

Observatoire cantonal de Neuchâtel - Université de Neuchâtel

Aspects métrologiques d'une fontaine continue à atomes froids

Thèse présentée à la Faculté des Sciences
pour l'obtention du grade de docteur ès sciences
par :

Alain Joyet
Physicien diplômé UNIL

acceptée le 21 mai 2003 par les membres du jury :

Prof. P. Thomann	Rapporteur
Prof. R. Dändliker	Corapporteur
Dr. N. Dimarcq	Corapporteur

Neuchâtel, octobre 2003

*A la mémoire de mon père,
à ma mère.*

IMPRIMATUR POUR LA THESE

ASPECTS METROLOGIQUES D'UNE FONTAINE CONTINUE A ATOMES FROIDS

de M. Alain Joyet

UNIVERSITE DE NEUCHÂTEL

FACULTE DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de
Neuchâtel, sur le rapport des membres du jury

MM. Pierre Thomann, René Daendliker et Noël Dimarcq (Paris),

autorise l'impression de la présente thèse.

Neuchâtel, le 23 mai 2003

Le doyen:

A handwritten signature in black ink, consisting of a stylized 'F' followed by a large, sweeping loop and ending in a horizontal stroke.

François Zwahlen

Table des matières

Résumé	1
Abstract	3
1 Introduction générale	5
1.1 Bref historique	5
1.2 Etalons de fréquence atomiques	5
1.2.1 Les étalons à jets thermiques	7
1.2.2 Caractérisation des performances des étalons de fréquence	8
1.2.3 Les fontaines atomiques	10
1.3 La fontaine continue	12
1.3.1 Pourquoi une fontaine continue?	12
1.3.2 Objectifs du projet	13
1.4 Plan du mémoire	14
2 Description de la fontaine continue	17
2.1 Introduction	17
2.2 Résonateur atomique	18
2.2.1 Enceinte à vide	18
2.2.2 Source du jet continu	20
2.2.3 Résonateur micro-onde	24
2.2.4 Détection du jet continu	26
2.3 Table optique	27
3 Balistique du jet atomique	33
3.1 Introduction	33
3.2 Grandeurs caractéristiques de la fontaine	34
3.2.1 Trajectoire et vitesses nominales du jet	34
3.2.2 Temps de vol nominaux	40
3.2.3 Temps de transit, d'interaction et de détection nominaux	42

3.3	Etude théorique de l'évolution du jet	45
3.3.1	Modèle analytique	46
3.3.2	Simulations Monte-Carlo	65
3.4	Analyse des résultats des simulations	72
3.4.1	Distribution de temps de vol du jet	75
3.4.2	Flux d'atomes dans la zone de détection	82
3.4.3	Distribution effective de vitesse longitudinale	96
3.4.4	Distributions effectives de temps de transit, d'interaction et de détection	111
3.5	Calcul de la densité moyenne du jet	117
3.5.1	Densité moyenne à l'abscisse x en fonction de l'altitude z	118
3.5.2	Densité moyenne en fonction de l'abscisse x	126
3.5.3	Densité moyenne au-dessus de la cavité	128
3.5.4	Détermination de n_0	131
3.6	Conclusion	132
4	Interaction micro-onde	135
4.1	Introduction	135
4.2	Cavité micro-onde coaxiale	136
4.2.1	Description de la cavité	136
4.2.2	Modes et fréquences propres de la cavité	138
4.2.3	Estimation du facteur de qualité non-chargé	151
4.2.4	Gradient de phase radial	152
4.2.5	Gradient de phase longitudinal	157
4.2.6	Mesures micro-onde sur la cavité	161
4.3	Franges de Ramsey	163
4.3.1	Etude théorique de la frange centrale	165
4.3.2	Franges de Ramsey expérimentales et ajustements théoriques	178
4.3.3	Oscillations de Rabi	188
4.4	Conclusion	200
5	Interrogation continue	205
5.1	Introduction	205
5.2	Schémas de modulation-démodulation	207
5.2.1	Expression du signal d'erreur	207
5.2.2	Modulation carrée de phase	211
5.2.3	Modulation sinusoïdale de fréquence	219
5.2.4	Modulation carrée de fréquence	223
5.3	Transitoires et modulation carrée de phase	232
5.3.1	Jet monocinétique et zones d'interaction finies	232

5.3.2	Jet non-monocinétique et zones d'interaction finies . .	241
5.4	Conclusion	246
6	Effet Dick continu et stabilité	249
6.1	Introduction	249
6.2	Effet Dick continu	251
6.2.1	Introduction	251
6.2.2	Dérivation de la formule de l'effet Dick continu dans le cas d'un jet monocinétique	252
6.2.3	Discussion du modèle	260
6.2.4	Réduction au cas pulsé	265
6.2.5	Simulations de l'effet Dick continu	266
6.2.6	Dérivation de la formule de l'effet Dick continu dans le cas d'un jet non-monocinétique	272
6.2.7	Simulations numériques	275
6.2.8	Effet de temps morts	287
6.3	Stabilité de fréquence de l'étalon	291
6.3.1	Introduction	291
6.3.2	Stabilité de fréquence théorique	292
6.3.3	Effet de la fréquence de modulation et de la tempéra- ture du jet	296
6.3.4	Estimation et mesure de la stabilité de fréquence de l'étalon	304
6.3.5	Simulation de la stabilité de fréquence visée de l'étalon	308
6.4	Conclusion	310
7	Aspects métrologiques	313
7.1	Introduction	313
7.2	Déplacement collisionnel	314
7.2.1	Introduction	314
7.2.2	Estimation du déplacement collisionnel	315
7.3	Déplacement radiatif	316
7.3.1	Introduction	316
7.3.2	Mesures du déplacement radiatif	317
7.3.3	Effet du piège rotatif sur le jet atomique	318
7.3.4	Tests optiques sur la trappe à lumière	334
7.3.5	Réalisation de la trappe à lumière rotative	349
7.3.6	Tests et équilibrage sous vide de la turbine	354
7.4	Déplacement Zeeman du 2 ^{ème} ordre	367
7.4.1	Introduction	367
7.4.2	Modèle théorique	369

7.4.3	Détermination des paramètres du champ résiduel . . .	377
7.4.4	Détermination de la position de la frange centrale . . .	380
7.4.5	Incertitude relative sur le déplacement Zeeman du 2 ^{ème} ordre de la transition d'horloge	381
7.5	Déplacements dû à la phase	385
7.5.1	Introduction	385
7.5.2	Déplacement de fréquence dû à un déphasage global du champ entre les deux zones d'interaction	386
7.5.3	Déplacement de fréquence dû à un gradient de phase radial sur la section des trous de passage de la cavité .	387
7.6	Conclusion	391
8	Conclusion générale	395
A	L'atome de césium 133	403
A.1	Structure des niveaux d'énergie	403
A.1.1	Structure de base	404
A.1.2	Structure fine	404
A.1.3	Structure hyperfine	405
A.1.4	Structure Zeeman	405
A.2	Transitions de la raie D ₂	409
A.2.1	Transitions dipolaires électriques	409
A.2.2	Probabilités de transition	409
B	Modèle de la densité surfacique	413
B.1	Nuage gaussien isotrope sans bord	413
B.1.1	Pulse de densité surfacique initiale	413
B.1.2	Densité surfacique initiale quelconque	414
B.2	Nuage gaussien isotrope avec bord	417
B.2.1	Nuage gaussien tronqué une fois	417
B.2.2	Nuage gaussien tronqué deux fois	421
C	Distribution des positions transverses	439
C.1	Distribution approchée	439
C.2	Distribution simplifiée utilisée dans les calculs	441
D	Coefficients de Fourier	443
D.1	Développement général	443
D.2	Cas des trois types de modulation	445
D.2.1	Modulation carrée de phase	445
D.2.2	Modulation sinusoïdale de fréquence	447

D.2.3	Modulation carrée de fréquence	448
D.3	Expression des coefficients de Fourier de $a(t, T)$ en fonction de ceux de la fonction de démodulation $d(t)$	449
E	Equations de Bloch	451
E.1	Equations de Bloch et spin fictif	451
E.1.1	Cas d'un champ magnétique constant	453
E.2	Probabilité de transition	455
F	Symboles et constantes physiques	457
	Publications	475
	Bibliographie	481
	Remerciements	483

Résumé

Dans ce travail, nous étudions certains aspects métrologiques particuliers à la fontaine continue à atomes froids de césium développée à l'Observatoire cantonal de Neuchâtel en collaboration avec l'Office fédéral de métrologie et d'accréditation.

Cet étalon de fréquence est basé sur un jet continu d'atomes de césium froids et lents. Par rapport aux fontaines pulsées, le fonctionnement continu de la fontaine apporte certains avantages. La faible densité atomique et les températures élevées du jet ont pour conséquence que le déplacement de la fréquence de résonance atomique, dû aux collisions entre atomes froids, est fortement réduit et devient négligeable. Un second avantage est la suppression de la dégradation de la stabilité de fréquence due au bruit de phase de l'oscillateur local. La stabilité de fréquence est ainsi limitée seulement par le bruit de grenaille du jet atomique et même un oscillateur à quartz du commerce devrait être suffisant pour atteindre la stabilité ultime à court terme.

Le fonctionnement continu de la fontaine a également certains inconvénients. Les trois principaux sont étudiés dans ce travail. Comme les lasers de refroidissement doivent rester enclanchés en permanence, la lumière de fluorescence de la source peut induire un déplacement de fréquence. Afin de réduire cet effet à un niveau négligeable, nous avons réalisé une trappe à lumière rotative qui empêche la lumière de fluorescence d'atteindre la zone d'interrogation. Le second point concerne la détermination de l'incertitude sur le déplacement de fréquence dû au champ magnétique statique. Les atomes ne peuvent pas être lancés à différentes hauteurs, afin de rendre la mesure de la carte du champ C plus aisée. Cependant, un modèle théorique permet d'estimer cette incertitude et ainsi de la garder sous contrôle. Le troisième inconvénient discuté est lié au fait que les atomes traversent la cavité micro-onde en deux endroits différents de leur trajectoire parabolique. La solution proposée, et réalisée, est un retournement de la cavité qui permet ainsi d'annuler une éventuelle différence de phase. Le déplacement de fréquence dû à un gradient de phase radial du champ a été évalué et est négligeable.

Le budget d'incertitude préliminaire montre que ces différents déplace-

ments de fréquence sont sous contrôle afin d'atteindre une exactitude de fréquence au niveau de 10^{-15} . Quant à la stabilité de fréquence actuelle de la fontaine continue, elle a été mesurée à $2.5 \cdot 10^{-13} \tau^{-1/2}$.

Abstract

In this work, we study some metrological aspects that are specific to the cold cesium continuous fountain developed at the Observatoire cantonal de Neuchâtel in collaboration with the Swiss Federal Office of Metrology and Accreditation.

This frequency standard is based on a continuous beam of cold and slow cesium atoms. In comparison with the pulsed fountains, the continuous operation of the fountain bears several advantages in comparison with the pulsed fountains. As a consequence of the low atomic density and higher beam temperatures, the shift of the atomic resonance frequency due to the collisions between cold atoms is strongly reduced and becomes negligible. A second advantage is the suppression of the degradation of the frequency stability due to the phase noise of the local oscillator. The frequency stability is therefore only limited by the atomic shot-noise and even a commercially available quartz should be sufficient to reach ultimate short term stability.

The continuous operation of the fountain has also some disadvantages, the main three are addressed in this work. As the cooling lasers must remain on permanently, fluorescence light from the source can induce a frequency shift. In order to reduce this effect to a negligible level, we have developed a rotating light-trap which prevents the fluorescence light from reaching the interrogation region. A second point is the determination of the uncertainty on the frequency shift due the static magnetic field. Atoms cannot be launched to different heights, making the mapping of the C-field more awkward. A theoretical model allows, however, to estimate the uncertainty and thus to keep it under control. The third drawback discussed is related to the fact that the atoms cross the microwave cavity in two different parts on their way up and down. The proposed and realized solution is a cavity reversal through which a potential phase difference can be cancelled. The frequency shift due to a radial phase gradient of the field has been evaluated and is negligible.

The preliminary uncertainty budget shows that these different frequency shifts are under control in order to reach a frequency accuracy at the level of 10^{-15} . As for the present frequency stability of the continuous fountain, it has been measured to be $2.5 \cdot 10^{-13} \tau^{-1/2}$.

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Bref historique

La mesure du temps a été longtemps une affaire d'astronomes qui le définissaient par l'observation du mouvement des astres dans le ciel nocturne. Dans la première moitié du XX^e siècle, avec l'apparition des premiers oscillateurs à quartz, la mesure du temps se ramène à une mesure de fréquence. Cette nouvelle façon de mesurer le temps fait faire un bond dans la précision de cette mesure par rapport aux performances des horloges mécaniques. L'ère moderne de la mesure du temps commence au début des années 50, avec la mise au point des premières horloges atomiques basées sur une référence de fréquence atomique qui fait faire un saut de plusieurs ordres de grandeur dans la précision de la mesure du temps. Ces horloges étaient tellement plus performantes, par rapport aux meilleures horloges mécaniques ou à quartz, que l'on a décidé en 1967 de changer la définition de la seconde, jusqu'ici basée sur une définition astronomique. Ainsi, la seconde est actuellement définie comme la durée de 9 192 631 770 périodes d'une transition hyperfréquence de l'atome de césium 133 (cf annexe A). A l'heure actuelle, l'unité de temps du Système International (S.I.) est la grandeur physique que l'on peut reproduire avec la plus grande précision.

1.2 Etalons de fréquence atomiques

Un étalon de fréquence atomique passif est constitué principalement d'un résonateur atomique et d'un oscillateur à quartz dont la fréquence de sortie est asservie sur la fréquence de résonance atomique de référence caractéristique du résonateur. La fréquence du signal délivré par l'oscillateur à quartz n'est pas bien définie, car elle dépend de la structure complexe de ce type

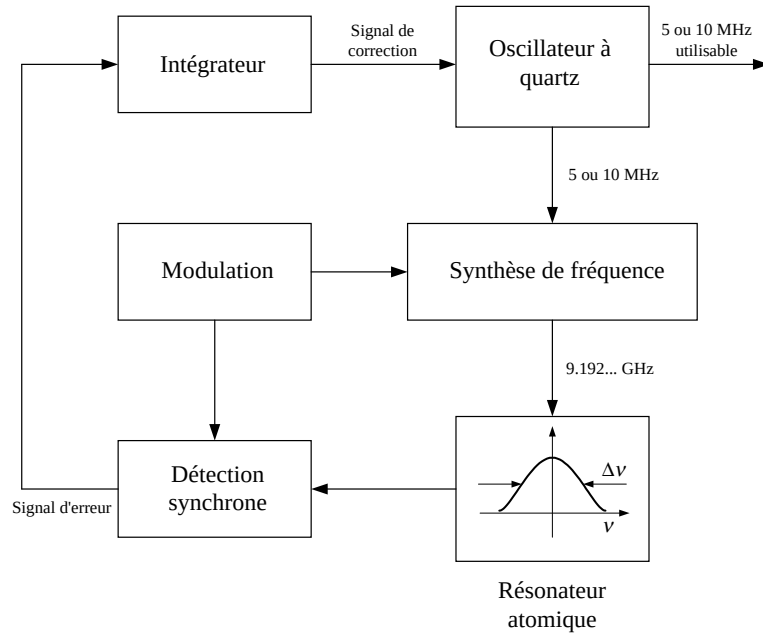


Fig. 1.1: Schéma-bloc du principe de fonctionnement d'un étalon de fréquence.

de composants. De plus, elle varie généralement d'un oscillateur à l'autre et peut changer avec le temps pour des raisons de variation de l'environnement extérieur ou de vieillissement des composants. La fréquence de résonance des atomes est par contre très stable et parfaitement reproductible, pour autant qu'ils soient placés dans les mêmes conditions extérieures. Ainsi, les propriétés d'universalité des atomes sont transférées directement à l'oscillateur à quartz lorsque celui-ci est asservi sur la résonance atomique. Il délivre alors une fréquence qui est stable et reproductible à long terme. Généralement, la fréquence de sortie utile des étalons de fréquence est de 5 MHz ou 10 MHz.

Asservissement de la fréquence de l'oscillateur à quartz

La Fig. 1.1 illustre le principe de fonctionnement d'un étalon de fréquence passif. L'asservissement de la fréquence de l'oscillateur à quartz sur la fréquence de la référence atomique est réalisée de la manière suivante. Le signal de sortie de l'oscillateur à quartz est multiplié en fréquence et mélangé avec celui d'un synthétiseur pour atteindre une fréquence proche de la fréquence de résonance atomique. Ce signal RF est ensuite modulé en fréquence pour interroger le discriminateur de fréquence (résonateur atomique) de part et d'autre de la fréquence de résonance. Un détecteur synchrone démodule la

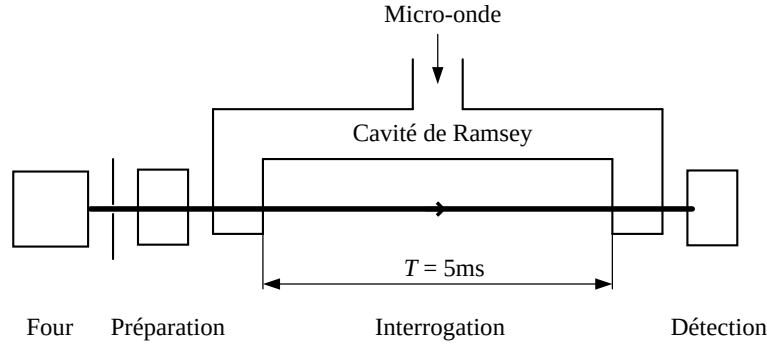


Fig. 1.2: Schéma de principe d'un résonateur à jet thermique.

réponse du résonateur et fournit un signal d'erreur qui, après avoir été amplifié, est appliqué à l'oscillateur à quartz pour corriger sa fréquence.

1.2.1 Les étalons à jets thermiques

Le résonateur atomique est le coeur d'un étalon de fréquence. C'est de lui que vont dépendre principalement les performances en fréquence de l'étalon. Nous nous restreignons ici aux étalons primaires de fréquence utilisant le césium comme atome de référence. Ce sont ces étalons qui sont capables de réaliser la définition de la seconde.

Principe de fonctionnement

La Fig. 1.2 représente le principe de fonctionnement d'un résonateur atomique à jet thermique. Dans ce type de résonateur, les atomes de césium sont éjectés d'un four sous la forme d'un jet horizontal à des vitesses de l'ordre de 200 m/s. Un collimateur permet de diminuer la divergence du jet.

A la sortie du four, on procède à la préparation des  tats des atomes de césium. A l'équilibre thermique, les deux  tats hyperfins fondamentaux $|F = 3\rangle$ et $|F = 4\rangle$ du niveau $6^2S_{1/2}$ de l'atome de césium sont peuplés de manière presque égale (pour les niveaux d'énergie de l'atome de césium cf. annexe A). Il faut alors créer une différence de population entre ces deux  tats. Ceci a longtemps été réalisé par déflexion magnétique des atomes de césium dans un champ fortement inhomogène (sélection d' tat). Une technique plus récente consiste à pomper optiquement les atomes d'un état fondamental vers l'autre.

Ensuite, les atomes traversent la région d'interrogation où ils effectuent la transition d'horloge, c.- -d. qu'ils passent de l' tat $|F = 3\rangle$ à l' tat $|F = 4\rangle$ ou inversement. La manière habituelle de provoquer cette transition utilise la

méthode des deux zones de champ magnétique hyperfréquence spatialement séparées, proposée par Ramsey en 1949 [Ram49]. On utilise pour cela une cavité micro-onde en forme de U, appelée *cavité de Ramsey*. Si la fréquence du champ RF correspond exactement à la fréquence de la transition d'horloge, la probabilité de transition est maximum et tous les atomes passent d'un état à l'autre. Evidemment, toute la zone d'interrogation est entourée d'un blindage magnétique pour réduire les perturbations magnétiques extérieures.

A la sortie de la cavité de Ramsey, on détecte dans quel état se trouvent les atomes de césium. Cette détection peut se faire par déflexion magnétique (sélection d'état) et mesure du courant ionique provoqué par le flux d'atomes sur un détecteur à ionisation de surface, ou par détection optique (mesure de la lumière de fluorescence). Le signal de résonance est formé d'un ensemble de franges d'interférences, les *franges de Ramsey*, qui reposent sur un fond plus large dénommé le *piédestal de Rabi* (cf. par exemple la Fig. 4.15). La fréquence de l'oscillateur à quartz est asservie sur la frange centrale de telle manière que le signal du résonateur soit maximal, ce qui implique que cette fréquence correspond exactement à celle de la transition d'horloge des atomes de césium.

La largeur à mi-hauteur de la frange centrale est inversement proportionnelle au temps de transit T entre les deux bras de la cavité :

$$\Delta\nu_{1/2} \sim \frac{1}{2T} \quad (1.1)$$

La largeur de la frange centrale est une grandeur qui est importante en ce qui concerne les performances de l'étalon.

1.2.2 Caractérisation des performances des étalons de fréquence

Les étalons de fréquence sont caractérisés principalement par deux grandeurs : leur exactitude et leur stabilité relatives de fréquence.

Exactitude

L'*exactitude relative de fréquence* mesure le degré avec lequel l'étalon est capable de reproduire la fréquence de la transition d'horloge au plus près de sa définition. Dans un étalon, la fréquence de la transition d'horloge est perturbée, entre autres, par la présence de champs magnétiques, par des imperfections du champ magnétique hyperfréquence d'interrogation ou par la vitesse de déplacement des atomes. Chacune de ces perturbations va créer un déplacement de cette fréquence qui est affecté d'une certaine incertitude,

due à sa mesure ou à son estimation. L'exactitude s'exprime alors comme la racine carrée de la somme quadratique des différentes incertitudes relatives. A titre d'exemple, dans un étalon primaire à jet thermique, l'exactitude relative de fréquence est typiquement de l'ordre de quelques 10^{-14} .

Stabilité

La *stabilité relative de fréquence* mesure la capacité de l'étalon à reproduire la même fréquence sur un intervalle de temps τ donné. Elle est mesurée dans le domaine temporel par l'écart-type à deux échantillons $\sigma_y(\tau)$ (*variance de Allan*) sur les périodes de battement entre un signal issu d'un Maser à Hydrogène et celui de l'étalon à évaluer.

A court terme ($\tau \lesssim 1$), la stabilité est directement reliée à la stabilité de l'oscillateur à quartz. A moyen terme ($1\text{ s} \lesssim \tau \lesssim 1000\text{ s}$), elle dépend des caractéristiques du signal du résonateur et peut s'exprimer sous la forme :

$$\sigma_y(\tau) \sim \frac{1}{Q_{\text{at}} (S/N)} \tau^{-1/2} \quad (1.2)$$

où S/N est le rapport signal-sur-bruit du signal du résonateur et Q_{at} est le facteur de qualité de la résonance atomique qui est défini par :

$$Q_{\text{at}} = \frac{\nu_0}{\Delta\nu_{1/2}} \quad (1.3)$$

avec ν_0 la fréquence de la transition d'horloge. On remarque donc, dans (1.2), que plus la raie de résonance du résonateur est étroite (Q_{at} élevé) et le rapport signal-sur-bruit élevé, plus la stabilité sera bonne. A long terme, la stabilité dépend des fluctuations de l'environnement (température, perturbations magnétiques, etc.) et du vieillissement des composants du résonateur.

Les performances d'un étalon résultent d'un compromis entre l'exactitude et la stabilité. En effet, pour augmenter l'exactitude, il faut réduire la largeur de la résonance atomique, ce qui revient à accroître la distance entre les deux bras de la cavité. A cause de la divergence du jet, cette augmentation de longueur de la cavité produit une diminution du nombre d'atomes détectés et donc du rapport signal-sur-bruit. En pratique, on ne peut guère excéder des dimensions de l'ordre du mètre pour conserver la maîtrise de l'environnement des atomes (champ magnétique par ex.) et un rapport signal-sur-bruit acceptable.

Dans un étalon primaire à jet thermique, pour une distance typique de vol libre entre les deux bras de la cavité de 1 m, et une vitesse moyenne des atomes de 200 m/s, le temps de transit est de $T = 5\text{ ms}$ et la largeur de la frange centrale est limitée à $\Delta\nu_{1/2} \simeq 100\text{ Hz}$, ce qui conduit à un facteur

de qualité de $Q_{\text{at}} \simeq 10^8$. On atteint typiquement avec ce type d'étalon une exactitude de l'ordre de 10^{-14} et une stabilité de quelques $10^{-13} \tau^{-1/2}$.

Pour réduire la largeur de la résonance, on peut aussi réduire la vitesse des atomes. Dans un jet thermique, il est difficile de sélectionner les atomes les plus lents sans trop diminuer le rapport signal-sur-bruit. Une autre possibilité consiste à utiliser la gravité terrestre pour augmenter le temps de transit des atomes. L'idée de la construction d'un étalon de fréquence en géométrie de fontaine fut proposée en 1956 par Zacharias [Ram56]. L'expérience utilisait un jet vertical pour sélectionner les atomes les plus lents. Malheureusement, elle ne donna pas de résultats car les atomes lents étaient peu nombreux et étaient éjectés du jet par collision avec des atomes plus rapides. Cependant, cet idée fut reprise plus tard après le développement du refroidissement laser des atomes de césium.

1.2.3 Les fontaines atomiques

Avec l'apparition des techniques de refroidissement d'atomes par laser au milieu des années 80, l'idée de Zacharias put être effectivement mise en pratique avec succès. Au cours des années 90, le premier étalon primaire de fréquence fonctionnant sur ce principe fut opérationnel [CGS⁺96]. Son principe de fonctionnement est illustré dans la Fig. 1.3. Le fonctionnement de ce dispositif est séquentiel. A chaque cycle, environ 10^8 atomes sont capturés dans un piège magnéto-optique. Ensuite, le nuage atomique est lancé verticalement à une vitesse d'environ 3-4 m/s. Du fait de la gravité terrestre, il va effectuer un vol parabolique le long d'un axe vertical et traverser à deux reprises la même cavité micro-onde. La première fois lors de la montée et la seconde lors de la descente. Les atomes subissent ainsi une interrogation de Ramsey. Lorsqu'ils atteignent la zone de détection, on mesure le signal de résonance par détection optique (lumière de fluorescence). Grâce à leur mouvement parabolique, les atomes passent la majorité du temps au-dessus de la cavité. De cette manière, le temps de transit entre les deux interactions micro-onde est notablement augmenté par rapport à un étalon primaire à jet thermique. Typiquement, les atomes sont lancés environ 30 cm au-dessus de la cavité. Le temps de transit atteint alors $T = 0.5$ s, ce qui correspond à une largeur de la frange centrale de $\Delta\nu_{1/2} \simeq 1$ Hz. Le facteur de qualité de la résonance atomique est donc en gros deux ordres de grandeur supérieur à celui obtenu avec un jet thermique. Ce type d'étalon primaire de fréquence est actuellement le plus performant, son exactitude se situe autour de 10^{-15} et sa stabilité est de l'ordre de $10^{-13} \tau^{-1/2}$. Actuellement, plusieurs fontaines atomiques sont en cours de développement ou en opération dans les divers laboratoires de métrologie.

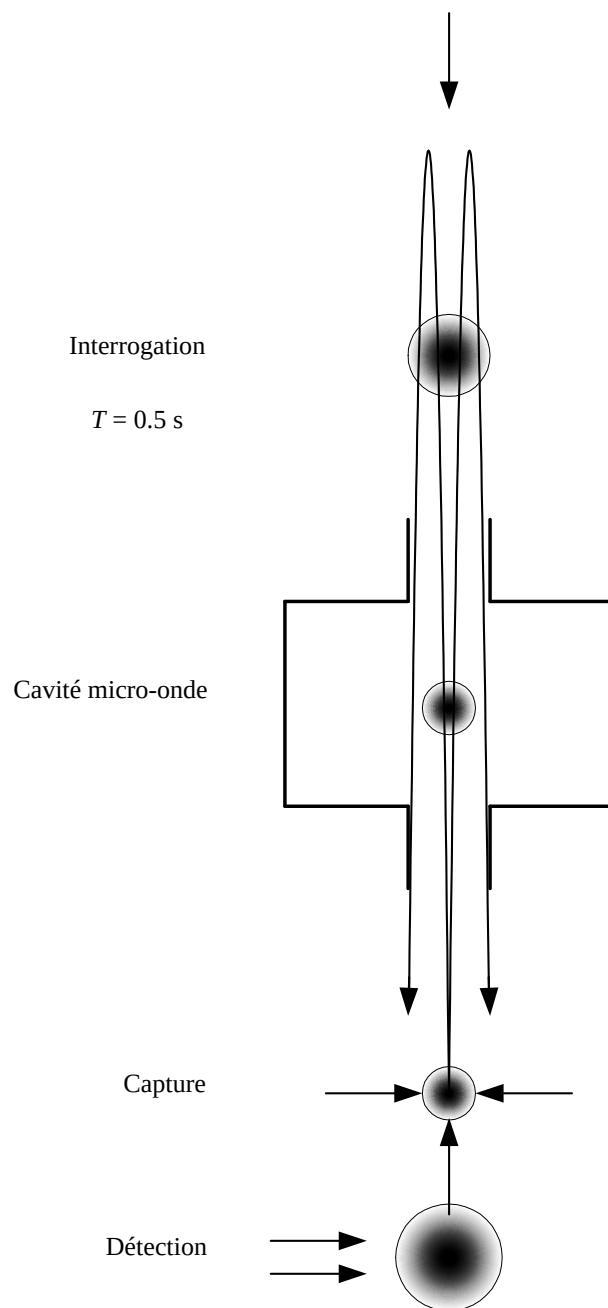


Fig. 1.3: Schéma de principe d'une fontaine atomique pulsée.

Néanmoins, ce type d'étalon souffre de deux inconvénients majeurs liés à son fonctionnement pulsé. En effet, pour obtenir un rapport signal-sur-bruit suffisant à la détection, la densité du nuage d'atomes froids de césium doit être suffisamment élevée. La conséquence en est que les collisions entre atomes froids à l'intérieur du nuage sont importantes et engendrent un déplacement de la fréquence de transition d'horloge qui n'est pas négligeable et dont l'incertitude est difficile à estimer précisément, ce qui limite l'exactitude de ce type d'étalon. Pour que ce déplacement de fréquence ne limite pas l'exactitude de la fontaine, il faut être capable de mesurer la densité moyenne du nuage d'atomes froids au % près, ce qui est difficile et nécessite des méthodes de mesure sophistiquées.

Le second inconvénient réside dans le fait que les atomes sont interrogés de manière cyclique et qu'il n'est possible de corriger les fluctuations de fréquence de l'oscillateur local qu'au bout d'un cycle qui dure environ 1 s. Or, il a été montré que le fait d'interroger un étalon passif de manière pulsée dégrade sa stabilité de fréquence en réinjectant une partie du bruit de phase de l'oscillateur local dans la boucle d'asservissement. Cet effet, appelé effet Dick, limite la stabilité de fréquence atteignable avec ce type d'étalon si on utilise un oscillateur à quartz conventionnel. Pour y remédier, il faut recourir à des oscillateurs ultra-stables pour interroger les atomes, ce qui apporte une complication technologique importante.

1.3 La fontaine continue

1.3.1 Pourquoi une fontaine continue ?

La fontaine continue, qui fait l'objet de ce mémoire, est une alternative intéressante aux fontaines atomiques traditionnelles qui opèrent en mode pulsé. Tout d'abord, une diversité des principes de fonctionnement des étalons primaires de fréquence est souhaitable, car par comparaison de fréquence entre divers types d'étalon primaires, elle peut permettre de faire apparaître des déplacements de fréquence systématiques liés à une conception particulière qui ne pourraient pas être détectés autrement.

Ensuite, la fontaine continue devrait apporter plusieurs avantages par rapport aux fontaines pulsées. Premièrement, la densité d'atomes de césium dans le jet est nettement plus faible que celle dans le nuage d'atomes froids d'une fontaine pulsée. Ceci devrait conduire à un déplacement de fréquence, dû aux collisions entre atomes froids, qui est négligeable et qui ne limite plus l'exactitude de l'étalon.

Deuxièmement, l'interrogation des atomes s'effectue de manière continue

comme dans un étalon à jet thermique. Il en résulte que l'effet de dégradation de la stabilité dû à l'interrogation pulsée devrait disparaître, ou tout du moins être négligeable. Ainsi, les exigences concernant le bruit de phase de l'oscillateur local seraient moins sévères. On pourrait par conséquent utiliser un oscillateur à quartz conventionnel comme oscillateur local, ce qui est une simplification, sans dégrader la stabilité limite atteignable avec ce type d'étalon.

Ces raisons ont motivé principalement le choix de développer une fontaine continue dans le cadre du mandat que l'Observatoire cantonal de Neuchâtel a reçu, en 1990, de l'Office fédéral de métrologie et d'accréditation à Wabern pour la réalisation d'un étalon primaire de fréquence.

1.3.2 Objectifs du projet

Les objectifs du projet sont de réaliser un étalon primaire de fréquence basé sur une géométrie de fontaine continue et de démontrer qu'il atteint les performances visées, soit une exactitude de 10^{-15} et une stabilité de $7 \cdot 10^{-14} \tau^{-1/2}$. Le projet a débuté en 1991 par le développement d'un piège magnéto-optique de démonstration pour l'étude des processus de capture ainsi que des mécanismes d'entraînement possibles du nuage d'atomes froids avec l'objectif d'obtenir un jet continu d'atomes de césium lents. Cette expérience de première génération a conduit à des travaux aussi bien expérimentaux que théoriques [DT92, DST⁺, SMT92, SDT95] et à la rédaction de deux mémoires de thèse, l'un plutôt expérimental [Dud96] et l'autre plutôt théorique [Sag96].

Ensuite, une seconde génération de l'expérience de démonstration a eu pour but d'augmenter le flux d'atomes froids extrait du piège magnéto-optique et de mettre en évidence des mécanismes d'extraction plus performants. Ceci afin d'obtenir un jet continu d'atomes de césium froids et lents, dont la vitesse de lancement puisse être bien contrôlée et dont le flux soit suffisamment élevé pour être compatible avec la réalisation d'une fontaine continue en tant qu'étalon primaire de fréquence. Ce développement a donné lieu à plusieurs travaux [BFT99, BFJ⁺99] et à la rédaction d'un mémoire de thèse [Ber00].

Les résultats de ces travaux et l'expérience acquise ont permis de construire la source du jet continu d'atomes de césium froids et lents utilisée dans la fontaine continue. La phase de conception de la fontaine continue a débuté en 1997 parallèlement à divers développements annexes dont la trappe à lumière rotative et le refroidissement transverse du jet continu. Les premières franges de Ramsey ont été obtenues en 2000 sans le refroidissement transverse 2D du jet et sans la trappe à lumière. Une fois le refroidissement transverse 2D

du jet implémenté dans la fontaine continue, le flux d'atomes détecté était suffisant pour réaliser les premières mesures métrologiques de démonstration.

Le travail présenté dans ce mémoire est plutôt à caractère théorique. Il concerne l'étude de quelques aspects métrologiques spécifiques à la fontaine continue. Son objectif principal est de montrer que les avantages métrologiques avancés (déplacement collisionnel et effet Dick négligeables) sont effectivement atteignables et que le problème du déplacement radiatif, inhérent au mode de fonctionnement de la fontaine continue, peut être maîtrisé à un niveau qui ne limite plus ni l'exactitude, ni la stabilité de l'étalon.

1.4 Plan du mémoire

La structure de ce mémoire est organisée en sept chapitres principaux :

Le *chapitre 1* rappelle brièvement quelques généralités sur les étalons primaires de fréquence et fixe les objectifs de ce projet.

Le *chapitre 2* contient la description de la fontaine continue. Nous décrivons brièvement la table optique et un peu plus en détail les différentes parties constituant le résonateur atomique (enceinte à vide, source du jet continu d'atomes froids et lents de césium, cavité micro-onde et détection).

Le *chapitre 3* est consacré à la balistique du jet atomique. Nous analysons la dépendance du flux d'atomes qui atteint la détection en fonction des divers paramètres du jet. Nous en déduisons notamment une estimation des températures longitudinales et transverses du jet, ainsi que les différentes distributions de vitesse et de temps de transit. Finalement, nous évaluons la densité moyenne du jet utile au-dessus de la cavité pour être en mesure d'estimer le déplacement de fréquence dû aux collisions froides.

Le *chapitre 4* aborde l'interaction micro-onde. Nous y décrivons la cavité micro-onde coaxiale utilisée et nous déterminons ses modes et fréquences propres. Nous estimons également la variation spatiale de la phase du champ magnétique hyperfréquence afin d'évaluer le déplacement de fréquence qui pourrait en résulter. Dans une deuxième partie, nous effectuons une étude théorique des franges de Ramsey pour un profil de champ magnétique sinusoïdal. Des mesures expérimentales, nous en déduisons la température longitudinale du jet et nous mettons en évidence l'effet de la lumière de fluorescence sur les franges de Ramsey ainsi que sur les oscillations de Rabi.

Dans le *chapitre 5*, nous étudions théoriquement différents schémas d'interrogation. Nous déterminons notamment les paramètres qui optimisent le signal d'erreur pour trois types de modulation : la modulation carrée de phase, la modulation sinusoïdale de fréquence et la modulation carrée de fréquence. Dans une seconde partie, nous faisons une étude des transitoires apparaissant dans la modulation carrée de phase. Nous considérons les cas d'un profil de champ constant et sinusoïdal ainsi que ceux d'un jet monocinétique et avec une température longitudinale non-nulle.

Le *chapitre 6* est une étude assez générale de la stabilité de fréquence atteignable avec la fontaine continue. Nous y développons une étude théorique de l'effet Dick dans un résonateur de Ramsey. Nous montrons notamment que, dans un cas idéalisé, il est possible de supprimer totalement la dégradation de stabilité que cet effet engendre si l'on choisit correctement la fréquence de modulation. Et que cette suppression n'est pas possible dans une fontaine atomique pulsée. Nous estimons ensuite la dégradation de stabilité résiduelle en considérant les écarts par rapport au cas idéal. Dans une deuxième partie, nous faisons une étude théorique de l'influence des différents schémas d'interrogation sur la stabilité de fréquence et nous en déduisons la valeur des paramètres qui l'optimisent. Puis, nous évaluons la stabilité théorique de la fontaine continue à partir de la mesure du flux atomique et nous la comparons à la valeur obtenue expérimentalement.

Le *chapitre 7*, qui est le dernier chapitre, est consacré entièrement à quelques aspects métrologiques particuliers à la fontaine continue. Nous estimons le déplacement de fréquence dû aux collisions froides dans le jet et montrons qu'il est négligeable. Ensuite, le problème du déplacement radiatif dû à la lumière de fluorescence de la source est abordé. Nous décrivons en détail la trappe à lumière rotative que nous avons développée pour éliminer ce problème. Nous discutons encore de l'inhomogénéité du champ magnétique et de sa conséquence sur l'estimation de l'incertitude du déplacement Zeeman du 2^{ème} ordre. Nous développons une méthode, basée sur la mesure de l'enveloppe des franges de Ramsey, qui nous permet de quantifier le champ résiduel et d'évaluer cette incertitude. Finalement, nous estimons l'importance des déplacements de fréquence dus à un déphasage du champ micro-onde et présentons les moyens développés pour pouvoir les mesurer expérimentalement.

A la suite de ces sept chapitres, nous avons regroupé des informations plus spécifiques dans six annexes :

L'*annexe A* regroupe quelques propriétés physiques de l'atome de césium 133

qui entrent en jeu dans les étalons primaires (structure des niveaux d'énergie, effet Zeeman, probabilités de transition, etc.)

L'*annexe B* développe en détail le modèle de la densité surfacique utilisé dans le chapitre 3. Il étudie notamment l'effet des diaphragmes sur l'évolution transverse du jet atomique.

L'*annexe C* établit la distribution simplifiée des positions transverses des trajectoires atomiques utilisée dans le chapitre 4.

Dans l'*annexe D*, nous avons reporté le calcul des coefficients de Fourier de la partie déterministe du signal d'erreur. Ces coefficients sont utilisés dans les chapitres 5 et 6.

L'*annexe E* présente brièvement les équations de Bloch magnétiques et l'expression des matrices de rotation du spin fictif dans la sphère de Bloch. Elles sont utilisées dans le calcul des transitoires de la modulation carrée de phase au chapitre 5.

L'*annexe F* est la dernière annexe qui regroupe les constantes physiques et les symboles utilisés dans ce travail.

Chapitre 2

Description de la fontaine continue

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous décrivons les principaux éléments constituant la fontaine continue. Le but de cette description se borne à permettre la compréhension du principe de fonctionnement de la fontaine. C'est pourquoi, nous n'entrerons pas dans les détails de conception. Bien qu'actuellement la fontaine continue soit une expérience de laboratoire, elle est en fait un étalon de mesure appelé à durer, contrairement à une expérience de laboratoire usuelle. Par conséquent, toute la conception de la fontaine est bien documentée et il n'est pas nécessaire de la retranscrire ici en détail. La Fig. 2.1 montre une vue de côté de la fontaine continue avec, au premier plan, la table optique et, derrière, le résonateur atomique.

La table optique a une surface de $150 \times 120 \text{ cm}^2$. Elle est montée sur quatre verins pneumatiques pour l'isoler des vibrations du sol. Afin de protéger de la poussière toute l'optique qui se trouve sur la table, et pour maintenir une température constante et éviter la convection thermique autour des divers éléments, on a installé tout autour de la table une protection avec des bâches en plastique transparent. Les divers éléments présents sur la table optique sont brièvement présentés dans la sous-section 2.3.

