r f_r(\sim(p)) \equiv_{\mathcal{L}} f_r p \equiv_{\mathcal{L}}$
 $q_r q^{\sim})^{\sim}$ thèse ext., sub.
7. $\vdash_{\mathcal{L}} p_r f_r(\sim(p)) \equiv_{\mathcal{L}} f_r(p \equiv_{\mathcal{L}} q_r q^{\sim})^{\sim}$ 5, 6, dét, comm, dist
8. $\vdash_{\mathcal{L}} p_r \diamond [g p] (\sim(p)) \equiv_{\mathcal{L}} \diamond [g p] (p \equiv_{\mathcal{L}} q_r q^{\sim})^{\sim}$ 7, $f/\diamond [g p]$
9. $\vdash_{\mathcal{L}} p_r g(pp).g(rp) \equiv_{\mathcal{L}} g(qp)^{\sim} \equiv_{\mathcal{L}} \diamond [g p] (r)^{\sim}$ déf.
10. $\vdash_{\mathcal{L}} p_r g(pp).g(p \equiv_{\mathcal{L}} q_r q^{\sim} p) \equiv_{\mathcal{L}} q_r q(gp)^{\sim} \equiv_{\mathcal{L}} \diamond [g p] (p \equiv_{\mathcal{L}} q_r q^{\sim})^{\sim}$ 9, $p/p \equiv_{\mathcal{L}} q_r q^{\sim}$
11. $\vdash_{\mathcal{L}} p_r \diamond [g p] (p \equiv_{\mathcal{L}} q_r q^{\sim})^{\sim}$ 4, 10, dét.
12. $\vdash_{\mathcal{L}} p_r \diamond [g p] (\sim(p))^{\sim}$ 8, 11, dét.
13. $\vdash_{\mathcal{L}} p_r g(pp).g(\sim(p)p) \equiv_{\mathcal{L}} q_r g(qp)^{\sim} \equiv_{\mathcal{L}} \diamond [g p] (\sim(p))^{\sim}$ 9, $p/\sim(p)$
14. $\vdash_{\mathcal{L}} p_r g(pp).g(\sim(p)p) \equiv_{\mathcal{L}} g(qp)^{\sim}$ 12, 13, dét.

Il s'agit de la thèse qui exprime le principe de bivalence pour les foncteurs à deux arguments propositionnels.

La démonstration suivante montre le mécanisme d'une substitution très particulière. Partant d'une thèse acceptée :

$$A: \vdash_{\mathcal{L}} f_1 \equiv_{\mathcal{L}} f(1) \equiv_{\mathcal{L}} f(1)^{\sim}$$

nous voudrions obtenir $\vdash_{\mathcal{L}} p(01) \equiv_{\mathcal{L}} q(01)$. La tentation serait de substituer le symbole incomplet $p(0 \rightarrow)$ à f . Or ceci n'est pas conforme aux directives du système. En effet, il n'est pas possible de substituer à un terme variable qu'un terme de même catégorie sémantique; le terme f est de la catégorie S/S, alors que $p(0 \rightarrow)$ n'appartient à aucune catégorie sémantique, c'est une expression incomplète. Le détour par la

définition d'une fonction paramétrée est nécessaire.

B : $\vdash p \supset q \supset (qp) \equiv \uparrow \{q\}(p)$ définition

$\uparrow \{q\}$ est un foncteur formateur de propositions opérant sur un parenthème à un argument propositionnel.

Catégorie sémantique: S/S

Le foncteur $\uparrow \{q\}$ est donc de la même catégorie sémantique que f ; il peut donc être considéré comme un candidat substituable à f .

C : $\vdash \uparrow \{0\}(1) \equiv \uparrow \{0\}(1)$ A, $f / \uparrow \{0\}$

D : $p(0) \equiv \uparrow \{0\}(1)$ B, $p/1, q/0$

E : $\vdash p(0) = p(0)$ C, D, Ax.1, Ax.2

La transformation présentée est très artificielle. En effet, la thèse E peut s'obtenir de manière quasi triviale sans passer par ce détour. Il s'agissait avant tout pour nous de mettre en évidence un mécanisme démonstratif propre aux systèmes de Leśniewski. Il est cependant des transformations qui doivent faire nécessairement appel à ce "détour substitutionnel". Sobocinski le montre en partant de la thèse Z10 pour obtenir la thèse Z11.

Z10 $\vdash f \supset f(f(\vdash q \supset q)) \equiv \vdash q \supset f(q)$

Z11 $\vdash p \supset p \equiv p \supset u \supset u \equiv \vdash q \supset p \equiv q$

Cette transformation est rendue possible grâce à l'introduction de la définition suivante:

Z12 $\vdash p \supset q \equiv p \supset \uparrow \{p\}(q)$ (Sobocinski, 1960, p.60)

Ces quelques démonstrations montrent que les directives du système ne conduisent pas à un jeu démonstratif très agréable, ni du reste aisé. L'utilisation des règles de la déduction naturelle serait de nature à faciliter grandement la recherche de l'inscription d'une thèse.

1.8. QUELQUES METAREGLES

Il est communément admis que la méthode de la déduction naturelle remonte à Gentzen. C'est oublier qu'à la fin des années 20, l'École polonaise de logique -et probablement Leśniewski- connaissait des procédures démonstratives parentes de celles établies par Gentzen. Jaskowski a été l'auteur de ces recherches.

Logics with schemata have no axioms, only derivation schemata applicable to propositions. Within this formalism, logic is no longer a theory of propositions, but a theory of demonstration. G. Gentzen constructed a complete logic of this kind, with schemata of sequences, in his work Untersuchungen über das logische Schliessen ("Mathematische Zeitschrift", 1934). Gentzen constructs in various works, one by one, different formalisms of this type, corresponding to the logic of propositions, to the elementary logic of predicates, to the intuitionist logic, to a certain form of the theory of types, to arithmetic, and to a certain part of the theory of transfinite cardinal numbers.

In the same year, Stanislas Jaskowski published his work On the Rules of Suppositions in Formal Logic ("Studia Logica", Warsaw 1934). In this work a similar theory is expounded, but quite independently of Gentzen's.

Jaskowski begins his study by mentioning that his first results were achieved in 1926, when he presented them in one of Łukasiewicz's seminars; the same results formed later the subject of a paper at the "First Polish Mathematical Congress" (Lwow, 1927). This is what he writes about Łukasiewicz's point of view regarding the subject of his study: "In 1926 Professor Łukasiewicz drew attention to the fact that in their demonstrations mathematicians never use methods of the theory of deduction, but usually apply to other methods of reasoning. They often apply to the use of an arbitrary supposition. Mr. Łukasiewicz raises the problems of turning these methods into the form of structural rules and then analyse their relations to the theory of deduction". (Dimitriu, 1977, pp. 211-12).

Sobociński (1961a, 1961b) a développé dans le cadre d'une protothétique un peu plus puissante que S1 six métarègles de procédures qui s'apparentent à la déduction naturelle. Nous pourrions également les utiliser dans S1. En effet, le système de la protothétique dans

lequel Sobocinski les démontre diffère de S1 par l'existence d'une directive d'extensionnalité pour toutes les catégories sémantiques différentes des propositions, mais cette règle n'est pas utilisée dans les démonstrations qui nous intéressent. Voici ces métarègles:

S1. If in the field of our system we have a thesis of the following structure:

$$[a, b, c, \dots]: \Phi . \kappa . \Psi$$

(where either the main quantifier does not exist or a, b, c, \dots are the variables which belong to this quantifier and occur as free in the formula " $\Phi . \kappa . \Psi$ "), then we can always add to the system the following thesis:

$$[a, b, c, \dots]: \Psi . \kappa . \Phi \quad (1961a, p.114)$$

SII. If in the field of the system we have two theses of the following structure:

$$[a, b, c, \dots]: \Phi . \kappa . \Psi$$

and

$$[a, b, c, \dots]. \Psi$$

(where a, b, c, \dots are variables which belong to the main quantifiers of these theses and occur either in " Φ " or in " Ψ " or in both), then we can always add to the system the following thesis:

$$[a, b, c, \dots]. \Phi \quad (1961a, p.114)$$

SIII. If two formulas α and β belong to the semantical category of propositions and if in the field of our system we have two theses of the following structure:

$$[a, b, c, \dots]: \alpha . \kappa . \beta$$

and

$$[a, b, c, \dots]. \Phi (\alpha)$$

(where " Φ " is a constant or a multi-link proposition-forming functor for one propositional argument, and where the variables a, b, c, \dots may occur as free variables not only in " α ", and " β " but also in " Φ "), then we can always add to the system the following thesis:

$$[a, b, c, \dots]. \Phi (\beta) \quad (1961a, pp. 115-116)$$

SIV. If under the same conditions as in SIII in the field of the system we have two theses of the following structures:

$$[a, b, c, \dots]: \alpha . \beta$$

and

$$[a, b, c, \dots] . \Phi(\beta)$$

then we can always add to the system the following thesis:

$$[a, b, c, \dots] . \Phi(\alpha) \quad (1961a, p. 116)$$

SV. If in the field of the system a formula

$$[a, b, c, \dots, p] . \Phi(p)$$

possesses a sense, i.e. if it is a well formed formula, in which "p" belongs to the semantical category of propositions, and if the variables a, b, c, ... are free in Φ which is a simple or a multi-link functor belonging to the category of proposition-forming functors for one propositional argument, and, finally, if the following two formulas

$$[a, b, c, \dots] . \Phi([a] . u)$$

and

$$[a, b, c, \dots] . \Phi([u] . u . a . [u] . u)$$

are already proved in the system, then we can always add to it as a new thesis the formula

$$[a, b, c, \dots, p] . \Phi(p) \quad (1961a, p. 119)$$

SVI. If two formulas of the following form:

$$[a, b, c, \dots] . \Phi$$

and

$$[r, s, t, \dots] . \Psi$$

(in which the variables a, b, c, ... occur and are free in Φ , and in which the variables r, s, t, ... occur and are free in Ψ), are theses of the system, then we can add to the system a new thesis of the following form:

$$[a, b, c, \dots, r, s, t, \dots]: \Phi . a . \Psi \quad (1961b, p. 132)$$

Dans les chapitres 9-11 de son article de 1929, Leśniewski expose ses raisons et les démarches qui l'ont amené à présenter de nouvelles bases axiomatiques pour ses systèmes. Il dit notamment avoir utilisé un résultat de Tarski pour certaines de ses transformations. Ce résultat est de nature à nous intéresser directement car il présage la règle d'élimination de la conjonction.

Schéma

$$C \quad \ulcorner s_1 \dots s_m \urcorner \ulcorner A.B \urcorner$$

$$\ulcorner s_{i_1} \dots s_{i_n} \urcorner \ulcorner A \urcorner \quad I, \text{ SVII}$$

$$\ulcorner s_{j_1} \dots s_{j_k} \urcorner \ulcorner B \urcorner \quad I, \text{ SVII}$$

Les s_i dans I et les s_j dans II sont équiiformes aux s dans C. Cette distinction d'écriture est rendue nécessaire par le fait qu'il n'est pas certain que les variables libres de A soient toutes équiiformes aux variables libres de B.

Démonstration

Partons d'une forme de la définition de la conjonction proposée par Iarski et conforme à la règle de définition de Lesniewski.

$$D1 \quad \ulcorner r s \urcorner \ulcorner p f \urcorner \ulcorner f(rp) \wedge f(sp) \equiv p \equiv r.s \urcorner \quad \text{définition}$$

$$1. \quad \ulcorner s_1 \dots s_m \urcorner \ulcorner A.B \urcorner \quad \text{thèse supposée}$$

$$2. \quad \ulcorner s'_1 \dots s'_m \urcorner \ulcorner A.B \urcorner \quad \begin{array}{l} I, s_i/s'_i, \text{ de telle manière} \\ \text{qu'aucun } s'_i \text{ ne soit équiiforme} \\ \text{à } p \text{ ni à } f \end{array}$$

$$3. \quad \ulcorner s'_1 \dots s'_m \urcorner \ulcorner p f \urcorner \ulcorner f(Ap) \wedge f(Bp) \equiv p \equiv A.B \urcorner \quad D1, r/A, s/B$$

$$4. \quad \ulcorner s'_1 \dots s'_m \urcorner \ulcorner p f \urcorner \ulcorner f(Ap) \wedge f(Bp) \equiv p \equiv s \urcorner \quad \begin{array}{l} \ulcorner s'_1 \dots s'_m \urcorner \ulcorner A.B \urcorner \\ 3, \text{ dist} \end{array}$$

$$5. \quad \ulcorner s'_1 \dots s'_m \urcorner \ulcorner p f \urcorner \ulcorner f(Ap) \wedge f(Bp) \equiv p \urcorner \quad 4, 2, \text{ dét}$$

$$DII \quad \ulcorner p q \urcorner \ulcorner p \equiv q \wedge q \equiv p \equiv \phi(pq) \urcorner \quad \text{définition}$$

$$6. \quad \ulcorner p q \urcorner \ulcorner p \equiv q \wedge q \equiv p \equiv \ulcorner p q \urcorner \urcorner \quad DII, \text{ dist}$$

$$7. \quad \ulcorner p q \urcorner \ulcorner p \equiv q \wedge q \equiv p \urcorner \quad \text{thèse}$$

$$8. \quad \ulcorner p q \urcorner \ulcorner \phi(pq) \urcorner \quad 6, 7, \text{ dét}$$

$$9. \quad \ulcorner s'_1 \dots s'_m \urcorner \ulcorner \phi(AA) \equiv \phi(BA) \equiv A \urcorner \quad 5, p/A, f/\phi$$

10. $\mathcal{L} s'_1 \dots s'_m \downarrow \phi(AA) \overline{}$ 8, p/A, q/A
11. $\mathcal{L} s'_1 \dots s'_m \downarrow \phi(AA) \overline{} \equiv \mathcal{L} s'_1 \dots s'_m \downarrow \phi(BA) \equiv A \overline{}$ 9, dist
12. $\mathcal{L} s'_1 \dots s'_m \downarrow \phi(BA) \equiv A \overline{}$ 11, 10, dét
13. $\mathcal{L} s'_1 \dots s'_m \downarrow \phi(BA) \overline{} \equiv \mathcal{L} s'_1 \dots s'_n \downarrow A \overline{}$ 12, dist

Le quantificateur du deuxième terme de l'expression ne contient que des lieurs équiiformes aux variables libres de A (directive de distribution)

14. $\mathcal{L} s'_1 \dots s'_m \downarrow \phi(BA) \overline{}$ 8, p/B, q/A
15. $\mathcal{L} s'_1 \dots s'_n \downarrow A \overline{}$ 13, B, dét
16. $\mathcal{L} s'_1 \dots s'_n \downarrow A \overline{}$ 15, s'_i/s_i
17. $\mathcal{L} s'_1 \dots s'_m \downarrow \phi(AB) \equiv \phi(BB) \equiv B \equiv B \overline{} \equiv \phi(AB) \equiv \phi(BB) \equiv B \overline{}$ Ax. 2, p/ $\phi(AB)$, q/ $\phi(BB)$, r/B
18. $\mathcal{L} s'_1 \dots s'_m \downarrow \phi(AB) \equiv \phi(BB) \equiv B \overline{} \equiv \mathcal{L} s'_1 \dots s'_m \downarrow \phi(AB) \equiv \phi(BB) \equiv B \overline{}$ 17, dist
19. $\mathcal{L} s'_1 \dots s'_m \downarrow \phi(AB) \equiv \phi(BB) \equiv B \overline{}$ 5, p/B, f/ ϕ
20. $\mathcal{L} s'_1 \dots s'_m \downarrow \phi(AB) \equiv \phi(BB) \equiv B \overline{}$ 18, 19, dét
21. $\mathcal{L} s'_1 \dots s'_m \downarrow \phi(AB) \equiv \phi(BB) \equiv \mathcal{L} s'_j \dots s'_k \downarrow B \overline{}$ 20, dist
22. $\mathcal{L} s'_1 \dots s'_m \downarrow \phi(AB) \overline{}$ 8, p/A, q/B
23. $\mathcal{L} s'_j \dots s'_k \downarrow \phi(BB) \overline{}$ 8, p/B, q/B
24. $\mathcal{L} s'_1 \dots s'_m \downarrow \phi(AB) \equiv \phi(BB) \overline{}$ 22, 23, SVI
25. $\mathcal{L} s'_j \dots s'_k \downarrow B \overline{}$ 21, 24, dét
26. $\mathcal{L} s'_j \dots s'_k \downarrow B \overline{}$ 25, s'_j/s_j

**SVIII : METAREGLE D'INTRODUCTION DE LA CONJONCTION
SOUS LE QUANTIFICATEUR**

Si A et B sont deux thèses du système, alors il est possible d'introduire une nouvelle thèse dont l'essence est la conjonction de l'essence de A et de l'essence de B.

Schéma

$$\begin{array}{l}
 1 \quad \ulcorner s_{i_1} \dots s_{i_n} \urcorner^{\ulcorner P \urcorner} \\
 2 \quad \ulcorner s_{j_1} \dots s_{j_k} \urcorner^{\ulcorner Q \urcorner} \\
 \hline
 \ulcorner s_1 \dots s_m \urcorner^{\ulcorner P.Q \urcorner} \qquad 1, 2, \text{ SVIII}
 \end{array}$$

Démonstration

$$\begin{array}{l}
 1. \quad \ulcorner s_{i_1} \dots s_{i_n} \urcorner^{\ulcorner P \urcorner} \qquad \text{thèse supposée} \\
 2. \quad \ulcorner s_{j_1} \dots s_{j_k} \urcorner^{\ulcorner Q \urcorner} \qquad \text{thèse supposée} \\
 3. \quad \ulcorner p, q \urcorner \ulcorner f \urcorner^{\ulcorner p \neq f(p) \neq f(q) \urcorner} \approx p, q \qquad \text{définition} \\
 4. \quad \ulcorner s_1 \dots s_m \urcorner^{\ulcorner f \urcorner^{\ulcorner p \neq f(p) \neq f(q) \urcorner} \approx P.Q \urcorner} \qquad 3, p/P, q/Q \\
 5. \quad \ulcorner s_1 \dots s_m \urcorner^{\ulcorner p \neq q \urcorner \ulcorner f \urcorner^{\ulcorner f(p) \neq f(q) \urcorner} \urcorner} \qquad \text{thèse extensionnalité} \\
 6. \quad \ulcorner s_1 \dots s_m \urcorner^{\ulcorner P \neq Q \urcorner} \qquad 1, 2, \text{ SVI} \\
 7. \quad \ulcorner s_1 \dots s_m \urcorner^{\ulcorner P \neq Q \urcorner} \ulcorner s_1 \dots s_m \urcorner^{\ulcorner f(P) \neq f(Q) \urcorner} \qquad 5, \text{ dist} \\
 8. \quad \ulcorner s_1 \dots s_m \urcorner^{\ulcorner f(P) \neq f(Q) \urcorner} \qquad 7, 6, \text{ dêt} \\
 9. \quad \ulcorner s_1 \dots s_m \urcorner^{\ulcorner p \neq f(p) \neq f(q) \urcorner} \qquad 1, 8, \text{ SVI} \\
 10. \quad \ulcorner s_1 \dots s_m \urcorner^{\ulcorner p \neq f(p) \neq f(q) \urcorner} \approx \ulcorner s_1 \dots s_m \urcorner^{\ulcorner p, q \urcorner} \qquad 4, \text{ dist}
 \end{array}$$

11. $\vdash s_1 \dots s_m \vdash P \supset Q$

10, 9, dét

Remarques

1. Nous avons utilisé une nouvelle définition de la conjonction sans prendre la précaution de choisir un nouveau symbole de foncteur constant (ligne 3). Cette liberté est justifiée par le fait qu'il est possible de démontrer l'équivalence de ces deux définitions de la conjonction.
2. Afin de ne pas allonger cette démonstration, nous nous sommes abstenus de modifier les variables des deux premières thèses (lignes 1 et 2). Il est en fait nécessaire de le faire afin d'éliminer la situation possible de voir un des s_i ou un des s_j équiforme à f (lignes 4, 5, 7-10).

SIX: METAREGLE D'ELIMINATION DE LA CONDITIONNELLE

Si A et B sont deux thèses du système possédant la relation formelle suivante:

A : $\vdash s_1 \dots s_m \vdash P \supset Q$
et

où représente le foncteur de conditionnelle

B : $\vdash s_{i_1} \dots s_{i_n} \vdash P$

les s_i sont équiformes aux variables s libres de P dans A

alors il est possible d'introduire la thèse C comme modèle de thèse

C : $\vdash s_{j_1} \dots s_{j_k} \vdash Q$

les s_j sont équiformes aux variables s libres de Q dans A.

Démonstration

1. $\vdash s_1 \dots s_m \vdash P \supset Q$

thèse supposée

2. $\vdash s_{i_1} \dots s_{i_n} \vdash P$

thèse supposée

3. $\vdash p \supset q \vdash p \supset p, q \supset \exists p \supset q$

définition

4. $\vdash s_1 \dots s_m \vdash p \supset p, q \supset \exists p \supset q$

3, p/P, q/Q

5. $\mathcal{L} s_1 \dots s_m \ulcorner P \equiv P.Q \urcorner \equiv \mathcal{L} s_1 \dots s_m \ulcorner P \supset Q \urcorner$ 4, dist
6. $\mathcal{L} s_1 \dots s_m \ulcorner P \supset Q \urcorner \equiv \mathcal{L} s_1 \dots s_m \ulcorner P \equiv P.Q \urcorner$ 5, SI
7. $\mathcal{L} s_1 \dots s_m \ulcorner P \equiv P.Q \urcorner$ 6, I, dét
8. $\mathcal{L} s_{i_1} \dots s_{i_n} \ulcorner P \urcorner \equiv \mathcal{L} s_1 \dots s_m \ulcorner P.Q \urcorner$ 7, dist
9. $\mathcal{L} s_1 \dots s_m \ulcorner P.Q \urcorner$ 8, 2, dét
10. $\mathcal{L} s_{j_1} \dots s_{j_k} \ulcorner Q \urcorner$ 9, SVII

SX : METAREGLE DE DISTRIBUTION DU QUANTIFICATEUR ASSOCIE A LA CONJONCTION

Si A, une thèse du système, est une généralisation et que son essence est une conjonction de deux expressions propositionnelles, alors il est possible d'introduire une nouvelle thèse en distribuant un ou plusieurs lieux du quantificateur de A dans le quantificateur associé à la première conjonction, et dans celui associé à la deuxième conjonction.

Il s'agit d'une règle semblable à la directive de la distribution des quantificateurs associée à la biconditionnelle.

Démonstration

Nous démontrons une distribution "partielle" quelconque.

1. $\mathcal{L} s_1 \dots s_m \ulcorner P.Q \urcorner$ thèse supposée
2. $\mathcal{L} p q \ulcorner \mathcal{L} f \ulcorner P \equiv f(p) \equiv f(q) \urcorner \equiv p.q \urcorner$ définition
3. $\mathcal{L} s_{i_1} \dots s_{i_n} \ulcorner P \urcorner$ 1, SVII
4. $\mathcal{L} s_{j_1} \dots s_{j_k} \ulcorner Q \urcorner$ 1, SVII
5. $\mathcal{L} s_1 \dots s_m \ulcorner P \equiv Q \urcorner$ 3, 4, SVI
6. $\mathcal{L} s_h \dots s_r \ulcorner \mathcal{L} s_{i_a} \dots s_{i_b} \ulcorner P \urcorner \equiv \mathcal{L} s_{j_c} \dots s_{j_d} \ulcorner Q \urcorner \urcorner$ 5, dist (*)

7. $\perp p q, \perp p \equiv \perp f, \perp f(p) \equiv f(q)$ thèse d'ext.
8. $\perp s_h \dots s_r, \perp s_i \dots s_j, \perp p \equiv \perp s_j \dots s_d$
 $\perp Q \equiv \perp f, \perp f(\perp s_i \dots s_j, \perp p) \equiv$ 7, p/P, q/Q
 $f(\perp s_j \dots s_d, \perp Q)$
9. $\perp s_h \dots s_r, \perp s_i \dots s_j, \perp p \equiv \perp s_j \dots s_d$
 $\perp Q \equiv \perp s_h \dots s_r, \perp f(\perp s_i \dots s_j, \perp p) \equiv$ 8, dist (\equiv)
 $f(\perp s_j \dots s_d, \perp Q)$
10. $\perp s_h \dots s_r, \perp f(\perp s_i \dots s_j, \perp p) \equiv$ 9, 6, dét
 $f(\perp s_j \dots s_d, \perp Q)$
11. $\perp s_h \dots s_r, \perp p \equiv \perp f(\perp s_i \dots s_j, \perp p) \equiv$ 3, 10, SVI
 $f(\perp s_j \dots s_d, \perp Q)$
12. $\perp s_h \dots s_r, \perp s_i \dots s_j, \perp p \equiv$ 11, dist (\equiv)
 $f(\perp s_i \dots s_j, \perp p) \equiv f(\perp s_j \dots s_d, \perp Q)$
13. $\perp s_h \dots s_r, \perp f(\perp s_i \dots s_j, \perp p) \equiv f(\perp s_i \dots s_j, \perp p)$
 $\perp p \equiv f(\perp s_j \dots s_d, \perp Q) \equiv \perp s_i \dots s_j, \perp p$ 2, p/ $\perp s_i \dots s_j, \perp p$,
 $\perp s_j \dots s_d, \perp Q$ q/ $\perp s_j \dots s_d, \perp Q$
14. $\perp s_h \dots s_r, \perp s_i \dots s_j, \perp p \equiv f(\perp s_i \dots s_j, \perp p)$
 $\equiv f(\perp s_j \dots s_d, \perp Q) \equiv \perp s_h \dots s_r, \perp s_i \dots s_j$ 13, dist (\equiv)
 $\perp p, \perp s_j \dots s_d, \perp Q$
15. $\perp s_h \dots s_r, \perp s_i \dots s_j, \perp p, \perp s_j \dots s_d, \perp Q$ 14, 12, det

La remarque faite en rapport avec la métarègle SVIII conserve ici toute sa validité.

Ajoutons encore deux m etar gles qui d ecoulent directement de celles que nous venons d'établir.

SXI: METAREGLE D'INTRODUCTION DE LA CONJONCTION
HORS DU SOUS-QUANTIFICATEUR

Sch ema

$$1. \ulcorner s_1 \dots s_m \urcorner^P$$

$$2. \ulcorner r_1 \dots r_n \urcorner^Q$$

$$\ulcorner s_1 \dots s_m \urcorner^P \cdot \ulcorner r_1 \dots r_n \urcorner^Q \quad 1, 2, \text{ SXI}$$

SXII: METAREGLE DE DISTRIBUTION DES QUANTIFICATEURS
ASSOCIEE A LA CONDITIONNELLE

Sch ema

$$1. \ulcorner s_1 \dots s_m \urcorner^{P \supset Q}$$

$$2. \ulcorner s_1 \dots s_j \urcorner^A \ulcorner s_{j+1} \dots s_k \urcorner^B \ulcorner s_{k+1} \dots s_m \urcorner^{P \supset Q} \supset \ulcorner s_{k+1} \dots s_m \urcorner^{P \supset Q} \quad 1, \text{ dist } (\supset)$$

Une dernière m etar gle retiendra notre attention; il s'agit de celle qui commande l'introduction du foncteur de conditionnelle. La situation sous-jacente   cette m etar gle est particulière. En effet, tout système de la protothétique se présente comme une succession de thèses. Toute thèse nouvelle hérite d'une certaine manière des caractéristiques de celles qui la pr c dent. Introduire la "conditionnelle" c'est postuler une démarche quelque peu autre: partant d'une expression A, et il ne s'agit pas nécessairement d'une thèse, si l'on parvient   déduire B, alors $A \supset B$ est une thèse. Cette inscription A, l'hypothèse, est relative   un état de développement de la protothétique. A est une proposition sans variable libre; elle est bien formée en fonction de ce que

le système contient actuellement. Son inscription dépend donc des foncteurs constants, des constantes, ainsi que de tout ce qu'il est possible d'inscrire en fonction des catégories sémantiques que le système contient actuellement.

Schématisons l'inscription possible A :

$$A : \ulcorner v_1 \dots v_j \urcorner^{\ulcorner P \urcorner}$$

Cette expression peut contenir des variables v_i de catégorie sémantique quelconque, pour autant que cette catégorie soit contenue dans le système. Le statut de A peut être de deux natures

- I) A est une thèse du système
- II) A n'est pas une thèse du système.

Montrons dans ces deux cas que si, partant de A il est possible d'inscrire une expression B en utilisant uniquement les directives du système appliquées aux thèses inscrites actuellement et à A, alors l'expression $A \supset B$ est une thèse du système.

I. A est une thèse du système.

- | | |
|--|---|
| 1. $\ulcorner v_1 \dots v_j \urcorner^{\ulcorner P \urcorner}$ | thèse postulée, A. |
| 2. $\ulcorner w_1 \dots w_j \urcorner^{\ulcorner Q \urcorner}$ | thèse inscrite conformément aux directives des systèmes appliquées aux thèses actuellement inscrites. |
| 3. $\ulcorner v_1 \dots w_j \urcorner^{\ulcorner P \cdot Q \urcorner}$ | 1, 2, SVIII |
| 4. $\ulcorner v_1 \dots w_j \urcorner^{\ulcorner P \cdot \exists P \cdot Q \urcorner}$ | 1, 3, SVI |
| 5. $\ulcorner p q \urcorner^{\ulcorner p \neq p \cdot q : \exists p \cdot p \supset q \urcorner}$ | définition |
| 6. $\ulcorner v_1 \dots w_j \urcorner^{\ulcorner p \neq p \cdot Q : \exists p \cdot p \supset Q \urcorner}$ | 5, p/P, q/Q |
| 7. $\ulcorner v_1 \dots w_j \urcorner^{\ulcorner p \neq p \cdot Q \urcorner} \equiv \ulcorner v_1 \dots w_j \urcorner^{\ulcorner p \supset Q \urcorner}$ | 6, dist (\equiv) |
| 8. $\ulcorner v_1 \dots w_j \urcorner^{\ulcorner p \supset Q \urcorner}$ | 7, 4, dét |
| 9. $\ulcorner v_1 \dots v_j \urcorner^{\ulcorner P \urcorner} \supset \ulcorner w_1 \dots w_j \urcorner^{\ulcorner Q \urcorner}$ | 8, dist (\supset) |

11. A n'est pas une thèse du système.

Dans ce cas, toute expression nouvelle B établie conformément aux règles d'inférence du système appliquées aux thèses actuelles et à A peut, soit être une thèse, - A n'a pas été utilisée-, soit ne pas être une thèse, - A a été utilisée.

11.1 L'expression B est une thèse

1. $\ulcorner w_1 \dots w_j \urcorner^Q$	thèse postulée, B
2. 1	thèse
3. $\ulcorner w_1 \dots w_j \urcorner^Q \equiv 1$	1, 2, SVIII
4. $\ulcorner p \urcorner^Q \supset \ulcorner p \wedge q \urcorner^Q$	définition
5. $1 \equiv 1.1$	4, p/1, q/1
6. $0 \equiv 0.1$	4, p/0, q/1
7. $1 \equiv 1.1$	thèse
8. $0 \equiv 0.1$	thèse
9. $1 \supset 1$	5, 7, dét
10. $0 \supset 1$	6, 8, dét
11. $\ulcorner p \urcorner^Q \supset 1$	9, 10, SV
12. $\ulcorner p \urcorner^Q \supset \ulcorner p \wedge q \urcorner^Q : r \equiv 1. \supset . p \supset r$	thèse
13. $\ulcorner p \urcorner^Q \supset 1. \supset : r \equiv 1. \supset . p \supset r$	12, q/1
14. $\ulcorner p \urcorner^Q \supset 1 \supset \ulcorner p \urcorner^Q \supset r \equiv 1. \supset . p \supset r$	13, dist (\supset) SXII
15. $\ulcorner p \urcorner^Q \supset r \equiv 1. \supset . p \supset r$	14, 11, dét
16. $\ulcorner w_1 \dots w_j \urcorner^Q \equiv 1. \supset . \ulcorner v_1 \dots v_i \urcorner^P$ $\supset \ulcorner w_1 \dots w_j \urcorner^Q$	15, p/ $\ulcorner v_1 \dots v_i \urcorner^P$ r/ $\ulcorner w_1 \dots w_j \urcorner^Q$
17. $\ulcorner v_1 \dots v_i \urcorner^P \supset \ulcorner w_1 \dots w_j \urcorner^Q$	16, 3, SIX

II.2 L'expression B n'est pas une thèse

Proposons le résultat suivant: Si une expression bien formée C sans variable libre n'est pas une thèse, alors $C \equiv 0$ est une thèse. Ce résultat découle du principe de bivalence attaché aux propositions.

1. $\ulcorner v_1 \dots v_i \urcorner^{\ulcorner P \urcorner} \equiv 0$ thèse, $\ulcorner v_1 \dots v_i \urcorner^{\ulcorner P \urcorner}$ est A, et A n'est pas une thèse
2. $\ulcorner p \supset q \urcorner^{\ulcorner p \equiv p, q \equiv p \supset q \urcorner}$ définition
3. $0 \equiv 0, 0 : \equiv 0 \supset 0$ 2, p/o, q/o
4. $0 \equiv 0, 1 : \equiv 0 \supset 1$ 2, p/o, q/1
5. $0 \equiv 0, 0$ thèse
6. $0 \equiv 0, 1$ thèse
7. $0 \supset 0$ 3, 5, dét
8. $0 \supset 1$ 4, 6, dét
9. $\ulcorner q \urcorner^{\ulcorner 0 \supset q \urcorner}$ 7, 8, SV
10. $\ulcorner p \supset q \urcorner^{\ulcorner p \supset q, \supset : r \equiv p, \supset, r \supset q \urcorner}$ thèse
11. $\ulcorner q \urcorner^{\ulcorner 0 \supset q, \supset : r \equiv 0, \supset, r \supset q \urcorner}$ 10, p/o
12. $\ulcorner 0 \supset q \urcorner^{\ulcorner \ulcorner q \urcorner^{\ulcorner r \equiv 0, \supset, r \supset q \urcorner}$ 11, dist (\supset), SXI
13. $\ulcorner q \urcorner^{\ulcorner r \equiv 0, \supset, r \supset q \urcorner}$ 12, 9, dét, SIX
14. $\ulcorner w_1 \dots w_j \urcorner^{\ulcorner \ulcorner v_1 \dots v_i \urcorner^{\ulcorner P \equiv 0, \supset, \ulcorner w_1 \dots w_j \urcorner^{\ulcorner P \supset Q \urcorner}$ 13, r/ $\ulcorner v_1 \dots v_i \urcorner^{\ulcorner P \urcorner}$ q/Q
15. $\ulcorner v_1 \dots v_i \urcorner^{\ulcorner P \equiv 0, \supset, \ulcorner w_1 \dots w_j \urcorner^{\ulcorner P \supset Q \urcorner}$ 14, dist (\supset), SXI
16. $\ulcorner w_1 \dots w_j \urcorner^{\ulcorner \ulcorner v_1 \dots v_i \urcorner^{\ulcorner P \supset Q \urcorner}$ 15, 1, dét, SIX
17. $\ulcorner v_1 \dots v_i \urcorner^{\ulcorner P \supset \ulcorner w_1 \dots w_j \urcorner^{\ulcorner Q \urcorner}$ 16, dist (\supset), SXI

Nous pouvons maintenant énoncer cette dernière métarègle.

SXIII : METAREGLE D'INTRODUCTION DE LA CONDITIONNELLE

Soit A, une expression bien formée en fonction de ce que contient actuellement le système et sans variable libre. Si, partant de A, il est possible d'inscrire une expression B en utilisant uniquement les directives du système appliquées aux thèses inscrites actuellement et à A, alors l'expression $A \supset B$ est une thèse du système.

1.9. REMARQUES

Le système S1 est l'expression d'un calcul des propositions 'élargi' d'une rare richesse. Il diffère profondément des systèmes traditionnels. La dynamique constructive qui participe à son élaboration, les définitions qui s'inscrivent en tant que thèses et la possibilité de faire apparaître dans le système des foncteurs constants de catégorie sémantique quelconque, constituent ses caractéristiques essentielles.

Leśniewski expose un système S1 qui diffère quelque peu de celui qui a fait l'objet de notre présentation. La principale modification réside dans une formulation différente des règles d'inférence. Au lieu de quatre directives, il en utilise six:

- α) la directive de détachement;
- β) la directive de substitution;
- γ) la directive de distribution des quantificateurs;
- δ) la première directive de définition. Elle concerne l'inscription des constantes; ces dernières apparaissent dans des thèses qui sont des essences sans généralisation. (L'essence est donc une fonction équivalente);
- ε) la deuxième directive de définition. Elle concerne l'inscription des foncteurs constants; ces derniers apparaissent dans des thèses

qui sont des généralisations et dont l'essence est une fonction équivalentielle;

} la directive relative à la quantification.

(Leśniewski, 1929, pp. 33-35).

Ces deux systèmes ont la même puissance. L'un et l'autre système permettent l'inscription des 'mêmes' thèses. Des réflexions ultérieures ont amené Leśniewski à formuler une unique directive de définition, ainsi qu'à supprimer la directive }).

Bien que d'une richesse incomparable, S1 n'est cependant pas suffisamment puissant pour y démontrer des thèses qui paraissent intuitivement acceptables; celles par exemple qui expriment le principe d'extensionnalité pour les variables de catégorie sémantique différente de celle des propositions.

Ich wusste nicht, im System S1 eine Reihe von Thesen zu beweisen, die in diesem Systeme sinnvoll sind und die für mich dieselbe Geltung haben, wie jede bekannte These des gewöhnlichen "Aussagenkalküls" überhaupt. Ich konnte mir im besonderen in dieser Beziehung mit den zahlreichen Thesen keinen Rat schaffen, welche Variablen enthalten, die nicht Satzvariablen, sondern variable Funktionszeichen sind. Es war mir gänzlich unbekannt, ob im System S1 z.B. die These ableitbar ist, die man in einer im Stile der Symbolik der Herren Whitehead und Russell gehaltenen Symbolik in die Form des Satzes

$[f, g] \vdash [p, q] : f(p, q) \cdot \bar{=} \cdot g(p, q) \vdash \bar{=} : [\Psi] : \Psi \{f\} \cdot \bar{=} \cdot \Psi \{g\}$
fassen könnte. (Leśniewski, 1929, p. 36).

Je ne savais pas comment prouver, dans le système S1, une liste de thèses qui sont sensées dans ce système et qui, quant à moi, détiennent la même validité que celles du calcul ordinaire des propositions. En particulier, dans cette perspective, je ne trouvais aucun moyen pour traiter des nombreuses thèses dont les variables ne sont pas des variables propositionnelles, mais des variables de signes de fonctions. J'ignorais complètement si, par exemple, la thèse qui peut être formulée dans le style symbolique de Whitehead et Russell dans la forme de la proposition

$[f, g] \vdash [p, q] : f(p, q) \cdot \bar{=} \cdot g(p, q) \vdash \bar{=} : [\Psi] : \Psi \{f\} \cdot \bar{=} \cdot \Psi \{g\}$
est prouvable dans S1.

Leśniewski poursuit donc ses recherches. Elles aboutissent à l'exposition de différents systèmes, S2 notamment, qui réalisent le vœu de Leśniewski. Il s'agit des protothétiques complètes dans le sens qu'elles possèdent cette 'puissance' que le Maître polonais voulait leur donner. C'est de ces systèmes dont il sera question dans la dernière partie de ce chapitre.

2. LES PROTOTHETIQUES COMPLETES

2.1. PREAMBULE

Dans cette partie, nous exposons quatre systèmes logiques de Leśniewski, S2 - S5. Chacun de ces systèmes possède la même puissance logique: celle d'être une protothétique complète. Ils se distinguent les uns des autres par des règles ou des axiomes différents. Les systèmes S2 et S3 sont une expansion immédiate du système S1; ils possèdent les mêmes axiomes, mais ils contiennent en plus une directive supplémentaire. Cette nouvelle directive, formulée de manière différente dans S2 et dans S3, permet d'inscrire des thèses qui expriment le caractère extensionnel des catégories sémantiques différentes de celles des propositions. Le système S4 est la réalisation d'une protothétique complète fondée sur le signe primitif de la conditionnelle; ses directives et ses axiomes possèdent un lien étroit de parenté avec ceux du système S3. Enfin, le système S5 s'impose comme le système de référence. Il est conçu sur la base d'un seul axiome. Ses directives ont été quelque peu modifiées par rapport à S3. Les modifications apportées répondent avant tout à une volonté de simplification, de "purification" de la formulation des directives précédentes.

2.2. LE SYSTEME S2

Leśniewski veut obtenir un système qui, tout en contenant les mêmes axiomes que S1, possède une directive de plus; il en explique la raison:

Da ich ein System des 'Aussagenkalküls' aufbauen wollte, welches, das System *S1* enthaltend, zugleich die Eigenschaft besitzen sollte, dass ich keine in diesem System sinnvolle These zu konstruieren weiss, die ich nicht in ihm zu beweisen oder zu widerlegen wüsste, habe ich im J. 1922 das System *S1* mittels einer neuen Direktive η vervollständigt, ... Die Direktive η gestattete mir, zu dem System eine neue mit einem universalen Quantifikator, welcher variable Funktionszeichen beliebiger 'semantischer Kategorien' enthält, beginnende These *T* hinzuzufügen, wenn zu dem System bereits die Thesen gehören, die man aus der These *T* erhalten könnte, wenn man in ihr für die genannten Variablen gewisse Konstante Funktionszeichen einsetzte, deren Definitionsmethode für alle 'semantischen Kategorien' vollständig genau im voraus bestimmt ist. Das aus dem System *S1* -durch die Vervollständigung dieses Systems mittels der Direktive η -gebildete System werde ich hier der Kürze halber das System *S2* nennen. (Lesniewski, 1929, p. 36).

En 1922 j'ai renforcé *S1* au moyen d'une nouvelle directive η car je voulais construire un système du calcul des propositions qui, tout en contenant le système *S1*, devait également posséder la propriété de construire des thèses sensées que j'ignorais comment prouver ou réfuter dans le système *S1*... La directive η m'a permis d'introduire dans le système de nouvelles thèses *T*; ces thèses commencent par un quantificateur universel contenant des variables de foncteurs d'une quelconque catégorie sémantique pour autant que le système contienne déjà toutes les thèses qui pourraient être obtenues de *T* en substituant à ces variables de foncteurs certaines constantes. La méthode de définition pour ces derniers ayant été complètement déterminée par avance pour toutes les catégories sémantiques. J'appellerai ce système qui, pour abrégé, est conçu à partir de *S1* complété par la directive η , le système *S2*.

La règle η s'inspire d'une règle que Łukasiewicz considérait comme manifeste. Il s'agit de la règle (d).

(d) I assert any expression containing variables with universal quantifiers which yields only asserted expressions on the replacement of the variables by the values 0 and 1. (Łukasiewicz, 1970, p. 99).

La règle η diffère de la règle (d) par le fait qu'elle concerne les variables de catégories sémantiques que contient le système et qui ne

sont pas de la catégorie des propositions. L'inscription d'une thèse T, par cette règle, nécessite donc l'inscription préalable de toutes les thèses que l'on pourrait obtenir de T en substituant aux foncteurs variables certains foncteurs constants. Une telle manière de procéder nécessite de fixer les différentes "classes" d'équivalence de foncteurs constants pour chaque catégorie sémantique différente de celle des propositions:

4 pour la catégorie S/S; 16 pour la catégorie S/SS; 256 pour la catégorie S/SSS; 8 pour la catégorie S/(S/S); ...

Pour chaque catégorie sémantique différente de celle des propositions, il est donc nécessaire d'inscrire la loi du nombre des fonctions. La tâche est d'autant plus difficile que le système n'offre pas uniquement la possibilité d'introduire des foncteurs constants de catégorie sémantique 'sage', à savoir celle du type S/S...S, mais également des formes complexes. Considérons la loi du nombre des fonctions de catégorie S/S, (Tarski, 1972, pp. 10, 11)

$$\ulcorner f \urcorner \ulcorner p \urcorner \ulcorner f(p) \urcorner \equiv \text{tr}(p) \ulcorner f(p) \urcorner \equiv \text{as}(p) \ulcorner f(p) \urcorner \equiv \ulcorner (p) \urcorner \ulcorner f(p) \urcorner \equiv \text{fl}(p) \ulcorner f(p) \urcorner$$

Cette expression, déjà bien complexe, laisse présager de la difficulté de formuler une règle générale qui englobe tous les cas possibles

To formulate the directive η precisely I needed a complicated apparatus of numerous terminological explanations. This circumstance induced me to look for some other directive that would accomplish the same theoretical effect as the directive η , and at the same time could be precisely formulated in a simpler way, (Lesniewski, 1967, p. 122).

Dans S2, deux familles de thèses particulières peuvent entre autres s'inscrire grâce à la règle η . Il y a (a) celles qui représentent le principe d'extensionnalité pour les foncteurs variables apparaissant dans le système:

$$\begin{aligned} \ulcorner f \urcorner \ulcorner p \urcorner \ulcorner q \urcorner \ulcorner f(pq) \urcorner &\equiv \ulcorner g \urcorner \ulcorner pq \urcorner \ulcorner f \urcorner \ulcorner g \urcorner \\ \ulcorner f \urcorner \ulcorner g \urcorner \ulcorner f \urcorner \ulcorner g \urcorner &\equiv \ulcorner f \urcorner \ulcorner f \urcorner \ulcorner g \urcorner \ulcorner f \urcorner \ulcorner g \urcorner \\ \ulcorner p \urcorner \ulcorner q \urcorner \ulcorner r \urcorner \ulcorner f(pq)(rs) \urcorner &\equiv \ulcorner p \urcorner \ulcorner q \urcorner \ulcorner r \urcorner \ulcorner f \urcorner \ulcorner p \urcorner \ulcorner q \urcorner \ulcorner r \urcorner \end{aligned}$$

et (b) celles qui établissent que chaque fonction -dont un argument au moins n'est pas une proposition- est satisfaite pour toutes les valeurs possibles de ses arguments pour autant que la liste de ces 'valeurs' ait été inscrite: $\ulcorner \phi \urcorner, \ulcorner \neg \phi \urcorner, \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner, \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner, \ulcorner \phi \supset \psi \urcorner, \ulcorner \forall x \phi \urcorner, \ulcorner \exists x \phi \urcorner$

Leśniewski désire remplacer la directive de S2 par une directive qui lui permettrait d'inscrire directement une thèse d'extensionnalité pour toute catégorie sémantique différente de celle des propositions et qui apparaît dans le système. Son problème est le suivant: est-il possible dans un système qui a la puissance de S1 renforcé par les thèses de la famille (a), d'obtenir les thèses de la famille (b), et ceci sans utiliser la règle η . La réponse vient encore une fois de Tarski.

This question was answered in the affirmative by Tarski, who in 1922 sketched a general method of proving in S1 individual propositions of kind (b), given corresponding propositions of kind (a).

... I decided to replace the directive by a new 'extensionality directive' η^ . The system of protothetic based on the axioms A1-A3 and the directives $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ and η^* I call the system S3, (Leśniewski, 1967, p. 124).*

Avant de présenter ce nouveau système, insistons encore sur le fait que le système S2 présente toutes les qualités requises pour être une protothétique complète.

In sehr freien Worten könnte ich sagen, dass das System ein absolut "finitistisches" System ist, denn es gestattet uns für die Variablen jeder "semantischen Kategorie", die im System auftritt, eine genau bestimmte endliche Anzahl verschiedener möglicher Werte festzustellen. (Leśniewski, 1929, p. 37).

De manière très libre, je peux dire que le système S2 est système absolument "finitiste", car il nous permet d'établir pour les variables de chaque catégorie sémantique qui apparaissent dans le système, un nombre fini exactement déterminé des différentes valeurs possibles.

2.3. LE SYSTEME S3

La base axiomatique du système S3 contient trois axiomes: A1 - A3. Ils sont équi-formes à ceux des systèmes S2 ou S1. Pour cette raison nous ne les inscrirons pas à nouveau. S3 possède cinq règles d'inférence:

- α) directive de détachement (dét.)
- β) directive de substitution (sub.)
- γ) directive de distribution des quantificateurs (dist.)
- δ, ε) directive de définition (déf.)
- η*) directive d'extensionnalité (ext.)

Les quatre premières directives ne diffèrent en aucune manière de celles présentées dans S1. Nous nous abstenons donc de les répéter. A la différence de Leśniewski, nous avons combiné en une seule directive, les deux directives de définition. La cinquième directive est nouvelle. Son exposé consistera dans l'essentiel de notre propos.

Leśniewski propose six directives de transformation - α , β , γ , δ , ε , η* - pour le système S3. Nous n'en avons proposé que cinq: les règles équivalentes à α , β , γ , δ et ε réunies, et η*.

Le système S3 est d'une certaine manière une expansion des systèmes S1 et S2. Le système S2 contient sept règles de transformation: α , β , γ , δ , ε , η , } et S1 six: α , β , γ , δ , ε , } . La règle } , relative à la quantification, n'apparaît plus dans S3. Cette 'suppression' possède une histoire. Il y a tout d'abord les raisons qui justifient l'existence de cette règle .

When I formulated the directive } of the system S1 I was aiming above all at the simplest method of guaranteeing the demonstrability in the system of propositions of the type:

$[f, p] \vdash p \supset . [q] . f(q) : \equiv p \supset . f(q),$

$[f, p] \vdash p \supset . [q, r] . f(q, r) : \equiv [q, r] : p \supset . f(q, r), \dots, \text{etc.}$

the signs here appearing in the expressions f(q), f(q,r), ... etc. being of any member or any semantic category. These

propositions assured me of the possibility of carrying out all the familiar operations with universal quantifiers. (Leśniewski, 1967, pp. 122-123).

Les thèses citées font explicitement référence au signe de la conditionnelle. La conditionnelle n'est pas un terme primitif de S2 ou de S1. Leśniewski ne veut donc pas spécifier, dans les directives du système, des conditions particulières relatives à un foncteur constant qui doit être préalablement défini. Il s'agit alors de formuler une directive qui, sans mentionner explicitement les conditions relatives à la conditionnelle, traite entre autres choses de ce terme. C'est dans ce sens que la directive } opère.

[Ich habe] die Direktive } auf eine solche Weise formuliert, dass diese Direktive, während sie verschiedene Beziehungen zwischen Äquivalenzen und Quantifikatoren betraf, das Implikationszeichen gar nicht berührte. (Leśniewski, 1929, p. 38).

J'ai formulé la directive } de telle manière que cette directive, tout en concernant différentes relations entre les équivalences biconditionnelles et les quantificateurs, ne faisait pas du tout allusion au signe de l'implication conditionnelle .

Des recherches postérieures à l'inscription de cette règle établissent son inutilité. En effet, dans un premier temps, Tarski, puis Leśniewski simplifient la directive } . Plus tard, Tarski trouve une solution définitive en démontrant que l'on peut tout à fait se dispenser de cette règle.

However, the whole question was finally liquidated in 1922 by Tarski, who showed that no special directive at all was necessary, each of the above-mentioned propositions [$\vdash_{S1} p \supset q, \vdash_{S1} f(q) \supset q, \vdash_{S1} p \supset f(q)]$ p. ex. being provable in the system S1 with the help of the directives already in that system. (Leśniewski, 1967, p. 123).

2.3.1. LA DIRECTIVE D'EXTENSIONNALITE

La directive d'extensionnalité permet d'inscrire dans le système des thèses qui portent en elles le caractère extensionnel pour les variables de catégorie sémantique différente de celle des propositions. Cette restriction est due au fait que le principe d'extensionnalité pour les propositions peut s'inscrire dans le système sur la seule base des axiomes A1 - A3 et des règles $(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta), (\epsilon)$. Si cette directive autorise l'inscription de formes globales nouvelles, elle ne peut pas considérer des termes de catégorie sémantique qui n'appartiennent pas encore au système. Elle construit donc avec ce qui a déjà été construit. Le privilège de faire apparaître dans le système de nouvelles catégories sémantiques reste celui de la règle de définition. Soit l'expression suivante:

$$E : \ulcorner f g \urcorner \ulcorner p \urcorner \ulcorner f(p) \equiv g(p) \urcorner = \ulcorner \{f\} = \{g\} \urcorner$$

Cette inscription est une thèse introduite par la règle d'extensionnalité, si et seulement si, les termes qui la composent appartiennent à des catégories sémantiques que le système connaît déjà. Si S3 ne contient que les axiomes A1 - A3, cette expression ne peut pas être une thèse. En effet, les axiomes contiennent des inscriptions des catégories sémantiques S/SS et S et celles-là seulement. Dans cette perspective, l'expression E ne peut être inscrite et plus que cela elle n'a même aucun sens. Envisageons la chose autrement. Proposons deux définitions.

$$A : \ulcorner p \urcorner \ulcorner p \equiv + (p) \urcorner$$

$$B : \ulcorner k \urcorner \ulcorner p \urcorner \ulcorner k(p) \equiv 1 \urcorner = \ulcorner \{k\} \urcorner$$

La première définition inscrit un foncteur constant de la catégorie S/S et la deuxième un foncteur constant de la catégorie S/(S/S). Remarquons en passant que la deuxième définition ne peut être inscrite qu'à la condition que la première l'ait été.

Si l'on considère maintenant un système composé des trois axiomes A1 - A3 ainsi que des thèses-définitions A et B, quatre catégories sé-

$$A : \forall \beta \exists \alpha \forall x \exists y \rightarrow \exists x \forall y \rightarrow \neg \neg$$

7. Le premier terme et le deuxième terme du premier terme de A, (respectivement du deuxième terme de A) sont des fonctions. Elles sont nécessairement de la catégorie sémantique des propositions.

$$A : \forall \beta \exists \alpha \forall x \exists y \rightarrow F1 \equiv F2 \equiv \exists x \forall y \rightarrow F3 \equiv F4 \neg \neg$$

8. Le foncteur de la fonction F1 (respectivement F2) est une variable équiforme au lieu α (respectivement β) du quantificateur général de A, et elle lui est associée.

$$A : \forall \beta \exists \alpha \forall x \exists y \rightarrow \alpha(\text{---}) \equiv \beta(\text{---}) \rightarrow \exists x \forall y \rightarrow F3 \equiv F4 \neg \neg$$

9. Les arguments du (ou des) parenthème(s) de la fonction F1, (respectivement F2), sont des variables qui possèdent des lieux équi-formes dans le quantificateur du premier terme de A, (respectivement le deuxième terme), et ces lieux leur sont associés

et

Les parenthèmes de F1 sont similaires aux parenthèmes correspondants de F2

et

Les arguments des parenthèmes de F1 sont analogues et équi-formes aux arguments des parenthèmes correspondants de F2.

$$A : \forall \beta \exists \alpha \forall v_1 \dots v_i \rightarrow \alpha(v_1 \dots v_i) \equiv \beta(v_1 \dots v_i) \rightarrow \exists x \forall y \rightarrow F3 \equiv F4 \neg \neg$$

10. Le foncteur de la fonction F3 (respectivement le foncteur de la fonction F4) est un foncteur variable formateur de proposition à un argument équiforme à α (respectivement à β), et il possède un lieu équiforme qui lui est associé dans le quantificateur du deuxième terme de A.

et

Le quantificateur du deuxième terme de A ne contient qu'un seul lieu.

$$A : \forall \beta \exists \alpha \forall v_1 \dots v_i \rightarrow \alpha(v_1 \dots v_i) \equiv \beta(v_1 \dots v_i) \rightarrow \exists x \forall y \rightarrow \psi(\alpha) \equiv \psi(\beta) \neg \neg$$

11. Les foncteurs du deuxième terme de A sont d'une catégorie sémantique que le système contient actuellement.

REMARQUES

Il est nécessaire d'insister une fois encore sur le fait que la directive d'extensionnalité ne permet d'inscrire de nouvelles thèses qu'à la condition que les foncteurs variables qui entrent dans le jeu d'une inscription extensionnelle soient de catégorie sémantique connue préalablement du système.

Dans l'énoncé de la directive, la condition 7 impose que les fonctions F1 - F4 soient de la catégorie sémantique des propositions. Notons que cette précision est due à notre volonté d'insister sur ce point. Elle est en fait inutile. En effet, les fonctions F1 - F4 sont les arguments de fonctions équivalentielles. Elles ne peuvent donc appartenir qu'à la catégorie des propositions.

La directive d'extensionnalité ne permet d'inscrire que des thèses qui contiennent le principe extensionnel uniquement pour les catégories sémantiques différentes de celle des propositions. Rappelons que le caractère extensionnel pour les propositions découle de la base axiomatique.

EXEMPLES

1. Considérons f et g deux foncteurs variables de la catégorie S/SS et introduisons la définition suivante:

$$\ulcorner h \urcorner \ulcorner pq \urcorner \ulcorner h(pq) \urcorner \ulcorner h(qp) \urcorner \ulcorner \{h\} \urcorner \quad \text{il s'agit d'une 'bonne' définition.}$$

Cette définition introduit un foncteur constant de la catégorie sémantique S/(S/SS). Il est donc loisible d'envisager un foncteur variable de cette catégorie, soit θ ce foncteur-là. Les conditions nécessaires à l'introduction de la thèse d'extensionnalité pour les foncteurs de la catégorie S/SS sont ainsi satisfaites:

$$\ulcorner fg \urcorner \ulcorner pq \urcorner \ulcorner f(pq) \urcorner \ulcorner g(pq) \urcorner \ulcorner \theta \urcorner \ulcorner \{f\} \urcorner \ulcorner \theta \urcorner \ulcorner \{g\} \urcorner$$

II. Considérons un exemple qui utilise le principe d'extensionnalité en rapport avec une fonction paramétrée.

Introduisons la définition suivante:

$$\begin{aligned} \ulcorner pqr \urcorner \ulcorner p \equiv q \cdot r \equiv s \cdot \cdot \cdot \uparrow \uparrow p \uparrow \uparrow q \uparrow \uparrow r \uparrow \uparrow (s) \urcorner \\ \uparrow \uparrow p \uparrow \uparrow q \uparrow \uparrow r \uparrow \uparrow (s) & : & S \\ \uparrow \uparrow p \uparrow \uparrow q \uparrow \uparrow r \uparrow & : & S/S \\ \uparrow \uparrow p \uparrow \uparrow q \uparrow & : & (S/S)/S \\ \uparrow \uparrow p \uparrow & : & ((S/S)/S)/S \\ \uparrow & : & (((S/S)/S)/S)/S \end{aligned}$$

Nous désirons introduire le principe d'extensionnalité pour la catégorie sémantique à laquelle appartient \uparrow , c'est-à-dire $((((S/S)/S)/S)/S)$. Pour ce faire il faut reconnaître dans le système, la catégorie $S/(((S/S)/S)/S)$.

Elle n'y est pas. Il faut donc l'introduire à travers une thèse-définition. La suivante par exemple:

$$\ulcorner \circ \urcorner \ulcorner pqr \urcorner \ulcorner \circ \uparrow p \uparrow \uparrow q \uparrow \uparrow r \uparrow \uparrow (s) \equiv p \uparrow \uparrow \uparrow \circ \urcorner$$

Le système contient maintenant des constantes de catégorie sémantique qui permettent d'envisager l'inscription d'une thèse d'extensionnalité pour la catégorie $((((S/S)/S)/S)/S)$.

$$\ulcorner \rho \urcorner \ulcorner pqr \urcorner \ulcorner \alpha \uparrow p \uparrow \uparrow q \uparrow \uparrow r \uparrow \uparrow (s) \equiv \uparrow \uparrow p \uparrow \uparrow q \uparrow \uparrow r \uparrow \uparrow (s) \urcorner \equiv \ulcorner \Omega \urcorner \ulcorner \rho \urcorner \ulcorner \alpha \uparrow \uparrow \rho \urcorner$$

Les foncteurs variables α et ρ appartiennent à la catégorie sémantique $((((S/S)/S)/S)/S)$ et le foncteur variable Ω à la catégorie sémantique $S/(((S/S)/S)/S)$.

Une question reste cependant en suspens. Dans le dernier exemple traité, nous avons inscrit le principe d'extensionnalité pour la catégorie sémantique $((((S/S)/S)/S)/S)$. Cette catégorie apparaît dans le système au travers de l'inscription du foncteur constant \uparrow et d'une certaine manière, il s'agit d'une catégorie privilégiée en ce sens qu'elle possède au moins un représentant constant .

Si l'on considère maintenant l'expression $\uparrow \{p \rightarrow q\}$ qui est une fonction variable de la catégorie $(S/S)/S$, une question se pose: Est-il possible d'inscrire une thèse important le principe d'extensionnalité pour cette catégorie? La réponse est affirmative si le système contient la catégorie sémantique $S/((S/S)/S)$. Cela n'est pas le cas, mais il est possible de définir une constante de cette catégorie.

$$\downarrow \epsilon \downarrow \downarrow p q \downarrow \uparrow \{p \rightarrow q\} \equiv \downarrow \downarrow \epsilon \downarrow \uparrow$$

Le principe d'extensionnalité pour la catégorie $(S/S)/S$ s'écrit alors

$$\downarrow \downarrow \downarrow p q \downarrow \uparrow \{p \rightarrow q\} \equiv \downarrow \downarrow \downarrow p \downarrow \uparrow \{p \rightarrow q\} \equiv \downarrow \downarrow \downarrow \Delta \downarrow \uparrow \{p \rightarrow q\} \equiv \downarrow \downarrow \downarrow \Delta \downarrow \uparrow$$

Les foncteurs variables \downarrow et \uparrow appartiennent à la catégorie sémantique $(S/S)/S$ et le foncteur variable Δ à la catégorie $S/((S/S)/S)$.

2.4. LE SYSTEME S4

Lorsque Leśniewski entreprend de formuler les directives des systèmes "classiques" de la protothétique, il a déjà le souci de concevoir une formalisation qui puisse être facilement adaptée à une base axiomatique dont le terme primitif est différent de la biconditionnelle.

Die Definitions- und Schlussdirektiven bemühte ich mich in einer solchen Weise zu formulieren, dass man sie mit Leichtigkeit den verschiedenen Systemen der Protothetik anpassen könnte- in Abhängigkeit von den verschiedenen primitiven Terminen, auf welchen die erwähnten Systeme aufgebaut werden sollten;... (Leśniewski, 1929, p. 14).

J'ai pris soin de formuler les directives de définitions et les directives finales d'une telle manière qu'elles puissent être adaptées avec facilité aux différents systèmes de la protothétique, et ceci, en relation avec les différents termes primitifs à partir desquels les systèmes mentionnés pouvaient être construits.

Le système S4 est d'une certaine manière une réplique, dans l'esprit en tous les cas, du système S3. Les différences résident dans l'inscription d'axiomes qui ne contiennent que la conditionnelle comme terme primitif. Pour inscrire ces axiomes, Leśniewski utilise une base axio-

matique établie par Tarski qu'il complète par un quatrième axiome qui, de manière fonctionnelle, est analogue à l'axiome A3 de S1. En 1921, Tarski proposait trois axiomes qui, sur la base de la conditionnelle comme unique signe primitif, offre la possibilité de dériver la théorie 'ordinaire' de la déduction, (Leśniewski, 1929, pp. 46-47).

$$A1 : \ulcorner p \urcorner \supset \ulcorner q \supset p \urcorner$$

$$A2 : \ulcorner p \supset q \supset : q \supset r \supset . p \supset r \urcorner$$

$$A3 : \ulcorner p \supset q \supset r \supset : p \supset r \supset r \urcorner$$

$$A4 : \ulcorner p \supset q \supset g(p) \supset . g((p \supset q) \supset q) \supset g(q) \urcorner$$

Les directives du système S4 se fondent également sur la seule existence de la conditionnelle.

Tarski et Leśniewski poursuivent leurs recherches. Elles les conduisent à modifier quelque peu les règles d'inférence du système S4 de manière à obtenir un axiome unique qui ne soit pas simplement la conjonction de ses quatre axiomes.

$$A^* : \ulcorner p \supset q \supset f(p) \supset . f(r(p) \supset s) \supset f(rq) \urcorner$$

2.5. LE SYSTEME S5

2.5.1. PREAMBULE

Ce système présente une base axiomatique qui ne contient que la biconditionnelle comme unique terme primitif. C'est d'une certaine manière le produit d'une réflexion qui s'inscrit sur le système S3, et plus particulièrement sur les directives de définition δ et ξ . Ces règles, δ et ξ , permettent l'inscription de thèses-définitions dont le definiendum est le premier argument de l'essence de la thèse et dont le definiens en est le deuxième. Leśniewski décide de renverser cet ordre. Le definiendum consistera dorénavant dans le deuxième argument de l'essence et le definiens le premier. Il s'agit des directives δ^* et ξ^* . C'est ainsi que nous avons présenté la directive de définition. En opérant cette transformation, Leśniewski obtient un système équivalent au système S3. Les axiomes de S5 sont équi-formes aux axiomes

A1 - A3 de S3, donc de S1 (p. 185). S5 possède six règles d'inférence:

- α) Règle de détachement (pp. 128-129)
- β) Règle de substitution (pp. 211-224)
- γ) Règle de distribution des quantificateurs (pp. 103-105)
- δ) et ε*) Règles de définition (pp. 188-191)
- ζ) Règle d'extensionnalité (pp. 254-256)

Leśniewski présente ces différentes directives de manière formelle, à l'aide de 49 explications terminologiques (Leśniewski, 1929, pp. 63-78)

2.5.2. A LA RECHERCHE D'UN AXIOME UNIQUE

Les systèmes S5 et S3 diffèrent bien peu l'un de l'autre. La modification apportée par rapport à S3 n'est qu'apparemment futile en fait. Elle possède une signification métalogique. En effet, cette légère modification va permettre, sans altérer les directives du système S5, de construire une protothétique sur un axiome unique. Une fois encore, une contribution de Tarski offre une solution partielle. Il observait en 1923 un fait intéressant: si un système tel que S3 contient les thèses suivantes:

- (1) $\vdash p \supset q, \vdash q \supset p \supset p \supset q$
- (2) $\vdash f p \supset f (f p), \vdash f (q p) \supset p$

il est alors possible d'inscrire dans le système les thèses P et Q. La thèse (1) représente la loi de commutativité pour la biconditionnelle, et la thèse (2), l'expression de la conjonction P et Q. Partant de ce résultat, Tarski remarquait:

In 1923 Tarski noted that however many axioms a given set A sufficient for \mathfrak{S}_3 may have, it may be replaced by a set of only two axioms without altering the directives of the system. Of these one is the thesis

$$\vdash p \supset \phi(\phi(p) \phi(qp))$$

while the other is the 'logical product', expressed in terms of the function ' $\phi(pq)$ ', of all propositions belonging to A which are distinct from the above thesis. Tarski also established at the same time that such a 'logical product' of the axioms $A1-A3$ could take the form of the following expression:

$$\text{L} \text{S} \left(\phi \left(A(P) \phi \left(A \left(A \left(A \left(\phi \left(A(Q) \phi \left(A(R) Q \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right)$$

where the letters ' P ', ' Q ', and ' R ' are to be replaced by the axioms $A1$, $A2$, and $A3$. (Leśniewski, 1967, p. 127).

Leśniewski poursuit ses recherches sur la base de ces résultats. Il se rend alors compte qu'avec la modification de l'ordre du definiens/ definiendum, c'est-à-dire avec la formulation de nouvelles directives de définition (δ^* et ξ^*), un seul axiome suffit pour fonder un système de la protothétique équivalent à S5. Si cette modification est apportée, l'axiome exprimant la loi de commutativité pour la biconditionnelle n'est plus nécessaire. Cette modification apparemment mineure est toutefois nécessaire si l'on veut obtenir une base axiomatique composée d'un axiome unique.

Es ist mir kein Axiom bekannt, welches, allein genommen, zum Aufbau eines Systems der Protothetik mit Hilfe der Direktiven δ^ , ξ^* und η^* des Systems S3... genügen würde. (Leśniewski, 1929, p. 58).*

Je ne connais aucun axiome qui, de manière unique, suffirait pour construire un système de la protothétique avec l'aide des directives δ^ , ξ^* et η^* du système S3.*

Leśniewski ne va pas se contenter de ce résultat et va continuer, tout comme Mordchaj Wajsberg (1884-1949), à chercher un axiome unique, de plus en plus simple, qui, en relation avec les directives du système S5 fonde une protothétique 'complète'.

Le premier résultat (1923) consiste dans le produit logique des axiomes $A1 - A3$, cet axiome compte 290 signes. Il s'agit du point de départ d'une succession de simplifications qui aboutissent en 1926 à la formulation d'un axiome unique qui ne compte que 82 signes.

Le métathéorème L constitue pour Sobocinski un puissant outil d'investigation dans cette longue et fastidieuse démarche qui vise à proposer un axiome de plus en plus court. Il n'utilise pas uniquement ce résultat de Leśniewski mais il réalise également qu'il peut être simplifié. A la fin des années trente, il avait mis en évidence que la condition b) ne dépendait pas de ce métathéorème. En 1952, il réalise que la condition a) peut-être affaiblie, c'est-à-dire que seul un fragment du système S était indispensable. Il en vient alors tout naturellement à offrir un nouveau métathéorème.

METATHEOREM S: An axiom-system of protothetic having the rules of procedure inferentially equivalent with the rule of \mathcal{E}_3 constitutes a complete system, if in its field the following conditions are satisfied:

I. There are provable the following two theses:

F1. $[u] . u . = . [u] . u$

F2. $[pq] . \therefore p = : q = p . = q$

II. The principle of bivalency for propositions is provable as a metarule saying that if a formula " $\phi(p)$ " has a sense in the system and the formulas " $\phi([u] . u)$ " and " $\phi([u] . u . = . [u] . u)$ " are already proved, then the formula " $[p] . \phi(p)$ " is also a thesis of this system.

(Sobocinski, 1960, pp. 67-68)

Ce métathéorème est précieux en ce sens que c'est un exemple des démarches métalogiques qu'il est possible d'entreprendre sur la base de la protothétique. Il permet également de contrôler la complétude d'un quelconque système axiomatique de la protothétique. La lecture des articles de Sobocinski aurait probablement éclairé Grzegorzczuk et l'aurait certainement empêché d'écrire:

"On account of the above peculiarities of the language of Leśniewski's systems, such an obvious theorem of the completeness of protothetics is very difficult to prove precisely and, according to some [?] logicians, it is even impossible to prove".

"Therefore, although the exact description of the rule of definition given by Leśniewski was at the time a great theoretical success, his systems are most inconvenient for metalogical research". (Grzegorzczak, 1955, p. 88).

2.6. CONCLUSION

Nous ne voulons pas terminer cette présentation des protothétiques sans mentionner une autre réalisation de Leśniewski qui prend naturellement place dans le champ de ses calculs des propositions: les protothétiques calculables. Ces systèmes lui permettent de fournir une preuve facile de la complétude de la protothétique, (Rickey, 1977, pp. 413-414).

I constructed in 1924, a system of protothetic based on principles quite different from those according to which the systems S2 - S5 had been constructed. ..., I was concerned to employ an 'algorithmic' or 'computative' style in my new system, as opposed to the much more common 'substitution-detachment' style. (Leśniewski, 1967, p. 149).

Ce système est basé sur deux termes primitifs, le signe de la conditionnelle et le zéro logique, A. L'unique axiome est fort simple: $\vdash(AA)$. Les neuf directives très originales qui règlent ce système ne seront pas présentées ici. Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'article de Leśniewski, (1967, pp. 149-155).

Nous avons consacré beaucoup d'espace à la présentation des protothétiques de Leśniewski. Notre objectif n'était pas uniquement de présenter un développement de ses calculs des propositions qui aboutit au système de référence S5. Nous voulions également, rappelons-le, révéler peu à peu, à travers cette exposition, l'esprit constructif et dynamique des protothétiques. Nous retrouverons cet esprit dans les autres systèmes de Leśniewski.

TROISIEME PARTIE

ONTOLOGIE

1. PREAMBULE

Nous avons choisi d'exposer les systèmes de Leśniewski dans leur genèse structurelle. L'ontologie se fonde sur le calcul élargi des propositions, la protothétique. Cette genèse, rappelons-le, est l'inverse de celle historique. En effet, la protothétique a été conçue après les présentations de la méréologie et de l'ontologie. Il est une anecdote historique intéressante quant à ce dernier système. Nous la citons maintenant, elle est de nature à fixer d'emblée la spécificité de l'ontologie.

It was in 1921. I was dissatisfied with the inexact description of the copula 'is' given by Peano, and with the vague symbol ϵ of the theory of sets. In the course of a logical discussion I asked Leśniewski what he meant by the expression 'a is b'. He replied that he was using it in the sense of everyday life. I was still dissatisfied, for I thought that the copula 'is' should either be defined, or described by axioms, if taken as primitive terms. Some time later Leśniewski told me that he had found the required axioms sitting on a bench in the Warsaw Saxon Park. (Łukasiewicz, 1953, p. 78).

L'ontologie de Leśniewski est un calcul des termes qui sert de base à l'élaboration d'une théorie formelle des noms. C'est un système qui explicite le concept de classe distributive et qui peut être basé sur l'unique terme primitif ϵ , dans les propositions singulières telles que $A\epsilon b$ et qu'il est possible de lire: le A est un des b.

Ontology is a modernised version of traditional logic; in its structural aspects it includes a theory of classes and relations". (Gratten-Guinness, 1981, p. 503).

Cette façon de caractériser l'ontologie reste vague et elle pourrait conduire à des incompréhensions. Parler de l'ontologie comme d'une théorie de la classe distributive (Sobociński, 1954) est quelque peu ambigu. En effet, l'ontologie présente un traitement distributif

des objets, mais la classe distributive n'y est jamais définie. Enfin, introduire sans plus l'épsilon peut conduire à une confusion. Dans la 'tradition' ensembliste, l'épsilon dénote le symbole d'appartenance à une classe, mais l'épsilon de l'ontologie, lui, est non réflexif et transitif et ne décrit pas cette appartenance particulière. D'autre part, le terme 'ontologie' conduit naturellement à se demander quelles relations le système de Leśniewski soutient avec certains travaux d'Aristote. S'agit-il de quelque chose de l'ordre des 'principes généraux de l'être' présenté dans les oeuvres métaphysiques du savant grec? Il est difficile de l'affirmer sans nuances. La réponse de Kotarbinski est de nature à faire comprendre et à préciser pourquoi Leśniewski a choisi ce nom.

We have decided to adopt Leśniewski's system—known to us in manuscript form and communicated by him in his lectures—as the foundation of the *calculus of terms*. We consider that system of the calculus of terms to be the most natural, most evolved and most practical in application of all the systems known to us. At the same time, it is most closely connected with traditional Aristotelian formal logic, of which it is an extension and improvement, while, on the other hand, it is the terminal point of the endeavours to build the calculus of terms in logic.

Let it be added that Leśniewski called his system *ontology*, in conformity with certain terms already used (cf. the term "ontological principle of contradiction" as the name of the thesis that no object can have and not have a given property; see also Łukasiewicz's terminology in his book *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa* (*The Principle of Contradiction in Aristotle's Works*), 1910, p. 3ff; cf. also Theorem 19). The term is further justified by the fact that the only specific primitive term which occurs in the axiom of the system in question is "est", or "is", which corresponds to the Greek *ἐστίν*. Now if we want to emphasize that, we may call the system after the appropriate Greek participle, namely *ὄν* (gen. *ὄντος*), which means "being".

That term has become accepted in another role—namely, that of enquiry into the "general principles of existence", conducted in the spirit of certain parts of the Aristotelian "metaphysical" books. It must, however, be admitted that if the Aristotelian definition of the supreme theory (*πρῶτη φιλοσοφία*), to which those books mainly refer, be interpreted in the spirit of a "general theory of objects", then both the word and its meaning are applicable to the calculus of terms as expounded by Leśniewski.

(Kotarbinski, 1966, pp. 210-211).

Bien qu'utile et intéressante, cette citation doit être considérée avec prudence. En effet, on pourrait penser que l'ontologie est, d'une certaine façon, "une théorie générale des objets", mais cela est faux. La problématique de l'ontologie de Leśniewski ne concerne pas "le monde des objets" mais bien la façon d'en parler. Elle est ontologiquement neutre, elle ne présuppose rien sur l'univers; elle n'attribue aucun statut particulier d'existence aux objets qui pourraient la constituer. Elle est d'ailleurs capable de 'parler' d'un univers vide. C'est bien une théorie formelle des noms mais de quels noms? Nous aurons à le préciser. Un rappel des conditions mêmes de son élaboration est susceptible de mieux en faire comprendre l'esprit. Lorsqu'au début des années 20, Leśniewski sent le besoin d'élaborer une première base logique pour la méréologie, qu'il appelle alors théorie générale des ensembles, un premier problème se pose. Les fondements eux-mêmes de cette nouvelle théorie ne sont pas en cause et la difficulté réside dans la présentation de leurs fondements. Leśniewski faisait usage du langage naturel pour décrire ses théories. Sa crainte du pur formalisme s'ancrait dans sa conviction que tout système formel se doit d'être un système interprété, d'être en quelque sorte une abréviation du langage utilisé pour parler du monde et de ses objets, un formalisme donc profondément ancré dans l'intuition (Kearns, 1967). Nous avons dit (p. 21) les réticences de Leśniewski à l'égard des Principia Mathematica. Ce refus du formalisme disparaît lorsqu'il voit la possibilité d'appréhender l'oeuvre de Whitehead et Russell comme un système interprété. Ceci le détermine à transcrire en langage symbolique les développements théoriques élaborés jusqu'alors dans un langage naturel. Cette décision s'accompagne d'un problème délicat. Transcrire un discours logique exprimé dans un langage formalisé exige une exacte définition de tous les composants fondamentaux que ce langage naturel organise. Comme nous le savons, tout langage naturel est polysémique. De ce fait, il est difficile de le projeter, de le plier aux exigences et à la précision d'un langage logique formalisé. Leśniewski le savait bien.

zdecydowałem się na wprowadzenie do swojej praktyki naukowej jakiegoś języka „symbolicznego”, opartego o wzory, stworzone przez „logików matematycznych”, zamiast języka potocznego, jakim się do owego czasu z upartą premedytacją posługiwałem, starając się, jak tyłu innych, o ujarznienie tego języka potocznego pod względem „logicznym” i nagięcie go do teoretycznych celów, do których nie został stworzony. (Leśniewski, 1931, p. 154).

...je me suis déterminé à introduire un langage symbolique dans ma pratique scientifique en lieu et place du langage naturel que j'utilisais avec obstination, essayant, comme beaucoup d'autres, de le maîtriser sous le rapport logique et de le soumettre aux exigences théoriques pour lesquels il n'a pas été conçu.

La lecture des fondements de la théorie générale des ensembles (Leśniewski, 1916) est révélatrice à cet égard; les axiomes et les définitions, les 58 théorèmes et leur démonstration qui en constituent l'exposé sont présentés à l'aide du langage naturel. L'expression 'est' ('jest' en polonais) y est partout présente et toujours insérée dans des propositions singulières non formalisées.

Th. IX *If some object is a part of object P, then P is the class of parts of object P. (Leśniewski, 1916, p.8).*

Th. LV *No object is the complement of itself with respect for some objects. (Leśniewski, 1916, p.33).*

En voulant donner 'vie formelle' à ses développements démonstratifs et définitoires qui étaient jusque là exposés de manière discursive, Leśniewski est confronté à plusieurs problèmes. Tout d'abord, caractériser axiomatiquement la théorie logique, l'ontologie, qui fonde sa théorie générale des ensembles. Il lui faut également trouver un terme primitif qui prend sens dans et par la base axiomatique. Il lui faut ensuite traduire de la façon la plus rigoureuse qui soit les propositions du langage naturel qu'il utilisait dans sa pratique scientifique. L'usage courant de l'expression 'est' dans la proposition singulière "A est (un des) b" le conduit à s'y intéresser, à l'étudier, puis à l'utiliser.

zamiast wyrazu „jest” w zdaniach „jednostkowych” typu „A jest b” aczajem, wzorując się na p. Peano, używać znaku „ ϵ ”, jako pierwszej litery wyrazu „ ϵ st”

(Leśniewski, 1934, p.155)

A la place de la forme verbale 'est' dans les propositions singulières du type "A est b", je me suis déterminé, comme le fait Peano, à utiliser le signe ' ϵ ', première lettre du verbe " ϵ st"

Il ne s'agit pas d'une séduction mais du résultat d'une longue réflexion.

Jeszcze w tych czasach, gdy się posługiwałem w swojej praktyce naukowej językiem potocznym, czyniąc próby opanowania go pod względem „logicznym”, starałem się jakoś racjonalizować sposób, w jaki silywałem we wzmiankowanym języku potocznym różnych przekazanych przez „logikę tradycyjną” typów zdań.

Tak się złożyło, że w związku z analizami semantycznymi, jakim poddawałem rozmaite kategorie zdań, oraz w związku z rozważaniami, jakie przeprowadzałam na temat możliwości „sprawdzenia” przy pomocy definicji jednych typów zdań do innych przy moim sposobie posługiwania się odnośnymi typami zdań, zdanie „jednostkowe” typu „A ϵ b” oraz związki wzajemne pomiędzy takimi zdaniami stały się w r. 1920 na czas pewien punktem centralnym moich zainteresowań.

(Leśniewski, 1934, pp. 155-156).

Lorsque j'utilisais le langage quotidien, en tentant de le dominer à des fins logiques, je me suis efforcé de rationaliser, dans ce langage, ma manière de mettre en oeuvre diverses propositions découlant de la "logique traditionnelle".

...
Mes analyses sémantiques relatives à différents types de propositions et mes considérations en rapport avec une possibilité de les réduire les uns aux autres, à l'aide de définitions, m'ont amené à me préoccuper des propositions singulières du type "A ϵ b"; ces propositions ont été, pendant l'année 1920 le thème central de mes réflexions.

La synthèse de ces réflexions s'exprime non pas par la présentation d'une théorie formelle des 'choses' mais par l'exposé d'une théorie formelle des noms: l'ontologie. L'épsilon ϵ en est le terme primitif. Il s'inscrit dans la proposition singulière "A ϵ b" et connec-

te deux expressions de même catégorie sémantique, celle des noms.

Dans un premier temps nous présenterons l'épsilon de l'ontologie et la proposition singulière par le biais d'une sémantique intuitive, puis, dans un second temps, nous les caractériserons de manière précise en exposant l'axiome de l'ontologie.

2. INTERPRÉTATION PRESEMANTIQUE DE L'EPSILON

Par interprétation présémantique, nous entendons une interprétation naïve. Bien que conforme aux propriétés qui définissent l'épsilon et qui sont contenues dans l'axiome de l'ontologie, l'interprétation présémantique n'a pas la prétention de rigueur et de précision de cet axiome. Elle est, avant tout, un préalable à la compréhension du nouveau signe primitif: 'É'.

Par sa volonté de transcrire le discours de l'ontologie dans un langage formalisé, Leśniewski est confronté à un premier problème. Le discours naturel fait un usage abondant de la copule 'est'. Cette copule révèle une grande diversité sémantique. Dans la présentation de l'ontologie en langage naturel, Leśniewski attachait à cette copule une signification univoquement déterminée; il n'attribuait qu'une et une seule signification à 'est' qu'il utilisait. C'est de ce sens dont nous voulons parler. Nous allons le cerner à travers une succession d'exemples. Considérons donc l'interprétation de la proposition singulière 'A est b' en assignant des noms aux deux arguments A et b.

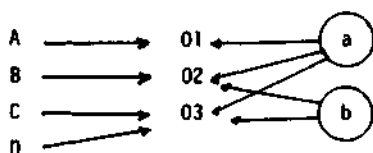
ex. 1 : Reagan est le 40ième président des Etats-Unis.

ex. 2 : Le 40ième président des Etats-Unis est républicain.

Ces deux propositions singulières rendent compte du sens de l'épsilon et sont vraies. Dans l'exemple 1, l'épsilon connecte deux noms qui ne dénotent qu'un seul objet; objet qualifié d'individuel et inscrit à l'aide d'une lettre majuscule: A, B, ... Dans l'exemple 2, l'épsilon connecte un nom individuel -le 40ième président des Etats-Unis- et un nom qui désigne, qui dénote plus d'un objet -républicain-. On qualifie

ce nom de général; il est généralement inscrit à l'aide d'une lettre minuscule a, b, ... (Cette manière de représenter les noms répond à une convention informelle qui est de nature à faciliter la compréhension.) De manière analogue, la proposition: "Aristote est mortel" peut s'exprimer sous forme d'une proposition singulière de l'ontologie et elle est vraie. Qu'en est-il de la proposition "L'homme est mortel"? L'épsilon connecte deux noms généraux, 'a & b'. Il s'agit d'une proposition bien formée de l'ontologie, mais comme nous le verrons plus tard, elle est fautive. L'exemple 1 suggère que l'épsilon se soutient uniquement de la relation d'identité. Quant à l'exemple 2, il fournit un candidat qui s'interprète généralement en termes de relation d'appartenance. De telles interprétations sont erronées dans l'ontologie. Il serait, en effet, faux d'envisager la lecture de la proposition singulière 'A & b' de la manière suivante: l'objet dénoté par A appartient à l'extension des objets dénotés par b. Proposons une lecture autre: 'A & b' est vraie si le nom A, qui est un nom individuel, dénote un des objets désignés par le nom général b. Le nom général b possède une extension mais ne la dénote pas, il n'est pas le nom de cette extension. Le schéma suivant est de nature à éclaircir quelque peu la situation.

noms individuels Objets noms généraux



Quatre noms individuels dénotent trois objets:

le nom A dénote l'objet 01 A ~ 01

le nom B dénote l'objet 02 B ~ 02

le nom C dénote l'objet 03 C ~ 03

le nom D dénote l'objet 03 D ~ 03

Deux noms généraux apparaissent également:

(1955, pp. 13-17) et Gombocz (1982) soulignent aussi cette difficulté d'interpréter l'épsilon dans le sens du 'is' anglais, respectivement du 'ist' allemand. Tentons de dégager les raisons de cette difficulté d'interprétation pour le 'est' français. Le champ sémantique du 'est' couvre des réalités discursives que l'épsilon de l'ontologie refuse. L'habitude de fonder l'interprétation du 'est' en termes de relations d'identité, d'appartenance, ou d'inclusion s'écarte de l'acceptation de l'épsilon. Que ce serait-il passé si la théorie des ensembles n'avait pas été "inventée"? L'analyse de Leśniewski a été élaborée dans une langue bien différente, dans sa structure, du français. Le polonais ne connaît pas d'articles et le 'jest' semble avoir une signification bien plus précise que le 'est'. Si nous introduisons cette modalité, c'est que nous ne maîtrisons pas le polonais. Cependant une remarque de Skolimowski permet de penser que l'interprétation du 'jest' n'est pas aussi univoque que l'affirme Szupecki (1955, pp. 13-14). Skolimowski écrit:

The copule 'is' may be used in many different senses. Various usages and therefore various meanings of this term were penetratingly analyzed by Leśniewski, who found about twenty meanings of the term (in Polish). (Skolimowski, 1967, p. 94).

Enfin, une tentative de traduction de "D zdoniach jednostkowych" typu "A ϵ b" (Leśniewski, 1931, pp. 153-170) nous a permis de trouver des propositions du type: "czlowiek jest ssakiem" dont l'équivalent ne peut être que "l'homme est un mammifère". Si cela est correct, le 'jest' n'exprime pas sans autre l'épsilon de l'ontologie; le 'jest' est plus "fort". Szupecki conseille de remplacer les exemples anglais par leur traduction latine. (Szupecki, 1955, pp. 13-14). Küng tempère quelque peu ce conseil. "...the analogy between Leśniewskian 'é' and the Latin 'est' does not hold in all respects: 'Homo est animal' is true, but in terms of ontology 'Homo is animal' is false (because more than one thing is a man). (Küng, 1982, p. 171).

Insistons encore, Leśniewski n'a retenu qu'une seule signification du 'jest': son ϵ .

Retenons pour l'instant deux choses.

1) La proposition singulière $A \in B$ connecte deux noms par l'épsilon \in . Les deux arguments appartiennent à la même catégorie sémantique: celle des noms N. Ceci distingue l'épsilon de l'ontologie de celui de la théorie des ensembles qui établit une relation d'appartenance et impose une distinction de type. (Dans les PM en tous les cas).

2) La proposition singulière n'est vraie que si le nom du premier argument A est un nom individuel et que ce nom individuel est

- a) soit un des sous-noms du nom général b qui possède une extension mais ne la nomme pas;
- b) soit un nom individuel B qui désigne le même objet que celui dénoté par A .

Si non elle est fausse.

Cette formulation n'est ni simple ni satisfaisante. Lesniewski a été confronté à la même difficulté. Citons-le:

"Conversations I held on various occasions made me believe that the aforesaid "singular" propositions were not always understood as I intended them to be. It was often the case that the person I spoke to failed to realize the meaning in which I employed the symbol " \in " in my ontology, and he had interpretational difficulties when trying to bring this symbol into some semantic relation to the traditional symbols of "mathematical logic" and "the theory of sets". From a theoretical point of view this state of affairs put me in an awkward position and I found myself sharing the difficulties of all whom circumstances force to express "in their own words" the meaning of primitive terms in deductive theories of their making. I brought such situations to a close with or without success by employing various methods of approach to the intuitions of the person I spoke to. Thus if one person might be convinced by the fact that I use the term " a " in such a meaning as to satisfy the above axiom of ontology, another would feel more satisfied on hearing that propositions of the type " $A \in B$ " are equivalent to corresponding propositions of the type "every A is B and one object at the most is A "; if a third person was satisfied with the fact that in my current language propositions of the type " A is B " are equivalent to corresponding propositions of the type " A is one of the objects B " so understood that they remain valid also when A is the only object which is B , yet another might begin to grasp the semantic situation on being told that I employ the symbol " \in " in propositions of the type

" $A \in B$ " in that meaning in which I use the word "is" in propositions belonging to current language such as "this man is long-lived", "Rome is older than Warsaw", "the point of intersection of the lines P and R is the centre of the circle K ".¹

(Leśniewski, 1931, pp. 163-164; traduit in Sjupecki, 1955, pp. 16-17).

Avant de procéder à une présentation plus formelle, exposons encore quelques exemples et tentons de faire voir les propriétés de l'épsilon de l'ontologie. Considérons l'intuition de Leśniewski et proposons les valeurs de vérité des différentes propositions singulières suivantes en explicitant les raisons qui régissent l'attribution de leur valeur de vérité.

ex. 3: La baleine est un mammifère F

Cette proposition est fautive parce que le nom 'baleine' dans ce contexte ne dénote pas un objet unique. Elle relève en fait d'une réduction de la proposition affirmative universelle: "pour tout x , si x est baleine, alors x est mammifère".

ex. 4: Reagan est une baleine F

Cette proposition est fautive parce que tout ce que dénote le nom 'Reagan' est également ce que dénote le nom 'baleine', et le 40ième président des Etats-Unis n'est pas une baleine.

ex. 5: Le rond-carré est une figure géométrique F

Cette proposition est fautive parce que le nom "rond-carré" n'est ni un nom individuel ni un nom général; c'est un nom vide, un nom qui ne dénote pas quelque chose. Revenons sur le fait que Leśniewski ne veut pas faire une théorie du monde. Admettre comme il le fait, un nom vide n'est pas une prise de position sur le monde, mais bien sur la façon d'en parler et de traiter les noms. Selon ce qu'on pense du monde, un modèle, l'expression singulière est vraie ou fautive.

ex. 6: Reagan est Reagan V

Cette proposition est vraie. Le nom 'Reagan' dénote un objet, et cet objet est bien lui-même.

ex. 6: Reagan est mortel.

V

Cette proposition est vraie. Le nom individuel 'Reagan' est un des sous-noms du nom qui dénote 'mortel'.

ex. 8: Jean-Paul II est le 22ième pape. F

Cette proposition est fausse. Dans l'histoire de la papauté, le nom individuel 'Jean-Paul II' ne dénote pas le même objet que celui dénoté par le nom individuel 'le 22ième pape'.

ex. 9: Reagan est le 40ième président des Etats-Unis. V

Cette proposition est vraie. Le nom individuel 'Reagan' est bien l'objet dénoté par le nom individuel 'le 40ième président des Etats-Unis'.

Au travers de ces exemples, l'on s'aperçoit que le 'est' français n'exprime pas toujours les propriétés que sous-tend l'épsilon. Et lorsque l'on affirme qu'il y a des situations où la correspondance est convenable, il est nécessaire d'en modaliser la portée. C'est la raison pour laquelle Szupecki écrivait à propos d'une relation entre l'épsilon et le 'is' anglais:

...The meaning of the primitive term 'ε' in Leśniewski's ontology makes it impossible to illustrate the schema $A\epsilon B$ by means of examples taken from the English language. (Szupecki, 1955, p. 13).

et nous ajouterons qu'il en est de même des exemples en français si l'interprétation proposée se veut conforme à l'identité stricte, à l'inclusion ensembliste ou à la relation d'appartenance. (Mais est-ce vraiment cela que le 'est' français exprime?) Cette liste n'est bien sûr pas exhaustive. Le 'est' dans le sens 'Dieu est' ou le 'est maintenant' de la proposition 'la communauté française de Montréal est plus importante que celle de Marseille' sont des exemples qui ne correspondent pas au schéma de la proposition singulière. Tout comme la proposition 'la lune est pleine'. Une 'traduction' possible mais inélégante de la proposition vraie est:

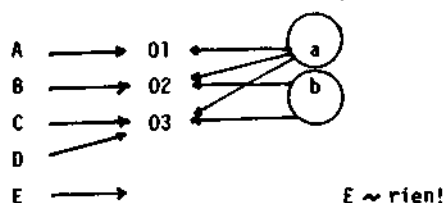
'Celui-là, désigné par un nom individuel 'A', est un de ceux-là dénotés

par un nom général $\overset{1}{b}$: $A \& b$ " ou

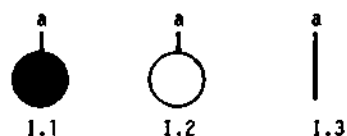
"Celui-là, désigné par un nom individuel $\overset{1}{A}$, est celui-ci désigné par un nom individuel $\overset{1}{B}$: $A \& B$ ".

On peut être surpris de voir apparaître le nom vide dans le commentaire de l'exemple 5. Nous avons distingué d'une part le nom individuel, d'autre part le nom général. L'ontologie propose plus; elle permet l'inscription du (des) nom(s) vide(s). Le nom vide est un nom qui ne dénote rien; c'est un nom qui ne désigne pas quelque chose. Nous verrons comment il est possible de le définir formellement.

Complétons donc le schéma de la page 273:



Lejewski a inventé une table ontologique extrêmement astucieuse. Elle permet d'illustrer d'une part la nature des noms, et, d'autre part les relations possibles de tout couple de noms, (Lejewski, 1958, p. 155). Nous l'utiliserons à plusieurs reprises. Dans cette table, un et un seul objet nommé par un nom individuel est représenté par un cercle noir, I1. Plusieurs objets, chacun desquels est nommé par un nom général est représenté par un cercle blanc, I2. Aucun cercle ne sera utilisé dans le cas du nom vide I3.



3. L'AXIOME DE L'ONTOLOGIE

Des quelques exemples et remarques qui précèdent, tirons les propriétés de l'épsilon de la proposition singulière.

'A g b' est vraie, si et seulement si,

1. A est 'non vide' (A dénote, désigne un objet au moins)
2. A est 'unique' (A désigne un et un seul objet)
3. Tout ce qui est A est aussi b. (Si 'A' dénote un objet, objet également dénoté par 'b'; alors 'A' est un des sous-noms de 'b'.)

Il est temps de présenter plus formellement la signification de l'épsilon. Pour ce faire, nous choisirons un des axiomes qui peut fonder l'ontologie, celui que proposait Leśniewski en 1920, (Leśniewski, 1930, p. 114).

$$\ulcorner A_b \urcorner \ulcorner A_e b \urcorner \Rightarrow \exists B \ulcorner B = A \urcorner \ulcorner D_C \urcorner \ulcorner D \& A \cdot C \& A \cdot \Rightarrow D \& C \urcorner \cdot \ulcorner D_b \urcorner \ulcorner D \& A \Rightarrow D \& b \urcorner$$

De manière plus globale, cet axiome est une thèse, la première proprement ontologique. C'est d'ailleurs une proposition qui possède la structure formelle d'une généralisation. Son essence est une fonction équivalente dont le premier argument consiste en une proposition singulière et le deuxième en trois conjonctions.

Explicitons cet axiome en le décomposant en trois implications:

1. $\ulcorner A_b \urcorner \ulcorner A_e b \urcorner \Rightarrow \exists B \ulcorner B = A \urcorner$
2. $\ulcorner A_b \urcorner \ulcorner A_e b \urcorner \Rightarrow \ulcorner D_C \urcorner \ulcorner D \& A \cdot C \& A \cdot \Rightarrow D \& C \urcorner$
3. $\ulcorner A_b \urcorner \ulcorner A_e b \urcorner \Rightarrow \ulcorner D_b \urcorner \ulcorner D \& A \cdot \Rightarrow D \& b \urcorner$

La première implication impose l'existence de 'A'. Si 'A' est 'b', alors 'A' n'est pas le nom vide ('A' dénote au moins un objet). L'épsilon porte en lui une dimension existentielle. Le problème de l'existence dans l'ontologie doit être considéré avec beaucoup de précaution; nous en reparlerons. La deuxième implication inscrit l'unicité de 'A'. Si 'A' est 'b', alors pour tout 'D' et 'C', si 'D' est 'A' et 'C' est 'A', alors 'D' est identique à 'C'. Enfin, la troisième implication impose une 'convergence' de tout ce qui peut être 'A': tout ce qui est 'A' est également 'b'.



Ainsi, la proposition singulière 'aεb' est vraie, si et seulement si, elle correspond aux situations représentées par les diagrammes II.1 ou II.3; elle est fausse autrement.

Leśniewski propose deux écritures différentes de cet axiome.

$$(A, a) :: \epsilon\{Aa\} . a \cdot \sim((B) \cdot \sim(\epsilon\{BA\})) \cdot (\exists C) : \epsilon\{BA\} \cdot \epsilon\{CA\} \cdot \exists \epsilon\{BC\} :: (B) : \epsilon\{BA\} \\ (\text{Leśniewski, 1930, p. 114}) \quad \cdot \exists \epsilon\{Ba\}$$

$$\ulcorner Aa \urcorner \wp(\epsilon\{Aa\}) \wp(\ulcorner (B) \urcorner \sim(\epsilon\{BA\}) \urcorner) \wp(\ulcorner (\exists C) \urcorner \epsilon\{BA\} \epsilon\{CA\} \epsilon\{BC\} \urcorner) \urcorner \ulcorner (B) \urcorner \wp(\epsilon\{BA\} \epsilon\{Ba\}) \urcorner \urcorner \\ (\text{Leśniewski, 1930, p. 115})$$

Comme dans la protothétique, les fonctions de l'ontologie sont des expressions composées d'un foncteur suivi de parenthèmes(s), par exemple $\epsilon\{Aa\}$ (nous l'avons présenté sous la forme 'Aεa'). Le contenu de ces deux axiomes est le même. Ils diffèrent uniquement par le choix de leur représentation écrite. Le premier, non conforme à l'écriture rigoureuse de Leśniewski, procure une lecture un peu plus aisée. Le second répond aux canons de l'écriture de Leśniewski.

La première conjonction du deuxième argument de l'essence de l'axiome peut se transformer: $\ulcorner (B) \urcorner \sim(\epsilon\{BA\}) \urcorner \leftrightarrow \ulcorner \exists B \urcorner \epsilon\{Ba\} \urcorner$. Cette transformation doit toutefois être considérée avec prudence. Elle consiste en effet en une abréviation: l'expression $\ulcorner (B) \urcorner \sim(\epsilon\{BA\}) \urcorner$ s'écrit $\ulcorner \exists B \urcorner$. C'est bien la seule abréviation -et non pas une définition- que nous utiliserons. Il s'agit simplement de l'expression simplifiée d'une forme complexe.

Wenn man über den 'partikulären' Quantifikator verfügen würde, was in meinem System nicht der Fall ist..., könnte man im Axiom statt " $\ulcorner (B) \urcorner \sim(\epsilon\{BA\}) \urcorner$ " einfach " $\ulcorner \exists B \urcorner \epsilon\{BA\}$ " schreiben. (Leśniewski, 1930, note 3, p. 114).

Lorsqu'on dispose du quantificateur particulier, ce qui n'est pas le cas dans mon système, on peut écrire dans l'axiome simplement $(\exists B). \{ \{ AB \} \}$ au lieu de $\sim ((B). \sim (\{ \{ AB \})))$.

Leśniewski n'a formulé aucune règle d'introduction de quantificateurs ("was in meinem System nicht der Fall ist..."), et c'est bien la raison pour laquelle nous parlons d'abréviation et non pas de définition ou d'introduction du quantificateur existentiel.

On peut avec Szupecki (1955, p. 10, note 11) s'interroger sur les raisons qui ont conduit Leśniewski à ne pas introduire de quantificateur existentiel autrement que comme une simple commodité d'écriture. Sobocinski répond à cette question (1960, p. 68, note 3). Leśniewski désirait introduire dans ses systèmes non seulement un quantificateur existentiel particulier, mais tous ceux qu'il serait possible d'obtenir; par exemple les quantificateurs sélectifs $(\exists_1 x)$ (il existe un seul x, \dots), $(\exists_2 x)$ (il existe deux x, \dots), Un peu à l'image des catégories sémantiques qui apparaissent progressivement dans un système, il aurait bien voulu admettre l'introduction de quantificateurs de natures différentes; en fait tous ceux qu'il est possible d'imaginer, tels le 'game quantifier' (Barwise 1977) ou les 'branching quantifiers' (Barwise, 1979). Ces découvertes récentes auraient également dû entrer dans le champ des quantifications possibles.

Leśniewski aurait bien voulu formuler une directive relative à la quantification, directive susceptible de régler l'inscription de quantificateurs de natures différentes. Il n'a pas réussi à la formuler de manière satisfaisante; il a donc préféré se passer de cette directive.

3.1. LA PROPOSITION

Nous parlons sans cesse de proposition, ce qui n'est pas surprenant dès lors que l'on sait qu'une ontologie se construit sur la protothétique. Les thèses de la protothétique sont indispensables pour contrôler le mécanisme démonstratif de l'ontologie. L'analogie avec un calcul

des propositions qui se prolonge dans celui des prédicats est suffisamment explicite pour ne point développer davantage cet aspect. Ajoutons que ce prolongement de la protothétique n'a été réalisé qu'en ajoutant un nouvel axiome, et comme nous le verrons, en renforçant les règles d'inférence (définition ontologique et extensionnalité ontologique), et en proposant de nouvelles expressions linguistiques dont la catégorie sémantique n'est plus nécessairement fonction de la catégorie de base S, mais également de la nouvelle catégorie sémantique des noms, N, ou des deux. Parler de propositions et plus spécifiquement de propositions singulières, détermine au travers de l'axiome la catégorie sémantique de l'épsilon dans 'A**ε**b' (conformément à l'écriture de Leśniewski: 'ε{Ab}').

- A**ε**b est de la catégorie sémantique des propositions, S.
- A et b sont de la catégorie sémantique des noms, N.
- **ε** est donc un foncteur formateur de proposition à deux arguments nominaux.

ε : S/NN

Une dernière remarque s'impose. La catégorie sémantique des noms N dans l'ontologie constitue une catégorie sémantique à part entière. Le fait de pouvoir parler de noms individuels, généraux ou vides n'ajoute rien à la notion de catégorie sémantique. Tout nom, qu'il soit individuel, général ou vide remplit le même rôle grammatical. De ce fait, nous aurions très bien pu proposer un axiome qui n'opère pas la distinction entre la notation des noms individuels (inscrits en majuscules) et celle des noms généraux (inscrits en minuscules). L'analyse de la signification de l'épsilon et de la proposition singulière dans l'axiome suffit à fournir cette distinction. La concrétiser dans l'écriture de l'axiome offre une compréhension plus immédiate des thèses de l'ontologie.

4. REGLES D'INFERENCE DE L'ONTOLOGIE

4.1. PREALABLE

Nous nous contenterons d'expliciter les règles d'inférence de l'ontologie sans les décrire avec la précision et la rigueur propres à Lesniewski et ceci pour deux raisons. L'une est que nous voulons privilégier une présentation simple et schématique; nous pensons qu'elle est de nature à permettre une meilleure compréhension tout en conservant une valeur opératoire. L'autre est plus profonde; le mécanisme précis des règles d'inférence de la protothétique présente une grande parenté avec celui des règles de l'ontologie. Les inscriptions de référence ne sont certes pas toujours les mêmes, mais le 'jeu' des parenthèses, par exemple, ou les conditions algorithmiques qui régissent l'inscription d'une thèse sont en accord complet avec les caractéristiques opératoires développées dans les chapitres précédents. Les règles d'inférence de la protothétique sont ainsi à considérer comme un modèle de référence pour les règles de l'ontologie.

Les directives de l'ontologie sont au nombre de sept:

- 1) directive de définition ontologique de type protothétique
- 2) directive de définition ontologique de type ontologique
- 3) directive de distribution des quantificateurs
- 4) directive de détachement
- 5) directive de substitution
- 6) directive d'extensionnalité de type protothétique
- 7) directive d'extensionnalité de type ontologique.

Certaines d'entre elles sont semblables à leur analogue de la protothétique, à la différence près qu'elles s'appliquent à des thèses préalablement inscrites de l'ontologie. Nous ne les développerons donc pas. D'autres subiront des modifications profondes; nous les présenterons avec soin, mais sans détails excessifs.

Die Bedingungen 1 und 3 - 6 sind hier den Bedingungen 1 - 5 der Vorschrift, betreffend die Konstruktionsmethode des Systems der Protothetik, entsprechend analog, während die Bedingungen 2 und 7 meinem System der Ontologie eigen-tümlich sind. (Leśniewski, 1930, p. 128)

Les conditions 1 et 3 - 6 sont ici les conditions 1 - 5 [α, β, γ, δ, ε] des directives correspondantes concernant la méthode de construction du système de la protothétique, alors que les conditions 2 et 7 de mon système de l'ontologie sont caractéristiques.*

4.2. LA DIRECTIVE DE DETACHEMENT

Cette directive opère avec des thèses de l'ontologie, mais le mécanisme qui règle la transformation ne considère que la structure propositionnelle des thèses en présence. La formulation de cette directive reste donc la même que celle présentée précédemment, (p.129).

4.3. LA DIRECTIVE DE DISTRIBUTION DES QUANTIFICATEURS

Lorsque nous présentions cette directive dans le cadre de la protothétique, (pp.103-105), nous avons insisté sur le fait que cette règle ne précisait jamais la catégorie sémantique des variables qui correspondaient aux lieux distribués. Seule la propriété d'être une variable importait. Nous pouvons donc importer cette directive dans l'ontologie sans modification, sinon celle de l'appliquer aux thèses de l'ontologie.

Exemple:

Ax : $\ulcorner \text{Ab} \urcorner \ulcorner \text{Acb} \urcorner \equiv \ulcorner \text{B} \urcorner \ulcorner \text{BcA} \urcorner \cdot \ulcorner \text{Dc} \urcorner \ulcorner \text{DeA} \cdot \text{CcA} \urcorner \rightarrow \ulcorner \text{Dc} \urcorner \cdot \ulcorner \text{D} \urcorner \ulcorner \text{DeA} \rightarrow \text{Dcb} \urcorner \urcorner$

E : $\ulcorner \text{A} \urcorner \ulcorner \text{b} \urcorner \ulcorner \text{Acb} \urcorner \equiv \ulcorner \text{b} \urcorner \ulcorner \text{B} \urcorner \ulcorner \text{BcA} \urcorner \cdot \ulcorner \text{Dc} \urcorner \ulcorner \text{DeA} \cdot \text{CcA} \urcorner \rightarrow \ulcorner \text{Dc} \urcorner \cdot \ulcorner \text{D} \urcorner \ulcorner \text{DeA} \rightarrow \text{Dcb} \urcorner \urcorner$

Ax. dist.

4.4. DIRECTIVE DE SUBSTITUTION

Les conditions générales de cette directive sont les mêmes que celles présentées dans la protothétique (pp.211-224). Leśniewski

offre cependant une explication terminologique nouvelle, spécifique à l'ontologie, ce qui n'est pas le cas pour les deux directives précédentes. En fait la formulation des conditions qui régissent la substitution dans la protothétique, T. E. XLVII, (Lesniewski, 1929, pp. 73-74), est 'quasi' équiforme à celle des conditions qui régissent la substitution dans l'ontologie, T. E. XLVII⁰, (Lesniewski, 1930, pp. 120-121). Elles diffèrent par seulement quatre spécifications. L'une d'entre elles présentent la nature protothétique (respectivement ontologique) des constantes. Une autre spécifie la nature protothétique (respectivement ontologique) des fonctions. Enfin les deux dernières informent de la nature protothétique (respectivement ontologique) des catégories sémantiques qui entrent dans le jeu de la substitution.

4.5. LES DIRECTIVES DE DÉFINITION

L'ontologie contient deux types distincts de définition; l'un est protothétique et l'autre ontologique. Cette dichotomie s'explique par le fait que ce système contient deux catégories sémantiques primitives: la catégorie des noms, N, et celle des propositions, S. Décrivons l'ensemble de toutes les catégories sémantiques de l'ontologie de manière récursive:

1. S, N, sont des catégories sémantiques.
2. Si C et C₁, ..., C_n sont des catégories sémantiques, alors C/C₁C₂...C_n est une catégorie sémantique; il s'agit de celle qui possède n arguments de catégories C₁, respectivement C₂, ..., respectivement C_n, et qui engendre la catégorie C.
3. Rien n'est une catégorie sémantique sinon par ce qui précède.

Il est intéressant de remarquer que la description de la catégorie sémantique d'une constante définie permet de reconnaître si elle est de type protothétique ou de type ontologique. Pour ce faire, il suffit d'observer la première occurrence de la description de la catégorie considérée; s'il s'agit de S, alors nous sommes en présence de la réalisation d'une définition de type protothétique,

première occurrence (S/N).../... ,

s'il s'agit de N, alors nous sommes en présence de la réalisation d'une définition de type ontologique,

première occurrence (N/SN).../... .

4.5.1. DIRECTIVE DE DEFINITION DE TYPE PROTOHETIQUE

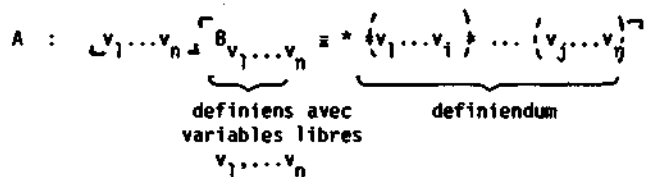
A est une thèse résultant de la directive de définition de type protothétique relativement à ce que le système contient, si

1. A est une généralisation.
2. L'essence de A est une fonction équivalente.

$$\text{—} \rightarrow \text{F}_1 \text{F}_2$$

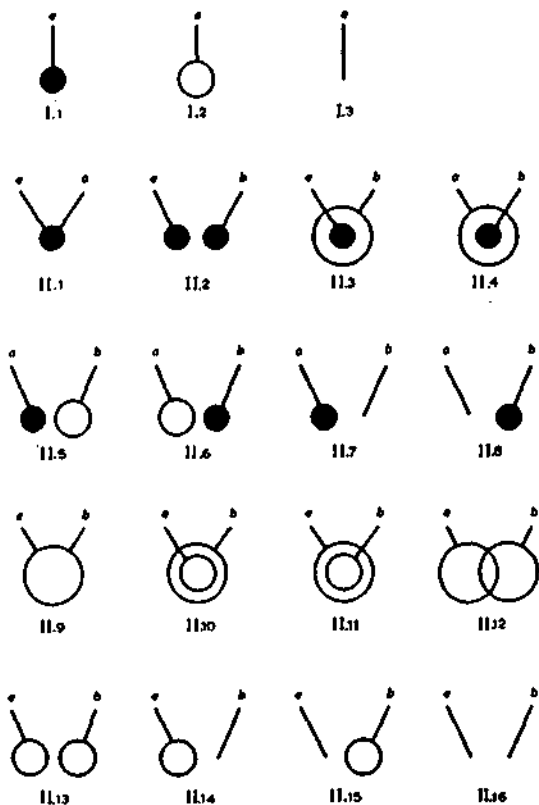
3. Le premier terme de A est une expression bien formée du système en fonction de ce qu'il contient actuellement. Il s'agit du définiens.
4. Le deuxième terme de A est une fonction constante (régulière ou paramétrée). Il s'agit donc d'un terme constant suivi d'un (ou de) parenthème(s). C'est le définiendum.
5. Le terme constant défini dans le définiendum n'est pas équiforme à un terme de même catégorie sémantique.
6. Les mots du définiendum ne sont pas répétés.
7. Les arguments du (des) parenthème(s) du définiendum sont tous des variables qui possèdent un lieu équiforme dans le quantificateur de la généralisation A.
8. Le définiens contient des variables libres équiformes aux variables du définiendum, et seulement celles-là.
9. Le choix des parenthèses symétriques du définiendum est fonction d'un jeu de 'bonne écriture' en tout point semblable à celui présenté dans la protothétique (pp.189-191).