Sur la Fig. 2.1, on ne distingue que le blindage extérieur du résonateur atomique. Les différents éléments qui le constituent sont décrits dans la sous-section 2.2. Il est relativement important, puisque ses dimensions extérieures sont une hauteur d'environ 190 cm pour une section rectangulaire de $60 \text{ cm} \times 74 \text{ cm}$. On se rend ainsi compte que ce type d'étalon de fréquence est assez volumineux, il occupe tout de même une pièce entière avec l'électronique

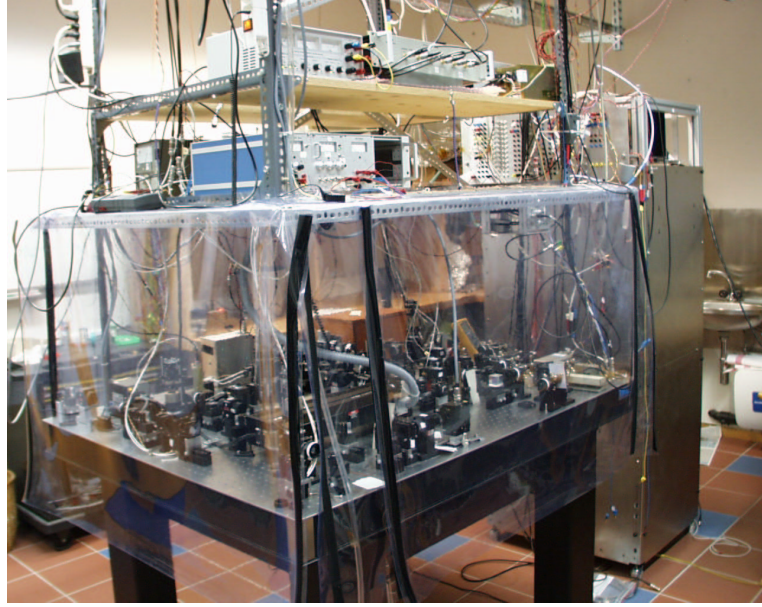


Fig. 2.1: Vue de côté de la fontaine continue. Au premier plan apparaît la table optique avec les bâches de protection et, derrière, le blindage extérieur du résonateur atomique.

d'asservissement des lasers.

2.2 Résonateur atomique

Le résonateur atomique est le coeur de l'horloge, puisque c'est là que l'on sonde la fréquence de résonance des atomes de césium. La Fig. 2.2 montre une coupe longitudinale du résonateur de la fontaine continue. On peut séparer le résonateur en deux grandes parties principales : la cuve inférieure (1) et le cylindre supérieur (2). La cuve inférieure regroupe la source du jet continu d'atomes froids et lents ainsi que la détection du jet atomique, tandis que le cylindre supérieur comprend la cavité micro-onde et la génération du champ C.

2.2.1 Enceinte à vide

Toutes les pièces qui constituent l'enceinte à vide, à savoir la cuve, le cylindre, les brides de transition inférieure (3), centrale (4), et supérieure (5), sont réalisées en alliage d'aluminium du type *AVIONAL AA 2007*. La cuve rectangulaire inférieure a été usinée entièrement à partir d'un bloc de matière par une machine à commande numérique à cinq axes. Ses dimensions extérieures approximatives sont une hauteur de 44 cm et une section carrée

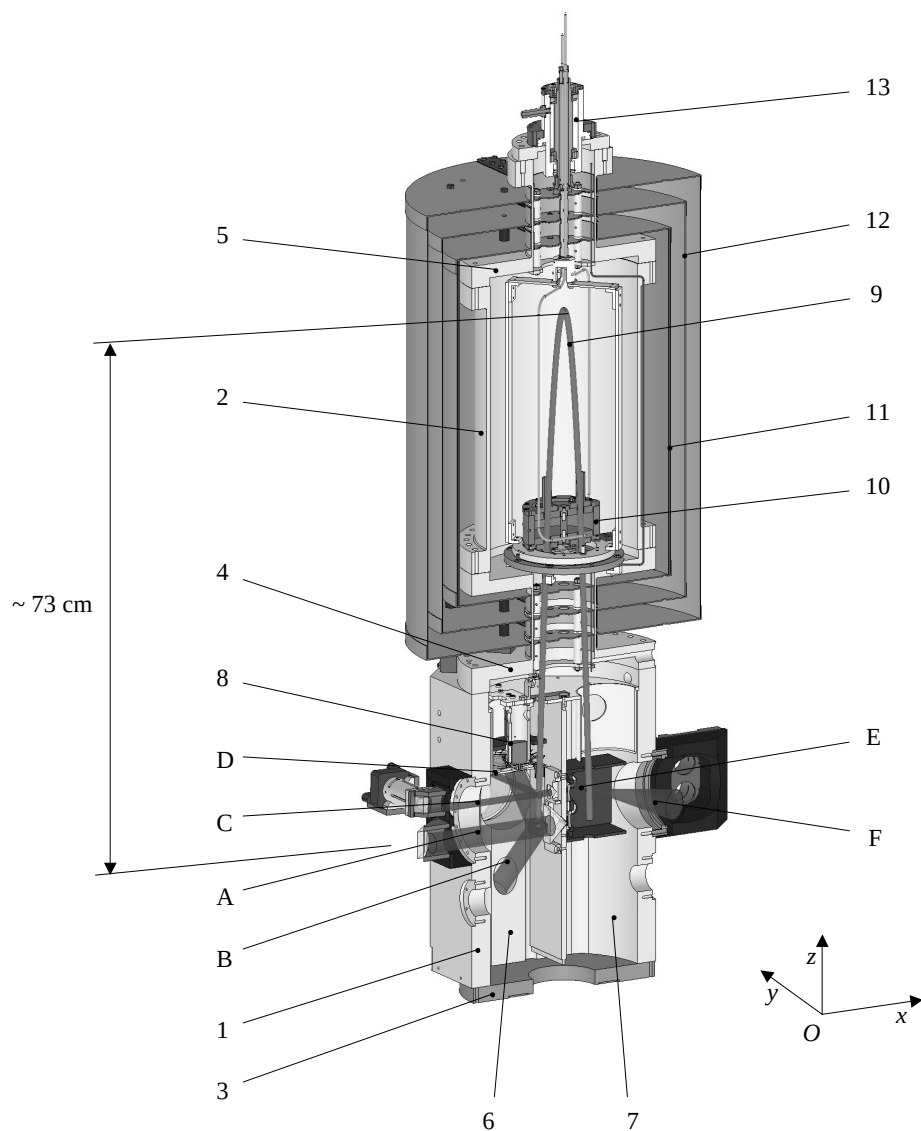


Fig. 2.2: Coupe longitudinale du résonateur de la fontaine continue. 1 : cuve inférieure ; 2 : cylindre supérieur ; 3, 4 et 5 : bride de transition inférieure, centrale et supérieure ; 6 : chambre de la source du jet continu ; 7 : chambre de la détection ; 8 : trappe à lumière rotative ; 9 : jet atomique ; 10 : cavité micro-onde ; 11 : solénoïde du champ C ; 12 : blindages magnétiques cylindriques coaxiaux ; 13 : traversée tournante ; A : faisceaux de refroidissement selon x ; B : faisceaux de refroidissement dans le plan Oyz ; C et D : faisceaux de refroidissement transverse selon x et y ; E : faisceau sonde ; F : lumière de fluorescence.

de 31 cm de côté. Elle est percée de plusieurs ouvertures circulaires pour le montage de hublots ou de traversées électriques. Le cylindre supérieur à un diamètre intérieur de 25 cm pour une hauteur de 43 cm. Les joints entre ces différentes pièces (cuve, cylindre et brides de transition) ainsi qu'entre la cuve et les hublots ou les traversées électriques sont tous réalisés avec de l'indium. Le volume sous vide est environ de 118 l. Il est pompé par une pompe ionique *VARIAN* du type *VACION PLUS 75 STARCEL* avec une vitesse de pompage de 75 l/s connectée à la bride inférieure. La vapeur de césium nécessaire à la production d'atomes froids est fournie par une source de césium reliée à la cuve par une vanne dont l'étanchéité est également assurée par un joint en indium. La source consiste en un tube en cuivre qui contient une ampoule contenant 1 g de césium 133. Une fois le tube connecté à la cuve, l'ampoule est cassée en écrasant le tube ce qui libère le césium. La vanne permet d'isoler la source et de la changer sans avoir à remettre à l'air toute l'enceinte à vide. La source est maintenue à une température de 40°C, en opération normale, afin d'obtenir la densité de vapeur de césium nécessaire au bon fonctionnement du jet continu. Des corps de chauffe pour l'étuvage ont été placés le long des arêtes de la cuve et autour de la partie cylindrique des brides de transition centrale et supérieure. Après un étuvage de l'ensemble du résonateur à une température de 130 °C, on arrive à maintenir une pression de l'ordre de $2 \cdot 10^{-8}$ mbar dans la cuve, ce qui est suffisant pour la production d'atomes froids. La partie gauche (1) de la cuve contient la source du jet continu d'atomes froids et lents. Elle est séparée de la partie détection (2) par une paroi en aluminium. Les deux parties de la cuve sont connectées avec une conductance élevée à la même pompe ionique. Des plaques de graphite et des surfaces recouvertes de graphite (*Aquadag*) empêchent la vapeur de césium et la lumière parasite de passer de la partie source à la partie détection.

2.2.2 Source du jet continu

Mélasse mouvante

Les faisceaux de refroidissement (A et B sur la Fig. 2.2) sont amenés par fibre optique depuis la table optique, collimatés, puis injectés dans la partie gauche de la cuve par des hublots. La longueur d'onde de la lumière utilisée correspond à la transition D_2 du césium (cf. annexe A), soit une longueur d'onde de $\lambda_2 = 852.1$ nm. Les hublots utilisés sont traités antireflet pour cette longueur d'onde. Les collimateurs fournissent un faisceau de lumière qui a un profil gaussien d'intensité, d'un diamètre de $\varnothing_{e^{-2}} = 25$ mm à e^{-2} . Il y a trois paires de faisceaux laser contrepropageant pour ralentir les atomes dans les trois directions de l'espace. Le faisceau selon x (A) est rétro-réfléchi sur un

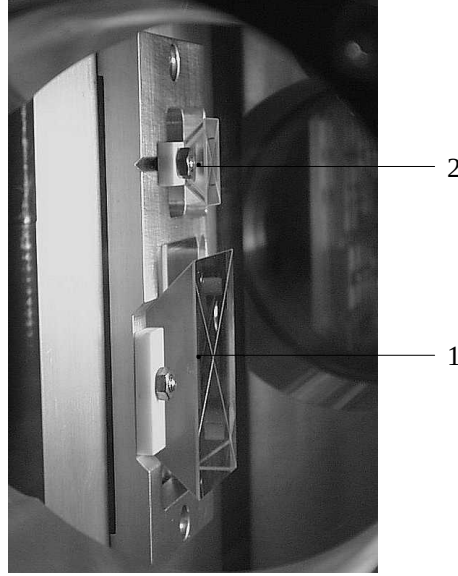


Fig. 2.3: Vue de côté des deux prismes de rétro réflexion à l'intérieur de la cuve. Le prisme inférieur (1) sert à la rétro réflexion du faisceau de refroidissement selon x et le prisme supérieur (2) à celle du faisceau x de refroidissement transverse.

prisme qui est fixé sur la paroi qui sépare la source de la détection comme le montre la Fig. 2.3. Les quatre autres faisceaux (B) qui effectuent le refroidissement dans le plan Oyz sont injectés à 45° par rapport à la verticale par des ouvertures à 45° dans les parois de la cuve. La polarisation de la lumière dans chaque paire de faisceaux est circulaire positive dans le sens de propagation σ^+ et circulaire négative σ^- dans le sens inverse. A l'intersection des trois paires de faisceaux, on obtient ainsi ce qu'on appelle une *mélasse optique* $\sigma^+ - \sigma^-$ qui permet de ralentir, à partir de la vapeur thermique de césium, les atomes qui pénètrent dans ce volume. Il se forme alors un nuage sphérique d'atomes froids qui ont une vitesse aléatoire résiduelle de quelques cm/s, ce qui correspond à une température cinétique de quelques dizaines de μK . Typiquement, les atomes dans la mélasse optique ont une température de $T \approx 80 \mu\text{K}$, ce qui correspond à une vitesse quadratique moyenne de $v_{\text{rms}} \simeq 7.1 \text{ cm/s}$. Pour extraire les atomes de la mélasse optique, nous utilisons la technique de la *mélasse mouvante* ou *mélasse défilante*, qui consiste à ralentir les atomes dans un référentiel en mouvement par rapport à celui du laboratoire. Pour cela, nous varions la fréquence des faisceaux de refroidissements dans le plan Oyz d'une valeur $+\Delta f$, par rapport à la fréquence du faisceau selon x , pour les faisceaux montants et d'une valeur $-\Delta f$ pour les faisceaux descendants. Il en résulte un ralentissement anisotrope des atomes

de césium, qui se fait par rapport à un référentiel au repos dans le plan Oxy et par rapport à un référentiel en mouvement contre le haut selon l'axe z . Au final, les atomes de césium sont ralentis vers une vitesse résiduelle proche de zéro dans le plan horizontal, et vers une vitesse positive selon z qui dépend du décalage de fréquence Δf des faisceaux. De cette manière, on forme un jet vertical d'atomes froids qui sont lancés vers le haut avec une vitesse d'entraînement initiale théorique moyenne de la mélasse mouvante donnée par :

$$\bar{v}_{\text{MM}}^{\text{th}} = \sqrt{2} \lambda \Delta f \quad (2.1)$$

où λ est la longueur d'onde de la lumière de refroidissement. Dans le cas du césium, la vitesse d'entraînement théorique est donnée par la relation :

$$\bar{v}_{\text{MM}}^{\text{th}}[\text{m/s}] = 1.205 \cdot \Delta f[\text{MHz}] \quad (2.2)$$

La vitesse de lancement typique du jet de la fontaine continue est de $v_L \simeq 3.9 \text{ m/s}$ ($\Delta f \simeq 3.2 \text{ MHz}$), ce qui correspond à une trajectoire parabolique du jet (9 sur la Fig. 2.2) dont l'apogée moyen se situe $\sim 73 \text{ cm}$ au-dessus du centre de la source.

Refroidissement transverse

Le jet ainsi formé quitte la mélasse mouvante verticalement. Comme nous le verrons dans le chapitre 3, la vitesse transverse résiduelle des atomes du jet dans le plan horizontal Oxy , c.-à-d. leur température transverse, à une grande importance en ce qui concerne le flux d'atomes qui atteignent la détection. Afin d'obtenir un flux à la détection suffisamment élevé, nous refroidissons transversalement le jet après qu'il a quitté la source. Ce refroidissement supplémentaire se fait à l'aide de deux paires de faisceaux laser contrepropageant orthogonaux et de profil d'intensité gaussien avec un diamètre de $\varnothing_{e-2} \simeq 10 \text{ mm}$. Un faisceau (D sur la coupe de la Fig. 2.2) est rétro-réfléchi selon l'axe y sur un miroir à l'extérieur de la cuve et un autre (C), selon l'axe x , est rétro-réfléchi sur un petit prisme fixé également sur la paroi verticale de séparation comme le montre la Fig. 2.3. Ce dernier faisceau est légèrement incliné dans le plan vertical d'un angle de 1.7° , par rapport à l'horizontale, pour incliner le jet du même angle, par rapport à la verticale, dans le plan Oxz . Cette inclinaison du jet est nécessaire pour qu'il puisse effectuer la trajectoire parabolique et traverser la cavité micro-onde (cf. chapitre 3).

Trappe à lumière

Au-dessus du refroidissement transverse se trouve la *trappe à lumière rotative* (8 sur la Fig. 2.2) qui a pour but d'empêcher la lumière de fluo-

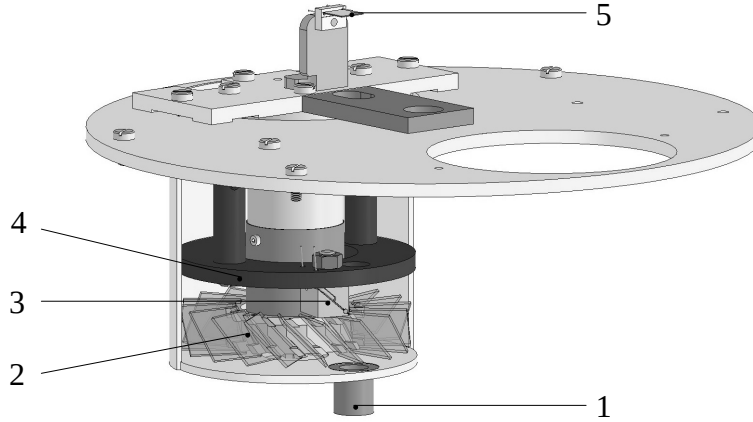


Fig. 2.4: Coupe longitudinale de la boîte cylindrique qui renferme le piège à lumière rotatif. 1 : ouverture d'entrée ; 2 : turbine ; 3 : piège à lumière ; 4 : anneau en graphite ; 5 : photodiode.

rescence de la source d'atomes froids de pénétrer dans la cavité micro-onde. Cet élément est très important car sans cette trappe à lumière, la lumière de fluorescence perturberait les niveaux d'énergie des atomes de césium pendant l'interrogation micro-onde et aurait pour effet de déplacer la fréquence de la transition d'horloge (cf annexe A) des atomes. Cette trappe est constituée d'une petite turbine dont l'axe de rotation est vertical et qui est montée dans une boîte cylindrique dont le fond est percé d'un trou (1) pour le passage du jet comme le montre la Fig. 2.4. La turbine (2) laisse passer les atomes du jet (avec une faible perte) mais dévie la lumière hors de l'axe du jet atomique. Cette lumière est ensuite stoppée dans un petit piège à lumière (3) placé au-dessus de la turbine sur un anneau en graphite (4). Cet anneau est percé d'un trou pour le passage du jet et isole la trappe à lumière de la cavité. La rotation continue de la turbine, à vitesse constante, est effectuée par un moteur électrique pas-à-pas spécialement conçu pour l'ultravide. La fréquence de rotation optimale (qui laisse passer le maximum d'atomes) est autour de 17 Hz. L'étude, la construction et les tests de la trappe à lumière, et du moteur pas-à-pas, sont décrits en détail dans la section 7.3 ainsi que les mesures du déplacement de fréquence relatif de la fréquence de l'étalon, provoqué par la lumière de fluorescence dans la configuration où la trappe à lumière n'est pas implémentée. On distingue aussi sur la Fig. 2.4 la photodiode (5) qui permet de mesurer l'intensité de la lumière résiduelle après le piège à lumière.

2.2.3 Résonateur micro-onde

Cavité micro-onde

Une fois que les atomes du jet ont traversé les faisceaux de refroidissement transverse, ils effectuent une trajectoire parabolique dans le plan vertical Oxz . Durant cette trajectoire, ils traversent la cavité micro-onde (10 sur la Fig. 2.2). Puisque dans le cas d'une fontaine continue les deux zones d'interaction micro-onde doivent être spatialement séparées (comme dans un étalon thermique traditionnel), les atomes traversent la première zone d'interaction en montant et la seconde en descendant. Pour réaliser deux zones d'interaction semblables à celles utilisées dans une fontaine pulsée et spatialement très proches l'une de l'autre, nous employons une cavité coaxiale. Elle a été réalisée en cuivre électrolytique par usinage mécanique. Le mode du champ magnétique utilisé est du type TE_{021} , résonnant à la fréquence de la transition d'horloge de l'atome de césium, soit à ~ 9.2 GHz. Pour ce mode, le profil spatial du champ magnétique auquel les atomes du jet sont soumis lorsqu'ils traversent la cavité est une demi-sinusoïde. La description détaillée de la cavité, le calcul de ses modes propres, du gradient de phase radial et du facteur de qualité non chargé pour le mode TE_{021} sont exposés en détail dans la section 4.2, ainsi que les mesures effectuées sur la cavité avant son montage dans l'étalon. La trajectoire parabolique des atomes est telle que le temps d'interaction dans la cavité est de l'ordre de 10 ms et le temps de transit entre les deux zones d'interaction de ~ 0.5 s¹. La cavité est couplée à la micro-onde de manière symétrique par l'intermédiaire d'un tronçon de guide d'onde et d'un câble coaxial qui traverse la bride supérieure du cylindre. Comme on sait qu'il peut exister un déplacement de fréquence dû à un déphasage du champ magnétique entre les deux zones d'interaction ; il a été prévu de pouvoir faire pivoter la cavité de 180° autour de son axe de symétrie afin de pouvoir mesurer ce déplacement de fréquence. Pour cela, nous avons posé la cavité sur un support tournant comme le montre la Fig. 2.5. Ce support (1) est une sorte de roulement à bille rigoureusement aimantique, en titane avec billes de saphir, qui a été conçu pour garantir un positionnement angulaire de la cavité (3) reproductible à 20 μ m près. La rotation de la cavité est réalisée par deux bras (2) reliés à une traversée tournante (13 sur la Fig. 2.2), où passent les deux câbles coaxiaux d'alimentation, qui est actionnée manuellement depuis l'extérieur. Comme ce système de retournement de la cavité doit fonctionner sous vide, nous avons testé que sa rotation sous vide

¹Cette valeur du temps de transit est du même ordre de grandeur que celle couramment utilisée dans les fontaines pulsées. Elle donne des franges de Ramsey qui ont une largeur à mi-hauteur de l'ordre de 1 Hz.

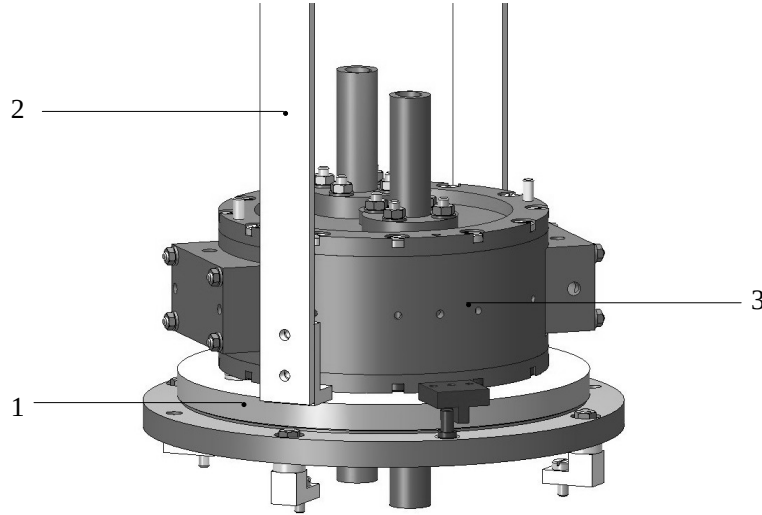


Fig. 2.5: Représentation du système de retournement de la cavité. 1 : support tournant ; 2 : bras d'entraînement ; 3 : cavité micro-onde.

ne pose pas de problèmes, notamment de grippage des roulements, avant son montage dans l'étalon. Pour réaliser l'accord en fréquence de la fréquence de résonance de la cavité sur la fréquence de la transition d'horloge des atomes de césium, la cavité est chauffée au moyen des deux corps de chauffe situés sur les brides de transition centrale et supérieure. Le contrôle de la température se fait par l'intermédiaire de deux NTC (*Negative Temperature Coefficient*) situées à l'opposé sur la paroi extérieure de la cavité et par trois éléments supplémentaires fixés le long d'un arête du cylindre sur sa paroi extérieure. Le montage de la cavité, ses supports et le couplage micro-onde ont été réalisés de manière à empêcher tout courant d'origine thermoélectrique de circuler à l'intérieur du blindage intérieur.

Champ C

L'interrogation micro-onde doit se faire dans un champ magnétique aussi homogène que possible. Ce champ a deux fonctions, d'une part fixer la direction verticale comme axe de quantification pour les atomes de césium, et d'autre part, éloigner suffisamment de la transition d'horloge les transitions dépendant linéairement du champ magnétique. Ce champ est produit par un solénoïde cylindrique (11 sur la Fig. 2.2) dont le diamètre extérieur vaut environ 35 cm pour une hauteur de 52 cm. Pour assurer une bonne homogénéité du champ à l'intérieur du solénoïde, son diamètre extérieur épouse le diamètre

intérieur du blindage le plus interne. Le champ C utilisé actuellement est de 0.7 mG, ce qui correspond à un décalage Zeeman des transitions dépendant linéairement du champ de $\nu_Z = |\nu_{\pm 1} - \nu_{00}| \simeq 500 \text{ Hz}$ pour $m_F = \pm 1$ (cf. annexe A). Afin de réduire l'influence du champ magnétique terrestre à un niveau négligeable dans la zone d'interrogation, cette dernière est entourée de 3 blindages cylindriques concentriques en μ -métal (12 sur la Fig. 2.2) fermés aux deux extrémités. Un 4^{ème} blindage entoure l'étalon complet et réduit le champ dans la région de la source à $\sim 20 \text{ mG}$. Ce champ résiduel est annulé par des spires de compensation pour optimiser le refroidissement des atomes.

2.2.4 Détection du jet continu

La zone de détection (7 sur la Fig. 2.2) se situe dans la partie droite de la cuve. Elle est isolée de la source par la paroi verticale qui empêche d'une part la vapeur thermique de césium de pénétrer dans cette zone, et d'autre part, la lumière de fluorescence de la source de venir perturber la détection. Le jet pénètre dans la zone de détection par le haut en traversant d'abord une boîte cylindrique qui peut accueillir une seconde trappe à lumière rotative identique à la première. Cette trappe à lumière n'est pas montée dans l'étalon actuellement car nous voulons limiter les risques supplémentaires de panne que cela pourrait occasionner. De plus la lumière de fluorescence produite par la détection est faible, le déplacement de fréquence correspondant a été estimé $< 10^{-15}$. Ensuite, le jet pénètre dans la région de détection proprement dite par une ouverture pratiquée dans le haut d'une boîte rectangulaire en graphite fermée. Les atomes de césium du jet traversent ici le faisceau sonde. La boîte entoure la détection afin de l'isoler encore d'éventuelles fuites de lumière parasite en provenance de la source, et de minimiser la densité d'atomes de césium chauds. Ceux-ci sont effectivement indétectables dans la zone de détection du jet continu.

Faisceau sonde

Les atomes qui ont effectués la transition d'horloge $|F = 3, m_F = 0\rangle \Leftrightarrow |F = 4, m_F = 0\rangle$ sont alors détectés par la lumière de fluorescence (F sur la Fig. 2.2) qu'ils émettent lorsqu'ils traversent le faisceau sonde (E). La détection optique s'effectue sur la transition cyclante $|F = 4\rangle \Leftrightarrow |F' = 5\rangle$ du césium qui est plus efficace en terme de production de photons que la transition $|F = 3\rangle \Leftrightarrow |F' = 4\rangle$. En effet, pour une fréquence du laser sonde décalée de 2.5 MHz vers le rouge par rapport à la fréquence de la transition $|F = 4\rangle \Leftrightarrow |F' = 5\rangle$, cette dernière fournit ~ 8000 photons/atome dans l'angle solide de détection $\Omega_{\text{det}} \approx 2\%$ au lieu de 2-3 photons/atomes pour

une transition “pompe”. Le faisceau sonde est amené de la table optique par fibre optique et injecté dans la cuve selon l’axe y à travers un hublot par l’intermédiaire d’un collimateur. Il traverse alors, par deux ouvertures, la boîte rectangulaire entourant la détection et sort de la cuve par un autre hublot situé sur la face opposée de la cuve. Il est ensuite rétro-réfléchi sur un miroir extérieur fixé sur une boîte fermée entourant ce hublot. Cette rétro-réflexion empêche les atomes de césium d’être “soufflés” par la pression de radiation du faisceau sonde, et permet ainsi aux atomes d’émettre plus longtemps de la lumière de fluorescence. Le faisceau a un profil gaussien d’intensité de diamètre $\varnothing_{e-2} \simeq 10$ mm et une polarisation circulaire, on obtient ainsi une mélasse optique $\sigma^+ - \sigma^-$ à une dimension.

Détection de la lumière de fluorescence

La lumière de fluorescence (F) émise par les atomes du jet lorsqu’ils traversent le faisceau sonde est récoltée au moyen d’une lentille de Fresnel de grand diamètre ($\varnothing = 10$ cm et focale $f = 70$ mm) pour obtenir un angle solide de détection le plus grand possible ($\Omega_{\text{det}} \approx 2\%$). Afin d’augmenter encore le nombre de photons collectés, un miroir sphérique, dont le foyer coïncide avec l’intersection de l’axe du jet et du faisceau sonde, est placé à l’opposé de la lentille de Fresnel. La lumière ainsi collectée est focalisée sur un photodétecteur utilisant une photodiode au silicium *Hamamatsu S1227-1010BR* dont on a minimisé le niveau de bruit de courant à basse fréquence (~ 5 fA/ $\sqrt{\text{Hz}}$ entre 0.5 Hz et 20 Hz, cf. chap. 6). Le courant électrique délivré par ce photodétecteur est ensuite converti en tension à travers une résistance de 1 G Ω suivie d’un gain de 100. Cette tension est le signal qui, après être démodulé, sert à corriger la fréquence de l’oscillateur local (oscillateur à quartz).

La détection a été construite de telle manière à pouvoir accueillir un second faisceau sonde, situé 40 mm plus bas que celui décrit ici, ainsi qu’un second photodétecteur. Ceci afin de se ménager la possibilité de pouvoir faire de la normalisation sur le signal de détection en détectant les atomes du jet sur la transition $|F = 3\rangle \Leftrightarrow |F' = 4\rangle$ si cela s’avérerait nécessaire.

2.3 Table optique

Nous décrivons ici, très sommairement, le montage optique nécessaire pour la production du jet continu d’atomes de césium froids et lents ainsi que pour leur détection optique. Pour plus de détails à ce sujet, le lecteur peut se reporter au travail de Berthoud [Ber00]. Le schéma du montage optique réalisé pour la fontaine continue est présenté dans la Fig. 2.6. Il y a cinq

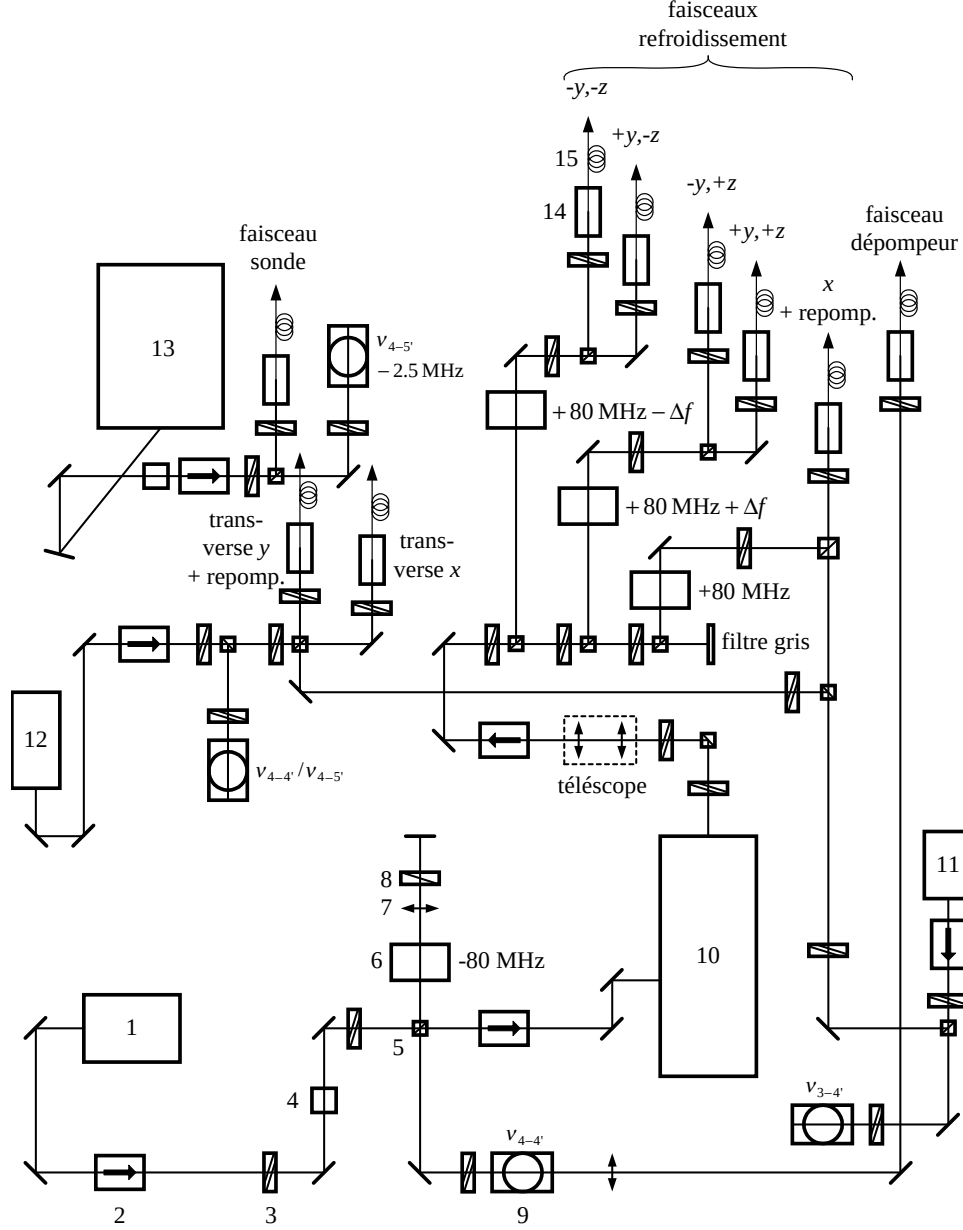


Fig. 2.6: Schéma du montage optique de la fontaine continue. 1 : laser maître ; 2 : isolateur optique ; 3 : lame demi-onde ; 4 : prismes anamorphoseurs ; 5 : cube séparateur de polarisations ; 6 : modulateur acousto-optique ; 7 : lentilles achromatiques ; 8 : lame quart-d'onde ; 9 : cellule Cs absorption saturée ; 10 : amplificateur optique (MOPA) ; 11 : laser repompeur (DBR) ; 12 : laser refroidissement transverse (ECLD) ; 13 : laser sonde (ECLD) ; 14 : coupleur fibre optique ; 15 : fibre optique à maintien de polarisation.

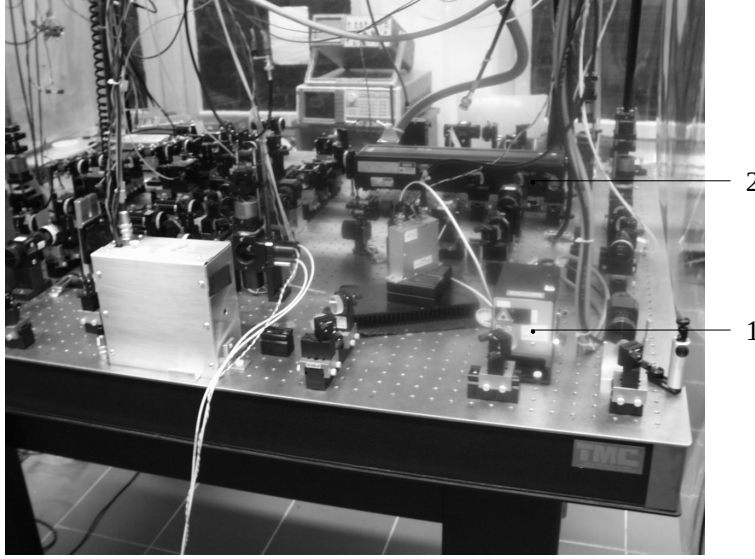


Fig. 2.7: Vue du laser maître (1) et de la table optique. On distingue au fond l'amplificateur optique (2).

lasers sur la table optique pour produire tous les faisceaux nécessaires au fonctionnement de la fontaine.

Faisceaux de refroidissement pour la mélasse optique

Le laser maître (1) est une diode laser Fabry-Perot montée en cavité étendue ECLD (*Extended Cavity Laser Diode*) de *Toptica* du type *SDL-5411-G1* (100 mW). Une vue de la boîte dans laquelle elle est placée, et de la table optique, est reportée dans la Fig. 2.7. La fréquence de la lumière émise par la diode est asservie sur la transition $|F = 4\rangle \Leftrightarrow |F' = 4\rangle$ de l'atome de césium par absorption saturée au moyen d'une cellule de césium (8) (colonne d'asservissement double que nous avons développée [Ber00]). La fréquence du faisceau émis par le maître est ensuite décalée de + 160 MHz par un double passage à travers un modulateur acousto-optique (6) et le faisceau obtenu est ensuite injecté dans un amplificateur optique commercial (10 ; 2 sur la Fig. 2.7) que nous avons adapté à nos besoins. Il s'agit d'un MOPA (*Master Oscillator and Power Amplifier*) de Spectra Diode Labs du type 8630. Le faisceau à sa sortie a une puissance typique de ~ 400 mW. Il est alors divisé en trois faisceaux de même puissance pour former les trois paires de faisceaux de refroidissement orthogonaux. La fréquence du faisceau selon x est encore décalée de + 80 MHz à travers un second acousto-optique avant que le faisceau soit injecté (14) dans une fibre optique à maintien de polarisation (15) qui

va l'amener jusqu'au collimateur sur la cuve. La fréquence des faisceaux de refroidissement est donc décalée nominalement vers le rouge de ~ 12 MHz par rapport à la fréquence de la transition $|F = 4\rangle \Leftrightarrow |F' = 5\rangle$, ce qui correspond à un désaccord de $\sim -2.5\Gamma$ ($\Gamma/2\pi = 5.21$ MHz est la largeur naturelle² de l'état excité $6^2P_{3/2}$). Les deux autres faisceaux sont les faisceaux de refroidissement à 45° dans le plan vertical Oyz . Leur fréquence est donc aussi décalée de $+80$ MHz à travers un acousto-optique. Mais, afin de générer la mélasse mouvante nécessaire à l'extraction du jet continu contre le haut, leur fréquence est encore décalée de $+\Delta f$ pour les faisceaux montant ($+z$) et $-\Delta f$ pour les faisceaux descendants ($-z$). Ils sont ensuite également injectés dans des fibres optiques pour les amener dans les collimateurs de la source. Au final, à la sortie des collimateurs, on obtient des faisceaux de refroidissement qui ont un profil gaussien d'intensité de diamètre $\varnothing_{e^{-2}} \simeq 25$ mm et une puissance typique de ~ 14 mW par faisceau.

Faisceaux de refroidissement transverse

Les faisceaux de refroidissement transverse sont produits à partir d'une diode laser Fabry-Perot de *Spectra Diode Labs* du type *SDL-5422-H1* (150 mW) montée en cavité étendue dans un montage en configuration Littrow que nous avons réalisé à l'Observatoire de Neuchâtel [Lec98]. La Fig. 2.8 montre une vue du boîtier (2) entourant le laser. Sa fréquence est asservie sur la raie d'intercombinaison $|F = 4\rangle \Leftrightarrow |F' = 4\rangle / |F = 4\rangle \Leftrightarrow |F' = 5\rangle$, ce qui correspond à un décalage vers le rouge, par rapport à la fréquence de la transition $|F = 4\rangle \Leftrightarrow |F' = 5\rangle$, de $\sim -25\Gamma$. Ce décalage est proche de celui qui donne le meilleur résultat en terme de flux d'atomes à la détection. Nous travaillons en ce moment à mieux comprendre l'effet du refroidissement transverse sur le jet atomique au moyen de la fontaine expérimentale qui a été développée dans ce but. Le faisceau sortant de la diode est séparé en deux pour former les deux faisceaux de refroidissement transverse selon x et y . Chaque faisceau est injecté dans une fibre optique pour le conduire au collimateur situé légèrement au-dessus de la source. Les deux faisceaux sont rétro-réfléchis, le faisceau x sur un petit prisme à l'intérieur de la cuve (2 sur la Fig. 2.3) et le faisceau y sur un miroir à l'extérieur de la cuve. Les faisceaux à la sortie des collimateurs ont un profil gaussien d'intensité de diamètre $\varnothing_{e^{-2}} \simeq 10$ mm et une puissance typique de ~ 9 mW par faisceau.

²C'est l'inverse de la durée de vie de l'état excité $6^2P_{3/2}$ ($\Gamma = 1/\tau$ où $\tau = 30.57$ ns [RTL99]).

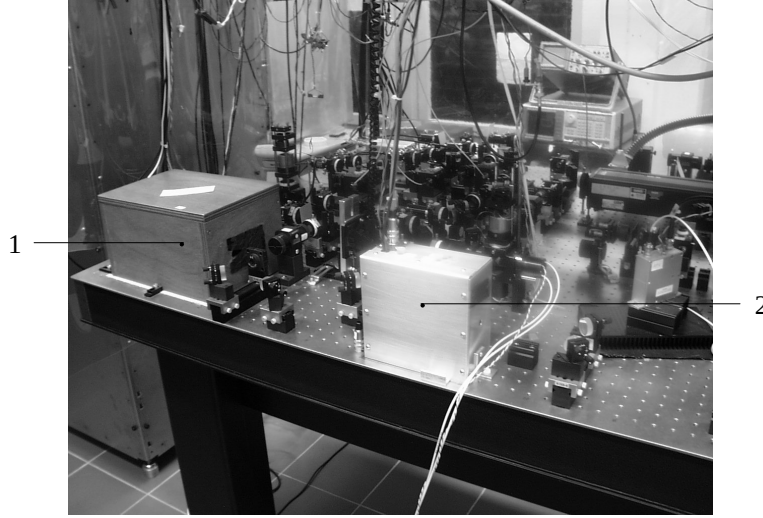


Fig. 2.8: Vue du laser sonde (1) et du laser de refroidissement transverse (2).