SCHEMA GENERAL



4.5.1.1. EXEMPLES DE DEFINITIONS ONTOLOGIQUES DE TYPE PROTHETIQUE

Avant de proposer quelques définitions, nous reproduisons la table ontologique de Lejewski (1958, p. 155); elle est de nature à faciliter la compréhension des nouveaux termes définis. (Voir page 280)



Pour des raisons de compréhension, nous nous autorisons à utiliser des écritures hybrides qui facilitent la lecture ontologique des expressions définies ou démontrées. Nous écrirons donc l'expression $\underline{A}_b \ulcorner A_c \triangleright A_c \urcorner$ au lieu de l'expression rigoureuse $\underline{A}_b \ulcorner \exists (A_b) \epsilon \{A\} \urcorner$. L'axiome de l'ontologie, dans son écriture rigoureuse, justifie quelque peu ce choix:

$$O1 \quad \underline{A}_a \ulcorner \exists (A_a) \varphi(\ulcorner \underline{B}_a \ulcorner \sim (\epsilon \{B\}) \urcorner) \varphi(\ulcorner \underline{B}_c \ulcorner \exists (\varphi(\epsilon \{B\}) \epsilon \{C\}) \epsilon \{B\} \urcorner) \urcorner \urcorner \urcorner$$

Bien que nous n'utiliserons pas systématiquement la forme rigoureuse de la proposition singulière, $\epsilon \{A\}$, retenons cependant le choix des parenthèses symétriques; ce choix interviendra nécessairement chaque fois que nous définirons un foncteur formateur de proposition à deux arguments nominaux ainsi que des foncteurs formateurs de proposition à un ou à plus de deux arguments nominaux; l'emploi de ces parenthèses, en relation avec ces dernières "catégories", ne relève pas d'une nécessité, il s'agit simplement d'une façon de systématiser certains résultats afin de mieux les reconnaître. Nous avons agi de même lorsque nous inscrivions des foncteurs formateurs de propositions à arguments propositionnels.

$$D1 : \quad \underline{a}_a \ulcorner \exists \underline{A}_a \ulcorner A_c \urcorner \exists ! \{a\} \urcorner$$

catégorie sémantique: S/N

Il s'agit bien d'une bonne définition:

- le definiens est une expression bien formée du système;
- la variable libre du definiens est équiforme à la variable libre du definiendum;
- le lieu du quantificateur général de D1 lie à la fois la variable libre du definiens et celle du definiendum;
- le definiendum est une fonction régulière bien formée;
- le foncteur constant ! n'est pas équiforme à un terme constant de même catégorie sémantique;

- cette définition introduit un foncteur constant dont la catégorie sémantique S/N n'apparaissait pas encore. Le choix des parenthèses symétriques du parenthème du definiendum était donc libre. Afin de systématiser les résultats, nous avons choisi des parenthèses symétriques équiformes à $\{, \}$. Ceci ne génère aucune confusion.

Lecture de $\exists\{a\}$: les a existent
ou
il existe au moins un a.

Une proposition de ce type est vraie, si et seulement si, l'une des situations représentées par les diagrammes 1.1 ou 1.2 est réalisée; elle est fausse autrement.

D2 : $\exists a, \exists b, \exists c, \exists d, \exists e, \exists f, \exists g, \exists h, \exists i, \exists j, \exists k, \exists l, \exists m, \exists n, \exists o, \exists p, \exists q, \exists r, \exists s, \exists t, \exists u, \exists v, \exists w, \exists x, \exists y, \exists z, \exists \{a\}$

catégorie sémantique: S/N

Il est nécessaire d'inscrire ici des parenthèses symétriques équiformes à $\{, \}$. En effet, la catégorie sémantique S/N apparaît déjà dans le système (D1). Il est donc nécessaire de respecter l'écriture choisie préalablement.

Lecture de $\exists\{a\}$: il existe au plus un a.

Une proposition de ce type est vraie, si et seulement si, l'une des situations représentées par les diagrammes 1.1 ou 1.3 est réalisée; elle est fausse autrement.

D3 : $\exists\{A\}$

catégorie sémantique: S/N

Lecture de $\exists\{A\}$: il existe exactement un A.

Une proposition de ce type est vraie, si et seulement si, la situation représentée par le diagramme 1.1 est réalisée; elle est fausse autrement.

D4 : $\exists\{AB\}$

catégorie sémantique: S/NN

Le foncteur constant = est d'une catégorie sémantique qui apparaît déjà dans le système (axiome). Il est donc nécessaire de respecter l'écriture des parenthèses symétriques préalablement choisie.

Lecture de $\{AB\}$: A est identique à B. Il s'agit de l'identité singulière.

Une proposition de ce type est vraie, si et seulement si, la situation représentée par le diagramme II.1 est réalisée; elle est fausse autrement.

D5 : $\{AB\} \vdash \forall A, B \in \mathcal{A}. \{AB\} \neq \{AB\}$

catégorie sémantique: S/NN

Lecture de $\neq\{AB\}$: A et B sont des individuels différents.

L'opérateur = ayant été défini préalablement, D5 est bien une bonne définition.

D6 : $\{ab\} \vdash \forall A, B \in \mathcal{A}. \{ab\} \neq \{ab\}$

catégorie sémantique: S/NN

Lecture de $\circ\{ab\}$: a égale b. Il s'agit de l'égalité faible.

Une proposition de ce type est vraie, si et seulement si, l'une des situations représentées par les diagrammes II.1, II.9 ou II.16 est réalisée; elle est fausse autrement.

D7 : $\{ab\} \vdash \forall G \in \mathcal{G}. \{ab\} \neq \{ab\}$

catégorie sémantique : S/NN

Lecture de $\square\{ab\}$: a est fortement égal à b.

Une proposition de ce type est vraie, si et seulement si, l'une des situations représentées par les diagrammes II.1 ou II.9 est réalisée; elle est fausse autrement.

$$D8: \lfloor ab \rfloor \lfloor A \rfloor \{Aea \supset Aeb\} \equiv C\{ab\}$$

catégorie sémantique: S/NN

Lecture de $C\{ab\}$: tout a est b, (inclusion faible).

Une proposition de ce type est vraie, si et seulement si, l'une des situations représentées par les diagrammes II.1, II.3, II.8, II.9, II.10, II.15, ou II.16 est réalisée; elle est fausse autrement.

$$D9: \lfloor ab \rfloor \lfloor G \rfloor \{Gea\} \cdot \lfloor G \rfloor \{Gea \supset Geb\} \equiv E\{ab\}$$

catégorie sémantique: S/NN

Lecture de $E\{ab\}$: chaque a est b, (inclusion forte).

Une proposition de ce type est vraie, si et seulement si, l'une des situations représentées par les diagrammes II.1, II.3, II.9 ou II.10 est réalisée; elle est fausse autrement.

$$D10: \lfloor ab \rfloor \lfloor G \rfloor \{Gea, Geb\} \equiv \Delta\{ab\}$$

catégorie sémantique: S/NN

Lecture de $\Delta\{ab\}$: quelque a est b, (inclusion partielle).

Une proposition de ce type est vraie, si et seulement si, l'une des situations représentées par les diagrammes II.1, II.3, II.4, II.10, II.11 ou II.12 est réalisée; elle est fausse autrement.

Nous nous sommes contentés de ne présenter que des foncteurs formateurs de proposition à arguments nominaux. Il est bien sûr possible d'en introduire d'autres.

$$D11: \lfloor f \rfloor \lfloor a \rfloor \{f|a\} \equiv !\{f\}$$

C'est une bonne définition. Le système connaît une constante de la catégorie S/N; il est donc possible d'introduire des variables de cette catégorie-là. Le foncteur constant ! appartient, ici, à la catégorie sémantique des foncteurs formateurs de proposition à un argument de

la catégorie S/N, sa catégorie est donc S/(S/N). Le foncteur constant ! bien qu'équiforme au foncteur ! de la catégorie S/N, n'est pas équiforme à une constante de même catégorie sémantique. Les parenthèses symétriques du parenthème de la fonction !{f} ne crée aucune confusion.

Les onze foncteurs constants définis, D1 - D11, sont des foncteurs de fonctions régulières. Mais la règle de définition de type protothétique permet également d'introduire des foncteurs constants de fonctions paramétrées.

$$D12: \underbrace{\lambda b, \ulcorner}_{\text{definiens}} A \& b \quad \underbrace{= \epsilon \ulcorner b \urcorner \{ A \}}_{\text{definiendum}}$$

Il s'agit d'une bonne définition.

$\epsilon \ulcorner b \urcorner \{ A \}$: est de la catégorie sémantique des propositions, S

$\epsilon \ulcorner b \urcorner$: est un foncteur variable qui opère sur un unique argument nominal. Il est donc de la catégorie sémantique des foncteurs formateurs de propositions à un argument nominal S/N. Le choix des parenthèmes symétriques équiformes à $\{, \}$ était donc nécessaire.

ϵ : est un foncteur constant qui opère sur un argument nominal, ϵ est de la catégorie sémantique des foncteurs formateurs de foncteurs formateurs de proposition à un argument nominal, à un argument nominal (S/N)/N. Le choix des parenthèmes symétriques équiformes à \ulcorner, \urcorner , ne crée aucune confusion. Le terme constant équiforme à ϵ ne crée aucune confusion. En effet, l'épsilon ϵ dans D12 n'est pas de la même catégorie sémantique que l'épsilon ϵ dans l'axiome de l'ontologie.

Considérons l'exemple suivant:

$A \& b$: Girardet est cuisinier; A/Girardet, b/cuisinier

$\epsilon \ulcorner b \urcorner \{ A \}$: est -cuisinier- Girardet

Paraphrasons cette expression:

Girardet cuisine.

Cet opérateur 'c' est particulièrement intéressant: appliqué à un nom, il détermine un nouvel opérateur que l'on peut assimiler à un verbe, 'est -cuisinier-' → 'cuisine'. A ce propos, il est intéressant de lire Henry, (1972, pp. 42-43) et Küng, (1981, pp. 172-173).

4.5.2. DIRECTIVE DE DEFINITION DE TYPE ONTOLOGIQUE

Cette nouvelle directive permet de définir des noms, ou des foncteurs qui forment des noms, ou des foncteurs qui forment des foncteurs qui forment des noms, etc... . Avant de la formuler, il est nécessaire de donner quelques éléments terminologiques.

PREMIER ARGUMENT ONTOLOGIQUE

A est le premier argument ontologique de B, si et seulement si,

1. B est un parenthème.
2. A est un argument analogue à l'argument a d'un parenthème équiforme à {ab}.

DEUXIEME ARGUMENT ONTOLOGIQUE

A est le deuxième argument ontologique de B, si et seulement si,

1. B est un parenthème.
2. A est un argument analogue à l'argument b d'un parenthème équiforme à {ab}.

SUJET

A est le sujet de B, si et seulement si,

1. Le premier mot de B est équiforme à c.

2. Il existe C, A est le premier argument ontologique de C
et

B est le complexe des mots formé par le
premier mot de B suivi de C.

Cette terminologie est empruntée à Leśniewski, (1930, p. 122 T.E. LI.).
Il utilise l'expression $A \& Sbjct(B)$.

PREDICAT

A est le prédicat de B, si et seulement si,

1. Le premier mot de B est équiforme à ϵ

2. il existe C, A est le deuxième argument
ontologique de C
et

B est le complexe des mots formé par le
premier mot de B suivi de C.

$A \& Prdct(B)$, (Leśniewski, 1930, p. 122, T.E. LII.).

Exemple

$\epsilon\{Ab\}$
├── Prédicat
└── Sujet

FONCTION ONTOLOGIQUE

Comme nous l'avons fait dans la présentation de la protothétique, nous opérerons une distinction entre une fonction ontologique régulière, et une fonction ontologique paramétrée.

F est une fonction ontologique régulière, si et seulement si,

1. F est le complexe formé d'un terme suivi d'un parenthème.

2. F est un ingrédient d'une expression qui est de la catégorie des noms.

Exemples

E': $\{A \sim \langle a \rangle\}$
F' est une fonction régulière

E'': $\{A \sim \langle a \rangle \langle b \rangle\}$
F'' est une fonction régulière
D est une expression de la catégorie sémantique des noms.

F est une fonction ontologique paramétrée, si et seulement si,

1. F est le complexe formé d'un terme suivi de plus d'un parenthème.
2. F est un ingrédient d'une expression qui est de la catégorie sémantique des noms.

Exemples

E''': $\{A \sim \langle a \rangle \langle b \rangle \langle c \rangle\}$
F'''
F''''

F''' et F'''' sont des fonctions ontologiques paramétrées.

De manière informelle, nous utiliserons la formulation suivante

A ϵ b au lieu de $\{A b\}$
A $\epsilon \sim \langle b \rangle$ au lieu de $\{A \sim \langle b \rangle\}$
etc...

4.5.2.1. FORMULATION DE LA DIRECTIVE DE DEFINITION ONTOLOGIQUE DE TYPE ONTOLOGIQUE

A est une thèse résultant de la directive de définition de type ontologique, relativement à ce que le système contient actuellement, si

1. A est une généralisation

$$\lfloor \text{---} \rfloor \text{---}$$

2. L'essence de A est une fonction équivalentielle

$$\lfloor \text{---} \rfloor \text{---} \equiv \text{---}$$

3. Le deuxième terme de A est une proposition singulière -c'est le definiendum-

$$\lfloor \text{---} \rfloor \text{---} \equiv \text{---}$$

4. Le sujet du deuxième terme de A est une variable qui possède un lieu équiforme dans le quantificateur général de A.

$$\lfloor \text{---} \rfloor \text{---} \equiv A \in \text{---}$$

5. Le prédicat du deuxième terme de A est soit une constante, soit une fonction ontologique constante.

$$\lfloor \text{---} \rfloor \text{---} \equiv A \in \text{---}$$

ou

$$\lfloor \text{---} \rfloor \text{---} \equiv A \in \{ \dots \}$$

6. Les mots du deuxième terme ne sont pas répétés.

7. Les arguments du (des) parenthème(s) du prédicat du deuxième terme de A sont des variables qui possèdent des lieux qui leur sont associés dans le quantificateur général de A

$$\lfloor A v_1 \dots v_n \rfloor \text{---} \equiv A \in \{ \langle v_1 \dots v_j \rangle \dots \langle v_k \dots v_n \rangle \}$$

8. Il existe C, C est le premier terme de A ou C est une conjonction du premier terme de A

et

le sujet de C est une variable équiforme au sujet du deuxième terme de A

$$\lfloor A v_1 \dots v_n \rfloor A \in \text{---} \equiv A \in \{ \langle v_1 \dots v_j \rangle \dots \langle v_k \dots v_n \rangle \}$$

$$\lfloor A v_1 \dots v_n \rfloor \text{---} \equiv A \in \{ \langle v_1 \dots v_j \rangle \dots \langle v_k \dots v_n \rangle \}$$

9. Le premier terme de A constitue le definiens, c'est une expression bien formée du système en fonction de ce qu'il contient actuellement.
10. Le definiens contient des variables libres. Elles sont équi-formes à celles du definiendum, et chacune de celles-là est représentée dans le definiens.

$$\vdash A v_1 \dots v_n \vdash A \in B_{v_1, \dots, v_n} \exists. A \in \{v_1 \dots v_j\} \dots \{v_k \dots v_n\}$$

11. Le terme constant du definiendum n'est équi-forme à aucune constante de la même catégorie sémantique.
12. Si le prédicat du deuxième terme de A est une fonction ontologique, alors les parenthèses symétriques de ses parenthèses se choisissent de manière à ne créer aucune confusion. Les conditions qui règlent le bon choix des parenthèses sont semblables à celles qui ont été exposées pour les systèmes de la protothétique.

Avant de donner quelques exemples, rappelons quelles sont les parenthèses symétriques qui ont été utilisées jusqu'ici dans l'ontologie. Nous 'ignorerons' quelque peu celles qui caractérisent la protothétique. L'axiome de l'ontologie propose une forme unique, $\{, \}$, dans des expressions du type $\{ab\}$. Les définitions D1-D10 conservent soit par obligation, soit par choix, des parenthèses symétriques équi-formes à $\{, \}$, dans des expressions telles que $\neg \{a\}$, (S/N) , ou $\{ \{AB\} \}$, (S/NN) . La définition D11 offre des parenthèses symétriques équi-formes à $\{, \}$, $\{ \{ f \} \}$, $(S/CS/N)$, et la définition D12 inscrit dans la fonction paramétrée des parenthèses symétriques équi-formes à $\{, \}$, $\{ \{ b \} \{ A \} \}$, $(S/N)/N$.

Rappelons enfin que le choix des parenthèses symétriques est lié au nombre des arguments des parenthèses qui lui est associé ainsi qu'à la catégorie sémantique de ces arguments.

4.5.2.2. EXEMPLES DE DEFINITIONS DE TYPE ONTOLOGIQUE

$$D13 : \quad \perp_{A_1} \ulcorner A \in A . \wedge (A \in A) . \exists A \in A \urcorner \quad \text{ou}$$

$$\perp_{A_1} \ulcorner \{AA\} . \wedge (\{AA\}) . \exists . \in \{AA\} \urcorner$$

Il s'agit bien d'une 'bonne définition'. Le definiens est une conjonction de deux expressions bien formées construites sur la base de ce que le système contient actuellement. Une des conjonctions est équiforme à 'A ∈ A' et 'A' est bien le sujet du parenthème du definiendum. Le prédicat du definiendum est un terme constant de la catégorie sémantique des noms, N. Il n'est équiforme à aucun terme constant de même catégorie sémantique. Les mots du definiendum ne sont pas répétés. Le jeu des variables est en accord avec les conditions énoncées précédemment.

Lecture de A ∈ A: A est le nom vide
A est le nom qui ne dénote rien
A est le nom contradictoire
A est le nom qui ne dénote pas quelque chose.

$$D14 : \quad \perp_{A_1} \ulcorner A \in A \equiv A \in V \urcorner$$

Il s'agit d'une bonne définition. V est de la catégorie sémantique des noms, N.

Lecture de A ∈ V: A est un nom d'objet
V est le nom universel.

$$D15 : \quad \perp_{Ab_1} \ulcorner A \in A . \wedge (A \in b) . \exists A \in \langle b \rangle \urcorner$$

Le prédicat du definiendum est une fonction ontologique régulière. Le foncteur ontologique constant \wedge n'est pas équiforme à une constante de même catégorie sémantique. Le foncteur ontologique constant \wedge opère sur un parenthème d'un argument nominal. Comme il s'agit d'un foncteur ontologique nous ne pouvons pas choisir des parenthèses symétriques équiformes à [,] . Si nous l'avions fait, nous aurions attribué à \wedge la catégorie sémantique S/N, ce qui n'était pas notre intention. \wedge est de la catégorie sémantique des foncteurs formateurs de noms à un argument nominal N/N.

Lecture de $A \nabla b$: A n'est pas b
 Nous montrerons plus loin que cette proposition n'est pas équivalente à $\neg(A \& b)$.

D16: $A \nabla b \equiv A \nabla A. A \nabla a. A \nabla b \equiv A \nabla (a \& b)$

Le prédicat du definiendum est une fonction régulière. Le foncteur ontologique constant opère sur un parenthème à deux arguments nominaux; il est de la catégorie N/NN. Cette définition introduit donc une catégorie sémantique nouvelle. Le choix des parenthèses symétriques équi-formes à \langle, \rangle permet une fois de plus de systématiser les résultats.

Lecture de $A \& \langle ab \rangle$: A est a et b
 $\& \langle ab \rangle$ est un nom
 ex.: Ce pull est bleu **et** blanc

catégorie sémantique: N/NN

Cette définition est intéressante à plus d'un égard. Notamment, elle met en évidence la richesse de l'ontologie. Il s'agit d'un langage bien plus subtile et plus performant que le calcul des prédicats pour exprimer les nuances grammaticales de la langue. Le calcul des prédicats ne connaît que la conjonction propositionnelle.

ex.: Son pull est blanc **et** son chapeau est noir.
 S/SS.

Il est possible, dans l'ontologie, de distinguer ces deux conjonctions, comme il est encore possible d'en inscrire de toute nature sémantique.

ex.: Jean désire partir **et** mourir
 N/(S/N)(S/N)

Lorsque nous inscrivions la définition D12, nous avons montré que le foncteur variable $\& \{ b \}$ appartenait à la catégorie sémantique S/N. Nous avons alors qualifié ce type de foncteur, de 'verbe'.

ex.: Pierre est un étudiant : $A \in b$

$$\exists x (x \in A)$$

$$\downarrow$$

Pierre étudie

Montrons la transformation inverse. Dans l'ontologie, comme dans la protothétique d'ailleurs, il est possible, lorsqu'une catégorie sémantique est déjà représentée par une constante, d'inscrire une variable de cette catégorie.

Posons la définition suivante:

D17 : $\ulcorner A \Psi \urcorner \equiv A \in A. \Psi \{A\} . = A \in \text{stsf} \{ \Psi \}$

Nous empruntons à Sobocinski (1967, p. 194) l'expression du foncteur 'stsf' (il doit être considéré comme un mot); il s'agit de l'abréviation du verbe 'satisfy'. Henry utilise l'expression 'trm' pour désigner le même opérateur (Henry, 1972, p.42). Le foncteur 'stsf' forme un nom à partir d'un foncteur formateur de proposition à un argument nominal, $M/(S/N)$. Il s'agit d'une catégorie que le système ne connaît pas encore. Il était donc nécessaire d'introduire des parenthèses de manière à ne créer aucune confusion. Elles devaient notamment être différentes des parenthèses $\{, \}$ et \langle, \rangle .

Analysons cette définition et pour cela considérons dans une approche présémantique une constante de la catégorie S/N , Ψ par exemple. Attribuons à Ψ la valeur du verbe cuisiner.

D : $\ulcorner A, \urcorner \equiv A \in A. \Psi \{A\} . = A \in \text{stsf} \{ \Psi \}$ D17, Ψ/Ψ

Le premier terme de l'essence de D exprime: A existe et A cuisine. Le prédicat du deuxième terme de D, $\text{stsf} \{ \Psi \}$ est un nom; il s'agit du nom de "qui fait acte de cuisiner", "qui satisfait le fait de cuisiner", c'est-à-dire, "cuisinier". Le deuxième terme de l'essence de D exprime donc: A est cuisinier.

Proposons la définition d'une fonction ontologique paramétrée.

$$D18 : \quad \underbrace{\text{A} \langle \text{b} \rangle \langle \text{c} \rangle}_{\text{ABC}} \quad \underbrace{\text{A} \langle \text{A} \rangle \langle \text{A} \rangle \langle \text{b} \rangle \langle \text{c} \rangle}_{\text{A} \langle \text{A} \rangle \langle \text{A} \rangle \langle \text{b} \rangle \langle \text{c} \rangle} ;$$

$$\underbrace{\text{A} \langle \text{b} \rangle \langle \text{c} \rangle}_{\text{ABC}} \quad \underbrace{\left(\rho \left(\epsilon \{ \text{A} \} \rho \left(\epsilon \{ \text{A} \} \epsilon \{ \text{A} \} \right) \right) \right) \langle \text{A} \langle \text{b} \rangle \langle \text{c} \rangle \rangle}_{\left(\rho \left(\epsilon \{ \text{A} \} \rho \left(\epsilon \{ \text{A} \} \epsilon \{ \text{A} \} \right) \right) \right) \langle \text{A} \langle \text{b} \rangle \langle \text{c} \rangle \rangle} ;$$

La succession de deux epsilons équiiformes paraît étrange dans l'écriture traditionnelle du deuxième terme de D16. L'analyse de la catégorie sémantique de ces termes montre que cette façon de faire est totalement en accord avec la règle de définition et qu'elle ne provoque aucune confusion.

Soit $\text{A} \langle \text{b} \rangle \langle \text{c} \rangle$; $\epsilon \{ \text{A} \langle \text{b} \rangle \langle \text{c} \rangle \}$

A, b, c sont de la catégorie sémantique des noms N; la structure formelle du définiens donne cette information.

$\epsilon \langle \text{b} \rangle \langle \text{c} \rangle$ est de la catégorie sémantique des noms N; c'est le prédicat du définiendum.

$\epsilon \langle \text{b} \rangle$ est un foncteur formateur de nom qui opère sur un parenthème à un argument nominal; catégorie sémantique: N/N. Le choix de parenthèses symétriques équiiformes à \langle , \rangle dans le parenthème $\langle \text{c} \rangle$ est nécessaire.

ϵ est un foncteur constant formateur de foncteur variable $\epsilon \langle \text{b} \rangle$, N/N, qui opère sur un parenthème à un argument nominal; catégorie sémantique (N/N)/N. Le choix de parenthèses symétriques équiiformes à \langle , \rangle dans $\langle \text{b} \rangle$ ne crée aucune confusion. Des parenthèses équiiformes à \langle , \rangle ou $\{ , \}$ par exemple ne peuvent être admises.

Ainsi le premier mot et le quatrième mot de l'expression $\epsilon \{ \text{A} \langle \text{b} \rangle \langle \text{c} \rangle \}$ bien qu'équiiformes ne sont pas de la même catégorie sémantique. Le jeu des parenthèses symétriques des parenthèmes qui les suivent permet de distinguer leur catégorie et d'éliminer ainsi toute confusion.

Une interprétation naïve de ce définiendum n'est pas facile à exprimer dans le langage naturel. Une solution est possible mais peu satisfaisante: attribuons à b et c les valeurs nominales suivantes:

b/ dentiste, c/ médecin

$\{A \in \langle B \rangle \langle C \rangle\}$: A est {mèdecin qui est dentiste}
 A est mèdecin-dentiste

4.6. QUELQUES DEMONSTRATIONS

Avant d'exposer les directives d'extensionnalité, il nous a semblé utile de proposer quelques thèses. Certaines d'entre elles nous permettent de mettre en évidence quelques caractéristiques de l'ontologie alors que d'autres ne possèdent qu'une valeur d'illustration.

T1 $\ulcorner Aa \urcorner \ulcorner Aea \urcorner \supset \ulcorner \exists B \urcorner \ulcorner B \in A \urcorner \urcorner$ Ax.

T2 $\ulcorner Aa \urcorner \ulcorner Aea \urcorner \ulcorner \ulcorner CD \urcorner \ulcorner C \in A . D \in A . \supset C \in D \urcorner \urcorner$ Ax.

T3 $\ulcorner Aa \urcorner \ulcorner Aea \urcorner \ulcorner \ulcorner C \urcorner \ulcorner C \in A \supset C \in A \urcorner \urcorner$ Ax.

T4 $\ulcorner Aa \urcorner \ulcorner \ulcorner B \urcorner \ulcorner B \in A \urcorner \urcorner . \ulcorner \ulcorner CD \urcorner \ulcorner C \in A . D \in A . \supset C \in D \urcorner \urcorner .$
 $\ulcorner \ulcorner C \urcorner \ulcorner C \in A \supset C \in A \urcorner \urcorner \supset Aea \urcorner$ Ax.

T5 $\ulcorner Aa \urcorner \ulcorner Aea \supset A \in A \urcorner$

1	Aa	Aea	hyp
2		$\ulcorner \exists B \urcorner \ulcorner B \in A \urcorner \urcorner$	1. T1
3		$\ulcorner \ulcorner CD \urcorner \ulcorner C \in A . D \in A . \supset C \in D \urcorner \urcorner$	1. T2
4		$\ulcorner \ulcorner C \urcorner \ulcorner C \in A \supset C \in A \urcorner \urcorner$	thèse prot.
5		A ∈ A	2,3,4, a/A, T4
6		Aea ⊃ A ∈ A	1-5, o i
7	$\ulcorner Aa \urcorner \ulcorner Aea \supset A \in A \urcorner$		1-6, c i

Lecture de T5: Si A est quelque chose, alors A est un individu.

T6 $\lfloor \text{ABa} \rfloor \lceil \text{A} \in \text{B} . \text{B} \in \text{a} . \Rightarrow \text{B} \in \text{A} \rceil$

1		ABa		A ∈ B . B ∈ a	hyp
2				A ∈ B	} 1, A e
3				B ∈ a	
4				B ∈ B	
5				$\lfloor \exists C \rfloor \lceil C \in B \rceil$	3, T1, A/B
6				$\lfloor CD \rfloor \lceil C \in B . D \in B . \Rightarrow C \in D \rceil$	3, T2, A/B
7				B ∈ B . A ∈ B . ⇒ B ∈ A	6, A e, C/B, D/A
8				B ∈ B . A ∈ B	4, 2, A i
9				B ∈ A	7, 8, ⇒ e
10				A ∈ B . B ∈ a . ⇒ B ∈ A	1-9, ⇒ i
11		$\lfloor \text{ABa} \rfloor$		$\lceil \text{A} \in \text{B} . \text{B} \in \text{a} . \Rightarrow \text{B} \in \text{A} \rceil$	1-10, ⇒ i

T1 s'agit de la thèse caractéristique de l'ontologie.

T7 $\lfloor \text{ABa} \rfloor \lceil \text{A} \in \text{B} . \text{B} \in \text{a} . \Rightarrow \text{A} \in \text{a} \rceil$

1		ABa		A ∈ B . B ∈ a	hyp
2				A ∈ B	} 1, A e
3				B ∈ a	
4				$\lfloor \exists B \rfloor \lceil B \in A \rceil$	
5				$\lfloor CD \rfloor \lceil C \in A . D \in A . \Rightarrow C \in D \rceil$	2, T2, a/B
6				$\lfloor C \rfloor \lceil C \in B \Rightarrow C \in a \rceil$	3, T3, A/B
7				A ∈ B ⇒ A ∈ a	6, A e, C/A
8				A ∈ a	7, 2, ⇒ e
9				A ∈ B . ⇒ B ∈ a . A ∈ a	1-8, ⇒ i
10		$\lfloor \text{ABa} \rfloor$		$\lceil \text{A} \in \text{B} . \text{B} \in \text{a} . \Rightarrow \text{A} \in \text{a} \rceil$	1-9, ⇒ i

T8	$\lfloor A \rfloor \neg(A \in A)$	
1	A	$A \in A$ hyp
2		$\lfloor A \rfloor \neg(A \in A) \equiv A \in A$ D13
3		$A \in A, \neg(A \in A) \equiv A \in A$ 2, $\equiv e$
4		$A \in A, \neg(A \in A)$ 3, 1, $\wedge e$
5		$A \in A$
6		$\neg(A \in A)$ } 4, $\wedge e$
7		$\neg(A \in A)$ 1, 5, 6, $\neg i$
8	$\lfloor A \rfloor \neg(A \in A)$	1-7, $\wedge i$

T9	$\neg(A \in A)$	
1	$\lfloor A \rfloor \neg(A \in A)$	T8
2	$\neg(A \in A)$	1, $\wedge e$, A/\wedge

Lecture de T9: le nom vide n'est pas un nom individuel.

T10	$\neg \lfloor A \rfloor A \in A$	
1	$\lfloor A \rfloor A \in A$	hyp
2		1, $\wedge e$, A/A
3		T9
4	$\neg \lfloor A \rfloor A \in A$	1, 2, 3, $\neg i$

Lecture de T10: il n'est pas le cas que tout nom soit un nom individuel.

Cette thèse est intéressante. Elle renvoie directement au problème de la définition, et, surtout, à la qualité de certaines définitions. La thèse T10 ne contient pas l'inscription du nom vide bien que sa présence soit nécessaire pour fournir la démonstration de cette thèse. La définition du nom vide, A , dans le développement de cette ontologie est créative. Simons écrit: "Definitions in Leśniewski's system can also be creative; that is, they can facilitate the proof of theorems not containing the defined signs which are unobtainable without using the definitions". (Simons, 1982, p. 168). Le "peut faciliter" est de trop. Une définition est créative relativement au développement d'une ontologie si elle permet de fournir une démonstration d'une thèse qui ne contient pas le terme défini et qui ne pourrait être démontrée sans cette définition, (Rickey, 1975, 1978). La définition du nom vide est créative. Dans une discussion, Rickey nous a appris que Łukasiewicz possédait une preuve de ce fait. Elle a été perdue. Davis (1975, pp. 150-151) résume une preuve possible pour le montrer. La démarche est la suivante:

1. Étendre l'ontologie en y ajoutant une suite d'axiomes qui caractérisent la relation ϵ .
2. Montrer que toutes les thèses d'extensionnalité ontologique sont vérifiées lorsque le terme primitif est interprété comme la relation ϵ .
3. Considérer l'axiome simplifié de l'ontologie:
 $\ulcorner A_1 \urcorner \ulcorner A \epsilon a \equiv \exists B_1 \urcorner \ulcorner A \epsilon B. B \epsilon a \urcorner$, (Sobocinski, 1967).
4. Démontrer la thèse $\ulcorner a b_1 \urcorner \ulcorner a \epsilon b \equiv \exists c_1 \urcorner \ulcorner a \epsilon c. c \epsilon b \urcorner$
5. Démontrer enfin que l'expression $\ulcorner a_1 \urcorner \ulcorner a \epsilon a \urcorner$ est une thèse.

Ainsi, cette interprétation rejette la thèse de l'ontologie $\ulcorner A_1 \urcorner \ulcorner A \epsilon A \urcorner$. La définition du nom vide est donc indispensable pour la démontrer, et cette définition est bien créative.

T11	$\sim \lfloor \text{Ab} \rfloor \sim (A \& b) \supset A \& \sim \langle b \rangle$	
1.	$\lfloor \text{Ab} \rfloor \sim (A \& b) \supset A \& \sim \langle b \rangle$	hyp
2.	$\sim (A \& A) \supset A \& \sim \langle A \rangle$	1, \supset e, A/A, b/A
3.	$\sim (A \& A)$	T9
4.	$A \& \sim \langle A \rangle$	2, 3, \supset e
5.	$\lfloor \text{Ab} \rfloor A \& A \cdot \sim (A \& b) \cdot \supset A \& \sim \langle b \rangle$	D 15
6.	$A \& A \cdot \sim (A \& A) \cdot \supset A \& \sim \langle A \rangle$	5, \supset e, A/A, b/A
7.	$A \& A \cdot \sim (A \& A)$	6, 4, \supset e
8.	$A \& A$	7, \wedge e
9.	$\sim \lfloor \text{Ab} \rfloor \sim (A \& b) \supset A \& \sim \langle b \rangle$	1, 3, 8, \sim i

T12	$\lfloor \text{Ab} \rfloor A \& \sim \langle b \rangle \supset \sim (A \& b)$	
1.	Ab $A \& \sim \langle b \rangle$	hyp
2.	$A \& A \cdot \sim (A \& b)$	D15, 1, \supset e
3.	$\sim (A \& b)$	2, \wedge e
4.	$A \& \sim \langle b \rangle \supset \sim (A \& b)$	1-3, \supset i
5.	$\lfloor \text{Ab} \rfloor A \& \sim \langle b \rangle \supset \sim (A \& b)$	1-4, \supset i

Nous ne pouvons pas prouver l'inverse. En effet, partant de l'hypothèse $\sim(A \& b)$ il n'est pas possible de déduire $A \& A$.

1.	Ab	A & b	hyp
2.		A & ~	hyp
3.		A & A.~(A & b)	2, D15
4.		~ (A & b)	3, A e
5.		A & b	1, reit.
6.		~ (A & ~)	2, 4, 5, ~ i
7.		A & A	1, T5
8.		A & A.~(A & ~)	7, 6, A i
9.		A & ~<~	8, D15
10.		A & b > ~<~	1-9, & i
11.		A & ~<~	hyp
12.		~ (A & b)	hyp
13.		A & A	11, T5
14.		A & A.~(A & b)	12, 13, A i
15.		A & ~	14, D15
16.		~ (A & ~)	11, D15
17.		~ (A & b)	12, 15, 16, ~ i
18.		A & b	17, n&e.g. ~ e
19.		A & ~<~ & A & b	11-18, & i
20.		A & b = A & ~<~	10, 19, d&e.f. = .
21.	Ab	A & b = A & ~<~	1-20, & i

T14 $\neg A, \neg A \supset \exists b, \neg A \supset b$

1.	A	A \supset A	hyp
2.		$\exists b, \neg A \supset b$	1, \exists i, [A/b]
3.		A \supset A $\supset \exists b, \neg A \supset b$	1-2, \supset i
4.		$\neg A, \neg A \supset \exists b, \neg A \supset b$	1-3, \supset i

T15 $\neg \{A\}$

1.	$\neg BC, \neg BC, \neg B \supset A, C \supset A \supset B \supset C \equiv \neg \{A\}$	D2
2.	$\neg BC, \neg B \supset A, C \supset A \supset B \supset C \equiv \neg \{A\}$	1, \wedge/\wedge
3.	BC	hyp
4.	BC	B \supset A, C \supset A
5.	BC	B \supset A
6.	BC	C \supset A
7.	BC	B \supset B, \sim (B \supset B)
8.	BC	B \supset B
9.	BC	\sim (B \supset B)
10.	BC	B \supset C
11.	BC	B \supset A, C \supset A \supset B \supset C
12.	$\neg BC, \neg B \supset A, C \supset A \supset B \supset C \equiv \neg \{A\}$	3-9, \supset i
		3-10, \supset i
		2, 11, \equiv e

T16 $\sim \downarrow \{A\}$

1.	$\downarrow \{A\}$	hyp
2.	$\neg A, \neg \exists b, \neg A \supset b \equiv \downarrow \{A\}$	D3
3.	$\neg \exists b, \neg A \supset b \equiv \downarrow \{A\}$	2, \supset e, \wedge/\wedge
4.	$\exists b, \neg A \supset b$	3, 1, \equiv e
5.	b	A \supset b
6.	b	A \supset A
7.	b	\sim (A \supset A)
8.	b	$\sim \neg \exists b, \neg A \supset b$
9.	$\sim \exists b, \neg A \supset b$	4, 5-8, \exists e
10.	$\sim \downarrow \{A\}$	1, 4, 9, \sim i

T17 $\sim(\exists\{A\})$

1.	$\{A\}$	hyp
2.	$\exists A \{ \exists A \{ A \in A \} = \{ \emptyset \} \}$	D1
3.	$\exists A \{ A \in A \} = \{ \emptyset \}$	2, \cup e, a/a
4.	$\exists A \{ A \in A \}$	3, 1, \exists e
5.	A A \in A	hyp. \exists e
6.	A $\sim(A \in A)$	T8
7.	$\sim(A \in A)$	6, \cup e
8.		
9.	$\sim \exists A \{ A \in A \}$	5, 7, \sim e
10.	$\sim \exists A \{ A \in A \}$	4, 5-9, \exists e
11.	$\sim(\exists\{A\})$	1, 4, 10, \sim i

Lecture de T17: il n'est pas le cas que A soit un nom individuel.

Arrêtons-nous un instant et profitons de ces quelques thèses pour mettre en évidence la subtilité de l'outil ontologique. Pour ce faire revenons encore une fois à Russell. Il écrivait en 1905:

En vertu de la loi du tiers exclu, ou bien 'A & B' ou bien 'A n'est pas B' doit être vrai. Donc ou bien 'l'actuel roi de France est chauve' ou bien 'l'actuel roi de France n'est pas chauve' doit être vrai. Néanmoins si nous énumérons les choses qui sont chauves et ensuite celles qui ne sont pas chauves, nous ne trouverions pas l'actuel roi de France ni sur une liste ni sur l'autre. Les hégéliens qui aiment une synthèse, conclueront probablement qu'il porte une perruque, (Russell, 1970, p. 177).

Attribuons le nom R à 'l'actuel roi de France'. De manière empirique, 'l'actuel roi de France' est un nom vide; on obtient donc:

$$\begin{aligned} \rightarrow\{R\} & \quad T15 \\ \sim(\exists\{R\}) & \quad T17 \end{aligned}$$

Ces deux thèses expriment que le nom R est unique, mais vide.

Traduisons dans le symbolisme de l'ontologie les deux énoncés suivants:

1. Il n'est pas le cas que l'actuel roi de France est chauve.

$$E' : \sim (R \in c)$$

2. L'actuel roi de France n'est pas chauve.

$$E'' : R \in \langle c \rangle$$

Ces deux expressions ne possèdent pas entre elles la relation d'équivalence, - commentaire de la thèse T12 -.

La proposition E' est vraie.

1.		R ∈ c	hyp.
2.		R ∈ R	1, T5
3.		$\exists A, \ulcorner A \in R \urcorner$	2, $\exists i$, [R/A]
4.		$\sim (!R \S)$	T17
5.		$\sim \exists A, \ulcorner A \in R \urcorner$	4, déf !
6.		$\sim (R \in c)$	1, 3, 5, $\sim i$

La proposition E'' est fausse; en effet, elle entraîne une contradiction.

1.		$R \in \langle c \rangle$	
2.		R ∈ R	1, T5
3.		$\sim (R \in R)$	T 9, R est un nom vide.

Il est ainsi possible de résoudre dans l'ontologie certains des problèmes soulevés par Russell, (Rickey, notes de cours, 1973).

$$\lfloor AB \rfloor \lceil A \in B \cdot \lfloor CD \rfloor \lceil C \in B \cdot D \in B \cdot \supset = \{CD\} \rceil \supset = \{AB\} \rceil$$

1.	A B	—	$A \in B \cdot \lfloor CD \rfloor \lceil C \in B \cdot D \in B \cdot \supset = \{CD\} \rceil$	hyp
2.			$A \in B$	1, \wedge e
3.			$\lfloor CD \rfloor \lceil C \in B \cdot D \in B \cdot \supset = \{CD\} \rceil$	1, \wedge e
4.			$A \in B \cdot B \in B \cdot \supset = \{AB\}$	3, \wedge e, C/A, D/B
5.		C D	$C \in B \cdot D \in B$	hyp
6.			$\lfloor CD \rfloor \lceil C \in B \cdot D \in B \cdot \supset = \{CD\} \rceil$	3, réit
7.			$C \in B \cdot D \in B \cdot \supset = \{CD\}$	6, \wedge e
8.			$\neg \{CD\}$	7, 5, \supset e
9.			$C \in D \cdot D \in C$	8, déf. =
10.			$C \in D$	9, e
11.			$C \in B \cdot D \in B \cdot \supset C \in D$	5-10, \supset i
12.			$\lfloor CD \rfloor \lceil C \in B \cdot D \in B \cdot \supset C \in D \rceil$	5-11, \supset i
13.		C B	$C \in B$	hyp
14.			$C \in B$	13, rép.
15.			$C \in B \supset C \in B$	13-14, \supset i
16.			$\lfloor CB \rfloor \lceil C \in B \supset C \in B \rceil$	13-15, \supset i
17.			$\exists C \lceil C \in B \rceil$	2, \exists i, [A/C]
18.			$B \in B$	17, 16, 12, \wedge i, Ax A/B, a/B
19.			$A \in B \cdot B \in B$	2, 18, \wedge i
20.			$= \{AB\}$	19, 4, \supset e
21.			$A \in B \cdot \lfloor CD \rfloor \lceil C \in B \cdot D \in B \cdot \supset = \{CD\} \rceil \supset = \{AB\}$	1-20, \supset i
22.			$\lfloor AB \rfloor \lceil A \in B \cdot \lfloor CD \rfloor \lceil C \in B \cdot D \in B \cdot \supset = \{CD\} \rceil \supset = \{AB\} \rceil$	1-21, \supset i

Terminons cette partie en exposant sans démonstration une liste de thèses et de définitions.

- T19 $\vdash_{AB} \{A \in B, B \in a \rightarrow A \in a\}$
 T20 $\vdash_{AB} \{A \in A, B \in B, A \in B \rightarrow B \in A\}$
 T21 $\vdash_{AB} \{A \in B, B \in a \rightarrow \{A\} \in B\}$
 T22 $\vdash_{Ab} \{A \in a, a \{a\} \rightarrow A \in b\}$
 T23 $\vdash_a \{a \{aa\}\}$
 T24 $\vdash_{ab} \{a \{a\} \rightarrow a \{b\}\}$
 T25 $\vdash_{abc} \{a \{a\} \cdot b \{b\} \rightarrow a \{a\}\}$

soit la relation d'égalité faible, f , définie ainsi:

$$afb = df \quad a \{ab\} \text{ est une thèse.}$$

Cette relation est réflexive, symétrique et transitive.

- T26 $\vdash_a \{a \{aa\}\}$
 T27 $\vdash_{ab} \{a \{ab\} \rightarrow \{ba\}\}$
 T28 $\vdash_{abc} \{a \{ab\} \cdot \{bc\} \rightarrow \{ac\}\}$

soit la relation d'identité, d , définie ainsi:

$$adb = df \quad \{ab\} \text{ est une thèse}$$

Cette relation est irréflexive, symétrique et transitive.

- T29 $\vdash_{AB} \{A \in B\} \cdot a \{AB\}$

Les définitions et thèses suivantes sont empruntées à Rickey, (1972, p. 8).

- D19 $\vdash_{abc} \{a \{ab\} \cdot \{ac\} \rightarrow \{bc\}\} \cdot \{abc\} \{a \{ab\} \cdot \{cb\} \rightarrow \{ac\}\} \cdot a \{a\}$

Lecture de $a \{a\}$: a est la connexion binaire bijective.

- D20 $\vdash_{ab} \{a \{a\} \rightarrow \{a\}\} \cdot \{A\} \{A \in a\} \rightarrow \{B\} \{a \{ab\} \cdot B \in b\} \cdot \{A\} \{A \in b\} \rightarrow \{B\} \{a \{ba\} \cdot B \in a\} \cdot a \{a\}$

Lecture de $a \{a\}$: a et b sont équinumériques.

- D21 $\vdash_{ab} \{a \{c\} \{c\} \cdot \{ca\}\} \cdot a \{a\} \cdot a \{a\}$

Lecture de $a \{a\}$: a est plus petit que b

D22 $\lfloor ab \rfloor \ulcorner \langle \{ab\} \vee \{ab\} \rangle \urcorner = \ulcorner \langle \{ab\} \rangle \urcorner$

Lecture de $\ulcorner \langle \{ab\} \rangle \urcorner$: a est plus petit ou égal à b

D23 $\lfloor \phi a \rfloor \ulcorner \phi \{a\} \urcorner \cdot \lfloor b \rfloor \ulcorner \langle \{ba\} \cdot \phi \{b\} \rangle \urcorner \cdot \exists \ulcorner \langle \{ab\} \rangle \urcorner \cdot \exists \ulcorner \text{Irr} \langle \phi \rangle \{a\} \urcorner$

Lecture de $\ulcorner \text{Irr} \langle \phi \rangle \{a\} \urcorner$: a est minimal relativement à ϕ

D24 $\lfloor a \rfloor \ulcorner \phi b \urcorner \cdot \phi \{b\} \cdot \lfloor d \rfloor \ulcorner \phi \{d\} \urcorner \cdot \exists \ulcorner \langle \{da\} \rangle \urcorner \cdot \exists \ulcorner \text{Irr} \langle \phi \rangle \{c\} \urcorner \cdot \exists \ulcorner \text{Fin} \{a\} \urcorner$

Lecture de $\ulcorner \text{Fin} \{a\} \urcorner$: a est fini.

T30 $\lfloor a \rfloor \ulcorner \in \{aa\} \urcorner$

T31 $\lfloor ab \rfloor \ulcorner \in \{ab\} \urcorner \cdot \ulcorner \{ba\} \urcorner$

T32 $\lfloor abc \rfloor \ulcorner \in \{ab\} \urcorner \cdot \ulcorner \{bc\} \urcorner \cdot \ulcorner \{ac\} \urcorner$

T33 $\lfloor ab \rfloor \ulcorner \text{Fin} \{a\} \urcorner \cdot \ulcorner \text{Fin} \langle ab \rangle \urcorner$

4.7. LES DIRECTIVES D'EXTENSIONNALITE

Nous venons d'exposer deux directives de définition ontologique; l'une possédant le caractère protothétique, l'autre le caractère ontologique. Cette même dualité existe au niveau de l'extensionnalité.

4.7.1. LA DIRECTIVE D'EXTENSIONNALITE ONTOLOGIQUE DE TYPE PROTOTHETIQUE

La formulation de cette directive est semblable à celle exposée dans le système S3, pp. 254-256. L'application de cette règle dans l'ontologie fournit un ensemble de thèses plus vaste que celui de la protothétique. La raison en est simple: l'ontologie connaît des catégories sémantiques que la protothétique ne possède pas; toute thèse qui résulte de la directive d'extensionnalité ontologique de type protothétique s'inscrit en fonction de ce que le système contient actuellement. La base sémantique de l'ontologie étant plus étendue que celle de la protothétique, l'ensemble des thèses obtenues par cette directive est donc plus riche. Rappelons le schéma général exposée dans la protothétique; il est de nature à préciser cette différence.

$$\alpha\beta \left[\left[v_1 \dots v_j \right] \right] \alpha(v_1 \dots v_j) \neq \beta(v_1 \dots v_j) = \Psi(\alpha) \neq \Psi(\beta)$$

F1
F2
F3
F4

F1-F4 sont des fonctions qui appartiennent à la catégorie sémantique des propositions.

Les foncteurs variables α et β appartiennent donc à la catégorie des foncteurs formateurs de proposition à arguments $v_1 \dots v_j$; ces arguments sont de catégorie sémantique que connaît actuellement l'ontologie. C'est notamment ici qu'apparaît une distinction avec une réalisation de la directive d'extensionnalité dans la protothétique. Dans ce dernier système les fonctions F1 et F2 possèdent des arguments qui appartiennent à des catégories sémantiques spécifiquement protothétiques. La situation est différente dans l'ontologie puisque en plus de la catégorie primitive des propositions apparaît la catégorie primitive des noms.

Avant de préciser davantage cette directive, étudions les relations qui existent entre les fonctions F1-F4.

- Les foncteurs α et β des fonctions F1 et F2 sont analogues. Les parenthèmes qui les suivent sont similaires.

ex.: $\alpha \{v_1\} \{v_2\}$ et $\beta \{v_1\} \{v_2\}$

- Les foncteurs α et β appartiennent à la même catégorie sémantique. Il s'agit des foncteurs formateurs de proposition à arguments de catégorie sémantique contenue actuellement dans l'ontologie, ou de foncteurs formateurs de foncteur formateur de proposition à arguments de catégorie sémantique contenue actuellement dans l'ontologie, à arguments de catégorie sémantique contenue actuellement dans l'ontologie, ou, etc. ... Le caractère protothétique dans l'ontologie est ainsi associé à ces foncteurs.

- Les foncteurs F1 et F2 possèdent une relation bien déterminée avec F3 et F4. Attribuons aux foncteurs α et β la catégorie sémantique C_1 . Le foncteur des fonctions F3 et F4 doit être de la catégorie S/C_1 .

- ex.: F1 : $\alpha\{a\}$ catégorie sémantique de α : S/N
 F2 : $\beta\{a\}$ catégorie sémantique de β : S/N
 F3 : $\psi\{\alpha\}$ catégorie sémantique de ψ : S/(S/N)
 F4 : $\psi\{\beta\}$

- Les foncteurs α et β sont d'une catégorie sémantique différente de celle des catégories primitives, S ou N. Leur catégorie sémantique est donc complexe; $C_i : C_j / C_m \dots C_n$. Nous savons davantage: ces foncteurs possèdent le caractère protothétique dans l'ontologie; la première occurrence de la description de leur catégorie sémantique est donc S.

$$C_i : S \dots / C_m \dots C_n$$

- Insistons une fois encore sur le fait qu'il n'est possible d'inscrire une thèse résultant de la directive d'extensionnalité qu'à l'unique condition que les catégories sémantiques qui y sont représentées appartiennent actuellement au système.

Deux conditions fondamentales règlent donc l'inscription d'une thèse d'extensionnalité. Il y a d'une part l'exigence d'une relation sémantique bien déterminée entre ses foncteurs. Il y a également la nécessité d'opérer dans un système qui contient actuellement les catégories sémantiques qui sont l'enjeu de la thèse.

Considérons ce que le système développé ici contient comme catégories sémantiques. Ceci permettra de mettre en évidence si cette ontologie est suffisamment riche pour inscrire une thèse d'extensionnalité de type protothétique.

CATEGORIES SEMANTIQUES	CONSTANTES	PARENTHESMES ASSOCIES
1. S/N	!, \rightarrow , \downarrow , $\{ - \}$, Irr \leftarrow , Fin	$\{ - \}$
2. S/NN	=, \neq , 0, \emptyset , C, C, Δ , E, ∞ , \leftarrow , \in	$\{ -- \}$
3. S/(S/N)	!	$\{ - \}$

4.	S/(S/NN)	\leftrightarrow	$\{-\}$
5.	N	\wedge, \vee	
6.	N/N	$\sim, \varepsilon \leftarrow \rightarrow$	$\leftarrow \rightarrow$
7.	N/NN	\cap	$\leftarrow \rightarrow$
8.	N/(S/N)	stsf	$\{ \rightarrow \}$
9.	(S/N)/N	ε	$\{ \rightarrow \}$
10.	(S/N)/(S/NN)	irr	$\leftarrow \rightarrow$
11.	(N/N)/N	ε	$\leftarrow \rightarrow$

La directive d'extensionnalité ontologique de type protothétique permet d'inscrire des thèses d'extensionnalité pour les catégories sémantiques qui possèdent le caractère protothétique, c'est-à-dire celles dont la première occurrence de leur description est une proposition, S. Dans la liste ci-dessus, il s'agit des catégories 1-4 et 9-10. Inscrire la thèse d'extensionnalité pour la catégorie C_i , nécessite de reconnaître dans le système la catégorie sémantique S/C_i . Seule l'existence de deux catégories sémantiques qui possèdent entre elles cette relation rend possible l'inscription d'une thèse d'extensionnalité de type protothétique. Actuellement, cette situation est réalisée pour la catégorie S/N associée à la catégorie S/(S/N) ainsi que pour la catégorie S/NN associée à la catégorie S/(S/NN). Il est dès lors possible d'inscrire deux thèses d'extensionnalité.

$$T34 \quad \underbrace{\alpha \beta \{a\} \leftarrow \beta \{a\}}_{S/N \text{ relation } S/(S/N)} = \psi \{ \psi \leftarrow \} = \psi \{ \beta \}$$

$$T35 \quad \underbrace{\alpha \beta \{ab\} \leftarrow \beta \{ab\}}_{S/NN \text{ relation } S/(S/NN)} = \psi \{ \psi \leftarrow \} = \psi \{ \beta \}$$

Aucune autre thèse d'extensionnalité de ce type ne peut être inscrite actuellement. Pour dépasser cet état, il est nécessaire d'étendre sé-

mantiquement le système, c'est-à-dire d'introduire, via la directive de définition, de nouvelles catégories sémantiques. C'est ce que nous allons faire maintenant.

Nous allons opérer de la manière suivante:

1. sélectionner une catégorie sémantique C_i pour laquelle nous avons la volonté d'introduire le principe d'extensionnalité.
2. définir un foncteur constant de la catégorie S/C_i .
3. inscrire la thèse d'extensionnalité pour la catégorie C_i .

Exemple I : Inscription du principe d'extensionnalité pour la catégorie sémantique $S/(S/N)$

- Introduction dans le système de la catégorie $S/(S/(S/N))$.

$$D25 \quad \lambda p \lambda \{ \lambda \{ \lambda \{ p \} \} \} = \{ \{ p \} \}$$

L'opérateur * est de la catégorie désirée, $S/(S/(S/N))$. Il est donc possible maintenant d'utiliser une variable de cette catégorie.

- Inscription de la thèse d'extensionnalité pour la catégorie sémantique, $S/(S/N)$

$$T36 \quad \lambda p \lambda \{ \lambda \{ \lambda \{ \{ \} \} \} \} = \{ \{ \{ \} \} \} = \lambda \psi \lambda \{ \psi \{ \langle \rangle \} \} = \psi \{ \{ \} \}$$

$S/(S/N)$ — relation — $S/(S/(S/N))$

Exemple II : Inscription du principe d'extensionnalité pour la catégorie sémantique $(S/N)/N$

- Introduction dans le système de la catégorie $S/((S/N)/N)$

$$D26 \quad \lambda y \lambda \{ \lambda \{ \lambda \{ \lambda \{ \{ a \} \} \} \} \} = \{ \{ \{ a \} \} \}$$

L'opérateur * est de la catégorie désirée, $S/((S/N)/N)$

- Inscription de la thèse d'extensionnalité pour la catégorie sémantique $(S/N)/N$

$$T37 \quad \alpha \{a\} \{b\} \equiv \beta \{a\} \{b\} \equiv \psi \{a\} \{b\} \equiv \psi \{a\} \{b\}$$

(S/N)/N — relation — S/((S/N)/N)

Ce dernier exemple est intéressant car il montre qu'il est aussi possible d'inscrire le principe d'extensionnalité pour une catégorie sémantique qui est liée à une fonction paramétrée.

Remarquons enfin que les définitions D25 et D26 n'ont pas une signification logique profonde. Leur valeur réside bien plus dans le rôle de révélateur de catégorie sémantique nouvelle que ces deux définitions jouent.

4.7.2. LA DIRECTIVE D'EXTENSIONNALITE ONTOLOGIQUE DE TYPE ONTOLOGIQUE

Cette directive permet d'inscrire le principe d'extensionnalité pour les catégories sémantiques qui possèdent un caractère ontologique, c'est-à-dire celles dont la première occurrence de leur description est un nom, N. Dans la liste précédente (p. 317), il s'agit des catégories 6-8 et 11. Au caractère ontologique près, les conditions fondamentales qui règlent l'inscription d'une thèse d'extensionnalité de ce type sont les mêmes que celles présentées pour la directive précédente. Il est donc nécessaire que les deux catégories sémantiques qui sont l'enjeu de la thèse d'extensionnalité soient contenues actuellement dans le système, comme il est nécessaire qu'elles possèdent entre elles une relation bien déterminée. Pour inscrire le principe d'extensionnalité ontologique pour la catégorie C_j , il est indispensable que le système contienne actuellement les catégories C_j et S/C_j .

4.7.2.1. FORMULATION DE LA DIRECTIVE D'EXTENSIONNALITE ONTOLOGIQUE DE TYPE ONTOLOGIQUE

A est une thèse résultant de la directive d'extensionnalité de type ontologique relativement à ce que le système contient, si

7. Le foncteur Ψ de la fonction F3 (respectivement ϕ de la fonction F4) est un foncteur variable formateur de proposition à un argument équiforme au foncteur ou au terme variable α (respectivement β), et il possède un lieu associé (donc équiforme) dans le quantificateur du deuxième terme de A.

8. Le quantificateur du deuxième terme de A ne contient qu'un lieu, (Ψ et β sont donc équiformes).

$$\text{Schéma I : } A : \forall \beta \exists A \exists \alpha \equiv \exists \beta \exists \Psi \{ \alpha \} \equiv \Psi \{ \beta \} \neg \neg$$

$$\text{Schéma II : } A : \forall \beta \exists A \forall v_1 \dots v_n \exists \alpha \langle v_1 \dots v_n \rangle \dots \langle v_j \dots v_n \rangle \equiv \exists \beta \langle v_1 \dots v_n \rangle \dots \langle v_j \dots v_n \rangle \exists \Psi \{ \alpha \} \equiv \Psi \{ \beta \} \neg \neg$$

Comme nous l'avons fait pour la directive d'extensionnalité de type protothétique, observons s'il est possible d'inscrire actuellement une thèse résultant de la directive d'extensionnalité de type ontologique.

Deux conditions doivent être réunies:

1. La présence dans le système d'une catégorie Ci qui possède le caractère ontologique, c'est-à-dire, dont la première occurrence soit un nom.

2. La présence dans le système de la catégorie S/Ci.

La seule inscription possible actuellement, (voir liste pp.316-7), est celle qui exprime le principe d'extensionnalité pour la catégorie des noms. En effet, les catégories N et S/N existent dans le développement de cette ontologie.

$$\text{T38 } \forall a \exists A \exists \alpha \equiv \exists \beta \exists \Psi \{ \alpha \} \equiv \Psi \{ \beta \} \neg \neg$$

N - relation - S/N

Nous voulons maintenant étendre sémantiquement le système de telle manière qu'il soit possible d'inscrire d'autres thèses extensionnelles de type ontologique.

Exemple I. Inscription du principe extensionnel pour la catégorie N/N

- Introduction dans le système de la catégorie S/(N/N)

$$D27 \quad \llbracket \alpha \rrbracket \llbracket \exists Aa \rrbracket \llbracket A\alpha \langle a \rangle \rrbracket \equiv * \langle \alpha \rangle \rrbracket$$

L'opérateur * est bien de la catégorie désirée: S/(N/N)

- Inscription du principe d'extensionnalité pour la catégorie N/N

$$T39 \quad \llbracket \alpha \rrbracket \llbracket Aa \rrbracket \llbracket A\alpha \langle a \rangle \equiv A\beta \langle a \rangle \rrbracket \equiv \llbracket \psi \rrbracket \llbracket \psi \langle \alpha \rangle \rrbracket \equiv \llbracket \psi \langle \beta \rangle \rrbracket \rrbracket$$

$\underbrace{\llbracket \alpha \rrbracket \llbracket Aa \rrbracket \llbracket A\alpha \langle a \rangle \equiv A\beta \langle a \rangle \rrbracket}_{N/N \text{ relation}} \quad \downarrow \quad \llbracket \psi \rrbracket \llbracket \psi \langle \alpha \rangle \rrbracket \equiv \llbracket \psi \langle \beta \rangle \rrbracket \rrbracket_{S/(N/N)}$

Exemple II. Inscription du principe extensionnel pour la catégorie (N/N)/N

- Introduction dans le système de la catégorie S/((N/N)/N)

$$D28 \quad \llbracket \alpha \rrbracket \llbracket \exists Aab \rrbracket \llbracket A\alpha \langle a \rangle \langle b \rangle \rrbracket \equiv * \langle \alpha \rangle \rrbracket$$

L'opérateur * est bien de la catégorie souhaitée S/((N/N)/N)

- Inscription du principe d'extensionnalité pour la catégorie (N/N)/N

$$T40 \quad \llbracket \alpha \rrbracket \llbracket Aab \rrbracket \llbracket A\alpha \langle a \rangle \langle b \rangle \equiv A\beta \langle a \rangle \langle b \rangle \rrbracket \equiv \llbracket \psi \rrbracket \llbracket \psi \langle \alpha \rangle \rangle \equiv \llbracket \psi \langle \beta \rangle \rangle \rrbracket$$

$\underbrace{\llbracket \alpha \rrbracket \llbracket Aab \rrbracket \llbracket A\alpha \langle a \rangle \langle b \rangle \equiv A\beta \langle a \rangle \langle b \rangle \rrbracket}_{(N/N)/N \text{ relation}} \quad \downarrow \quad \llbracket \psi \rrbracket \llbracket \psi \langle \alpha \rangle \rangle \equiv \llbracket \psi \langle \beta \rangle \rangle \rrbracket_{S/((N/N)/N)}$

Les sept directives qui régissent le développement d'une ontologie fournissent des systèmes d'une rare richesse. Des thèses de tout ordre peuvent y être inscrites pour autant qu'un cheminement constructif soit respecté. Une telle générosité ne se laisse pas saisir sans difficultés. Ces dernières proviennent avant tout d'un jeu d'écriture extrêmement subtil qui permet l'inscription de termes ou d'expressions de toute catégorie sémantique, et ceci sans confusion ni contradiction. Si l'organisation logique des catégories sémantiques 'élémentaires', N et S/NN, se laisse aborder sans trop de difficulté, il n'en va pas toujours de même lorsque l'on cherche à maîtriser les expressions d'ordre supérieur. Ces difficultés disparaissent dès lors que l'on réalise que les propriétés portées par l'axiome ou les thèses en rapport avec

les catégories M et S/NN peuvent être 'déplacées' à tout autre catégorie. Ce déplacement s'accompagne bien sûr d'une modification d'écriture qui porte notamment sur les parenthèses symétriques. Mais la forme globale reste la même. Ainsi, la propriété portée par telle ou telle thèse d'une catégorie sémantique élémentaire peut être projetée dans le champ d'une catégorie sémantique plus complexe. Cette opération consiste en une conservation de forme globale et en une modification des parenthèses symétriques de manière à ce qu'elles soient conformes à la catégorie traitée. C'est ce que nous allons montrer dans la partie suivante.

5. LES EPSILONS D'ORDRE SUPERIEUR

La démonstration d'une thèse qui est l'analogie structurel et relationnel de l'axiome de l'ontologie, à la catégorie sémantique prés, est l'objectif de cette présentation.

... the possibility arises of defining a binary functor whose arguments are not nouns, but which, by playing a role in ontology very similar to the primitive epsilon of the system, can be construed as a proposition forming functor for 'nouns' - such a functor is called a higher epsilon since its arguments belong to non-primitive semantical categories.

... it is evident that the similarity between the primitive epsilon and the higher epsilon is a complete analogy, for all of ontology is derivable for the higher epsilon in the sense that one is guaranteed an internal ontological model for the defined constant.

Indeed, a higher epsilon exists for each and every semantical category definable in ontology, (Canty, 1969, p. 467).

Pour réaliser ce projet, nous procéderons en trois temps. Tout d'abord nous inscrirons quelques définitions et nous établirons quelques thèses afin de préciser ce que nous entendons par l'expression: 'analogie structurelle et relationnelle'. Puis nous proposerons quelques démonstrations qui joueront un rôle déterminant dans l'établissement d'une thèse d'epsilon supérieur. Enfin, nous présenterons

la démarche démonstrative de la thèse d'epsilon supérieur pour la catégorie $S/(S/N)(S/N)$.

5.1. ANALOGIE STRUCTURELLE ET RELATIONNELLE

Rappelons la définition qu'inscrit l'égalité faible pour la catégorie des noms, N :

$$D6: \quad \perp_{ab} \ulcorner A \urcorner \ulcorner A \urcorner a \approx A \urcorner b \urcorner \equiv \circ \{ ab \} \urcorner$$

Partant de cette définition il avait été établi les trois thèses suivantes:

$$T23 \quad : \quad \perp_{a} \ulcorner \circ \{ aa \} \urcorner$$

$$T24 \quad : \quad \perp_{ab} \ulcorner \circ \{ ab \} \urcorner \supset \circ \{ ba \} \urcorner$$

$$T25 \quad : \quad \perp_{abc} \ulcorner \circ \{ ab \} \urcorner . \circ \{ bc \} \urcorner \supset \circ \{ ac \} \urcorner$$

Proposons une nouvelle définition.

$$D29 \quad : \quad \ulcorner \beta \urcorner \ulcorner ab \urcorner \ulcorner \alpha \{ ab \} \urcorner \approx \ulcorner \beta \urcorner \{ ab \} \urcorner \equiv \circ \{ \alpha \beta \} \urcorner$$

Cette définition inscrit l'égalité faible pour la catégorie sémantique S/NN . Définissons une relation r entre deux termes de la catégorie S/NN . Les termes α et β possèdent entre eux la relation r , si et seulement si, $\circ \{ \alpha \beta \} \urcorner$ est une thèse. Cette relation est réflexive, symétrique et transitive. Démontrons la réflexivité:

T4)	$\ulcorner \alpha \urcorner \ulcorner \circ \{ \alpha \alpha \} \urcorner$	
1.	$\alpha \quad ab \quad \alpha \{ ab \} \supset \alpha \{ ab \}$	thèse proto. $p \supset p$
2.	$\alpha \{ ab \} \supset \alpha \{ ab \} . \alpha \{ ab \} \supset \alpha \{ ab \}$	1, A i
3.	$\alpha \{ ab \} \equiv \alpha \{ ab \}$	2, déf. \equiv
4.	$\ulcorner ab \urcorner \ulcorner \alpha \{ ab \} \urcorner \equiv \alpha \{ ab \} \urcorner$	1-3, L 4 i
5.	$\ulcorner \alpha \beta \urcorner \ulcorner ab \urcorner \ulcorner \alpha \{ ab \} \urcorner \approx \ulcorner \beta \{ ab \} \urcorner \equiv \circ \{ \alpha \beta \} \urcorner$	D29
6.	$\ulcorner ab \urcorner \ulcorner \alpha \{ ab \} \urcorner \approx \alpha \{ ab \} \urcorner \equiv \circ \{ \alpha \alpha \} \urcorner$	5, L 2 e, β/α
7.	$\circ \{ \alpha \alpha \} \urcorner$	6, 4, $\equiv e$
8.	$\ulcorner \alpha \urcorner \ulcorner \circ \{ \alpha \alpha \} \urcorner$	1-7, L 4 i

Les deux thèses suivantes inscrivent la symétrie et la transitivité de la relation r .

T42 : $\llbracket \alpha \beta \rrbracket \circ \llbracket \alpha \beta \rrbracket \circ \llbracket \beta \alpha \rrbracket$

T43 : $\llbracket \alpha \beta \rrbracket \circ \llbracket \alpha \beta \rrbracket \circ \llbracket \beta \beta \rrbracket \circ \llbracket \alpha \beta \rrbracket$

Proposons d'autres exemples:

D30 : $\llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket$

égalité faible pour la catégorie S/N

D31 : $\llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket$

égalité faible pour la catégorie (S/N)/N

D32 : $\llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket$

égalité faible pour la catégorie N/N

D33 : $\llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket$

égalité faible pour la catégorie (N/N)/N

Pour chacune de ces définitions il est possible de définir une relation liée à l'opérateur 'o'. Cette relation sera chaque fois réflexive, symétrique et transitive.

Chacune de ces définitions possède une même organisation logique globale (ici il s'agit d'une généralisation A dont l'essence est une fonction équivalentielle; le premier terme de A est une généralisation B, son essence est une fonction équivalentielle dont les arguments sont des fonctions analogues. Le deuxième terme de A est une fonction).

$$A : \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket$$

Les catégories sémantiques présentes dans ces définitions ont entre elles des relations similaires.

$$A : \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket \llbracket \alpha \beta \rrbracket$$

catégorie sémantique Ci; catégorie sémantique S/Ci.

Pour ces raisons,

les définitions D6 et D29-033 sont des analogues structurels et relationnels. D6 et D32-033 sont des analogues structurels et relationnels de caractère ontologique, et D29-031, des analogues structurels et rela-

tionnels de caractère protothétique.

Les définitions suivantes possèdent entre elles, de manière très explicite, cette propriété d'analogie.

$$D34 : \vdash \alpha \downarrow \sim (\circ \{ \alpha \alpha \}) \equiv \wedge \{ \alpha \}^{\sim}$$

Il s'agit de la définition du foncteur contradictoire pour la catégorie sémantique S/N; Davis (1975, p. 154) l'appelle le prédicat contradictoire.

$$D35 : \vdash \alpha \downarrow \sim (\circ \{ \alpha \alpha \}) \equiv \wedge \{ \alpha \}^{\sim}$$

Il s'agit de la définition du foncteur contradictoire pour la catégorie sémantique S/(S/NN).

$$D36 : \vdash \alpha \downarrow \sim (\circ \{ \alpha \alpha \}) \equiv \wedge \{ \alpha \}^{\sim}$$

Foncteur contradictoire pour la catégorie S/(S/N).

$$D37 : \vdash \alpha \downarrow \sim (\circ \{ \alpha \alpha \}) \equiv \wedge \{ \alpha \}^{\sim}$$

Foncteur contradictoire pour la catégorie S/((S/N)/N).

$$D38 : \vdash \alpha \downarrow \sim (\circ \{ \alpha \alpha \}) \equiv \wedge \{ \alpha \}^{\sim}$$

Foncteur contradictoire pour la catégorie S/(N/N).

$$D39 : \vdash \alpha \downarrow \sim (\circ \{ \alpha \alpha \}) \equiv \wedge \{ \alpha \}^{\sim}$$

Foncteur contradictoire pour la catégorie S/((N/N)/N)

Ces quelques résultats n'ont qu'une importance relative. Ils servent avant tout à fixer cette notion d'analogie structurelle et relationnelle

Nous allons maintenant démontrer un résultat de grande importance métalogique: il est possible d'inscrire dans l'ontologie une thèse qui est l'analogue structurel et relationnel de l'axiome pour la catégorie sémantique S/CiCi, pour autant que l'épsilon d'ordre supérieur de catégorie S/CiCi ait été défini. Il s'agit donc de définir un epsilon supérieur, analogue à l'épsilon primitif, c'est-à-dire un epsilon, formateur de proposition à deux arguments de même catégorie sémantique différente de N.

$\epsilon \{a b\}$ proposition singulière



proposition singulière supérieure

$\epsilon \{c_i c_i\}$

epsilon supérieur. S/CiCi

Sur la base de la définition d'un epsilon supérieur de catégorie sémantique $S/(S/N)(S/M)$, nous démontrerons la thèse qui est l'analogie structurel et relationnel de l'axiome, pour cette catégorie-là.

D40 : $L \langle p \rangle \wedge \exists a \langle i \rangle . L \langle i \rangle \supset p \langle i \rangle . L a \langle i \rangle \langle i \rangle . D \langle i \rangle \langle i \rangle :$
 $\equiv \epsilon \langle p \rangle$

5.2. QUELQUES THEOREMES PREPARATOIRES

T44: $\vdash \alpha \rightarrow \exists x \alpha$

1.	α	$\vdash \alpha$	hyp.
2.		$\vdash \exists x \alpha$	hyp. $\exists e$
3.		$\vdash \alpha$	2, déf. \exists
4.		α	3, hyp. $\exists e$
5.		$\vdash \alpha$	2, déf. \exists
6.		$\vdash \alpha$	5, $\wedge e$
7.		α	6, $\wedge e$
8.		$\vdash \alpha$	7, $\exists i$
9.		$\vdash \exists x \alpha$	3, 7-8, $\exists e$
10.		$\vdash \exists x \alpha$	1, 2-9, $\exists e$
11.		$\vdash \alpha \rightarrow \exists x \alpha$	1-10, $\rightarrow i$
12.		$\vdash \alpha \rightarrow \exists x \alpha$	1-11, $\wedge i$

D41 : $\vdash \exists x \exists y \alpha \rightarrow \exists y \exists x \alpha$

(Sobocinski, 1965, notes de cours)

T45: $\vdash \exists x \exists y \alpha \rightarrow \exists y \exists x \alpha$

1.	α	$\vdash \exists x \exists y \alpha$	D41
2.		α	1, $\wedge e$, b/a
3.		$\vdash \exists x \alpha$	T23
4.		α	3, $\wedge e$
5.		$\vdash \exists x \alpha$	2, 4, $\exists e$
6.		$\vdash \exists x \exists y \alpha$	5, $\exists i$, $[a/b]$
7.		$\vdash \exists x \exists y \alpha$	1-6, $\wedge i$

T46 : $\perp abc \vdash \downarrow \text{fat}(b) \cdot \downarrow \text{fat}(c) \cdot \circ \circ \text{fbc}^{\sim}$

1.	abc	$\downarrow \text{fat}(b) \cdot \downarrow \text{fat}(c)$	hyp.
2.		$\downarrow \text{fat}(b)$	} 1, \wedge o
3.		$\downarrow \text{fat}(c)$	
4.		$\circ \{ab\}$	
5.		$\circ \{ac\}$	2, D41
6.		$\circ \{bc\}$	3, D41
7.		$\downarrow \text{fat}(b) \cdot \downarrow \text{fat}(c) \cdot \circ \circ \text{fbc}$	T24, T26
8.	$\perp abc \vdash \downarrow \text{fat}(b) \cdot \downarrow \text{fat}(c) \cdot \circ \circ \text{fbc}^{\sim}$		1-6, \circ i
			1-9, \wedge i

T47 : $\perp ab \wedge \downarrow \text{fat}(b) \cdot \wedge \{a\} \cdot \circ \wedge \{b\}^{\sim}$

1.	ab	$\downarrow \text{fat}(b) \cdot \wedge \{a\}$	hyp.
2.		$\downarrow \text{fat}(b)$	} 1, \wedge o
3.		$\wedge \{a\}$	
4.		$\circ \{ab\}$	
5.		$\perp A \wedge Aca \wedge Acb^{\sim}$	2, D41
6.		$\perp ab \wedge \perp A \wedge Aca \wedge Acb^{\sim} \equiv \perp \gamma \wedge \gamma \{a\} \wedge \gamma \{b\}^{\sim}$	4, D6
7.		$\perp A \wedge Aca \wedge Acb^{\sim} \equiv \perp \gamma \wedge \gamma \{a\} \wedge \gamma \{b\}^{\sim}$	6, \wedge e
8.		$\perp \gamma \wedge \gamma \{a\} \wedge \gamma \{b\}^{\sim}$	9, 5, \wedge o
9.		$\wedge \{a\} \equiv \wedge \{b\}$	8, \wedge c, γ/\wedge
10.		$\wedge \{b\}$	9, 8, \wedge e
11.		$\downarrow \text{fat}(b) \cdot \wedge \{a\} \cdot \circ \wedge \{b\}$	1-10, \circ i
12.	$\perp ab \wedge \downarrow \text{fat}(b) \cdot \wedge \{a\} \cdot \circ \wedge \{b\}^{\sim}$		1-11, \wedge i

T50 : $\{ a^n b^n \mid n \geq 1 \} \cup \{ a^n \mid n \geq 1 \}$

1.	obv	$\{ a^n b^n \mid n \geq 1 \}$	hyp.
2.		$\{ a^n \mid n \geq 1 \}$	1, A c
3.		$\{ a^n \mid n \geq 1 \}$	1, A c
4.		$\{ a^n b^n \mid n \geq 1 \}$	2, def. 05-3
5.		$\{ a^n b^n \mid n \geq 1 \} \cup \{ a^n \mid n \geq 1 \}$	this set.
6.		$\{ a^n b^n \mid n \geq 1 \} \cup \{ a^n \mid n \geq 1 \}$	5, A c
7.		$\{ a^n b^n \mid n \geq 1 \} \cup \{ a^n \mid n \geq 1 \}$	6, 9, 2 c
8.		$\{ a^n b^n \mid n \geq 1 \} \cup \{ a^n \mid n \geq 1 \}$	7, A c, 1/a
9.		$\{ a^n b^n \mid n \geq 1 \} \cup \{ a^n \mid n \geq 1 \}$	8, 3, 2 c
10.		$\{ a^n b^n \mid n \geq 1 \} \cup \{ a^n \mid n \geq 1 \}$	1-9, 2 c
11.		$\{ a^n b^n \mid n \geq 1 \} \cup \{ a^n \mid n \geq 1 \}$	1-10, A c

T51 : $\{ a^n b^n \mid n \geq 1 \} \cup \{ a^n \mid n \geq 1 \} \cup \{ a^n b^n \mid n \geq 1 \} \cup \{ a^n \mid n \geq 1 \}$

1.	obv	$\{ a^n b^n \mid n \geq 1 \} \cup \{ a^n \mid n \geq 1 \} \cup \{ a^n b^n \mid n \geq 1 \} \cup \{ a^n \mid n \geq 1 \}$	hyp.
2.		$\{ a^n b^n \mid n \geq 1 \}$	1, A c
3.		$\{ a^n \mid n \geq 1 \}$	2, 104
4.		$\{ a^n b^n \mid n \geq 1 \} \cup \{ a^n \mid n \geq 1 \} \cup \{ a^n b^n \mid n \geq 1 \} \cup \{ a^n \mid n \geq 1 \}$	$\{ a^n b^n \mid n \geq 1 \}$ 1-3, 2 c
5.	<u>théorème</u>		1-4, A c

T53: $\alpha\beta\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$. $\alpha\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$. $\alpha\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$. $\alpha\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$. $\alpha\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$. $\alpha\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$. $\alpha\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$.

1.	$\alpha\beta\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$	$\alpha\beta\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$	hyp.
2.	b	$\alpha\beta\delta$	hyp.
3.		$\alpha\beta\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$	2, 3 i, $\frac{b}{a}$
4.	a	$\alpha\beta\delta$	hyp. 3 e
5.		$\epsilon\{\delta\text{-}\theta\text{-}\iota\}$	4, 706
6.		$\alpha\beta\delta$	2, mit.
7.		$\epsilon\{\delta\text{-}\theta\text{-}\iota\}$	6, 708
8.		$\alpha\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$. $\alpha\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$. $\alpha\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$	1, A e, mit.
9.		$\epsilon\{\delta\text{-}\theta\text{-}\iota\text{-}\theta\text{-}\iota\}$	5, 7, 2 i, 2, $\frac{b}{a}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{b}{a}$
10.		$\alpha\beta\delta$	9, 709
11.		$\alpha\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$	1, A e, mit.
12.		$\epsilon\{\delta\text{-}\theta\text{-}\iota\text{-}\beta\}$	11, $\frac{b}{a}$, $\frac{b}{a}$, 5, del.
13.		$\alpha\beta\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$	12, del. e f--
14.	d	$\delta\{\text{-}\theta\text{-}\iota\text{-}\delta\}$	13, hyp. 3 e
15.		$\alpha\beta\delta$	14, del. $\delta\text{-}\theta\text{-}\iota\text{-}\delta$
16.		$\alpha\beta\delta$	10, mit
17.		$\alpha\beta\delta$	15, 16, 724, 728
18.		$\epsilon\{\delta\text{-}\theta\text{-}\iota\text{-}\beta\}$	12, mit.
19.		$\alpha\beta\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$	12, del. e f--
20.		$\beta\delta$	19, 20 e, 19, del.
21.		$\beta\delta$	19, 20, 750, del.
22.		$\beta\delta$	13, 14-21, 3 e
23.		$\beta\delta$	1, 8-22, 3 e
24.		$\delta\beta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$	2-23, 0 i
25.		$\alpha\beta\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$	2-29, 0 i
26.		$\alpha\beta\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$. $\alpha\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$. $\alpha\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$. $\alpha\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$. $\alpha\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$. $\alpha\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$.	$\alpha\beta\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\kappa\lambda\mu$ 1, 28, 0 i 1-26, 0 i
27	théorème		333

5.3. ANALOGUE STRUCTUREL ET RELATIONNEL DE L'AXIOME
POUR LA CATEGORIE S/(S/N)(S/N)

Sobocinski (1965, notes de cours) a démontré l'analogue de l'axiome pour la catégorie S/(S/N)(S/N), mais il l'a fait par rapport à l'axiome simplifié de l'ontologie: $\ulcorner A_2 \ulcorner Aca \text{ a } \ulcorner B_2 \ulcorner A \in B \cdot Bca \urcorner$. Nous démontrerons ce résultat par rapport à l'axiome de l'ontologie (Leśniewski, 1920) que nous avons utilisé dans cet ouvrage.

T54 : $\ulcorner \exists \alpha \ulcorner \ulcorner \exists \gamma \ulcorner \epsilon \ulcorner \gamma \alpha \urcorner \urcorner \cdot \ulcorner \gamma \ulcorner \epsilon \ulcorner \gamma \alpha \urcorner \urcorner \supset \epsilon \ulcorner \gamma \rho \urcorner \urcorner \cdot \ulcorner \gamma \delta \ulcorner \epsilon \ulcorner \gamma \alpha \urcorner \cdot \epsilon \ulcorner \delta \alpha \urcorner \cdot \supset \epsilon \ulcorner \gamma \rho \urcorner \urcorner \urcorner \supset \epsilon \ulcorner \alpha \rho \urcorner \urcorner \urcorner$

1.	$\ulcorner \exists \gamma \ulcorner \epsilon \ulcorner \gamma \alpha \urcorner \urcorner \cdot \ulcorner \gamma \ulcorner \epsilon \ulcorner \gamma \alpha \urcorner \urcorner \supset \epsilon \ulcorner \gamma \rho \urcorner \urcorner \cdot \ulcorner \gamma \delta \ulcorner \epsilon \ulcorner \gamma \alpha \urcorner \cdot \epsilon \ulcorner \delta \alpha \urcorner \cdot \supset \epsilon \ulcorner \gamma \rho \urcorner \urcorner \urcorner$	hyp.
2.	$\ulcorner \exists \alpha \ulcorner \alpha \ulcorner \delta \alpha \urcorner \urcorner$	T51, 1, def.
3.	$\ulcorner \alpha \ulcorner \alpha \ulcorner \delta \alpha \ulcorner \delta \alpha \urcorner \urcorner \urcorner$	T53, 1, def.
4.	$\ulcorner \exists b \ulcorner \alpha \ulcorner \alpha \ulcorner \delta b \urcorner \cdot \alpha \ulcorner \delta c \urcorner \cdot \supset \epsilon \ulcorner \delta b c \urcorner \urcorner$	T52, 1, def.
5.	$\epsilon \ulcorner \alpha \rho \urcorner$	4, 3, v, def. $\epsilon \ulcorner \delta \urcorner$
6.	$\ulcorner \exists \gamma \ulcorner \epsilon \ulcorner \gamma \alpha \urcorner \urcorner \cdot \ulcorner \gamma \ulcorner \epsilon \ulcorner \gamma \alpha \urcorner \urcorner \supset \epsilon \ulcorner \gamma \rho \urcorner \urcorner \cdot \ulcorner \gamma \delta \ulcorner \epsilon \ulcorner \gamma \alpha \urcorner \cdot \epsilon \ulcorner \delta \alpha \urcorner \cdot \supset \epsilon \ulcorner \gamma \rho \urcorner \urcorner \urcorner \supset \epsilon \ulcorner \alpha \rho \urcorner \urcorner$	1-5, \supset i
7.	théorème	

T55 : $\ulcorner \alpha \ulcorner \rho \ulcorner \epsilon \ulcorner \alpha \rho \urcorner \supset \ulcorner \exists \gamma \ulcorner \epsilon \ulcorner \gamma \alpha \urcorner \urcorner \urcorner \urcorner$

1.	$\alpha \ulcorner \rho \ulcorner \epsilon \ulcorner \alpha \rho \urcorner \supset \ulcorner \exists \gamma \ulcorner \epsilon \ulcorner \gamma \alpha \urcorner \urcorner \urcorner \urcorner$	hyp.
2.	$\ulcorner \delta \alpha \ulcorner \alpha \ulcorner \delta \alpha \urcorner \urcorner \cdot \ulcorner \delta b \ulcorner \alpha \ulcorner \delta b \urcorner \cdot \alpha \ulcorner \delta b \urcorner \cdot \supset \epsilon \ulcorner \delta \alpha b \urcorner \urcorner \cdot \ulcorner \alpha \ulcorner \delta \alpha \ulcorner \delta \alpha \urcorner \supset \rho \ulcorner \delta \alpha \urcorner \urcorner \urcorner$	1, def. $\epsilon \ulcorner \delta \urcorner$
3.	$\ulcorner \exists \alpha \ulcorner \alpha \ulcorner \delta \alpha \urcorner \urcorner$	2, A ϵ
4.	$\ulcorner \delta \alpha b \ulcorner \alpha \ulcorner \delta \alpha \urcorner \cdot \alpha \ulcorner \delta b \urcorner \cdot \supset \epsilon \ulcorner \delta \alpha b \urcorner \urcorner$	2, A ϵ
5.	$\ulcorner \alpha \ulcorner \alpha \ulcorner \delta \alpha \urcorner \supset \alpha \ulcorner \delta \alpha \urcorner \urcorner$	th. proto. $\ulcorner \rho \ulcorner \rho \urcorner \urcorner$
6.	$\epsilon \ulcorner \alpha \rho \urcorner$	3-5, A i, def. $\epsilon \ulcorner \delta \urcorner$
7.	$\ulcorner \exists \gamma \ulcorner \epsilon \ulcorner \gamma \alpha \urcorner \urcorner$	6, \exists i, [$\forall \gamma$]
8.	$\epsilon \ulcorner \alpha \rho \urcorner \supset \ulcorner \exists \gamma \ulcorner \epsilon \ulcorner \gamma \alpha \urcorner \urcorner \urcorner$	1-7, \supset i
9.	$\ulcorner \alpha \ulcorner \rho \ulcorner \epsilon \ulcorner \alpha \rho \urcorner \supset \ulcorner \exists \gamma \ulcorner \epsilon \ulcorner \gamma \alpha \urcorner \urcorner \urcorner \urcorner$	1-8, $\ulcorner \alpha \urcorner$

T56: $Lap^5 \epsilon \epsilon \rho \rho \rho \supset \rho \rho^5 \epsilon \epsilon \rho \rho \supset \epsilon \epsilon \rho \rho \rho \supset$

1	$\rho \rho$	$\epsilon \epsilon \rho \rho$	$\rho \rho$
2		$L u^5 \alpha \epsilon \rho \rho \rho \rho \rho \rho \rho$	1, def. 1--3
3		$\rho \rho$	$\rho \rho$
4		$L \beta \alpha \rho \rho \rho \rho$	} 3, def. 1--3
5		$L \alpha \rho \rho \rho \rho \rho \rho \rho \rho$	
6		$L \alpha \beta \rho \rho \rho \rho \rho \rho \rho \rho \rho \rho \rho \rho \rho \rho$	
7		α	$\rho \rho$
8		$L u^5 \rho \rho \rho \rho \rho \rho \rho$	5, mit
9		$L u^5 \alpha \epsilon \rho \rho \rho \rho \rho \rho$	2, mit
10		$\rho \rho \rho \rho \rho \rho \rho$	3, $\rho \rho \rho$
11		$\alpha \epsilon \rho \rho \rho \rho \rho \rho$	9, $\rho \rho \rho$
12		$\alpha \rho \rho \rho$	10, 7, $\rho \rho \rho$
13		$\rho \rho \rho$	11, 12, $\rho \rho \rho$
14		$\rho \rho \rho \rho \rho \rho \rho$	7-13, $\rho \rho$
15		$L \alpha \rho \rho \rho \rho \rho \rho \rho \rho \rho$	7-14, $\rho \rho \rho$
16		$\epsilon \epsilon \rho \rho \rho$	4, 6, 15, def. 1--3
17		$\epsilon \epsilon \rho \rho \rho \supset \epsilon \epsilon \rho \rho \rho$	3-16, $\rho \rho$
18		$\rho \rho^5 \epsilon \epsilon \rho \rho \rho \supset \epsilon \epsilon \rho \rho \rho \supset$	3-17, $\rho \rho \rho$
19		$\epsilon \epsilon \rho \rho \rho \supset \rho \rho^5 \epsilon \epsilon \rho \rho \rho \supset \epsilon \epsilon \rho \rho \rho \supset$	1-18, $\rho \rho \rho$
20		$L \rho \rho^5 \epsilon \epsilon \rho \rho \rho \supset \rho \rho^5 \epsilon \epsilon \rho \rho \rho \supset \epsilon \epsilon \rho \rho \rho \supset$	1-19, $\rho \rho \rho$

T57: $\alpha \beta \delta \epsilon \zeta \eta \theta \iota \kappa \lambda \mu \nu \xi \omicron \pi \rho \sigma \tau \upsilon \phi \chi \psi \omega$

1	$\alpha \beta$	$\epsilon \zeta \eta \theta$			hyp
2		$\gamma \delta$	$\epsilon \zeta \eta \theta \iota \kappa \lambda$		hyp
3			$\epsilon \zeta \eta \theta$		} $\delta, \lambda, \epsilon$
4			$\epsilon \zeta \delta \alpha \beta$		
5			$\epsilon \zeta \eta \theta$		1, mit
6			$\iota \kappa \lambda \mu \nu \xi$		5, dif. $\epsilon \zeta \eta \theta$
7			$\alpha \beta \gamma \delta \epsilon$		6, hyp, δ, ϵ
8			b	$\gamma \delta \epsilon$	hyp.
9				$\epsilon \zeta \eta \theta$	1, mit
10				$\lambda \mu \nu \xi \eta \theta \iota \kappa \lambda \mu \nu \xi$	3, dif. $\epsilon \zeta \eta \theta$
11				$\gamma \delta \epsilon \zeta \eta \theta \iota \kappa$	10, λ, μ
12				$\alpha \beta \gamma$	11, δ, ϵ, ζ
13				$\epsilon \zeta \delta \alpha \beta$	4, mit
14				$\iota \kappa \lambda \mu \nu \xi \eta \theta$	12, dif. $\epsilon \zeta \eta \theta$
15				$c \delta \epsilon \zeta \eta$	14, hyp δ, ϵ
16				$\epsilon \zeta \delta \alpha \beta$	13, mit
17				$\lambda \mu \nu \xi \eta \theta \iota \kappa \lambda \mu \nu \xi$	16, dif. $\epsilon \zeta \eta \theta$
18				$\delta \epsilon \zeta \eta \theta \iota \kappa$	18, λ, μ
19				$\gamma \delta \epsilon$	18, 15, δ, ϵ
20				$\epsilon \zeta \eta \theta$	5, mit
21				$\lambda \mu \nu \xi \eta \theta \iota \kappa \lambda \mu \nu \xi \eta \theta \iota \kappa \lambda \mu \nu \xi$	20, dif. $\epsilon \zeta \eta \theta$
22				$\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \zeta \eta \theta \iota \kappa \lambda \mu \nu \xi$	21, $\lambda, \mu, \nu, \xi, \zeta, \eta$
23				$\alpha \beta \gamma$	7, mit
24				$\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \zeta \eta \theta$	19, 23, λ, ι
25				$\omicron \pi \rho \sigma \tau$	22, 24, δ, ϵ

26		δta	25, 17, 750
27		αtbb	12, uit
28		$\alpha \text{[at]-t[ab]}, \alpha \text{[ab]}$	21, uo
29		$\alpha \text{[at], } \alpha \text{[ab]}$	23, 29, A i
30		$\alpha \text{[ab]}$	28, 23, \alpha e
31		δtbb	30, 26, 750
32		δtb	14, 15-31, E e
33		$\gamma \text{tbb} \alpha \delta \text{tbb}$	8-32, \alpha i
34		$\text{Lb}_2 \gamma \text{tbb} \alpha \delta \text{tbb}^*$	8-33, uo i
35		$\text{Lb}_2 \gamma \text{tbb} \alpha \delta \text{tbb}^*$	6, 7-34, E e
36		$\text{L}^3 \alpha \delta \gamma \text{ta}^*$	
37		$\text{Lab}^* \gamma \text{ta} \gamma \text{tbb}, \alpha \alpha \text{tbb}^*$	} \alpha, \delta \text{t} \text{ et } -\alpha
38		$\text{et} \gamma \delta \text{t}$	
39		$\text{et} \gamma \text{at}, \text{et} \delta \text{at}, \alpha \text{ et} \gamma \delta \text{t}$	25, 26, 39, \delta \text{t} \text{ et } -\alpha
40		$\text{L} \gamma \delta \text{t} \text{ et} \gamma \text{at}, \text{et} \delta \text{at}, \alpha \text{ et} \gamma \delta \text{t}^*$	2-33, \alpha i
41		$\text{et} \alpha \text{pt} \alpha \text{L} \gamma \delta \text{t} \text{ et} \gamma \text{at}, \text{et} \delta \text{at}, \alpha \text{ et} \gamma \delta \text{t}^*$	1-40, \alpha i
42	théorème		1-41, uo i

T58: $\text{L} \alpha \text{pt}^* \text{et} \alpha \text{pt} \alpha \text{L} \alpha \text{pt}^* \text{et} \alpha \text{pt}^* \text{L} \gamma \delta \text{t} \text{ et} \gamma \text{at} \alpha \text{et} \gamma \delta \text{t}^* \text{L} \gamma \delta \text{t} \text{ et} \gamma \text{at}, \text{et} \delta \text{at}, \alpha \text{et} \gamma \delta \text{t}^*$
 T5, T56, T59

T59: $\text{L} \alpha \text{pt}^* \text{et} \alpha \text{pt} \alpha \text{L} \gamma \delta \text{t} \text{ et} \gamma \text{at}^* \text{L} \gamma \delta \text{t} \text{ et} \gamma \text{at} \alpha \text{et} \gamma \delta \text{t}^* \text{L} \gamma \delta \text{t} \text{ et} \gamma \text{at}, \text{et} \delta \text{at}, \alpha \text{et} \gamma \delta \text{t}^*$
 T54, T58

Ax: $\text{L} \alpha \text{b}_2^* \text{et} \text{t} \alpha \text{b}_2 \text{L}^3 \alpha \delta \text{t} \text{ et} \alpha \text{t}^* \text{L} \alpha \delta \text{t} \alpha \text{et} \alpha \text{b}_2^* \text{L} \alpha \text{b}_2 \text{et} \text{t} \alpha \text{b}_2 \text{et} \alpha \text{et} \alpha \text{b}_2^*$

La thèse T59 et l'axiome de l'ontologie sont bien dans un rapport d'analyse structurelle et relationnelle.

6. QUANTIFICATION ET INTERPRETATION

6.1. PREAMBULE

Il y a un problème d'interprétation de la quantification dans les systèmes logiques de Leśniewski, et plus particulièrement dans l'ontologie. En effet, lorsque nous opérons avec les quantificateurs dans la protothétique nous affirmons que Leśniewski utilisait le quantificateur au sens de Peirce et nous nous basions sur les commentaires de Tarski, (1972, p.3, note 3) et de Leśniewski, (1927, p. 187). Ces références nous engagent à accepter la définition proposée par Peirce comme une solution claire.

Here, in order to render the notation as iconical as possible we may use Σ for some, suggesting a sum, and \forall for all, suggesting a product. Thus $\Sigma_i x_i$ means that x is true of some one of the individuals denoted by i or

$$\Sigma_i x_i = x_i + x_j + x_k + \text{etc.}$$

In the same way, $\forall_i x_i$ means that x is true of all these individuals, or

$$\forall_i x_i = x_i x_j x_k, \text{ etc. (Peirce, 1933, p. 228)}$$

Rester fidèle à l'affirmation de Leśniewski qui se réfère explicitement à Peirce conduit à accepter que la quantification est objectuelle. C'est bien ce que révèle le passage précédent: "...Thus $\Sigma_i x_i$ means that x is true of some one of the individuals denoted by i ". Cette quantification est bien objectuelle parce qu'elle opère "... with variables ranging over objects referred to by names", (Küng, Canty, 1976, p. 169). Dans l'ontologie il est possible de définir le nom vide, A , qui ne dénote rien. Il y a ainsi au moins un nom pour lequel il n'y a pas de substitut objectuel. Et que proposer encore pour les noms généraux, noms qui dénotent plusieurs objets? La thèse T10 de l'ontologie rend bien compte du désaccord manifeste qu'il y aurait à qualifier la quantification de l'ontologie d'objectuelle: $\forall A \exists A \exists A$. Accepter qu'il n'est pas vrai que tout ce que dénote un nom est identique à lui-même est en désaccord total avec l'interprétation proposée par Peirce.

Le problème de la quantification chez Leśniewski subsiste donc. Nous avons choisi de le traiter à la lumière de deux types d'interprétation: celle dite standard (objectuelle, référentielle) -Quine, et celle dite substitutionnelle -Kripke. Notre propos est, dans un premier temps, de nous engager dans une analyse de ces interprétations indépendamment des systèmes de Leśniewski, puis, par similarité et différence, de mettre en évidence l'esprit qui caractérise la quantification dans les systèmes de Leśniewski.

La littérature relative aux interprétations objectuelle et substitutionnelle, ainsi que les rapports qu'elles soutiennent avec les systèmes de Leśniewski est abondante. La lecture des différents articles abordant la question révèle une situation confuse. L'univers philosophique interfère profondément dans celui de la pure logique. On y traite tout à la fois du statut de la variable, du problème de l'existence et de celui de la quantification. Souvent, le lecteur a peine à discerner s'il s'agit de logique ou de métalogue, et le tout, bien sûr, est saupoudré de l'ombre de Pégase qui a quitté la mythologie pour ajouter une couleur angoissante à la logique. Les définitions précises font souvent défaut, les affirmations exemptes de tout doute foisonnent... et se confrontent dans un tumulte de confusion qui génère l'incertitude. Malgré cette situation confuse nous voulons tenter d'explicitier le problème de la quantification dans les systèmes de Leśniewski.

6.2. L'INTERPRETATION OBJECTUELLE

L'interprétation objectuelle s'est imposée depuis Peirce. A cet égard, le qualificatif de standard (Marcus, 1972) est révélateur. Fixée au travers des Principia Mathematica, elle connaît aujourd'hui de fervents défenseurs dont Quine est certainement le plus actif.

Résumons cette notion d'interprétation standard et, pour cela, empruntons à Marcus son exposé concis et précis.

*Let us summarize what counts as a standard interpretation.
We specify a well defined domain of objects over which*

the variables are said to range. The interpretation assigns objects from that domain to the individual constants. This is done by associating with those constants names or descriptions of the objects. Predicate constants are assigned properties which in a wholly extensional language may be identified with sets the members of which have that property i.e. its satisfaction class. This is done by associating with that predicate constant a predicate name or description. Sentence constants are assigned propositions which in a wholly extensional language may be identified with one of two truth values. The truth of an atomic sentences is defined in terms of satisfaction. What remains to complete the interpretation is a truth definition for the logical constants. A universally quantified sentence is true iff the open sentence which follow the quantifier is satisfied by all the objects of the domain and an existentially quantified sentence is satisfied if the open sentence is satisfied by at least one object, (Marcus, 1972, pp. 240-241).

Bien qu'apparemment claire, une telle définition soulève cependant quelques problèmes. Quel est le statut de la quantification dans le langage objet? Quelle est la "forme" possible de l'univers du discours qui entre dans le jeu de l'interprétation? Quelles relations soutiennent la quantification avec l'univers du discours en fonction de ce qui va être interprété? Afin de mieux cerner ces difficultés nous nous proposons de dissocier ce qui concerne le pur jeu formel de ce sur quoi il va être appliqué. Situons-nous pour cela au sein du calcul des prédicats du premier ordre et considérons l'expression $(x)A(x)$ comme celle d'une thèse du système. Les règles du système, indépendamment de toute interprétation, permettent d'opérer sur la variable x , de la remplacer, de lui substituer une constante c , ...

m	$(x)A(x)$	thèse
m+1	$A(c)$	m, ()e, x/c
m+2	$x (x)A(x)$	m, reit.
m+3	$ A(y)$	m+2, ()e, x/y
m+4	$(y)A(y)$	m+2-m+3, ()i
m+5	$A(c)A(y)A(y)$	m+1, m+4, \wedge i

De manière purement syntaxique, les règles associées au quantificateur permettent une telle transformation -il y a bien sûr des

conditions à respecter-. Nous sommes ici au niveau d'un pur jeu syntaxique qui organise le 'déplacement' de variables et de constantes. La clé de toute transformation de ce type est fournie par les variables liées par un quantificateur général. Mais quelque chose résonne étrangement. Nous avons dit "indépendamment de toute interprétation". Nous parlons toutefois abondamment de variables, de constantes; ne s'agit-il pas déjà d'une démarche qui va dans le sens d'une visée interprétative? Question naïve bien sûr! Le pur jeu syntaxique se devrait d'être libéré de ce pour quoi il va être utilisé. L'est-il réellement et la liberté du langage formel n'est-elle pas seulement apparente?

Que la formalisation soit toujours rétrospective, cela prouve qu'elle n'est jamais complète qu'en apparence, et que la pensée formelle vit de la pensée intuitive.
(Merleau-Ponty, 1945, p. 442).

L'antériorité sémantique a sélectionné une organisation particulière du langage formel. Elle ne peut que soumettre la liberté du langage formel à la représentation d'un choix ontologique. C'est en cela qu'il perd ce que d'aucun appelle la neutralité ontologique.

Voyons maintenant de plus près la problématique de l'interprétation. Imaginons un domaine d'objets Ω et une application \mathcal{C} qui associe à toute variable, à toute constante, à tout prédicat, des objets de Ω , des sous-ensembles d'objets, des complexes de n-uples,...

L'application projette littéralement le découpage syntaxique sur l'organisation du réel. Cette projection n'est pas neutre. D'une part elle présuppose l'existence d'un domaine d'objets, ensuite elle traite systématiquement le statut des variables et des constantes à la lumière d'un univers d'objets. Par ce choix, la quantification et la notion d'existence sont indissociables et l'on arrive tout naturellement à ce que l'on prête généralement à Quine: "to be is to be the value of a variable".

Il est vrai qu'utiliser la logique formelle pour parler du monde entraîne qu'il est raisonnable de postuler son existence et, par

conséquent de conclure à l'existence d'objets. Il n'en reste pas moins que cette condition oblige le logicien à accepter qu'il existe au moins un objet. C'est bien cet engagement qui enlève à la logique sa dimension de complète neutralité ontologique. Ce fait gênait déjà Russell. Il écrit dans son ouvrage "Introduction à la philosophie mathématique":

Parmi les mondes possibles, au sens leibnizien, il y en aura ayant un, deux, trois...individus. Il n'apparaît même pas de nécessité logique pour qu'il doive y avoir même un individu pour que le monde puisse exister, (Russell, 1970, pp. 241-242).

Dans les Principia Mathematica les propositions primitives sont telles qu'elles permettent d'inférer qu'un individu au moins existe. Mais aujourd'hui je considère cela comme un défaut de pureté logique. (Russell, 1970, p. 242, note 1).

Quine argue de la raison d'utilité pour éliminer l'univers vide.

It behooves us therefore to put aside the one relatively inutile case of the empty universe so as not to cut ourselves off from laws applicable in all other cases (Quine, 1953, p. 161).

Plier le langage logique à la structure objective de l'expérience est une chose, mais c'est d'une certaine façon amputer à la logique une partie de sa liberté. Leśniewski, nous le montrerons, n'a pas éliminé la possibilité d'envisager un univers vide. Ses systèmes sont ainsi ontologiquement neutres.

Empruntons la définition de Kripke pour préciser la quantification objectuelle: "...referential (objectual) quantifier over terms take names of terms as substitutes..." (Kripke, 1976, p. 353). Ajoutons cependant que cette quantification est objectuelle parce qu'il a été décidé que dans le processus interprétatif tout terme nominal dénotera un objet. Dans le pur jeu syntaxique rien de devrait laisser supposer que c'est de cela qu'il s'agit. Que la pertinence d'une telle construction se révèle au niveau de l'interprétation d'un univers d'objets non-vide est une autre affaire. Et c'est bien a posteriori et seulement à posteriori qu'il est possible d'affirmer que les quantificateurs sont

objectuels. Posons-nous une autre question: que sont ces objets et ces noms? Les objets sont-ils des entités concrètes, peuvent-ils être des classes,...

Quine of course prefers physical objects to others. He works hard to defend and justify this preference, however, but he does not altogether succeed in giving the phrase 'physical object' a clear meaning. Nonetheless one would not cavil over taking D as the domain of physical objects. Set theorists demand another domain for their variables to range over, a domain of sets or classes. But the theologian needs another, and the literary critic still another, and so on. (Martin, 1962, p. 527.)

Ce n'est pas au logicien d'en décider et le terme d'objet est bien commode, mais le problème n'en subsiste pas moins.

Le langage formel doit être doté de conditions qui lui offrent une plus grande liberté. Il n'a pas à être conçu uniquement sur la base de présuppositions existentielles. Il n'a pas non plus à privilégier le seul aspect de l'individuel.

6.3. L'INTERPRETATION SUBSTITUTIONNELLE

6.3.1. PREAMBULE

Depuis quelque vingt ans, l'interprétation substitutionnelle suscite un vif intérêt dans la communauté des logiciens. Elle offre une alternative à l'interprétation objectuelle. Leblanc lui a réservé quelques pages dans lesquelles il y expose certains aspects historiques (Leblanc, 1976, pp. 293-301). On peut notamment y lire:

The substitution interpretation of the quantifiers is commonly attributed to Wittgenstein, (Leblanc, 1976, p. 293).

En 1973, il était plus catégorique lorsqu'il écrivait:

... the substitution interpretation of 'all' is at least fifty years old: you find it, for example, in Wittgenstein's Tractacus... (Leblanc, 1973)

Baxley tempère quelque peu ce jugement. Il montre qu'il existe certaine

similarité entre la théorie de la quantification chez Wittgenstein et l'interprétation substitutionnelle. Elle n'est cependant pas suffisante pour les confondre.

Certainly it is no exaggeration to say that Wittgenstein's theory of quantification is neither simply truth-functional, ..., nor is it simply substitutional, although there are similarities between the two... (Baxley)

Il est possible que ce soit Beth qui ait été le premier à engager le calcul quantificationnel dans le domaine de l'interprétation substitutionnelle. Il ne parle pas explicitement de l'assignement de valeur de vérité, mais son évaluation régulière (regular valuation) remplit le même rôle, (Beth, 1959, pp. 263-267). Puis dès la fin des années 60, Marcus, Dunn et Belnap, Leblanc entre autres, ont contribué aux développements de cette nouvelle interprétation.

L'interprétation substitutionnelle se caractérise par le fait qu'elle n'utilise pas la notion de satisfaction; elle est avant tout syntaxique. Domaine et satisfaction ne sont plus nécessaires; la quantification se passe de la notion d'existence et la notion de validité est ramenée au niveau purement logique de tautologie.

An alternative for altering the semantics of quantification is one which abandons a definition in terms of satisfaction and consequently disconnects it from ontological commitment altogether. Like the sentence connectives it is given in terms of truth alone. The rest is syntactical. (Marcus, 1972, p. 243).

6.3.2. UNE DEFINITION

Les définitions de l'interprétation substitutionnelle sont nombreuses. Elles diffèrent parfois par des détails qui ne manquent pas d'importance. Certaines d'entre elles nous engagent à penser que ce qui est substitué à une variable liée par un quantificateur est un nom (Marcus, 1972, p. 243), alors que d'autres précisent que le substitué n'est pas un nom (de terme) mais le terme lui-même. Mais afin

de ne pas offrir une définition qui, d'emblée, pourrait paraître confuse, nous ne développerons pas tout de suite les difficultés que l'on peut observer dans la littérature.

Dans un très bel article quoique difficile, Kripke propose une définition claire et précise. Elle nous servira de référence.

Let L_0 be a language. The sentences of L_0 are assumed somehow to be effectively specified syntactically; in the larger language L to be developed, an L_0 -sentence will be called atomic. We assume that L_0 has a non-empty class C of expressions called the substitution class; the elements of C are called terms, but we do not assume that terms are to 'denote' any objects. Nor do we assume that they even be syntactically similar to the terms of a referential language. Terms could be any class of expressions of L_0 , sentences, connectives, even parenthesis (after Lesniewski).

Let x_1, x_2, \dots be an infinite list of variables not contained in L_0 . Let A be a sentence of L_0 . An expression A' obtained by replacing zero or more terms in A by variables is called an (atomic) preformula or preform. If the result of replacing variables by arbitrary terms in an atomic preformula is always itself a sentence of L_0 , the preformula is an (atomic) form. (The sentences of L_0 are automatically forms, since they are the degenerate case with no variables.) In general there may not be an effective test for when a preform is a form. A simple sufficient condition for such a test to exist is the syntactic requirement that, in any sentence of L_0 , replacement of any term by any other term still yields a sentence of L_0 . In this case, every (atomic) preform is a form.