Faisceau repompeur

Afin d'augmenter l'efficacité du refroidissement des atomes de césium, on ajoute un peu de lumière à la fréquence de la transition $|F = 3\rangle \leftrightarrow |F' = 4\rangle$ aux faisceaux de refroidissement x de la mélasse mouvante et aux faisceaux y du refroidissement transverse. Cette lumière de repompage ramène les atomes de césium, qui sont tombés sur le niveau $|F = 3\rangle$, sur le niveau $|F = 4\rangle$ afin qu'ils effectuent plus de cycles de fluorescence. Le faisceau repompeur est produit à partir d'une diode laser DBR (*Distributed Bragg Reflector*) fournie par *YOKOGAWA* du type *YL85XNW/S* (10 mW) et asservie sur la fréquence de la transition $|F = 3\rangle \leftrightarrow |F' = 4\rangle$. La Fig. 2.9 montre une vue de ce laser (1) ainsi que de l'amplificateur optique (2). La puissance injectée dans le faisceau de refroidissement x et dans le faisceau de refroidissement transverse y est typiquement de ~ 1.2 mW et ~ 90 μ W respectivement.

Faisceau dépompeur

Du faisceau utilisé pour asservir le laser maître sur la fréquence de la transition $|F = 4\rangle \leftrightarrow |F' = 4\rangle$, une partie est dérivée (cf. Fig. 2.6) pour constituer le faisceau dépompeur qui sert à mettre tous les atomes du jet dans l'état $|F = 3\rangle$ avant l'interrogation micro-onde. Ce faisceau est directement injecté dans une fibre optique pour le transporter vers un collimateur placé ~ 1 cm au-dessus du faisceau y du refroidissement transverse. Ainsi, ce faisceau est le dernier traversé par les atomes de césium avant leur interro-



Fig. 2.9: Vue du laser repompeur (1) et de l'amplificateur optique (2).

gation micro-onde. Il possède également un profil gaussien d'intensité et un diamètre identique aux faisceaux de refroidissement transverse. La puissance avant injection est de l'ordre de 0.5 mW.

Faisceau sonde

Le laser utilisé pour produire le faisceau sonde de détection est constitué d'une diode Fabri-Perot de *Spectra Diode Labs* du type *SDL-5422-H1* (150 mW) montée en cavité étendue dans une configuration du type Littmann réalisée à l'Observatoire de Neuchâtel [Dud96, Ber00]. Elle est entourée d'une boîte en bois (1 sur la Fig. 2.8) pour la protéger de la poussière et des courants de convection. La fréquence de la lumière émise est asservie sur la fréquence de la transition $|F = 4\rangle \Leftrightarrow |F' = 5\rangle$ décalée de 2.5 MHz vers le rouge (désaccord de $-\Gamma/2$) par un champ magnétique de ~ 2 G appliqué à la cellule de césium (absorption saturée $\sigma^+ - \sigma^+$ pour favoriser par pompage Zeeman la population de l'état $|F = 4, m_F = 4\rangle$). Le faisceau est ensuite injecté dans une fibre optique pour son transport vers la partie détection du résonateur. Le faisceau à la sortie du collimateur a un profil gaussien d'intensité et un diamètre estimé à $\varnothing_{e^{-2}} \simeq 10$ mm. La puissance du faisceau utilisé pour la détection est typiquement de ~ 5 mW.

Chapitre 3

Balistique du jet atomique

3.1 Introduction

Dans une fontaine continue, l'interrogation des atomes par la méthode de Ramsey (avec deux champs magnétiques oscillants spatialement séparés) a pour conséquence immédiate que la partie montante du jet doit être spatialement séparée de la partie descendante. Les atomes dans le jet ne sont soumis qu'à la force de gravitation terrestre, il en résulte que la trajectoire des atomes est une parabole et non plus une droite verticale comme dans une fontaine pulsée. Le but du présent chapitre est d'une part, de déterminer les grandeurs caractéristiques de la trajectoire du jet atomique, imposées par la géométrie de la fontaine continue, et d'autre part, d'étudier la dépendance de certaines grandeurs importantes pour les performances de l'étalon par rapport aux paramètres du jet.

Dans la première partie de ce chapitre (section 3.2), nous calculons la trajectoire nominale des atomes du jet ainsi que les principaux paramètres correspondants. Nous déduisons également la valeur nominale des temps caractéristiques du jet suivants : temps de transit entre les deux zones d'interaction, temps d'interaction des atomes avec le champ magnétique oscillant et temps de détection (intervalle de temps entre la sortie des atomes de la cavité micro-onde et leur entrée dans la zone de détection).

Le flux d'atomes qui atteignent la zone de détection, après avoir traversé la cavité micro-onde, est une grandeur importante en ce qui concerne la stabilité de fréquence à court terme de l'étalon. Plus ce flux est important, plus cette stabilité sera élevée. On cherche donc à maximiser cette grandeur en augmentant le flux initial d'atomes froids à la sortie de la source ou en réduisant la divergence transverse du jet. Afin de déterminer l'influence des paramètres du jet sur cette grandeur, ainsi que sur d'autres, nous avons en-

trepris une modélisation de l'évolution du jet atomique de la source jusqu'à la détection. Pour cela nous avons élaboré deux modèles simples, un calcul basé sur des simulations Monte-Carlo et un calcul analytique. Le premier servant entre autre à valider le second. La description de ces deux modèles fait l'objet de la section 3.3 et de l'annexe B. La section 3.4 est consacrée à l'analyse et à la comparaison des résultats fournis par les deux modèles. Nous étudions l'influence de certains paramètres du jet sur le flux d'atomes à la détection ainsi que sur les distributions de temps de transit, d'interaction et de détection dont la connaissance nous sera nécessaire dans les chapitres ultérieurs. Pour terminer ce chapitre, nous estimons dans la section 3.5 la densité moyenne du jet utile au-dessus de la cavité à partir du modèle analytique. Cette grandeur est importante pour la détermination de l'exactitude de l'étalon car elle intervient dans l'évaluation du déplacement de la fréquence d'horloge dû aux collisions entre atomes froids.

3.2 Grandeurs caractéristiques de la fontaine

La géométrie de la fontaine a été déterminée à la base pour que le temps de transit des atomes du jet, de la sortie de la première zone d'interaction micro-onde à l'entrée de la seconde, corresponde à ~ 0.5 s. Cette valeur est commune à la majorité des fontaines atomiques à atomes froids pulsées développées à ce jour (par ex. [MJSP01, WSB01]).

Nous allons donc déterminer la valeur théorique de différentes grandeurs caractéristiques du jet de la fontaine continue à partir des dimensions mécaniques réelles telles qu'elles ont été réalisées. Dans la sous-section 3.2.1, nous calculons les paramètres de la trajectoire nominale du jet ainsi que les vitesses correspondantes. Nous poursuivons en déterminant les différents temps de vol nominaux de la trajectoire nominale dans la sous-section 3.2.2. Finalement, nous calculons encore (sous-section 3.2.3) les temps de transit, d'interaction et de détection nominaux de cette trajectoire ainsi que leur dépendance par rapport à la vitesse initiale du jet.

3.2.1 Trajectoire et vitesses nominales du jet

La configuration géométrique du jet atomique dans le plan Oxz de la fontaine continue est schématisée dans la Fig. 3.1. L'origine du système de coordonnées est prise au centre de la source (mélasse optique). Nous considérons, pour le moment, uniquement un jet à une dimension, soit une source ponctuelle et un jet sans extension transverse (section du jet reste ponctuelle). La trajectoire représentée sur la Fig. 3.1 correspond à la trajectoire

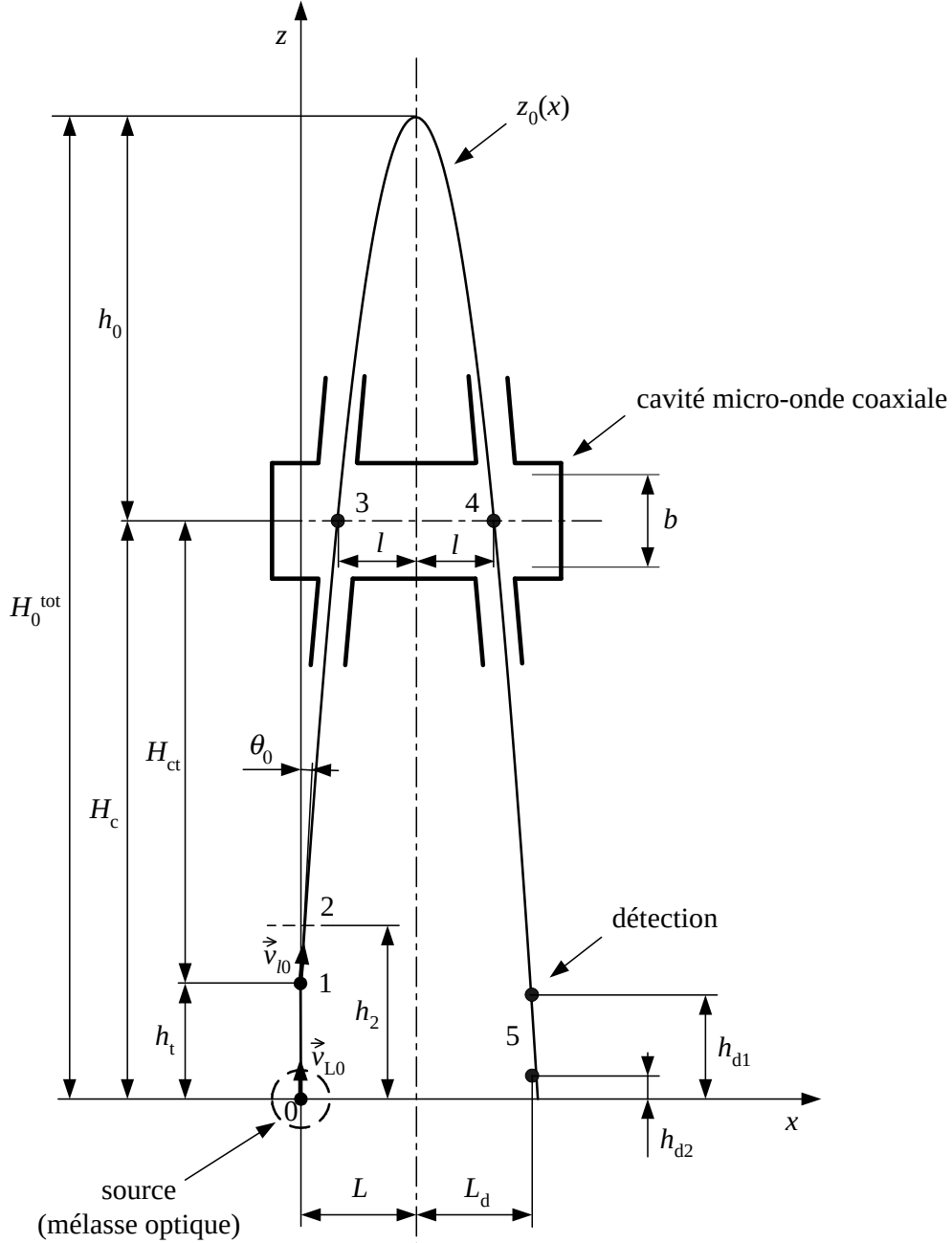


Fig. 3.1: Schéma de la trajectoire nominale du jet dans le plan Oxz . (Les proportions de la figure ne sont pas respectées). 0 : centre la source ; 1 : centre refroidissement transverse ; 2 : 1^{er} diaphragme ; 3 : première zone d'interaction ; 4 : deuxième zone d'interaction ; 5 : zone de détection. Les valeurs des cotes mécaniques sont résumées dans le Tab. 3.1.

<i>Grandeur</i>	<i>Notation</i>	<i>Valeur</i>
Distance source - axe cavité	L	43.6 mm
Distance axe cavité - détection	L_d	42.4 mm
Demi-distance trous cavité	l	28 mm
Hauteur cavité - source	H_c	449 mm
Hauteur cavité - refr. trans.	H_{ct}	397.6 mm
Hauteur refr. trans. - source	h_t	51.4 mm
Hauteur 1 ^{er} diaphragme - source	h_2	89 mm
Hauteur détection 1 - source	h_{d1}	45 mm
Hauteur détection 2 - source	h_{d2}	5 mm
Hauteur zones d'interaction	b	26 mm

Tab. 3.1: Valeur des cotes mécaniques du schéma de la Fig. 3.1.

nominale du jet. On admet, pour simplifier, que le jet est déjà formé au centre de la source (point 0) et monte verticalement jusqu'au centre de la zone de refroidissement transverse (point 1). Là, on suppose simplement que le jet est dévié instantanément dans le plan Oxz d'un angle θ sans que le module de sa vitesse ait varié. Ensuite le jet effectue une trajectoire parabolique passant par les points 3 et 4 qui symbolisent le centre de la première, respectivement de la deuxième, zone d'interaction de la cavité micro-onde avant d'atteindre la zone de détection (point 5).

Le point 2 représente la position verticale du 1^{er} diaphragme présent sur la trajectoire du jet. Nous le mentionnons ici, bien qu'il n'intervienne pas pour la détermination de la trajectoire nominale, pour établir la chronologie des temps de vol utilisée dans la deuxième partie de cette section.

Les atomes du jet lorsqu'ils ont quitté la source ne sont soumis qu'à la force de gravitation terrestre et à la force de pression de radiation due à la lumière de fluorescence de la mélasse optique. Le temps pendant lequel cette dernière force est supérieure à la force de gravitation terrestre est court [Ber00] devant la durée de la trajectoire parabolique des atomes, c'est pourquoi nous négligeons cette force dans la suite. En choisissant l'origine du temps à l'origine supposée du jet (centre mélasse optique), les équations du mouvement jusqu'à la zone de refroidissement transverse ($t = t_1$) sont ainsi

les suivantes selon l'axe z :

$$\ddot{z}(t) = -g \quad (3.1a)$$

$$\dot{z}(t) = v_L - gt \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (3.1b)$$

$$z(t) = v_L t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (3.1c)$$

et selon l'axe x :

$$\ddot{x}(t) = 0 \quad (3.2a)$$

$$\dot{x}(t) = 0 \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (3.2b)$$

$$x(t) = 0 \quad (3.2c)$$

où t_1 est le temps de vol du centre de la mélasse optique jusqu'au centre de la zone de refroidissement transverse, g la composante selon z de l'accélération de la pesanteur et v_L la vitesse de lancement du jet au centre de la mélasse optique. A partir de la zone de refroidissement transverse, soit pour $t \geq t_1$, les équations du mouvement selon l'axe z sont données par :

$$\ddot{z}(t) = -g \quad (3.3a)$$

$$\dot{z}(t) = v_{l_z} - gt \quad t \geq t_1 \quad (3.3b)$$

$$z(t) = h_t + v_{l_z} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (3.3c)$$

et pour l'axe x :

$$\ddot{x}(t) = 0 \quad (3.4a)$$

$$\dot{x}(t) = v_{l_x} \quad t \geq t_1 \quad (3.4b)$$

$$x(t) = v_{l_x} t \quad (3.4c)$$

où v_{l_z} et v_{l_x} sont les composantes, selon z et x respectivement, de la vitesse longitudinale¹ $\vec{v}_l$ du jet après refroidissement transverse et h_t la hauteur du centre de la zone de refroidissement transverse par rapport au centre de la source. En éliminant le temps t entre (3.3c) et (3.4c), on peut exprimer l'équation de la trajectoire dans le plan Oxz après le refroidissement transverse :

$$z(x) = x \left(\frac{v_{l_z}}{v_{l_x}} - \frac{gx}{2v_{l_x}^2} \right) + h_t \quad x \geq 0 \quad (3.5)$$

¹Nous introduisons déjà le terme longitudinal bien que nous ne considérons pas d'autre vitesse à ce stade. Il nous permettra de distinguer cette vitesse de la vitesse transverse introduite dans la section 3.3.

Imposons que la trajectoire passe par les points 3 et 4 de la Fig. 3.1, soit :

$$z(L - l) = H_c \quad (3.6a)$$

$$z(L + l) = H_c \quad (3.6b)$$

où H_c est la hauteur du centre de la cavité par rapport au centre de la source, L la distance horizontale (selon x) entre le centre de la source (respectivement le centre du refroidissement transverse) et l'axe de symétrie de la cavité et l la demi-distance horizontale entre le centre du trou de passage de la première zone d'interaction de la cavité et celui de la deuxième. Les deux conditions (3.6) permettent alors d'exprimer les composantes $v_{l_{0x}}$ et $v_{l_{0z}}$ de la vitesse longitudinale nominale $\vec{v}_{l_0}$ du jet après refroidissement transverse (correspondant à la trajectoire nominale) en fonction uniquement des grandeurs géométriques de la fontaine. Nous trouvons :

$$v_{l_{0x}} = \left(g \frac{L^2 - l^2}{2H_{ct}} \right)^{1/2} \quad (3.7a)$$

$$v_{l_{0z}} = \left(2gH_{ct} \frac{L^2}{L^2 - l^2} \right)^{1/2} \quad (3.7b)$$

où H_{ct} est la hauteur du centre de la cavité au-dessus du centre de la zone de refroidissement transverse. De (3.7) on déduit également la norme de $\vec{v}_{l_0}$:

$$v_{l_0} = \sqrt{v_{l_{0x}}^2 + v_{l_{0z}}^2} \quad (3.8)$$

ainsi que l'angle d'inclinaison nominal θ_0 de la trajectoire après refroidissement transverse :

$$\theta_0 = \arctan \left(\frac{L^2 - l^2}{2H_{ct}L} \right) \quad (3.9)$$

La vitesse nominale v_{L_0} de lancement du jet est reliée à la vitesse longitudinale nominale après refroidissement transverse par la relation² :

$$v_{L_0} = \sqrt{v_{l_0}^2 + 2gh_t} \quad (3.10)$$

En insérant (3.7a) et (3.7b) dans (3.5) nous obtenons l'expression de la trajectoire nominale après refroidissement transverse $z_0(x)$:

$$z_0(x) = H_{ct} \frac{x(2L - x)}{L^2 - l^2} + h_t \quad x \geq 0 \quad (3.11)$$

²Nous posons $\cos \theta_0 \simeq 1$ dans la suite de cette section car l'angle d'inclinaison nominal θ_0 est très petit (cf. Tab. 3.2).

C'est une parabole dont l'axe de symétrie coïncide avec celui de la cavité coaxiale.

A partir de (3.7a) et (3.11) nous pouvons encore déterminer les autres grandeurs caractéristiques de la trajectoire nominale. La hauteur nominale de l'apogée h_0 par rapport au centre de la cavité est donnée par :

$$h_0 = z_0(L) - H_c = H_{ct} \frac{l^2}{L^2 - l^2} \quad (3.12)$$

La norme de la vitesse longitudinale nominale $v_{l_0}^c$ au centre des zones d'interaction de la cavité micro-onde :

$$v_{l_0}^c = v_{l_{0x}} \left(1 + \frac{4H_{ct}^2 l^2}{(L^2 - l^2)^2} \right)^{1/2} \quad (3.13)$$

Aux mêmes positions, on détermine aussi la valeur nominale de l'angle d'inclinaison de la trajectoire θ_0^c :

$$\theta_0^c = \pm \arctan \left(\frac{L^2 - l^2}{2H_{ct}l} \right) \quad (3.14)$$

Le signe + correspond à la première zone d'interaction (trajectoire montante) et le signe - à la seconde (trajectoire descendante).

L'écart nominal Δx_0^{di} ($i = 1, 2$) entre la position selon x du centre de la détection i et celle de la trajectoire vaut :

$$\Delta x_0^{di} = x_0^{di} - (L + L_d) = \left(L^2 + \frac{h_t - h_{di}}{H_{ct}} (L^2 - l^2) \right)^{1/2} - L_d \quad (3.15)$$

où h_{di} est la hauteur du centre de la source jusqu'au centre de la détection i et L_d sa distance horizontale depuis l'axe de symétrie de la cavité. Enfin, la norme de la vitesse longitudinale nominale $v_{l_0}^{di}$ au centre de la détection i est donnée par :

$$v_{l_0}^{di} = v_{l_{0x}} \left(1 + \frac{4H_{ct}^2 (L_d + \Delta x_0^{di})^2}{(L^2 - l^2)^2} \right)^{1/2} \quad (3.16)$$

Les valeurs numériques des grandeurs calculées dans cette sous-section sont résumées dans le Tab. 3.2.

<i>Grandeur</i>	<i>Notation</i>	<i>Valeur</i>
Vitesse de lancement	v_{L_0}	3.78 m/s
Vitesse longitudinale (refr. trans.)	v_{l_0}	3.65 m/s
Vitesse longitudinale (cavité)	$v_{l_0}^c$	2.34 m/s
Vitesse longitudinale (détection 1)	$v_{l_0}^{d1}$	3.66 m/s
Vitesse longitudinale (détection 2)	$v_{l_0}^{d2}$	3.77 m/s
Hauteur cavité - apogée	h_0	279 mm
Hauteur totale trajectoire ($= H_c + h_0$)	H_0^{tot}	728 mm
Angle d'inclinaison traj. (refr. trans.)	θ_0	1.84 °
Angle d'inclinaison traj. (cavité)	θ_0^c	± 2.87 °
Ecart centre détection 1 - trajectoire	Δx_0^{d1}	1.4 mm
Ecart centre détection 2 - trajectoire	Δx_0^{d2}	2.7 mm

Tab. 3.2: Valeur des grandeurs caractéristiques de la trajectoire nominale du jet de la fontaine continue. Pour les vitesses, nous indiquons leur norme. Ces valeurs sont calculées à partir des dimensions spécifiées dans le Tab. 3.1.

3.2.2 Temps de vol nominaux

Nous calculons dans cette sous-section les différents temps de vol de la trajectoire nominale du jet correspondants aux points 1 à 5 de la Fig. 3.1.

De (3.1b), on déduit directement le temps de vol nominal t_1 du centre de la mélasse optique jusqu'au centre du refroidissement transverse :

$$t_1 = \frac{1}{g} (v_{L_0} - v_{l_0}) \quad (3.17)$$

Calculons le temps de vol nominal $t_{\pm}(z)$ du centre du refroidissement transverse jusqu'à l'altitude z de la trajectoire. Il est donné, à partir de (3.3c), par :

$$t_{\pm}(z) = \frac{1}{g} \left(v_{l_0} \pm (v_{l_0}^2 - 2g(z - h_t))^{1/2} \right) \quad z \geq h_t \quad (3.18)$$

Le signe $-$ correspond à la partie montante de la trajectoire et le signe $+$ à la partie descendante.

Nous pouvons alors calculer les autres temps de vol de la trajectoire nominale. Le temps de vol t_2 du centre de la mélasse optique jusqu'au 1^{er}

<i>Temps de vol</i>	<i>Notation</i>	<i>Valeur</i>
Centre source - refroidissement transverse	t_1	13.8 ms
Centre source - 1 ^{er} diaphragme	t_2	38.1 ms
Centre source - première zone d'interaction	t_3	161 ms
Centre source - deuxième zone d'interaction	t_4	638 ms
Centre source - détection 1	t_{51}	772 ms
Centre source - détection 2	t_{52}	783 ms

Tab. 3.3: Valeur des temps de vol de la trajectoire nominale (cf. Fig. 3.1), calculés d'après les dimensions spécifiées dans le Tab. 3.1.

diaphragme :

$$t_2 = t_1 + t_-(h_2) = \frac{1}{g} \left(v_{L_0} - (v_{l_0}^2 - 2g(h_2 - h_t))^{1/2} \right) \quad (3.19)$$

où h_2 est la hauteur du 1^{er} diaphragme par rapport au centre de la source. Le temps de vol t_3 du centre de la mélasse optique jusqu'au centre de la première zone d'interaction de la cavité micro-onde :

$$t_3 = t_1 + t_-(H_c) = \frac{1}{g} \left(v_{L_0} - (v_{l_0}^2 - 2gH_{ct})^{1/2} \right) \quad (3.20)$$

Le temps de vol t_4 du centre de la mélasse optique jusqu'au centre de la deuxième zone d'interaction de la cavité micro-onde :

$$t_4 = t_1 + t_+(H_c) = \frac{1}{g} \left(v_{L_0} + (v_{l_0}^2 - 2gH_{ct})^{1/2} \right) \quad (3.21)$$

Le temps de vol t_{5i} ($i = 1, 2$) du centre de la mélasse optique jusqu'au centre de la détection i :

$$t_{5i} = t_1 + t_+(h_{di}) = \frac{1}{g} \left(v_{L_0} + (v_{l_0}^2 + 2g(h_t - h_{di}))^{1/2} \right) \quad (3.22)$$

Ces temps de vol peuvent être calculés avec (3.7b), (3.8), (3.10) et les grandeurs géométriques du Tab. 3.1. Les valeurs numériques correspondantes sont résumées dans le Tab. 3.3.

3.2.3 Temps de transit, d'interaction et de détection nominaux

Lorsque nous calculerons au chapitre 4 la probabilité de transition des atomes du jet à la sortie de la cavité micro-onde, nous aurons besoin de connaître le temps d'interaction des atomes avec le champ oscillant dans chaque zone d'interaction ainsi que le temps de transit entre ces deux zones [VA89]. Puis pour calculer le signal à la sortie du résonateur, nous devons également tenir compte du retard introduit par le temps mis par les atomes pour atteindre la zone de détection depuis la sortie de la cavité. Comme le jet après refroidissement transverse n'est pas monocinétique [Ber00], nous aurons à prendre en considération, en plus, la dépendance au 1^{er} ordre de ces différents temps avec la vitesse longitudinale du jet. Il nous sera également utile de connaître la dépendance au 1^{er} ordre du temps d'interaction et des temps de détection par rapport au temps de transit. Nous nous proposons donc ici de déterminer ces différentes grandeurs.

Le temps de transit nominal T_0 des atomes entre la sortie de la première zone d'interaction et l'entrée de la deuxième est donné par :

$$\begin{aligned} T_0 &= t_+ \left(H_c + \frac{b}{2} \right) - t_- \left(H_c + \frac{b}{2} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{g}} \left(2H_{\text{ct}} \frac{l^2}{L^2 - l^2} - b \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

où b est la hauteur de la zone d'interaction de la cavité micro-onde. Poursuivons avec le temps d'interaction nominal τ_0 des atomes entre l'entrée et la sortie de la première zone d'interaction, respectivement de la deuxième (les temps d'interaction sont identiques dans les deux zones d'interaction) :

$$\begin{aligned} \tau_0 &= t_- \left(H_c + \frac{b}{2} \right) - t_- \left(H_c - \frac{b}{2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\left(2H_{\text{ct}} \frac{l^2}{L^2 - l^2} + b \right)^{1/2} - \left(2H_{\text{ct}} \frac{l^2}{L^2 - l^2} - b \right)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

Déterminons encore le temps de détection nominal $T_{\text{di}0}$ entre la sortie de la deuxième zone d'interaction et le centre de la détection i ($i = 1, 2$) :

$$\begin{aligned} T_{\text{di}0} &= t_+(h_{\text{di}}) - t_+ \left(H_c - \frac{b}{2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\left(H_{\text{ct}} \frac{L^2}{L^2 - l^2} + (h_{\text{t}} - h_{\text{di}}) \right)^{1/2} - \left(H_{\text{ct}} \frac{l^2}{L^2 - l^2} + \frac{b}{2} \right)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

Dépendance de ces temps par rapport à la vitesse longitudinale v_l

Nous allons calculer la dépendance, au 1^{er} ordre, de ces différents temps par rapport à la vitesse longitudinale après refroidissement transverse v_l . Pour cela, faisons apparaître cette vitesse dans l'équ. (3.18) :

$$t_{\pm}(z, v_l) = \frac{1}{g} \left(v_l \pm (v_l^2 - 2g(z - h_t))^{1/2} \right) \quad (3.26)$$

Le temps de transit T s'exprime alors en fonction de v_l par :

$$\begin{aligned} T(v_l) &= t_+ \left(H_c + \frac{b}{2}, v_l \right) - t_- \left(H_c + \frac{b}{2}, v_l \right) \\ &= \frac{2}{g} \left(v_l^2 - 2g \left(H_{ct} + \frac{b}{2} \right) \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

En développant $T(v_l)$ autour de v_{l_0} au 1^{er} ordre, on obtient :

$$\begin{aligned} T(v_l) &\simeq T(v_{l_0}) + \frac{dT}{dv_l}(v_{l_0}) \cdot (v_l - v_{l_0}) \\ &= T_0 + T'_0 (v_l - v_{l_0}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

avec le coefficient :

$$T'_0 = \frac{2v_{l_0}}{g (v_{l_0}^2 - g(2H_{ct} + b))^{1/2}} \quad (3.29)$$

En procédant de la même manière, nous obtenons pour le temps d'interaction τ :

$$\begin{aligned} \tau(v_l) &\simeq \tau(v_{l_0}) + \frac{d\tau}{dv_l}(v_{l_0}) \cdot (v_l - v_{l_0}) \\ &= \tau_0 + \tau'_0 (v_l - v_{l_0}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

avec le coefficient :

$$\tau'_0 = \frac{v_{l_0}}{g} \left\{ \frac{1}{(v_{l_0}^2 - g(2H_{ct} - b))^{1/2}} - \frac{1}{(v_{l_0}^2 - g(2H_{ct} + b))^{1/2}} \right\} \quad (3.31)$$

Finalement, on a pour les temps de détection T_{di} ($i = 1, 2$) :

$$\begin{aligned} T_{di}(v_l) &\simeq T_{di}(v_{l_0}) + \frac{dT_{di}}{dv_l}(v_{l_0}) \cdot (v_l - v_{l_0}) \\ &= T_{di_0} + T'_{di_0} (v_l - v_{l_0}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

avec le coefficient :

$$T'_{di0} = \frac{v_{l0}}{g} \left\{ \frac{1}{(v_{l0}^2 + 2g(h_t - h_{di}))^{1/2}} - \frac{1}{(v_{l0}^2 - g(2H_{ct} - b))^{1/2}} \right\} \quad (3.33)$$

Dépendance des temps d'interaction et de détection par rapport au temps de transit

En ce qui concerne le temps d'interaction, sa dépendance au 1^{er} ordre se déduit directement des équations (3.28) et (3.30), on obtient :

$$\tau(T) = \tau_0 + k_{\tau_0} (T - T_0) \quad (3.34)$$

avec le coefficient :

$$k_{\tau_0} = \frac{\tau'_0}{T'_0} \quad (3.35)$$

Et pour terminer, à partir de (3.28) et (3.32), le temps de détection T_{di} s'exprime en fonction du temps de transit T par ($i = 1, 2$) :

$$T_{di}(T) = T_{di0} + k_{di0} (T - T_0) \quad (3.36)$$

avec le coefficient :

$$k_{di0} = \frac{T'_{di0}}{T'_0} \quad (3.37)$$

Les valeurs numériques des grandeurs que nous venons de déterminer dans cette sous-section sont regroupées dans le Tab. 3.4.

Remarque :

Avec la géométrie d'une fontaine, le temps de transit augmente avec la vitesse des atomes du jet (coefficient T'_0 positif) alors que dans un étalon à jet thermique c'est l'inverse qui se produit. En outre, la variation des temps d'interaction et de détection par rapport au temps de transit est négative (coefficients k_{τ_0} et k_{di0} négatifs). Ainsi par exemple, lorsque le temps de transit augmente (atomes rapides) ces temps diminuent, ce qui est également le contraire de ce qui se passe dans un étalon à jet thermique. En ce qui concerne le temps de détection, nous verrons au chapitre 5 que ceci limite favorablement la dégradation du signal d'erreur dans le cas d'un jet non-monocinétique.

<i>Grandeur</i>	<i>Notation</i>	<i>Valeur</i>
Temps de transit (géométrique)	T_0	466 ms
Coefficient de variation par rapport à v_l	T'_0	$325 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$
Temps d'interaction	τ_0	11.1 ms
Coefficient de variation par rapport à v_l	τ'_0	$-7.40 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$
Coefficient de variation par rapport à T	k_{τ_0}	-0.0228
Temps de détection 1	T_{d10}	129 ms
Coefficient de variation par rapport a v_l	T'_{d10}	$-53.7 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$
Coefficient de variation par rapport à T	k_{d10}	-0.165
Temps de détection 2	T_{d20}	140 ms
Coefficient de variation par rapport à v_l	T'_{d20}	$-56.5 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$
Coefficient de variation par rapport à T	k_{d20}	-0.174

Tab. 3.4: Valeur numérique des temps de transit, d'interaction et de détection pour la trajectoire nominale des atomes dans la fontaine (cf. Fig. 3.1). Nous indiquons également la valeur des coefficients de leur dépendance au 1^{er} ordre par rapport à v_l et T .

3.3 Etude théorique de l'évolution du jet

Afin de mieux caractériser le jet, nous avons entrepris une étude théorique de l'évolution du jet atomique dans la fontaine continue dont les buts principaux sont les suivants :

1. *Optimiser le flux :*

Ainsi que mentionné dans l'introduction de ce chapitre, le flux d'atomes qui atteint la zone de détection joue un rôle important en ce qui concerne la stabilité à court terme de l'étalon comme nous le verrons plus loin (cf. chapitre 6). Cette stabilité dépend du rapport signal-sur-bruit S/N (*Signal to Noise ratio*) du signal du résonateur. Or, plus le flux d'atomes qui atteint la détection est important, plus le rapport S/N est élevé, conduisant ainsi à une meilleure stabilité. Cette étude va nous aider à déterminer quels sont les paramètres importants du jet et leur influence respective sur le flux à la détection.

2. *Distribution de temps de transit :*

Dans un jet réel, la vitesse longitudinale des atomes n'est pas monocinétique et la distribution de vitesse qui en résulte engendre une distribution de temps de transit. Avec la géométrie du jet que nous avons,

cette distribution de temps de transit ne dépend pas uniquement de la distribution de vitesse longitudinale mais également d'autres paramètres, en particulier de la température transverse du jet (extension transverse du jet).

Cette étude va donc notamment permettre de déterminer dans quel domaine de valeur des paramètres du jet on peut considérer que la distribution de temps de transit est isomorphe (c.-à-d. du même type) à celle de la distribution de vitesse longitudinale, dans le cas où cette distribution est supposée gaussienne.

3. Densité moyenne :

La connaissance de la densité moyenne du jet utile durant l'interrogation micro-onde est importante d'un point de vue métrologique. Elle permet en effet d'estimer le déplacement de la fréquence de l'étalon dû aux collisions entre atomes froids. Ce déplacement est particulièrement problématique dans les fontaines à atomes froids pulsées (cf. chapitre 7). Avec un jet continu, la densité moyenne devrait être beaucoup plus faible, d'où l'intérêt de l'estimer au mieux par le biais de cette étude.

Pour atteindre ces buts, nous développons dans la sous-section 3.3.1 un modèle analytique pour le calcul du flux d'atomes à la détection. Dans la seconde et dernière sous-section (3.3.2), nous décrivons le principe des simulations Monte-Carlo des trajectoires atomiques du jet que nous avons effectuées afin de vérifier le bien fondé du modèle analytique.

3.3.1 Modèle analytique

Nous décrivons dans cette sous-section le principe du calcul de l'évolution du jet basé sur le modèle analytique d'évolution de la densité surfacique développé dans l'annexe B. Pour ce calcul, nous considérons un jet issu d'une source étendue transversalement avec une distribution de vitesse longitudinale ainsi que transverse.

Diaphragmes considérés sur la trajectoire du jet

Nous avons représenté en trait épais dans la Fig. 3.2 les diaphragmes considérés sur la trajectoire du jet pour le calcul de son évolution, de la source jusqu'à la détection. Les diaphragmes en trait fin symbolisent des ouvertures présentes sur la trajectoire du jet, mais qui sont négligées dans le calcul.

Le 1^{er} diaphragme rencontré par le jet depuis sa sortie de la source est l'ouverture circulaire de rayon R_2 à l'entrée de la trappe à lumière (point

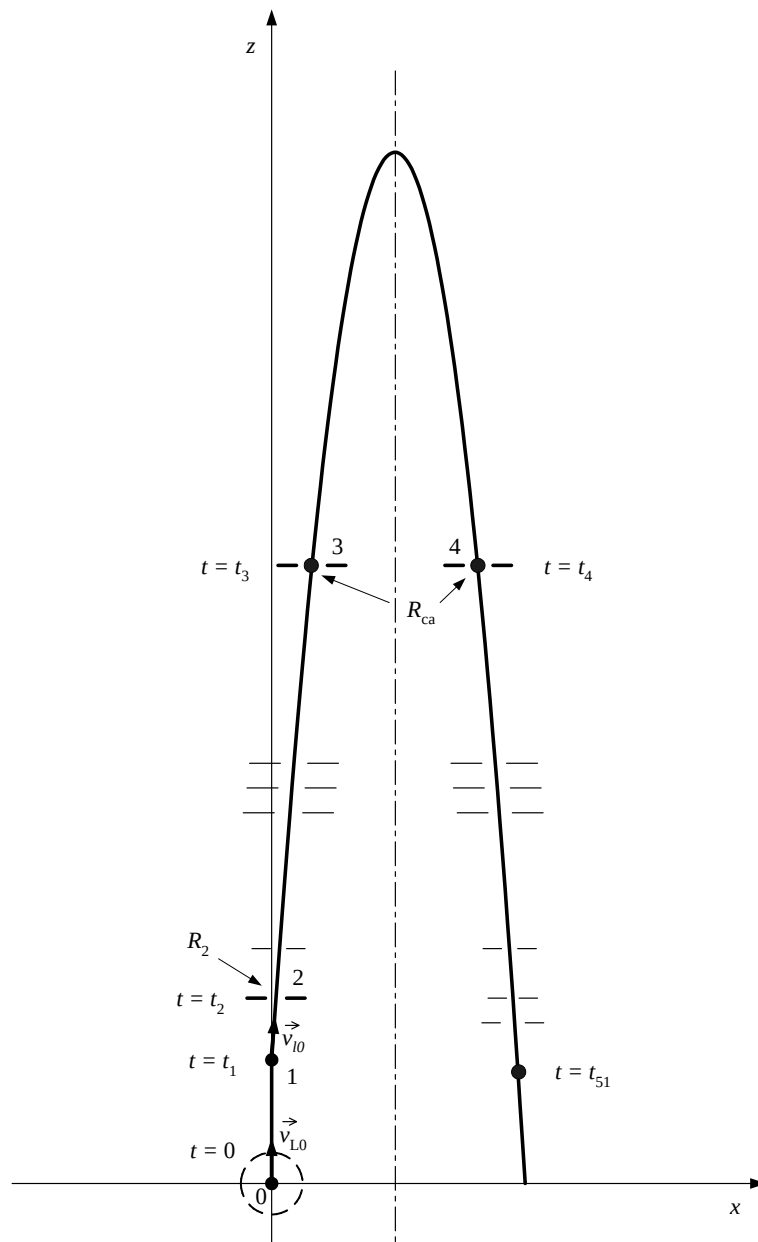


Fig. 3.2: Position des diaphragmes considérés sur la trajectoire nominale dans le plan Oxz pour le calcul de l'évolution du jet. Les diaphragmes en trait fin représentent les ouvertures sur la trajectoire du jet qui ne sont pas prises en compte dans le calcul. Les temps indiquent l'horaire de la trajectoire. Les valeurs numériques des grandeurs utilisées dans le calcul sont résumées dans le Tab. 3.6.

2). Ensuite le jet traverse la trappe à lumière rotative. Nous ne prenons pas en compte dans cette étude son effet sur le jet, qui est principalement une faible atténuation de ce dernier. Cet effet sera estimé plus en détail dans la sous-section 7.3.3. Après, le jet sort de la trappe à lumière par une seconde ouverture circulaire que nous négligeons également. Vu le court temps de vol entre l'entrée et la sortie de la trappe à lumière et la faible température transverse du jet, il n'a pas le temps d'évoluer latéralement suffisamment pour que cette ouverture ait une influence notable. Plus haut, le jet traverse les trois ouvertures des blindages cylindriques autour de la cavité que nous pouvons totalement ignorer car leur diamètre est nettement plus grand que celui de l'entrée dans la trappe à lumière. Le jet pénètre ensuite dans la cavité micro-onde par une ouverture circulaire et en sort par une autre identique. Dû à l'inclinaison de la trajectoire à cet endroit et à la présence des cut-offs, l'ouverture apparente "vue" par le jet est plus petite que les ouvertures circulaires d'entrée et de sortie. Nous pouvons la modéliser par un diaphragme circulaire de rayon R_{ca} que nous déterminerons, situé dans le plan median de la cavité (point 3). Après avoir atteint l'apogée de sa trajectoire, le jet traverse à nouveau la cavité dans la deuxième zone d'interaction qui est modélisée de manière identique à la première (point 4). Finalement, le jet passe encore trois ouvertures dans les blindages lors de la descente et pénètre dans la chambre de détection par un trou circulaire. L'effet de ces diaphragmes sur le jet est totalement négligeable puisque leur rayon est grand comparé à R_{ca} et que le jet n'évolue presque plus transversalement à partir de la sortie de la cavité.

Calcul du flux à la détection

Nous désirons déterminer le rapport entre le flux d'atomes qui atteignent la détection et le flux d'atomes qui quittent la source dans le cas d'un jet issu d'une source étendue transversalement et avec une distribution de vitesse longitudinale et transverse. A cette fin, établissons tout d'abord la loi de variation de la densité du jet libre³, considéré monocinétique, entre deux temps de vol t' et t'' .

L'évolution de la densité du jet résulte d'une part du mouvement longitudinal des atomes le long de la trajectoire nominale, et d'autre part, de leur mouvement transversal dans le plan des faisceaux de refroidissement transverse dû à une vitesse transverse résiduelle. Pour simplifier, nous négligeons la faible inclinaison du plan du mouvement transversal par rapport à l'horizontale ($\theta_0 \simeq 1.8^\circ$) et considérons ce mouvement dans le plan horizontal Oxy . Nous décrivons alors la densité $n(\vec{r}, t)$ du jet le long de la trajectoire au

³On entend par jet libre, un jet qui n'est pas tronqué par un diaphragme le long de sa trajectoire.

temps (de vol) t , à l'altitude $z(t)$ et au point $\vec{r}$ du plan Oxy , dont l'origine des coordonnées coïncide avec le centre⁴ du jet, sous la forme :

$$n(\vec{r}, t) = n_z(t) n_s(\vec{r}, t) \quad (3.38)$$

où $n_z(t)$ représente la densité linéique selon z due au mouvement longitudinal et $n_s(\vec{r}, t)$ la densité surfacique ou transverse dans le plan horizontal. L'équation de continuité pour un flux de particules s'écrit :

$$\frac{\partial n}{\partial t^*}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{\rho}_\Phi(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.39)$$

où $\vec{\rho}_\Phi(\vec{r}, t) = n(\vec{r}, t) \vec{v}(t)$ est la densité du flux de particules. Nous nous intéressons au cas stationnaire, lorsque la densité du jet en un point donné ne dépend pas du temps⁵. L'équation de continuité se réduit alors à :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\rho}_\Phi(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.40)$$

qui exprime que le flux est conservatif. On en déduit la conservation du flux total Φ à travers une surface le long de la trajectoire du jet :

$$\Phi(t) = \int \vec{\rho}_\Phi(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = \text{constante} \quad (3.41)$$

Calculons le flux du jet à travers une surface horizontale. De la relation ci-dessus, le flux au temps t peut donc s'écrire :

$$\Phi(t) = \int n(\vec{r}, t) v_z(t) d^2r \quad (3.42a)$$

$$= n_z(t) v_z(t) \int n_s(\vec{r}, t) d^2r \quad (3.42b)$$

Posons $\mathcal{N}(t)$ le nombre relatif de particules dans le plan horizontal au temps t :

$$\mathcal{N}(t) = \int n_s(\vec{r}, t) d^2r \quad (3.43)$$

⁴Le centre du jet est le point où la densité est la plus élevée. Il décrit la trajectoire nominale si la vitesse initiale du jet correspond à la vitesse nominale, sinon il s'en écarte.

⁵Il ne faut pas confondre le temps t^* apparaissant dans (3.39), qui correspond effectivement à la coordonnée temporelle, avec le temps de vol de l'équation (3.38). Ce dernier sert à repérer la position de la densité le long de la trajectoire nominale et est équivalent à la donnée de la coordonnée z (altitude) avec l'avantage d'une relation univoque avec la position. Dans cette section, lorsque nous parlerons de temps t , c'est au temps de vol que nous nous référerons.

La conservation du flux entre t' et t'' nous permet d'écrire :

$$n_z(t') v_z(t') \mathcal{N}(t') = n_z(t'') v_z(t'') \mathcal{N}(t'') \quad (3.44)$$

d'où

$$n_z(t'') = n_z(t') \frac{v_z(t')}{v_z(t'')} \cdot \frac{\mathcal{N}(t')}{\mathcal{N}(t'')} \quad (3.45)$$

De la définition de la densité linéique, on obtient la relation suivante :

$$n_z(t) = \int n(\vec{r}, t) d^2r = n_z(t) \mathcal{N}(t) \quad (3.46)$$

d'où l'on déduit que :

$$\mathcal{N}(t) = 1 \quad \forall t \geq 0 \quad (3.47)$$

Cette relation traduit la conservation du nombre de particules dans le plan horizontal pour un jet libre. On arrive donc à la dépendance suivante pour la densité linéique :

$$n_z(t'') = n_z(t') \frac{v_z(t')}{v_z(t'')} \quad (3.48)$$

Nous pouvons maintenant calculer l'expression du flux à la détection en fonction du flux initial. Le flux du jet à travers un plan horizontal à la sortie de la source ($t = 0$) est donné par :

$$\Phi(0) = n_z(0) v_z(0) \mathcal{N}(0) \quad (3.49)$$

Juste avant le refroidissement transverse ($t = t_{1-}$), le flux du jet à travers un plan horizontal s'écrit :

$$\Phi(t_{1-}) = n_z(t_{1-}) v_z(t_{1-}) \mathcal{N}(t_{1-}) \quad (3.50)$$

La conservation du flux entre la source et le refroidissement transverse implique qu'il est égal à $\Phi(0)$ et que $\mathcal{N}(t_{1-}) = \mathcal{N}(0) = 1$. On en déduit :

$$\Phi(0) = n_z(t_{1-}) v_z(t_{1-}) \quad (3.51)$$

Le flux du jet à travers un plan horizontal juste après le refroidissement transverse ($t = t_{1+}$) est donné par :

$$\Phi(t_{1+}) = n_z(t_{1+}) v_z(t_{1+}) \mathcal{N}(t_{1+}) \quad (3.52)$$

Par rapport à $\Phi(0)$, nous obtenons :

$$\frac{\Phi(t_{1+})}{\Phi(0)} = \frac{n_z(t_{1+})}{n_z(t_{1-})} \cdot \frac{v_z(t_{1+})}{v_z(t_{1-})} \mathcal{N}(t_{1+}) \simeq \mathcal{N}(t_{1+}) \quad (3.53)$$

où nous avons admis que $n_z(t_{1+}) = n_z(t_{1-})$ et $v_z(t_{1+}) = v_z(t_{1-})$ puisque le refroidissement transverse est considéré se faire uniquement dans un plan horizontal (cf. p. 54) et que nous avons posé $\cos \theta_0 \simeq 1$. Enfin, le flux du jet à la détection 1 ($t = t_{51}$) à travers un plan horizontal vaut :

$$\Phi(t_{51}) = n_z(t_{51}) v_z(t_{51}) \mathcal{N}(t_{51}) \quad (3.54)$$

où $\mathcal{N}(t_{51})$ tient compte de l'effet de la troncature du jet par les différents diaphragmes depuis la source et $n_z(t_{51})$ est donné d'après (3.48) par :

$$n_z(t_{51}) = n_z(t_{1+}) \frac{v_z(t_{1+})}{v_z(t_{51})} \quad (3.55)$$

Nous arrivons alors à l'expression suivante pour le rapport $\Phi(t_{51})/\Phi(t_{1+})$:

$$\frac{\Phi(t_{51})}{\Phi(t_{1+})} = \frac{\mathcal{N}(t_{51})}{\mathcal{N}(t_{1+})} \quad (3.56)$$

et finalement, avec (3.53), nous obtenons le rapport $\Phi(t_{51})/\Phi(0)$ recherché :

$$\frac{\Phi(t_{51})}{\Phi(0)} = \mathcal{N}(t_{51}) \quad (3.57)$$

Cette expression est valable pour un jet monocinétique. Pour tenir compte du fait que le jet a une distribution de vitesse longitudinale, il faut intégrer (3.57) sur cette distribution. Notons $\mathcal{N}_{51}$ le nombre relatif de particules $\mathcal{N}(t_{51})$ intégré sur cette distribution. Le rapport du flux à la détection sur le flux initial, pour un jet non-monocinétique, devient alors :

$$\frac{\Phi_{d1}}{\Phi_0} = \mathcal{N}_{51} \quad (3.58)$$

où Φ_{d1} représente le flux à la détection 1 et $\Phi_0 = \Phi(0)$ car le jet est considéré monocinétique à la source. Comme dans la fontaine continue le jet n'évolue pratiquement plus transversalement après la cavité, on peut remplacer $\mathcal{N}_{51}$ par $\mathcal{N}_{4+}$ et se contenter de la relation simplifiée⁶ :

$$\frac{\Phi_{d1}}{\Phi_0} \simeq \mathcal{N}_{4+} \quad (3.59)$$

⁶L'expression $\mathcal{N}_{4+}$ veut dire que l'on estime le nombre relatif de particules dans un plan horizontal juste après le point 4 de la Fig. 3.2, c.-à-d. juste après le diaphragme représentant le deuxième passage dans la cavité micro-onde. Notons encore que la dépendance par rapport à la distribution de vitesse longitudinale est implicitement contenue dans cette expression.

Comme on pouvait s’y attendre, on constate que le rapport ne dépend que de la densité surfacique du jet.

Nous allons maintenant passer au calcul de cette dernière expression en estimant l’évolution de la densité surfacique du jet le long de la trajectoire par étapes successives, depuis la source jusqu’à la sortie de la cavité micro-onde.

Conditions initiales du jet à la sortie de la source

Le jet est issu d’une source étendue, la mélasse optique, qui occupe principalement un volume sphérique (l’intersection des trois paires de faisceaux de refroidissement) de diamètre environ égal au diamètre des faisceaux. Dû à l’entraînement des atomes par la méthode de la mélasse mouvante, le jet proprement dit est formé et quitte la source à une certaine hauteur du centre de la mélasse optique que nous estimons de l’ordre de 25 mm. La symétrie de la configuration de la mélasse mouvante autorise à penser que la densité surfacique des atomes froids dans le jet à la sortie de la source décroît transversalement depuis son centre suivant une loi isotrope, ce qui semble confirmé par les premières mesures effectuées sur le jet de la fontaine expérimentale [Dom02]. Pour simplifier le calcul, nous considérons la “source” du jet comme étendue transversalement (dans le plan Oxy), mais confinée dans un plan horizontal (nous négligeons son étendue selon z) passant par le centre de la mélasse optique ($z = 0$).

Dans la source, les atomes froids sont animés d’une vitesse longitudinale moyenne de lancement selon z bien contrôlée, produite par la technique de la mélasse mouvante. Les processus de refroidissement sub-Doppler qui sont à l’oeuvre dans la mélasse pour ralentir les atomes induisent une composante aléatoire en grandeur et en direction qui s’ajoute à la vitesse longitudinale moyenne de lancement des atomes. On peut représenter cette composante aléatoire, avec une bonne approximation, par une distribution gaussienne de vitesse selon chaque degré de liberté. La largeur de la distribution est reliée, pour chaque degré de liberté, à la vitesse quadratique moyenne des atomes. On peut alors attribuer une température cinétique, via la constante de Boltzmann, à chaque degré de liberté. Vu la symétrie de la mélasse optique, nous pouvons raisonnablement supposer que la distribution de vitesse dans la mélasse est isotrope, c.-à-d. que la température cinétique de chaque degré de liberté est identique. Dans le modèle, nous négligeons la distribution de vitesse longitudinale qui n’a que peu d’influence sur la courte distance source - refroidissement transverse h_t .

De ces hypothèses simplificatrices, nous déduisons les conditions initiales suivantes du jet à la sortie de la “source” ($t = 0$) :

1. *Densité surfacique :*

Nous supposons que la densité surfacique initiale est isotrope et décroît suivant une loi gaussienne. On peut donc l'écrire :

$$n_s(r, 0) = n_{s_0} e^{-r^2/R_0^2} \quad (3.60)$$

où R_0 est le rayon quadratique moyen de la densité surfacique initiale au temps $t = 0$ et n_{s_0} sa valeur initiale au centre du jet. R_0 est relié au rayon initial à e^{-2} du jet R_{jet} , par la relation :

$$R_0 = \frac{R_{\text{jet}}}{\sqrt{2}} \quad (3.61)$$

La condition (3.47), soit $\mathcal{N}(0) = 1$, permet de déterminer n_{s_0} . On trouve :

$$n_{s_0} = \frac{1}{\pi R_0^2} \quad (3.62)$$

2. *Distribution de vitesse transverse :*

La distribution de vitesse transverse initiale est supposée isotrope et gaussienne en tout point du plan Oxy , de vitesse moyenne nulle et de vitesse quadratique moyenne initiale $v_{t_{0\text{rms}}}$. Sa densité de probabilité normalisée est donnée par :

$$\rho_0(v_t) = \frac{1}{\pi v_{t_{0\text{rms}}}^2} e^{-v_t^2/v_{t_{0\text{rms}}}^2} \quad (3.63)$$

La vitesse transverse quadratique moyenne initiale $v_{t_{0\text{rms}}}$ est reliée à la température transverse initiale T_{t_0} par la relation :

$$v_{t_{0\text{rms}}} = \left(\frac{k_B T_{t_0}}{m_{\text{Cs}}} \right)^{1/2} \quad (3.64)$$

où k_B est la constante de Boltzman et m_{Cs} la masse de l'atome de césium 133 (cf. annexe A).

3. *Distribution de vitesse de lancement :*

Nous négligeons la distribution de vitesse de lancement, c.-à-d. que nous considérons un jet monocinétique ($T_{l_0} = 0$) de vitesse de lancement $\bar{v}_L$ correspondant à la vitesse de lancement moyenne du jet réel.

Evolution libre du jet

Sous l'action de la distribution de vitesse transverse, $n_s(r, 0)$ va évoluer librement jusqu'à ce que le jet atteigne la zone de refroidissement transverse au temps $t = t_{1-}$. Le calcul de l'évolution libre de $n_s(r, 0)$ sous les conditions initiales formulées ci-dessus, fait l'objet de la première partie de l'annexe B. De l'équation (B.17) de cette annexe, nous pouvons écrire pour $t = t_{1-}$ et $t_0 = 0$:

$$n_s(r, t_{1-}) = n_{s0} \frac{R_0^2}{R_1^2} e^{-r^2/R_1^2} \quad (3.65)$$

avec

$$R_1^2 = R_0^2 + v_{t_{0rms}}^2 t_1^2 \quad (3.66)$$

où R_1 est le rayon quadratique moyen de la densité surfacique au niveau du refroidissement transverse. Notons que la densité surfacique est ici encore gaussienne. Ensuite le jet traverse la zone de refroidissement transverse dont nous allons modéliser l'effet sur le jet.

Conditions initiales du jet à la sortie du refroidissement transverse 2D

Nous modélisons l'effet du refroidissement transverse 2D sur le jet de la manière la plus simple possible. En fait, c'est le faisceau de refroidissement transverse selon x qui, incliné de l'angle θ_0 , dévie le jet dans le plan Oxz de ce même angle par rapport à l'axe z . Dans notre modèle, la déviation du jet est prise en compte dans la trajectoire nominale et le refroidissement transverse agit dans un plan horizontal. Son effet sur le jet, comme son nom l'indique, est de ralentir les atomes en "annulant" leur composante de vitesse dans ce plan. Les processus de refroidissement à l'oeuvre, que nous supposons être sub-Doppler, induisent également de par leur nature une composante aléatoire de vitesse transverse en direction et en grandeur qui s'ajoute à la vitesse longitudinale des atomes. De la symétrie dans le plan Oxy du refroidissement transverse, on peut admettre que la distribution de vitesse transverse résultante est isotrope et que sa vitesse quadratique moyenne est évidemment inférieure à celle des atomes à la sortie de la source. Le refroidissement transverse engendre par contre un réchauffement longitudinal du jet puisqu'il n'y a pas de faisceaux de refroidissement selon cette direction. La distribution de vitesse longitudinale résultante à la sortie du refroidissement transverse est supposée gaussienne, de vitesse moyenne égale à la vitesse moyenne du jet juste avant le refroidissement transverse. Dû au réchauffement longitudinal, la vitesse quadratique moyenne longitudinale devrait être supérieure à la vitesse quadratique moyenne transverse.

Ensuite, nous considérons que le refroidissement transverse à lieu uniquement dans le plan Oxy à l'altitude $z = h_t$ et au temps $t = t_1$, c.-à-d. nous négligeons la dimension des faisceaux selon z . Nous faisons encore l'hypothèse que tous les atomes du jet sont refroidis transversalement⁷ et que la distribution de vitesse transverse résultante ne dépend pas de la position dans le plan Oxy du jet.

De ces hypothèses simplificatrices, nous déduisons les conditions initiales suivantes du jet juste après le refroidissement transverse ($t = t_{1+}$) :

1. *Densité surfacique :*

La densité surfacique est donc identique à celle juste avant le refroidissement transverse :

$$n_s(r, t_{1+}) = n_s(r, t_{1-}) \quad (3.67)$$

2. *Distribution de vitesse transverse :*

La distribution de vitesse transverse est supposée isotrope et gaussienne en tout point du plan Oxy , de vitesse moyenne nulle et de vitesse quadratique moyenne $v_{t_{\text{rms}}} < v_{t_{0\text{rms}}}$. Sa densité de probabilité normalisée est la suivante ⁸ :

$$\rho(v_t) = \frac{1}{\pi v_{t_{\text{rms}}}^2} e^{-v_t^2/v_{t_{\text{rms}}}^2} \quad (3.68)$$

La vitesse transverse quadratique moyenne $v_{t_{\text{rms}}}$ est reliée à la température transverse T_t du jet après le refroidissement transverse par la relation :

$$v_{t_{\text{rms}}} = \left(\frac{k_B T_t}{m_{Cs}} \right)^{1/2} \quad (3.69)$$

3. *Distribution de vitesse longitudinale :*

La distribution de vitesse longitudinale est supposée gaussienne de vitesse moyenne $\bar{v}_l$ et de vitesse quadratique moyenne $v_{l_{\text{rms}}} > v_{t_{\text{rms}}}$. Sa densité de probabilité normalisée s'écrit donc :

$$\rho(v_l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} v_{l_{\text{rms}}}} e^{-(v_l - \bar{v}_l)^2 / 2v_{l_{\text{rms}}}^2} \quad (3.70)$$

La vitesse longitudinale quadratique moyenne $v_{l_{\text{rms}}}$ est reliée à la température longitudinale T_l du jet après le refroidissement transverse par

⁷Cette hypothèse sous-tend que la vitesse de capture v_c du refroidissement transverse est suffisamment élevée, soit $v_c > v_{t_{0\text{rms}}}$.

⁸Dans tout ce qui suit, nous laissons tomber l'indice 1 dans la notation des grandeurs qui se réfèrent au refroidissement transverse pour ne pas surcharger l'écriture.

la relation :

$$v_{l_{\text{rms}}} = \left(\frac{k_B T_l}{m_{\text{Cs}}} \right)^{1/2} \quad (3.71)$$

Evolution du jet sous contraintes

Il s'agit maintenant de calculer l'évolution, sous les conditions initiales formulées ci-dessus, de la densité surfacique du jet le long de la trajectoire parabolique. Plus précisément nous désirons déterminer $n_s(r, t_{4-})$, c.-à-d. la densité surfacique juste avant le diaphragme du point 4 de la Fig. 3.2 ($t = t_{4-}$) qui représente le deuxième passage à travers la cavité micro-onde. Avant d'atteindre ce diaphragme, le jet va en rencontrer d'autres (points 2 et 3 de la Fig. 3.2) qui vont le tronquer et modifier son évolution ultérieure. Le calcul approximatif de l'évolution de $n_s(r, t)$ après le point 3 ($t_3 \leq t \leq t_4$), en tenant compte de l'effet des diaphragmes 2 et 3, est présenté en détail dans la deuxième partie de l'annexe B. En posant $t = t_{4-}$ et $t_0 = t_1$ dans l'équation (B.71) de cette annexe, nous obtenons :

$$n_s(r, t_{4-}) = n_{s_4} e^{-r^2/R_4^{*2}} \quad (3.72)$$

avec :

$$n_{s_4} = n_{s_0} \frac{R_0^2}{R_4^2} (1 - A_{04}) \quad (3.73)$$

où le rayon R_4 est donné par :

$$R_4^2 = R_1^2 + v_{t_{\text{rms}}}^2 (t_4 - t_1)^2 \quad (3.74)$$

C'est en fait le rayon quadratique moyen de la densité surfacique correspondant à l'évolution libre du jet jusqu'au diaphragme 4. Le coefficient $A_{04} = A_0(t_4)$ est calculé à partir de l'équation (B.70b) et le rayon quadratique moyen effectif $R_4^* = R^*(t_4)$ de la densité surfacique avec l'équation (B.73) et les coefficients donnés par les équations (B.70a) et (B.70b) dans lesquelles on a remplacé $R(t_0)$ par $R(t_1) = R_1$, $v_{t_{0_{\text{rms}}}}$ par $v_{t_{\text{rms}}}$ et t_0 par t_1 pour satisfaire les conditions initiales au temps t_{1+} .

Pour déterminer le flux d'atomes à la détection, nous devons d'abord calculer $\mathcal{N}(t_{4+})$ pour un jet monocinétique. Ceci revient à intégrer $n_s(r, t_{4-})$ sur l'ouverture du deuxième passage de la cavité micro-onde. Nous allons, dans un premier temps, estimer le rayon apparent R_{ca} de l'ouverture de la cavité.

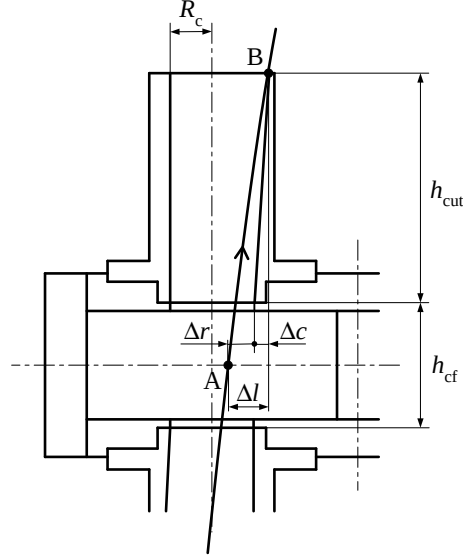


Fig. 3.3: Coupe de la cavité micro-onde dans un plan vertical au centre du premier trou de passage. La trajectoire représente “l’extrémité droite” du jet qui traverse la cavité. Les valeurs numériques des cotes mécaniques sont résumées dans le Tab. 3.5.

Modélisation du passage de la cavité

Comme mentionné au début de cette section, nous modélisons l’effet sur le jet de la traversée de la cavité par un diaphragme circulaire de rayon R_{ca} , situé dans le plan médian de la cavité micro-onde. La Fig. 3.3 représente schématiquement une coupe de la cavité micro-onde dans un plan vertical passant par le centre du premier trou de passage. La hauteur h_{cf} correspond à la hauteur interne effective de la cavité pour le flux et h_{cut} est la hauteur des cut-offs de la cavité, qui sont inclinés pour favoriser le passage des atomes. Les valeurs des cotes mécaniques de la Fig. 3.3 sont résumées dans le Tab. 3.5. Nous désirons estimer, en fonction de la vitesse longitudinale v_l , la distance $\Delta r(v_l)$ dans le plan médian de la cavité ($z = H_{ct}$) entre le bord droit du trou de passage et “l’extrémité droite” du jet qui traverse la cavité. Le temps de vol entre les points A et B est donné par :

$$\Delta t_{AB}(v_l) = t_- \left(H_c + \frac{h_{cf}}{2} + h_{cut}, v_l \right) - t_-(H_c, v_l) \quad (3.75)$$

où $t_-(z, v_l)$ est donné par l’équation (3.26). La distance $\Delta l(v_l)$ vaut alors :

$$\Delta l(v_l) \simeq (v_{l_x} + v_{t_{rms}}) \Delta t_{AB}(v_l) \quad (3.76)$$

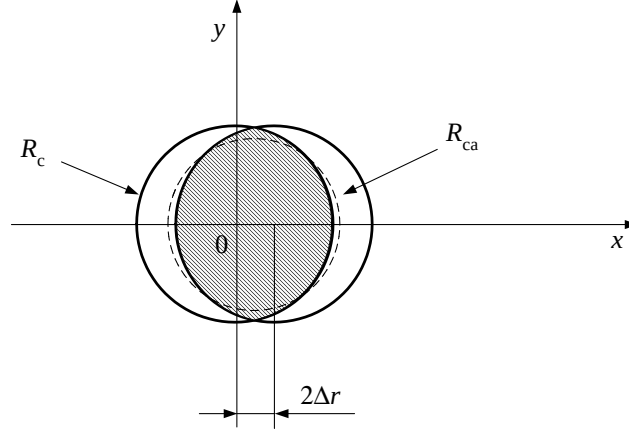


Fig. 3.4: Représentation de la surface apparente des trous de passage dans le plan médian de la cavité. Cette section est approximée par un cercle de surface équivalente (en traitillé) et de rayon R_{ca} . Sa valeur pour la vitesse initiale nominale du jet est donnée dans le Tab. 3.5.

avec v_{lx} la composante selon l'axe x de la vitesse longitudinale après le refroidissement transverse. La distance $\Delta r(v_l)$ s'exprime par :

$$\Delta r(v_l) = \Delta l(v_l) - \Delta c = (v_{lx} + v_{t_{rms}}) \Delta t_{AB}(v_l) - \Delta c \quad (3.77)$$

où Δc est la distance du bord du trou de passage au bord incliné du cut-off. En fonction de la vitesse de lancement v_L du jet, on obtient finalement l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \Delta r(v_L) = \frac{1}{g} \left[(v_L^2 - 2gh_t)^{1/2} \sin \theta_0 + v_{t_{rms}} \right] & \left[(v_L^2 - 2gH_c)^{1/2} \right. \\ & \left. - \left(v_L^2 - 2g \left(H_c + \frac{h_{cf}}{2} + h_{cut} \right) \right)^{1/2} \right] - \Delta c \end{aligned} \quad (3.78)$$

On considère que “l’extrémité gauche” du jet passe dans le plan $z = H_{ct}$ à la même distance $\Delta r(v_L)$ que son “extrémité droite”. Ceci revient à sous-estimer un peu le flux après la cavité. Dans ce cas, l’ouverture apparente de la cavité “vue” par les atomes du jet peut être modélisée par l’intersection de deux cercles de rayon R_c (rayon des trous de passage de la cavité) dont les centres sont translatés selon x de la distance $2\Delta r(v_L)$ dans le plan médian. La surface de l’ouverture apparente dans le plan médian est représentée par l’aire hachurée dans le schéma de la Fig. 3.4. Cette section apparente des trous de passage de la cavité varie avec la vitesse de lancement v_L du jet puisque

<i>Grandeur</i>	<i>Notation</i>	<i>Valeur</i>
Hauteur de la cavité pour le flux	h_{cf}	30 mm
Hauteur des cut-offs	h_{cut}	60 mm
Distance bord trou - bord cut-off	Δc	2.6 mm
Rayon des trous de passage de la cavité	R_c	4.5 mm
Rayon apparent (pour $v_L = v_{L_0}$)	R_{ca}	3.0 mm

Tab. 3.5: Valeur des cotes mécaniques du schéma de la Fig. 3.3 et du rayon apparent de la cavité R_{ca} pour la vitesse de lancement nominale du jet v_{L_0} .

la distance $\Delta r(v_L)$ en dépend. Il est clair que, plus la vitesse de lancement du jet est élevée plus l'angle par rapport à la verticale de la trajectoire du jet au centre de cavité sera petit, conduisant à une ouverture apparente plus grande. A l'inverse, plus la vitesse de lancement du jet est petite et plus l'angle d'inclinaison du jet sera grand, ce qui résultera en une ouverture apparente plus petite. On s'attend donc à une variation du flux d'atomes à la détection en fonction de la vitesse de lancement, qui n'est pas symétrique par rapport à la vitesse de lancement nominale v_{L_0} . Nous approximons cette section apparente par une surface circulaire équivalente de rayon $R_{\text{ca}}(v_L)$ et de même surface, centrée à mi-distance des deux cercles de rayon R_c . Le rayon apparent $R_{\text{ca}}(v_L)$ des trous de passage de la cavité est alors donné en fonction de la distance $\Delta r(v_L)$ par l'expression :

$$R_{\text{ca}}(v_L) = (R_c - \Delta r(v_L)) \left(\frac{19R_c + 13\Delta r(v_L)}{6\pi\sqrt{R_c^2 - \Delta r^2(v_L)}} \right)^{1/2} \quad (3.79)$$

La valeur de ce rayon pour la vitesse de lancement nominale v_{L_0} du jet est indiquée dans le Tab. 3.5.

Expression du rapport Φ_{d1}/Φ_0 pour un jet monocinétique

Nous pouvons maintenant calculer la grandeur $\mathcal{N}(t_{4+})$ donnée d'après (3.43) par :

$$\mathcal{N}(t_{4+}) = \int_{S_4} n_s(\vec{r}, t_{4-}) d^2r \quad (3.80)$$

Afin de faciliter l'intégration de $n_s(\vec{r}, t_{4-})$ sur la surface S_4 nous effectuons le changement de variables indiqué dans la Fig. 3.5. La surface S_4 correspond à la section apparente des trous de passage de la cavité, modélisée précédemment par un cercle de rayon R_{ca} . La distance a mesure l'écart du centre du

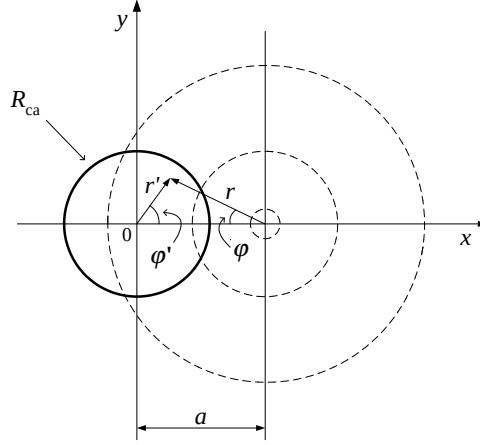


Fig. 3.5: Changement de variables d'intégration effectué dans l'équation (3.80). Le cercle de rayon R_{ca} représente la modélisation de la section apparente des trous de passage de la cavité. La distance a mesure l'écart du centre du jet par rapport au centre du cercle.

jet par rapport au centre du cercle de rayon R_{ca} . Cette distance dépend de la vitesse longitudinale v_l du jet après le refroidissement transverse. Elle est nulle si la vitesse longitudinale est égale à la vitesse longitudinale nominale v_{l_0} . Nous pouvons alors écrire pour une valeur définie de a , c.-à-d. pour une vitesse longitudinale v_l donnée, et en introduisant des coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(a, t_{4+}) &= n_{s_4} e^{-a^2/R_4^{*2}} \int_0^{R_{ca}} e^{-r'^2/R_4^{*2}} \int_0^{2\pi} e^{2ar' \cos \varphi' / R_4^{*2}} d\varphi' r' dr' \\ &= n_{s_4} 2\pi e^{-a^2/R_4^{*2}} \int_0^{R_{ca}} e^{-r'^2/R_4^{*2}} I_0(2ar'/R_4^{*2}) r' dr' \end{aligned} \quad (3.81)$$

où nous avons utilisé la relation (B.12), et $I_0(x)$ est la fonction de Bessel modifiée de 1^{ère} espèce d'ordre 0. Nous pouvons intégrer cette dernière équation de la même manière que nous l'avons fait pour l'équation (B.28) de l'annexe B, nous obtenons :

$$\mathcal{N}(a, t_{4+}) = \mathcal{N}' e^{-a^2/R_4^{*2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\gamma(n+1, R_{ca}^2/R_4^{*2})}{(n!)^2} \left(\frac{a^2}{R_4^{*2}} \right)^n \quad (3.82)$$

où $\gamma(n, x)$ est la fonction gamma incomplète [AS72], $n!$ la factorielle de n et $\mathcal{N}'$ un coefficient donné par :

$$\mathcal{N}' = \frac{R_4^{*2}}{R_4^2} (1 - A_{04}) \quad (3.83)$$

L'équation ainsi obtenue est valable pour un jet monocinétique, ce qui correspond à une valeur déterminée de la distance a . Nous désirons inclure dans ce modèle l'effet de la distribution de vitesse longitudinale du jet. Pour ce faire, il faut encore intégrer l'équation (3.82) sur cette distribution. Afin de simplifier les calculs, nous procéderons comme nous l'avons fait dans l'annexe B pour le calcul de la densité surfacique. Nous allons approximer la dépendance avec a de $\mathcal{N}(a, t_{4+})$ par un profil gaussien dont la largeur est déterminée à partir de (3.82). Ceci se justifie dans notre cas, car le jet à la sortie du refroidissement transverse a une extension transversale non-nulle. Le rayon à e^{-2} du jet, à cet endroit, est de l'ordre de grandeur du rayon apparent des trous de passage de la cavité micro-onde. Donc, même pour une température transverse nulle, le jet n'est pas ponctuel et la variation de $\mathcal{N}(a, t_{4+})$ avec a est proche d'une gaussienne. Nous pouvons par conséquent, avec une bonne approximation, écrire l'équation (3.82) sous la forme :

$$\mathcal{N}(a, t_{4+}) = \mathcal{N}_4 e^{-a^2/a_4^2} \quad (3.84)$$

où le coefficient $\mathcal{N}_4$ vaut :

$$\mathcal{N}_4 = \frac{R_4^{*2}}{R_4^2} (1 - A_{04}) \gamma(1, R_{ca}^2/R_4^{*2}) \quad (3.85)$$

et l'écart quadratique moyen a_4 se calcule avec :

$$a_4^2 = R_4^{*2} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)!! (n!)^{-2} 2^{-(n+1)} \gamma(n+1, R_{ca}^2/R_4^{*2})}{\sum_{n=0}^{+\infty} (2n-1)!! (n!)^{-2} 2^{-n} \gamma(n+1, R_{ca}^2/R_4^{*2})} \quad (3.86)$$

où $n!!$ est la double factorielle de n . Pour être en mesure d'intégrer $\mathcal{N}(a, t_{4+})$ sur la distribution de vitesse longitudinale $\rho(v_l)$, il faut encore connaître la dépendance de a par rapport à la vitesse longitudinale v_l après le refroidissement transverse.

Détermination de $a(v_l)$

Lorsque la vitesse longitudinale du jet après le refroidissement transverse varie, la hauteur de la trajectoire parabolique du jet varie aussi, ce qui résulte en un point d'impact du centre du jet dans le plan médian de la cavité (altitude $z = H_c$) qui est déplacé selon l'axe x . Si la vitesse longitudinale v_l du jet est supérieure à sa vitesse longitudinale nominale v_{l_0} , le centre du jet sera déplacé vers des valeurs x plus grandes et inversement si sa vitesse longitudinale est inférieure. Nous avons représenté cet effet dans le schéma de la Fig. 3.6. La trajectoire en trait continu correspond à la trajectoire nominale du jet lorsque sa vitesse longitudinale est égale à v_{l_0} , tandis que la courbe

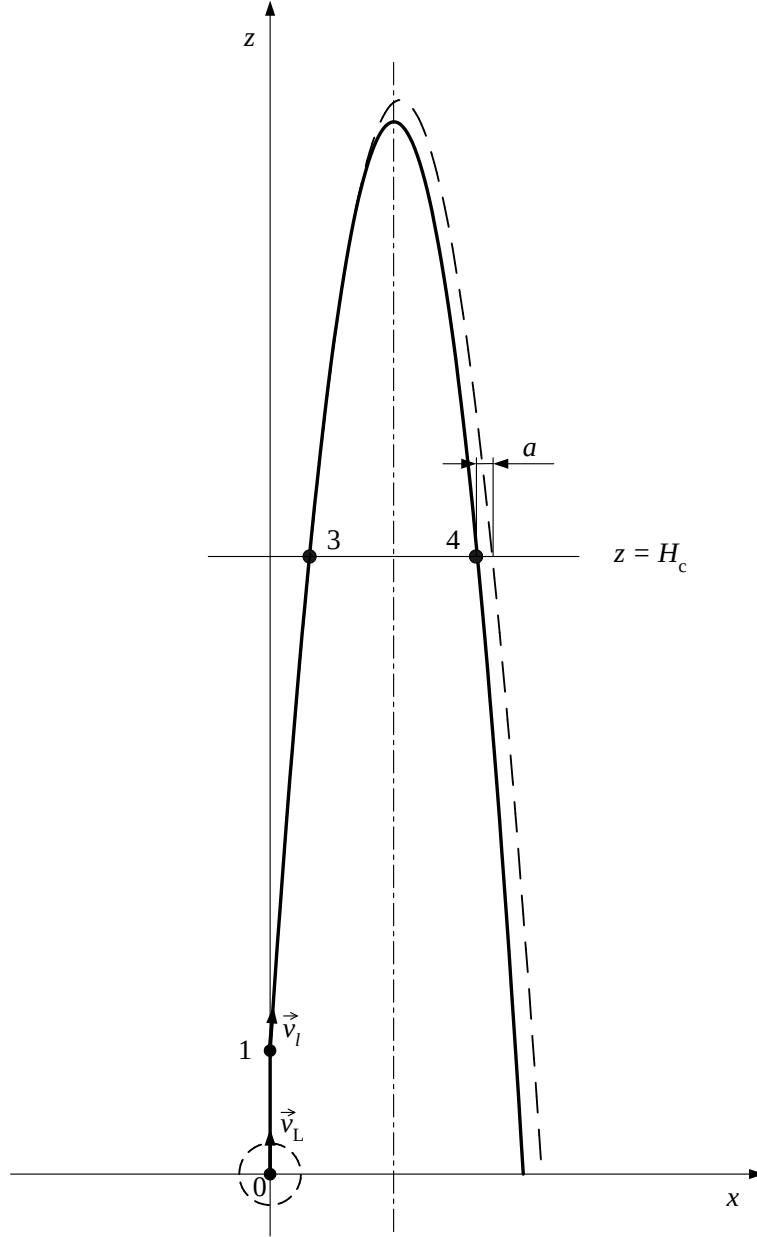


Fig. 3.6: Schéma de l'effet de la vitesse longitudinale du jet sur sa trajectoire. La trajectoire en trait continu correspond à la trajectoire nominale. Celle en traitillé représente une trajectoire pour laquelle la vitesse longitudinale du jet est supérieure à sa vitesse longitudinale nominale. La distance a mesure l'écart du centre du jet par rapport au centre des trous de passage dans le plan médian de la cavité.

en traitillé représente la trajectoire du jet pour une vitesse longitudinale supérieure. L'écart entre le centre du jet et le centre du rayon apparent des trous de passage dans le plan médian de la cavité est représenté par la distance a .

De l'équation générale de la trajectoire parabolique (3.5), on peut déterminer l'équation de la trajectoire pour une vitesse longitudinale quelconque après le refroidissement transverse. Pour cela, introduisons dans (3.5) les composantes v_{lx} et v_{lz} de la vitesse longitudinale en fonction de l'angle d'inclinaison initial θ_0 de la trajectoire. Nous obtenons :

$$z(x) = x \left(\cot \theta_0 - \frac{gx}{2v_l^2 \sin^2 \theta_0} \right) + h_t \quad x \geq 0 \quad (3.87)$$

On en déduit la valeur de la vitesse longitudinale pour x et z fixés :

$$v_l(x, z) = \left(\frac{gx^2}{2 \sin \theta_0 (x - (z - h_t) \sin \theta_0)} \right)^{1/2} \quad (3.88)$$

L'écart vaut $a = x - (l + L)$ et nous pouvons écrire, pour $z = H_c$, la relation suivante :

$$v_l(a) = \left(\frac{g(a + l + L)^2}{2 \sin \theta_0 (a + l + L - H_{ct} \sin \theta_0)} \right)^{1/2} \quad (3.89)$$

Dans le domaine de variation de la différence de vitesse longitudinale $v_l - v_{l_0}$ qui nous intéresse (typiquement quelques cm/s), la relation entre a et $v_l - v_{l_0}$ est quasiment linéaire. On peut donc se contenter de développer l'équation (3.89) au 1^{er} ordre autour de $a = 0$. Il vient :

$$v_l(a) \simeq v_l(0) + \frac{dv_l}{da}(0) a = v_{l_0} + v'_{l_0} a \quad (3.90)$$

ce qui donne :

$$a(v_l) \simeq a_1 (v_l - v_{l_0}) \quad (3.91)$$

avec le coefficient de proportionnalité a_1 donné par :

$$a_1 = \frac{1}{v'_{l_0}} = 2 \left(\frac{2 \sin \theta_0}{g} \right)^{1/2} \frac{(L + l - H_{ct} \sin \theta_0)^{3/2}}{L + l - 2H_{ct} \sin \theta_0} \quad (3.92)$$

Pour les paramètres de la fontaine continue, ce coefficient vaut :

$$a_1 = 0.49 \text{ mm/cm s}^{-1} \quad (3.93)$$

Expression du rapport Φ_{d1}/Φ_0 pour un jet non-monocinétique

Nous atteignons enfin la dernière étape du calcul du flux à la détection, soit l'intégration de (3.84) sur la distribution de vitesse longitudinale donnée par (3.70). La distance a s'écrit, pour une vitesse longitudinale moyenne $\bar{v}_l$ différente de la vitesse longitudinale nominale v_{l_0} :

$$a(v_l) = a_1(\bar{v}_l - v_{l_0}) + a_1(v_l - \bar{v}_l) = \bar{a} + a_1(v_l - \bar{v}_l) \quad (3.94)$$

Il est utile d'exprimer $\bar{a}$ en fonction de la vitesse de lancement du jet v_L qui est un paramètre variable :

$$\bar{a} = a_1 \left((v_L^2 - 2gh_t)^{1/2} - v_{l_0} \right) \quad (3.95)$$

L'intégration de $\mathcal{N}(a, t_{4+})$ sur la distribution de vitesse (3.70) fournit :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{4+} &= \mathcal{N}_4 \int_0^{+\infty} \rho(v_l) e^{-a^2(v_l)/a_4^2} dv_l \\ &= \frac{\mathcal{N}_4}{\sqrt{2\pi} v_{l_{\text{rms}}}} e^{-\bar{a}^2/a_4^2} \int_{-\bar{v}_l}^{+\infty} e^{-(\alpha u^2 + 2\beta u)} du \end{aligned} \quad (3.96)$$

avec les coefficients :

$$\alpha = \frac{a_4^2 + 2a_1^2 v_{l_{\text{rms}}}^2}{2a_4^2 v_{l_{\text{rms}}}^2} \quad (3.97a)$$

$$\beta = \frac{\bar{a} a_1}{a_4^2} \quad (3.97b)$$

Nous considérons ici une distribution de vitesse longitudinale qui est très étroite, pour laquelle on a $v_{l_{\text{rms}}} \ll \bar{v}_l$. En effet, nous avons typiquement $v_{l_{\text{rms}}} \approx$ quelques cm/s et $\bar{v}_l \simeq 3.5$ m/s. Nous pouvons donc intégrer l'équation (3.96) de $-\infty$ à $+\infty$. L'intégrale qui en résulte vaut [AS72] :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha u^2 + 2\beta u)} du = \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{1/2} e^{\beta^2/\alpha} \quad (3.98)$$

D'après la relation (3.59), nous arrivons enfin à l'expression finale du rapport entre le flux d'atomes qui atteint la détection et le flux d'atomes qui quitte la source :

$$\frac{\Phi_{d1}}{\Phi_0} = \mathcal{N}_4 \frac{a_4}{(a_4^2 + 2a_1^2 v_{l_{\text{rms}}}^2)^{1/2}} \exp \left\{ - \left(\frac{a_4^2 + a_1^2 v_{l_{\text{rms}}}^2}{a_4^2 + 2a_1^2 v_{l_{\text{rms}}}^2} \right) \frac{\bar{a}^2}{a_4^2} \right\} \quad (3.99)$$

Dans cette équation, le coefficient $\mathcal{N}_4$ est donné par (3.85), a_4 se calcule avec l'équation (3.86), le coefficient a_1 est donné par (3.93) et la valeur de $v_{l_{\text{rms}}}$ dépend de la température longitudinale T_l par l'intermédiaire de la relation (3.71).