We wish to extend L_0 to a language L . If there is an effective test for the formhood of a preform, take all forms to be atomic formulae of L . Otherwise, specify some effectively given set of forms as atomic formulae. We assume that these include all the sentences of L_0 , and that if $\phi(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ is an atomic formula, so is the result of replacing the listed variables with any others.

Given a notion of atomic formula of L , we now define the notion of an arbitrary formula inductively: an atomic formula is a formula; if ϕ and ψ are formulae, so are $\phi \wedge \psi$, $\sim \phi$, and $(\exists x_i)\phi$. (It is assumed that the truth-functions and the existential substitutional quantifier are new notations, not to be found in L_0 .) A formula without free variables is called a sentence of L . Formulae which are not sentences will be assigned no semantic interpretation; they merely play an auxiliary role. (This contrasts with the referential case, where such formulae define relations and are 'satisfied' by sequences. Here we have no satisfaction, only truth.)

Formulae with free variables can also be called forms; usually, however, we reserve this expression for the atomic case. We also mention the notion of an n -ary functor; this is an expression with n variables, x_{i_1}, \dots, x_{i_n} , such that, when arbitrary terms replace the variables, a term results. I allow the degenerate case where not all of the variables x_{i_1}, \dots, x_{i_n} , or even none of them, appear in an n -ary form or functor.

We assume that truth has already been defined for sentences of L_0 . We note that $\phi \wedge \psi$ is a sentence iff ϕ and ψ are; $\sim \phi$ is a sentence iff ϕ is; $(\exists x_i)\phi$ is a sentence iff ϕ is a formula containing at most x_i free. Then the extended truth conditions for sentences of L are:

(4) $\sim \phi$ is true iff ϕ is not;

(5) $\phi \wedge \psi$ is true iff ϕ is and ψ is;

(6) $(\exists x_i)\phi$ is true iff there is a term t such that ϕ^t is true, where ϕ^t comes from ϕ by replacing all free occurrences of x_i by t .

Plainly, granted that truth has been characterized for the sentences of L_0 , (4)-(6) characterize truth for all of L . Let me formulate this theorem more exactly. Given any set S of sentences of L_0 which we take to be the set of 'true' sentences of L_0 , there is a unique set S' (of truths for all of L) satisfying (4)-(6) and coinciding with S on L_0 .

(Kripke, 1976, pp. 329-330)

Il nous importe de porter un jugement sur l'aspect purement syntaxique de la quantification dans la présentation de Kripke. Dans le langage formel, la quantification n'est qu'un jeu de formes. Nous voulons dire par là que rien ne nous autorise, à ce niveau d'analyse à y voir un quelconque germe portant l'idée de la 'substitutionnalité' et c'est uniquement dans le mouvement interprétatif que nous pourrions la qualifier ainsi.

Kripke fait explicitement référence à Leśniewski, laissant supposer ainsi que la quantification est substitutionnelle dans ses systèmes. Nous traiterons de cet aspect plus loin. Pour l'instant précisons davantage la notion de validité dans le sens de valeurs de vérité et pour ce faire, proposons un exemple. Bien qu'élémentaire il est de nature à éclairer quelque peu les choses.

Soit L_0 un langage.

alphabet: {
 $\}$
 \cdot
 p
 q
 $S_1^2, S_2^2, S_3^2, \dots$
 \vdots

$$S_1^1, S_2^1, S_3^1 \dots$$

$$\vdots$$

- termes: 1. p est un terme } termes élémentaires
 2. q est un terme }
 3. Si X est un terme et Y est un terme, alors XY est un terme
 4. Rien n'est un terme sinon par ce qui précède.

propositions: F est une proposition, si et seulement si, elle est conforme au schéma suivant:

$$S_j^i \{ Y_1, \dots, Y_i \}$$

1. Les Y sont des termes
2. Le nombre des termes dans l'expression parenthésée correspond à l'indice supérieur i de S_j^i

$$\left. \begin{array}{l} S_3^1 \{ p \} \\ S_7^2 \{ pp, q \} \\ S_1^3 \{ q, pq, p \} \end{array} \right\} \text{ sont des propositions de } L_0$$

propositions vraies dans L_0 :

La proposition $S_j^i \{ Y_1, \dots, Y_i \}$ est une proposition vraie dans L_0 , si et seulement si, chaque terme, excepté le premier, commence par la même succession de termes élémentaires que celui qui le précède directement.

$$\left. \begin{array}{l} S_1^2 \{ p, pq \} \\ S_2^2 \{ p, pppq \} \\ S_2^3 \{ pp, ppqq, ppqqp \} \end{array} \right\} \text{ sont des propositions vraies de } L_0$$

$$\left. \begin{array}{l} S_3^2\{p, q\} \\ S_3^3\{p, pp, pq\} \\ S_4^2\{p, qp\} \end{array} \right\} \text{ sont des propositions fausses de } L_0$$

Ensemble de substitution : ensemble des termes.

Sur la base de L_0 construisons L .

Proposons une liste infinie dénombrable de variables, des connecteurs, un quantificateur et deux parenthèses symétriques :

1. x_1, \dots, x_i, \dots ; 2. \wedge, \neg ; 3. $(\exists x_i)$; 4. $(,)$

Les propositions de L_0 sont des propositions de L .

Si P et Q sont des propositions de L , alors $P \wedge Q$ est une proposition de L .

Si P est une proposition de L , $\neg P$ en est une.

Si P est une proposition de L contenant au plus x_i libre, alors $(\exists x_i)(P)$ est une proposition.

La notion de proposition vraie ayant été caractérisée dans L_0 , elle peut être étendue dans le langage L .

1. $\neg P$ est vraie ssi P est fausse.
2. $P \wedge Q$ est vraie ssi P est vraie et Q est vraie.
3. $(\exists x_i)(P)$ est vraie ssi il existe un terme t tel que lorsque substitué à x_i dans P , le résultat de la transformation est une proposition vraie.

Dans cet exemple la caractérisation de la vérité est uniquement syntaxique. La notion de satisfaction est totalement absente de cette interprétation. Les termes ne dénotent aucun objet. Il s'agit simplement d'une succession des formes p et q qui n'ont aucune relation avec un quelconque univers d'objets. La notion de validité échappe ainsi complètement au principe de satisfaction. Cette manière d'envisager l'in-

interprétation supprime la nécessité de postuler l'existence d'objets et permet également de traiter les variables sans nécessairement leur attribuer la catégorie grammaticale des noms.

The utility of the substitutional quantifiers lies in the fact that while the referential quantifiers over terms take names of terms as substitutes, the substitutional quantifiers take the terms themselves, which can be denotationless or can denote other things. (Kripke, 1976, p. 353).

Dans la littérature sur la quantification substitutionnelle, les désaccords sont nombreux. Les citations suivantes en témoignent.

Remember we said that any concept that conforms to the satisfaction paradigm is satisfaction; thus the sophisticated substitutional truth theory is supporting a recursion on the concept of satisfaction. (Wallace, 1971, p. 208).

One would expect the problem of giving an interesting definition of substitutional quantification, which may be possible for theories other than arithmetic, to be related to the problem of defining truth without defining satisfaction. If one could define truth in some way directly, appealing only to linguistic objects, as at least not appealing to all individuals, then this would be demonstrably different from the usual definition if one could show that no definition of satisfaction emerges. Unfortunately there appear to be difficult technical problems in constructing such definitions; and even if one finds examples, it may not be possible to get a satisfactory general picture. (Tharp, 1971, p. 368).

... l'interprétation substitutionnelle ne vaut que pour la quantification finie... (Gauthier, 1978, p. 171).

Les arguments proposés sont souvent le produit d'une incompréhension de ce qu'est cette perspective substitutionnelle. Dunn et Belnap répondent aux critiques les plus connues et, pour clore cette partie, il nous a semblé intéressant de les citer:

1. The substitution interpretation is unclear or imprecise. No. The semantics given herein are exactly as rigorous as ordinary domain-and-value semantics. Just different.

2. The substitution interpretation involves so illegitimate use of "etc." and thereby absurdly tries to reduce quantificational logic to propositional logic. No. There is an explicit reference in the semantics to an infinite totality (of names), and reduction to propositional logic is manifestly impossible.

3. The substitution interpretation is merely a special case of the ordinary one, making the set of names the domain and asking variables take names as values. No. On the substitution interpretation there is no domain and variables do not take values at all.

4. The intuitive quantifiers used in the meta-language in giving the substitution interpretation to the formal quantifiers must themselves be taken in the ordinary domain-and-values sense, so that after all one is not freed completely from "ontological import"; one commits oneself at least to the existence of names. No. The intuitive quantifier can be so taken, but there is no reason not to give it a substitution interpretation as well.

5. The substitution interpretation makes quantification essentially a metalinguistic device and quantified statements "about" pieces of language. No. And this rejoinder is independent of the last, for it remains true even when the intuitive quantifiers used in giving the semantics are of the ordinary domain-and-values kind. It is of course true that the semantic description of the quantifiers is metalinguistic, but this applies with exactly the same force to the semantic description of, say, conjunction. This is because all semantic descriptions are metalinguistic. But if to describe the semantics of conjunction by saying that $A \& B$ is true if and only if both A and B are, does not make conjunction essentially metalinguistic and $A \& B$ "about" its conjuncts, then to describe the semantics of the universal quantifier by saying that $(x)A(x)$ is true if and only if all its substitution instances are, does not make universal quantification essentially metalinguistic and does not make $(x)A(x)$ "about" its instances.

6. The substitution interpretation is without utility. No. Putting aside the uses to which Professor Marcus adverts, it will often be somewhat easier to use whenever, were we to use the domain-and-values interpretation, every entity in the domain would be denoted by some name. And this happens often enough to be interesting, as in syntax, where we usually have a name for everything (i.e., every expression) we wish to talk about.

And speaking of syntax, we mention in closing a marvelous application of the substitution interpretation that comes about by observing that the substituends of variables need not be restricted to be names (nouns). Variables may occupy the place of expressions of other grammatical categories, for example, sentences. With this convention firmly in mind, we can say things like,

- (11) $(P)(Q)$ if "P" and "Q" are sentences, then "P & Q" is a sentence, and "P" and "Q" are its conjuncts.

And we can do so without running the risk of making a mistake about use and mention through inadvertently referring to the sixteenth letter of the English alphabet by using "" P "".

Indeed, if we also have the convention that signs of the object language are used autonomously as names of themselves, then we may drop the quotes without having to introduce any quasi-quotes or other ugly notational conventions:

- (12) (P)(Q) if P and Q are sentences, then P & Q is a sentence, and P and Q are its conjuncts.

The substitution interpretation thus gives logicians a way of preaching what they practice.

(Dunn, 1968, pp. 184-185).

6.4. LESNIEWSKI ET LA QUANTIFICATION SUBSTITUTIONNELLE

Dans les pages qui précèdent nous citons l'allusion de Kripke à Leśniewski. Il est probable qu'il a repris cette information de Quine.

... substitutional quantification makes good sense, explicable in terms of truth and substitution, no matter what substitution class we take - even that whose sole member is the left-hand parenthesis. (9)

...
(9) *Leśniewski's example, from a conversation of 1933 in Warsaw. (Quine, 1968, p. 12).*

Il est possible de comprendre cette citation de deux manières.

1) Leśniewski voulait peut-être parler de ces explications terminologiques qui sont présentes dans le langage de l'ontologie; il y est effectivement fait référence à des inscriptions individuelles telle que la parenthèse gauche. 2) Il aurait également pu utiliser cet exemple pour signifier que toute inscription quelle qu'elle soit peut être susceptible d'entrer dans le jeu de la quantification. Cela ne signifie pas qu'elle est automatiquement retenue.

Analysons la suite de l'exposé de Quine:

In his substitutional quantification Leśniewski used different styles of variables for different substitution classes. Substitutional quantification in the substitution class of singular terms, or names, is the sort that comes closest to objectual quantification. (Quine, 1968, p. 12).

Quine qualifie la quantification dans les systèmes de Leśniewski de substitutionnelle. Sans précaution aucune, il affirme l'existence de

différentes classes de substitution. Ceci laisse entendre que Leśniewski a défini des classes de substitution et, de manière corrélatrice, que la présence de telles classes contribue, entre autres choses, à justifier le terme de substitutionnel attaché à la quantification. Or, il n'en est rien. Leśniewski n'a jamais parlé de ses systèmes en proposant une (ou des) classe(s) de substitution. Agir de cette manière irait profondément à l'encontre même de l'esprit de tels systèmes. Quine affirme plus encore: il parle de styles différents de variables. En d'autres mots, cela signifie qu'à chaque catégorie sémantique correspond un style particulier d'inscriptions qui contribue à leur reconnaissance catégorielle. Il y aurait donc d'une part des listes de variables de styles différents en fonction de leur catégorie et, d'autre part, une explicitation de ces catégories. Mais rappelons une fois encore ce que les systèmes de Leśniewski ont de particulier: ils se développent dans l'espace et le temps; leur développement est à chaque étape l'expression d'une grande liberté par rapport à l'inscription d'une thèse nouvelle (c'est-à-dire d'un terme nouveau, d'une définition nouvelle, d'une idée nouvelle,...). De ce fait, il n'est pas possible de parler de l'ontologie comme exprimant un système particulier; c'est au pluriel qu'il faut en parler. Il est possible de construire des ontologies comme il est d'ailleurs possible de construire des protothétiques. Les différences entre les ontologies sont de divers degrés. Il en est une qui nous importe peu ici mais que nous citerons tout de même: il s'agit de la différence due au caractère nominaliste que l'on attribue à Leśniewski. Deux systèmes équi-formes, mais inscrits en deux endroits distincts, sont considérés comme différents. Partant du même axiome de l'ontologie et jouant avec les mêmes explications terminologiques, l'inscription de différents systèmes est possible; d'une part, la différence existe dans le choix de formes d'inscriptions différentes pour décrire la même réalité logique et linguistique. D'autre part, dans le choix délibéré de faire apparaître au sein du système telle ou telle catégorie sémantique plutôt que telles autres. Ainsi, relativement au style des variables (cf. citation Quine), il n'y a pas d'obligation

dans le choix de l'inscription de variables. Seules des raisons relatives à une meilleure compréhension de lecture suggèrent l'utilisation d'un style particulier d'inscriptions des termes d'une catégorie sémantique particulière. En aucune manière, les règles du système nous imposent telle ou telle façon de faire.

Partant de l'axiome, nous pouvons inscrire sans scrupule les thèses:

$$\begin{array}{l} \ulcorner A_0 \urcorner \ulcorner A_0 A_0 A_0 A \urcorner \quad : \quad \ulcorner A_0 \urcorner \ulcorner \ulcorner A_0 \urcorner \urcorner \ulcorner A_0 \urcorner \urcorner \ulcorner \ulcorner A_0 \urcorner \urcorner \urcorner \\ \ulcorner 35 \urcorner \ulcorner 5_0 3 \urcorner \ulcorner 5_0 5 \urcorner \quad : \quad \ulcorner 35 \urcorner \ulcorner \ulcorner 5_0 3 \urcorner \urcorner \ulcorner \ulcorner 5_0 5 \urcorner \urcorner \\ \ulcorner \psi \urcorner \ulcorner \psi \urcorner \ulcorner \psi \urcorner \ulcorner \psi \urcorner \quad : \quad \ulcorner \psi \urcorner \ulcorner \ulcorner \psi \urcorner \urcorner \ulcorner \ulcorner \psi \urcorner \urcorner \urcorner \end{array}$$

$A, a, 3, 5, \psi, \}$ sont toutes des variables nominales. Elles le sont non pas parce qu'elles possèdent un style particulier ni parce qu'elles appartiennent à une classe de substitution particulière, mais parce qu'elles apparaissent dans des parenthèses à deux arguments dont les parenthèses symétriques sont équiiformes à $\{, \}$ et qu'elles sont associées à des lieux équiiformes dans le quantificateur. Serait-ce alors cette manière de faire qui permet à Quine de parler de styles différents de variables pour différentes classes de substitution? Nous pouvons en douter. Au temps premier de l'élaboration d'une ontologie, il y a bien l'axiome et avec lui l'inscription de termes qui appartiennent à deux catégories sémantiques différentes (abstraction faite des connecteurs purement protothétiques). Normis cela, rien ne suggère un développement futur du système plutôt qu'un autre. Toute possibilité d'introduire de nouvelles catégories sémantiques est offerte, et avec elle, une très grande liberté dans l'inscription des termes de ces nouvelles catégories. N'oublions pas non plus qu'il est permis d'inscrire des termes équiiformes qui ne sont pas de la même catégorie sémantique. Les systèmes de Lesniewski possèdent un caractère que les systèmes formels traditionnels ne connaissent pas. Tel un discours dans le langage naturel, ils se développent progressivement et réalisent à travers cette genèse les outils de leur propre développement. Fixer des classes de substitution contribuerait à étouffer cette dynamique constructive qui

les rend si vivants.

Nous avons qualifié la quantification dans les systèmes de Leśniewski de structurelle et sémantique. Tout au long de cet ouvrage nous avons mis en évidence son rôle important dans la formation de thèses nouvelles. Par elle, et uniquement par elle, nous savons comment inscrire les termes variables. Ce n'est pas suffisant cependant pour nous instruire de la catégorie sémantique des variables et c'est encore un argument en faveur d'une impossibilité de considérer, dans ces systèmes, une quantification qui opère sur des classes de substitution. Une question reste encore en suspens: pour quelle raison Leśniewski n'a-t-il jamais attribué une catégorie sémantique ou quantificateur? Nous avons déjà expliqué les raisons qui l'ont amené à ne considérer qu'un seul type de quantification. Ceci ne répond pas toutefois à la dernière question. Attribuer un statut de catégorie sémantique à la quantification aurait probablement engagé Leśniewski à imposer une catégorie sémantique particulière pour chaque quantification en fonction de la catégorie des lieux qui lui sont associés. Une telle précision linguistique contribuerait à rendre peut-être plus explicite une lecture des thèses du système, mais elle figerait la dynamique constructive de ses systèmes en pré-déterminant d'une certaine manière ce qui a à être construit.

Terminons en rappelant que dans l'ontologie, bien que tout foncteur constant a la possibilité d'être inscrit, seuls deux noms peuvent être définis: \forall (ou un autre terme) : le nom universel

Λ (ou un autre terme) : le nom vide.

Aucun autre terme constant de la catégorie sémantique des noms ne peut y être défini. L'ontologie ne propose jamais une liste de constantes individuelles. Dans cette partie, nous nous sommes gardé de parler de dénotation pour les variables nominales de l'ontologie. Nous voulons le faire maintenant. Nous procéderons en deux temps. Tout d'abord nous aborderons le problème de la quantification et de l'existence. Puis nous présenterons une interprétation possible des ontologies de Leśniewski.

6.5. QUANTIFICATION ET EXISTENCE

Le très bel article de Lejewski (1954) servira de cadre à notre propos. Partons de la thèse $\neg \exists x \neg (x \text{ existe})$ et traduisons-la de manière très libre :

"Il existe quelque chose qui n'existe pas".

Dans son traité, Mathematical Logic, Quine énonce ce qui suit :

To say that something does not exist, or that there is something which is not, is clearly a contradiction in terms; hence $(x)(x \text{ exists})$ must be true. (Quine, 1947, p. 150).

Sans vouloir développer l'aspect achevé et définitif caractérisant un peu trop la logique actuelle, sans trop insister sur la façon quelque peu terroriste utilisée par ses mentors pour la défendre, nous aimerions compléter cette citation. En fait, simplement ajouter que le "must be true" se verrait mieux accepté si on le complétait par "according to such a theory". Cette théorie est bien celle que Quine défend. Dans ce cas, il est vrai que $\neg \exists x \neg (x \text{ existe})$ et $(x)(x \text{ existe})$ sont en contradiction. Le problème de l'existence et de ce sur quoi agissent les quantificateurs apparaît tout naturellement. Dans l'esprit de Lejewski, considérons maintenant deux inférences :

de $(x)(x \text{ existe})$ inférons "Zeus existe"

et de la proposition

"Zeus n'existe pas" inférons $\exists x (x \text{ n'existe pas})$.

Quine attribue la valeur du 'faux' aux deux propositions 'Zeus existe' et $(\exists x)(x \text{ n'existe pas})$ et la valeur du 'vrai' aux propositions $(x)(x \text{ existe})$ et 'Zeus n'existe pas'. Il justifie ainsi son choix :

The idea behind such inference is that whatever is true of the object designated by a given substantive is true of something; and clearly the inference loses its justification when the substantive in question does not happen to designate (Quine, 1947, p. 116).

Afin d'être plus explicite, reprenons le problème de la quantification à la lumière des définitions qu'en propose Quine.

The so-called existential quantifier ' $(\exists x)$ ' corresponds to the words "there is something x such that". Application of $(\exists x)$ to the expression: (1) x is a book. x is boring in the fashion: (2) $(\exists x)(x$ is a book. x is boring) is called existential quantification of (1). Also, the result, (2), is spoken of as the existential quantification of (1). To say that (2) is true is to say that there is at least one object in the universe such that, when ' x ' in (1) is thought of as naming it, (1) become true. (Quine, 1962, p. 83).

...

The existential quantifier has a companion-piece in the universal quantifier ' $(\forall x)$ ', which corresponds to the words 'each thing x (in the universe) is such that'. Application of ' $(\forall x)$ ' to the expression: (10) x is identical with x , in the fashion: (11) $(\forall x) [x$ is identical with $x]$ is called universal quantification of (10);... To say that (11) is true is to say that, no matter what object in the universe be imagined named by ' x ' in (10), (10) becomes true. (Quine, 1962, p. 85).

Le problème de la quantification est indissociable de celui de l'existence. Ceci apparaît davantage lorsque Quine parle d'un univers fini.

If we think of the universe as limited to a finite set of objects a, b, \dots, h , we can expand existential quantifications into alternations and universal quantifications into conjunctions... (Quine, 1962, p. 88).

Quine, bien sûr, n'impose pas de limitation à l'univers. Dans le cas d'un univers infini, il est nécessaire d'affaiblir l'équivalence entre la quantification existentielle et son développement en disjonctions et de la remplacer par une implication. Il s'agit de ce que Quine nomme la règle de généralisation existentielle.

Rule of existential generalization (EG): To any line we may subjoin, as a new line, any schema which the given line implies by existential generalization. (Quine, 1962, p. 157).

Thus ' $\forall y$ ' itself is said to imply ' $(\exists x)Fx$ ' by existential generalization (Quine, 1962, p. 148).

Il est nécessaire de procéder de manière similaire en ce qui concerne l'équivalence entre la quantification universelle et son développement

en conjonctions. Il s'agit de la règle d'instanciation universelle.

Rule of universal instantiation (UI): To any line we may subjoin, as a new line, any schema which the given line implies by universal instantiation,... (Quine, 1962, p. 157).

Thus '(x)Fx' is said to imply 'Fy' by universal instantiation; (Quine, 1962, p. 147).

En ce qui concerne notre propos, nous envisagerons ici un univers fini. Cette manière de faire permet de dissocier plus simplement le problème de la quantification de celui de l'existence. Soit un univers fini Ω constitué de trois objets: O_1, O_2, O_3 , nommés a, b, c . Considérons une interprétation I_1 telle que le foncteur F à un argument nominal se vérifie à la fois pour a, b et c . Dans cette interprétation, l'expression $(x)Fx$ est vraie puisque dans la situation choisie, $(x)Fx$ est équivalente à $Fa \wedge Fb \wedge Fc$. Considérons une nouvelle interprétation I_2 telle qu'un des objets au moins n'ait pas la propriété F .

Dans cette interprétation, l'expression $(\exists x)Fx$ est vraie puisque dans la situation choisie, $(\exists x)Fx$ est équivalente à $Fa \vee Fb \vee Fc$.

N'ayant ici que trois noms qui dénotent trois objets individuels, l'expression $(\exists x)Fx$ peut indifféremment être lue:

1. Il existe un x tel que Fx ou
2. pour quelque x , Fx .

La première lecture privilégie la dimension existentielle, la seconde la dimension de 'quelconquitude' du quantificateur en question. L'accent privilégié est d'une certaine manière illusoire; en effet, les deux lectures sont intimement 'plaquées' l'une à l'autre. Mais il est possible d'envisager la quantification d'une manière autre. Considérons le même univers d'objets Ω . Attribuons les noms individuels a, b, c aux objets O_1, O_2, O_3 de Ω .

Associons les noms généraux m, n, p, v aux différentes associations d'objets qu'il est possible de former.

m est associé aux objets O_1, O_2

n est associé aux objets 01, 03
 p est associé aux objets 02, 03
 v est associé aux objets 01, 02, 03.

Introduisons enfin le nom \hat{A} qui ne dénote rien.

A la lumière de cette nouvelle organisation nominale, la quantification 'existentielle' et la quantification 'universelle' exprimées sous leurs développements conjonctif et disjonctif expriment quelque chose de différent. C'est la raison pour laquelle il semble sage de les distinguer de ce qui a été vu précédemment.

Dans ce contexte, nous parlerons de quantification particulière et de généralisation particulière (Lejewski, 1954, pp. 113-114) et nous les distinguerons graphiquement.

quantification particulière: $\underline{\exists}x \vec{F}x$

généralisation particulière: $\underline{\forall}x \vec{F}x$

$\underline{\exists}x \vec{F}x \leftrightarrow Fa \wedge Fb \wedge Fc \wedge Fm \wedge Fn \wedge Fp \wedge Fv \wedge F$ et

$\underline{\forall}x \vec{F}x \leftrightarrow Fa \vee Fb \vee Fc \vee Fm \vee Fn \vee Fp \vee Fv \vee F$.

Il est évident que sous cette nouvelle interprétation, la quantification n'est plus inconditionnellement associée au problème de l'existence, seul un fragment -dans cet exemple- à formes conjonctives et disjonctives conserve une dimension existentielle: $Fa \wedge Fb \wedge Fc$ et $Fa \vee Fb \vee Fc$. Il ne nous est ainsi plus possible de lire $\underline{\exists}x \vec{F}x$, la généralisation particulière, comme 'il existe x', mais de la considérer simplement comme 'pour quelque x'. Cette distinction est importante et "...

thereby abolishing certain confusions which vitiate some contemporary logics..." (Henry, 1972, pp. 28-29). Dans cette nouvelle acception de la quantification qui prend en compte les noms vides, il est possible partant de la proposition: "Pégase n'existe pas" d'en inférer

$\underline{\exists}x \vec{A}x$ n'existe pas c'est-à-dire pour

quelque x, la désignation x n'existe pas.

Cette dernière proposition est prouvable et vraie. Empruntant la terminologie de Lejewski (1954) nous qualifierons la 'première' quantifica-

tion (Quine) de restreinte et la 'seconde' (Lejewski, Leśniewski), de non-restreinte.

Finally, the unrestricted interpretation in comparison with the restricted one appears to me to be a nearer approximation to ordinary usage. Somehow we do not believe that everything exists and we do not see a contradiction in saying that something does not exist. It is only from logicians who favour the restricted interpretation that we learn that things are the other way round. We may further add that the unrestricted interpretation of the quantifiers is in complete harmony with the formal quantification theory. I do not know of any formulae which are demonstrable in the formal quantification theory and which, under the unrestricted interpretation, are not applicable to reasoning with empty noun-expressions or do not hold for universes of some specific size. (Lejewski, 1954, p. 14).

Relevons encore deux faits logiques auxquels la quantification non-restreinte offre une solution (Lejewski, 1954, pp. 112-113). Il s'agit des deux lois suivantes:

$(\exists x)(Fx \vee \sim Fx)$ et

$(x)(Fx) \supset (\exists x)(Fy)$ (Quine, 1962, p. 96).

Ces deux expressions tirent leur vérité uniquement si leur variable associée rend compte d'une valeur objectuelle. Elles ne peuvent être considérée dans le cas d'un univers vide. Cette lacune disparaît, si ces expressions sont envisagées à la lumière de la quantification non-restreinte. Quelque soit la dimension de l'univers, vide ou non vide, ces expressions restent valides. Si l'univers est vide il existe encore un nom, le nom vide A et ce qui est dit de ce nom 'est' ou 'n'est pas'. Cette distinction claire entre deux types de quantification exprimés par Lejewski et reprise notamment par Henry est importante. Elle permet d'étudier le problème de l'existence indépendamment de celui de la quantification. Lejewski entreprend d'analyser la signification de 'existe(nt)', et il rappelle que cette signification peut être parfaitement analysée sur la base de l'ontologie construite par Leśniewski (Lejewski, 1954, p. 115). Il présente cependant son analyse de la signification de 'existe' sur la base d'une ontologie dont le terme pri-

mitif est différent de l'épsilon de Leśniewski. Il s'agit de ce qu'il nomme l'inclusion ordinaire: $a \in b$

Lecture : tout a est b ou
tous les a sont b

Il justifie son choix ainsi:

I prefer doing this because ordinary inclusion seems to be more intuitive to an English speaking reader than Leśniewski's singular inclusion (Lejewski, 1954, p. 115).

Cela n'empêche pas qu'il soit raisonnable de 'décrire' la signification de 'existe' à l'aide de l'épsilon \in et c'est ainsi que nous avons procédé.

6.6. INTERPRETATION DE L'ONTOLOGIE DE LESNIEWSKI

6.6.1. AVERTISSEMENT

Les propos que nous allons développer sont à considérer avec réserve. En effet, ils n'ont pas la prétention de proposer un exposé achevé relatif au problème de l'interprétation de l'ontologie de Leśniewski. Notre intention est plus modeste et plus limitée; elle vise avant tout à offrir une réflexion sur le problème de l'interprétation d'un système qui a la propriété de se développer dans l'espace et le temps, tel celui de Leśniewski. Cet exposé est également un préalable à une recherche future que nous entreprendrons avec V.F. Rickey.

INTERPRETATION

Le problème consiste à définir les notions d'interprétation, d'évaluation et de validité de telle manière qu'elles s'appliquent aux ontologies de Leśniewski.

Les principes fondamentaux qui guident notre démarche sont les suivants:

- tout système ontologique de Leśniewski est l'expression d'une liste finie de thèses. Cette liste finie est déterminante dans le processus de l'interprétation.
- nous abordons l'interprétation de l'ontologie avec l'esprit des systèmes de l'ontologie. Nous respectons donc les qualités de dynamisme qui appartiennent à de tels systèmes.
- nous acceptons que la notion d'interprétation n'est pas déterminée une fois pour toutes; elle est fonction de l'état de cette ontologie, c'est-à-dire des thèses qui sont actuellement inscrites.
- nous ne considérons que les ontologies en tant que systèmes purs, nous n'abordons pas les systèmes appliqués (Küng, 1970).
- nous opérons une correspondance entre le domaine syntaxique d'une ontologie et un domaine sémantique composé ou non d'objets.
- dans cette étape de notre réflexion nous présenterons une interprétation qui opère uniquement sur un domaine composé au plus d'un nombre fini d'objets.

- dans l'esprit des systèmes de Lesniewski, toute ontologie est l'expression d'une liste finie de thèses; il s'agit d'une liste ordonnée. Interpréter cette liste ne possède pas en soi d'intérêt. Nous agissons de manière quelque peu différente; chaque ontologie, en tant que liste finie de thèses, donne d'elle-même l'état de la question. Par cela nous voulons dire que cette liste finie de thèses fournit la clé des expressions bien formées qu'il est pertinent d'inscrire puis d'interpréter. En effet, les thèses d'une ontologie, axiome(s) y compris, informent des catégories sémantiques que le système contient actuellement et, en relation avec ces catégories, les constantes qu'il est possible d'utiliser dans la formation d'une expression bien formée, (Rickey, 1973, thèse 3).

6.6.2. DOMAINE SYNTAXIQUE

Toute ontologie, O , consiste dans l'inscription d'une liste finie ordonnée de thèses. Elle contient (les) l'axiome(s) et toutes les thèses inscrites actuellement, conformément aux règles d'inférence. A toute ontologie correspond donc un état; il s'agit de toutes les catégories sémantiques qu'une ontologie particulière contient, et, en relation avec chaque catégorie, une liste finie de constantes ou de foncteurs constants qui y est associée. Le domaine syntaxique d'une ontologie correspond à l'ensemble des expressions bien formées qu'il est possible d'inscrire en fonction de l'état de cette ontologie.

Considérons l'exemple d'une ontologie minimale basée sur l'axiome unique de l'ontologie, Ax . Cette ontologie se compose d'une unique thèse, Ax ; l'état associé à cette ontologie consiste dans les catégories N et S/NN . La catégorie S/NH est présente à travers l'inscription du foncteur constant $\&$ associé au parenthème $\{\--\}$, et, la catégorie N apparaît à travers l'inscription de termes variables qui sont arguments de parenthèmes similaires à $\{\--\}$. Il n'y a pas d'autres catégories sémantiques purement ontologiques. Le domaine syntaxique associé à cette ontologie minimale consiste dans l'inscription de toutes les expressions bien formées qu'il est possible de concevoir sur la base

du foncteur constant ε , (S/NN), de variables de catégorie sémantique S/NN, et de variables de catégorie N. Dans les systèmes de Leśniewski, la distinction entre variables et constantes n'est pas déterminée par une liste préalablement établie. La détermination du statut des termes est contextuelle. Un terme est une variable, si et seulement si, il possède un lieu équiforme dans le quantificateur qui lui est directement associé. Un terme est une constante, si et seulement si, aucun lieu n'opère sur lui. Les thèses des systèmes de Leśniewski sont des expressions sans variables libres. Dans le domaine syntaxique, nous voulons introduire des expressions avec variables libres. Pour les distinguer des constantes, nous utiliserons un artifice graphique; nous indiquerons ce statut de variable libre en inscrivant un chapeau renversé au-dessus du terme en question. Les expressions suivantes appartiennent au domaine syntaxique associé à l'ontologie minimale consistant uniquement dans l'inscription de l'axiome.

1. $\hat{A}b, A\hat{e}b$
2. $\hat{A}, A\hat{e}b$
3. $\hat{A} \{ \hat{a} \hat{b} \}$
4. $\hat{A}, A\hat{e}A = A\hat{e}A$
5. $\hat{A}a, A\hat{e}a \supset A\hat{e}b$
6. $\hat{b}, \exists \hat{p}, \hat{p} \{ \hat{b} \}$
7. $\hat{a}, \hat{a} \{ \hat{a} \}$

6.6.3. DOMAINE SEMANTIQUE

Nous exposons quelques éléments de notre réflexion relative au problème de la sémantique et de l'interprétation sous la forme d'une suite de propositions. Ce terme est à appréhender dans son acception étymologique: un propos offert au jugement de l'autre. Elles sont donc susceptibles d'être modifiées, reconstruites ou niées.

Proposition 1.

Le domaine sémantique S associé à une ontologie consiste dans une liste vide ou non d'objets O_i , ainsi que d'une liste vide ou non de noms N_j .

Proposition 2.

Une organisation sémantique primitive est associée au domaine sémantique S. Elle est l'expression d'une correspondance dén entre noms et objets. Cette correspondance est conçue de telle manière qu'elle peut associer

- aucun objet à un nom.
- un et un seul objet à un nom.
- une association d'objets à un nom.

Si la correspondance associe aucun objet à un nom, nous qualifions ce nom, de nom vide.

$$Vl(N) : \sim \exists ! O_i \text{ N dén } O_i$$

Si la correspondance associe un et un seul objet à un nom, nous qualifions ce nom, de nom individuel.

$$Ind(N) : \exists ! O_i \text{ N dén } O_i$$

Si la correspondance associe des objets à un nom, nous qualifions ce nom, de nom général.

$$Gen(N) : \exists O_1 O_2 \text{ } O_1 \neq O_2, \text{ N dén } O_1 \text{ et N dén } O_2$$

Un objet peut posséder plusieurs noms individuels. Une association d'objets peut posséder plusieurs noms généraux. Des noms équiformes ne peuvent pas dénoter des objets ou des associations d'objets différents. Afin de ne créer aucune confusion nous parlerons dorénavant de symboles de noms pour les termes associés à la catégorie N dans le domaine syntaxique, et nous conserverons l'expression 'nom' pour le domaine sémantique. Il est dès lors raisonnable de dissocier l'écriture des symboles de noms de celle des noms. Pour ce faire, nous soulignerons les noms. Proposons quelques exemples de domaines sémantiques primitifs. Nous symboliserons la correspondance dén de la manière suivante:

$$\underline{A} \text{ dén } O_1 : \underline{A} \rightsquigarrow O_1.$$

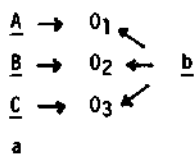
Exemple 1.

Liste de noms: A, B, C, a, b.

Liste d'objets: O_1, O_2, O_3

Organisation sémantique primitive, OSP: A~ O_1 , B~ O_2 , C~ O_3 , b~ O_1 ,
b~ O_2 , b~ O_3 , a~ (correspondance vide).

De manière plus imagée, l'OSP correspond à la situation suivante:



Nous représenterons cette OSP ainsi:

$S_1 : [\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{a}, \underline{b}; O_1, O_2, O_3; \underline{A} \sim O_1, \underline{B} \sim O_2, \underline{C} \sim O_3, \underline{b} \sim O_1, \underline{b} \sim O_2, \underline{b} \sim O_3, \underline{a} \sim]$

Exemple 2.

$S_2 : [\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}; O_1, O_2, O_3; \underline{A} \sim O_1, \underline{B} \sim O_2, \underline{C} \sim O_3]$

Il s'agit d'une OSP sans noms généraux, ni noms vides.

Exemple 3.

$S_3 : [\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}; O_1, O_2; \underline{A} \sim O_1, \underline{B} \sim O_2, \underline{C} \sim O_2, \underline{a} \sim O_1, \underline{a} \sim O_2, \underline{b} \sim, \underline{c} \sim]$

Cette OSP possède la particularité de présenter deux noms individuels différents dénotant le même objet.

Il est possible d'imaginer des OSP de toute complexité. Des domaines sans noms ou sans objets en seraient des exemples.

Il est évident que les organisations qui viennent d'être exposées ont peu d'intérêt si on ne leur attribue pas une vie relationnelle et transformationnelle. Il convient donc d'offrir, au-delà de cette première étape, l'expression d'une organisation relationnelle et transformationnelle. De manière analogique, il s'agit de proposer des ensembles, des ensembles d'ensembles, ..., des ensembles de vec-

teurs, ..., conçus sur l'OSP. A ce propos, nous sommes en désaccord avec l'affirmation de Küng qui dit que:

... for ontology, where name can be not only singular, but also a shared or empty name, in order to give an interpretation to the system, one must not only specify a domain of discourse; one must further consider the set of all subsets of that domain. (Küng-Canty, 1970, p. 178).

En effet, il n'est pas nécessaire, même dans le cadre d'une interprétation ensembliste traditionnelle d'envisager tous les sous-ensembles possibles de l'univers des objets.

Proposition 3.

Une organisation relationnelle et transformationnelle est associée à l'OSP d'une ontologie.

L'organisation relationnelle consiste dans une liste d'associations de noms et d'objets, d'associations d'associations de noms et d'objets, Elle correspond aux descriptions des définitions ontologiques de type protothétique. Nous nommerons ces descriptions R_i .

L'organisation transformationnelle consiste dans une liste d'associations de noms et d'objets, associées à des noms et des objets, d'associations d'associations de noms et d'objets, associées à des noms et des objets, Elle correspond aux descriptions des définitions ontologiques de type ontologique. Nous nommerons ces descriptions T_i .

Proposition 4.

Le domaine sémantique S associée à une ontologie consiste donc dans la donnée de

- une liste vide ou non d'objets.
- une liste vide ou non de noms.
- une organisation sémantique primitive.
- une organisation relationnelle.
- une organisation transformationnelle.

6.6.4. INTERPRETATION

Proposition 5.

L'interprétation I d'une ontologie O, est la donnée

- d'un domaine sémantique S,
- d'une application COR.

L'application COR est ainsi conçue qu'elle introduit une correspondance entre

- les symboles de noms du domaine syntaxique associé à O et les noms du domaine sémantique S,
par exemple: $COR(A) = \underline{B}$
- les termes des catégories sémantiques de type protothétique inscrits dans le domaine syntaxique et les associations relationnelles correspondantes présentes dans le domaine sémantique,
par exemple $COR(t_j) = R_j$
- les termes des catégories sémantiques de type ontologique inscrits dans le domaine syntaxique et les associations transformationnelles correspondantes présentes dans le domaine sémantique,
par exemple: $COR(t_k) = T_s$.

Proposition 6.

L'axiome d'une ontologie détermine l'orientation de l'interprétation en termes d'évaluation des propositions que son domaine syntaxique contient. La notion d'évaluation est rattachée au concept du vrai et du faux. Elle opère donc sur une unité propositionnelle. Cette unité propositionnelle est une donnée fournie par l'axiome. Dans notre cas, il s'agit de la proposition singulière.

Soit P, la proposition singulière $\overset{\vee}{A} \& \overset{\vee}{b}$, et I une interprétation. L'évaluation de P dans cette interprétation est la valeur attribuée à P, soit le vrai, 1, soit le faux, 0, par la fonction VAL ainsi conçue:

Soit P: $\overset{\vee}{A} \& \overset{\vee}{b}$, et $COR(\overset{\vee}{A}) = \underline{B}$, et $COR(\overset{\vee}{b}) = \underline{c}$.

$VAL(P) = VAL(\overset{\vee}{A} \& \overset{\vee}{b}) = 1$, ssi,

Le nom B dénote un et un seul objet
et

l'objet dénoté par B est un des objets de l'association d'objets
(ou de l'objet) dénoté par le nom c, elle est fautive autrement.

Considérons un exemple, il est de nature à éclairer quelque peu la notion d'évaluation. Considérons une ontologie, O , de telle manière que son domaine syntaxique consiste dans toutes les expressions bien formées qu'il est possible d'inscrire sur la base des catégories sémantiques S/NN et N, la catégorie N ne possédant aucune constante, et la catégorie S/NN ne contenant que la constante &.

Soit le domaine sémantique S suivant:

Liste d'objets: O_1, O_2

Liste de noms: A, B, C, D, E, F.

organisation sémantique primitive:

$[\overset{\vee}{A} \sim O_1, \overset{\vee}{B} \sim O_1, \overset{\vee}{C} \sim O_2, \overset{\vee}{D} \sim, \overset{\vee}{E} \sim, \overset{\vee}{F} \sim O_1, \overset{\vee}{F} \sim O_2]$

En fonction des deux propositions singulières

$\overset{\vee}{A} \in \overset{\vee}{C}$ et $\overset{\vee}{A} \in \overset{\vee}{B}$, proposons les correspondances suivantes:

$COR(\overset{\vee}{A}) = \overset{\vee}{B}$, $COR(\overset{\vee}{B}) = \overset{\vee}{E}$, $COR(\overset{\vee}{C}) = \overset{\vee}{F}$.

$VAL(\overset{\vee}{A} \in \overset{\vee}{C}) = 1$, ssi, B dénote un et un seul objet,

et

B est un des objets de l'association d'objets,
ou de l'objet dénoté par F.

Dans cette interprétation, $VAL(\overset{\vee}{A} \in \overset{\vee}{C})$ est le vrai, 1; nous dirons que $\overset{\vee}{A} \in \overset{\vee}{C}$ est valide dans S par rapport à 1, et nous l'écrivons $\models_I \overset{\vee}{A} \in \overset{\vee}{C}$

$VAL(\overset{\vee}{A} \in \overset{\vee}{B}) = 1$, ssi, B dénote un et un seul objet

et

B est un des objets de l'association d'objets, ou
de l'objet, dénoté par E.

La première conjonction est vérifiée, mais par la seconde, E ne dénote

aucun objet; $\checkmark \checkmark$
 $\text{VAL}(\checkmark \checkmark A \& B)$ est donc le faux, 0.

Si nous avons choisi un domaine sémantique sans nom, les seules correspondances possibles seraient l'application vide. Dans ce cas, les conditions d'évaluation ne seraient jamais remplies, et par ce fait, la valeur de toute proposition singulière du domaine syntaxique serait le faux.

L'évaluation de la proposition singulière seule n'est pas suffisante pour déterminer l'évaluation d'une proposition complexe du domaine syntaxique. Il est, en effet, nécessaire de considérer les connecteurs propositionnels ainsi que les quantificateurs.

Soit P et Q, des propositions singulières quelconques; nous poserons ce qui suit:

1. $\text{VAL}(\sim(P)) = 1$, ssi, $\text{VAL}(P) = 0$
2. $\text{VAL}(P \supset Q) = 1$, ssi, $\text{VAL}(P) = 0$ ou $\text{VAL}(Q) = 1$
3. $\text{VAL}(P \cdot Q) = 1$, ssi, $\text{VAL}(P) = \text{VAL}(Q) = 1$
4. $\text{VAL}(\checkmark_a P_a) = 1$, ssi, $\text{VAL}(P_a) = 1$,
quelle que soit l'application COR dans l'interprétation I choisie.
5. $\text{VAL}(\exists_a P_a) = 1$, ssi, $\text{VAL}(\sim \checkmark_a \sim(P_a)) = 1$.

Analysons un exemple:

Soit P: $\checkmark_a D \& D \supset D \& E$ une expression bien formée d'une ontologie O.

Soit S, le domaine sémantique suivant:

Liste d'objets: O_1, O_2

Liste de noms: A, B, C, a

organisation sémantique primitive:

[A $\sim O_1$, B $\sim O_2$, C \sim , a $\sim O_1$, a $\sim O_2$]

Proposons une interprétation de telle manière qu'elle applique au symbole de nom E, le nom A. L'inscription P étant une généralisation dont le lieu du quantificateur est le symbole de nom D, il est nécessaire pour évaluer P, d'envisager toutes les correspondances possibles.

Afin d'inscrire les valeurs de vérité des propositions singulières en

fonction de toutes les correspondances qu'il est nécessaire d'envisager, nous établirons des tables de vérité.

$D \in \overset{\vee}{E}$	$\overset{\vee}{E}$ ↓ <u>A</u>	$COR(E) = \underline{A}$
$D \rightarrow \underline{A}$	1	
$D \rightarrow \underline{B}$	0	
$D \rightarrow \underline{C}$	0	
$D \rightarrow \underline{a}$	0	

$D \in D$	D ↓ <u>A</u>	D ↓ <u>B</u>	D ↓ <u>C</u>	D ↓ <u>a</u>
$D \rightarrow \underline{A}$	1	-	-	-
$D \rightarrow \underline{B}$	-	1	-	-
$D \rightarrow \underline{C}$	-	-	0	-
$D \rightarrow \underline{a}$	-	-	-	0

La correspondance $COR(E) = \underline{A}$ étant fixée par l'interprétation, analysons les quatre valeurs que peuvent prendre D.

Si $COR(D) = \underline{A}$ alors $VAL(D \in \overset{\vee}{E}) = 1$
 $VAL(D \in D) = 1$
 et
 $VAL(D \in D \supset D \in \overset{\vee}{E}) = 1$

Si $COR(D) = \underline{B}$ alors $VAL(D \in \overset{\vee}{E}) = 0$
 $VAL(D \in D) = 1$
 et
 $VAL(D \in D \supset D \in \overset{\vee}{E}) = 0$

Si $COR(D) = \underline{C}$ alors $VAL(D \in \overset{\vee}{E}) = 0$
 $VAL(D \in D) = 0$
 et
 $VAL(D \in D \supset D \in \overset{\vee}{E}) = 1$

Si $\text{COR}(D) = \underline{a}$ alors $\text{VAL}(D \in \check{E}) = D$
 $\text{VAL}(D \in D) = D$
 et
 $\text{VAL}(D \in D \supset D \in \check{E}) = \text{I}$

Il existe un cas pour lequel $\text{VAL}(D \in D \supset D \in \check{E}) = D$;
 il s'ensuit donc que $\text{VAL}(\underline{D} \in D \supset D \in \check{E}) = D$.

Une grande pauvreté en termes de foncteurs constants et de catégories sémantiques caractérise les domaines syntaxiques étudiés. En effet, seules les catégories ontologiques N et S/MN sont présentes. Il est nécessaire d'envisager aussi des ontologies de plus grande richesse.

Proposition 7.

Si le domaine syntaxique connaît un terme constant ontologique de type protothétique différent de l'épsilon de la catégorie S/MN, l'application COR lui fait correspondre une association relationnelle de la famille correspondante si elle existe.

Proposition 8.

Si le domaine syntaxique connaît un terme constant différent de la catégorie des noms, l'application COR lui fait correspondre une association transformationnelle de la famille correspondante si elle existe.

Proposition 9.

L'évaluation d'une proposition 'atomique' P autre que la proposition singulière se fera en termes d'une vérification de l'existence des correspondants de ses arguments dans le correspondant de l'association relationnelle attachée au foncteur de la proposition P.

Proposition 10.

L'évaluation d'une expression quantifiée qui agit sur un foncteur variable de la catégorie Q exige l'évaluation de toutes les situations particulières liées aux associations relationnelles correspondantes

qui existent dans le domaine sémantique.

Nous avons voulu, en présentant ces quelques propositions, esquisser l'esprit d'une interprétation de l'ontologie. Cette interprétation se révèle être une combinatoire très complexe de noms et d'objets, combinatoire qui joue un rôle déterminant dans le processus de vérification d'une expression bien formée d'un domaine syntaxique. Il s'agira maintenant de décrire avec précision l'organisation d'une association relationnelle, ainsi que celle d'une association transformationnelle. Il s'agira aussi de présenter un calcul qui règle l'évaluation de toute expression bien formée d'une ontologie. Des travaux futurs s'y emploieront.

7. REMARQUES

Cette présentation de l'ontologie de Leśniewski n'est que partielle. Elle est l'expression d'un choix qui voulait avant tout mettre en évidence l'efficacité, ainsi que la subtilité linguistique et sémantique que l'ontologie détient. Nous voulions également souligner l'intérêt qu'il y a d'entreprendre des recherches métalogiques sur la base de ce système. Nous ne saurions accepter le dédain que Geach lui attribue en l'assimilant à "the two-name theory".

In our own time the two-name theory has been given a new lease of life by Polish logicians, notably by Stanislaw Leśniewski. Great logical subtlety has sometimes been shown in developing the theory. It would be unjust to call this subtlety futile, but I do call it misdirected.
(Geach, 1972, p. 52).

QUATRIEME PARTIE

MERELOGIE

CHAPITRE V - LA MERELOGIE

1. PREAMBULE

Leśniewski est attiré par la logique et plus tard par le formalisme lorsqu'il est averti de l'existence des antinomies russelliennes (pp. 8-9). Il s'agit en fait de bien plus que d'une simple attirance; c'est une provocation. Il refuse d'éviter l'antonomie comme le font ses contemporains, mais désire profondément résoudre ce problème. Il entreprend donc de faire le procès de la notion de classe telle qu'elle était alors exposée (pp. 9-22). Sa démarche aboutit à une conclusion inévitable: cette notion de classe contient deux caractères incompatibles entre eux: l'un est distributif, l'autre collectif. Ayant mis en évidence cette contradiction, Leśniewski résoud, du même coup, le problème de l'antonomie russellienne. Il ne s'arrête pas là. Ses démarches l'amènent tout naturellement à s'intéresser à cette notion nouvelle de classe investie d'un caractère collectif. Il poursuit donc ses travaux dans le sens de l'édification d'une théorie nouvelle relative à la notion de classe collective (classe méréologique). C'est en 1916 qu'il en publie une première synthèse sous le titre de Podstamy ogólnej teoryi mnogosci (Leśniewski, 1916) "-Les fondements de la théorie générale des ensembles-". Dans son exposé, Leśniewski décrit les relations de partie à tout, relations englobant tous les 'possibles'. Le caractère collectif contraste donc avec le caractère particulier et unidimensionnel de la vision distributive. Cette nouvelle théorie qui prendra plus tard le nom de méréologie "might be called an axiomatic extralogical theory of parts or wholes as pieces or aggregates, and their most general relations". (Luschei, 1962, p. 149).

Dans un premier temps, nous exposerons les relations que la méréologie soutient avec l'ontologie et la protothétique. Nous poursuivrons en décrivant certaines étapes intellectuelles de la réflexion de Leśniewski qui sont des moments importants dans l'édification de cette nouvelle théorie des ensembles. Enfin, nous présenterons de manière formelle la méréologie et mettrons en évidence ses caractères

les plus significatifs.

2. CONSIDERATIONS GENERALES

Rappelons que Leśniewski a développé postérieurement à la méréologie deux théories: la protothétique et l'ontologie dont dépend logiquement la méréologie. Nous avons vu le rapport que l'ontologie soutient avec la protothétique (pp. 282-283). L'expansion de l'ontologie, la méréologie, n'est pas de même nature que celle qui fonde le rapport entre protothétique et ontologie.

C'est sur l'acquis du système de l'ontologie que l'inscription d'axiomes propres permet de développer la méréologie. Les axiomes de la méréologie possèdent le style de l'écriture ontologique. En fonction des termes primitifs introduits par les axiomes, de nouveaux termes peuvent être définis. Le terme de classe Kl est l'un d'eux. Kl est défini comme un foncteur constant ontologique, d'un argument nominal; il s'inscrit donc dans une proposition singulière, $A \ll Kl a \gg$, qu'il est possible de lire: A est la classe des a . $Kl a$ est donc un nom, et comme nous le démontrerons, il s'agit d'un nom individuel. Ce qu'il importe de retenir maintenant, c'est que $Kl a$, comme tout terme et toute expression nouveaux de la méréologie, répond aux propriétés, aux règles et aux lois qui régissent l'ontologie.

Empruntons une thèse de l'ontologie:

$$T5 \quad \ll Ab \gg \rightarrow A \ll b \gg \rightarrow A \ll A \gg$$

La règle de substitution rend possible la substitution de $Kl a$, qui est un nom, à b qui est également de la catégorie des noms. Nous obtenons de cette manière la thèse suivante:

$$E: \ll Aa \gg \rightarrow A \ll Kl a \gg \rightarrow A \ll A \gg \quad T5, \quad b / Kl a$$

Lecture de E : si A est la classe de a , alors A est un nom individuel.

Parlant des axiomes de la méréologie, nous les avons qualifiés d'axiomes propres. La méréologie est donc un système appliqué, mais à quoi? Appliqué aux notions de parties à tout, telles que Leś-

niewski les percevait. A ce propos, la justification de Leśniewski est fort intéressante -mais en est-elle une?

I wish to add a few words as a preventative measure against possible critical objections from the "philosophical" camp: that is -in my system the expressions are treated as a hypothetical-deductive system, from which it follows that, properly speaking, I assert only that those propositions which I call "theorems" result from the propositions which I call "axioms". The psychic "sources" of my axioms are my intuitions, which simply means, that I believe in the truth of my axioms, but I am unable to say why I believe, since I am not acquainted with the theory of causality. My axioms do not have a logical "source", which simply means that these axioms do not have proofs within my system, just as in general no axioms, in the nature of things, have proofs in that system for which they are axioms. I am quite unable to answer the question, what is the "objective value of my axioms, nor any other similar questions, which concern the exponents of the so-called theory of knowledge- because I admit sadly and to my clear disadvantage, that despite my most sincere wishes, I am still unable to understand even one of the problems which occur in the just mentioned respectable "science". (Leśniewski, 1916, pp. 3-4).

3. UNE PREMIERE APPROCHE DE LA CLASSE MERELOGIQUE

Leśniewski a eu un rapport bien particulier avec le formalisme. Nous pourrions le définir ainsi: le formalisme n'a aucun sens en tant que création libre, il ne trouve de pertinence que s'il est interprété. Leśniewski a senti le besoin de recourir au formalisme afin de communiquer ses idées de la façon la plus précise qu'il soit, et sur des bases logiques qui ne souffraient d'aucune imperfection. Le formalisme est avant tout pour lui un moyen de communiquer, sans équivoque possible, les résultats de réflexions qui s'ancrent profondément dans sa conception du monde et la façon d'en parler. Il n'est donc pas surprenant de le voir entreprendre une analyse de la notion de classe telle qu'elle est perçue dans l'usage courant. Du reste, l'acception de cette notion de classe n'est pas en désaccord avec celle que propose Cantor.