Le modèle analytique ainsi établi va nous permettre d'étudier l'influence de divers paramètres du jet sur le flux d'atomes à la détection, sur la distribution effective de vitesse longitudinale après la cavité ainsi que sur la densité moyenne du jet utile durant l'interrogation micro-onde. Il s'agit essentiellement de l'effet de la température transverse du jet, qui devrait être le plus important, ainsi que de l'effet de la température longitudinale du jet. Mais il sera également intéressant de voir l'influence du rayon quadratique moyen de la distribution initiale de densité surfacique du jet puisque sa valeur n'est pas très bien connue, bien que ce paramètre ne puisse pas être varié dans la fontaine continue. En variant la vitesse de lancement v_L , nous pourrions encore obtenir des renseignements intéressants sur le degré avec lequel il faut ajuster cette vitesse pour atteindre le flux d'atomes maximal à la détection.

Avant d'entreprendre cette analyse, nous allons vérifier la validité du modèle analytique que nous avons développé en comparant les résultats fournis par ce modèle aux résultats obtenus par des simulations Monte-Carlo des trajectoires atomiques. La description de ces simulations fait l'objet de la sous-section suivante.

3.3.2 Simulations Monte-Carlo

Nous avons effectué des simulations *Monte-Carlo* des trajectoires des atomes du jet de la fontaine continue dont le but principal est de valider la modélisation réalisée dans la sous-section précédente. En effet, ce type de simulation permet de prendre en compte plus correctement l'influence sur le jet des diaphragmes situés sur la trajectoire, en particulier de la géométrie réelle des trous de passage de la cavité micro-onde.

Principe des simulations

Pour ces simulations, nous reprenons les mêmes conditions initiales du jet à la sortie de la source, et juste après le refroidissement transverse, que celles admises pour le modèle analytique. À savoir, juste à la sortie de la source, une distribution gaussienne isotrope pour les positions dans le plan horizontal et les vitesses transverses, mais pas de distribution de vitesse de lancement. Et à la sortie du refroidissement transverse, une distribution de position qui est identique à celle à l'entrée du refroidissement transverse et une distribution

gaussienne isotrope de vitesse transverse dans le plan horizontal ainsi qu'une distribution gaussienne de vitesse longitudinale.

Le principe de ces simulations est de tirer au hasard, sur un ensemble déterminé, les conditions initiales (vitesse et position) des trajectoires des atomes et de calculer si chaque trajectoire individuelle passe au travers des différents diaphragmes (trous circulaires ou géométrie réelle des ouvertures de la cavité micro-onde). On comptabilise ensuite le nombre de tirages qui ont donné lieu à une trajectoire qui a atteint la zone de détection. Le rapport de ce nombre sur le nombre total de tirages effectué donne une estimation de $\mathcal{N}_{4+}$. Evidemment, plus le nombre de tirages effectué est grand, meilleur est l'estimation de ce rapport. Comme mentionné dans la sous-section 3.3.1, $\mathcal{N}_{4+}$ est égal au rapport des flux puisque la composante z du module de la vitesse des atomes à la détection est environ égale à celle de la vitesse des atomes qui quittent la source. Si ce n'était pas le cas, il faudrait tenir compte des vitesses dans le calcul de ce rapport.

Calcul des trajectoires entre la source et le refroidissement transverse

Avec les conditions initiales que nous avons admises pour la source du jet (cf. p. 52), il s'agit de tirer au hasard une position initiale $\vec{r}_{0_k}$ dans le plan Oxy et une vitesse transverse initiale $\vec{v}_{t_{0_k}}$ sur une distribution gaussienne et isotrope. Il existe plusieurs manières de réaliser ceci. Nous utilisons la méthode de l'inversion directe de la fonction de distribution dont le point de départ pour la solution du problème est l'observation suivante.

Si X est une variable aléatoire avec une fonction de distribution $F(x)$, strictement monotone, alors $F(X)$ est distribuée uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$, soit :

$$P\{F(X) \leq y\} = y \quad (3.100)$$

où $P\{Z \leq z\}$ est la probabilité que la variable aléatoire Z soit $\leq z$. En effet, soit x_k tel que $F(x_k) = y_k$, alors :

$$P\{F(X) \leq y_k\} = P\{X \leq x_k\} = F(x_k) = y_k \quad (3.101)$$

Supposons que l'expression de la distribution $F(x)$ soit inversible, en échantillonnant la variable Y uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$, on obtient autant de réalisations de la variable aléatoire X que de Y :

$$x_k = F^{-1}(y_k) \quad (3.102)$$

Appliquons cette méthode au tirage de la position $\vec{r}_{0_k}$ et de la vitesse $\vec{v}_{t_{0_k}}$.

Distribution de positions :

Puisque la distribution de positions initiales est isotrope, nous avons deux variables aléatoires indépendantes, le module r_0 de la position et son angle φ_0 dans le plan Oxy par rapport à l'axe x . La densité de probabilité de la distribution de r_0 est donnée par :

$$\rho(r_0) = \frac{1}{\pi R_0^2} e^{-r_0^2/R_0^2} \quad (3.103)$$

où R_0 est le rayon quadratique moyen initial de la distribution. La fonction de distribution de (3.103) s'écrit :

$$F(r_0) = 1 - e^{-r_0^2/R_0^2} \quad (3.104)$$

Cette relation s'inverse facilement, et en tirant au hasard un nombre l_k dans $[0, 1]$ on obtient une réalisation r_{0_k} du rayon r_0 par :

$$r_{0_k} = R_0 \sqrt{-\ln(1 - l_k)} \quad (3.105)$$

Quant à l'échantillonnage de l'angle φ_0 , il se fait sur une distribution uniforme dans $[0, 2\pi]$.

Distribution de vitesse transverse :

L'échantillonnage de la vitesse transverse initiale $\vec{v}_{t_0}$ est identique à celui du rayon $\vec{r}_0$ puisque les deux distributions sont isomorphes. On tire donc au hasard un nombre s_k dans $[0, 1]$, puis on en déduit une réalisation $v_{t_{0_k}}$ de v_{t_0} par :

$$v_{t_{0_k}} = v_{t_{0_{rms}}} \sqrt{-\ln(1 - s_k)} \quad (3.106)$$

L'échantillonnage de l'angle ϕ_0 de la vitesse transverse dans le plan Oxy par rapport à l'axe x se fait sur une distribution uniforme dans $[0, 2\pi]$.

Trajectoires :

Chaque trajectoire des atomes est alors calculée de la façon suivante. Nous effectuons tout d'abord le tirage des conditions initiales (r_{0_k}, φ_{0_k}) et $(v_{t_{0_k}}, \phi_{0_k})$. Puis, nous calculons la trajectoire de l'atome, à partir de ces conditions initiales et de la vitesse de lancement v_L , jusqu'au plan horizontal du refroidissement transverse ($z_1 = h_t$). Les coordonnées (x_{k-}, y_{k-}) de la position de l'atome dans ce plan (juste avant le refroidissement transverse) se calculent de la manière suivante :

$$x_{k-} = r_{0_k} \cos \varphi_{0_k} + v_{t_{0_k}} t_1 \cos \phi_{0_k} \quad (3.107a)$$

$$y_{k-} = r_{0_k} \sin \varphi_{0_k} + v_{t_{0_k}} t_1 \sin \phi_{0_k} \quad (3.107b)$$

où t_1 est le temps de vol, qui dépend de v_L , du centre de la source jusqu'au plan du refroidissement transverse.

Calcul des trajectoires entre le refroidissement transverse et la détection

Pour tenir compte de l'effet du refroidissement transverse sur la trajectoire des atomes, nous déterminons en premier lieu les nouvelles conditions initiales (cf. p. 54) juste après ce dernier. La position initiale $\vec{r}_{k+}$ de l'atome juste après le refroidissement transverse est égale à $\vec{r}_{k-}$, donnée par (3.107), puisque le refroidissement transverse est considéré se dérouler uniquement dans le plan $z_1 = h_t$. Puis, nous faisons un nouveau tirage au sort de la vitesse transverse sur la nouvelle distribution de vitesse transverse $\rho(\vec{v}_t)$. Soit (a, ϕ_k) ces nouvelles valeurs initiales.

Distribution de vitesse longitudinale :

Il faut encore tirer la vitesse longitudinale v_{l_k} sur la distribution $\rho(v_l)$. Pour ce faire, nous utilisons la même méthode que précédemment. La fonction de distribution de $\rho(v_l)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} F(v_l) &= \int_{-\infty}^{v_l} \rho(v'_l) dv'_l \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{v_l - \bar{v}_l}{\sqrt{2} v_{l_{\text{rms}}}} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.108)$$

d'après (3.70), où $\operatorname{erf}(x)$ est la fonction d'erreur [AS72] et $v_{l_{\text{rms}}}$ est la vitesse quadratique moyenne de la distribution de vitesse longitudinale après le refroidissement transverse. On peut inverser également cette relation et on obtient une réalisation v_{l_k} de v_l par :

$$v_{l_k} = \sqrt{2} v_{l_{\text{rms}}} \operatorname{erf}^{-1}(2q_k - 1) + \bar{v}_l \quad (3.109)$$

où q_k est un nombre tiré au hasard dans $[0, 1]$ et $\bar{v}_l$ est la vitesse moyenne de la distribution de vitesse longitudinale après le refroidissement transverse. Cette dernière dépend de v_L par la relation suivante :

$$\bar{v}_l = \sqrt{v_L^2 - 2gh_t} \quad (3.110)$$

Trajectoires :

Les composantes cartésiennes du $k^{\text{ème}}$ tirage $\vec{v}_k$ de la vitesse initiale $\vec{v}$ juste après le refroidissement transverse sont alors données d'après la Fig. 3.7 par :

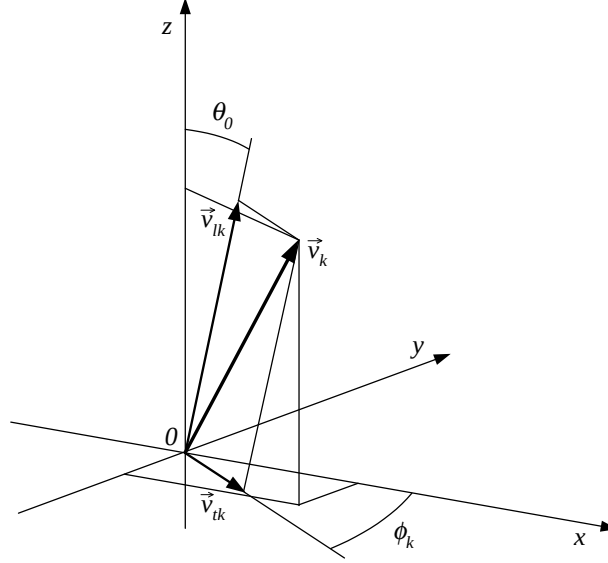


Fig. 3.7: Représentation du $k^{\text{ème}}$ tirage $\vec{v}_k$ de la vitesse initiale $\vec{v}$ après refroidissement transverse et de ses deux composantes aléatoires $\vec{v}_{l_k}$ et $\vec{v}_{t_k}$. Ses composantes cartésiennes sont données par les relations (3.111).

$$v_{x_k} = v_{l_k} \sin \theta_0 + v_{t_k} \cos \phi_k \cos \theta_0 \quad (3.111a)$$

$$v_{y_k} = v_{t_k} \sin \phi_k \quad (3.111b)$$

$$v_{z_k} = v_{l_k} \cos \theta_0 - v_{t_k} \cos \phi_k \sin \theta_0 \quad (3.111c)$$

De manière générale, nous calculons ensuite la position $\vec{r}_{n_k}$ de la $k^{\text{ème}}$ trajectoire de l'atome dans le plan $z_n = h_n$, contenant le $n^{\text{ème}}$ diaphragme, à partir des conditions initiales que nous venons de déterminer. Ses composantes s'écrivent pour $n \geq 2$:

$$x_{n_k} = x_{k+} + v_{x_k} t_{n_k} \quad (3.112a)$$

$$y_{n_k} = y_{k+} + v_{y_k} t_{n_k} \quad (3.112b)$$

t_{n_k} est le temps de vol du refroidissement transverse jusqu'au plan $z_n = h_n$:

$$t_{n_k} = \frac{1}{g} \left(v_{z_k} \pm (v_{z_k}^2 - 2g(h_n - h_t))^{1/2} \right) \quad n \geq 2 \quad (3.113)$$

Le signe est positif si le diaphragme est situé sur la partie descendante de la trajectoire et négatif s'il se trouve sur sa partie montante. Une fois cette

position calculée, on teste si celle-ci se situe à l'intérieur de la surface S_n du $n^{\text{ème}}$ diaphragme, à commencer par le 1^{er} diaphragme ($n = 2$, dans ce cas un cercle de rayon R_2).

- Si c'est le cas ($\vec{r}_{n_k} \subset S_n$), l'atome a donc franchi le diaphragme n sans encombres et peut poursuivre sa trajectoire. On calcul alors la position $\vec{r}_{(n+1)_k}$ de l'atome dans le plan du prochain diaphragme et on recommence le test.
- Si ce n'est pas le cas ($\vec{r}_{n_k} \not\subset S_n$), l'atome n'a pas franchi le diaphragme n et n'atteindra pas la zone de détection. Cette trajectoire ne peut donc pas être comptabilisée et on recommence le calcul d'une nouvelle trajectoire en effectuant un $(k + 1)^{\text{ème}}$ tirage des conditions initiales.

Remarque :

Pour prendre en compte correctement la géométrie réelle des deux ouvertures de la cavité micro-onde, nous décomposons chaque passage en quatre diaphragmes sur quatre plans différents. Les deux ouvertures étant identiques, décrivons la décomposition du premier passage (cf. Fig. 3.3). Le premier diaphragme rencontré par le jet se situe dans le plan $z = H_c - h_{\text{cf}}/2 - h_{\text{cut}}$ qui contient l'entrée du cut-off inférieur. Sa section est composée de la réunion de deux surfaces circulaires de rayon $R_c = 4.5$ mm dont les centres sont distants de 2.6 mm. Le diaphragme suivant se trouve dans le plan $z = H_c - h_{\text{cf}}/2$ qui se situe à la fin du cut-off inférieur et à l'entrée de l'ouverture circulaire de la cavité. Sa section est circulaire de rayon R_c . Le troisième diaphragme dans le plan $z = H_c + h_{\text{cf}}/2$ correspond à la fin de l'ouverture circulaire de la cavité et au début du cut-off supérieur. Sa section est identique au diaphragme précédent. Le dernier diaphragme se trouve dans le plan $z = H_c + h_{\text{cf}}/2 + h_{\text{cut}}$ à la sortie du cut-off supérieur. Sa section est identique à celle du premier diaphragme.

Estimation de différentes grandeurs physiques

Nous nous intéresserons dans la suite non seulement au flux d'atomes qui atteint la détection, mais également à différentes distributions de temps ou de vitesse.

Estimation du rapport Φ_{d1}/Φ_0 :

On désire déterminer le rapport Φ_{d1}/Φ_0 en fonction d'un paramètre ζ du jet dans l'intervalle $[\zeta_{\text{min}}, \zeta_{\text{max}}]$. Pour cela, on divise d'abord l'intervalle $\Delta\zeta = \zeta_{\text{max}} - \zeta_{\text{min}}$ en j sous-intervalles $\delta\zeta = \Delta\zeta/j$. Ensuite, on tire au hasard une tra-

jectoire k pour une valeur $\zeta_i = \zeta_{\min} + (i + \frac{1}{2}) \delta\zeta$ du paramètre ($0 \leq i \leq j-1$). Si cette trajectoire ne subit pas avec succès tous les tests décrits précédemment, c.-à-d. ne traverse pas tous les diaphragmes jusqu'à la zone de détection, cette trajectoire n'est pas comptabilisée. On incrémente dans ce cas uniquement le nombre de tirages N_j d'une unité. Dans le cas contraire, c.-à-d. si la trajectoire a atteint la zone de détection, on incrémente alors d'une unité le nombre N_i de trajectoires qui ont atteint la détection pour une valeur ζ_i du paramètre ainsi que le nombre de tirages N_j . On poursuit le calcul en effectuant un $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage d'une trajectoire et on recommence le processus que nous venons de décrire. Le calcul s'arrête après un nombre choisi $N_j = N_{\text{tot}}/j$ de tirages où N_{tot} est le nombre total de tirages. On obtient finalement une estimation du rapport Φ_{d1}/Φ_0 du flux d'atomes qui a atteint la détection sur le flux initial d'atomes à la sortie de la source, pour la valeur ζ_i du paramètre, par le rapport :

$$\frac{\Phi_{\text{d1}}}{\Phi_0}(\zeta_i) = \frac{N_i}{N_j} \quad (3.114)$$

On recommence alors le même processus pour une nouvelle valeur ζ_{i+1} du paramètre qui va fournir une estimation du rapport $\Phi_{\text{d1}}/\Phi_0(\zeta_{i+1})$. Puis on continue ainsi jusqu'à ce que $i = j - 1$.

Estimation d'une distribution de temps ou de vitesse :

Pour estimer la distribution $\rho(\vartheta)$ d'une grandeur ϑ (un temps ou une vitesse) dans un intervalle $[\vartheta_{\min}, \vartheta_{\max}]$, nous procédons de la manière suivante. On divise l'intervalle $\Delta\vartheta = \vartheta_{\max} - \vartheta_{\min}$ en j sous-intervalles $\delta\vartheta = \Delta\vartheta/j$. Puis on tire au hasard une trajectoire k et on vérifie d'abord que la grandeur ϑ_k correspondant à la $k^{\text{ème}}$ trajectoire appartient bien à l'intervalle $[\vartheta_{\min}, \vartheta_{\max}]$. Si ce n'est pas le cas, ce tirage est abandonné et on procède à un nouveau tirage. Si par contre c'est le cas et que cette trajectoire ne traverse pas avec succès tous les diaphragmes jusqu'à la zone de détection, cette trajectoire n'est pas comptabilisée. On incrémente dans ce cas uniquement le nombre total de tirages N_{tot} d'une unité. Dans le cas contraire, si la trajectoire a atteint la zone de détection, on cherche d'abord dans quel intervalle $[\vartheta_{\min} + i \delta\vartheta, \vartheta_{\max} + (i+1) \delta\vartheta]$, où $0 \leq i \leq j-1$, la grandeur ϑ_k appartient. On incrémente alors d'une unité le nombre N_i de trajectoires qui ont atteint la détection pour une grandeur ϑ comprise dans l'intervalle i . On poursuit le calcul en effectuant un $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage d'une trajectoire et on recommence le processus que nous venons de décrire. Le calcul s'arrête après un nombre total N_{tot} choisi de tirages.

<i>Grandeur</i>	<i>Notation</i>	<i>Valeur</i>
Angle d'inclinaison trajectoire (refr. trans.)	θ_0	1.84 °
Hauteur refroidissement trans. - source	h_t	51.4 mm
Hauteur diaphragme 2 - source	h_2	89 mm
Hauteur diaphragme 3 - source	h_3	449 mm
Hauteur diaphragme 4 - source	h_4	449 mm
Rayon du diaphragme 2	R_2	5.5 mm
Distance diaphragme 2 - source	l_2	3 mm
Distance diaphragme 3 - source	$L - l$	15.6 mm
Distance diaphragme 4 - source	$L + l$	71.6 mm

Tab. 3.6: Valeur des paramètres considérés comme fixes dans les simulations.

Finalement, on obtient une estimation de la densité de probabilité $\rho(\vartheta)$ de la distribution de la grandeur ϑ , pour la valeur $\vartheta_i = \vartheta_{\min} + (i + \frac{1}{2}) \delta\vartheta$, par le rapport :

$$\rho(\vartheta_i) = \frac{N_i}{N_{\text{tot}}} \quad (3.115)$$

Les résultats des simulations Monte-Carlo des différentes grandeurs que nous venons de définir sont comparés, dans la section suivante, à ceux fournis par le modèle analytique développé dans la section précédente.

3.4 Analyse des résultats des simulations

Dans cette section, nous allons comparer et analyser les résultats du modèle analytique et ceux des simulations Monte-Carlo pour différentes grandeurs physiques. La comparaison entre le modèle analytique et les simulations Monte-Carlo a pour but essentiel de valider la modélisation des ouvertures de la cavité micro-onde et de l'évolution transverse de la densité surfacique. Tous les paramètres qui entrent dans ces simulations ne sont pas connus avec précision. C'est le cas notamment des paramètres du jet, en particulier de la vitesse de lancement, du rayon initial et des températures longitudinale et transverse. Nous tenterons d'évaluer dans cette section ces deux derniers paramètres sur la base des résultats obtenus avec ces simulations. Les valeurs des paramètres géométriques qui sont connus avec précision et considérés comme fixes dans ces simulations sont résumées dans le Tab. 3.6.

Les paramètres du jet utilisés dans les simulations dépendent de la configuration du jet de la fontaine continue. Nous considérons dans cette section trois configurations différentes du jet.

Jet continu sans refroidissement transverse

Configuration sans cavité micro-onde :

Dans cette configuration de jet, les diaphragmes présents sur la trajectoire du jet sont l'ouverture d'entrée de la trappe à lumière côté source, et l'ouverture de sortie de la trappe à lumière côté détection. On peut ajouter à ces deux ouvertures, celles pratiquées dans les assiettes des blindages. Elles ont, toutefois, un effet moindre sur le jet car leur rayon est nettement plus grand que celui des ouvertures d'entrée et de sortie de la trappe à lumière. Néanmoins, nous tenons quand même compte de ces ouvertures. Ainsi, nous prenons en compte la position et le rayon des huit diaphragmes qui tronquent le jet dans cette configuration. Pour cette configuration de jet, les conditions initiales des trajectoires atomiques se situent au niveau de la source. Elles sont identiques à celles énoncées dans la sous-section 3.3.1, sauf que nous prenons en compte, dans ce cas, la distribution de vitesse de lancement. Elle est supposée gaussienne de vitesse moyenne $\bar{v}_L$ et de vitesse quadratique moyenne $v_{L_{rms}}$. Sa densité de probabilité normalisée est la suivante :

$$\rho_0(v_L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} v_{L_{rms}}} e^{-(v_L - \bar{v}_L)^2 / 2v_{L_{rms}}^2} \quad (3.116)$$

La vitesse de lancement quadratique moyenne $v_{L_{rms}}$ est reliée à la température longitudinale initiale T_{l_0} du jet par la relation :

$$v_{L_{rms}} = \left(\frac{k_B T_{l_0}}{m_{Cs}} \right)^{1/2} \quad (3.117)$$

Pour les simulations dans cette configuration de jet, nous faisons l'hypothèse que la température le long d'une dimension transverse du jet à la sortie de la source est identique à la température longitudinale initiale T_{l_0} du jet, hypothèse plausible puisque la mélasse optique est isotrope. Ceci revient en fait à poser $T_{t_0} = 2T_{l_0}$ pour la température transverse initiale du jet. Les valeurs typiques des paramètres du jet utilisés dans les simulations pour cette configuration de jet sont reportées dans le Tab. 3.7. Notons que la valeur du rayon initial du jet provient des premières mesures effectuées sur le jet de la fontaine expérimentale [Dom02] et la température longitudinale du jet correspond à la valeur estimée dans la sous-section 3.4.1.

<i>Grandeur</i>	<i>Notation</i>	<i>Valeur</i>
Rayon initial à e^{-2}	R_{jet}	8.5 mm
<i>Jet sans refroidissement transverse :</i>		
Température longitudinale initiale	T_{l_0}	75 μK
Température transverse initiale	T_{t_0}	150 μK
<i>Jet avec refroidissement transverse :</i>		
Température longitudinale initiale	T_{l_0}	0
Température transverse initiale	T_{t_0}	150 μK
Température longitudinale	T_l	75 μK
Température transverse	T_t	5 μK

Tab. 3.7: Valeur typique des paramètres du jet qui entrent dans les simulations et qui sont connus avec peu de précision. La valeur de la température T_{t_0} suppose une source isotrope.

Configuration avec cavité micro-onde :

Pour les simulations dans cette configuration, nous prenons en compte la géométrie exacte des ouvertures de la cavité micro-onde ainsi que les deux ouvertures d'entrée (côté source) et de sortie (côté détection) de la trappe à lumière. Ceci revient à considérer la position et la section de dix diaphragmes sur la trajectoire du jet. En ce qui concerne les conditions initiales du jet, elles sont identiques au cas précédent.

Jet continu avec refroidissement transverse

Configuration avec cavité micro-onde :

Dans ce cas, les diaphragmes considérés sur la trajectoire du jet sont les mêmes que dans la configuration précédente. Les conditions initiales du jet correspondent à celles énoncées dans la sous-section 3.3.1. La température transverse initiale T_{t_0} du jet est identique aux deux cas précédents et nous supposons que la température longitudinale T_l du jet après refroidissement transverse reste la même que la température longitudinale initiale T_{l_0} du jet. En fait, nous négligeons cette dernière température ($T_{l_0} = 0$) dans cette configuration. Les valeurs typiques des paramètres du jet utilisées pour les simulations dans cette configuration sont également résumées dans le Tab. 3.7. Notons que la valeur de la température transverse du jet est une estimation.

Dans la sous-section 3.4.1, nous faisons une analyse de la distribution de temps de vol du jet continu avant implémentation du refroidissement transverse 2D et de la cavité micro-onde. De cette analyse, nous en déduisons une estimation de la température longitudinale du jet continu à la sortie de la source.

Ensuite, nous étudions (sous-section 3.4.2) le flux d'atomes à la détection en fonction des paramètres du jet. Dans un premier temps, nous considérons le cas du jet sans refroidissement transverse. Puis, nous analysons en détail le cas du jet avec refroidissement transverse 2D qui est la configuration opérationnelle de la fontaine continue. Ce cas est analysé à l'aide du modèle analytique après avoir ajusté un paramètre (le rayon apparent R_{ca} des ouvertures de la cavité) afin de reproduire le mieux possible les résultats des simulations Monte-Carlo. Nous déduisons notamment de cette analyse une estimation de la température transverse T_t du jet après refroidissement transverse.

Dans la section 3.4.3, nous déterminons tout d'abord les trajectoires extrémales du jet continu et les vitesses longitudinales extrémales correspondantes pour différentes conditions initiales du jet. Ensuite, à l'aide du modèle analytique, nous dérivons la distribution effective de vitesse longitudinale du jet après la cavité et nous la comparons aux résultats des simulations Monte-Carlo. Nous déterminons alors quel est le domaine des paramètres du jet où cette distribution reste gaussienne et nous estimons la température longitudinale effective du jet après la cavité.

Dans la dernière sous-section 3.4.4, nous évaluons les paramètres typiques des distributions de temps de transit, d'interaction et de détection de la fontaine continue avec la modèle analytique dont les résultats sont comparés aux simulations Monte-Carlo.

3.4.1 Distribution de temps de vol du jet

Nous analysons dans cette sous-section la distribution de temps de vol du jet continu "vertical" que nous avons utilisé pour les premières mesures sur la fontaine avant d'implémenter la cavité micro-onde puis le refroidissement transverse 2D du jet.

Mesures expérimentales de la distribution de temps de vol

Afin de vérifier que la vitesse de lancement correspond bien à celle attendue avec la technique de la mélasse mouvante, et pour estimer la température longitudinale du jet, nous utilisons la technique du *temps de vol* TOF (*Time Of Flight*) sur un jet continu [Ber00]. Pour ne pas tronquer le jet et faus-

ser les mesures (cf. sous-section suivante), nous nous sommes placé à une vitesse de lancement moyenne du jet de $\bar{v}_L = 3.615 \text{ m/s}$, ce qui correspond à une différence de fréquence des faisceaux de refroidissement verticaux de $\Delta f = \pm 3.00 \text{ MHz}$ par rapport à la fréquence du faisceau x . Le principe des mesures de temps de vol est de “découper” une tranche du jet, à la sortie de la source, aussi mince que possible et d’enregistrer le signal de fluorescence émis par les atomes de cette tranche lorsqu’ils traversent le faisceau sonde de détection. Le signal de fluorescence a la forme d’un pic dont la position du maximum nous renseigne sur la vitesse de lancement moyenne du jet et sa largeur sur la température de la distribution de vitesse longitudinale.

Pour “découper” une tranche du jet, nous utilisons un faisceau pousseur modulé en intensité (0 – 100 %) et placé à l’endroit des faisceaux de refroidissement transverse, soit à la hauteur $h_t = 51.4 \text{ mm}$ au-dessus du centre de la mélasse optique. Quand le faisceau pousseur est enclenché, le jet est interrompu et on n’enregistre aucun signal de fluorescence à la détection. Lorsqu’il est éteint pendant un intervalle de temps Δt , le jet peut passer durant cet instant, formant ainsi une tranche de jet d’épaisseur $\Delta \bar{z} = \bar{v}_l \Delta t$ où $\bar{v}_l$ est la vitesse moyenne du jet à la hauteur du refroidissement transverse. Pour les mesures effectuées, nous éteignons le faisceau pousseur pendant $\Delta t = 10 \text{ ms}$ ce qui génère une tranche d’épaisseur $\Delta \bar{z} \simeq 36 \text{ mm}$ avec la vitesse initiale utilisée. Nous enregistrons alors le signal de fluorescence temporel à partir de l’instant où nous éteignons le faisceau pousseur. On obtient un pic dont la position se situe à un intervalle de temps qui correspond au temps de vol de la tranche de jet entre le refroidissement transverse et la détection. Nous avons reporté dans la Fig. 3.10 (courbe bruyante) un enregistrement typique d’un signal de temps de vol obtenu dans cette configuration.

Distribution théorique de temps de vol

Estimons la distribution de temps de vol que donne une tranche du jet d’épaisseur $\Delta \bar{z}$. Considérons tout d’abord une tranche du jet d’épaisseur infinitésimale δz , à la hauteur du faisceau pousseur⁹. Si les atomes de cette tranche ont tous la même vitesse longitudinale $\bar{v}_l$, la distribution de temps de vol se réduira à un Dirac $\delta(T_v - T_v(\bar{v}_l))$ centré sur le temps de vol $T_v(\bar{v}_l)$ correspondant à cette vitesse. Si maintenant, la tranche infinitésimale au niveau du faisceau pousseur contient des atomes dont la vitesse longitudinale est distribuée selon une loi gaussienne $\rho(v_l)$, centrée sur la vitesse moyenne $\bar{v}_l$ et dont la largeur est étroite ($v_{l,\text{rms}} \ll \bar{v}_l$), la distribution de temps de vol

⁹Ceci reviendrait à éteindre le faisceau pousseur pendant un intervalle de temps infinitésimal δt .

$\eta_{\delta t}(T_v)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\eta_{\delta t}(T_v) &\simeq \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(v_l) \delta(T_v - T_v(v_l)) dv_l \\ &= \left(\frac{dT_v}{dv_l}(T_v^{-1}(T_v)) \right)^{-1} \rho(T_v^{-1}(T_v))\end{aligned}\quad (3.118)$$

Pour une tranche de jet d'épaisseur finie $\Delta \bar{z}$, la distribution de temps de vol résultante est obtenue en sommant $\eta_{\delta t}(T_v)$ sur la durée du pulse Δt . Elle s'écrit comme le produit de convolution suivant :

$$\eta_{\Delta t}(T_v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{\delta t}(t) \text{rect}\left(\frac{\Delta t/2 + T_v - t}{\Delta t}\right) dt \quad (3.119)$$

où $\text{rect}(\frac{L/2-x}{L})$ est une fenêtre rectangulaire de largeur L centrée en $L/2$. Comme dans cette configuration de jet, il n'y a pas de refroidissement transverse, les conditions initiales du jet se situent au niveau de la source. On suppose alors que la distribution de vitesse $\rho(v_l)$ au niveau du faisceau pousseur (refroidissement transverse), donnée par (3.70), est identique à la distribution de vitesse de lancement au niveau de la source $\rho_0(v_L)$ donnée par (3.116). On peut donc remplacer $\rho(v_l)$ par $\rho_0(v_L)$ dans l'équation (3.118). Exprimons le temps de vol en fonction de la vitesse de lancement v_L :

$$T_v(v_L) = \frac{1}{g} \left((v_L^2 - 2gh_t)^{1/2} + (v_L^2 - 2gh_{d1})^{1/2} \right) \quad (3.120)$$

Vu que la distribution de vitesse $\rho_0(v_L)$ est étroite, nous nous contentons de développer l'expression (3.120) au 1^{er} ordre par rapport à $\bar{v}_L$:

$$\begin{aligned}T_v(v_L) &\simeq T_v(\bar{v}_L) + \frac{dT_v}{dv_L}(\bar{v}_L) \cdot (v_L - \bar{v}_L) \\ &= \bar{T}_v + \bar{T}'_v (v_L - \bar{v}_L)\end{aligned}\quad (3.121)$$

où $\bar{T}_v$ est le temps de vol moyen correspondant à la vitesse moyenne $\bar{v}_L$ et $\bar{T}'_v$ le coefficient suivant :

$$\bar{T}'_v = \frac{\bar{v}_L}{g} \left\{ \frac{1}{(\bar{v}_L^2 - 2gh_t)^{1/2}} + \frac{1}{(\bar{v}_L^2 - 2gh_{d1})^{1/2}} \right\} \quad (3.122)$$

On obtient ainsi pour la distribution $\eta_{\delta t}(T_v)$ l'expression suivante :

$$\eta_{\delta t}(T_v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} T_{v\text{rms}}} e^{-(T_v - \bar{T}_v)^2 / 2 T_{v\text{rms}}^2} \quad (3.123)$$

avec le temps de vol quadratique moyen $T_{v_{rms}}$ donné par :

$$T_{v_{rms}} = \bar{T}'_v v_{l_{rms}} \quad (3.124)$$

La distribution de temps de vol pour un pulse de durée Δt se déduit facilement de (3.119), on trouve :

$$\eta_{\Delta t}(T_v) = \frac{1}{2\Delta t} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{T_v - \bar{T}_{v\Delta t} + \Delta t/2}{\sqrt{2} T_{v_{rms}}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{T_v - \bar{T}_{v\Delta t} - \Delta t/2}{\sqrt{2} T_{v_{rms}}}\right) \right) \quad (3.125)$$

avec le temps de vol moyen $\bar{T}_{v\Delta t}$ pour un pulse de durée Δt :

$$\bar{T}_{v\Delta t} = \bar{T}_v + \frac{\Delta t}{2} \quad (3.126)$$

Effet de la température transverse du jet

Dans ce calcul, nous n'avons pas pris en compte l'effet de la température transverse du jet car cet effet n'est pas facile à estimer dans ce cas. Afin de tester son influence sur la largeur de la distribution de temps de vol et sa position, nous avons réalisé des simulations Monte-Carlo de la distribution de temps de vol du jet vertical pour différentes températures transverses. Dans ces simulations, nous tenons compte de la limitation de vitesse imposée par la hauteur du cylindre (cf. sous-section suivante) et nous utilisons les paramètres du jet correspondant à cette configuration qui sont indiqués dans le Tab. 3.7. La vitesse de lancement moyenne utilisée et la durée du pulse sont celles correspondant aux mesures de temps de vol, soit $\bar{v}_L = 3.615 \text{ m/s}$ et $\Delta t = 10 \text{ ms}$ respectivement. Nous faisons ensuite un ajustement des courbes obtenues par simulation avec la formule (3.125) dans laquelle les paramètres libres sont le temps de vol moyen $\bar{T}_{v\Delta t}$ et la température longitudinale T_{l_0} . Un exemple typique de simulation et d'ajustement est représenté dans la Fig. 3.8. De la valeur du temps de vol moyen déduite de l'ajustement $\bar{T}_{v\Delta t}^{\text{fit}}$, nous pouvons calculer la vitesse de lancement moyenne $\bar{v}_L$ correspondant à partir de (3.120) et (3.126). Elle est donnée en bonne approximation par :

$$\bar{v}_L^{\text{fit}} \simeq \frac{1}{2} \left(g^2 \left(\bar{T}_{v\Delta t}^{\text{fit}} - \frac{\Delta t}{2} \right)^2 + 4g(h_t + h_{d1}) \right)^{1/2} \quad (3.127)$$

Nous comparons ensuite la valeur de $\bar{v}_L^{\text{fit}}$ avec sa valeur nominale $\bar{v}_L$ pour chaque simulation effectuée. Nous procédons de la même manière avec la température longitudinale déduite de l'ajustement $T_{l_0}^{\text{fit}}$ et sa valeur nominale T_{l_0} . L'écart entre les valeurs obtenues avec l'ajustement et les valeurs nominales nous indique l'importance de l'effet de la température transverse sur la distribution de temps de vol.

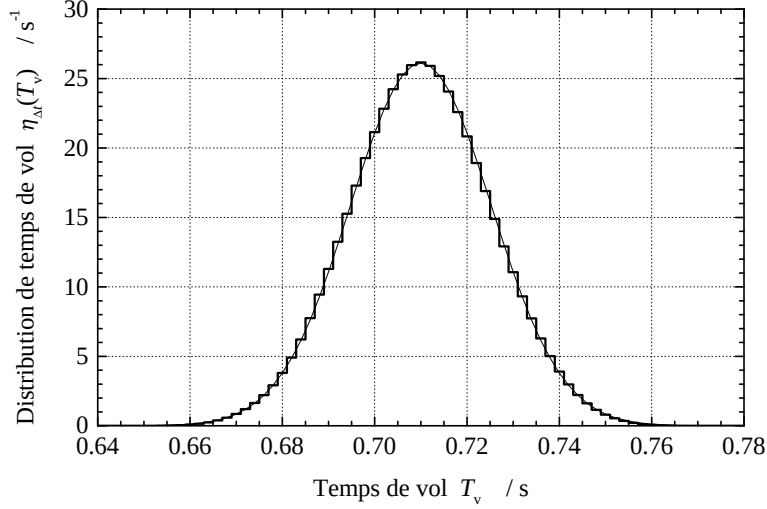


Fig. 3.8: Exemple typique de simulation Monte-Carlo de la distribution de temps de vol $\eta_{\Delta t}(T_v)$ pour un jet vertical et sans cavité micro-onde. Les paramètres de la simulation sont : $\bar{v}_L = 3.615 \text{ m/s}$, $T_{l_0} = T_{t_0}/2 = 75 \mu\text{K}$, $\Delta t = 10 \text{ ms}$ et $N_{\text{tot}} = 9 \cdot 10^8$. La courbe en escalier correspond au résultat de la simulation et celle en trait fin à l'ajustement obtenu avec la formule (3.125). Les paramètres de l'ajustement sont : $\bar{T}_{v\Delta t}^{\text{fit}} = 0.710 \text{ s}$ et $T_{l_0}^{\text{fit}} = 80.4 \mu\text{K}$.

En ce qui concerne la vitesse de lancement, nous obtenons un écart constant de $\Delta \bar{v}_L \simeq -2 \text{ cm/s}$ entre la vitesse moyenne $\bar{v}_L^{\text{fit}}$ que l'on déduit et la vitesse moyenne nominale v_{L_0} . Comme la vitesse moyenne déduite est légèrement plus petite que la vitesse moyenne nominale, l'effet de la température transverse a donc tendance à déplacer le sommet de la distribution de temps de vol vers des temps un peu plus courts. Cet écart reste très faible, si bien que nous pouvons négliger cette correction aux valeurs de la vitesse déduites des ajustements.