Jede Menge wohlunterschiedener Dinge kann als ein einheitliches Ding für sich angesehen werden, in welchem jene Dinge Bestandteile oder constitutive Elemente sind. (Cantor, 1887, cité in Leśniewski, 1927, p. 190).

Chaque ensemble de choses bien distinctes, qui peut être envisagé comme un tout dont elles constituent les ingrédients ou les éléments constitutifs.

Le problème de la classe vide se pose tout naturellement. En effet qu'en est-il d'une classe qui n'existe que par ses constituants -les objets- si ces derniers n'existent pas? La réponse de Leśniewski est cinglante:

(założenie "klas pustych" nie stanowiło tematu moich rozważań przy tej sposobności, koncepcję bowiem "klas pustych" traktowałem od chwili pierwszego z nią zetknięcia jako koncepcję "mitologiczną", stojąc bez żadnych wahań na stanowisku, że.

(1) jeżeli jakiś przedmiot jest klasą² p-tow a, to pewien przedmiot jest a³),
(Leśniewski, 1927, p. 186).

Le problème des 'classes-vides' n'a pas retenu mon attention, car lorsque j'ai été confronté à cette conception de classe-vide, je l'ai considérée comme une conception mythologique. En effet, je n'hésite pas à affirmer que: (1) si un objet est la classe des objets a, alors un objet est a.

Sur ce point Frege est d'accord avec Leśniewski:

Schröder wagt die Erdichtung einer leeren Klasse. Beide sind also darin, wie es scheint, mit vielen Mathematikern einig, man dürfe beliebig etwas erdichten, was nicht da ist, ja was sogar undenkbar ist; denn wenn die Elemente das System bilden, so wird das System mit den Elementen zugleich aufgehoben. Wo die Grenzen dieser Erdichtungswillkür liegen, und ob es überhaupt dergleichen geben, darüber wird wohl wenig Klarheit und Uebereinstimmung zu finden sein; (Frege, 1893, pp. 2-3).

Schröder ose inventer la classe-vide. Tous les deux (Schröder et Dedekind) acceptent apparemment, ainsi que beaucoup d'autres mathématiciens, qu'il est possible d'inventer n'importe quoi, que ce soit quelque chose qui n'existe pas ou quelque chose d'impensable; en effet, si les éléments constituent le système, alors le système disparaît en même temps que les éléments. Où se trouvent les frontières de la liberté d'invention, et, tout d'abord, existent-elles? A cet égard, on rencontre peu de clarté et d'accord.

En 1895, Frege exprime de manière très imagée cette position.

Wenn, gemäss unserm bisherigen Gebrauche des Wortes, eine Klasse aus Gegenständen besteht, eine Sammlung, collective Vereinigung von solchen ist, so muss sie verschwinden, wenn diese Gegenstände verschwinden. Wenn wir sämtliche Bäume eines Waldes verbrennen, so verbrennen wir damit den Wald. Eine leere Klasse kann es also nicht geben.

(Frege, 1895, pp. 436-437).

Conformément à notre usage actuel des mots, lorsqu'une classe se compose d'objets, lorsqu'une collection est l'union collective de ces objets, elle doit disparaître lorsque ces objets disparaissent. Lorsque nous brûlons la totalité des arbres d'une forêt, nous brûlons par là même la forêt. Ainsi, une classe vide ne peut pas être.

Non seulement Leśniewski refuse de considérer cette notion de classe vide, mais il rejette également la relation 'être élément de' telle qu'elle était alors définie par la communauté des mathématiciens. Il revendique une définition de cette relation, comme de celle de classe, qui soit plus en accord avec le sens commun.

I readily admit that some of my theorems, as e.g., Theorem XXVII, may offend more or less the 'mathematical intuitions' of various thinkers contemplating the elegance of certain theoretical constructions independently of whether these constructions contribute to the scientific apprehension of reality in any way, or whether they only serve to justify the mathematical customs reigning in our epoch and to a great extent characterized by inertia. I cannot, however, deny myself the pleasure of stating that I tried to write my work so that it would apply not merely to all kinds of 'free creations' of various more or less Dedekindian creative spirits; thus, it comes about that I am more concerned that my theorems, having as precise a form as possible, should be consistent with the 'common sense' of representatives of 'esprit laïque' involved in investigations of a reality that they themselves have not 'created' than I am that what I say should be consistent with those 'intuitions' of professional theoreticians of sets who marched out of the centrifuge (provided with the apparatus of 'free creation') of mathematical minds demoralized by speculative constructions 'detached from reality'.

(Leśniewski, 1916, p.3, cité in Leśniewski, 1930, pp. 261-262), et traduit par Sinisi (1983, p. 24).

Leśniewski s'oppose aux mathématiciens d'alors. Par honnêteté intellectuelle, il refuse de partager une réflexion qui vise avant tout

à préserver l'acquis mathématique du passé. Il aurait été d'accord avec le commentaire de Bourbaki qui traite de ce thème.

Il s'agit avant tout de ne renoncer à aucune part de l'héritage du passé: "Du paradis que Cantor a créé pour nous", dit Hilbert (131c , p. 274) "nul ne doit pouvoir nous chasser". Pour ce faire, ils sont disposés à accepter des limitations aux raisonnements mathématiques, peu essentielles parce que conformes à l'usage, mais qui ne paraissent pas imposées par nos habitudes mentales et l'intuition de la notion d'ensemble. Tout leur semble préférable à l'intrusion de la psychologie dans les critères de validité des mathématiques; et plutôt que de "faire entrer en ligne de compte les propriétés de nos cerveaux", comme dit Hadamard (10 , p. 270), ils se résignent à imposer au domaine mathématique des bornes en grande partie arbitraires, parce qu'elles enferment la Mathématique classique et ne risquent pas d'entraver les progrès ultérieurs.

131c Hilbert: Grundlagen der Geometrie. Leipzig-Berlin, Teuber, 7e éd. 1930.

*10 R. Baire, F. Borel, H. Hadamard, H. Lebesgue. Cinq Lettres sur la théorie des ensembles. Bull. Soc. Math. de France, t. XXXIII (1905), pp. 261-273.
(Bourbaki, 1969, pp. 51-52)*

Il est intéressant de remarquer combien la tradition mathématique à travers sa pratique pédagogique a réussi à rendre naturelle une notion qui paraissait si artificielle à l'aube de notre siècle. Leśniewski en parle même en termes de théories non naïves -nie naiwnej teorii- (Leśniewski, 1928, p. 261). Il est même quelque peu troublant de considérer aujourd'hui comme naïves certaines des thèses de la théorie générale des ensembles de Leśniewski (1916). Les trois thèses suivantes témoignent de ce fait.

- Tout objet est un élément de lui-même (1916, Thèse XIV)
- Tout objet est son propre élément (1916, Thèse XXV)
- L'assertion "si P est un élément d'un ensemble d'objets m, alors P est un des m" est fausse (1916, Thèse XXVII)

La compréhension actuelle de la notion de classe est quelque peu dérangée à la lecture de ces thèses. Dans l'acception de la notion de classe communément partagée aujourd'hui, l'assertion "si P appartient à l'en-

semble des m , alors P est un des m semble plus que raisonnable.

Proposons et analysons deux assertions présentées par Leśniewski. Elles sont de nature à saisir davantage ce qui caractérise la notion de classe telle qu'il la concevait.

I. Tout objet donné P est la classe des objets P (1916, Thèse X)
(Leśniewski, 1916, p. 9).

II. *wciąż się zdarza, iż ten a ten przedmiot jest klasą przedmiotów takich a takich i zarazem klasą przedmiotów całkiem innych*
(Leśniewski, 1930, p. 186).

Il est fréquent qu'un objet soit la classe de tel ou tel objet tout en étant la classe d'objets entièrement différents.

Contrairement à la notion de classe standard de la théorie des ensembles où il est nécessaire de distinguer un objet P et la classe composée uniquement de cet objet, $\{P\}$, la classe méreologique n'opère pas cette distinction. Il y a également une autre différence entre la classe méreologique et la classe distributive. Cette dernière fournit extensionnellement une liste d'éléments et une seule. Certes, la propriété caractéristique -le concept- qui permet de générer une telle liste peut se formuler, se paraphraser de différentes manières mais les objets qui la constituent restent invariablement les mêmes. C'est la raison pour laquelle nous avons qualifié le caractère distributif de particulier et unidimensionnel. La classe méreologique dépasse cette limitation. Ainsi par exemple,



le segment AB est la classe des segments AC ou CB et simultanément la classe des segments AD ou DB (Leśniewski, 1927, p. 186).

Ajoutons que sur la base de la définition suivante

$$D : \langle Aab, \neg A \in A : A \in a . A \in b : A \in U \langle ab \rangle \rangle$$

on peut montrer que:

- 1) $AD \in \langle K1 \langle U \langle AC \ CB \rangle \rangle$
mais
- 2) $AD \notin \langle U \langle AC \ CB \rangle \rangle$

Avant d'approfondir davantage les distinctions entre classe méréologique et classe distributive, précisons ce que signifie 'objet P'. A cet effet, rappelons que la méréologie est une expansion de l'ontologie. L'écriture et les règles d'inférence (mis à part un nouveau terme primitif et un petit ajustement des règles qui permet de considérer l'axiome de la méréologie et les thèses qui en découlent) sont quasi les mêmes. Il y a deux conséquences à cela: d'une part la classe des P, $K1\langle P \rangle$, (qui est de la catégorie sémantique des noms) est soumise à la 'loi des noms' développée dans l'ontologie. D'autre part, il est nécessaire d'utiliser le langage ontologique pour exprimer le développement méréologique. Ici, apparaît une ambiguïté. En effet, nous parlons simultanément d'objet P, de classe et de nom. Afin de nous dégager de cette difficulté, considérons l'interprétation de l'ontologie qui a été présentée. Nous avons établi une correspondance entre un univers syntaxique et un univers sémantique. Les éléments qui constituent ce dernier sont d'une part des objets et d'autre part des noms. Les noms peuvent être de diverse nature. Il y a les noms généraux qui dénotent plus d'un objet, les noms vides qui ne dénotent aucun objet et les noms individuels qui dénotent un et un seul objet. Rappelons enfin que lorsque nous avons défini le terme constant nominal V, nous avons proposé la traduction présémantique suivante: A&V: A est un nom d'objet(p.299).

Résumons-nous:

1. Tout objet est dénoté par un nom individuel.
2. Un nom individuel dénote un et un seul objet.

Ainsi, en lieu et place de 'objet P': nous devrions écrire 'objet de nom (individuel) P'. Les raisons qui ont amené Lesniewski à ne pas exprimer cette précision sont probablement d'ordre historique. Lorsqu'il élabore la méréologie, les bases logiques qui la fondent, notamment la théorie formelle des noms -l'ontologie-, ne sont pas encore conçues. Il n'a donc vraisemblablement pas senti le besoin de faire la distinction qui nous importe aujourd'hui. Sur la base de ce qui vient d'être dit, il est raisonnable d'accepter comme équivalentes les expressions suivantes:

- a. objet de nom P
- b. P est un nom individuel
- c. l'objet P

Ainsi l'expression 'objet P' ou 'objet de nom P' peut se traduire formellement par la proposition singulière 'P a P'.

La traduction du théorème X fournit l'inscription suivante:

$$\lfloor P_a \ulcorner P \in P \Rightarrow P \in K \urcorner \langle P \rangle \urcorner$$

Le caractère méréologique se distingue du caractère distributif de plusieurs manières encore. Le concept de classe distributive ne permet pas d'accepter l'assertion suivante:

1. Si P est la classe (distributive) des objets a, alors P est la classe des classes des objets a
ou encore
2. Si P est la classe (distributive) des classes des objets a, alors P est la classe des objets a.

Dans le contexte collectif, ces assertions sont des théorèmes.

Twierdzenie LXXII. Jeżeli P jest klasą p-tów a, to P jest klasą klas p-tów a.
(Leśniewski, 1927, p. 68, traduction anglaise: Sinisi, 1976, p. 25).

Si P est la classe des a, alors P est la classe des classes des a.

Traduction formelle: $\lfloor P_a \ulcorner P \in K \langle a \rangle \Rightarrow P \in K \langle K \langle a \rangle \rangle \urcorner$

Twierdzenie XCVII. Jeżeli P jest klasą klas p-tów a, to P jest klasą p-tów a.
(Leśniewski, 1927, p. 68, traduction anglaise: Sinisi, 1976, p. 25).

Si P est la classe des classes des a, alors P est la classe des a.

Traduction formelle: $\lfloor P_a \ulcorner P \in K \langle K \langle a \rangle \rangle \Rightarrow P \in K \langle a \rangle \urcorner$

La distinction la plus frappante entre le distributif et le collectif apparaît lorsque l'on compare la production de deux classes, l'une distributive, l'autre collective, engendrées par les mêmes géné-

rateurs. A cet égard, empruntons à Grize l'exemple très éclairant qu'il propose.

Une classe distributive est, à proprement parler, l'extension d'un concept. Si p est le concept 'planète', dire que Jupiter est une planète c'est soit poser p_j soit $J \in \{x | p(x)\}$ et l'information transmise est la même dans les deux écritures. Soit donc la classe distributive.

p = d{ Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune, Pluton }

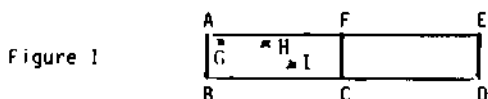
Elle contient neuf éléments et rien d'autres.

Les calottes polaires de Mars, la tache rouge de Jupiter, les anneaux de Saturne n'appartiennent pas à P. Et pourtant, tout cela et mille autres choses ont affaire avec le concept 'planète'. La notion de classe collective doit palier cette lacune. (Grize, 1973, p. 86).

Si l'on considère maintenant la classe collective des planètes

$A \in K \langle p \rangle$, $K \langle p \rangle$ comprendra "cela et mille autres choses qui ont affaire avec le concept 'planète'".

Donnons un exemple géométrique élémentaire qui est de nature à clairement mettre en évidence la distinction globale entre une classe méréologique et une classe distributive.



Notre intention est de fournir les éléments de la classe distributive, respectivement méréologique, caractérisée par la description générique a : les rectangles de la figure 1.

Soit P_d , le nom de la classe distributive ainsi générée. Elle contient trois éléments et rien d'autre.

P_d : ABCF, FCDE, ABDE

La classe méréologique P_m comprendra également ces trois éléments, mais en plus elle en contiendra une infinité d'autres. Le point I, le segment GH, la 'ligne brisée' ABCFE, la surface AGHF en sont des exemples. Ils sont éléments de la classe P_m sans pour autant être des rectangles.

Au caractère particulier et unidimensionnel de la classe distributive, la classe méréologique oppose un caractère non particulier et pluridimensionnel. Précisons davantage ces aspects. Considérons le concept planète. La classe distributive sera:

{Mercure, Vénus, Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune,
Pluton} et rien d'autre.

Cette classe ainsi constituée est unidimensionnelle parce que les éléments qui la composent sont de la même nature. Ils ne sont que ce que détermine exactement la propriété caractéristique, le concept qui l'engendre. Chaque élément possède la même dimension conceptuelle. Les anneaux de Saturne, les taches de Mars et mille autres choses ne sont pas éléments de cette classe. Cette classe est particulière parce que la propriété caractéristique qui l'engendre est invariable, à la paraphrase près. 'Planète' peut être remplacé par 'astre tournant autour du soleil et éclairé par lui' ou par un autre définiens équivalent. Quelle que soit la description choisie, nous restons au même niveau de particularité. La classe méréologique ne saurait se soumettre aux propriétés de la classe distributive. Elle possède des qualités, des propriétés plus riches et plus complexes que celles de la classe distributive. Elle offre un caractère pluridimensionnel. Aux qualités différentes des éléments qu'elle contient correspond une grande richesse de relations qui les rend solidaires. Le support axiomatique qui ancre son existence 'départicularise' l'entrée en matière d'une classe. Heureusement ce caractère a ses limites, et, s'il est possible de considérer des éléments de diverse nature dans une classe méréologique, il n'est pas possible d'y mettre n'importe quoi.

La classe méréologique est un tout au sens très fort du terme. La relation de partie à tout est bien particulière et immensément moins restrictive que celle qui caractérise la classe distributive. Précisons mieux cette relation. Dans sa théorie générale des ensembles de 1916, Leśniewski propose un terme primitif ainsi que deux définitions qui inscrivent des relations de partie à tout. Le terme primitif 'part de'

-formellement écrit pt - est un foncteur à un argument nominal formateur de nom. Il s'inscrit donc dans des propositions de la forme : $A \zeta pt \langle B \rangle$. "est part de" est une relation irréflexive, asymétrique et transitive. Ce terme primitif lui permettra de construire le premier exposé de la méréologie. Il propose ensuite la définition de 'ingrédient d'un objet P', formellement écrit $ingr \langle p \rangle$, $ingr$ est également un foncteur formateur de nom à un argument nominal. Il s'inscrit dans des propositions singulières de la forme $A \in ingr \langle p \rangle$.

J'utilise l'expression "ingrédient de l'objet P" pour dénoter le même objet P et chaque part de cet objet. (1)

(1) La proposition d'utiliser l'expression "ingrédient", dans ce contexte, m'a été suggérée par Lucyan Zarzecki.
(Leśniewski, 1916, définition I.)

Lesniewski propose enfin la définition 'élément d'un objet P', formellement $el \langle P \rangle$. el est ainsi un foncteur ontologique formateur de nom à un argument nominal. Il s'inscrit dans des propositions singulières de la forme $A : el \langle B \rangle$.

J'utilise l'expression "élément de l'objet P" pour dénoter tout objet P_1 lorsque, si il existe 'x', alors

- 1) P est la classe des objets x,
- 2) P_1 est x.

(Leśniewski, 1916, définition IV).

Pour bien comprendre cette définition, il nous faudrait disposer maintenant de la définition de classe. Nous ne l'avons pas encore donnée. En fait notre propos est autre. Nous voulions seulement signaler les deux définitions de relation de partie à tout que Leśniewski donne en 1916. Deux raisons ont guidé le cheminement de notre réflexion. La première est qu'il s'est avéré (Kearns, 1967, p. 82) que ces deux définitions sont équivalentes. Les théorèmes suivants permettent de 'sentir' ce résultat.

Si P_1 est un ingrédient de l'objet P, alors P_1 est un élément de l'objet P. (Leśniewski, 1916, Thèse XI).

Si P_1 est un élément de l'objet P, alors P_1 est un ingrédient de l'objet P.
(Leśniewski, 1916, Thèse XII)

La deuxième est que, dans la littérature relative à Leśniewski, on donne parfois au définiendum 'élément de', le définiens de 'ingrédient de' (Sobocinski, 1955, p. 3). Nous procéderons de manière similaire et ceci pour des raisons qui relèvent plus d'une perception linguistique subjective que de motifs scientifiques. En effet, 'élément de' semble une expression plus conforme à l'usage courant que l'expression 'ingrédient de'.

Résumons ce qui vient d'être présenté.

$A \text{ pt} \langle B \rangle$

Lecture: A est une part de B.

Cette expression permet de définir une relation partitive; cette relation est transitive, irreflexive et asymétrique.

catégorie sémantique de pt: N/N - foncteur formateur de nom à un argument nominal

$\text{pt} \langle B \rangle : N$

$A \text{ ingr} \langle B \rangle$

Lecture: A est ingrédient de B

Cette expression permet de définir une relation d'appartenance; cette relation est transitive, réflexive et non symétrique.

catégorie sémantique de ingr: N/N - foncteur formateur de nom à un argument nominal

$\text{ingr} \langle B \rangle : N$

$A \text{ el} \langle B \rangle$

Lecture: A est élément de B

Cette expression permet de définir une relation d'appartenance; cette relation est transitive, réflexive et non symétrique.

catégorie sémantique de el: N/N - foncteur formateur de nom à un argument nominal

$\text{el} \langle B \rangle : N$

AEkl:a>

Lecture: A est la classe des a

catégorie sémantique de Kl: N/N - foncteur formateur de nom à un argument nominal

Kl,a>: N

Sur la base de l'acquis théorique de l'ontologie et en utilisant les définitions métréologiques qui viennent d'être exposées, nous voulons déduire et décrire de manière formelle quelques assertions de Leśniewski.

I. "jeżeli jeden i tylko jeden przedmiot jest P, to P jest klasą p-tów P" (Leśniewski, 1927, p. 187).

I. Si un et un seul objet est P, alors P est la classe des P.

- I. $\underline{P}_a^r P \& P \supset P \< Kl \< P \supset$
II. $\underline{P}_a^r P \& P \supset P \< V^r$ définition; D14
III. $\underline{P}_a^r P \& V \supset ! \{ P \} . \supset \{ P \}^r$ thèse; D1, D2, D4
IV. $\underline{P}_a^r P \& \supset P \< P^r$ thèse; T5
V. $\underline{P}_a^r P \< Kl \< P \supset P \< P^r$ IV, a/Kl<P>
VI. $\underline{P}_a^r P \< Kl \< P \supset P \< P^r$ I, V, déf, =
VII. $\underline{P}_a^r ! \{ P \} . \supset \{ P \} . \supset P \< Kl \< P \supset$ II, III, I

Il s'agit d'une formalisation plus explicite de l'assertion I.

- VIII. $\underline{K}_a^r ! \{ e \} \< Kl \< K \supset \} . \supset \{ e \} \< Kl : K \supset . \supset e \< Kl \< K \supset \& Kl \< e \< Kl \< K \supset \supset$
VII, sub. P/ e<Kl<K>>

Lecture: si la classe ne contient qu'un et un seul élément, alors cet élément est la classe des éléments (en fait de l'élément) de la classe.

Leśniewski exprime ce résultat ainsi:

(A) jeżeli jeden i tylko jeden przedmiot jest elementem klasy K, to element klasy K jest klasą elementów klasy K. (Leśniewski, 1927, p. 197).

Si un et un seul objet est élément de la classe K, alors l'élément de la classe K est la classe des éléments de la classe K.

Leśniewski affirme également

(B) Jeżeli X jest klasą elementów klasy K , to klasą K jest tym samym przedmiotem, co X .

(Leśniewski, 1927, p. 197).

Si X est la classe des éléments de la classe K , alors, par là même, la classe K est l'objet X , ...

Utilisons ce résultat dans notre perspective.

IX. $X \in K \rightarrow X \in K \rightarrow X \in K \rightarrow X \in K$

X. $X \in K \rightarrow X \in K \rightarrow X \in K \rightarrow X \in K$ IX, $X \in K \rightarrow X \in K$

XI. $X \in K \rightarrow X \in K \rightarrow X \in K \rightarrow X \in K$ VIII, X, transitivité

Leśniewski exprime ce résultat ainsi:

(C) Jeżeli jeden i tylko jeden przedmiot jest elementem klasy K , to klasą K jest tym samym przedmiotem, co element klasy K .

(Leśniewski, 1927, p. 197).

Si un et un seul objet est élément de la classe K , alors la classe K , par là même, est l'objet 'élément de la classe K '.

Ce résultat désigne un type particulier de classe. Il est utile de lui attribuer un nom et surtout, de le définir de manière formelle. Le nom de classe unité, classe individu, -'klasa jednostkowa' (Leśniewski, 1927, p. 197) ou classe singulière -singuläre Klasse- (Frege, 1895, pp. 444-5) conviennent parfaitement.

En utilisant la règle de définition de la méréologie, inscrivons la définition de la classe singulière.

XII. $X \in K \rightarrow X \in K \rightarrow X \in K \rightarrow X \in K$ définition

Il s'agit bien d'une bonne définition méréologique de type ontologique.

Sing est une constante de la catégorie des noms N.

Leśniewski propose:

(D) K jest klasą jednostkową wtedy i tylko wtedy, gdy jeden i tylko jeden przedmiot jest elementem klasy K .

(Leśniewski, 1927, p. 197).

K est une classe singulière, si et seulement si, un et seulement un objet est élément de la classe K.

Traduction formelle: $K \in \text{Sing} \iff \exists! x (x \in K)$: il existe un et un seul x

De XI et XII nous déduisons immédiatement.

XIII. $\neg K \in \text{Sing} \iff \exists x (x \in K) \wedge \exists y (y \in K) \wedge x \neq y$

Leśniewski exprime ce résultat de la manière suivante:

(E) Jeżeli jakas klasa jest klasą jednostkową, to jest tym samym przedmiotem, co jedyny jej element.
(Leśniewski, 1927, p. 197).

Si une classe est une classe singulière, alors elle est, par là même, l'objet qui est son unique élément.

Leśniewski ne présuppose pas l'existence de classe singulière dans le monde - "nie przesadzam tu kwestji, czy klasy jednostkowe wogole istniega na swiecie" (Leśniewski, 1927, p. 198), mais il est convaincu que si une classe est une classe singulière - tel le concept traditionnel du point géométrique - alors elle est bien identique à son unique élément.

Leśniewski se sent ici en accord avec Frege; il le cite même ou s'y réfère.

Nun ist unsere Annahme, dass singuläre Klassen mit Individuen zusammenfallen, eine notwendige Folge der Auffassung, dass die Klassen aus Individuen bestehen, einer Auffassung, die dem Gebietskalkül gemäss ist und diesem entstammt.

(Frege, 1895, p. 445).

Maintenant, notre conjecture selon laquelle les classes singulières coïncident avec les individus, est une conclusion nécessaire; elle découle de la conception qui précise que les classes se composent d'individus.

Il accepte cette position de Frege à condition que "singuläre Klassen mit Individuen zusammenfallen" soit d'un contenu équivalent à "eine Klasse, die nur aus einem Gegenstande besteht, mit diesem selbst zusammenfällt" (Frege, 1895, pp. 443-444).

Le crédit que Leśniewski accorde aux assertions de Frege n'est que mo-

mentané. En effet, dans son article "Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik" (Frege, 1895), l'auteur fait un raisonnement qui, sur la base de présuppositions qu'il trouve acceptables -celles que nous avons citées- aboutit à une incompatibilité.

Wir haben gesehen, dass die Auffassung, wonach die Klasse aus Individuen besteht, und also das Einzel Ding mit der singulären Klasse zusammenfällt, in keinem Falle aufrecht erhalten werden kann. (Frege, 1895, p. 445)

Nous avons vu que la conception selon laquelle la classe se compose d'individus, et par conséquent [also], l'objet singulier coïncide avec la classe singulière, ne peut en aucun cas être correcte.

En raison de cette contradiction, Frege propose alors une notion de classe qui est l'extension d'un concept, der Umfang eines Begriffes..

Der Umfang eines Begriffes besteht nicht aus den Gegenständen, die unter den Begriff fallen, etwa wie ein Wald aus Bäumen, sondern er hat an dem Begriffe selbst und nur an diesem seinen Halt. (Frege, 1895, p. 455).

L'extension d'un concept n'est pas constitué par les objets qui tombent sous le concept, comme une forêt est constituée d'arbres, mais elle s'appuie sur le concept même et seulement sur celui-là.

Leśniewski n'accepte pas le raisonnement de Frege qui le conduit d'une part à refuser les propriétés de la notion de classe qu'il semblait préalablement accepter et, d'autre part, à considérer la classe comme l'extension d'un concept. Il analyse ce raisonnement et en découvre la faille.

Frege met en évidence l'inacceptabilité conjointe des assertions: 1. L'objet unique -la chose singulière- coïncide avec la classe singulière.

II. La classe se compose d'individus

Son argumentation repose sur les bases d'un autre présupposé qui est totalement indépendant de l'assertion II.

III. Chaque individu doit être considéré comme la classe
qui n'est composée que de lui.

Frege, comme nous le verrons, refuse cette assertion et met en doute sa validité. Il a bien sûr raison d'en douter. Son tort est d'avoir utilisé ce résultat pour mettre en évidence l'incompatibilité des assertions I et II. La démonstration de l'inacceptabilité conjointe des assertions I et II utilise l'assertion III qui est indépendante des deux autres. Leśniewski montre que le raisonnement de Frege est fallacieux. Il souligne que l'affirmation précédente ne possède aucun fondement et que le 'also' qui en détermine la valeur de vérité n'est aucunement justifié (Leśniewski, 1927, p. 199).

Nous allons reproduire ici la démonstration qui amène Frege à refuser l'assertion III. Ceci nous aidera à caractériser davantage la classe méréologique.

Der Zweifel, ob jedes Individuum als Klasse betrachtet werden darf, die nur aus ihm besteht, wird durch folgende Überlegung verstärkt. Wir können für P in unserer vorher angestellten Betrachtung auch eine Klasse nehmen, die selber eine Menge von Individuen umfasst; denn wie der Verfasser auf S. 148 sagt, kann eine solche Klasse als ein Gedankenling und demgemäß auch als Individuum hingestellt werden. Ist nun Q wie oben die Klasse der mit P zusammenfallenden Gegenstände, so ist Q eine unguiltige Klasse, die nur P als Individuum enthält. Wäre es nun richtig, dass eine singuläre Klasse mit dem Individuum zusammenfielen, das als einziges unter ihr begriffen wird, so fielen Q mit P zusammen. Nehmen wir nun an, es seien a und b verschiedene Gegenstände, die als Individuen unter P begriffen werden, so würden sie nun auch unter Q begriffen sein; das hiesse, sowohl a als auch b fielen mit P zusammen. Folglich fielen auch a mit b zusammen gegen die erlaubte Annahme, sie seien verschieden.
(Frege, 1895, pp.444-445).

Le doute relatif à la question de savoir si chaque individu peut être considéré comme une classe sera renforcé par la réflexion suivante. Nous pouvons également choisir pour P dans notre considération précédente, une classe qui se compose elle-même d'un ensemble d'individus; comme dit l'auteur à la page 148, une telle classe peut être considérée comme un être de pensée, et par conséquent, elle peut être également considérée comme un individu. Considérons maintenant Q comme précédemment, c'est-à-dire coïncidant

avec les objets P ; envisagé ainsi Q est une classe singulière qui ne contient que P comme individu. Si cela était vrai maintenant qu'une classe singulière coïncide avec l'individu qui y appartient, alors P coïnciderait avec P . Acceptons maintenant que a et b soient des objets différents qui, en tant qu'individus, appartiennent à P ; de cette manière, ils appartiendraient également à Q ; cela signifierait que a comme b coïncideraient avec P . Il s'ensuivrait que a et b coïncideraient, et ceci contrairement à l'hypothèse admise selon laquelle ils seraient différents.

Cette démonstration qui montre la contradiction à laquelle on aboutirait si on acceptait que "chaque objet peut être considéré comme la classe dont cet objet est exactement l'unique élément" est correcte. Il est cependant injustifié d'affirmer que cette assertion découle de celle qui énonce que "toute classe est composée d'individus". Tout se passe comme si Frege avait confondu la notion d'individu avec celle de classe singulière et par abus de langage: individu singulier. Revenons à cette troisième assertion. Lesniewski la refuse avec véhémence.

odrzucam

**jednoczesnie najzupełniej stanowczo pogląd, z którym zgodnie
(E*) każdy przedmiot jest klasą, której jedynym elementem
jest ten właśnie przedmiot.** (Lesniewski, 1927, p. 197)

*Je refuse tout à fait catégoriquement le point de vue selon lequel
(E*) tout objet est la classe dont l'unique élément est cet objet particulier.*

S'il est pertinent de penser un objet comme une entité, il est faux de le considérer -dans la perspective méréologique- comme une classe dont l'unique élément est précisément cet objet. Admettre que si $P \in P$ - P est un objet- alors $\langle P \rangle$ - P est la classe des P - ne signifie pas que P est l'unique élément de la classe. Un exemple facilitera la compréhension. Considérons une orange, O , comme une entité, un individu, un objet. Appréhendée de manière méréologique, il est possible d'affirmer que l'orange est classe d'elle-même.

si $O \in O$ alors $\langle O \rangle$

L'orange est élément de la classe d'elle-même. Mais il n'en est pas

le seul élément. Un fragment de son écorce, un de ses quartiers, trois pépins et moult autres choses sont également 'élément' de l'orange.

L'esprit méréologique apparaît tout à coup plus naturel. Il nous permet de parler d'individus, de classes d'individus, où l'individu est considéré comme un tout, sans éliminer le fait que chaque individu peut à son tour être analysé en ses éléments -s'il en a-. Par exemple proposer la classe méréologique des planètes, $K\langle p \rangle$, n'est pas seulement proposer la suite finie des planètes qui sont élément de la classe mais c'est surtout fournir une manière d'entrer en matière avec cette classe-là. Les planètes, les éléments des planètes, les éléments des éléments des planètes, ..., comme la classe $K\langle p \rangle$ elle-même, sont des éléments de la classe $K\langle p \rangle$. Cette qualité nous avait engagé à qualifier de pluridimensionnelle la relation d'appartenance méréologique. Le nom général P , les planètes, n'est pas à considérer -à la façon distributive- comme l'"indicateur" des éléments de la classe, mais comme un générateur possible de tous les éléments de la classe. Le qualificatif de possible est important. En effet, une même classe méréologique peut se laisser aborder par des générateurs différents, non par de simples paraphrases d'une même propriété caractéristique, mais par la dénotation d'objets différents. A cet égard l'exemple géométrique proposé par Leśniewski et que nous avons donné plus haut est très explicite. C'est en vertu de cette dernière propriété que nous opposons au caractère particulier de la classe distributive le caractère non particulier de la classe méréologique.

4. LES AXIOMES DE LA MERELOGIE

En 1916 Leśniewski proposait le système axiomatique suivant. Comme nous le verrons plus loin, il n'est pas le plus élégant, mais il reste probablement le plus explicite. En effet, la formulation de ses axiomes est de nature à faciliter la saisie des informations qu'ils contiennent. A la différence de Leśniewski, nous présenterons les axiomes de manière formelle. Pour des raisons déjà énoncées, nous utiliserons le terme de "élément" à la place de celui de "ingrédient". Nous nous

donnons également la liberté de modifier le nom des variables.

$$A1 \quad \ulcorner AB \urcorner \ulcorner A \llbracket pt \llbracket B \rrbracket \gg B \llbracket \llbracket pt \llbracket A \rrbracket \gg \rrbracket \urcorner \quad (1916)$$

Cet axiome établit l'asymétrie de la relation partitive conçue sur l'existence du foncteur 'pt'. Ce foncteur est de la catégorie des foncteurs formateur de nom à un argument nominal, N/N. Les parenthèses choisies sont conformes à celles exigées par la base ontologique.

$$A2 \quad \ulcorner ABC \urcorner \ulcorner A \llbracket pt \llbracket B \rrbracket \gg B \llbracket \llbracket pt \llbracket C \rrbracket \gg C \rrbracket \gg A \llbracket pt \llbracket C \rrbracket \gg \rrbracket \urcorner \quad (1916)$$

Cet axiome inscrit la transitivité de la relation partitive conçue sur l'existence du foncteur 'pt'. Ce foncteur appartient également à la catégorie sémantique N/N.

$$D1 \quad \ulcorner AB \urcorner \ulcorner A \llbracket A : = \{AB\} \vee A \llbracket pt \llbracket B \rrbracket \gg \rrbracket : = A \llbracket el \llbracket B \rrbracket \gg \rrbracket \urcorner \quad (1916)$$

Cette définition méréologique de type ontologique inscrit le terme 'el' comme un foncteur formateur de nom à un argument nominal.

A est élément de B, si et seulement si, A est identique à B ou A est une part de B.

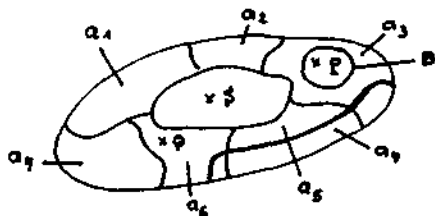
$$D2 \quad \ulcorner Aa \urcorner \ulcorner A \llbracket A \rrbracket \urcorner . \ulcorner B \urcorner \ulcorner B \llbracket a \rrbracket \gg \ulcorner B \llbracket B \llbracket a \llbracket B \llbracket el \llbracket A \rrbracket \gg \rrbracket \gg \ulcorner B \llbracket B \llbracket el \llbracket A \rrbracket \gg \rrbracket \gg \ulcorner C \llbracket C \llbracket a \llbracket D \llbracket el \llbracket C \rrbracket \gg \rrbracket \gg \ulcorner D \llbracket el \llbracket B \rrbracket \gg \rrbracket : = A \llbracket el \llbracket a \rrbracket \gg \rrbracket \urcorner \quad (1916)$$

Cette définition qui est de la même nature que la précédente inscrit formellement le foncteur Kl. Ce terme constant appartient à la catégorie sémantique des foncteurs formateur de nom à un argument nominal.

Proposons un exemple, il facilitera l'accès aux relations qui organise une classe méréologique. Proposons le modèle suivant:

Soit A, une figure géométrique qui a la forme d'un disque vidé en son centre.

A:



Soit a , un nom général qui dénote différentes parties de cette surface; elles sont disjointes ou non disjointes, et dans leur totalité elle recouvre la figure A.

$a \sim a1$, $a \sim a4$, $a \sim a7$

$a \sim a2$, $a \sim a5$

$a \sim a3$, $a \sim a6$

Considérons a comme un nom générateur qui donne accès à la classe météorologique de la figure A.

$A \in Kl\langle a \rangle$

1. Cette classe existe bien; en effet, il existe B , B est un a .

$[a1 \sim a, a2 \sim a, \dots, a7 \sim a]$

2. Chacun des a est élément de la classe

$\{a1 \in l\langle A \rangle, \dots, a7 \in l\langle A \rangle\}$

3. Il est d'un intérêt certain d'analyser si cette classe possède d'autres éléments. Pour ce faire, nous nous intéresserons à la troisième conjonction du définiens de la définition D2; c'est elle qui permet d'en décider.

Nous analyserons plusieurs cas.

a) Le point P est-il élément de la classe $Kl\langle a \rangle$?

Pour répondre à cette question, il est nécessaire d'observer s'il existe bien C, D , tel que C est un a ,

et
 D est élément de C
 et
 D est élément de B .

La réponse est positive, en effet, il existe bien P et $a3$,

$a3 \in a$, $P \in l\langle a3 \rangle$ et $P \in l\langle P \rangle$ (réflexivité de la relation d'appartenance conçue sur l'opérateur 'el'). $P \in l\langle Kl\langle a \rangle \rangle$

b) La surface R est-elle élément de la classe $Kl\langle a \rangle$?

Elle l'est, car il existe $a3$ et R tel que

$a3 \in a$, $P \in l\langle a3 \rangle$ et $P \in l\langle R \rangle$, et ainsi $R \in l\langle Kl\langle a \rangle \rangle$.

- c) La figure A elle-même est élément de la classe $Kl\langle a \rangle$.
 En effet, imposer l'existence de C, D, n'entraîne pas l'unicité existentielle. De ce fait, il existe bien des C et des D tels que: $Cia, Cite\langle Ci \rangle$ et $Citel\langle A \rangle$, et ainsi $Acel\langle Kl\langle a \rangle \rangle$.
- d) Le point S n'est pas élément de la classe $Kl\langle a \rangle$.
 En effet, il n'existe pas de D tel que D soit à la fois élément de S et élément de ai.
- e) Le point Q en conjonction avec la zone B est également un élément de la classe, comme la réunion de a1 et a7 d'ailleurs.

Nous pourrions multiplier les exemples.

Avant de démontrer certaines thèses de la méréologie qui illustrent les relations entre les éléments d'une classe, terminons la présentation de la base axiomatique de ce système.

$$A3 \quad \perp AB \underline{a} \ulcorner A \in Kl\langle a \rangle, B \in Kl\langle a \rangle \urcorner \Rightarrow \{AB\} \quad (1916)$$

Cet axiome impose l'unicité de la classe des a.

$$A4 \quad \perp A \underline{a} \ulcorner Aza \urcorner \exists B \ulcorner B \in Kl\langle a \rangle \urcorner \quad (1916)$$

Cet axiome établit que la classe des a existe pour autant qu'un a au moins existe, ou, dit autrement, si les a existent, alors la classe des a existe.

5. QUELQUES THÈSES

Sur la base du système axiomatique de 1916, nous proposons quelques démonstrations de thèses. Elles fournissent des résultats susceptibles de faciliter la compréhension des relations entre les foncteurs classe de, KI, élément de, eI, et part de, pt.

Th 1 $\lfloor A a \rfloor \lfloor A \in KI \langle a \rangle \rangle \supset A \in A$ D2, 1ère conjonction

Si A est la classe des a, alors A est un nom individuel.

Th 2 $\lfloor A a \rfloor \lfloor A \in KI \langle a \rangle \rangle \supset \lfloor \exists \theta \rfloor \theta \in a$ D2, 2ème conjonction

Si A est la classe des a, alors quelque chose est un a.

Th 3 $\lfloor A B a \rfloor \lfloor A \in KI \langle a \rangle \rangle \supset \theta \in a \supset \theta \in el \langle A \rangle$

D2, 3ème conjonction

Si A est la classe des a, alors si B est un des a, il est élément de la classe.

Th 4 $\lfloor A B a \rfloor \lfloor A \in KI \langle a \rangle \rangle \supset \theta \in el \langle A \rangle \supset \lfloor \exists \langle C \rangle \rfloor \lfloor \exists a \rfloor$

$\theta \in el \langle C \rangle . \theta \in el \langle \theta \rangle$

D2, 4ème conjonction

Si A est la classe des a, alors si B est élément de A il existe C et D tel que, C est un des a. D est élément de C tout en étant élément de B.

Th 5 $\vdash A \supset \sim (A \text{ pt } \langle A \rangle)$

1	A	A pt $\langle A \rangle$	hyp.
2		A pt $\langle A \rangle \supset A \in \sim \langle \text{pt } \langle A \rangle \rangle$	A1, B/A
3		A $\in \sim \langle \text{pt } \langle A \rangle \rangle$	2, 1, $\supset e$
4		A pt $\langle A \rangle \cdot \sim (A \text{ pt } \langle A \rangle)$	3, déf. \sim minimale
5		$\sim (A \text{ pt } \langle A \rangle)$	4, $\wedge e$
6		$\sim (A \text{ pt } \langle A \rangle)$	1, 5, $\sim i$
7	$\vdash A \supset \sim (A \text{ pt } \langle A \rangle)$		1-6, $\supset i$

Sur la base du foncteur pt, il est possible de concevoir une relation partitive. La thèse Th 5 établit l'irréflexivité de cette relation.

Th 6 $\vdash Aa \supset Aea \supset A \in \text{el } \langle A \rangle$

1	Aa	Aea	hyp.
2		A e A	1, Ontologie, T5
3		= {A}	2, Ontologie, B4
4		= {A} \vee A pt $\langle A \rangle$	3, $\vee i$
5		A e A, = {A} \vee A pt $\langle A \rangle$	2, 4, A i
6		A e el $\langle A \rangle$	5, déf. el.
7		Aea \supset A e el $\langle A \rangle$	1-6, $\supset i$
8	$\vdash Aa \supset Aea \supset A \in \text{el } \langle A \rangle$		1-7, $\supset i$

Th 7 $\vdash A \supset A \in \text{el } \langle A \rangle$ Th. 6, $\supset A$

Si A est un individuel, alors il est élément de lui-même.

Th 8 $\vdash \lambda A \lambda x [\lambda K \langle A \rangle \supset A \in \langle A \rangle]$

Th 6, $^a/K \langle A \rangle$

Si A est une classe, alors elle est élément d'elle-même. Ce résultat met en évidence la distance qu'il y a entre la classe méreologique et celle distributive de la théorie traditionnelle des ensembles dans laquelle une classe n'est jamais élément d'elle-même.

Th 9 $\vdash \lambda AB [A \in \langle B \rangle \supset B \in B]$

1	AB	$A \in \langle B \rangle$	hyp
2		$= \{ AB \} \vee A \in \langle B \rangle$	1, déf. el
3		$\vdash \{ AB \}$	hyp. v e
4		$B \in A$	3, ont. B4
5		$B \in B$	4, ont. T5
6		$A \in \langle B \rangle$	hyp. v e
7		$B \in \sim \langle \langle A \rangle \rangle$	6, A2
8		$B \in B$	7, ont. T5
9		$B \in B$	2, 3-5, 6; 8, v e
10		$A \in \langle B \rangle \supset B \in B$	1-9, $\supset i$
11	$\lambda AB [A \in \langle B \rangle \supset B \in B]$		1-10, λi

Ce résultat est intéressant, il possède un rapport un peu caché avec la classe. En effet, une classe, $K \langle A \rangle$ par exemple, est un individuel, et la thèse Th 9 dit que si A est un élément de quelque chose, alors ce quelque chose est un individuel.

Th 10 $\perp Aa, \ulcorner Aea \urcorner \supset Aekl \langle A \rangle$

1.	Aa	Aca	hyp
2		Aea	1, ont, T5
3		$\ulcorner \exists B, \ulcorner BeA \urcorner \urcorner$	2, \exists i, [1/6]
4		B BeA	hyp
5		AeA	2,reit.
6		AeB	4,5,ont T6
7		$=\{AB\}$	6,7,ont B9
8		$=\{AB\} \vee Bepl \langle A \rangle$	7, v i
9		BeB	7, ont, T5
10		$BeB = \{AB\} \vee pl \langle A \rangle$	9,8, v i
11		$Beel \langle A \rangle$	10, def. el
12		$BeA \supset Beel \langle A \rangle$	7-11, \supset i
13		$\ulcorner \exists B, \ulcorner BeA \supset Beel \langle A \rangle \urcorner \urcorner$	7-12, \exists i
14		B $Beel \langle A \rangle$	hyp.
15		AeA	2,reit
16		BeB	14,ont T5
17		$Beel \langle B \rangle$	16,Th 7
18		$AeA . Beel \langle A \rangle . Beel \langle B \rangle$	15,16,17, v i
19		$\ulcorner \exists C, \ulcorner CeA . Beel \langle C \rangle . Beel \langle B \rangle \urcorner \urcorner$	18, \exists i, [1/6, 7/8]
20		$Beel \langle A \rangle \supset \ulcorner \exists C, \ulcorner CeA . Beel \langle C \rangle . Beel \langle B \rangle \urcorner \urcorner$	17-19, \supset i
21		$\ulcorner \exists B, \ulcorner Beel \langle A \rangle \supset \ulcorner \exists C, \ulcorner CeA . Beel \langle C \rangle . Beel \langle B \rangle \urcorner \urcorner \urcorner$	17,20, \supset i
22		$Aekl \langle A \rangle$	3,13,21, v i, def. kl, 7/8
23		$Aea \supset Aekl \langle A \rangle$	1-22, \supset i
24		$\ulcorner Aa, \ulcorner Aea \supset Aekl \langle A \rangle \urcorner \urcorner$	1-23, \exists i

Th 11 $\vdash \forall x (Ax \supset Ax) \supset \exists x (Kx \supset Ax)$

Th 10, \supset /A

Tout individuel peut être appréhendé comme sa propre classe.

Th 12 $\vdash \forall x (Ax \equiv Ax) \equiv \exists x (Kx \supset Ax)$

Th 1, \supset /A, Th 11

A est un individuel, si et seulement si, il est sa propre classe.

Th 13 $\vdash \forall x (Ax \supset \exists y (Kx \supset y) \supset \exists y (Kx \supset y))$

1	Aa	Aea	hyp.
2		$\exists \beta (\beta \in Kx \supset a)$	1, Ax \dagger
3		$\exists \beta (\beta \in Kx \supset \beta \in Kx \supset a)$	Proto. Lp. \supset pp \dagger
4		$\exists \beta (\beta \in Kx \supset \beta \in Kx \supset a) \supset \exists \beta (\beta \in Kx \supset a)$	Ax \supset
5		$Kx \supset \exists y (Kx \supset y)$	2, 3, \dagger , Ax. ont.
6		$Aea \supset Kx \supset \exists y (Kx \supset y)$	4-5, \supset i
7		$\forall x (Ax \supset \exists y (Kx \supset y) \supset \exists y (Kx \supset y))$	4-6, \forall i

Cette thèse est importante. Elle démontre en effet que la classe des a, $Kx \supset a$, est un nom individuel. Il montre ainsi la pertinence d'en parler en la singularisant, la classe des a. L'axiome 3 faisait bien pressentir ce résultat.

Th 14 $\vdash \forall x (Kx \supset \exists y (Kx \supset y) \supset \exists y (Kx \supset y) \supset \exists y (Kx \supset y))$

Th 7, A/ $Kx \supset a$

Démontrons maintenant deux thèses ontologiques dans la méréologie. Elles permettront d'inscrire d'autres thèses méréologiques.

Th 15 $\perp BC, \ulcorner \theta \epsilon C, C \epsilon B \urcorner \supset \perp A, \ulcorner A \epsilon B \equiv A \epsilon C \urcorner$

1			$\theta \epsilon C, C \epsilon B$	hyp.
2			$\theta \epsilon C$	} 1, A p
3			$C \epsilon B$	
4		A	$A \epsilon B$	
5			$\theta \epsilon C$	2, reit.
6			$A \epsilon C$	4, 5, ont. TI9, 9/c
7			$A \epsilon B \supset A \epsilon C$	4-6, \supset i
8			$A \epsilon C$	hyp
9			$C \epsilon B$	3, reit
10			$A \epsilon B$	8, 9, ont. TI9, 9/c
11			$A \epsilon C \supset A \epsilon B$	8-10, \supset i
12			$A \epsilon B \equiv A \epsilon C$	7, 11, dif. \equiv
13			$\perp A, \ulcorner A \epsilon B \equiv A \epsilon C \urcorner$	7-12, \perp i
14			$\theta \epsilon C, C \epsilon B, \supset \perp A, \ulcorner A \epsilon B \equiv A \epsilon C \urcorner$	1-13, \supset i
15			$\perp BC, \ulcorner \theta \epsilon C, C \epsilon B \urcorner \supset \perp A, \ulcorner A \epsilon B \equiv A \epsilon C \urcorner$	1-14, \perp i

Th 16 $\vdash \text{ABC} \vdash \langle A \in \varphi \langle B \rangle \rangle = \{B\} \supset A \in \varphi \langle C \rangle$

1	ABC	$A \in \varphi \langle B \rangle = \{B\}$	hyp.
2		$A \in \varphi \langle B \rangle$	} 1, $\wedge e$
3		$= \{B\}$	
4		$B \in C, C \in B$	
5		$\vdash A \vdash A \in B \equiv A \in C$	4, Th 15
6		$\vdash \text{ABC} \vdash \langle A \in \varphi \langle B \rangle \rangle = \{ \{ \varphi \} \vdash A \vdash \{B\} \}$	definition
7		$\vdash \text{AB} \vdash \vdash \vdash A \vdash A \in B \equiv A \in C \equiv \vdash \{ \{ \varphi \} \vdash A \} \equiv \{ \{B\} \}$	thèse ext.
8		$\vdash A \vdash \vdash A \in B \equiv A \in C \equiv \vdash \{ \{ \varphi \} \vdash A \} \equiv \{ \{B\} \}$	7, $\supset e, \wedge o, \wedge i$
9		$\vdash \{ \{ \varphi \} \vdash A \} \equiv \{ \{B\} \}$	8, 5, $\equiv e$
10		$\{ \{ \varphi \} \vdash A \} \vdash \{B\} \equiv \{ \{ \varphi \} \vdash A \} \vdash \{C\}$	9, $\supset e, \wedge i, \wedge e$
11		$A \in \varphi \langle B \rangle \equiv \{ \{ \varphi \} \vdash A \} \vdash \{B\}$	6, $\supset e$
12		$\{ \{ \varphi \} \vdash A \} \vdash \{B\}$	11, 2, $\equiv e$
13		$\{ \{ \varphi \} \vdash A \} \vdash \{C\}$	10, 12, $\equiv e$
14		$A \in \varphi \langle C \rangle \equiv \{ \{ \varphi \} \vdash A \} \vdash \{C\}$	6, $\supset e, \wedge o, \wedge i$
15		$A \in \varphi \langle C \rangle$	14, 13, $\equiv e$
16		$A \in \varphi \langle B \rangle = \{B\} \supset A \in \varphi \langle C \rangle$	1- 15, $\supset i$
17		$\vdash \text{ABC} \vdash \langle A \in \varphi \langle B \rangle \rangle = \{B\} \supset A \in \varphi \langle C \rangle$	1- 16, $\supset i$

Sur la base de ce résultat, il est possible d'inscrire les thèses suivantes:

Th 17 $\vdash \text{ABC} \vdash \langle A \in \rho \langle B \rangle \rangle = \{B\} \supset A \in \rho \langle C \rangle$ Th 16, \forall/ρ .

Th 18 $\vdash \text{ABC} \vdash \langle A \in e \langle B \rangle \rangle = \{B\} \supset A \in e \langle C \rangle$ Th 16, \forall/e

Th 19

$$\perp \text{ABC} \vdash \text{Aept} \langle \text{B} \rangle. = \{ \text{AC} \}. \supset \text{Cept} \langle \text{B} \rangle$$

1	ABC	Aept $\langle \text{B} \rangle. = \{ \text{AC} \}$	hyp.
2		Aept $\langle \text{B} \rangle$	} 1, $\wedge \text{e}$
3		= $\{ \text{AC} \}$	
4		CeA	3, def. =
5		CeA . Aept $\langle \text{B} \rangle. \supset \text{Cept} \langle \text{B} \rangle$	ont, $\neg \text{tt}, \text{A/c}, \text{O/A}, \text{O/pl} \langle \text{B} \rangle$
6		CeA . Aept $\langle \text{B} \rangle$	4, 2, $\wedge \text{i}$
7		Cept $\langle \text{B} \rangle$	5, 6, $\supset \text{e}$
8		Aept $\langle \text{B} \rangle. = \{ \text{AC} \}. \supset \text{Cept} \langle \text{B} \rangle$	1-7, $\supset \text{i}$
9	ABC	Aept $\langle \text{B} \rangle. = \{ \text{AC} \}. \supset \text{Cept} \langle \text{B} \rangle$	1-8, $\perp \text{i}$

Th 20 $LABC \vdash A \in l \langle B \rangle . B \in l \langle C \rangle . \supset A \in l \langle C \rangle$

1	ABC	$A \in l \langle B \rangle . B \in l \langle C \rangle$	hyp.
2		$= \{AB\} \vee A \in pl \langle B \rangle$	} 1, def. el
3		$= \{BC\} \vee B \in pl \langle C \rangle$	
4		$= \{AB\}$	2, hyp. v e
5		$= \{BC\} \vee B \in pl \langle C \rangle$	3,reit.
6		$= \{BC\}$	5, hyp. v e
7		$= \{AB\}$	7,reit
8		$= \{AC\}$	7,4, onto. T28
9		$= \{AC\} \vee A \in pl \langle C \rangle$	8, v i
10		$B \in pl \langle C \rangle$	5, hyp. v e
11		$= \{AB\}$	4,reit
12		$A \in pl \langle C \rangle$	11,10, Th. 19
13		$= \{AC\} \vee A \in pl \langle C \rangle$	12, v i
14		$= \{AC\} \vee A \in pl \langle C \rangle$	5,6-9,10-13, v e
15		$A \in pl \langle B \rangle$	2, hyp. v e
16		$= \{BC\} \vee B \in pl \langle C \rangle$	3,reit
17		$= \{BC\}$	16, hyp. v e
18		$A \in pl \langle B \rangle$	15,reit.
19		$A \in pl \langle C \rangle$	17,18, Th. 19
20		$= \{AC\} \vee A \in pl \langle C \rangle$	19, v i
21		$B \in pl \langle C \rangle$	16, hyp. v e
22		$A \in pl \langle B \rangle$	15,reit
23		$A \in pl \langle C \rangle$	22,24, Ax 2
24		$= \{AC\} \vee A \in pl \langle C \rangle$	23, v i
25		$= \{AC\} \vee A \in pl \langle C \rangle$	16,17-20,21-24, v e
26		$= \{AC\} \vee A \in pl \langle C \rangle$	2, 4-14,15-26, v e
27		$A \in l \langle C \rangle$	26, def. el
28		$A \in l \langle B \rangle . B \in l \langle C \rangle . \supset A \in l \langle C \rangle$	1-27, \supset i
29	$LABC \vdash A \in l \langle B \rangle . B \in l \langle C \rangle . \supset A \in l \langle C \rangle$		1-28, \supset i

Cette thèse inscrit que la relation d'appartenance conçue sur le foncteur e est transitive. La thèse suivante établit que cette relation est également réflexive par rapport aux noms individuels.

$$\text{Th 21} \quad \lfloor Aa \rfloor Aea \supset Aee \langle A \rangle$$

$$\text{Th 22} \quad \lfloor Aa \rfloor Aea \supset Aee \langle K \langle a \rangle \rangle$$

1	Aa	Aea	hyp.
2		K⟨a⟩ ⊃ K⟨a⟩	proto. $\lfloor p \rfloor p$
3		Aee⟨K⟨a⟩⟩	2, 1, Th 3, A/K⟨a⟩, B/A
4		Aea ⊃ Aee⟨K⟨a⟩⟩	1-3, ⊃ i
5		$\lfloor Aa \rfloor Aea \supset Aee \langle K \langle a \rangle \rangle$	1-4, ⊃ i

Si un individuel est un des a , alors il est élément de la classe générée par le nom a .

$$\text{Th 23} \quad \lfloor ABa \rfloor A \in K \langle B \rangle. B \in a. \supset \{AB\}$$

1	ABa	A ∈ K⟨B⟩. B ∈ a	hyp.
2		A ∈ K⟨B⟩	⌈ 1, A ∈
3		B ∈ a	
4		B ∈ B	3, onio, T ₃
5		B ∈ K⟨B⟩	4, Th 11
6		= {AB}	2, 5, A ∈
7		A ∈ K⟨B⟩. B ∈ a. ⊃ {AB}	1-6, ⊃ i
8		$\lfloor ABa \rfloor A \in K \langle B \rangle. B \in a. \supset \{AB\}$	1-7, ⊃ i

Si A est la classe générée par B et que B est un individuel, alors A et B sont identiques.

T 24 $\lfloor Aa, \ulcorner A \in K \lrcorner \rceil \rceil = \{ A K \lrcorner \}$

1	Aa	$\ulcorner A \in K \lrcorner \rceil$	hyp
2		$\lfloor \exists A, \ulcorner A \in a \urcorner \rfloor$	1, def. K1
3		$K \lrcorner \rceil \in K \lrcorner \rceil$	2, Th 13
4		$= \{ A K \lrcorner \}$	3, 1, onto, T 19
5		$\ulcorner A \in K \lrcorner \rceil \rceil = \{ A K \lrcorner \}$	1-4, $\supset i$
6	$\lfloor Aa, \ulcorner A \in K \lrcorner \rceil \rceil = \{ A K \lrcorner \}$		1-5, $\cup i$

Si A est la classe des a, alors A et classe des a sont identiques.

Th 25 $\lfloor a, \ulcorner \{ a \} \urcorner \rfloor = \{ K \lrcorner \}$

1	a	$\ulcorner \{ a \} \urcorner$	hyp.
2		$\lfloor \exists A, \ulcorner A \in a \urcorner \rfloor$	1, def. '1-1'
3		A $\ulcorner A \in a \urcorner$	2, hyp. $\exists e$
4		$\lfloor \exists B, \ulcorner B \in K \lrcorner \rceil \rfloor$	3, Ax. 4
5		$\ulcorner \{ K \lrcorner \} \urcorner$	4, def. '1-1'
6		$\{ K \lrcorner \}$	2, 3-5, $\exists e$
7		$\ulcorner \{ a \} \supset \ulcorner \{ K \lrcorner \} \urcorner \rfloor$	1-6, $\supset i$
8		$\ulcorner \{ K \lrcorner \} \urcorner$	hyp
9		$\lfloor \exists B, \ulcorner B \in K \lrcorner \rceil \rfloor$	8, def. '1-1'
10		B $\ulcorner B \in K \lrcorner \rceil$	9, hyp. $\exists e$
11		$\lfloor \exists A, \ulcorner A \in a \urcorner \rfloor$	10, Th 2
12		$\ulcorner \{ a \} \urcorner$	9, 10-11, $\exists e$
13		$\ulcorner \{ a \} \urcorner$	12, def. '1-1'
14		$\ulcorner \{ K \lrcorner \} \supset \ulcorner \{ a \} \urcorner \rfloor$	8-13, $\supset i$
15		$\ulcorner \{ a \} \urcorner = \ulcorner \{ K \lrcorner \} \urcorner$	7, 14, def. =
16	$\lfloor a, \ulcorner \{ a \} \urcorner \rfloor = \{ K \lrcorner \}$		1-15, $\cup i$

Si les a existent, alors la classe des a existe, et réciproquement.

Th 26 $\vdash \text{Aa} \supset \text{A} \varepsilon \text{Kl} \langle a \rangle \supset \text{A} \varepsilon \text{Kl} \langle \text{Kl} \langle a \rangle \rangle$

1	Aa	A ε Kl $\langle a \rangle$	hyp.
2		$\exists \text{B} \{ \exists \varepsilon \text{Kl} \langle \text{Kl} \langle a \rangle \rangle \}$	Ax 8, $^{\circ}/\text{Kl} \langle a \rangle, 1$
3		B	2, hyp. 3 e
4		A ε Kl $\langle a \rangle$	1,reit
5		$\supset \{ \text{A} \text{Kl} \langle a \rangle \}$... 24
6		B ε Kl $\langle a \rangle$	3,5, Th 16, $^{\circ}/\text{Kl}$
7		$\supset \{ \text{B} \text{A} \}$	Th 23, $^{\circ}/\text{a}, ^{\circ}/\text{A}, ^{\circ}/\text{Kl} \langle a \rangle, 5, 6$
8		A ε Kl $\langle \text{Kl} \langle a \rangle \rangle$	3, 7, thèse ext.
9		A ε Kl $\langle \text{Kl} \langle a \rangle \rangle$	2, 3-8, 3 e
10		A ε Kl $\langle a \rangle \supset \text{A} \varepsilon$ Kl $\langle \text{Kl} \langle a \rangle \rangle$	1-9, \supset i
11		$\vdash \text{Aa} \supset \text{A} \varepsilon \text{Kl} \langle a \rangle \supset \text{A} \varepsilon \text{Kl} \langle \text{Kl} \langle a \rangle \rangle$	1-10, \supset i

Th 27 $\vdash \text{Aa} \supset \text{A} \varepsilon \text{Kl} \langle \text{Kl} \langle a \rangle \rangle \supset \text{A} \varepsilon \text{Kl} \langle a \rangle$

1	Aa	A ε Kl $\langle \text{Kl} \langle a \rangle \rangle$	hyp.
2		A $\varepsilon \varepsilon \langle a \rangle$	1, Th 6
3		$\exists \{ \exists \{ \varepsilon \text{Kl} \langle a \rangle \} \cdot \exists \varepsilon \varepsilon \langle \varepsilon \rangle \cdot \exists \varepsilon \varepsilon \langle a \rangle \}$	1,3, Th 7, $^{\circ}/\text{A}, ^{\circ}/\text{Kl} \langle a \rangle$
4		E	3, hyp. 3 e
5		$\varepsilon \text{Kl} \langle a \rangle$	4, A e
6		$\supset \{ \varepsilon \text{Kl} \langle a \rangle \}$	5, Th 24
7		A ε Kl $\langle \text{Kl} \langle a \rangle \rangle$	1,reit.
8		A ε Kl $\langle \varepsilon \rangle$	8, Th 16, $^{\circ}/\text{Kl}, ^{\circ}/\text{Kl} \langle a \rangle$
9		$\varepsilon \varepsilon \langle a \rangle$	5, onto, T5
10		$\supset \{ \text{A} \varepsilon \}$	8, 9, Th 23
11		A ε Kl $\langle a \rangle$	10, 5, thèse ext.
12		A ε Kl $\langle a \rangle$	3, 8-11, 3 e
13		A ε Kl $\langle \text{Kl} \langle a \rangle \rangle \supset \text{A} \varepsilon$ Kl $\langle a \rangle$	1-12, \supset i
14		$\vdash \text{Aa} \supset \text{A} \varepsilon \text{Kl} \langle \text{Kl} \langle a \rangle \rangle \supset \text{A} \varepsilon \text{Kl} \langle a \rangle$	1-13, \supset i

Les théorèmes 26 et 27 montrent que dans la méréologie la classe des a et la classe de la classe des a représentent le même objet. Ce résultat est en complète opposition avec ce que permet la théorie traditionnelle des ensembles.

Th 28 $\sim \{ \ulcorner LA_0 \urcorner \ulcorner A \in KI \langle a \rangle \urcorner \}$

1			$\ulcorner LA_0 \urcorner \ulcorner A \in KI \langle a \rangle \urcorner$	hyp
2			$\ulcorner A \in KI \langle \lambda \rangle \urcorner$	$1, \ulcorner \lambda \urcorner, \ulcorner \lambda \urcorner / \ulcorner \lambda \urcorner, \ulcorner \lambda \urcorner$
3			$\ulcorner A \in \lambda \urcorner$	2, onto, $\ulcorner \lambda \urcorner$
4			$\ulcorner \sim (A \in \lambda) \urcorner$	onto, $\ulcorner \lambda \urcorner$
5			$\ulcorner \sim (\ulcorner LA_0 \urcorner \ulcorner A \in KI \langle a \rangle \urcorner) \urcorner$	$1, 3, 4, \ulcorner \sim \urcorner i$

Th 29 $\ulcorner LA_0 \urcorner \ulcorner \sim (A \in KI \langle \lambda \rangle) \urcorner$

1		A		$\ulcorner A \in KI \langle \lambda \rangle \urcorner$	hyp.
2				$\ulcorner \exists B \ulcorner B \in \lambda \urcorner \urcorner$	$1, Th 2, \ulcorner \lambda \urcorner / \ulcorner \lambda \urcorner$
3				$\ulcorner \sim \exists B \ulcorner B \in \lambda \urcorner \urcorner$	onto, $\ulcorner \lambda \urcorner$
4				$\ulcorner \sim (A \in KI \langle \lambda \rangle) \urcorner$	$1, 2, 3, \ulcorner \sim \urcorner i$
5				$\ulcorner LA_0 \urcorner \ulcorner \sim (A \in KI \langle \lambda \rangle) \urcorner$	$1-4, \ulcorner \lambda \urcorner i$

Quel que soit A , il n'est jamais le nom d'une classe générée par le nom vide. La classe générée par le nom vide n'existe pas.

Th 30 $\vdash \exists x (\exists y (x \neq y \wedge \exists z (z \neq x \wedge z \neq y) \wedge \exists w (w \neq x \wedge w \neq y \wedge w \neq z) \wedge \exists v (v \neq x \wedge v \neq y \wedge v \neq z \wedge v \neq w) \wedge \exists u (u \neq x \wedge u \neq y \wedge u \neq z \wedge u \neq w \wedge u \neq v) \wedge \dots))$

1	ab	$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \exists z (z \neq x \wedge z \neq y) \wedge \exists w (w \neq x \wedge w \neq y) \wedge \exists v (v \neq x \wedge v \neq y) \wedge \dots))$	hyp.
2		$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \dots))$	hyp.
3		$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \dots))$	2, onlo. TS
4		$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \dots))$	1, Ae, Th 13
5		$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \dots))$	2, Th 22, $\forall e$, $\forall i$
6		$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \dots))$	1, Ae, def. α -1-3
7		$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \dots))$	1, Ae, Th 13
8		$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \dots))$	6, S, $\exists e$
9		$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \dots))$	7, 8, Th 4
10		$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \dots))$	1, Ae
11		$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \dots))$	hyp.
12		$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \dots))$	6,reit
13		$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \dots))$	7,reit
14		$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \dots))$	13, 11, Th 3
15		$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \dots))$	14, 12, $\forall e$, $\forall i$, $\exists e$
16		$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \dots))$	2,reit
17		$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \dots))$	16, Th 24
18		$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \dots))$	15, 16, 14, Th 16, $\forall i$
19		$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \dots))$	14-18, $\exists i$
20		$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \dots))$	14-19, $\exists i$
21		$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \dots))$	3, 9, 10, 20, def. K1
22		$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \dots))$	2-21, $\exists i$
23		$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \dots))$	2-22, $\forall i$
24		$\exists x (\exists y (x \neq y \wedge \dots))$	1-23, $\exists i$
25		théorème.	1-24, $\forall i$

Ce théorème établit que si les éléments de la classe des a sont les mêmes que les éléments de la classe des b, alors la classe des a est aussi la classe des b. Considérons un modèle; il permettra de réaliser que ce résultat est moins trivial qu'il n'en a l'air.

Soit trois points indivisibles dans l'espace et le temps

01. 02. 03.

Attribuons à l'entité 01, 02, le nom individuel A1, et à 03 le nom individuel, A2. Désignons les noms A1 et A2 par le nom général a. Effectuons une autre attribution nominale: désignons l'entité 02, 03, par le nom individuel B1, et 01 par B2. Proposons enfin le nom général b pour les noms B1 et B2.

Les a et les b ne sont pas égaux au sens où nous l'avons défini,

$$\sim (0 \{ab\})$$

Cependant, les éléments de la classe des a sont égaux à ceux de la classe des b, $0 \{e | \langle K | a \rangle \wedge e | \langle K | b \rangle\}$, et donc la classe des a est identique à la classe des b.

$$= \{K | \langle a \rangle K | \langle b \rangle\} .$$

1	AB	$\neg (\exists x (A \rightarrow B) \rightarrow \exists x A) \vee \neg (\exists x (A \rightarrow B) \rightarrow \exists x \neg A)$	
2		$\neg (\exists x (A \rightarrow B) \rightarrow \exists x A)$	hyp.
3		$\neg (\exists x (A \rightarrow B) \rightarrow \exists x \neg A)$	$\} 1, \wedge e$
4		$\exists x \neg (A \rightarrow B)$	$2, \neg \exists \neg, \vee \neg \neg$
5		$\exists x \neg (A \rightarrow \exists x \neg A)$	$3, \vee \neg \neg \rightarrow \neg \exists \neg$
6		$\exists x (A \rightarrow \neg (\exists x \neg A))$	$5, \neg(p \rightarrow q) \rightarrow p \wedge \neg q$
7		$\{ \{ A \rightarrow \neg (\exists x \neg A) \}$	$6, \wedge \text{imp. } \exists e$
8		A	
9		$\neg (\exists x \neg A)$	$\} 7, \wedge e$
10		$\exists x \neg A$	$8, \text{onto. } \exists \exists$
11		$\neg (\exists x \neg A \rightarrow \neg (\exists x \neg A))$	$9, \text{diff. } \neg \leftrightarrow$
12		$\exists x \neg A \rightarrow \exists x \neg A$	$11, \neg(p \rightarrow q) \rightarrow p \wedge \neg q$
13		$\exists x \neg A$	$12, \text{to. } \supset e$
14		$\exists x \neg (A \rightarrow B)$	$4, \text{reit.}$
15		$\neg (A \rightarrow B)$	$14, \vee e$
16		$A \rightarrow \neg (A \rightarrow B)$	$15, \neg(p \rightarrow q) \rightarrow p \wedge \neg q$
17		$\neg (A \rightarrow B)$	$16, \supset, \supset e$
18		$A \wedge A$	$13, 17, \wedge e$
19		$A \wedge A$	$6, 7-18, \exists e$
20		$\neg (A \wedge A)$	onto. $\exists \exists$
21		$\neg (\neg (\exists x (A \rightarrow B) \rightarrow \exists x A) \vee \neg (\exists x (A \rightarrow B) \rightarrow \exists x \neg A))$	$1, 19, 20, \neg i$
22		$\exists x (A \rightarrow B) \rightarrow \exists x A \vee \exists x (A \rightarrow B) \rightarrow \exists x \neg A$	$21, \neg(p \rightarrow q) \rightarrow p \wedge \neg q$
23	<u>théorème.</u>		$1-22, \vee i$

Cette thèse laisse préfigurer la forme des organisations méreologiques possibles. Les éléments peuvent être disjoints, ou ils peuvent être totalement non-disjoints, ou ils peuvent être partiellement non-disjoints. Les deux théorèmes suivants précisent encore cette organisation possible.

Th 32 $\vdash AB \vdash \{ \exists C [\exists e \langle A \rangle \supset \exists e \langle \sim e \rangle \langle B \rangle] \supset \sim \exists C [\exists e \langle A \rangle \cdot \exists e \langle B \rangle] \}^{\sim}$

1	AB	$\vdash \{ \exists C [\exists e \langle A \rangle \supset \exists e \langle \sim e \rangle \langle B \rangle] \}^{\sim}$	hyp
2		$\vdash \exists C [\exists e \langle A \rangle \cdot \exists e \langle B \rangle]^{\sim}$	hyp
3		C $\exists e \langle A \rangle \cdot \exists e \langle B \rangle$	2, hyp. 3e
4		$\vdash \{ \exists C [\exists e \langle A \rangle \supset \exists e \langle \sim e \rangle \langle B \rangle] \}^{\sim}$	1, reit
5		$\exists e \langle A \rangle \supset \exists e \langle \sim e \rangle \langle B \rangle$	4, 1e
6		$\exists e \langle A \rangle$	3, 1e
7		$\exists e \langle \sim e \rangle \langle B \rangle$	5, 6, 2e
8		$\sim (\exists e \langle B \rangle)$	7, déf. $\sim \langle \rightarrow \rangle$
9		$\exists e \langle B \rangle$	3, 1e
10		$\wedge e \wedge$	8, 9, $\sim e$
11		$\wedge e \wedge$	2, 3-10, 3e
12		$\sim (\wedge e \wedge)$	Onto. T9
13		$\sim \{ \exists C [\exists e \langle A \rangle \cdot \exists e \langle B \rangle] \}^{\sim}$	2, 11, 12, $\sim i$
14		$\vdash \{ \exists C [\exists e \langle A \rangle \supset \exists e \langle \sim e \rangle \langle B \rangle] \}^{\sim} \supset \sim \{ \exists C [\exists e \langle A \rangle \cdot \exists e \langle B \rangle] \}^{\sim}$	1-13, $\supset i$
15	<u>théorème.</u>		1-14, $\vdash i$

1	AB	$\text{L}\exists\text{C}, \text{C}\text{e}\text{el}\langle\text{A}\rangle \cdot \text{C}\text{e}\text{el}\langle\text{B}\rangle$	hyp
2		$\text{L}\text{C}, \text{C}\text{e}\text{el}\langle\text{A}\rangle \supset \text{C}\text{E}\sim\text{e}\text{el}\langle\text{B}\rangle$	hyp
3		$\text{L}\exists\text{C}, \text{C}\text{e}\text{el}\langle\text{A}\rangle \cdot \text{C}\text{e}\text{el}\langle\text{B}\rangle$	1, reit
4		$\text{C} \text{C}\text{e}\text{el}\langle\text{A}\rangle \cdot \text{C}\text{e}\text{el}\langle\text{B}\rangle$	3, hyp. $\exists\text{e}$
5		$\text{C}\text{e}\text{el}\langle\text{A}\rangle$	} 4, $\wedge\text{e}$
6		$\text{C}\text{e}\text{el}\langle\text{B}\rangle$	
7		$\text{L}\text{C}, \text{C}\text{e}\text{el}\langle\text{A}\rangle \supset \text{C}\text{E}\sim\text{e}\text{el}\langle\text{B}\rangle$	2, reit.
8		$\text{C}\text{e}\text{el}\langle\text{A}\rangle \supset \text{C}\text{E}\sim\text{e}\text{el}\langle\text{B}\rangle$	7, Le
9		$\text{C}\text{E}\sim\text{e}\text{el}\langle\text{B}\rangle$	8, 8, $\supset\text{e}$
10		$\sim(\text{C}\text{e}\text{el}\langle\text{B}\rangle)$	9, déf. $\sim\leftrightarrow$
11		$\wedge\text{EA}$	6, 10, $\sim\text{e}$
12		$\wedge\text{EA}$	5, 1-11, 3 e
13		$\sim(\wedge\text{EA})$	only. T3
14		$\sim \text{L}\text{C}, \text{C}\text{e}\text{el}\langle\text{A}\rangle \supset \text{C}\text{E}\sim\text{e}\text{el}\langle\text{B}\rangle$	2, 12, 13, $\sim\text{i}$
15		$\text{L}\exists\text{C}, \text{C}\text{e}\text{el}\langle\text{A}\rangle \cdot \text{C}\text{e}\text{el}\langle\text{B}\rangle \supset \sim \text{L}\text{C}, \text{C}\text{e}\text{el}\langle\text{A}\rangle \supset \text{C}\text{E}\sim\text{e}\text{el}\langle\text{B}\rangle$	1-14, $\supset\text{i}$
16	<u>théorème.</u>		1-15, LLi

Th 34 $\vdash ABC \supset A \in K \langle A \rangle \cdot A \in e \langle B \rangle \cdot C \in a \supset C \in e \langle B \rangle$

1	ABC a	$A \in K \langle A \rangle \cdot A \in e \langle B \rangle \cdot C \in a$	hyp.
2		$A \in K \langle A \rangle$	1, A E
3		$\vdash B \supset B \in a \supset B \in e \langle A \rangle$	2, Th 3
4		$C \in a \supset C \in e \langle A \rangle$	3, M E, \supset C
5		$C \in a$	1, A E
6		$C \in e \langle A \rangle$	4, 5, \supset E
7		$A \in e \langle B \rangle$	1, A E
8		$C \in e \langle B \rangle$	6, 7, Th 20
9		$A \in K \langle A \rangle \cdot A \in e \langle B \rangle \cdot C \in a \supset C \in e \langle B \rangle$	1-8, \supset I
10			1-9, \vdash I

Th 35 $\vdash P \supset P \in P \supset P \in K \langle e \langle P \rangle \rangle$

1	P	$P \in P$	hyp.
2		$P \in e \langle P \rangle$	1, def. $\langle \cdot \rangle$, M
3		$\vdash \exists Q \supset Q \in e \langle P \rangle$	2, \exists I, [\supset / \supset]
4		$\vdash Q \supset Q \in e \langle P \rangle \supset Q \in e \langle P \rangle$	Thèse, proto.
5	Q	$Q \in e \langle P \rangle$	hyp.
6		$Q \in Q$	5, onto, T5
7		$Q \in e \langle Q \rangle$	6, def. $\langle \cdot \rangle$, M
8		$Q \in e \langle Q \rangle$	7, rép.
9		$Q \in e \langle P \rangle \cdot Q \in e \langle Q \rangle \cdot Q \in e \langle Q \rangle$	6, 7, 8, A I
10		$\vdash \exists B \supset B \in e \langle P \rangle \cdot B \in e \langle Q \rangle \cdot B \in e \langle Q \rangle$	9, \exists I, [\supset / \supset]
11		$Q \in e \langle P \rangle \supset \vdash \exists B \supset B \in e \langle P \rangle \cdot B \in e \langle Q \rangle \cdot B \in e \langle Q \rangle$	5-10, \supset I
12		$\vdash Q \supset Q \in e \langle P \rangle \supset \vdash \exists B \supset B \in e \langle P \rangle \cdot B \in e \langle Q \rangle \cdot B \in e \langle Q \rangle$	5-11, \vdash I
13		$P \in K \langle e \langle P \rangle \rangle$	1, 2, 8, 12, def. K1
14		$P \in P \supset P \in K \langle e \langle P \rangle \rangle$	1-13, \supset I
15		<u>théorème.</u>	1-14, \vdash I

Th 36 $\vdash \neg \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x)) \supset \forall x (P(x) \supset Q(x))$

1	$\neg \exists x$	$\neg \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$	hyp
2		$\equiv \forall x (P(x) \supset Q(x))$	1, déf. \exists
3		$\equiv \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$	2, hyp. $\forall \exists$
4		$\exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$	3, déf. \exists , onk. TS
5		$\exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$	4, Th 35
6		$\exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$	2, hyp. $\forall \exists$
7		$\exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$	6, Ax. 1
8		$\exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$	7, onk. TS
9		$\exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$	8, Th 35
10		$\exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$	2, 3-5, 6-9, $\forall \exists$
11		$\neg \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x)) \supset \forall x (P(x) \supset Q(x))$	1-10, \supset i
12		théorème.	1-11, \dots i

Th 37 $\vdash \forall x (A(x) \supset B(x)) \supset \forall x (A(x) \wedge B(x))$

1	$\forall x$	$\forall x (A(x) \supset B(x))$	hyp
2		$\exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$	1, déf. Kl.
3		$\exists x (A(x) \wedge \neg B(x)) \supset \exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$	1, déf. Kl.
4		$\exists x (A(x) \wedge \neg B(x)) \supset \exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$	1, déf. Kl.
5	$\exists x$	$A(x) \wedge \neg B(x)$	hyp.
6		$A(x) \wedge \neg B(x)$	6, Th. 13
7		$A(x) \wedge \neg B(x)$	5, 7, Th. 3, \wedge /Kl. \supset
8		$A(x) \wedge \neg B(x)$	3, 7, $\wedge \exists$, \supset o
9		$A(x) \wedge \neg B(x) \supset \exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$	5-8, \supset i
10		$\exists x (A(x) \wedge \neg B(x)) \supset \exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$	5-9, \dots i

11	$\exists B \exists \text{Beel} \langle K \rangle$	2, 1 ^{er} .
12	$B \mid \exists \text{eel} \langle K \rangle$	11, hyp. $\exists e$
13	$\quad \mid K \rangle \varepsilon K \langle \varepsilon K \rangle$	12, Th 3
14	$\quad \mid \exists B \exists \text{Bea}^{\sim}$	13, Th 2
15	$\exists B \exists \text{Bea}^{\sim}$	11, 12-14, $\exists e$
16	$B \mid \text{Beel} \langle A \rangle$	hyp.
17	$\quad \mid \exists B \exists \text{eel} \langle K \rangle \cdot \exists \text{eel} \langle \varepsilon \rangle \cdot \exists \text{eel} \langle B \rangle$	16, 1, 1 ^{er} , $\exists e$
18	$\quad \mid B \mid \text{eel} \langle K \rangle \cdot \exists \text{eel} \langle \varepsilon \rangle \cdot \exists \text{eel} \langle B \rangle$	17, hyp. $\exists e$
19	$\quad \quad \mid \text{eel} \langle K \rangle$	18, 1 ^{er}
20	$\quad \quad \mid K \rangle \varepsilon K \langle \varepsilon K \rangle$	19, Th. 36
21	$\quad \quad = \{ K \rangle K \langle \varepsilon K \rangle \}$	20, Th. 24
22	$\quad \quad = \{ A \mid K \rangle \}$	1, Th. 24
23	$\quad \quad = \{ A \mid K \rangle \}$	21, 22, omb. T28
24	$\quad \quad A \varepsilon K \rangle$	23, def. $= \{ - \}$
25	$\quad \quad \mid \exists B \exists \text{eel} \langle A \rangle \cdot \exists B \exists \text{eel} \langle \varepsilon \rangle \cdot \exists \text{eel} \langle B \rangle$	24, def. Kl.
26	$\quad \quad \mid \exists B \exists \text{eel} \langle \varepsilon \rangle \cdot \exists \text{eel} \langle \varepsilon \rangle \cdot \exists \text{eel} \langle B \rangle$	25, 16, $\exists e$
27	$\quad \quad \mid \exists B \exists \text{eel} \langle \varepsilon \rangle \cdot \exists \text{eel} \langle \varepsilon \rangle \cdot \exists \text{eel} \langle B \rangle$	19-26, $\exists e$
28	$\quad \quad \mid \text{Beel} \langle A \rangle \cdot \exists B \exists \text{eel} \langle \varepsilon \rangle \cdot \exists \text{eel} \langle B \rangle$	16-27, $\exists i$
29	$\exists B \exists \text{Beel} \langle A \rangle \cdot \exists B \exists \text{eel} \langle \varepsilon \rangle \cdot \exists \text{eel} \langle B \rangle$	16-28, $\exists i$
30	$A \varepsilon A$	1, omb. T5
31	$A \varepsilon K \rangle$	30, 15, 16, 29, def. Kl
32	$A \varepsilon K \langle \varepsilon K \rangle \Rightarrow A \varepsilon K \rangle$	1-31, $\exists i$
33	<u>théorème.</u>	1-32, $\exists i$

Th 38 $\vdash A_0 \vdash A \in K1 \langle a \rangle \supset A \in K1 \langle e1 \langle K1 \langle a \rangle \rangle \rangle$

1	A_0	$A \in K1 \langle a \rangle$	hyp.
2		$= \{ A K1 \langle a \rangle \}$	1, Th. 24
3		$A \in e1 \langle A \rangle$	1, Th. 9
4		$A \in e1 \langle K1 \langle a \rangle \rangle$	2, 3, Th. 48
5		$K1 \langle a \rangle \in K1 \langle e1 \langle K1 \langle a \rangle \rangle \rangle$	4, Th. 36
6		$= \{ K1 \langle a \rangle K1 \langle e1 \langle K1 \langle a \rangle \rangle \}$	5, Th. 24
7		$= \{ A K1 \langle e1 \langle K1 \langle a \rangle \rangle \}$	2, 6, onto. T28
8		$A \in K1 \langle e1 \langle K1 \langle a \rangle \rangle \rangle$	7, def. = {--}
9		$A \in K1 \langle a \rangle \supset A \in K1 \langle e1 \langle K1 \langle a \rangle \rangle \rangle$	1-8, \supset i
10		$\vdash A_0 \vdash A \in K1 \langle a \rangle \supset A \in K1 \langle e1 \langle K1 \langle a \rangle \rangle \rangle$	1-9, \vdash i

Th 39 $\vdash A_0 \vdash A \in K1 \langle e1 \langle K1 \langle a \rangle \rangle \rangle \equiv A \in K1 \langle a \rangle$ Th. 37, Th. 38

Nous terminerons sur cette dernière thèse qui n'est rien d'autre que la démonstration de la 'croyance' de Leśniewski en l'affirmation B, (p. 391).

6. QUELQUES DEFINITIONS

Les définitions que nous proposons maintenant ont marqué certains travaux qui se sont érigés sur la base de la méréologie. Certains résultats ont mis en évidence la possibilité de construire cette théorie en utilisant d'autres foncteurs primitifs que 'pt'. Au-delà de cet hommage scientifique, nous pensons qu'il était également important de présenter des définitions qui permettent d'appréhender une organisation méréologique avec une autre perception que celle fournie par les notions de, 'part de', 'élément de', et 'classe de'.

D3 P est une collection d'objets a, si et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(α) P est un objet

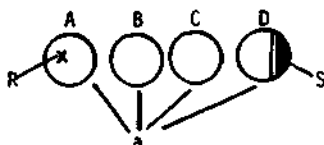
(β) pour tout Q, si Q est un élément de l'objet P, alors quelque élément de l'objet Q est un élément de quelque a qui est élément de l'objet P.

(Leśniewski, 1916, 1928, définition III; traduit en anglais, Sinisi, 1983).

$$D3: \quad \underbrace{\underbrace{P_a}_{\text{P est un objet}} \underbrace{P \text{ est } \underbrace{Q}_{\text{Q est un élément de l'objet P}}}_{\text{alors quelque élément de l'objet Q est un élément de quelque a qui est élément de l'objet P}}}_{\text{P est une collection d'objets a, si et seulement si}} \underbrace{\underbrace{C \text{ est } a}_{\text{C est un objet}} \underbrace{D \text{ est } C}_{\text{D est un élément de C}} \underbrace{D \text{ est } C}_{\text{D est un élément de C}} \underbrace{C \text{ est } a}_{\text{C est un objet}}}_{\text{C est une collection d'objets a}} .$$

Sinisi utilise le terme 'set' pour nommer ce nouveau foncteur. L'équivalent français, 'ensemble', pourrait amener quelques confusions. Nous avons préféré utiliser le terme de collection qui est la traduction du mot polonais 'zbior', évitant ainsi quelques malentendus. Nous agissons comme l'a fait Sobocinski (1955, p. 37). Cette notion de 'collection de a' soutient une analogie partielle avec la notion de sous-ensemble. Considérons un exemple:

Soit quatre disques, A, B, C et D, désignés par le nom général a.



Etablissons la liste des collections de a.

A ∈ col⟨a⟩ , AB ∈ col⟨a⟩ , BD ∈ col⟨a⟩ , ACD ∈ col⟨a⟩
B ∈ col⟨a⟩ , AC ∈ col⟨a⟩ , CD ∈ col⟨a⟩ , BCD ∈ col⟨a⟩
C ∈ col⟨a⟩ , AD ∈ col⟨a⟩ , ABC ∈ col⟨a⟩ , ABCD ∈ col⟨a⟩
D ∈ col⟨a⟩ , BC ∈ col⟨a⟩ , ABD ∈ col⟨a⟩ ,

et rien d'autre n'est, dans ce cas, collection de a.

Le point R n'est pas une collection de a. En effet, il existe bien A et Aa, mais A n'est pas élément de R. La partie S du disque D n'est pas une collection de a. Il existe bien D et Da, mais D n'est pas élément de S. Si le nombre 'd'objets' désignés par a est n, et que ces 'objets' sont discrets, il y a $2^n - 1$ collections de a. La différence profonde qui réside entre la notion méréologique de collection et celle de sous-ensemble dans la théorie traditionnelle des ensembles, est que cette dernière présuppose une distinction de type entre un sous-ensemble et l'ensemble qui lui est associé, alors qu'une collection de a et a appartiennent tous les deux à la même catégorie sémantique. N. Sobocinski (1955, p. 39) traitant de cette définition écrit que Lesniewski avait démontré la thèse établissant que si les a sont discrets et qu'il y en a plus qu'un, alors les a sont en nombre plus petit que la collection des a.

This thesis is the mereological correlate of Cantor's famous theorem in accordance with which the number of sub-sets of a set exceeds the number of its elements. As is well known in the logic which disregards the theory of types or similar restrictions, and also in the preaxiomatic form of the theory of sets, this theorem of Cantor's leads to a contradiction, which is sometimes called the contradiction of "the class of all classes". Since Mereology is a consistent theory, it is quite clear that this thesis cannot lead to contradictions. Moreover the thesis is perfectly intuitive. (Sobocinski, 1955, pp. 39-40).

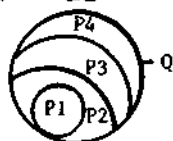
D4 P est une sous-collection de l'objet Q, si et seulement si, les conditions suivantes sont remplies:

(*) P est un objet

(#) chaque élément de l'objet P est un élément de l'objet Q.

(Leśniewski, 1916, 1928, définition V, traduit en anglais, Sinisi, 1983).

$$D4 \quad \ulcorner PQ \urcorner \ulcorner \forall P. \ulcorner C \urcorner \ulcorner C \in \langle P \rangle \supset C \in \langle Q \rangle \urcorner \urcorner \equiv \ulcorner P \text{ scol} \langle Q \rangle \urcorner$$



P_1, P_2, P_3, P_4 sont des exemples de sous-collection de l'objet Q, comme Q lui-même d'ailleurs.

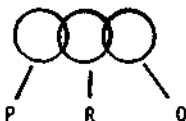
D5 P est extérieur à Q, si et seulement si, les conditions suivantes sont remplies:

(*) P est un objet

(#) aucun élément de l'objet Q est un élément de l'objet P.

(Leśniewski, 1916, 1928, définition VI, traduit en anglais, Sinisi, 1983).

$$D5 \quad \ulcorner PQ \urcorner \ulcorner \forall P. \ulcorner C \urcorner \ulcorner C \in \langle Q \rangle. C \in \langle P \rangle \urcorner \urcorner \equiv \ulcorner P \text{ ext} \langle Q \rangle \urcorner$$



$P \notin \text{ext} \langle Q \rangle$ et $Q \notin \text{ext} \langle P \rangle$, mais R n'est extérieur ni à P, ni à Q; il possède en effet des éléments communs à P, (respectivement à Q).

D6 P est le complément de l'objet Q relativement à R, si et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaites:

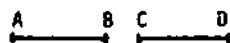
(*) Q est une sous-collection de l'objet R

(#) P est la classe des éléments de l'objet R extérieur à Q.

(Leśniewski, 1916, 1928, définition VII, traduit en anglais, Sinisi, 1983).

$$D6 \quad \ulcorner PQR \urcorner \ulcorner \forall P. Q \text{ scol} \langle R \rangle. \forall K \ulcorner K \text{ incl} \langle R \rangle \text{ ext} \langle Q \rangle \urcorner \urcorner \equiv \ulcorner P \text{ Impl} \langle QR \rangle \urcorner$$

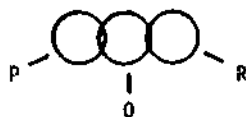
Le nom $\langle \text{mp} \langle QR \rangle \rangle$ est un individuel.



$AB \& \langle \text{mp} \langle CD \rangle \rangle$: Le segment AB est disjoint avec le segment CD, et ensemble il forme l'entité composée des deux segments.

D7 $\exists P \exists Q [P \& Q \supset \langle \text{mp} \langle P \rangle \rangle \& \langle \text{mp} \langle Q \rangle \rangle] \equiv \langle \text{prov} \langle Q \rangle \rangle$
(Lejewski, 1954, p. 47).

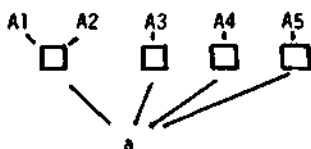
P et Q se recouvrent (to overlap), ils ont au moins un élément commun.



$P \& Q \langle R \rangle$ et $Q \& R \langle P \rangle$, mais $\neg (P \& R \langle Q \rangle)$

D8 $\exists a [PQ \supset P \& a \& Q \& a] \supset \langle \text{desc} \langle a \rangle \rangle \equiv \langle \text{desc} \langle a \rangle \rangle$
(Sobocinski, 1955, p. 37).

Les a sont discrets



Chaque A_i est soit identique à un A_j , A_1 et A_2 , soit extérieur.

Terminons cette partie en présentant une définition et une thèse dues encore à Sobocinski: (1955, p. 38).

D9 $\exists P [P \& K \langle V \rangle] \equiv A \in U$

Son auteur écrit:

"', 'A $\in U$ ' may be read 'A is the Universe',..., [D9] shows that in Mereology we define the concept of Universe as the collective class of all existing things. There are many

theorems in Mereology concerning the Universe. The following one will suffice as an example:

$$\lfloor P \rfloor P \# U \equiv P \# P \cdot \lfloor a \rfloor \left\{ a \text{ ext}(P) \right\} \# \left\{ a \right\}^{\#}$$

This thesis says P is the Universe if et only if every thing that is outside it is non-existent.

7. MERELOGIE ET TREILLIS

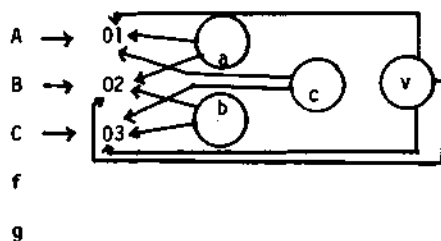
En 1974, Clay établissait qu'un lien existait entre méréologie et algèbre de Boole. Il démontrait notamment qu'une méréologie est une algèbre booléenne complète, sans zéro (voir également Tarski, (1974), et Grzegorczyk, (1955)).

"Mereology is a complete Boolean algebra with zero deleted"
(Clay, 1974, p. 639).

Notre intention est plus modeste. Nous voulons montrer qu'une méréologie est un treillis borné supérieurement. Dans un premier temps, nous définirons une relation d'ordre partiel, puis, à l'aide de cette dernière, nous inscrirons les termes de majorant, minorant, borne supérieure et borne inférieure.

7.1. UNE RELATION D'ORDRE PARTIEL

Ancrons notre réflexion sur un univers sémantique S .



Considérons les objets 01 et 02 désignés par a .

Dans cet univers sémantique, a 'existe', $\{a\}$.

Si a existe, la classe des a existe, et donc les éléments de cette classe. Il est possible de définir relativement à cette organisation méréo-

logique, la classe des a , une relation d'ordre partiel.

Soit K le nom de la classe des a , et soit E et D , deux éléments quelconques de K .

Nous dirons que E et D possèdent entre eux la relation d'ordre partiel, ' \leq ', si et seulement si, il est vrai que E est élément de D .

$E \leq D$ ssi $E \in \langle D \rangle$ est une thèse.

La relation ' \leq ' possède les propriétés requises d'une relation d'ordre partiel: elle est symétrique, non réflexive et transitive.

La relation ' \leq ' est transitive: th. 20, (p.408)

La relation ' \leq ' est réflexive: th. 7, (p.401)

La relation ' \leq ' est non-symétrique.

Th 40 $\lfloor \underline{A} \rfloor^B \wedge \exists e \in \langle A \rangle . B \in \langle A \rangle . \Rightarrow \exists \{AB\}^B$ déf. $e_1 + \forall e (2x)$.

7.2. DEFINITIONS

Soit a , un nom qui n'est pas le nom vide. Nous appellerons 'organisation méréologique' fondée sur a , la classe méréologique des a , $K \langle a \rangle$.

Proposition : Toute organisation méréologique présente une structure de treillis borné supérieurement.

Cette assertion nous engage à définir les éléments qui déterminent une structure de treillis.

"D'une façon intuitive, on appelle lattice, réseau ou treillis un ensemble E dans lequel tout sous-ensemble constitué de deux éléments admet une borne inférieure et une borne supérieure dans cet ensemble..."

Rappelons que les définitions de borne supérieure et de borne inférieure sont liées à celles de majorant et de minorant. Considérons un ensemble E et un sous-ensemble $E' \subseteq E$.

On appelle minorant de E' un élément m' de E tel que, $\forall a \in E'$, on ait: $m' \leq a$.

On appelle majorant de E' un élément m'' de E tel que, $\forall a \in E'$, on ait: $a \leq m''$.

On appelle borne supérieure de E' le majorant b'' (s'il

existe) tel que, pour tout m'' majorant de E' , on ait $b'' \leq m''$ (la borne supérieure est le plus petit des majorants). On appelle borne inférieure de E' le minorant b' (s'il existe) tel que, pour tout m' minorant de F' , on ait $m' \leq b'$ (la borne inférieure est le plus grand des minorants)." (Chénique, 1974, p. 429)

Il s'agit maintenant de traduire dans le langage de la méréologie ces différentes relations en utilisant la relation ' \leq ' sous sa forme 'est un élément de'

1. La relation d'être un majorant, ma

A possède la relation ma relativement à a, $A \text{ ma } a$, ssi,

1. A existe
2. a existe
3. pour tout D, si D est un des a alors D est élément de A

$A \text{ ma } a$ ssi $A \in A. \{ a \} . \cup D. D \in a \Rightarrow D \in \{ A \}$ est une thèse.

2. La relation d'être un minorant, mi

A possède la relation mi relativement à a, $A \text{ mi } a$, ssi,

1. A existe
2. a existe
3. pour tout D, si D est un des a alors A est élément de D

$A \text{ mi } a$ ssi $A \in A. \{ a \} . \cup D. D \in a \Rightarrow A \in \{ D \}$ est une thèse.

Il est utile de définir les noms majorant de a et minorant de a dans le langage de la méréologie; majorant et minorant apparaîtront comme des foncteurs formateurs de nom à un argument nominal.

MAJORANT

$\cup Aa. A \in A. \{ a \} . \cup D. D \in a \Rightarrow D \in \{ A \} : = A \text{ ma } \langle a \rangle$

ma : N/N

ma<a> : N

MINORANT

$$\llcorner A_3^f A_4 A . ! \{ a \} . \llcorner D_2^f D_3 a \Rightarrow A_4 e \langle D \rangle : \exists A_4 m \langle a \rangle \rceil$$

$$m \quad : \quad N/N$$

$$m \langle a \rangle \quad : \quad N$$

3. La relation d'être une borne supérieure, BS

A possède la relation BS relativement à a, $A \underline{BS} a$, ssi,

1. A existe
2. A est un majorant relativement à a
3. pour tout B, si B est un majorant relativement à a alors
A est un élément de B

$A \underline{BS} a$ ssi $A \&A . A_4 m \langle a \rangle . \llcorner B_3^f B_4 m \langle a \rangle \Rightarrow A_4 e \langle B \rangle$ est une thèse

4. La relation d'être une borne inférieure, BI

A possède la relation BI relativement à a, $A \underline{BI} a$, ssi,

1. A existe
2. A est minorant relativement à a
3. pour tout B, si B est un minorant relativement à a alors
B est un élément de A

$A \underline{BI} a$ ssi $A \&A . A_4 m \langle a \rangle . \llcorner B_3^f B_4 m \langle a \rangle \Rightarrow B_4 e \langle A \rangle$ est une thèse

Comme nous l'avons fait pour les noms 'majorant de a' et 'minorant de a', nous allons définir dans le langage de la méréologie les noms 'borne supérieure de a' et 'borne inférieure de a'.

BORNE SUPERIEURE

$$\llcorner A_3^f A_4 A . A_4 m \langle a \rangle . \llcorner B_3^f B_4 m \langle a \rangle \Rightarrow A_4 e \langle B \rangle : \exists A_4 BS \langle a \rangle \rceil$$

$$BS \quad : \quad N/N$$

$$BS \langle a \rangle \quad : \quad N$$

BORNE INFÉRIEURE

$$\llcorner A_3^f A_4 A . A_4 m \langle a \rangle . \llcorner B_3^f B_4 m \langle a \rangle \Rightarrow B_4 e \langle A \rangle : \exists A_4 BI \langle a \rangle \rceil$$

$$BI \quad : \quad N/N$$

$$BI \langle a \rangle \quad : \quad N$$

7.3. STRUCTURE DE TREILLIS BORNE SUPERIEUREMENT

Sur la base des définitions qui précèdent, montrons que toute organisation météorologique - toute classe - possède la structure d'un treillis borné supérieurement.

Th40 $\{A, B, C, \dots\} \supseteq \{B, C, \dots\}$

1	A	$\{A\}$	hyp.
2		$\{B, C, \dots\}$	1, déf. $\{ \}$
3		$C \subseteq C$	2, hyp. \exists
4		$\{B, C, \dots\} \subseteq \{A, B, C, \dots\}$	3, A1
5		$B \subseteq \{B, C, \dots\}$	4, hyp. \exists
6		$B \subseteq B$	5, onto. T5
7		$\{B, C, \dots\} \subseteq \{A, B, C, \dots\}$	5, Th3
8		$B \subseteq B \cup \{A\} \subseteq \{A, B, C, \dots\}$	6, 1, 7, A1
9		$B \subseteq \{A, B, C, \dots\}$	8, déf. $\{A, B, C, \dots\}$
10		$\{B, C, \dots\} \subseteq \{A, B, C, \dots\}$	9, 3 i
11		$\{B, C, \dots\} \subseteq \{A, B, C, \dots\}$	4, 5-10, 3 r
12		$\{B, C, \dots\} \subseteq \{A, B, C, \dots\}$	1, 3-11, 3 r
13		$\{A\} \supseteq \{B, C, \dots\}$	1-12, 3 i
14	théorème.		1-13, 3 i

Th 41 $\{A, B, C, \dots\} \subseteq \{A, B, C, \dots\} \subseteq \{A, B, C, \dots\} \subseteq \{A, B, C, \dots\} \subseteq \{A, B, C, \dots\}$
 (Clay, 1981, T30; préalablement démontré par Sobocinski)

1	$\forall a$	$\exists e \in B \langle a \rangle$	hyp.
2		$\exists e \in m \langle a \rangle \cdot \exists e \in B \langle a \rangle \supset \exists e \in \langle B \rangle$	1, def. $B \langle a \rangle$
3		$\exists e \in m \langle a \rangle$	} 2, $\wedge e$
4		$\exists e \in B \langle a \rangle \supset \exists e \in \langle B \rangle$	
5		$\{ \exists a \}$	} 3, def. $m \langle a \rangle, \wedge e$
6		$\exists e \in A$	
7		$\exists e \in \langle B \rangle \supset \exists e \in \langle A \rangle$	
8		B	hyp.
9		$\{ \exists a \}$	5,reit.
10		$\exists e \in \langle B \rangle$	9, def. $\{ \exists a \}$
11		C	10, hyp. $\exists e$
12		$\exists e \in \langle B \rangle \supset \exists e \in \langle B \rangle$	8,reit.
13		$\langle B \rangle \supset \exists e \in \langle B \rangle$	12, $\wedge e$
14		$\exists e \in \langle B \rangle$	13, 11, $\supset e$
15		$\exists e \in B$	14, Th 9
16		$\{ \exists a \}$	9,reit.
17		$\exists e \in m \langle a \rangle$	15, 16, 12, def. $m \langle a \rangle$
18		$\exists e \in B \langle a \rangle \supset \exists e \in \langle B \rangle$	4,reit.
19		$\exists e \in m \langle a \rangle \supset \exists e \in \langle B \rangle$	18, $\wedge e$
20		$\exists e \in \langle B \rangle$	19, 19, $\supset e$
21		$\exists e \in \langle B \rangle$	10, 11-20, $\exists e$
22		$\exists e \in \langle B \rangle \supset \exists e \in \langle B \rangle \supset \exists e \in \langle B \rangle$	8-21, $\supset i$
23		$\exists e \in \langle B \rangle$	hyp.
24		C	hyp.
		$C \mid \exists e \in a$	

25		$\neg \exists x (A \supset \exists x \neg A)$	7,reit.
26		$\exists x \supset \exists x \neg A$	25, \neg e
27		$\exists x \neg A$	26, \exists e
28		$A \in \neg B$	25,reit.
29		$\exists x \neg B$	27, \exists i, Th 20
30		$\exists x \supset \exists x \neg B$	29-29, \supset i
31		$\neg \exists x (A \supset \exists x \neg B)$	29-30, \neg i
32		$A \in \neg B \supset \neg \exists x (A \supset \exists x \neg B)$	29-31, \supset i
33		$\neg \exists x (A \supset \exists x \neg B) \equiv A \in \neg B$	22, 32, \equiv e
34		$\neg \exists x (A \supset \exists x \neg B) \equiv A \in \neg B$	3-33, \supset i
35		$A \in \neg K$	6, 34, \wedge i, Th 11
36		$A \in \neg B \supset A \in \neg K$	1-35, \supset i
37		$\neg \exists x (A \in \neg B \supset A \in \neg K)$	1-36, \neg i

Th 43 $\vdash \text{La} \supset \text{AeKl} \supset \text{AeB} \supset \text{a}$

1	Aa	AeKl	hyp.
2		$\vdash \text{B} \supset \text{Bea}$	} 1, def. Kl
3		$\vdash \text{e}$	
4		AeA	
5		$\vdash \text{B} \supset \text{Bea} \supset \text{Beel} \supset \text{A}$	
6		Ae ma	4, 2, 5, def. ma
7	B	Be ma	hyp.
8		$\vdash \text{e} \supset \text{Bea} \supset \text{eel} \supset \text{B}$	7, def. ma
9		AeKl	1, reit.
10		AeA $\supset \text{B} \supset \text{e} \supset \text{Bea} \supset \text{eel} \supset \text{B} \equiv \text{Ae} \supset \text{B}$	9, Th 4
11		$\vdash \text{e} \supset \text{Bea} \supset \text{eel} \supset \text{B} \equiv \text{Ae} \supset \text{B}$	10, Ae, μ , e
12		Ae e $\supset \text{B}$	11, μ , e e
13		$\text{Be ma} \supset \text{Ae} \supset \text{e} \supset \text{B}$	7-12, \supset i
14		$\vdash \text{B} \supset \text{Be ma} \supset \text{Ae} \supset \text{e} \supset \text{B}$	7-13, \supset i
15		AeB $\supset \text{a}$	6, 14, def. B \supset i
16		AeKl $\supset \text{AeB} \supset \text{a}$	1-15, \supset i
17		$\vdash \text{La} \supset \text{AeKl} \supset \text{AeB} \supset \text{a}$	1-16, \supset i

Th 44 $\vdash \text{La} \supset \text{AeB} \supset \text{a} \equiv \text{AeKl} \supset \text{a}$

Th 42, Th 43

Ce résultat établit bien qu'une organisation méréologique, une classe de a, est la borne supérieure des a.

Il serait séduisant de démontrer qu'il n'est pas le cas que, pour tout a , si les a existent, alors le minorant de a existe.

$$E^* : \sim \perp_{A_2}^r \{ \{ a \} \ominus \{ \text{mica} \} \}^r$$

Nous ne pouvons pas présenter ce résultat; en effet, l'ontologie ne présume pas de l'existence d'objets, ni du nombre de ces objets; elle ne présuppose aucune organisation particulière de ces objets.

If there are precisely n individuals then Ontology is strongly complete. If however we add to ontology an axiom saying that there are finitely many individuals, then the system is not strongly complete, for we cannot prove that there are two individuals, i.e., $\perp_{AB_2}^r \{ \{ AB \} \}^r$, nor can we prove its negation. (Rickey, 1977, p. 418).

Nous pouvons étendre le contenu de cette remarque à la méréologie.

En nous aidant de deux modèles, montrons, pour terminer, qu'il existe des domaines sémantiques dans lesquels E^* est vraie, et d'autres dans lesquels E^* est fausse.

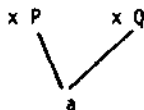
I. Considérons un domaine sémantique ne contenant qu'un seul individu désigné par A . Dans ce cas, nous obtenons:

1. $A \in A$
2. $\{ \{ A \} \}$
3. $\perp_{D_2}^r \{ \{ A \} \} \ominus \{ \{ A \} \} \ominus \{ \{ A \} \}$

Nous pouvons donc déduire:

$$4. \perp_{A_2}^r \{ \{ A \} \} \ominus \{ \{ \text{mic } a \} \}^r$$

II. Considérons un domaine sémantique contenant deux individus désignés par P et Q . Soit a désignant les noms individuels P et Q .



Dans ce cas, nous obtenons:

1. P & P
2. Q & Q
3. P & a
4. ! { a }

Dans ce modèle, il n'est pas possible de trouver un A tel que, pour tous les D qui sont a (c'est-à-dire P et Q), $A \in e \langle D \rangle$. L'expression $\llbracket D \in a \Rightarrow A \in e \langle D \rangle \rrbracket$ est donc fausse. Il s'ensuit donc,

$$5. \sim \llbracket a \in ! \{ a \} \Rightarrow ! \{ m_i \langle \infty \rangle \rrbracket$$

8. D'AUTRES BASES AXIOMATIQUES POUR LA MERELOGIE

Leśniewski n'était pas très satisfait de la formulation de son système axiomatique de 1916. Ce dernier a la particularité de comporter quatre axiomes, dont les deux derniers nécessitent l'inscription de définitions préalables, el et K1. Ce défaut d'élégance le détermine à proposer d'autres bases axiomatiques qui ne possèdent pas cette particularité.

Podane wyżej aksjomaty III i IV mojej „ogólnej teorii mnogości” zostały sformułowane przy pomocy wprowadzonego uprzednio — w definicji II — terminu „klasa”, wzmiankowana zaś definicja II została sformułowana przy pomocy wprowadzonego uprzednio — w definicji I — terminu „ingredjens”. Sytuacja taka zaczęła mię razić z biegiem czasu. (Leśniewski, 1930, p. 77)

Les axiomes III et IV de ma 'théorie générale des ensembles' exigent la formulation préalable de la définition II, le terme 'classe' qui lui-même nécessite la formulation de la définition I, le terme 'ingrédient' [élément]. Après quelque temps, cette situation m'a heurté.

8.1. LE SYSTEME AXIOMATIQUE DE 1918

- (A) jeżeli P jest częścią p-tu Q, to Q nie jest częścią p-tu P,
 (B) jeżeli P jest częścią p-tu Q, oraz Q jest częścią p-tu R, to P jest częścią p-tu R.

(C) jeżeli każde a jest tym samym przedmiotem, co P , lub częścią p-tu P , każde a jest tym samym przedmiotem, co Q , lub częścią p-tu Q , oraz przy wszelkiem R —, jeżeli R jest częścią p-tu P , lub R jest częścią p-tu Q , to pewien przedmiot, będący tym samym przedmiotem, co R , lub częścią p-tu R , jest a lub jest częścią pewnego a , to P jest Q .