Le résultat des tests concernant la température longitudinale est résumé dans la Fig. 3.9 où nous représentons l'écart ΔT_{l_0} entre la valeur de la température longitudinale déduite de l'ajustement et sa valeur nominale en fonction de la température transverse. On constate que la valeur de la température déduite des ajustements est inférieure à la valeur nominale (écart $\Delta T_{l_0} < 0$). Ceci veut dire que l'effet de la température transverse est de réduire la largeur du pic de temps de vol. Le fait que certains points présentent un écart positif peut résulter de l'erreur d'ajustement de la courbe, dû au lissage effectué sur les résultats des simulations, qui a tendance à élargir les pics. L'erreur relative est d'autant plus importante que l'écart ΔT_{l_0} est petit ($T_{t_0} \lesssim 200 \mu\text{K}$). Là aussi, la correction est faible dans le domaine de températures considéré

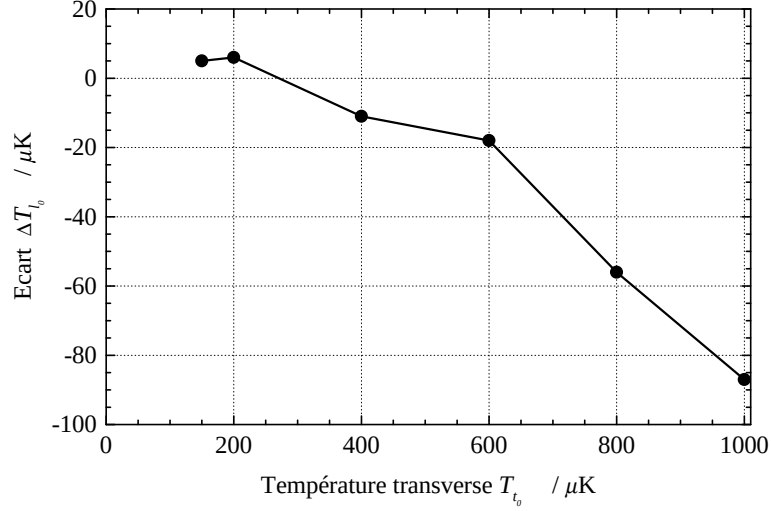


Fig. 3.9: Ecart ΔT_{l_0} entre la température longitudinale du jet $T_{l_0}^{\text{fit}}$, obtenue à partir des ajustements, et sa valeur nominale T_{l_0} pour différentes températures transverses T_{t_0} dans le cas d'un jet issu d'une source isotrope.

et nous pouvons également la négliger.

Estimation de la température longitudinale initiale du jet

Nous présentons dans la Fig. 3.10 une distribution de temps de vol normalisée typique, mesurée sur la fontaine continue avec un jet vertical. La courbe bruyante est la distribution mesurée et la courbe lisse est l'ajustement effectué avec la formule (3.125). On voit que la distribution de temps de vol mesurée n'est pas symétrique par rapport à son maximum, alors qu'on ne peut pas déceler une telle asymétrie dans les simulations (cf. Fig. 3.8). La cause de cette asymétrie n'est pas claire, et elle est présente dans quasiment toutes les mesures effectuées. Il s'ensuit que l'on ne peut pas ajuster fidèlement la courbe théorique sur la distribution mesurée. Il en résulte une certaine incertitude sur la détermination de la vitesse de lancement moyenne et de la température longitudinale du jet. Cette incertitude justifie pleinement de négliger les corrections $\Delta \bar{v}_L$ et ΔT_{l_0} . Ceci d'autant plus que la dimension du faisceau sonde a également un effet d'élargissement sur la distribution de temps de vol que nous négligeons aussi [Dud96].

De notre ajustement, nous en déduisons une vitesse de lancement moyenne de $\bar{v}_L^{\text{fit}} = 3.64 \text{ m/s}$ et une température longitudinale de $T_{l_0}^{\text{fit}} = 75 \mu\text{K}$. La vitesse de lancement obtenue est relativement proche, vu les incertitudes, de la valeur 3.615 m/s déduite de la différence de fréquence des faisceaux de

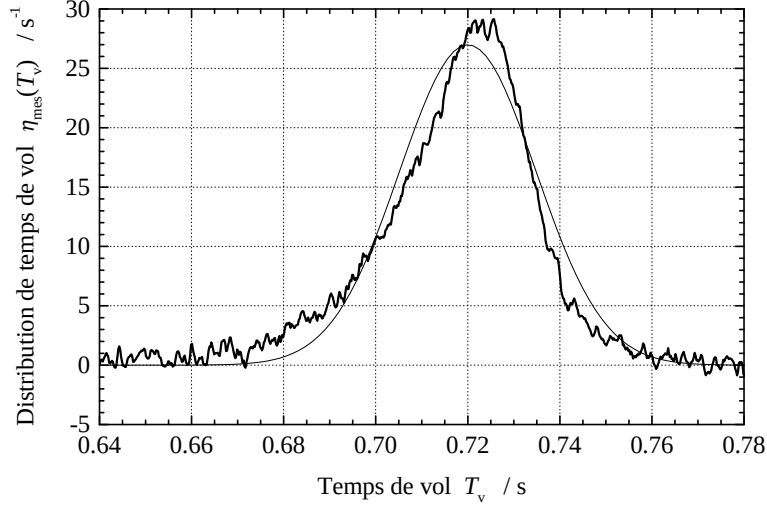


Fig. 3.10: Exemple typique de distribution de temps de vol mesurée sur la fontaine continue sans cavité micro-onde et avec un jet vertical. La vitesse moyenne de lancement du jet est de $\bar{v}_L = 3.615$ m/s. La courbe bruyante correspond au résultat de la mesure et celle en trait fin à l’ajustement obtenu avec la formule (3.125). Les paramètres de l’ajustement sont : $\bar{T}_{v\Delta t}^{\text{fit}} = 0.720$ s et $T_{l_0}^{\text{fit}} = 75$ μ K.

refroidissement verticaux utilisée pour les mesures. Si l’on ajustait la courbe théorique au sommet du pic de temps de vol, la vitesse de lancement déduite serait en fait supérieure à 3.64 m/s. Il faut remarquer que “l’origine” du jet, par conséquent “l’origine” des vitesses, n’est pas connue et pourrait être une des causes de cet écart. Nous l’avons supposée au centre de la mélasse optique, mais la différence de vitesse de lancement observée conduirait à placer “l’origine” du jet à ~ 9 mm au-dessus du centre de la mélasse optique. Cette distance est réaliste puisque “l’origine” du jet se situerait toujours à l’intérieur de la mélasse optique¹⁰. Quand à la valeur de la température longitudinale trouvée, elle représente une valeur typique pour un jet continu obtenu avec la technique de la mélasse mouvante [Ber00].

¹⁰Mentionnons encore le fait que la vitesse de lancement dépend linéairement de la composante z du champ magnétique terrestre régnant autour de la source. Nous annulons le champ magnétique terrestre dans la région de la source avec des bobines de compensation. Mais cette compensation n’est pas parfaite (nous n’avons aucun moyen de savoir si le champ magnétique dans la source est nul) et il peut très bien subsister une composante z . Ceci pourrait être une raison supplémentaire pour ne pas observer une meilleure concordance entre la vitesse de lancement théorique de la mélasse mouvante et celle déduite du pic de temps de vol.

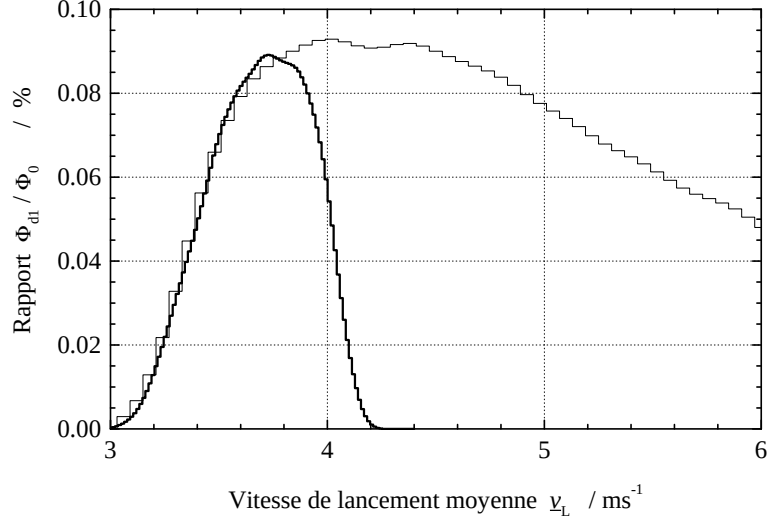


Fig. 3.11: Rapport Φ_{d1}/Φ_0 en fonction de la vitesse de lancement moyenne $\bar{v}_L$ du jet dans le cas d'un jet vertical et sans cavité micro-onde. La courbe en trait fin ($N_{tot} = 1.5 \cdot 10^8$) correspond à un jet non-limité en hauteur et celle en trait épais ($N_{tot} = 2.5 \cdot 10^7$) à un jet limité à la hauteur $H_{cyl} = 0.828$ m.

3.4.2 Flux d'atomes dans la zone de détection

Nous allons étudier dans cette sous-section l'influence des paramètres les plus importants sur le flux d'atomes qui atteint la zone de détection.

Jet continu sans refroidissement transverse

Nous considérons dans un premier temps le cas du jet sans refroidissement transverse. Cette configuration nous permettra d'obtenir quelques informations utiles pour tenter d'estimer plus tard la température transverse du jet avec refroidissement transverse. Ce cas n'est pas décrit par le modèle analytique développé dans la sous-section 3.3.1. C'est pourquoi, nous utilisons dans ce paragraphe uniquement les résultats des simulations Monte-Carlo.

Jet vertical sans cavité micro-onde :

La configuration de la fontaine continue lors des premières mesures expérimentales sur le jet ne comprenait pas la cavité micro-onde. Les paramètres du jet des simulations dans cette configuration sont ceux indiqués dans le Tab. 3.7. Nous présentons dans la Fig. 3.11 le rapport Φ_{d1}/Φ_0 du flux d'atomes à la détection sur le flux d'atomes qui quittent la source en fonction de la vitesse de lancement moyenne $\bar{v}_L$ du jet. La courbe en trait fin correspond

à un jet vertical non-limité en hauteur, tandis que la courbe en trait épais représente le cas d'un jet vertical limité en hauteur. C'est ce qui se passait en réalité, puisque le cylindre vertical qui contenait le résonateur était fermé par une bride plate à son extrémité supérieure. Son effet principal est d'empêcher les atomes qui ont une vitesse de lancement dont la composante verticale v_{L_z} est supérieure à $\sqrt{2gH_{\text{cyl}}}$, où H_{cyl} est la hauteur de la paroi supérieure du cylindre depuis le centre de la source, d'atteindre la zone de détection. Avec $H_{\text{cyl}} = 0.828$ m, on obtient pour la composante v_{L_z} maximale une valeur de $v_{L_z}^{\text{max}} = 4.03$ m/s. On voit nettement cet effet sur la courbe en trait épais. La coupure du flux autour de $v_{L_z}^{\text{max}}$ n'est pas instantanée, mais a lieu sur un intervalle de vitesse représentatif de la distribution de vitesse longitudinale considérée. On relève que la vitesse de lancement moyenne optimale, qui donne le flux maximum à la détection pour le jet limité en hauteur, vaut $\bar{v}_L^{\text{opt}} \simeq 3.72$ m/s pour les paramètres utilisés dans cette simulation. Cette vitesse optimale est déterminée principalement par la hauteur H_{cyl} , mais également par la largeur de la distribution de vitesse longitudinale.

Jet vertical avec cavité micro-onde :

Dans une deuxième étape, nous avons monté la cavité micro-onde dans le résonateur en utilisant toujours un jet vertical. Afin de déterminer quelle est la vitesse de lancement optimale du jet qui donne le flux maximum dans la zone de détection, nous avons enregistré le signal du photodétecteur 1 en fonction de la vitesse moyenne de lancement $\bar{v}_L$ du jet en variant la différence de fréquence Δf entre les faisceaux verticaux de refroidissement. Il est intéressant de comparer la courbe obtenue avec le résultat de simulations Monte-Carlo du rapport Φ_{d1}/Φ_0 dans cette configuration. Pour cette simulation, nous utilisons les paramètres du jet correspondants du Tab. 3.7.

Nous reportons dans la Fig. 3.12 les résultats des mesures sur la fontaine continue ainsi que ceux de la simulation. La courbe en escalier est le résultat de la simulation et les cercles pleins sont les points de mesure. Nous avons ajusté la hauteur du maximum des points mesurés sur le maximum de la courbe obtenue par simulation. Le fait que le maximum de flux soit mesuré à une vitesse de lancement plus petite que ne le prévoit les simulations pourrait être dû à ce que le jet soit déjà incliné du bon angle pour réaliser la parabole à travers les deux ouvertures de la cavité¹¹.

¹¹Cette hypothèse est la plus vraisemblable, mais on ne peut pas se prononcer avec certitude. En effet, la différence de vitesse de ~ 7 cm/s entre les deux optimums pourrait aussi être due à une "origine" du jet légèrement au-dessus du centre de la mélasse optique. Cette différence de vitesse correspondrait en fait à prendre "l'origine" du jet à ~ 28 mm au-dessus du centre de la mélasse optique, une distance qui est encore plausible mais qui situerait "l'origine" du jet en dehors de la mélasse optique. Signalons encore que la

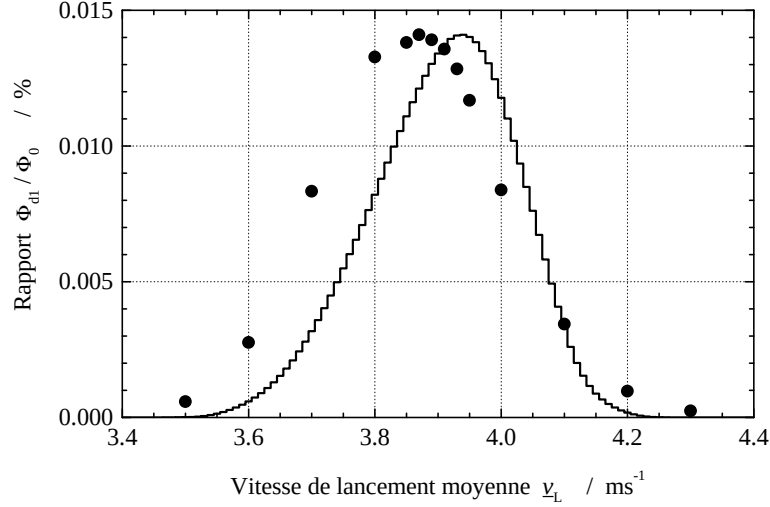


Fig. 3.12: Rapport Φ_{d1}/Φ_0 en fonction de la vitesse de lancement moyenne $\bar{v}_L$ du jet dans le cas d'un jet vertical et avec la cavité micro-onde. La courbe en escalier représente le résultat de la simulation Monte-Carlo ($N_{\text{tot}} = 1.5 \cdot 10^8$) et les cercles pleins sont les points de mesure sur la fontaine continue.

Jet incliné avec cavité micro-onde :

Cette inclinaison du jet est probablement effectuée par le champ magnétique de compensation, selon l'axe x , situé au niveau de la source. Comme nous l'avons constaté pour l'axe z dans le paragraphe précédent, un champ magnétique selon x peut engendrer une petite composante de vitesse dans cette direction, ce qui a pour effet d'incliner légèrement le jet dans cette direction. Des simulations du flux à la détection pour un jet incliné montrent en effet que la vitesse de lancement optimale est inférieure à celle du cas d'un jet réellement vertical comme le montre la Fig. 3.13, et correspond assez bien avec l'optimum de flux mesuré. On peut en déduire que dans le cas du jet sans refroidissement transverse, l'optimum de flux est très probablement obtenu pour un jet déjà incliné du bon angle à la sortie de la source pour effectuer la trajectoire parabolique.

température transverse du jet a un effet sur la position du maximum du flux comme nous le verrons dans le prochain paragraphe. Néanmoins, le fait que le flux à la détection dans cette configuration soit nettement plus élevé (facteur > 10) que celui correspondant au jet vertical (cf. Fig. 3.13) est une bonne raison de penser que le jet est réellement incliné.

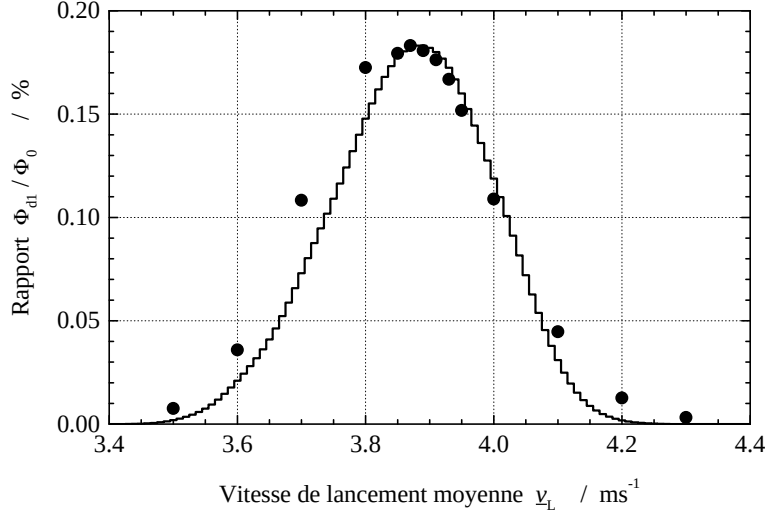


Fig. 3.13: Rapport Φ_{d1}/Φ_0 en fonction de la vitesse de lancement moyenne $\bar{v}_L$ du jet dans le cas d'un jet incliné sans refroidissement transverse, et avec la cavité micro-onde. La courbe en escalier représente le résultat de la simulation Monte-Carlo ($N_{\text{tot}} = 2.5 \cdot 10^7$) et les cercles pleins sont les points de mesure sur la fontaine continue.

Jet continu avec refroidissement transverse

Etudions maintenant en détail le cas de la configuration opérationnelle de la fontaine continue. Pour toutes les simulations de ce paragraphe, et si aucune mention particulière n'est faite, nous utilisons les valeurs typiques des paramètres du jet correspondant à cette configuration qui sont reportées dans le Tab. 3.7

Effet de la vitesse moyenne de lancement :

Commençons avec l'influence de la vitesse moyenne de lancement du jet. La Fig. 3.14 représente le rapport Φ_{d1}/Φ_0 en fonction de la vitesse de lancement moyenne $\bar{v}_L$ du jet. La courbe en escalier correspond au résultat de la simulation Monte-Carlo et la courbe en trait continu à celui du modèle analytique. Nous avons ajusté le rayon apparent R_{ca} des trous de passages de la cavité pour que le maximum de la courbe correspondant au modèle analytique coïncide avec celui de la simulation Monte-Carlo. Ce rayon est déterminé approximativement dans le modèle et ne prend pas en compte la géométrie exacte des ouvertures de la cavité micro-onde. L'ajustement du rayon se monte, en valeur relative, à +16 % de la valeur déterminée à la vitesse de lancement moyenne optimale $\bar{v}_L^{\text{opt}}$, soit $R_{\text{ca}}^{\text{fit}} \simeq 3.6 \text{ mm}$, ce qui montre que la modélisation des ouvertures de la cavité est relativement satisfaisante.

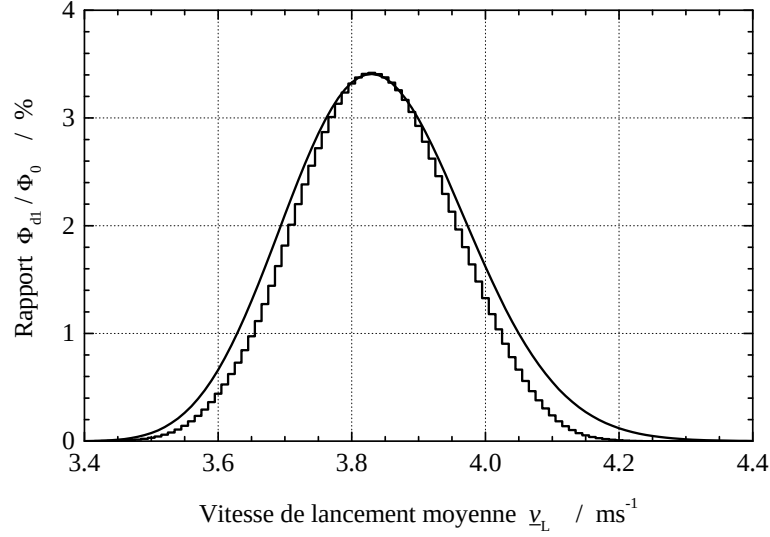


Fig. 3.14: Représentation du rapport Φ_{d1}/Φ_0 en fonction de la vitesse de lancement moyenne $\bar{v}_L$ du jet. La courbe en escalier correspond au résultat de la simulation Monte-Carlo ($N_{\text{tot}} = 2.5 \cdot 10^6$) et la courbe en trait continu à celui du modèle analytique.

Le fait de devoir augmenter le rayon apparent n'est pas étonnant puisque nous avons sous-estimé le flux traversant la cavité dans la modélisation. On constate que la position du maximum des deux courbes coïncide remarquablement bien. La légère dissymétrie des courbes par rapport au maximum traduit bien le fait que l'ouverture apparente de la cavité diminue plus rapidement lorsque $\bar{v}_L < \bar{v}_L^{\text{opt}}$ que lorsque $\bar{v}_L > \bar{v}_L^{\text{opt}}$, conformément à ce que l'on attendait. On peut conclure de cette comparaison que le modèle analytique développé reproduit suffisamment bien l'effet de la vitesse moyenne de lancement sur le flux à la détection. Nous avons vérifié que cette concordance subsiste pour d'autres valeurs des paramètres.

La vitesse de lancement moyenne optimale qui correspond au maximum de flux dans la zone de détection vaut $\bar{v}_L^{\text{opt}} \simeq 3.83 \text{ m/s}$ d'après le modèle pour les paramètres utilisés. Notons que cette vitesse est supérieure à la vitesse nominale $v_{L_0} = 3.78 \text{ m/s}$ correspondant à la trajectoire nominale. Nous verrons plus loin que la vitesse de lancement optimale augmente en fait avec la température transverse du jet. Dans la fontaine continue, les paramètres expérimentaux qui maximalisent le signal fournissent une valeur pour la différence de fréquence des faisceaux de refroidissement verticaux de $\Delta f \simeq 3.23 \text{ MHz}$. Ceci correspond à une vitesse de lancement expérimentale moyenne de $\bar{v}_L^{\text{exp}} \simeq 3.89 \text{ m/s}$. Cette valeur est relativement proche de la vitesse livrée par le modèle si l'on prend en compte les remarques formulées dans

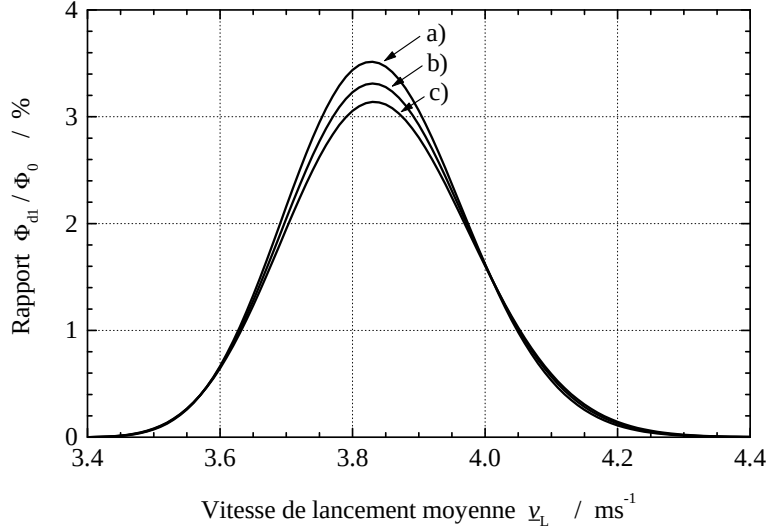


Fig. 3.15: Rapport Φ_{d1}/Φ_0 en fonction de la vitesse de lancement moyenne $\bar{v}_L$ du jet. Ce rapport est représenté pour trois températures longitudinales : a) $T_l = 50 \mu\text{K}$; b) $T_l = 100 \mu\text{K}$ et c) $T_l = 150 \mu\text{K}$. On n’observe pratiquement aucun déplacement de la position du maximum.

le paragraphe précédent sur la discordance entre vitesses de lancement¹². Comme mentionné précédemment, cette différence pourrait aussi provenir d’une température transverse légèrement plus élevée que celle utilisée dans le calcul. Le flux maximum dans la zone de détection correspondant à la vitesse optimale se monte à $\sim 3.4\%$ du flux initial à la sortie de la source pour les paramètres typiques choisis dans ces simulations. Le maximum de la courbe n’est pas très prononcé puisqu’une variation autour de la vitesse optimale de $\sim \pm 5 \text{ cm/s}$ n’engendre qu’une diminution du flux à la détection de $\sim 10\%$. Or il est aisé, avec la méthode de la mélasse mouvante, d’ajuster la vitesse initiale au cm/s près [Ber00]. Ceci nous assure donc de pouvoir se placer à l’optimum de flux une fois que celui-ci a été trouvé.

Il est intéressant de voir si le maximum de flux reste à la même vitesse optimale lorsqu’on varie les paramètres. Nous avons représenté sur la Fig. 3.15 le rapport Φ_{d1}/Φ_0 en fonction de la vitesse de lancement pour trois températures longitudinales : $T_l = 50 \mu\text{K}$, $100 \mu\text{K}$ et $150 \mu\text{K}$. Outre la diminution du maximum que nous analyserons plus tard, nous constatons que sa position ne varie pratiquement pas sur un domaine de températures longitudinales correspondant aux valeurs expérimentales rencontrées dans la fontaine continue.

¹²Dans ce cas l’écart de vitesse correspondrait à une “origine” du jet $\sim 24 \text{ mm}$ au-dessus du centre de la source.

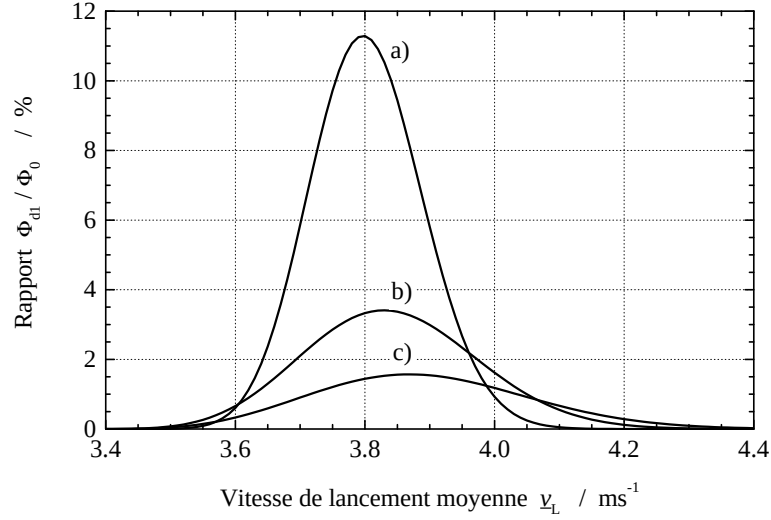


Fig. 3.16: Rapport Φ_{d1}/Φ_0 en fonction de la vitesse de lancement moyenne $\bar{v}_L$ du jet. Ce rapport est représenté pour trois températures transverses : a) $T_t = 1 \mu K$; b) $T_t = 5 \mu K$ et c) $T_t = 10 \mu K$. Nous constatons un léger déplacement de la position du maximum avec la température transverse.

Qu'en est-il de l'effet de la température transverse ? Nous avons reporté dans la Fig. 3.16 le rapport Φ_{d1}/Φ_0 en fonction de la vitesse de lancement pour trois températures transverses : $T_t = 1 \mu K$, $5 \mu K$ et $10 \mu K$. Mis à part la forte variation du maximum que nous regarderons en détail plus loin, nous observons un faible déplacement de la position du maximum avec la température transverse. La vitesse optimale décroît lorsque la température transverse diminue et inversement. Ce déplacement peut être évalué à $\sim 1 \text{ cm s}^{-1}/\mu K$ pour des températures transverses comprises entre $T_t = 0$ et $T_t = 10 \mu K$. Comme nous ne savons pas où placer "l'origine" des vitesses (cf. remarque paragraphe précédent), nous ne pouvons pas tirer de la connaissance de la vitesse optimale expérimentale une information tangible sur la température transverse du jet dans la fontaine continue. Nous tenterons de le faire à partir de l'augmentation observée du signal après implémentation du refroidissement transverse.

Effet de la température longitudinale :

La température longitudinale du jet a pour effet principal de diminuer légèrement le flux d'atomes qui atteignent la détection comme on l'a vu sur la Fig. 3.15. Cette diminution est représentée en fonction de la température longitudinale dans la Fig. 3.17. La courbe en escalier est toujours le résultat de la simulation Monte-Carlo et la courbe lisse celui du modèle analytique

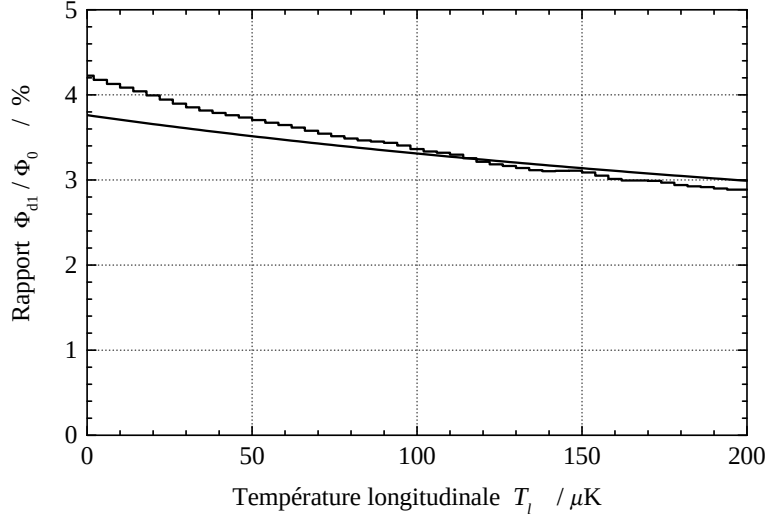


Fig. 3.17: Rapport Φ_{d1}/Φ_0 en fonction de la température longitudinale T_l du jet. La courbe en escalier correspond au résultat de la simulation Monte-Carlo ($N_{\text{tot}} = 1 \cdot 10^7$) et la courbe lisse à celui du modèle analytique.

dans lequel on a tenu compte de l'ajustement du rayon apparent de la cavité. La concordance entre simulation et modèle analytique est toujours bonne. Dans la Fig. 3.18, on a représenté cette diminution pour différentes températures transverses. On constate que, plus la température transverse est petite, plus l'effet de la température longitudinale se fait sentir. Ceci est dû au fait que lorsque la température transverse est faible, le jet est plus localisé dans le plan horizontal. Il en résulte que son déplacement par rapport à la seconde ouverture apparente de la cavité, pour une vitesse longitudinale donnée, engendre une baisse plus importante du flux d'atomes qui traversent la cavité. Néanmoins, la diminution du flux à la détection avec l'augmentation de la température longitudinale est faible. Pour un rayon initial à e^{-2} du jet $R_{\text{jet}} = 8.5 \text{ mm}$ et une température transverse de $T_t = 5 \mu\text{K}$, le rapport Φ_{d1}/Φ_0 diminue avec l'augmentation de la température longitudinale du jet avec la pente :

$$\left. \frac{d(\Phi_{d1}/\Phi_0)}{dT_l} \right|_{T_l=0} \simeq -0.005 \text{ \%}/\mu\text{K} \quad (3.128)$$

près de $T_l = 0$. On notera que, si on réduit la température longitudinale du jet de $T_l = 75 \mu\text{K}$ à une valeur proche de zéro, on gagne au maximum un facteur ~ 1.2 sur le flux à la détection.

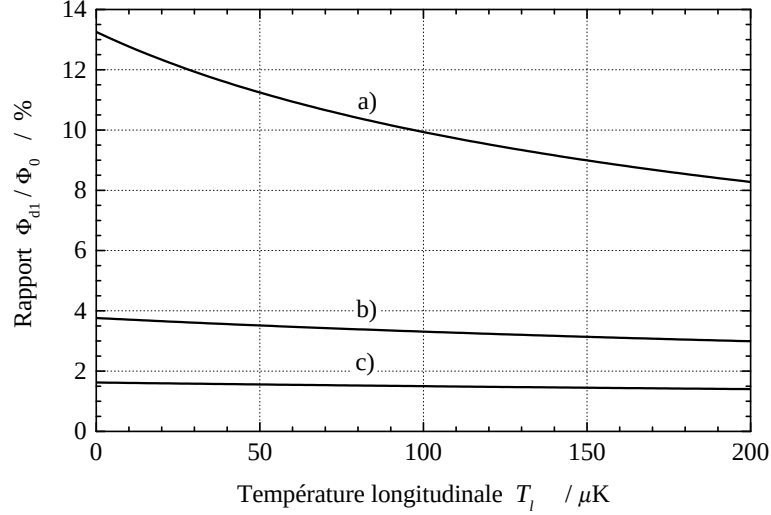


Fig. 3.18: Rapport Φ_{d1}/Φ_0 en fonction de la température longitudinale T_l du jet. Ce rapport est représenté pour trois températures transverses : a) $T_t = 1 \mu\text{K}$; b) $T_t = 5 \mu\text{K}$ et c) $T_t = 10 \mu\text{K}$.

Effet de la température transverse :

La variation du flux d'atomes à la détection en fonction de la température transverse T_t du jet est représentée dans la Fig. 3.19. La courbe en escalier correspond au résultat de la simulation Monte-Carlo et la courbe lisse à celui du modèle analytique, dans lequel on a ajusté le rayon apparent R_{ca} . Le résultat livré par le modèle analytique est très proche de celui obtenu par simulation Monte-Carlo pour des températures transverses $T_t \lesssim 6 \mu\text{K}$, mais il est un peu inférieur pour des températures plus élevées. Ceci est probablement dû à l'approximation du profil de la densité surfacique effectué dans l'annexe B, qui devient moins bon lorsque la température transverse est élevée. Néanmoins, le modèle analytique reproduit très bien la variation du flux pour des températures transverses faibles conformément à ce que l'on attendait.

On constate que le flux chute brutalement lorsque la température transverse augmente de $T_t = 0$ à $T_t \sim 10 \mu\text{K}$, alors qu'il diminue nettement plus lentement pour des températures plus élevées. Comme l'effet de la température longitudinale est très faible, vis-à-vis de celui de la température transverse, nous allons regarder si la baisse du flux dépend beaucoup du rayon initial du jet. Pour cela, nous avons reporté dans la Fig. 3.20 le rapport Φ_{d1}/Φ_0 en fonction de la température transverse pour différents rayons initiaux R_{jet} du jet. On remarque que plus le rayon initial du jet est petit, plus

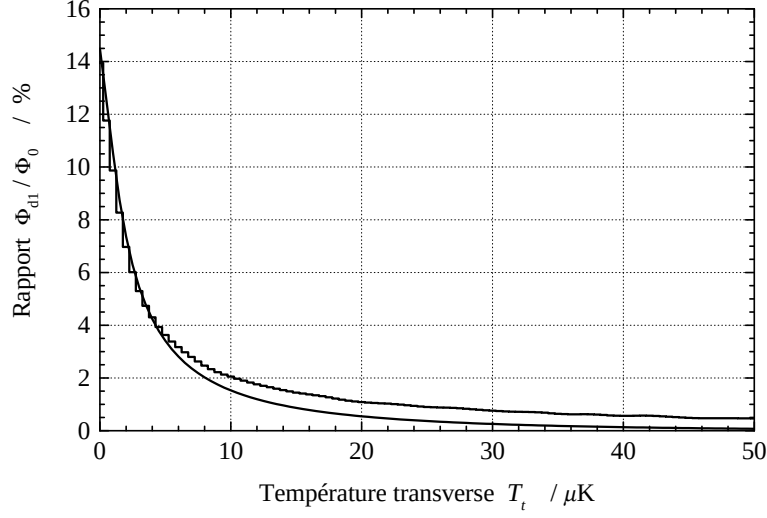


Fig. 3.19: Rapport Φ_{d1}/Φ_0 en fonction de la température transverse T_t du jet. La courbe en escalier correspond au résultat de la simulation Monte-Carlo ($N_{\text{tot}} = 2.5 \cdot 10^6$) et la courbe lisse à celui du modèle analytique.

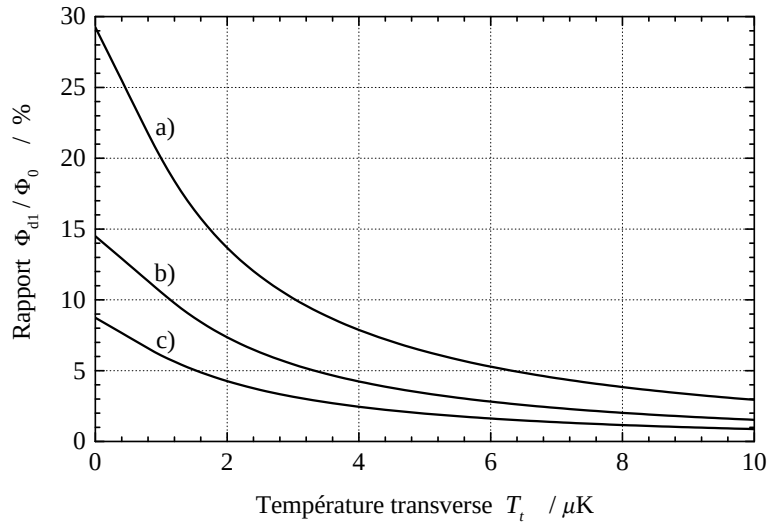


Fig. 3.20: Rapport Φ_{d1}/Φ_0 du modèle analytique en fonction de la température transverse T_t du jet. Ce rapport est représenté pour trois rayons initiaux (à e^{-2}) du jet : a) $R_{\text{jet}} = 5$ mm ; b) $R_{\text{jet}} = 8.5$ mm et c) $R_{\text{jet}} = 12$ mm.

la chute du flux avec l'augmentation de la température transverse est importante. Ceci est conforme avec la dépendance de la densité surfacique par rapport à la température transverse du jet. Comme nous avons vu dans l'annexe B, la densité surfacique au centre du jet varie en gros comme $R^{-2}(t)$ avec le rayon quadratique moyen au temps t . Donc, pour une température transverse donnée, plus le rayon quadratique moyen initial du jet est petit, plus la diminution de la densité surfacique au temps t_4 , et par conséquent du flux à la détection, est grande. Pour un rayon initial du jet de $R_{\text{jet}} = 8.5 \text{ mm}$ et une température longitudinale du jet de $T_l = 75 \text{ } \mu\text{K}$, le rapport Φ_{d1}/Φ_0 diminue avec l'augmentation de la température transverse du jet avec la pente :

$$\left. \frac{d(\Phi_{\text{d1}}/\Phi_0)}{dT_t} \right|_{T_t=0} \simeq -3.5 \text{ } \%/ \mu\text{K} \quad (3.129)$$

près de $T_t = 0$. Nous avons vérifié que les simulations Monte-Carlo conduisaient à la même valeur.

Essayons maintenant de déterminer l'ordre de grandeur de la température transverse du jet dans la fontaine continue d'après le gain en signal obtenu avec le refroidissement transverse 2D. Ce dernier a permis d'augmenter considérablement le signal d'horloge. Nous avons reporté dans la Fig. 3.21 les mesures du signal d'horloge (franges de Ramsey, cf. chapitre 4) avant et après implémentation du refroidissement transverse. La courbe a) représente le signal d'horloge sans refroidissement transverse et la courbe b) le signal avec refroidissement transverse. On constate une augmentation spectaculaire du signal d'un facteur ~ 17 . Si on suppose que le flux a augmenté dans la même proportion et que le jet sans refroidissement transverse était incliné à la sortie de la source (cf. 3.4.1). On peut estimer le rapport Φ_{d1}/Φ_0 avec refroidissement transverse en multipliant la valeur de ce rapport sans refroidissement transverse (cf. Fig. 3.13) par le facteur 17. Ceci nous donne $\sim 3 \%$ pour le rapport Φ_{d1}/Φ_0 avec refroidissement transverse. Si on regarde sur la Fig. 3.19 à quelle température transverse cela correspond, on trouve une valeur de $T_t \simeq 6 \text{ } \mu\text{K}$. Cette valeur se situe bien dans l'ordre de grandeur de la température transverse à laquelle on s'attendait après avoir implémenté le refroidissement transverse¹³. Cependant, si on suppose que le jet était vertical avant refroidissement transverse (cf. paragraphe précédent), on arrive à un rapport Φ_{d1}/Φ_0 après refroidissement transverse de $\sim 0.24 \%$. Cette valeur conduirait à une température transverse du jet de $T_t \simeq 30 \text{ } \mu\text{K}$ qui est également plausible. Quoi qu'il en soit, on voit qu'il y a beaucoup à gagner en flux en diminuant encore la température transverse du jet par des techniques

¹³Des températures transverses de cet ordre de grandeur ont été mesurées sur le jet de la fontaine expérimentale [Dom02].

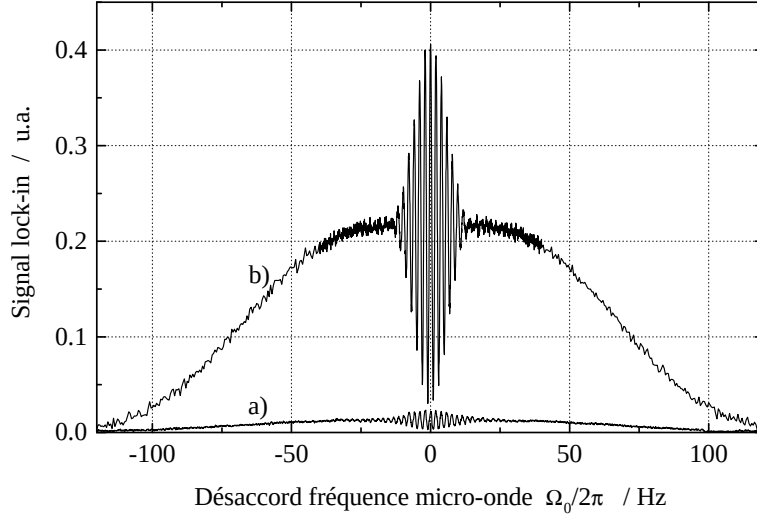


Fig. 3.21: Signal d'horloge (franges de Ramsey) avant et après impémentation du refroidissement transverse. La courbe a) représente le signal d'horloge sans refroidissement transverse et la courbe b) le signal avec refroidissement transverse. L'augmentation du signal est importante et se monte à un facteur ~ 17 .

de refroidissement transverse plus performantes (sideband cooling, adiabatic cooling par ex.). En effet, si on arrive à refroidir le jet transversalement à des températures sub- μK , sans trop réchauffer longitudinalement, on peut encore augmenter le flux à la détection au minimum d'un facteur ~ 3.7 , respectivement ~ 46 , suivant que la température transverse actuelle du jet se situe plutôt vers $6\mu\text{K}$, respectivement $30\mu\text{K}$. Mais on peut gagner au maximum¹⁴ ($T_t = 0$ et $T_l = 0$) un facteur ~ 4.7 , respectivement ~ 58 pour un rayon initial du jet de $R_{\text{jet}} = 8.5\text{ mm}$. Cette augmentation potentielle du flux à la détection, et par conséquent de la stabilité à court terme de l'horloge, est une motivation importante pour développer une technique de refroidissement transverse plus efficace que le refroidissement sub-Doppler actuellement en fonction sur la fontaine continue. Un développement dans cette direction est déjà en cours sur le jet de la fontaine expérimentale [Dom02].

Effet du rayon initial du jet :

Poursuivons en regardant l'effet du rayon initial du jet à la sortie de la source.

¹⁴On pourrait naturellement gagner encore plus en flux en réduisant le rayon initial du jet à la sortie de la source (source anisotrope) ou en focalisant le jet après le refroidissement transverse.

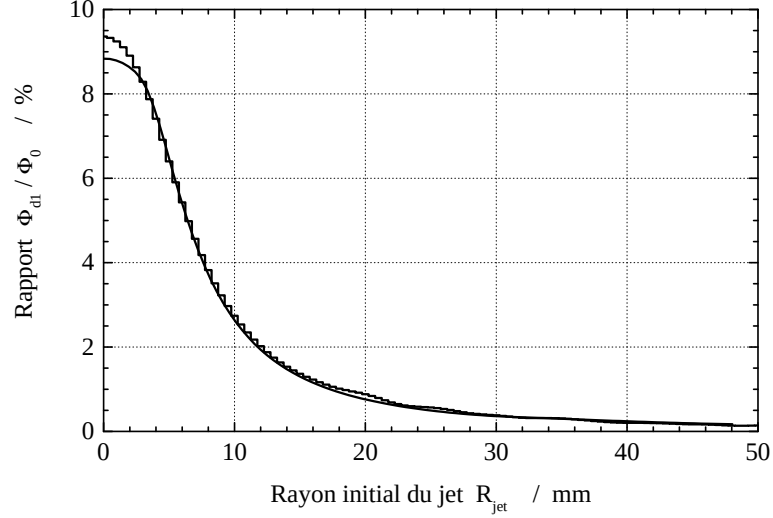


Fig. 3.22: Rapport Φ_{d1}/Φ_0 en fonction du rayon initial R_{jet} du jet à la source. La courbe en escalier correspond au résultat de la simulation Monte-Carlo ($N_{tot} = 2.5 \cdot 10^6$) et la courbe lisse à celui du modèle analytique.

La Fig. 3.22 montre une comparaison, entre la simulation Monte-Carlo et le modèle analytique, de la dépendance du flux à la détection en fonction du rayon initial du jet. On observe une diminution générale du flux, qui est très bien reproduite par le modèle analytique, lorsque le rayon initial du jet augmente. Cette décroissance est maximale lorsque le rayon à mi-hauteur du jet est proche de la valeur du rayon apparent des ouvertures de la cavité, soit pour $R_{jet} \simeq 5$ mm. En effet, c'est lorsque le rayon apparent des ouvertures de la cavité arrive environ à mi-hauteur du profil de la densité surfacique du jet qu'une variation du rayon du jet engendre une baisse ou une augmentation importante du flux après la cavité. Pour une température longitudinale du jet de $T_l = 75 \mu\text{K}$ et transverse de $T_t = 5 \mu\text{K}$, le rapport Φ_{d1}/Φ_0 diminue avec l'augmentation du rayon du jet avec la pente :

$$\left. \frac{d(\Phi_{d1}/\Phi_0)}{d R_{jet}} \right|_{R_{jet}=8.5 \text{ mm}} \simeq -0.6 \%/\text{mm} \quad (3.130)$$

autour de $R_{jet} = 8.5$ mm, valeur correspondant au rayon mesuré du jet.

La Fig. 3.23 montre la dépendance avec le rayon du jet pour trois températures transverses : $T_t = 1 \mu\text{K}$, $5 \mu\text{K}$ et $10 \mu\text{K}$. On constate que plus la température transverse est petite, plus la diminution du flux est importante avec l'augmentation du rayon du jet. Ceci peut être expliqué de la même manière que nous l'avons fait pour la décroissance du flux avec la température

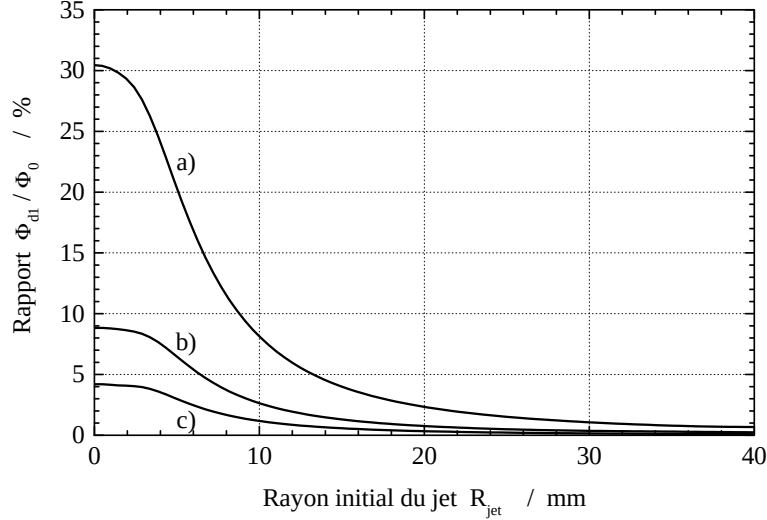


Fig. 3.23: Rapport Φ_{d1}/Φ_0 en fonction du rayon initial R_{jet} du jet à la source. Ce rapport est représenté pour trois températures transverses : a) $T_t = 1 \mu\text{K}$; b) $T_t = 5 \mu\text{K}$ et c) $T_t = 10 \mu\text{K}$.

transverse. Notons encore que la pente maximale de décroissance est effectivement atteinte pour le même rayon du jet, quelle que soit la température transverse, conformément à la raison avancée précédemment.

Effet de l'angle d'inclinaison initial du jet :

Nous allons encore, pour terminer, considérer l'effet de l'angle d'inclinaison initial θ du jet au niveau du refroidissement transverse. Nous avons effectué une simulation Monte-Carlo du flux à la détection en variant cet angle autour de sa valeur nominale θ_0 . Nous ne pouvons pas comparer le résultat obtenu avec celui du modèle analytique car ce dernier n'est pas valable dans le cas où le jet n'est pas, plus ou moins centré, sur la première ouverture apparente de la cavité. La variation obtenue du rapport Φ_{d1}/Φ_0 en fonction de l'angle θ est représentée dans la Fig. 3.24. Le rapport Φ_{d1}/Φ_0 varie de manière pratiquement symétrique autour d'un angle optimal qui donne le maximum de flux à la détection et qui vaut $\theta_{\text{opt}} \simeq 1.75^\circ$. Cette valeur est très proche de l'angle d'inclinaison nominal $\theta_0 = 1.84^\circ$. Le flux à la détection est relativement sensible à la valeur de cet angle puisqu'une variation de $\pm 0.28^\circ$ autour de θ_{opt} fait chuter le flux à la moitié de sa valeur maximale.

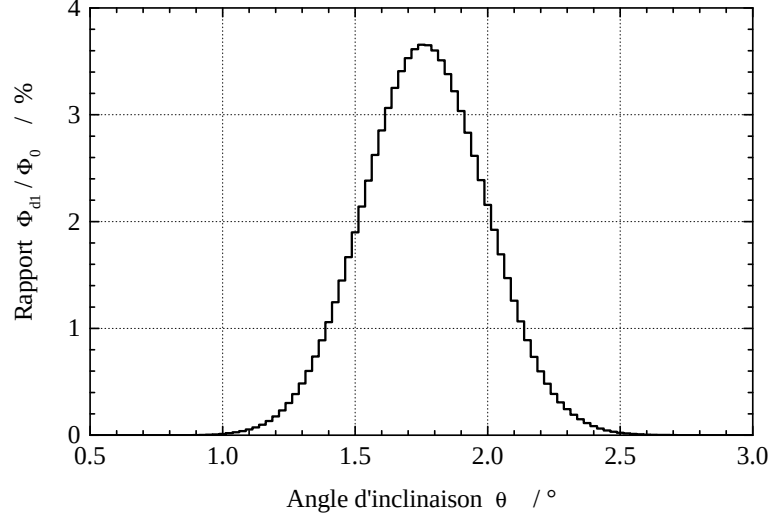


Fig. 3.24: Rapport Φ_{d1}/Φ_0 en fonction de l'angle d'inclinaison initial θ du jet au niveau du refroidissement transverse. Cette courbe est le résultat d'une simulation Monte-Carlo ($N_{\text{tot}} = 1 \cdot 10^7$) pour les paramètres typiques du jet.

3.4.3 Distribution effective de vitesse longitudinale

Nous nous intéressons dans cette sous-section à la distribution de vitesse longitudinale effective après la cavité micro-onde. Cette distribution n'est pas forcément identique à la distribution initiale de vitesse longitudinale après le refroidissement transverse. En effet, comme on l'a vu précédemment, la cavité agit comme un filtre en ce qui concerne la vitesse longitudinale du jet. La forme de ce filtre dépend en outre de la température transverse T_t du jet et de son rayon initial R_{jet} . Si la température transverse est faible ($T_t \lesssim 1\mu\text{K}$) et le rayon initial du jet petit ($R_{\text{jet}} < R_{\text{ca}}$), le filtre est plutôt du type passe-bande tandis que pour des températures plus élevées ($T_t > 1\mu\text{K}$) et un rayon initial du jet plus grand ($R_{\text{jet}} > R_{\text{ca}}$), le filtre est plutôt de forme gaussienne. Un des buts de cette sous-section est de déterminer dans quel domaine de paramètres on peut considérer que la distribution de vitesse longitudinale après la cavité est isomorphe à la distribution de vitesse longitudinale $\rho(v_l)$ après le refroidissement transverse, c.-à-d. qu'elle est aussi gaussienne. Dans ce cas, la largeur de cette distribution est évidemment inférieure à celle de la distribution après refroidissement transverse. Déterminons tout d'abord quelles sont les vitesses longitudinales limites qui permettent encore aux atomes de traverser la cavité.

Vitesses longitudinales et trajectoires extrémales

Comme nous l'avons mentionné, la cavité micro-onde opère une sélection des vitesses longitudinales du jet. Ce filtrage s'opère dans un domaine de vitesses dont nous allons déterminer les bornes. Ces dernières dépendent des caractéristiques du jet à la sortie du refroidissement transverse, à savoir si le jet est ponctuel ou étendu et si le jet a une température transverse nulle ou supérieure à zéro. Considérons tout d'abord le cas d'un jet ponctuel avec une température transverse nulle.

Jet ponctuel avec température transverse nulle :

Les deux trajectoires extrémales correspondant aux deux vitesses limites de ce cas sont représentées dans la Fig. 3.25. Comme le jet est considéré ponctuel avec une température transverse nulle, il est dévié d'un angle θ_0 dans le plan du refroidissement transverse à l'abscisse de la source ($x = 0$). Le point de coordonnée (x_1, z_1) représente le point qui limite chaque trajectoire extrême. Pour la trajectoire correspondant à la vitesse longitudinale minimale, ses coordonnées sont :

$$x_1 = L + l - R_c - \Delta c \quad \text{et} \quad z_1 = H_c + \frac{h_{cf}}{2} + h_{cut} \quad (3.131)$$

et pour celle dont la vitesse longitudinale est maximale :

$$x_1 = L + l + R_c \quad \text{et} \quad z_1 = H_c + \frac{h_{cf}}{2} \quad (3.132)$$

où R_c , Δc , h_{cf} et h_{cut} sont définis dans le Tab. 3.5. La trajectoire après le refroidissement transverse est donnée par l'équation (3.5) dans laquelle on fixe la valeur de l'inclinaison initiale de la trajectoire à la valeur θ_0 :

$$z(x) = x \left(\cot \theta_0 - \frac{gx}{2v_{lx}^2} \right) + h_t \quad x \geq 0 \quad (3.133)$$

Imposons que cette trajectoire passe par le point de coordonnée (x_1, z_1) . On trouve alors la valeur de la composante z de la vitesse longitudinale après le refroidissement transverse :

$$v_{lz}^2 = \frac{2gx_1^2 H_{ct}^2 L^2}{\left(2x_1 H_{ct} L - z_1 (L^2 - l^2) \right) (L^2 - l^2)} \quad (3.134)$$

La vitesse de lancement v_L du jet s'en déduit par :

$$v_L = \sqrt{v_{lz}^2 + 2gh_t} \quad (3.135)$$

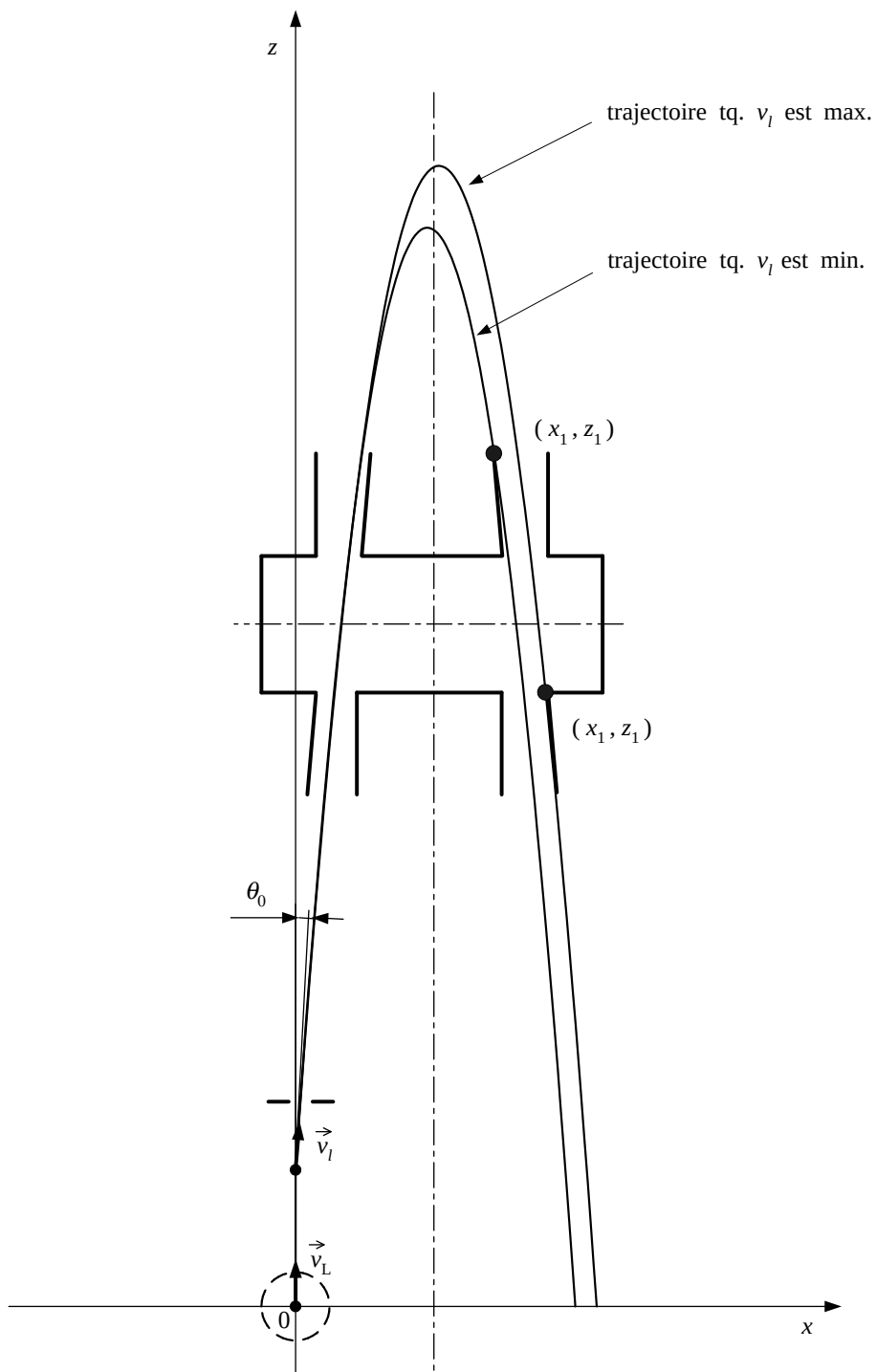


Fig. 3.25: Schéma des deux trajectoires atomiques extrémales dans le plan Oxz pour un jet ponctuel avec température transverse nulle. Le point de coordonnées (x_1, z_1) représente le point qui limite chaque trajectoire. Pour le cas considéré ici, l'angle d'inclinaison initial de chaque trajectoire est égal à θ_0 .

On peut encore connaître la hauteur totale H_{tot} de la trajectoire depuis le centre de la source jusqu'à son apogée. Elle s'exprime à partir de v_{l_z} par la relation :

$$H_{\text{tot}} = \frac{v_{l_z}^2}{2g} + h_t \quad (3.136)$$

La valeur minimale et maximale de v_L et H_{tot} dans le cas d'un jet ponctuel avec température transverse nulle est reportée dans le Tab. 3.8. Le cas d'un jet ponctuel avec température transverse non-nulle est identique à celui d'un jet étendu avec température transverse non-nulle que nous aborderons plus loin. Passons maintenant au cas d'un jet étendu avec température transverse nulle.

Jet étendu avec température transverse nulle :

Nous avons représenté dans la Fig. 3.26 les deux trajectoires correspondant aux vitesses longitudinales minimale et maximale du jet dans ce cas. La température du jet étant considérée nulle, les trajectoires atomiques sont toujours déviées par le refroidissement transverse d'un angle θ_0 . Mais comme la source est supposée étendue, l'abscisse de l'origine de la trajectoire dans le plan du refroidissement transverse n'est pas fixée. La trajectoire est donc déterminée par deux points dans le plan Oxz . Les deux points qui limitent les trajectoires extrémales sont indiqués sur la Fig. 3.26 par les points de coordonnées (x_1, z_1) et (x_2, z_2) . Pour la trajectoire correspondant à la vitesse minimale, leurs coordonnées valent :

$$x_1 = L - l + R_c + \Delta c \quad \text{et} \quad z_1 = H_c + \frac{h_{\text{cf}}}{2} + h_{\text{cut}} \quad (3.137a)$$

$$x_2 = L + l - R_c - \Delta c \quad \text{et} \quad z_2 = H_c + \frac{h_{\text{cf}}}{2} + h_{\text{cut}} \quad (3.137b)$$

et celles fixant la trajectoire dont la vitesse est maximale :

$$x_1 = L - l - R_c \quad \text{et} \quad z_1 = H_c - \frac{h_{\text{cf}}}{2} \quad (3.138a)$$

$$x_2 = L + l + R_c \quad \text{et} \quad z_2 = H_c - \frac{h_{\text{cf}}}{2} \quad (3.138b)$$

L'équation de la trajectoire est donnée dans ce cas par (3.133) dans laquelle on laisse libre l'écart Δx_0 entre l'origine de la trajectoire dans le plan du refroidissement transverse et la position du centre de la source :

$$z(x) = (x - \Delta x_0) \left(\cot \theta_0 - \frac{g(x - \Delta x_0)}{2v_{l_x}^2} \right) + h_t \quad x \geq 0 \quad (3.139)$$

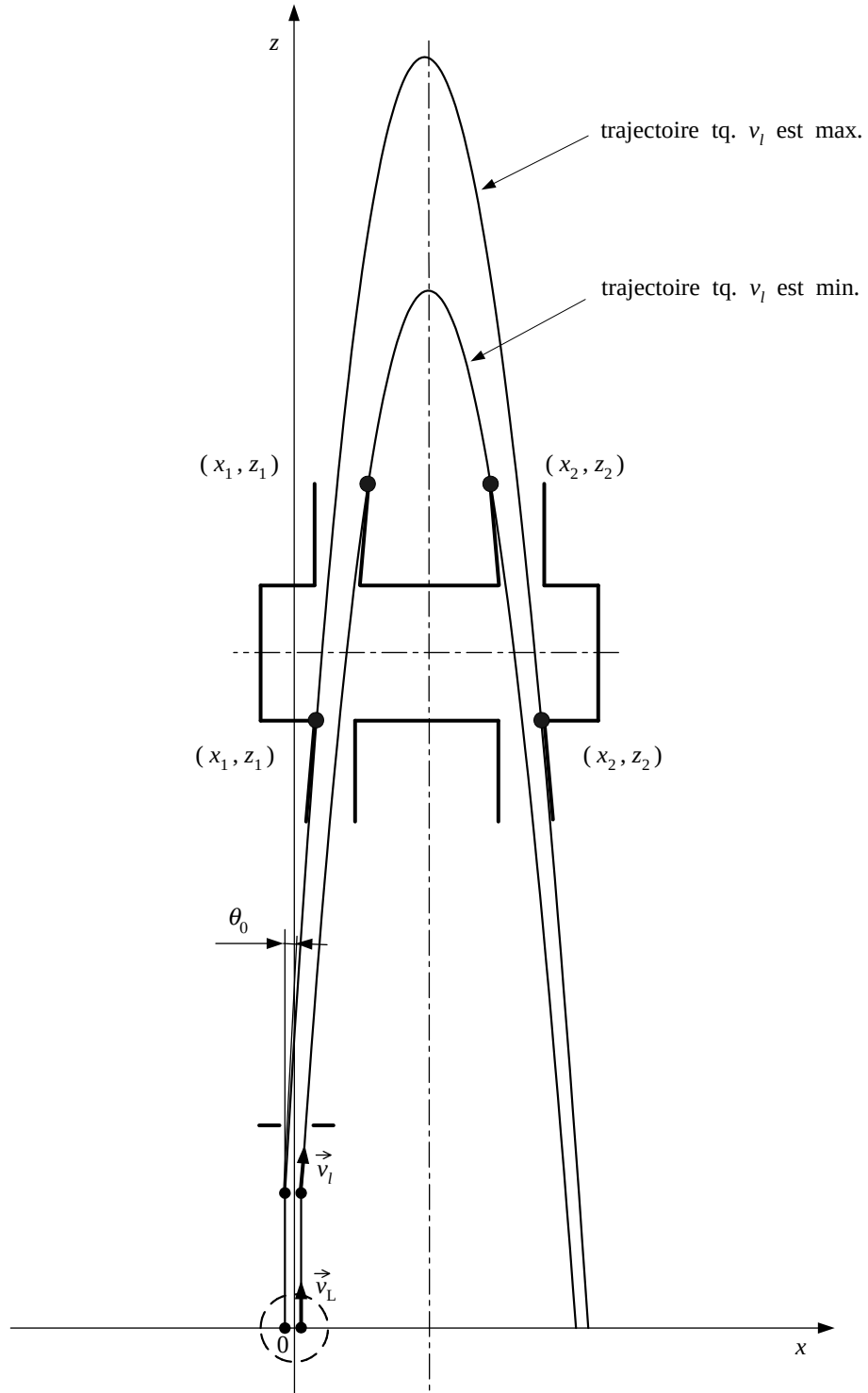


Fig. 3.26: Schéma des deux trajectoires atomiques extrémales dans le plan Oxz pour un jet étendu avec température transverse nulle. Les points de coordonnées (x_1, z_1) et (x_2, z_2) représentent les points qui limitent chaque trajectoire. Pour le cas considéré ici, l'angle d'inclinaison initial de chaque trajectoire est égal à θ_0 .

Imposons que cette trajectoire passe par les deux points de coordonnées (x_1, z_1) et (x_2, z_2) . On trouve alors pour l'écart Δx_0 l'expression suivante :

$$\Delta x_0 = \frac{(x_2 - x_1) \left((x_2 + x_1) \cot \theta_0 - \sqrt{4z_1 z_2 + (x_2 - x_1)^2 \cot^2 \theta_0} \right) - 2(z_1 x_2 - z_2 x_1)}{2(z_2 - z_1 + (x_2 - x_1) \cot \theta_0)} \quad (3.140)$$

La composante z de la vitesse longitudinale après le refroidissement transverse s'en déduit par la relation :

$$v_{l_z}^2 = \frac{g(x_1 - \Delta x_0)^2 \cot^2 \theta_0}{2((x_1 - \Delta x_0) \cot \theta_0 - z_1)} \quad (3.141)$$

La vitesse de lancement v_L du jet se calcule avec (3.135) et la hauteur totale correspondante de la trajectoire est donnée par (3.136). Les valeurs extrémales de la vitesse de lancement v_L , de la hauteur totale H_{tot} ainsi que de l'écart Δx_0 des trajectoires sont regroupées dans le Tab. 3.8. Abordons enfin le cas plus réaliste d'un jet étendu avec température transverse non-nulle.

Jet étendu avec température transverse non-nulle :

Contrairement au cas précédent, un jet étendu avec température transverse non-nulle est formé de trajectoires atomiques dont l'angle d'inclinaison initial θ dans le plan du refroidissement transverse peut maintenant être quelconque. Les trajectoires sont par conséquent déterminées par trois points dans le plan Oxz . Dans la Fig. 3.27 sont représentées les deux trajectoires extrémales engendrées par la vitesse longitudinale minimale et maximale autorisée dans ce cas par la géométrie de la cavité micro-onde et des diaphragmes. Les trois points qui délimitent chaque trajectoire ont pour coordonnées (x_1, z_1) , (x_2, z_2) et (x_3, z_3) . Pour la trajectoire dont la vitesse longitudinale est minimale, leurs coordonnées sont données par :

$$x_1 = L - x_{c_2} - R_2 \quad \text{et} \quad z_1 = h_2 \quad (3.142a)$$

$$x_2 = L - l + R_c + \Delta c \quad \text{et} \quad z_2 = H_c + \frac{h_{\text{cf}}}{2} + h_{\text{cut}} \quad (3.142b)$$

$$x_3 = L + l - R_c - \Delta c \quad \text{et} \quad z_3 = H_c + \frac{h_{\text{cf}}}{2} + h_{\text{cut}} \quad (3.142c)$$

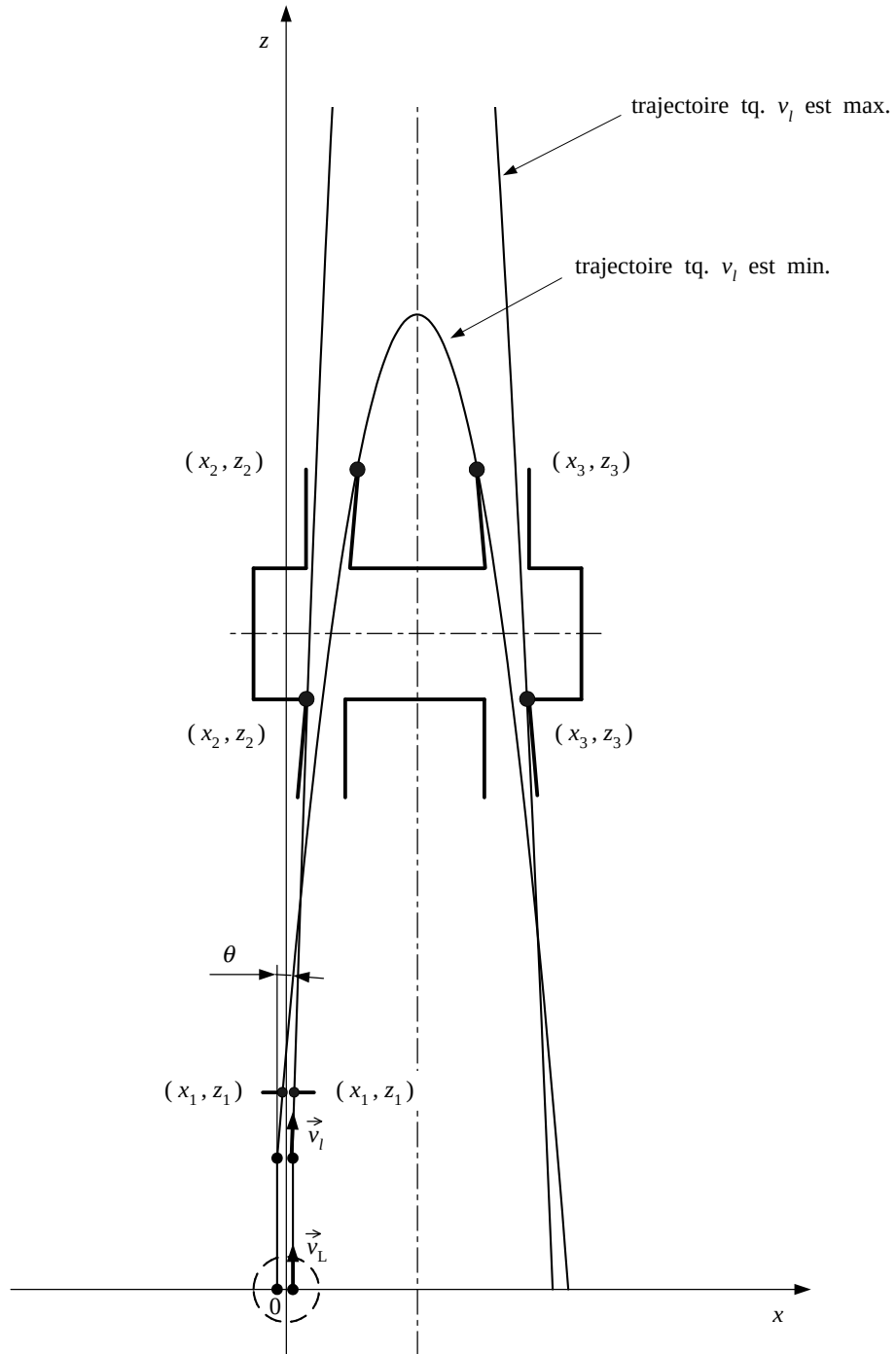


Fig. 3.27: Schéma des deux trajectoires atomiques extrémales dans le plan Oxz pour un jet étendu avec température transverse non-nulle. Les points de coordonnées (x_1, z_1) , (x_2, z_2) et (x_3, z_3) représentent les points qui limitent chaque trajectoire. Pour le cas considéré ici, l'angle d'inclinaison initial de chaque trajectoire est différent de θ_0 .

et celles déterminant la trajectoire qui correspond à la vitesse maximale :

$$x_1 = L - x_{c_2} + R_2 \quad \text{et} \quad z_1 = h_2 \quad (3.143a)$$

$$x_2 = L - l - R_c \quad \text{et} \quad z_2 = H_c - \frac{h_{cf}}{2} \quad (3.143b)$$

$$x_3 = L + l + R_c \quad \text{et} \quad z_3 = H_c - \frac{h_{cf}}{2} \quad (3.143c)$$

L'équation de la trajectoire est la même que précédemment à ceci près qu'il faut laisser libre l'angle d'inclinaison initial θ . Elle s'écrit donc :

$$z(x) = (x - \Delta x_0) \left(\cot \theta - \frac{g(x - \Delta x_0)}{2v_{l_x}^2} \right) + h_t \quad x \geq 0 \quad (3.144)$$

Si on impose que la trajectoire passe par les trois points de coordonnées (x_1, z_1) , (x_2, z_2) et (x_3, z_3) , on peut déterminer la valeur des trois paramètres libres de l'équation ci-dessus. Pour la valeur de l'écart Δx_0 entre le centre de la source et la position de l'origine de la trajectoire dans le plan du refroidissement transverse, on obtient :

$$\Delta x_0 = \left(\frac{z_2 x_1^2 - z_1 x_2^2}{z_2 - z_1} \right)^{1/2} \quad (3.145)$$

Du fait que la trajectoire est symétrique par rapport à l'axe de symétrie de la cavité, les coordonnées (x_3, z_3) du 3^{ème} point n'interviennent pas dans la détermination des paramètres. La composante z de la vitesse longitudinale après le refroidissement transverse est alors donnée dans ce cas par :

$$v_{l_z}^2 = \left(\frac{2g(z_2 x_1^2 - z_1 x_2^2)}{x_1^2 - x_2^2} \right)^{1/2} \quad (3.146)$$

La vitesse de lancement v_L correspondante se calcule toujours avec (3.135) et la hauteur totale avec (3.136). Pour être complet donnons encore l'angle d'inclinaison initial de cette trajectoire :

$$\theta = \arctan \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{2\sqrt{(z_2 - z_1)(z_2 x_1^2 - z_1 x_2^2)}} \right) \quad (3.147)$$

Les valeurs numériques des quatre paramètres des trajectoires extrémales du cas d'un jet étendu avec température transverse non-nulle sont indiquées dans le Tab. 3.8.

<i>Grandeur</i>	<i>Notation</i>	<i>Jet ponctuel</i> $T_t = 0$	<i>Valeur</i> <i>Jet étendu</i> $T_t = 0$	<i>Jet étendu</i> $T_t > 0$
<i>Vitesse longitudinale min. :</i>				
Vitesse de lancement	v_L	3.73 m/s	3.68 m/s	3.50 m/s
Vitesse longitudinale	v_l	3.59 m/s	3.54 m/s	3.35 m/s
Ecart centre source	Δx_0	0.0 mm	2.5 mm	-6.5 mm
Angle d'inclinaison	θ	1.84°	1.84°	2.50°
Hauteur totale	H_{tot}	706.6 mm	689.0 mm	623.8 mm
<i>Vitesse longitudinale max. :</i>				
Vitesse de lancement	v_L	3.85 m/s	3.92 m/s	6.68 m/s
Vitesse longitudinale	v_l	3.72 m/s	3.79 m/s	6.60 m/s
Ecart centre source	Δx_0	0.0 mm	-3.5 mm	7.9 mm
Angle d'inclinaison	θ	1.84°	1.84°	0.46°
Hauteur totale	H_{tot}	756.1 mm	782.2 mm	2272 mm

Tab. 3.8: Valeurs numériques des paramètres des trajectoires correspondant aux vitesses longitudinales min. et max. des trois cas de jet envisagés dans la sous-section 3.4.3. Ces valeurs sont déterminées par la géométrie des trous de passage de la cavité micro-onde et par le 1^{er} diaphragme sur la trajectoire du jet. La vitesse de lancement est en fait limitée par la hauteur du résonateur à une valeur de $v_L \simeq 4.04$ m/s.

Remarquons que dans ce cas, qui correspond au jet de la fontaine continue, les trajectoires extrémales et par conséquent les vitesses extrêmes ne sont pas limitées par la géométrie de la cavité micro-onde mais plutôt par le rayon du 1^{er} diaphragme présent sur la trajectoire du jet.

Détermination de la distribution effective de vitesse longitudinale

Déterminons la distribution effective de vitesse longitudinale dans le cadre du modèle analytique que nous avons élaboré. Pour simplifier, nous considérons uniquement le cas où la vitesse longitudinale moyenne du jet $\bar{v}_l$ après le refroidissement transverse est égale à la vitesse longitudinale nominale v_{l_0} . Comme nous l'avons vu, ce n'est probablement pas le cas dans la fontaine continue.

La “fonction filtre” de la cavité pour la vitesse longitudinale est donnée par l'équation (3.82) dans laquelle on remplace a par sa valeur en fonction

de v_l :

$$\mathcal{N}(v_l, t_{4+}) = \mathcal{N} e^{-a_1^2(v_l - v_{l0})^2/R_4^{*2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\gamma(n+1, R_{ca}^2/R_4^{*2})}{(n!)^2} \left(\frac{a_1^2(v_l - v_{l0})^2}{R_4^{*2}} \right)^n \quad (3.148)$$

Cette expression donne le nombre relatif d'atomes qui franchissent la cavité pour une vitesse longitudinale v_l donnée. La distribution effective de vitesse longitudinale $\rho_{\text{eff}}(v_l)$ s'exprime alors par :

$$\rho_{\text{eff}}(v_l) = \rho(v_l) \mathcal{N}(v_l, t_{4+}) \quad (3.149)$$

où $\rho(v_l)$ est la distribution gaussienne de vitesse longitudinale (3.70) après le refroidissement transverse. En normalisant cette distribution avec :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\text{eff}}^N(v_l) dv_l = 1 \quad (3.150)$$

et en faisant la même approximation que lors de l'intégration de (3.96), on obtient l'expression suivante pour la distribution effective normalisée de vitesse longitudinale $\rho_{\text{eff}}^N(v_l)$:

$$\rho_{\text{eff}}^N(v_l) = N_\rho e^{-\alpha(v_l - v_{l0})^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\gamma(n+1, R_{ca}^2/R_4^{*2})}{(n!)^2} \left(\frac{a_1^2(v_l - v_{l0})^2}{R_4^{*2}} \right)^n \quad (3.151)$$

où les coefficients α et N_ρ sont donnés par :

$$\alpha = \frac{R_4^{*2} + 2a_1^2 v_{l\text{rms}}^2}{2v_{l\text{rms}}^2 R_4^{*2}} \quad (3.152a)$$

$$N_\rho^{-1} = \sqrt{2\pi} v_{l\text{rms}} \frac{R_4^*}{(R_4^{*2} + 2a_1^2 v_{l\text{rms}}^2)^{1/2}} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(n!)^2} \gamma(n+1, R_{ca}^2/R_4^{*2}) \xi^n \quad (3.152b)$$

$$\text{avec} \quad \xi = \frac{a_1^2 v_{l\text{rms}}^2}{R_4^{*2} + 2a_1^2 v_{l\text{rms}}^2} \quad (3.152c)$$

Pour les paramètres typiques du jet, nous avons calculé la distribution effective de vitesse fournie par la formule (3.151) et nous l'avons comparée à une simulation Monte-Carlo de la distribution de vitesse longitudinale au niveau de la détection. La comparaison est reportée dans la Fig. 3.28. La courbe en escalier est le résultat de la simulation Monte-Carlo et la courbe lisse est celui correspondant à la formule.

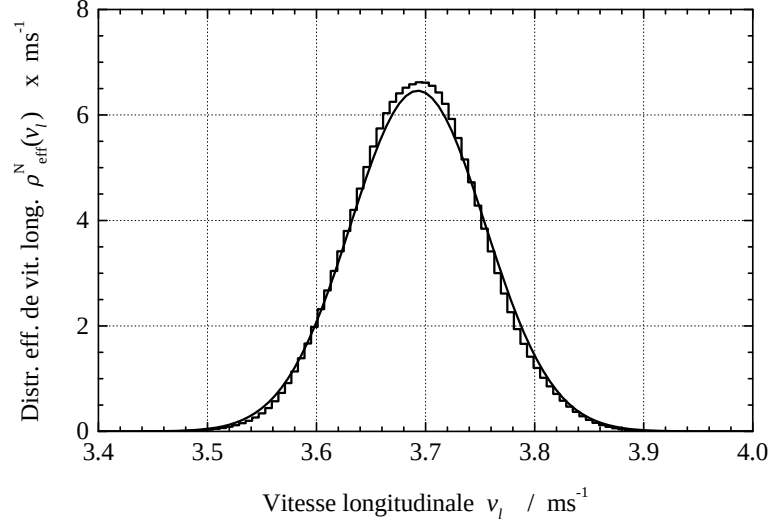


Fig. 3.28: Distribution effective normalisée de vitesse longitudinale $\rho_{\text{eff}}^N(v_l)$ pour les paramètres typiques du jet. La courbe en escalier est le résultat de la simulation Monte-Carlo ($N_{\text{tot}} = 1 \cdot 10^7$) et la courbe en trait lisse est obtenue avec la formule (3.151).

Nous voyons d’une part que la distribution calculée avec la formule reproduit bien celle obtenue par simulation. Elle est toutefois légèrement plus large (température longitudinale effective un peu plus élevée), ce que nous avons déjà remarqué sur la Fig. 3.14 du flux à la détection en fonction de la vitesse de lancement.

D’autre part la forme de la distribution est très proche d’une gaussienne. En effet, nous avons effectué un ajustement de la distribution obtenue avec la simulation Monte-Carlo par une distribution gaussienne identique à (3.70). La Fig. 3.29 montre le résultat de cet ajustement. Les paramètres de l’ajustement¹⁵ sont les suivants : vitesse longitudinale moyenne $\bar{v}_l = 3.693 \text{ m/s}$ et température longitudinale effective $T_l^{\text{eff}} = 58 \mu\text{K}$. Pour cette vitesse longitudinale, on trouve une vitesse de lancement à la source de $v_L = 3.83 \text{ m/s}$ qui est exactement la valeur utilisée dans les simulations. La température longitudinale effective obtenue avec l’ajustement gaussien correspond bien à la température que l’on pourrait déduire de la formule pour une température longitudinale de $T_l = 75 \mu\text{K}$. Ceci est évident puisque la distribution calculée avec (3.151) est très proche de celle obtenue par simulation.