(D) jeżeli pewien przedmiot jest a , to przy pewnym P — (przy wszelkiem Q —, jeżeli Q jest a , to Q jest tym samym przedmiotem, co P , lub jest częścią p-tu P) i przy wszelkiem Q —, jeżeli Q jest częścią p-tu P , to pewien przedmiot, będący tym samym przedmiotem, co Q , lub częścią p-tu Q , jest a lub jest częścią pewnego a). (Leśniewski, 1930, p. 78)

- (A) Si P est une part de l'objet Q , alors Q n'est pas une part de l'objet P .
- (B) Si P est une part de l'objet Q , et Q est une part de l'objet R , alors P est une part de l'objet R .
- (C) Si chaque a est le même objet que P , ou une part de l'objet P , chaque a est le même objet que Q , ou une part de l'objet Q , et pour tout R — si R est part de l'objet P , ou R est une part de l'objet Q , alors quelque objet qui est le même objet que R , ou une part de l'objet R , est a ou est la part de quelque a , alors P est Q .
- (D) Si quelque objet est a , alors pour quelque P — (pour tout Q — si Q est a , alors Q est le même objet que P , ou est une part de l'objet P) et pour tout Q —, si Q est une partie de l'objet P , alors quelque objet qui est le même objet que Q , ou une part de l'objet Q , est a ou est une part de quelque a .

Traduction formelle:

- (A) $L P Q \vdash P \in pt \langle Q \rangle \supset Q \in \sim \langle pt \langle P \rangle \rangle$
- (B) $L P Q R \vdash P \in pt \langle Q \rangle \cdot Q \in pt \langle R \rangle \supset P \in pt \langle R \rangle$
- (C) $L P Q A \vdash L B \vdash B \in a \supset = \{ B P \} \vee B \in pt \langle P \rangle \vdash L B \vdash B \in a \supset$
 $= \{ P Q \} \vee B \in pt \langle Q \rangle \vdash L R \vdash R \in pt \langle P \rangle \vee$
 $R \in pt \langle Q \rangle \supset L \exists \{ B \} = \{ \{ R \} \vee C \in pt \langle R \rangle \cdot$
 $C \in a : \vee . B \in a . C \in pt \langle B \rangle \cdot C \in pt \langle R \rangle \} \supset$
 $P \in Q$
- (D) $L B A \vdash B \in a \supset L \exists P \vdash L Q \vdash Q \in a \supset = \{ Q P \} \vee Q \in pt \langle P \rangle \vdash$
 $L Q \vdash Q \in pt \langle P \rangle \supset L \exists \{ B \} = \{ \{ Q \} \vee C \in pt \langle Q \rangle : C \in a$
 $: \vee . B \in a . C \in pt \langle B \rangle \cdot C \in pt \langle Q \rangle \} \supset$

Sur la base de ces quatre axiomes, Lesniewski inscrit les définitions des termes 'élément de', et 'classe de'.

(E) *P* est ingrédiensum *p*-tu *Q* wtedy i tylko wtedy, gdy *P* jest tym samym przedmiotem, co *Q*, lub jest częścią *p*-tu *Q*.

(F) *P* jest klasą *p*-tów *a* wtedy i tylko wtedy, gdy (*P* jest przedmiotem, (przy wszelkimi *Q* —, jeżeli *Q* jest *a*, to *Q* jest ingrédiensum *p*-tu *P*) i przy wszelkimi *Q* —, jeżeli *Q* jest ingrédiensum *p*-tu *P*, to pewien ingrédiens *p*-tu *Q* jest ingrédiensum pewnego *a*)': (Lesniewski, 1930, p. 78)

(E) *P* est un élément de l'objet *Q*, si et seulement si *P* est le même objet que *Q*, ou est une partie de l'objet *Q*.

(F) *P* est la classe des objets *a*, si et seulement si, (*P* est un objet, (pour tout *Q* —, si *Q* est *a*, alors *Q* est un élément de l'objet *P*) et pour tout *Q* —, si *Q* est un élément de l'objet *P*, alors quelque élément de l'objet *Q* est élément de quelque *a*).

Traduction formelle

$$(E) \quad \perp PQ^r P \in e l \langle Q \rangle \wedge . = \{PQ\} \vee P \in p t \langle Q \rangle^r$$

$$(F) \quad \perp Pa^r P \in K l \langle a \rangle \equiv : P \in P . \perp Q^r Q \in a \supset Q \in e l \langle P \rangle^r .$$

$$\perp Q^r Q \in k P \supset \perp C Q^r C \in a . O \in e l \langle C \rangle . D \in e l \langle Q \rangle^{rr}$$

Nous avons utilisé le terme 'élément' en lieu et place du terme 'ingrédient' utilisé par Leśniewski. Nous avons agi ainsi afin de ne pas briser l'homogénéité terminologique de notre présentation, (cf. pp. 388-9). Il est intéressant de souligner que Leśniewski n'a pas formalisé la méréologie; elle est complètement explicitée en langue polonaise. Remarquons enfin que les définitions proposées sont en désaccord avec le canon de celles proposées dans cet ouvrage. En effet, definiens et definiendum sont inversés. Il faut se rappeler que la méréologie a été conçue avant la protothétique, et que c'est dans ce système que Leśniewski décide, pour des raisons métalogiques (p. 261) de bouleverser cet ordre.

8.2. LE SYSTEME AXIOMATIQUE DE 1920

En 1920, Leśniewski remarquait qu'il pouvait obtenir une théorie équivalente à la méréologie en choisissant le terme 'élément' comme terme primitif.

(a) jeżeli P jest ingrediensem p-tu Q oraz nie (Q jest P), to Q nie jest ingrediensem p-tu P ,

(b) jeżeli P jest ingrediensem p-tu Q , oraz Q jest ingrediensem p-tu R , to P jest ingrediensem p-tu R ,

(c) jeżeli każde a jest ingrediensem p-tu P i ingrediensem p-tu Q , oraz przy wszelkiem R —, jeżeli R jest ingrediensem p-tu P , lub R jest ingrediensem p-tu Q , to pewien ingrediens p-tu R jest ingrediensem pewnego a , to P jest Q ,

(d) jeżeli pewien przedmiot jest a , to przy pewnem P — ((przy wszelkiem Q —, jeżeli Q jest a , to Q jest ingrediensem p-tu P) i przy wszelkiem Q —, jeżeli Q jest ingrediensem p-tu P , to pewien ingrediens p-tu Q jest ingrediensem pewnego a),

(Leśniewski, 1930, p. 82)

- (a) Si P est un élément de l'objet Q et non (Q est P), alors Q n'est pas un élément de l'objet P .
- (b) Si P est un élément de l'objet Q , et Q est un élément de l'objet R , alors P est un élément de l'objet R .
- (c) Si chaque a est un élément de l'objet P et un élément de l'objet Q , alors pour tout R - si R est un élément de l'objet P , ou R est un élément de l'objet Q , alors quelque élément de l'objet R est un élément de quelque a , alors P est Q .
- (d) Si quelque objet est a , alors pour quelque P - (pour tout Q -, si Q est a , alors Q est un élément de l'objet P) et pour tout Q -, si Q est un élément de l'objet P , alors quelque élément de l'objet Q est un élément de quelque a).

Traduction formelle:

- (a) $\vdash \{PQ \supset P \in \langle Q \rangle \wedge \sim (Q \in P) \supset Q \in \langle P \rangle\}^?$
- (b) $\vdash \{PQR \supset P \in \langle Q \rangle \cdot Q \in \langle R \rangle \supset P \in \langle R \rangle\}^?$
- (c) $\vdash \{PQa \supset \{ \{ \{ C \in a \supset C \in \langle P \rangle \cdot C \in \langle Q \rangle \}^? \cdot \{ R \supset R \in \langle P \rangle \vee R \in \langle Q \rangle \}^? \cdot \{ \{ C \} \supset C \in a \cdot \{ C \in \langle C \rangle \cdot \{ C \in \langle R \rangle \}^? \} \supset P \in Q \}^?$
- (d) $\vdash \{ Ba \supset \{ C \in a \supset \{ \{ P \supset LQ \supset Q \in a \supset Q \in \langle P \rangle \}^? \cdot LQ \supset Q \in \langle P \rangle \}^? \cdot \{ \{ C \} \supset C \in a \cdot \{ C \in \langle C \rangle \cdot \{ C \in \langle C \rangle \}^? \}^? \}^?$

Sur la base de ces quatre axiomes, Leśniewski inscrit les définitions des termes 'part de' et 'classe de'

(e) P jest częścią p-te Q wtedy i tylko wtedy, gdy (P jest ingrediensiem p-te Q i nie (P jest tym samym przedmiotem, co Q)), (Leśniewski, 1930, p. 82)

(e) P est une part de l'objet Q , si et seulement si, (P est un élément de l'objet Q et non (P est le même objet que Q)).

Traduction formelle:

$$(e) \quad \perp PQ \ulcorner P \in \text{pt} \langle Q \rangle \wedge \cdot P \in \text{el} \langle Q \rangle \cdot \neg (= \{PQ\}) \urcorner$$

La définition du terme 'classe de' est équivale à celle inscrite sur la base de l'axiomatique de 1918, (p.438).

8.3. LE SYSTEME AXIOMATIQUE DE 1921

En 1921, Leśniewski établissait une base axiomatique fondée sur l'unique terme primitif ext, extérieur à (p.424), et composée de deux axiomes.

(A) *P* est zewnątrzne względem *Q* wtedy i tylko wtedy, gdy przy wszelkiem *S* — pewien przedmiot, zewnątrzny względem *P* lub zewnątrzny względem *Q*, jest nie (zewnątrzny względem *S*).

(B) jeżeli (przy wszelkiem $P - (P \text{ jest } \varphi(a) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } (P \text{ jest przedmiotem i przy wszelkiem } Q - (P \text{ jest zewnątrzne względem } Q \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy przy wszelkiem } R - , \text{ jeżeli } R \text{ jest } a, \text{ to } R \text{ jest zewnątrzne względem } Q)))$) oraz pewien przedmiot jest *a*, to $\varphi(a)$ jest przedmiotem,

(Leśniewski, 1931, p. 142)

(A) *P* est extérieur à *Q*, si et seulement si, pour tout *S* - quelque objet extérieur à *P* ou extérieur à *Q* n'est pas (extérieur à *S*).

(B) Si (pour tout *P* - (*P* est $\varphi\langle a \rangle$), si et seulement si, (*P* est un objet et pour tout *Q* - (*P* est extérieur à *Q*, si et seulement si, pour tout *R* - si *R* est un *a*, alors *R* est extérieur à *Q*))) et quelque objet est *a*, alors $\varphi\langle a \rangle$ est un objet.

Traduction formelle:

$$(A) \quad \perp PQ \ulcorner P \in \text{ext} \langle Q \rangle \equiv \perp \exists S \ulcorner \exists C \text{ ext} \langle P \rangle \vee C \in \text{ext} \langle Q \rangle : C \in \langle \text{ext} \langle S \rangle \rangle \urcorner \urcorner$$

$$(B) \quad \perp \forall a \ulcorner \perp P \ulcorner P \in \varphi \langle a \rangle \equiv P \in \text{pt} \ulcorner \perp Q \ulcorner P \in \text{ext} \langle Q \rangle \equiv \perp R \ulcorner R \in a \wedge R \in \text{ext} \langle Q \rangle \urcorner \urcorner \cdot \exists C \langle a \rangle \cdot C \in \varphi \langle a \rangle \urcorner$$

Sur la base de ce système axiomatique, Leśniewski propose les définitions des termes 'classe de', 'élément de' et 'part de'.

(G) *P* jest klasą p-tów *a* wtedy i tylko wtedy, gdy (*P* jest przedmiotem i przy wszelkim *Q* — (*P* jest zewnętrznie względem *Q* wtedy i tylko wtedy, gdy przy wszelkim *R* —, jeżeli *R* jest *a*, to *R* jest zewnętrznie względem *Q*)),

(D) *P* jest ingrodjensem p-tu *Q* wtedy i tylko wtedy, gdy przy pewnym *a* — (*Q* jest klasą p-tów *a*, i *P* jest *a*),
cięż

(Q) *P* jest częścią p-tu *Q* wtedy i tylko wtedy, gdy (*P* jest ingrodjensem p-tu *Q* i nie (*P* jest tym samym przedmiotem, co *Q*)) (Leśniewski, 1931, pp. 142-143)

(Q) *P* est la classe des objets *a*, si et seulement si, (*P* est un objet et pour tout *Q* — (*P* est extérieur à *Q*, si et seulement si, pour tout *R* — si *R* est un *a*, alors *R* est extérieur à *Q*)).

(D) *P* est un élément de l'objet *Q*, si et seulement si, pour quelque *a* — (*Q* est la classe des objets *a*, et *P* est un *a*).

(E) *P* est part de l'objet *Q*, si et seulement si, (*P* est un élément de l'objet *Q* et non (*P* est le même objet que *Q*)).

Traduction formelle:

(G) $\ulcorner P_3^r P e K \urcorner \Leftrightarrow x . P e P . \ulcorner Q_1^r P e x t \urcorner \Leftrightarrow x \ulcorner R_2^r R e a \wedge R e x t \urcorner \urcorner$

(D) $\ulcorner P Q_2^r P e l \urcorner \Leftrightarrow \exists a_1^r Q e K \urcorner . P e a_1^r$

(E) $\ulcorner P Q_2^r P e p t \urcorner \Leftrightarrow . P e l \urcorner . \sim \{ = \{ P Q \} \urcorner$

8.4. AXIOMES UNIQUES

Sobocinski et Lejewski, sur la base des travaux réalisés par Leśniewski, ont engagé de nombreuses recherches relatives à la méréologie. Ils ont notamment réussi à inscrire des bases axiomatiques susceptibles de fonder la méréologie, composées d'un axiome unique. A titre d'exemples, nous proposons deux de leurs réalisations. L'un de ces axiomes présente l'unique terme primitif, *e*], et l'autre, l'unique terme primitif, *K*].

$$E_1 \quad \begin{aligned} & \vdash \exists A \exists e \langle B \rangle \supset \exists B \exists e \langle C \rangle \supset \exists C \exists e \langle A \rangle \supset \exists D \exists e \langle A \rangle \supset \\ & \exists D \exists e \langle C \rangle \supset \exists D \exists e \langle C \rangle \supset \exists E \exists e \langle A \rangle \supset \exists E \exists e \langle B \rangle \supset \\ & \exists E \exists e \langle E \rangle \supset \exists A \exists e \langle A \rangle \supset \end{aligned}$$

(Sobocinski, 1955, p. 37)

$$E_2 \quad \begin{aligned} & \vdash \exists A \exists e \langle K \rangle \supset \exists A \exists e \langle A \rangle \supset \exists B \exists e \langle B \rangle \supset \exists D \exists e \langle B \rangle \supset \\ & \exists E \exists e \langle d \rangle \supset \exists B \exists e \langle A \rangle \supset \exists B \exists e \langle K \rangle \supset \\ & \exists B \exists e \langle A \rangle \supset \exists B \exists e \langle A \rangle \supset \exists B \exists e \langle B \rangle \supset \exists B \exists e \langle C \rangle \supset \end{aligned}$$

(Lejewski, 1954, p. 48)

9. REMARQUES

Nous avons présenté la méréologie sous ses aspects génétique et formel, en en précisant et en en démontrant ses caractéristiques essentielles. Nous avons délibérément choisi de ne pas exposer les applications qui en ont été faites. Pour terminer cette quatrième partie, nous voulons tout de même faire référence à une famille de travaux qui se sont élaborés à partir de la méréologie. Ils consistent dans la construction de divers systèmes géométriques. Tarski (1972, vol. 1), Sullivan (1971) et Clay (1981) y ont largement contribué.

Il y a déjà quelques années Leśniewski a soulevé le problème de la recherche des fondements de la géométrie des corps, entendant par là un système de géométrie dont les figures ne sont pas des points, des droites, des surfaces, mais uniquement des solides. La caractéristique particulière de cette géométrie - par rapport à toutes les géométries ponctuelles - se trouve dans la loi selon laquelle toute figure contient une autre figure comme partie propre. ...

Dans ce résumé je me propose d'esquisser une solution du problème en laissant de côté ses aspects philosophiques. La méréologie, théorie déductive, ainsi appelée par son créateur Leśniewski, jouera un rôle essentiel dans notre

exposé. Dans cette théorie la relation de partie à tout (traitée comme une relation entre individus) peut être choisie comme notion primitive unique.

... La seule notion spécifique acceptée dans la géométrie des corps est celle de sphère. (Tarski, 1972, pp. 29-30).

Une fois encore, le rapport que Leśniewski soutenait entre théorie et intuition se révèle efficace. Il serait intéressant de réaliser une démarche pédagogique qui viserait à soumettre à la connaissance des élèves, une géométrie qui se construit sur des notions plus proches de la réalité que ce point abstrait que l'on n'arrête pas de "dessiner".

Fin des années soixante, Rickey développe un système axiomatisé de la syntaxe inscriptionnelle (1972, 1973). En relation avec ce travail, il suggère une méréologie atomiste (atomistic) qui peut être utilisée comme une base de la géométrie. Ses réflexions ont suscité de nouveaux travaux tels ceux de Sobocinski (1971) qui axiomatise une méréologie atomiste, ou ceux de Lejewski (1973) qui développe une méréologie sans atomes.

En 1981, Clay propose l'ébauche d'une topologie fondée sur la méréologie. Il serait très utile et fort intéressant de poursuivre ce travail.

CONCLUSION

Nous avons beaucoup insisté sur l'intérêt logique et historique que présente les systèmes de Leśniewski. Notre intention était pour une part épistémologique. Partant du calcul équivalentiel S de Leśniewski, nous avons reconstitué les étapes logiques nécessaires à l'élaboration de la protothétique, de l'ontologie et de la méréologie. Cette démarche nous a semblé importante dans la mesure où elle permettait de mettre en évidence les raisons mêmes qui ont contribué à la formulation de directives nouvelles et de nouveaux axiomes. Il s'agissait par là même de comprendre et d'analyser l'origine et le contexte historique de cette oeuvre logique, ainsi que sa valeur et sa portée. Le drame du paradoxe russellien a été notre point de départ. Nous voulions comprendre le refus de Leśniewski d'accepter la théorie des ensembles d'alors. Son refus de s'inféoder aux théories formalistes de ses contemporains, sa volonté de résoudre le paradoxe et la création de ses systèmes logiques nous ont donné à comprendre la position intellectuelle d'un savant qui n'a jamais succombé à la tentation d'élaborer des théories détachées de tout fondement intuitif. Il ne s'agissait pas pour lui de défendre à tout prix une position personnelle, mais d'agir en fonction de la conviction profonde qui l'habitait, celle là même qui l'a conduit à créer des systèmes 'naturels', fondés sur l'héritage de la pensée spontanée et sur une appréhension naturelle des choses et du monde. Leśniewski montre ainsi son opposition à des constructions théoriques certes admirables mais à ses yeux dénaturées. Il en donne une preuve éclatante en proposant un système fondé sur des notions intuitives, qui "diffère sur beaucoup de points des autres systèmes contemporains, qu'il est non-contradictoire... et qu'il forme une base suffisante pour la construction de l'ensemble des mathématiques contemporaines." (Sobocinski, 1949-50, pp. 94-95).

Leśniewski a ainsi élaboré des systèmes d'une grande efficacité, sans pour autant quitter une réflexion qui reste constamment centrée sur le langage naturel. Ces systèmes, comme les discours, se déve-

loppent dans l'espace et le temps, et les définitions peuvent y apparaître comme porteuses d'idées nouvelles et non plus comme de simples abréviations. L'inscription de ses définitions dans l'évolution dynamique d'un système permet d'introduire la notion du temps cognitif: les instants où la connaissance s'enrichit sur la base de ce qui précède. C'est l'évidence de cet esprit naturel que nous avons voulu présenter. On pourrait reprocher à Leśniewski la très grande complexité de la présentation de ses systèmes logiques. Ce serait oublier qu'il a complètement formalisé (non axiomatisé) les règles d'inférence de ses systèmes et qu'il est un des rares logiciens à l'avoir fait.

Nous avons tenté de reconstituer une succession de systèmes susceptible de fonder l'existence de certaines directives des systèmes logiques de Leśniewski. Nous avons développé plusieurs sous-systèmes de la protothétique: les calculs équivalentiels $S, SQ1 - SQ4$. Nous avons montré leurs propriétés ainsi que les relations qu'ils entretiennent avec le calcul propositionnel standard ou les protothétiques complètes; pour certains d'entre eux nous l'avons fait en nous appuyant sur la loi de parité attachée aux thèses de ces systèmes ($S, SQ1 - 2$), loi que nous démontrons.

La présentation du système $S1$, la protothétique élémentaire nous a donné l'occasion d'explicitier la réflexion et la démarche de Leśniewski, dans sa recherche d'un nouvel axiome susceptible de réaliser son projet: un calcul propositionnel quantifié dont la quantification porte sur toute variable, quelle que soit sa catégorie sémantique. A ce sujet, la contribution essentielle de Tarski, la définition de la conjonction, n'a pas été oubliée. Nous conformant aux réalisations métalogiques de Sobocinski, nous avons proposé quelques métarègles dans $S1$. Peut-être sont-elles présentées prématurément. Il aurait sans doute été plus judicieux de les intégrer lors de l'exposition des protothétiques complètes. L'exposition des protothétiques complètes, $S2 - S5$, nous a donné l'occasion de mettre en évidence et de justifier les différentes transformations qui aboutissent à la formulation d'une proto-

thétique qui joue le rôle d'une référence, 55.

Nous avons abordé l'étude de l'ontologie en nous méfiant quelque peu des analyses qui l'entouraient. En effet, de manière intuitive nous ne pouvions accepter sans autre que l'épsilon ait la même signification que le 'jest' polonais ou le 'est' latin. Ces exemplifications linguistiques laissent supposer que ces copules, en situation discursive, n'ont qu'une seule signification. Notre méfiance semble fondée puisque nous avons trouvé en polonais un usage du 'jest' qui, bien qu'accepté, ne rend pas compte de l'épsilon de l'ontologie.

Au-delà de la présentation et de la caractérisation de ce système, citons quelques-unes de nos contributions. En nous fondant sur l'analogie structurelle et relationnelle entre certaines thèses de l'ontologie, nous avons proposé la démonstration de l'analogie de l'axiome de 1920 pour la catégorie sémantique $S/(S/N)(S/N)$. Ce résultat (qui peut être répété aux autres catégories sémantiques) permet de projeter les propriétés des catégories primitives aux catégories supérieures.

Le problème de l'interprétation a également retenu toute notre attention. Opposant une interprétation objectuelle à l'interprétation substitutionnelle, nous avons tenté d'esquisser une démarche interprétative de l'ontologie.

Les critiques de Lesniewski à l'égard de la conception fré-géenne de la notion de classe nous ont servi de point de départ pour exposer la méréologie. Nous avons principalement mis l'accent sur la caractérisation de la classe méréologique, en démontrant plusieurs thèses la concernant. Nous avons également présenté la démonstration que toute classe méréologique des a est la borne supérieure des a .

Cette conclusion aimerait être aussi un regard vers l'avenir. Les prolongements de ce travail se situeront à plusieurs niveaux. En particulier, il s'agira de poursuivre nos réflexions sur les liens entre

les systèmes de Lesniewski et les langues naturelles. L'esprit dynamique et vivant des développements de la protothétique et de l'ontologie, la richesse de leur organisation en termes de catégories sémantiques, offrent un outil formel quasi animé, qui doit permettre de rendre mieux compte des hiérarchies sémantiques si caractéristiques des langues naturelles. D'autre part, la méréologie fournit des concepts classificatoires d'une densité et d'une subtilité unique qui permettent de représenter et de manipuler certaines notions propres aux théories discursives.

Dans ses recherches visant l'élaboration d'une logique naturelle, le Centre de Recherches Sémilogiques de l'Université de Neuchâtel les utilise depuis plusieurs années. Une autre aire de recherches consistera dans une quête métalogue qui voudrait offrir une solution au problème de l'interprétation de l'ontologie et de la méréologie.

* * *

When I came to visit Stanislaw on the eve of his last day, he asked to have two cups filled with wine, as if we were drinking a stirrup cup before his ultimate journey. Next morning, he demanded that one of his favourite armchairs be brought to the hospital from his apartment. The whim had been complied with, and when Stanislaw Leśniewski had swiftly placed his large frame on the favourite seat people realized that it was not Him, that he lived no more. This took place in Warsaw on May 13, 1939. No matter what the experts will say of his works, evaluating them comparatively and according to the criteria of powerfully developing science, one thing will always remain undisputable truth to me. I maintain, on the grounds of long experience, that he was a man of genius, the only man of genius with whom destiny brought me into a well-nigh every day association. (Kokarbinski, 1976, pp. 12-13).

BIBLIOGRAPHIES .

B I B L I O G R A P H I E

Remarques

- Les ouvrages de Lesniewski sont proposés dans une bibliographie séparée.
- Abréviations - Notre Dame Journal of Formal Logic: NDJFL
 - The Journal of Symbolic Logic: JSL
- ACZEL P. (1977): "An introduction to inductive definitions", in Barwise (ed), Handbook of mathematical logic, Amsterdam, Reidel, 739-782.
- AJDUKIEWICZ K. (1967): "Syntactic connexion" in Mc Call (ed), Polish logic, Oxford, Clarendon press, 207-231.
- (1978): The scientific world-perspective and other essays, Dordrecht, Reidel.
- ASENJO F.6. (1977): Lesniewski's work and nonclassical set theories, Studia Logica, 36, 249-255.
- BALOWIM T. (1978): "Kripke, Pseudo-Kripke, and Wallace", Analysis, 38, 4, 173-181.
- BAR-HILLEL Y. (1950): "On syntactical categories", JSL, 15, 1-16.
- BARWISE J. (1979): "On branching quantifiers in English", Journal of philosophical logic, 8, 47-80.
- BINKLEY R. (1970): "Quantifying, quotation, and a paradoxe", Nous, 4, 271-277.
- BLANCHÉ R. (1970): La logique et son histoire. Paris, Armand Colin.
- BETH E.W. (1959): The foundations of mathematics. Amsterdam, Reidel.
- BOCHENSKI I. (1956): Formale Logik. München, Karl Alber.
- (1981): "The general sense and character of modern logic", in Agazzi (ed), Modern logic - a survey. Dordrecht, Reidel, 3-14.
- BORKOWSKI L. (1977): Formale Logik. München, Beck.
- CANTOR G. (1887): "Mitteilungen zur Lehre vom transfiniten", Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, 91, 81-125.
- (1895): "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre", Mathematische Annalen, 46, 481-512.
- CANTY J.T. (1969): "The numerical epsilon", NDJFL, 10, 47-63.
- (1969): "Lesniewski's terminological explanations as recursive concepts", NDJFL, 10, 337-369.
- (1969): "Ontology: Lesniewski's logical language", Foundations of language, 5, 455-469.

- FREGE G. (1959): The foundations of arithmetic. Oxford, Blackwell.
Traduit par J.L. Austin.
- (1962): Grundgesetze der Arithmetik. Hildesheim. Olms, 1^e ed. 1893. Vol. 1.
 - (1962): Grundgesetze der Arithmetik. Hildesheim. Olms, 1^e ed. 1903. Vol. 2.
 - (1969): Les fondements de l'arithmétique. Paris. Seuil. Traduction et introduction Claude Imbert.
 - (1971): Ecrits logiques et philosophiques. Paris, Seuil. Traduction et introduction Claude Imbert.
- GAUTHIER Y. (1976): Fondements des mathématiques. Montréal. Les presses de l'Université de Montréal.
- (1979): Méthodes et concepts de la logique formelle. Montréal. Les presses de l'Université de Montréal.
- GEACH P.I. (1972): Logic Matters. Berkeley, University of California press.
- GENTZEN G. (1934): "Untersuchungen über das logische Schliessen", Mathematische Zeitschrift.
- GODFREY-SMITH W. (1976): Names, indices and individuals, Analysis, 37, 1-10.
- GOLDFARB W.O. (1979): "Logic in the twenties: the nature of the quantifier", JSL, 44, 351-386.
- GOMBOCZ W.L. (1982): "Kopula, Quantifikation und 'Nominalismus' bei Lesniewski und Nelly I: Kopula", Topoi, à paraître.
- GRATTAN-GUINNESS I. (1981): "On the development of logics between the two world wars", American Mathematical Monthly, 88, 495-509.
- GRIZE J.-B. (1967): "Logique et connaissance scientifique", in Encyclopédie de la Pléiade, 22. Paris, Gallimard, 133-289.
- (1972): "Notes sur l'ontologie et la méréologie de Lesniewski", Travaux du Centre de Recherches Sémiologiques, 12.
 - (1973): Logique moderne. Paris, Mouton-Gauthier-Villars. Fascicule III.
- GRZEGORCZYK A. (1955): "The systems of Lesniewski in relation to contemporary logical research", Studia logica, 3, 77-97.
- HARMAN G. (1971): "Substitutional quantification and Quotation", Noûs, V, 213-214.
- HENRY D.P. (1969): "Lesniewski's ontology and some medieval logicians", NDJFL, 10, 324-326.
- (1972): Medieval logic and metaphysics. London, Hutchinson University Library.

- HILBERT D. BERNAYS P. (1934): Grundlagen der Mathematik. Berlin, Springer, vol. 1, vol. 2.
- HIZ H. (1960): "The intuitions of grammatical categories", Methodos, 12, 311-319.
- (1965): "Ontological definitions in augmented protothetics", JSL, 31, 149-150.
- (1977): "Descriptions in Russell's theory and in ontology", Studia logica, 36, 271-283.
- HUGLY P. et SAYWARD C. (1976): "Prior on propositional identity", Analysis, 36, 182-183.
- HUSSERL E. (1891): Philosophie der Arithmetik. Halle. C.E.N. Pfeffer (Robert Stricker).
- (1900-1901): Logische Untersuchungen. Halle. Max Niemeyer.
- JORDAN Z.A. (1967): "The development of mathematical logic in Poland between the two wars", in McCall (ed), Polish logic. Oxford, Clarendon, 346-397.
- KEARNS J.T. (1966): "Quantifiers and universal validity", Logique et analyse, 9, # 35-36, 298-309.
- (1967): "The contributions of Lesniewski", NOJFL, 8, 61-93.
- (1968): "The logical concept of existence", NOJFL, 9, 313-324.
- (1968): "Universally valid system of predicate calculus with no existential presuppositions", Logique et analyse, 11, #43, 367-389.
- (1969): "Two views of variables", NOJFL, 10, 163-180.
- (1979): "A little more like English", Logique et analyse, 22, #87, 353-368.
- KIELKOPF C.F. (1977): "Quantifiers in Ontology", Studia logica, 36, 301-307.
- KLEENE S.C. (1952): Introduction to metamathematics. Princeton, Van Nostrand.
- KNEALE W. et Martha (1962): The development of logic. Oxford, Clarendon.
- KOTARBINSKA J. (1961): "On ostensive definition", Atti del XII congresso intern. di filosofia, V, 287-293.
- KOTARBINSKI I. (1964): Leçons sur l'histoire de la logique. Paris, PUF.
- (1966): Gnosiology. Oxford, Pergamon.
- (1967): "Notes on the development of formal logic in Poland in the years 1900-39", McCall (ed), Polish logic, Oxford, Clarendon, 1-14.
- (1976): "Stanislaw Lesniewski: A handful of memories", distributed at the Lesniewski conference in Krakow.
- KOWALSKI J.G. (1977): "Lesniewski's ontology extended with the axiom of choice", NOJFL, 18, 1-78.

- KRIPKE S. (1976): "Is There a problem about substitutional quantification?", in Mc Dowell (ed), Truth and meaning. Oxford, Clarendon, 325-419.
- KUHN S.T. (1980): "Quantifiers as modal operators", Studia logica, 39, 145-158.
- KUNG G. (1963): Ontologie und logistische Analyse der Sprache. Berlin, Springer.
- (1974): "Prologue-functors", Journal of philosophical logic, 3, 241-254.
 - (1977): "The meaning of the quantifiers in the logic of Leśniewski", Studia logica, 36, 309-322.
 - (1981): "Abelard et les vues actuelles sur la question des universaux", Abelard. Actes du colloque de Neuchâtel, Cahiers de la revue de théologie et de philosophie, 6, 99-118.
 - (1981): "Leśniewski's systems", in Marciszewski (ed), Dictionary of logic. The Hague, Nijhoff, 168-177.
- KUNG G et CANTY J.T. (1970): "Substitutional quantification and Leśniewskian quantifiers", Theoria, 36, 165-182.
- KURATOWSKI K. (1980): A half-century of Polish mathematics, Oxford, Pergamon.
- LAFORGE J.-M. (1974): "Fondements pour une méréologie ensembliste", Logique et analyse, 17, #65-66, 165-174.
- LAMBERT K. (1963): "Quantification and existence", Inquiry, 6, 319-324.
- LEBLANC H. (1973): Truth, Syntax and modality. Amsterdam, North Holland.
- (1976): Truth-value semantics. Amsterdam, North-Holland.
 - (1982): Existence, Truth, and provability. New York. State University of New York press.
- LEJEWski C. (1954): "A contribution to Leśniewski mereology", Polskie towarzystwo naukowe na obczyźnie, 5, 48-50.
- (1954): "Logic and existence", The British journal for the philosophy of science, 5, 104-119.
 - (1955): "A new axiom of mereology", Polskie towarzystwo naukowe na obczyźnie, 6, 65-70.
 - (1958): "On Leśniewski's ontology", Ratio - Oxford, 1, 150-176.
 - (1958): "Zu Leśniewskis Ontologie", Ratio-Frankfurt a.M., 2, 50-78.
 - (1960): "A re-examination of the Russellian theory of descriptions", Philosophy, 35, 14-29.
 - (1963): "A note on a problem concerning the axiomatic foundations of mereology", NOJFL, 4, 135-139.

- LEJEWSKI C. (1967): "A single axiom for the mereological notion of proper part", NDJFL, 8, 279-285.
- (1967): "Leśniewski Stanislaw", in The Encyclopedia of Philosophy, Edwards (ed), Vol. 4, 441-443.
 - (1967): "A theory of non-reflexive identity and its ontological ramifications", in Grundfragen der Wissenschaften und ihre Wurzeln in der Metaphysik. München, Pustet, 65-102.
 - (1969): "Consistency of Leśniewski's mereology", JSL, 34, 321-328.
 - (1973): "A contribution to the study of extended mereologies", NDJFL, 14, 55-67.
 - (1975): "Syntax and semantics of ordinary language", The Aristotelian Society, supp. vol. 49, 127-146.
 - (1977): "A note concerning the notion of mereological class", NDJFL, 19, 251-263.
 - (1980): "A note concerning the notion of mereological class. Post-script.", NDJFL, 21, 679-682.
 - (1980): "Logic and ontology" in Agazzi (ed), Modern logic - A survey. Dordrecht, Synthese library, 379-398.
 - (1983): "A note on Leśniewski's axiom system for the mereological notion of ingredient or element", Topoi, 2, 63-71.
- LEONARD H.S. et GOODMAN N. (1940): "The calculus of individuals and its uses", JSL, 5, 45-55.
- LUKASIEWICZ J. (1910): "Über den Satz des Widerspruchs bei Aristoteles", Bulletin international de l'Académie des sciences de Cracovie, Classe de philosophie, classe d'histoire et de philosophie, 15-38.
- (1953): "The principle of individuation I", Proceedings of the Aristotelian society, sup. vol. 27, 69-82.
 - (1963): Elements of mathematical logic. Oxford, Pergamon.
 - (1967): "On the history of the logic of propositions" in Mc Call (ed), Polish logic. Oxford, Clarendon, 66-87.
 - (1967): "The equivalential calculus", in Mc Call (ed), Polish logic. Oxford, Clarendon, 88-115.
 - (1970): Selected works, Borkowski (ed). London, North-Holland.
- LUSCHEI E.C. (1962): The logical systems of Leśniewski. Amsterdam, North-Holland.
- MACHOVER M. (1966): "Contextual determinacy in Leśniewski's grammar", Studia logica, 19, 47-57.
- MARCUS R.B. (1962): "Interpreting quantification", Inquiry, 5, 252-259.
- (1963): "Modal logics I: modalities and intensional languages", in Boston studies in the philosophy of science, vol. 1, Wartofsky (ed) Boston, Reidel, 77-116.

- MARCUS R.B. (1972): "Quantification and ontology", Hoüs, 6, 240-250.
- MARTIN R.M. (1962): "Existential quantification and the 'regimentation' of ordinary language", MIND, 71, 525-529.
- (1978): "On Quine's philosophy of logic", in Events, reference and logical form. Washington, The catholic university of America press, 181-192.
- (1978): "In defense of nominalism", in Events, reference and logical form. Washington, The catholic university of America press, 253-261.
- MC CALL S. (1967): Polish logic. Mc Call (ed). Oxford, Clarendon.
- MEREDITH C.A. (1951): "On an extended system of the propositional calculus", Proceedings of the Royal Irish academy, 54, sect.A, 37-47.
- MERLEAU PONTY M. (1945): Phénoménologie de la perception. Paris, Gallimard.
- MYHILL J. (1953): "Arithmetic with creative definitions by induction", JSL, 18, 115-118.
- NELSON L., GRELLING K. (1908): "Bemerkungen zu den Paradoxen von Russell und Burali-Forti", Abhandlungen der Frie'schen Schule, vol. 2, 301-324.
- NICOD J.G.P. (1917): "A reduction in the number of the primitive propositions of logic", Proceedings of Cambridge philosophical society, 19.
- PEIRCE C.S. (1885): "On the algebra of logic", American journal of mathematics, 7.
- (1933): Collected papers of Charles Sanders Peirce. Hartshorne et Weiss (ed), vol. III, Exact logic. Cambridge, Harvard University press.
- PERZANOWSKI J. (1973): "The development of Cantor's definition of the set", in Studies in the history of mathematical logic, Surma (ed). Wrocław, Polish academy of sciences, 269-274.
- PIAGET J. (1972): Essai de logique opératoire. Paris, Dunod.
- PRIOR A.H. (1955): Formal logic. Oxford, Clarendon.
- (1955): "English and ontology", The British journal for the philosophy of science, 6, 64-65.
- (1956): "Definitions, rules and axioms", Proceedings of the Aristotelian society, 56, 199-216.
- QUINE W.V.O. (1951): "Whitehead and the rise of modern logic", in The philosophy of Alfred North Whitehead, Schilpp (ed). New York, Tudor, 127-163.
- (1955): Mathematical logic. Cambridge, Harvard University press.
- (1961): From a logical point of view. Cambridge, Harvard University press.

- QUINE W.V.O. (1962): Methods of logic. New York, Holt, Rinehart and Winston.
- (1968): "Ontological relativity", The journal of philosophy, LXV, 185-211.
 - (1968): "Existence and quantification", in Fact and Existence. Margolis (ed) Oxford, Blackwell, 1-17.
 - (1969): Ontological relativity and other essays. New York, Columbia University press.
 - (1970): Philosophy of logic. Englewood Cliffs, Prentice-Hall.
 - (1972): Méthodes de logique. Paris Armand Colin, traduction M. Clavelin.
- RICKEY V.F. (1972): "Axiomatic inscriptional syntax, part I: The syntax of protothetic", NDJFL, 13, 1-33.
- (1973): "Axiomatic inscriptional syntax, part II: The syntax of protothetic", NDJFL, 14, 1-52.
 - (1974): "The one variable implicational calculus", NDJFL, 15, 478-480.
 - (1975): "Creative definitions in propositional calculi", NDJFL, 16, 273-294.
 - (1975): "On creative definitions in the Principia Mathematica", Logique et analyse, 18, # 69-70, 175-182.
 - (1977): "A survey of Lesniewski's logic", Studia logica, 36, 407-426.
 - (1978): "On creative definitions in first order functional calculi" NDJFL, 19, 307-309.
 - (1982): An annotated Lesniewski bibliography. Bowling Green, Bowling Green State University.
- RUSSELL B. (1956): The principles of mathematics. London, Allen and Unwin. (1^e ed. 1903).
- (1970): "De la dénotation", L'âge de la science, vol. 3, 171-185. (1^e éd. 1905), traduction: P. Devaux.
 - (1970): Introduction à la philosophie mathématique. Paris, Payot. (Traduit par G. Moreau).
- SCHARLE T.W. (1962): "A diagram of the functors of the two-valued propositional calculus", NDJFL, 3, 243-255.
- (1962): "Note on my paper: 'A diagram of the functors of the two-valued propositional calculus'", NDJFL, 3, 287-288.
 - (1971): "Completeness of many-valued protothetic", JSL, 36, 363-364.

- SHEFFER H.M. (1913): "A set of five independent postulates for Boolean algebras, with application to logical constants", Transactions of the American mathematical society, vol. 14.
- SIMONS P.M. (1978): "Logic and common names", Analysis, 38, 161-167.
- (1981): "A note on Leśniewski and free Logic", Logique et analyse, 24, 415-420.
 - (1982): "On understanding Leśniewski", History and philosophy of logic, 3, 165-191.
 - (1983): "A Leśniewskian language for the nominalistic theory of substance and accident", Topoi, 2, 99-109.
- SINISI V.F. (1965): "Discussion: "ε" and common names". Philosophy of sciences, 32, 281 - 286.
- (1969): "Leśniewski and Frege on collective classes", NDJFL, 10, 239-246.
 - (1976): "Leśniewski's analysis of Russell's antinomy", NDJFL, 17, 19-34.
 - (1983): "Leśniewski's foundations of mathematics", Topoi, 2. (Translation Leśniewski, 7-52, introduction, 3-6).
 - (1983): "The development of ontology", Topoi, 2, 63-71.
- SKOLIMOWSKI H. (1967): Polish analytical philosophy. New York, The humanities press.
- SLUPECKI J. (1953): "St. Leśniewski's protothetics", Studia logica, 1, 44-112.
- (1955): "S. Leśniewski's calculus of names", Studia logica, 3, 7-73.
 - (1958): "Towards a generalized mereology of Leśniewski", Studia logica, 8, 131-163.
- SOBOCINSKI B. (1949): "An investigation of protothetic", Cahiers de l'institut d'études polonaises en Belgique, 5, 44 pp.
- (1949): "L'analyse de l'antinomie russellienne par Leśniewski", Methodos, 1, 94-107, 220-228, 308-316.
 - (1950): "L'analyse de l'antinomie russellienne par Leśniewski", Methodos, 2, 237-257.
 - (1954): "Studies in Leśniewski's mereology", Polskie towarzystwo naukowe na obczyźnie, 5, 34-43.
 - (1955): "On well constructed axiom systems", Polskie towarzystwo naukowe na obczyźnie, 6, 54-65.
 - (1960): "On the single axioms of protothetic I, II, III", NDJFL, 1, 52-73, 2, 111-126, 129-148.

- SOBOCINSKI B. (1967): "Successive simplifications of the axiom-system of Leśniewski's ontology", in Polish logic, Mc Call (ed), 188-200.
- (1967): "An investigation of protothetic", in Polish logic, Mc Call (ed), 201-206.
- (1971): "Atomistic mereology I, II", NDJFL, 12, 89-103; 203-213.
- (1971): "A note on an axiom-system of atomistic mereology", NDJFL, 12, 249-251.
- STEVENSON L. (1973): "Frege's two definitions of quantification", Philosophical Quarterly, 23, 207-223.
- SULLIVAN T.H. (1971): "Affine geometry having a solid as primitive", NDJFL, 12, 1-61.
- SURHA S.J. (1973): Studies in the history of mathematical logic, Surma (ed). Wrocław, Académie polonaise des sciences, Institut de philosophie et de sociologie.
- (1973): "A survey of the results and methods of investigations of the equivalential propositional calculus" in Studies in the history of mathematical logic, 33-62.
- (1973): "A uniform method of proof of the completeness theorem for the equivalential propositional calculus and for some of its extensions", in Studies in the history of mathematical logic, 63-80.
- (1977): "On the work and influence of Stanislaw Leśniewski", Logic colloquium, 76, Gandy and Hyland (ed), 191-220.
- TARSKI A. (1972): Logique, sémantique, métamathématique. 1923-1944, vol. 1. Paris, Armand Colin, (traduction G. Granger).
- (1974): Logique, sémantique, métamathématique 1923-1944, vol. 2. Paris, Armand Colin, (traduction G. Granger).
- THARP L.H. "Truth, quantification, and abstract objects", Noûs, 5, 363-372.
- WALLACE J. (1968): "Convention T and substitutional quantification", Noûs, 2, 199-209.
- WEINGARTNER P. (1965): "Can one say of definitions that they are true or false?", Ratio (Oxford), 7, 61-93.
- (1967): "Ontologische Fragen zur klassischen Wahrheitsdefinition", in Grundfragen der Wissenschaften und ihre Wurzeln in der Metaphysik, Weingartner (ed). Salzburg, Putset. 37-67.
- WESTON T.S. (1974): "Theories whose quantification cannot be substitutional", Noûs, 8, 361-369.
- WHITEHEAD A.N., RUSSELL B. (1910): Principia Mathematica, vol. 1. Cambridge, University press.

- WHITEHEAD A.N., RUSSELL B. (1912): Principia Mathematica, vol. 2. Cambridge, University press.
- (1913): Principia Mathematica, vol. 3. Cambridge, University press.
- WRONSKI A. (1973): "On the old and new methods of interpreting quantifiers" in Studies in the history of mathematical logic, Surma (ed), 255-260.
- ZERMELO E. (1908): "Über die Grundlagen der Mengenlehre", Mathematische Annalen, 65.

BIBLIOGRAPHIE

relative à

STANISŁAW LEŚNIEWSKI

- Abréviations - Przegląd Filozoficzny, (revue philosophique): PF
- Fundamenta Mathematicae: FM.

- (1911): "Przyczynek do analizy zdań egzystencjalnych",
(Une contribution à l'analyse des propositions existentielles),
PF, 14, 329-345.
- (1912): "Próba dowodu ontologicznej zasady sprzeczności",
(Une tentative pour prouver le principe ontologique de
contradiction), PF, 15, 202-226.
- (1913): "Krytyka logicznej zasady wyłączonego środka",
(Une critique du principe logique des tiers exclus), PF,
16, 315-352.
- (1914): "Czy klasa klas, nie podporządkowanych sobie, jest podporząd-
kowana sobie?",
(La classe des classes non-subordonnées à elle-même est-elle
subordonnée à elle-même?), PF, 17, 63-75.
- (1916): "Podstawy ogólnej teorii mnogości. I",
(Les fondements d'une théorie générale des ensembles),
Prace polskiego koła naukowego w Moskwie. Sekcyj matematy-
cznoprzyrodnicza, 2. (Traduction anglaise anonyme, 1976).
- (1927): "O podstawach matematyki",
(Sur les fondements des mathématiques), - introduction,
chapitres I-III-, PF, 30, 164-206.
- (1928): "O podstawach matematyki", - chapitre IV -, PF, 31, 261-291.
- (1929): "O podstawach matematyki", - chapitre V -, PF, 32, 60-101.
- (1929): "Ueber Funktionen, deren Felder Gruppen mit Rücksicht auf
diese Funktionen sind", FM, 13, 319-322.
- (1929): "Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik",
FM, 14, 1-81.
- (1929): "Ueber Funktionen, deren Felder Abelsche Gruppen in Bezug auf
diese Funktionen sind", FM, 14, 242-251.

- (1930): "O podstawach matematyki", - chapitres VI-IX -,
PF, 33, 77-105.
- (1930): "Ueber die Grundlagen der Ontologie", Comptes rendus des séances de la société des sciences et des lettres de Varsovie, classe III, 23, 111-132.
- (1930): "Ueber Definitionen in der sogenannten Theorie der Deduktion", Comptes rendus des séances de la société des sciences et des lettres de Varsovie, classe III, 24, 289-309.
- (1931): "O podstawach matematyki", - chapitres X-XI -,
PF, 34, 142-170.
- (1938): "Einleitende Bemerkungen zur Fortsetzung meiner Mitteilung u.d.T. 'Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik' ", Collectanea Logica, 1, 1-60.
- (1938): "Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik, section 12", Collectanea Logica, 1, 61-144.
- (1967): "Introductory remarks to the continuation of my article: Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik", in Polish logic, McCall (ed), 116-169.
- (1967): "On definitions in the so-called theory of deduction", in Polish logic, McCall (ed), 170-187.
- (1983): "On the Foundations of mathematics", - chapitres I-X -, Topoi, 2, 7-52. (Traduction V. Sinisi).

INDEX

- Analogua: 211
Analogue structurel et relationnel: 323 sqq, 334 sqq
Antinomie: 6 sqq, 35, 377
Argument: 122
 argument analogue: 125, 209
 premier argument: 84, 126
 deuxième argument: 84, 126
 premier argument ontologique: 294
 deuxième argument ontologique: 294
- Axiome
 dans S: 48 sq
 dans SQ1: 82 sq
 dans SQ2: 87
 dans SQ3: 98
 dans SQ4: 125
 dans S1: 174 sqq, 185
 dans S2: 247
 dans S3: 251
 dans S4: 259
 dans S5: 262
 de la méréologie -1916-: 396 sqq
 de la méréologie -1918-: 435 sqq
 de la méréologie -1920-: 438 sqq
 de la méréologie -1921-: 440 sqq
 de la méréologie -unique-: 441 sq
 de l'ontologie: 279 sqq
- Borne
 Borne supérieure: 429
 Borne inférieure: 429
- Catégorie sémantique: 123 sqq, 127, 154 sqq, 160 sqq, 283 sqq, 286 sqq
Catégoria sémantique et quantificateur: 355
Classe: 9 sqq, 19 sqq, 377
 classe collective (méréologique): 22 sqq, 378 sqq, 386 sqq, 397 sqq
 classe distributive: 22 sqq, 267 sq, 386 sq
 classe vide: 13 sqq, 21, 380 sq
- Collection: 422 sq
 sous-collection: 423 sq
- Complément: 424 sq
- Complétude
 de S : 77 sq
 de SQ1: 86
- Correspondance directe: 208 sqq
- Définition: 44 sqq, 156 sqq
 définition comme abréviation: 112 sqq
 définition de la conjonction: 164 sqq
 définition explicite: 116 sqq
 introduction d'une définition: 114 sq
- Directive
 directive d'associativité dans S: 57

directive de commutativité dans S: 55
 directive de définition
 dans SQ4: 130 sqq
 dans S1: 188 sqq
 dans S3: 251
 dans S5: 260
 de type protothétique dans l'ontologie: 287 sqq
 de type ontologique dans l'ontologie: 294 sqq
 directive de déplacement dans S: 56
 directive de détachement
 dans S: 52
 dans SQ1: 84 sq
 dans SQ2: 91
 dans SQ3: 108 sqq
 dans SQ4: 128 sq
 dans S1: 187
 dans S3: 251
 dans S5: 260
 dans l'ontologie: 285
 directive de distribution des quantificateurs
 dans SQ3: 99 sqq
 dans SQ4: 129
 dans S1: 187
 dans S3: 251
 dans S5: 260
 dans l'ontologie: 285
 directive d'extensionnalité
 dans S3: 251, 253 sqq
 dans S5: 260
 de type protothétique dans l'ontologie: 314 sqq
 de type ontologique dans l'ontologie: 319 sqq
 directive d'introduction de la biconditionnelle dans S: 56
 directive de substitution
 dans S: 53
 dans SQ1: 83 sq
 dans SQ2: 87, 89 sq
 dans SQ3: 98
 dans S1: 204 sqq
 dans S3: 251
 dans S5: 260
 dans l'ontologie: 285 sq
 Domaine syntaxique: 363 sq
 Domaine sémantique: 364 sqq
 Dynamique constructive: 354 sq

 Élément: 388 sq, 397
 Epsilon: 268, 271 sqq, 279 sqq
 epsilon d'ordre supérieur: 323 sqq
 Equiformité: 50
 Equivalence
 première équivalence: 84, 126
 deuxième équivalence: 84, 126

Essence: 80 sq, 90
 Evaluation: 368 sqq
 Existence: 360 sq
 Explication terminologique: 26 sq
 Expression équivalente
 dans S: 51
 Expression équivalente quantifiée: 80
 Extension de concept: 16 sqq
 Extensionnalité
 principe d'extensionnalité: 174 sqq, 246 sqq, 256 sqq
 Extérieur: 424

 Foncteur: 122
 foncteur analogue: 125, 210
 identification des foncteurs binaires: 139 sq
 identification des foncteurs unaires: 137
 foncteur paramétré: 161 sqq
 Fonction: 122
 fonction dérivée: 208 sq
 fonction équivalente: 88, 100 sq
 fonction ontologique: 295 sq
 fonction paramétrée: 161 sqq
 fonction régulière: 122, 161
 Formalisme: 155 sq, 269 sq, 379 sq

 Généralisation: 87 sq
 Généralisation existentielle: 357
 Généralisation particulière: 359

 Ingrédient: 101, 388 sq
 Instantiation universelle: 358
 Interprétation: 339
 interprétation objectuelle: 340 sqq
 interprétation substitutionnelle: 344 sqq
 une interprétation pour l'ontologie: 362 sqq, 368 sqq
 Intuition: 31 sqq, 379

 Lieu: 81 sq

 Majorant: 428 sq
 Minorant: 428 sq
 Météologie: 24 sq, 377 sqq
 Métarégle: 231 sqq
 élimination de la conjonction sous le quantificateur: 234 sqq
 introduction de la conjonction sous le quantificateur: 237 sq
 élimination de la biconditionnelle: 238 sq
 distribution du quantificateur associé à la conjonction: 239 sq
 introduction de la conjonction hors du quantificateur: 241
 distribution du quantificateur associé à la conditionnelle: 241 sqq
 introduction de la conditionnelle: 245 sqq
 Métathéorème
 E (parité/thèse): 72 sqq, 86
 L (Lesniewski): 262

- P (thèse/pairité): 70 sqq, 86
- S (Sobocinski): 263
- T (pairité/tsutologie): 74 sq, 86
- V (tsutoiogie/pairité): 75 sqq, 86
- Mot: 81
 - découpage en mot: 205 sqq
 - mot fixe: 205 sqq
- Nom: 272
 - nom général: 272 sqq, 279
 - nom individuel: 272 sqq, 279
 - nom vide: 277, 279
 - sous-nom: 274
- Ontologie: 25, 37, 267 sqq, 378
- Organisation sémantique primitive: 365 sqq
- Organisations relationnelle et transformationnelle: 366 sqq
- Parenthème: 121
 - parenthème similsire: 122
- Parenthèse: 121, 124
 - parenthèse symétrique: 121
- Part: 388 sq, 397
- Prédicat: 295
- Proposition singulière: 267, 270 sqq, 279 sqq
 - évaluation de la proposition singulière: 368 sqq
- Propriété
 - propriété de pairité: 64 sqq
 - dans S: 64 sqq
 - dans SQ1: 86
 - dans SQ2: 93 sqq
- Protothétique: 25, 378
 - le système S1: 153 sqq
 - protothétique complète: 247 sqq
 - le système S2: 247 sqq
 - le système S3: 251 sqq
 - le système S4: 258 sq
 - le système S5: 259 sqq
 - protothétique calculable: 264
- Quantification: 79 sq, 339 sqq
 - quantification objectuelle (référentielle-standsrđ): 340 sqq
 - quantification substitutionnelle: 340, 344 sqq
 - quantification substitutionnelle/Leśniewski: 352 sqq
 - quantification et existence: 356 sqq
 - quantification particuiière: 359
 - quantification restreinte/non-restreinte: 358 sqq
- Quaterne: 141 sq
- Recouvrir: 425
- Règle d'inférence (voir directive)
- Relstion de trnsformation: 60 sqq

Sémantique: (voir catégorie sémantique)
Sous-quantificateur: 80 sqq
 délimiteur du sous-quantificsteur: 80
Sujet: 294 sq
Symbolisme de Leśniewski: 119 sq
Système équivalentiel
 le système S: 48 sqq
 le système quantifié SQ1: 79 sqq
 le système quantifié SQ2: 87 sqq
 le système quantifié SQ3: 98 sqq
 le système quantifié SQ4: 111 sqq
Terme: 82
 premier terme: 101, 126
 deuxième terme: 101, 126
Univers: 425 sq