Nous voyons donc que pour les paramètres typiques du jet (Tab. 3.8) la distribution effective de vitesse longitudinale semble être très proche d’une

¹⁵Dans la suite, nous laissons tomber l’indice “fit” qui indique des valeurs obtenues à partir d’ajustement pour ne pas surcharger inutilement l’écriture.

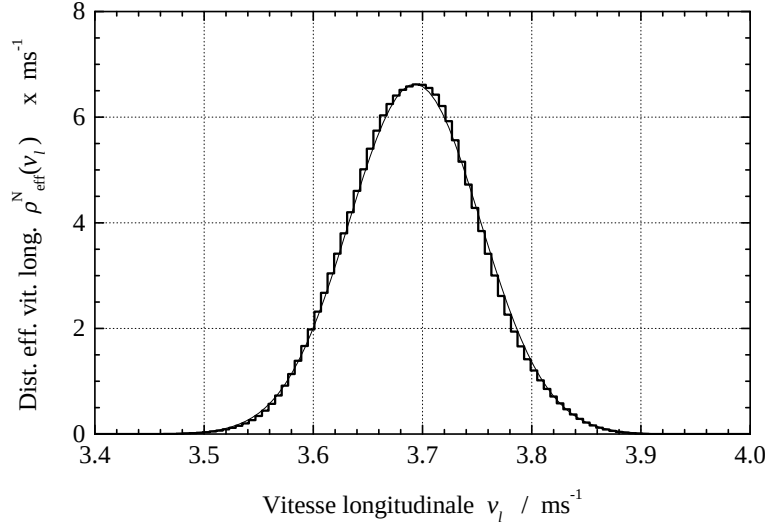


Fig. 3.29: Distribution effective normalisée de vitesse longitudinale $\rho_{\text{eff}}^N(v_l)$ pour les paramètres typiques du jet. La courbe en escalier est le résultat de la simulation Monte-Carlo ($N_{\text{tot}} = 1 \cdot 10^7$) et la courbe en trait fin est un ajustement avec une distribution gaussienne. Les paramètres de l'ajustement sont : $\bar{v}_l = 3.693 \text{ m/s}$ et $T_l^{\text{eff}} = 58 \mu\text{K}$.

gaussienne. Néanmoins, nous constatons que la température longitudinale effective déduite de cette distribution ($T_l^{\text{eff}} \simeq 58 \mu\text{K}$) est notablement inférieure à la température longitudinale $T_l = 75 \mu\text{K}$. Comme nous espérons pouvoir, dans un proche avenir, réduire la température transverse du jet¹⁶, il est intéressant de voir si la forme de la distribution effective de vitesse longitudinale reste gaussienne lorsque la température transverse du jet devient très faible. Ceci a une incidence sur la forme des franges de Ramsey et il est utile de savoir si cette distribution est gaussienne afin de pouvoir ajuster correctement la courbe théorique sur les franges de Ramsey obtenues expérimentalement.

Dans ce but, nous avons essayé de déterminer le domaine de paramètres, température transverse T_t et rayon initial R_{jet} du jet, pour lesquels la distribution effective de vitesse longitudinale peut être considérée comme gaussienne. Pour ce faire, nous avons calculé cette distribution pour différentes valeurs des paramètres et nous l'avons comparée à une distribution gaussienne. Quelques résultats de cette comparaison, calculés pour une température longitudinale de $T_l = 75 \mu\text{K}$, sont présentés dans la Fig. 3.30. On a constaté que pour cette température longitudinale et un rayon initial du jet de $R_{\text{jet}} = 8.5 \text{ mm}$, cor-

¹⁶Nous sommes actuellement en train de développer sur la fontaine expérimentale un refroidissement 3D du jet (transverse et longitudinal) plus performant à l'aide de techniques de refroidissement plus sophistiquées.

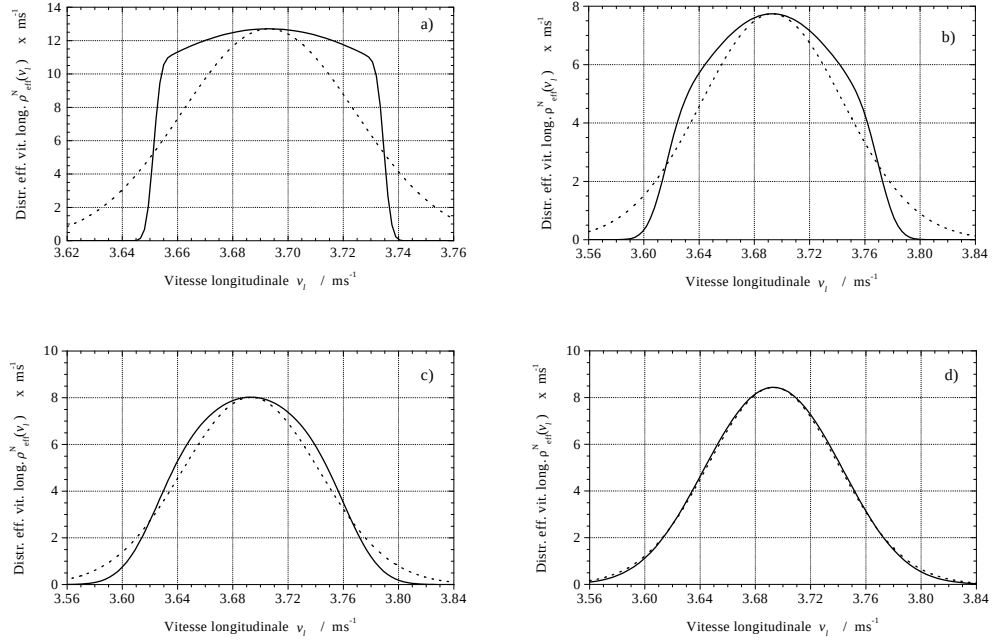


Fig. 3.30: Distribution effective normalisée de vitesse longitudinale $\rho_{\text{eff}}^N(v_l)$ pour $T_l = 75 \mu\text{K}$, $T_t = 0$ et un rayon initial du jet : a) $R_{\text{jet}} = 0$; b) $R_{\text{jet}} = 1$ mm; c) $R_{\text{jet}} = 2$ mm; d) $R_{\text{jet}} = 4$ mm. La courbe en trait continu est calculée avec la formule (3.151) et celle en traitillé est une distribution gaussienne, représentée pour comparaison.

respondant au rayon mesuré, la distribution effective de vitesse longitudinale calculée est exactement gaussienne et cela même pour une température transverse nulle. Par contre, si on diminue le rayon initial du jet, on constate que la distribution effective commence à s'écarter d'une distribution gaussienne dès que $R_{\text{jet}} = 4 \text{ mm}$ (c.f. Fig. 3.30). Pour des rayons inférieurs, on voit notamment que la distribution est tronquée. Ceci provient du fait que, dans ce cas, le jet n'a plus une extension transverse suffisamment grande pour que des atomes puissent traverser la cavité avec des vitesses inférieures ou supérieures aux vitesses limites. Remarquons que même pour un jet ponctuel ($R_{\text{jet}} = 0$), la troncature de la distribution n'est pas instantanée. La raison en est que nous avons supposé le jet issu d'une source isotrope, c.-à-d. que sa température transverse à la sortie de la source n'est pas nulle. Le jet possède donc un rayon non nul au niveau du refroidissement transverse qui se manifeste par une coupure dans la distribution qui a lieu sur un intervalle de vitesse représentatif de son extension transverse. Pour conclure, nous pouvons dire que pour un jet issu d'une source étendue et quelle que soit la température transverse du jet, la distribution effective normalisée de vitesse longitudinale est bien décrite par une distribution gaussienne de densité de probabilité :

$$\rho_{\text{eff}}(v_l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} v_{l_{\text{rms}}}^{\text{eff}}} e^{-(v_l - \bar{v}_l)^2 / 2 v_{l_{\text{rms}}}^{\text{eff}2}} \quad (3.153)$$

où $\bar{v}_l$ est la vitesse moyenne de la distribution effective et $v_{l_{\text{rms}}}^{\text{eff}}$ la vitesse quadratique moyenne effective reliée à la température longitudinale effective T_l^{eff} par :

$$v_{l_{\text{rms}}}^{\text{eff}} = \left(\frac{k_B T_l^{\text{eff}}}{m_{Cs}} \right)^{1/2} \quad (3.154)$$

Par contre, la température longitudinale effective de cette distribution (sa largeur) dépend de la température transverse du jet comme nous allons le voir.

Température longitudinale effective

Il est intéressant de déterminer la relation entre la température longitudinale effective et la température longitudinale après refroidissement transverse. Pour cela, calculons la vitesse quadratique moyenne effective de la distribution effective (3.151). Elle est définie par :

$$v_{l_{\text{rms}}}^{\text{eff}2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\text{eff}}^N(v_l) (v_l - v_{l_0})^2 dv_l \quad (3.155)$$

On peut intégrer cette expression en faisant la même approximation que précédemment et en utilisant la relation (3.154) entre la vitesse quadratique

moyenne effective et la température longitudinale effective, on aboutit à l'expression suivante :

$$T_l^{\text{eff}} = T_l \frac{R_4^{*2}}{R_4^{*2} + 2a_1^2 v_{l\text{rms}}^2} \times \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)!! (n!)^{-2} \gamma(n+1, R_{\text{ca}}^2/R_4^{*2}) \xi^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} (2n-1)!! (n!)^{-2} \gamma(n+1, R_{\text{ca}}^2/R_4^{*2}) \xi^n} \quad (3.156)$$

où ξ est donné par (3.152c). Les valeurs limites de T_l^{eff} se déduisent facilement et valent :

$$\text{Pour } T_l \rightarrow 0 : \quad (3.157a)$$

$$\lim_{T_l \rightarrow 0} T_l^{\text{eff}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{T_l \rightarrow 0} \frac{dT_l^{\text{eff}}}{dT_l} = 1 \quad (3.157b)$$

$$\text{Pour } T_l \rightarrow \infty :$$

$$\lim_{T_l \rightarrow \infty} T_l^{\text{eff}} = \frac{m R_4^{*2}}{2k_B a_1^2} \cdot \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)!! (n!)^{-2} 2^{-n} \gamma(n+1, R_{\text{ca}}^2/R_4^{*2})}{\sum_{n=0}^{+\infty} (2n-1)!! (n!)^{-2} 2^{-n} \gamma(n+1, R_{\text{ca}}^2/R_4^{*2})} \quad (3.157c)$$

et $\lim_{T_l \rightarrow \infty} \frac{dT_l^{\text{eff}}}{dT_l} = 0$

On constate donc que lorsque T_l devient très petit, T_l^{eff} tend vers T_l ce qui est évident puisque dans ce cas la cavité ne peut plus jouer son rôle de filtre (pour autant que la vitesse moyenne du jet se trouve dans la fenêtre d'acceptance de la cavité). Dans le cas où T_l devient très grand, T_l^{eff} tend vers une valeur constante qui dépend de la température transverse du jet. En effet, si on "arrose" la cavité avec un jet dont la distribution de vitesse longitudinale est large, les atomes dans les bords de la distribution ne pourront pas traverser la cavité. Et si on élargit encore la distribution, les classes de vitesses des atomes qui peuvent traverser la cavité restent pratiquement les mêmes, d'où une limite pour la largeur de la distribution de vitesse. On comprend également que pour une température longitudinale donnée, plus la température transverse du jet est petite (soit plus la section du jet est petite) plus la largeur de la distribution effective devient étroite, c.-à-d. plus la température longitudinale effective diminue. On remarque également que T_l^{eff} est toujours inférieure à T_l pour $T_l > 0$ conformément à ce que l'on attendait. Ce comportement est illustré sur la Fig. 3.31 où nous représentons T_l^{eff} en fonction de T_l pour quatre températures transverses : $T_t = 0, 5 \mu\text{K}, 20 \mu\text{K}$ et à la limite lorsque $T_t \rightarrow \infty$. Nous avons aussi reporté les valeurs correspondantes (cercles pleins) de la température longitudinale effective déduites des

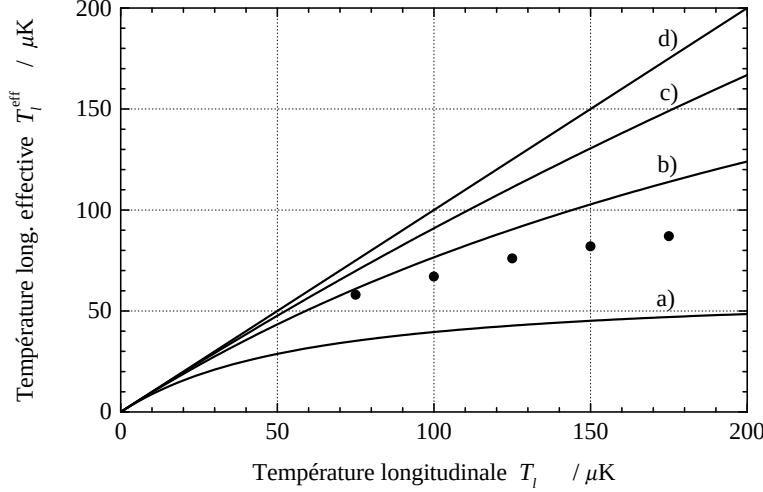


Fig. 3.31: Température longitudinale effective T_l^{eff} en fonction de la température longitudinale T_l d'après la formule (3.156). La courbe est représentée pour quatre températures transverses : a) $T_t = 0$; b) $T_t = 5 \mu\text{K}$; c) $T_t = 20 \mu\text{K}$ et d) $T_t \rightarrow \infty$. Les cercles pleins sont les valeurs de la température longitudinale effective déduites des simulations Monte-Carlo pour une température transverse de $T_t = 5 \mu\text{K}$.

ajustements des simulations Monte-Carlo pour $T_t = 5 \mu\text{K}$. Pour cette même température transverse, on voit sur la Fig. 3.31 que pour une température longitudinale de $T_l = 75 \mu\text{K}$, la température longitudinale effective correspondante vaut $T_l^{\text{eff}} \simeq 60 \mu\text{K}$. On retrouve donc bien une valeur proche de celle de l'ajustement gaussien ($T_l^{\text{eff}} \simeq 58 \mu\text{K}$). Elle est légèrement supérieure à cette dernière, comme on pouvait s'y attendre, puisque la distribution calculée avec (3.151) est légèrement plus large que celle obtenue par simulation Monte-Carlo. Cet effet est plus marqué pour des températures longitudinales plus élevées. Néanmoins, l'accord entre les simulations et le modèle analytique est satisfaisant. Nous remarquons également que lorsque la température transverse est égale à zéro, la température longitudinale effective est inférieure à la moitié de la température longitudinale initiale pour une valeur typique ($T_l \simeq 75 \mu\text{K}$) de cette dernière. Elle devrait même être nettement plus petite du fait que nous surestimons cette température avec le modèle analytique.

3.4.4 Distributions effectives de temps de transit, d'interaction et de détection

Nous déterminons dans cette dernière sous-section les paramètres typiques des distributions effectives de temps de transit, d'interaction et de détection

de la fontaine continue. La connaissance de ces distributions nous sera utile dans les chapitres ultérieurs lorsque nous aborderons l'étude des franges de Ramsey et du signal d'horloge.

Distribution effective de temps de transit

La distribution effective de vitesse longitudinale $\rho_{\text{eff}}(v_l)$ engendre par le passage du jet à travers les deux zones d'interaction de la cavité micro-onde une distribution effective¹⁷ de temps de transit $\rho(T)$. Cette dernière a une certaine influence sur la forme des franges de Ramsey que nous étudierons plus tard. Il est dès lors intéressant de pouvoir relier les paramètres de la distribution effective de temps de transit (que l'on peut déterminer à partir de la mesure des franges de Ramsey) à ceux de la distribution effective de vitesse longitudinale du jet.

Comme nous l'avons vu dans la sous-section précédente, la distribution effective de vitesse longitudinale peut être considérée comme gaussienne avec une très bonne approximation dans le domaine des paramètres typiques du jet de la fontaine continue. De l'équation (3.28) nous pouvons relier la vitesse longitudinale v_l au temps de transit T :

$$v_l - \bar{v}_l = \frac{T - \bar{T}}{T'_0} \quad (3.158)$$

Puis, en insérant cette relation dans l'expression (3.153) de la densité de probabilité de la distribution effective de vitesse longitudinale, nous obtenons la densité de probabilité correspondante de la distribution effective normalisée de temps de transit :

$$\rho(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} T_{\text{rms}}'} e^{-(T-\bar{T})^2/2T_{\text{rms}}'^2} \quad (3.159)$$

où le temps de transit moyen $\bar{T}$ se déduit de $\bar{v}_l$ d'après l'équation (3.27) et le temps de transit quadratique moyen effectif T_{rms} est relié à $v_{l,\text{rms}}^{\text{eff}}$ par :

$$T_{\text{rms}} = T_0' v_{l,\text{rms}}^{\text{eff}} \quad (3.160)$$

La valeur du coefficient T_0' est indiquée dans le Tab. 3.4. Nous avons reporté dans le Tab. 3.9 une valeur typique de T_{rms} obtenue pour une distribution initiale de vitesse longitudinale dont la température vaut $T_l = 75 \mu\text{K}$.

¹⁷Nous supprimons l'indice désignant les distributions effectives de temps et les temps quadratiques moyen effectifs pour ne pas surcharger l'écriture.

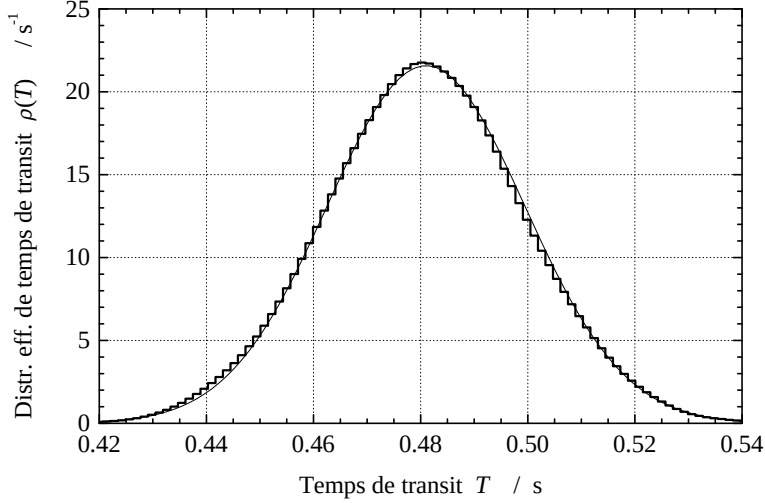


Fig. 3.32: Distribution effective normalisée de temps de transit $\rho(T)$ pour les paramètres typiques du jet. La courbe en escalier est le résultat de la simulation Monte-Carlo ($N_{\text{tot}} = 3.5 \cdot 10^7$) et celle en trait fin est un ajustement gaussien calculé avec la formule (3.159). Les paramètres de l'ajustement sont : $\bar{T} = 0.481$ s et $T_{\text{rms}} = 18.5$ ms.

Afin de vérifier l'approximation de la distribution effective de temps de transit par la distribution (3.159), nous avons fait un ajustement de la distribution effective de temps de transit obtenue par simulation Monte-Carlo, pour les paramètres typiques du jet, avec la formule (3.159). Le résultat de l'ajustement est présenté dans la Fig. 3.32. La courbe en escalier est obtenue par simulation Monte-Carlo et celle en trait lisse est le résultat de l'ajustement. Les paramètres déduits de l'ajustement valent $\bar{T} = 0.481$ s et $T_{\text{rms}} = 18.5$ ms. A partir de ces valeurs, nous pouvons calculer la vitesse longitudinale moyenne correspondante $\bar{v}_l$ avec (3.27), et la température longitudinale effective T_l^{eff} avec (3.160). Nous obtenons $\bar{v}_l = 3.69$ m/s et $T_l^{\text{eff}} = 52$ μ K. On constate que ces valeurs sont proches de celles que nous avons trouvées à partir de l'ajustement de la simulation Monte-Carlo de la distribution effective de vitesse longitudinale ($\bar{v}_l = 3.693$ m/s et $T_l^{\text{eff}} = 58$ μ K). Ceci confirme que nous pouvons, avec une bonne approximation, décrire la distribution effective normalisée de temps de transit de la fontaine continue par l'expression (3.159) et déduire des paramètres de cette distribution, obtenus d'après l'ajustement des franges de Ramsey expérimentales, la vitesse longitudinale moyenne et la température longitudinale de la distribution effective de vitesse longitudinale du jet de la fontaine continue.

Distribution effective de temps d'interaction

La distribution effective de vitesse longitudinale du jet induit également une distribution effective de temps d'interaction $\rho(\tau)$ des atomes lorsqu'ils traversent chaque zone de la cavité micro-onde. Il nous sera utile par la suite d'exprimer cette distribution à partir de la distribution effective de temps de transit. Dans ce but, insérons la relation (3.34) entre T et le temps d'interaction τ dans l'équation (3.159), il vient pour l'expression de la densité de probabilité de la distribution effective normalisée de temps d'interaction :

$$\rho(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \tau_{\text{rms}}} e^{-(\tau - \bar{\tau})^2 / 2\tau_{\text{rms}}^2} \quad (3.161)$$

avec le temps d'interaction moyen $\bar{\tau}$ exprimé en fonction de $\bar{T}$:

$$\bar{\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \left(8b + g\bar{T}^2 \right)^{1/2} - \bar{T} \right) \quad (3.162)$$

et le temps d'interaction quadratique moyen effectif τ_{rms} est relié à T_{rms} par :

$$\tau_{\text{rms}} = |k_{\tau_0}| T_{\text{rms}} \quad (3.163)$$

La valeur du coefficient k_{τ_0} est indiquée dans le Tab. 3.4. Nous reportons aussi dans le Tab. 3.9 une valeur typique de τ_{rms} obtenue pour une distribution effective de vitesse longitudinale dont la température vaut $T_l^{\text{eff}} = 75 \mu\text{K}$.

Comme pour la distribution effective de temps de transit, nous avons effectué un ajustement de la distribution effective de temps d'interaction obtenue par simulation Monte-Carlo, pour les paramètres typiques du jet, avec la formule (3.161). La Fig. 3.33 montre le résultat de l'ajustement. La courbe en escalier est obtenue par simulation Monte-Carlo et celle en trait fin est le résultat de l'ajustement. Les paramètres déduits de l'ajustement valent $\bar{\tau} = 10.8 \text{ ms}$ et $\tau_{\text{rms}} = 0.42 \text{ ms}$. Avec ces valeurs, nous pouvons calculer le temps de transit moyen correspondant $\bar{T}$ à partir de (3.162), et le temps de transit quadratique moyen effectif T_{rms} avec (3.163). Nous obtenons $\bar{T} = 0.480 \text{ s}$ et $T_{\text{rms}} = 18.4 \text{ ms}$. On constate que ces valeurs sont proches de celles que nous avons trouvées à partir de l'ajustement de la simulation Monte-Carlo de la distribution effective de temps de transit ($\bar{T} = 0.481 \text{ s}$ et $T_{\text{rms}} = 18.5 \text{ ms}$). Ceci confirme donc que nous pouvons décrire, avec une bonne approximation, la distribution effective normalisée de temps d'interaction de la fontaine continue par la distribution effective de temps de transit (3.159) dans laquelle on exprime T en fonction de τ à partir de l'équation (3.34).

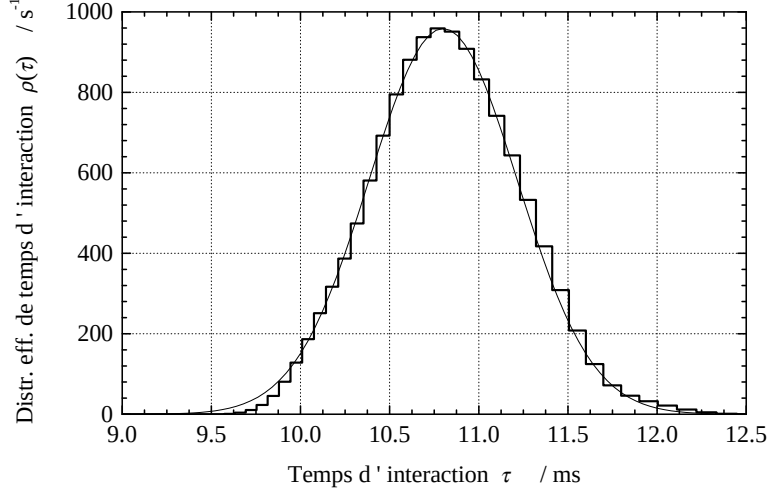


Fig. 3.33: Distribution effective normalisée de temps d'interaction $\rho(\tau)$ pour les paramètres typiques du jet. La courbe en escalier est le résultat de la simulation Monte-Carlo ($N_{\text{tot}} = 1 \cdot 10^7$) et celle en trait fin est un ajustement gaussien calculé avec la formule (3.161). Les paramètres de l'ajustement sont : $\bar{\tau} = 10.8$ ms et $\tau_{\text{rms}} = 0.42$ ms.

Distribution effective de temps de détection

La distribution effective de vitesse longitudinale du jet donne lieu aussi à une distribution effective de temps de détection $\rho(T_{di})$ des atomes depuis leur sortie de la cavité micro-onde jusqu'à la détection i ($i = 1, 2$). En procédant de la même manière que pour la distribution effective de temps d'interaction, mais avec la relation (3.36) entre T et le temps de détection T_{di} , la densité de probabilité de la distribution effective normalisée de temps de détection s'écrit :

$$\rho(T_{di}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} T_{di\text{rms}}} e^{-(T_{di} - \bar{T}_{di})^2 / 2T_{di\text{rms}}^2} \quad (3.164)$$

où $\bar{T}_{di}$ est le temps de détection moyen exprimé en fonction de $\bar{T}$:

$$\bar{T}_{di} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \left(\left(8(H_{ct} + h_t - h_{di}) + 4b + g\bar{T}^2 \right)^{1/2} - \left(8b + g\bar{T}^2 \right)^{1/2} \right) \quad (3.165)$$

et $T_{di\text{rms}}$ le temps de détection quadratique moyen effectif qui est relié à T_{rms} par :

$$T_{di\text{rms}} = |k_{di}| T_{\text{rms}} \quad (i = 1, 2) \quad (3.166)$$

La valeur du coefficient k_{di} est indiquée dans le Tab. 3.4. Nous reportons également dans le Tab. 3.9 une valeur typique de $T_{d1\text{rms}}$ obtenue pour une distribution de vitesse longitudinale dont la température vaut $T_l = 75 \mu\text{K}$.

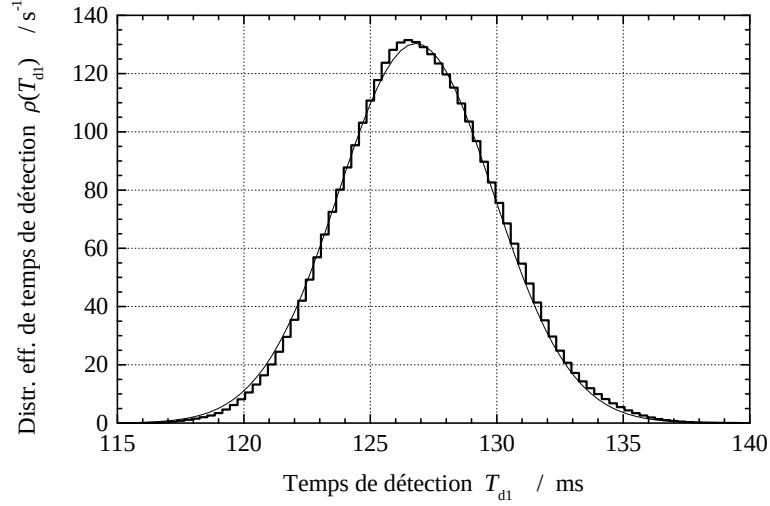


Fig. 3.34: Distribution effective normalisée de temps de détection $\rho(T_{d1})$ pour la détection 1 et pour les paramètres typiques du jet. La courbe en escalier est le résultat de la simulation Monte-Carlo ($N_{\text{tot}} = 1 \cdot 10^7$) et celle en trait fin est un ajustement gaussien calculé avec la formule (3.164). Les paramètres de l'ajustement sont : $\bar{T}_{d1} = 126.8$ ms et $T_{d1,\text{rms}} = 3.1$ ms.

<i>Grandeur</i>	<i>Notation</i>	<i>Valeur</i>
Temps de transit rms	T_{rms}	19.8 ms
Temps d'interaction rms	τ_{rms}	0.45 ms
Temps de détection 1 rms	$T_{d1,\text{rms}}$	3.3 ms

Tab. 3.9: Valeur typique des temps quadratiques moyens effectifs des différentes distributions effectives de temps. Ces valeurs ont été calculées pour une distribution de vitesse longitudinale de température $T_l = 75 \mu\text{K}$ ce qui correspond à une vitesse quadratique moyenne de $v_{l,\text{rms}} = 6.8$ cm/s.

Comme précédemment, nous avons effectué un ajustement de la distribution effective de temps de détection 1 obtenue par simulation Monte-Carlo, pour les paramètres typiques du jet, avec la formule (3.164). Les résultats de la simulation et de l'ajustement sont présentés dans la Fig. 3.34. La courbe en escalier est obtenue par simulation Monte-Carlo et celle en trait fin est le résultat de l'ajustement. Les paramètres déduits de l'ajustement valent $\bar{T}_{d1} = 126.8 \text{ ms}$ et $T_{d1\text{rms}} = 3.1 \text{ ms}$. A partir de ces valeurs, nous pouvons aussi calculer le temps de transit moyen correspondant $\bar{T}$ à partir de (3.165), et le temps de transit quadratique moyen effectif T_{rms} avec (3.166). Nous obtenons $\bar{T} = 0.480 \text{ s}$ et $T_{\text{rms}} = 18.8 \text{ ms}$. On constate que ces valeurs sont également proches de celles correspondant à la distribution effective de temps de transit ($\bar{T} = 0.480 \text{ s}$ et $T_{\text{rms}} = 18.5 \text{ ms}$). Ceci confirme que dans ce cas aussi, nous pouvons décrire, avec une bonne approximation, la distribution effective normalisée de temps de détection de la fontaine continue par la distribution effective de temps de transit (3.159) dans laquelle on exprime T en fonction de T_{di} à partir de l'équation (3.36).

3.5 Calcul de la densité moyenne du jet

Nous allons aborder, dans cette dernière section, l'estimation de la densité moyenne du jet effectif au-dessus de la cavité micro-onde. Comme nous l'avons déjà mentionné auparavant, la connaissance de la densité moyenne du jet effectif entre les deux zones d'interaction est importante pour estimer le déplacement de fréquence dû aux collisions entre atomes froids.

Nous allons effectuer ce calcul dans le cadre du modèle analytique développé dans ce chapitre. Il s'agit d'évaluer la densité moyenne du jet effectif au-dessus de la cavité tout en tenant compte des atomes qui contribuent aux collisions mais pas au signal d'horloge. Le calcul exact avec le modèle analytique développé est relativement compliqué. Nous nous contenterons d'un calcul approximatif, qui est suffisant pour nos besoins. Le principe du calcul est de moyenner dans un premier temps, pour une vitesse longitudinale donnée, la densité du jet au-dessus de la cavité dans un plan horizontal sur l'ouverture apparente de la cavité. Dans cette moyenne, on tient compte du recouvrement du jet au sommet de la parabole. Puis, on effectue une moyenne de la densité du jet sur la distribution de vitesse longitudinale (sous-section 3.5.1). On obtient alors une densité moyenne le long de l'axe z pour une abscisse x donnée. On fait ensuite (sous-section 3.5.2) une moyenne sur les altitudes z de la densité résultante avec la distribution de vitesse longitudinale effective (moyenne sur les trajectoires du jet effectif). Enfin, pour terminer (sous-section 3.5.3), on fait la moyenne temporelle, sur le temps de transit,

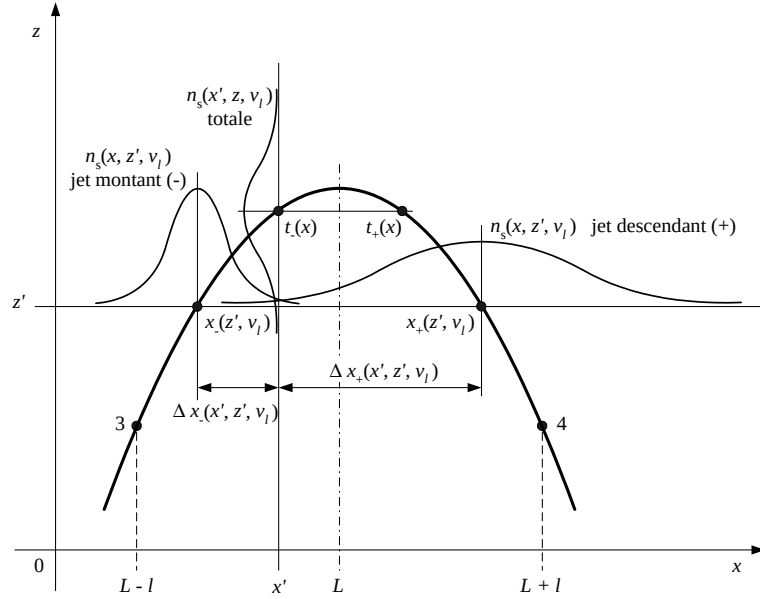


Fig. 3.35: Schéma du principe de calcul de la densité surfacique totale du jet $n_s(x, z, v_l)$ à l'abscisse x et à l'altitude z . La figure est dessinée pour un jet monocinétique de vitesse longitudinale $v_l = v_{l_0}$. Nous avons aussi représenté la densité surfacique totale $n_s(x', z, v_l)$ à l'abscisse x' en fonction de l'altitude z .

de la densité obtenue. Nous déterminons encore, dans la dernière sous-section 3.5.4, la valeur de la densité initiale du jet à la sortie de la source.

3.5.1 Densité moyenne à l'abscisse x en fonction de l'altitude z

Déterminons tout d'abord, pour un jet monocinétique de vitesse longitudinale v_l , la densité surfacique totale du jet au-dessus de la cavité micro-onde à l'altitude z et dont le centre du jet se trouve à l'abscisse x le long de l'axe $y = 0$. Le principe du calcul de la densité surfacique totale est schématisé dans la Fig. 3.35. Nous avons représenté dans cette figure le profil de la densité surfacique du jet montant, respectivement descendant, pour une altitude z' . Le profil de la densité surfacique totale du jet $n_s(x', z, v_l)$ en fonction de l'altitude z pour une abscisse x' est aussi esquissé. Le schéma est dessiné pour un jet monocinétique de vitesse longitudinale $v_l = v_{l_0}$. Le calcul approximatif de la densité surfacique $n_s(r, t)$, pour $t > t_3$, d'un jet tronqué par deux ouvertures circulaires est présenté en détail dans la deuxième partie de l'annexe

B. De l'équ. (B.71) de cette annexe, nous obtenons en posant $t_0 = t_{1+}$:

$$n_s(r, t) = n_{s_0} K(t) e^{-r^2/R^{*2}(t)} \quad (3.167)$$

n_{s_0} est la densité surfacique du jet à la sortie de la source et le coefficient $K(t)$ vaut :

$$K(t) = \frac{R_0^2}{R^2(t)} (1 - A_0(t)) \quad (3.168)$$

où le rayon $R(t)$ est donné par :

$$R^2(t) = R_1^2 + v_{t_{rms}}^2 (t - t_1)^2 \quad (3.169)$$

Le coefficient $A_0(t)$ est calculé à partir de l'équation (B.70b), le rayon quadratique moyen effectif $R^*(t)$ de la densité surfacique avec l'équation (B.73) et les coefficients donnés par les équations (B.70) et (B.61) dans lesquelles on a remplacé $R(t_0)$ par $R(t_1) = R_1$, $v_{t_{rms}}$ par $v_{t_{rms}}$ et t_0 par t_1 pour satisfaire les conditions initiales au temps t_{1+} .

La densité surfacique totale est la somme de la densité surfacique du jet montant et de celle du jet descendant. Pour un jet monocinétique de vitesse longitudinale v_l , il vient en utilisant l'expression (3.167) de la densité surfacique au temps $t > t_3$ et en exprimant le temps t en fonction de l'abscisse x :

$$n_s(x, z, v_l) = n_{s_0} \left(K_-(x) e^{-\Delta x_-^2(x, z, v_l)/R_-^{*2}(x)} + K_+(x) e^{-\Delta x_+^2(x, z, v_l)/R_+^{*2}(x)} \right) \quad (3.170)$$

où l'indice $-$, respectivement $+$, se réfère au jet montant, respectivement descendant. Les deux coefficients $K_{\pm}(x)$ sont donnés par :

$$K_{\pm}(x) = K(t_{\pm}(x)) \quad (3.171)$$

où $t_-(x)$ est le temps de vol moyen depuis la source jusqu'à l'abscisse x du jet montant et $t_+(x)$ est le temps de vol moyen du jet descendant depuis la source jusqu'à l'altitude z correspondant au point du jet montant situé à l'abscisse x (cf. Fig. 3.35). Ils s'expriment en fonction de x par la relation :

$$t_{\pm}(x) = t_1 + \frac{L \pm |L - x|}{\bar{v}_l \sin \theta_0} \quad (3.172)$$

où $\bar{v}_l$ est la vitesse longitudinale moyenne du jet après le refroidissement transverse et θ_0 son angle d'inclinaison. L est la distance entre le centre de la source et l'axe de symétrie de la cavité micro-onde. Les rayons $R_{\pm}^*(x)$ sont calculés par la relation :

$$R_{\pm}^*(x) = R^*(t_{\pm}(x)) \quad (3.173)$$

Calculons la distance $\Delta x_{\pm}(x, z, v_l)$ entre le centre de la densité surfacique du jet montant $(-)$, respectivement descendant $(+)$, et l'abscisse x à l'altitude z et en fonction de la vitesse longitudinale v_l . De l'équation (3.87) de la trajectoire pour une vitesse longitudinale quelconque, nous pouvons en déduire la valeur de l'abscisse x pour v_l et z donnés :

$$x_{\pm}(z, v_l) = \frac{1}{g} v_l \sin \theta_0 \left(v_l \pm \sqrt{v_l^2 - 2gz} \right) \quad (3.174)$$

où nous avons fixé l'origine des z au niveau du refroidissement transverse. L'écart $\Delta x_{\pm}(x, z, v_l)$ est alors donné par :

$$\Delta x_{\pm}(x, z, v_l) = x_{\pm}(z, v_l) - x \quad (3.175)$$

Afin de simplifier le calcul, nous n'effectuerons pas la moyenne de la densité surfacique (3.170) sur l'ouverture apparente de la cavité. Nous prendrons la valeur de cette densité au centre de l'ouverture. Ceci revient à surestimer la densité moyenne, surtout lorsque le jet à une température transverse faible et un rayon initial petit. Cette simplification nous assure que la densité moyenne finale obtenue est une borne supérieure.

La densité linéique à l'altitude z et pour une vitesse longitudinale v_l (on confond v_{l_z} avec v_l) se déduit de l'équation (3.48), on trouve :

$$n_z(z, v_l) = n_{z_1} \frac{v_l}{\sqrt{v_l^2 - 2gz}} \quad (3.176)$$

n_{z_1} est la densité linéique après le refroidissement transverse donnée par :

$$n_{z_1} = n_{z_0} \frac{v_L}{\sqrt{v_L^2 - 2gh_t}} \quad (3.177)$$

où n_{z_0} est la densité linéique initiale à la sortie de la source, v_L la vitesse de lancement du jet et h_t la hauteur, au-dessus du centre de la source, du refroidissement transverse. La densité à l'abscisse x et à l'altitude z d'un jet monocinétique de vitesse longitudinale v_l est donc donnée d'après (3.38) par :

$$n(x, z, v_l) = n_z(z, v_l) n_s(x, z, v_l) \quad (3.178)$$

Dans le cas d'un jet non-monocinétique, elle s'obtient en intégrant la densité (3.178) sur la distribution de vitesse longitudinale (3.70) :

$$n(x, z) = \int_{\sqrt{2gz}}^{+\infty} \rho(v_l) n(x, z, v_l) dv_l \quad (3.179)$$

La borne d'intégration inférieure dépend de z puisque l'intégration porte sur tous les atomes dont la vitesse est suffisante pour atteindre l'altitude z . Pour pouvoir intégrer analytiquement, nous faisons l'approximation suivante sur l'expression de la vitesse à l'altitude z :

$$\sqrt{v_l^2 - 2gz} \simeq \sqrt{\bar{v}_l + \sqrt{2gz}} \sqrt{v_l - \sqrt{2gz}} \quad (3.180)$$

Avec cette approximation, et en posant $u = \sqrt{v_l - \sqrt{2gz}}$, le carré de l'écart $\Delta x_{\pm}(x, z, v_l)$ s'exprime par¹⁸ :

$$\begin{aligned} \Delta x_{\pm}^2(x, z, v_l) = & A_4 u^4 + A_3 u^3 + A_2 u^2 + A_1 u + A_0 \\ & \pm (A_{7/2} u^{7/2} + A_{5/2} u^{5/2} + A_{3/2} u^{3/2} + A_{1/2} u^{1/2}) \end{aligned} \quad (3.181)$$

avec les coefficients :

$$A_0 = 4 \sin \theta_0 z (z \sin \theta_0 - x) + x^2 \quad (3.182a)$$

$$A_{1/2} = \frac{2}{g} \sin \theta_0 (2 \sin \theta_0 z - x) \sqrt{2gz} \sqrt{\bar{v}_l + \sqrt{2gz}} \quad (3.182b)$$

$$A_1 = \frac{4}{g} \sin \theta_0 (3 \sin \theta_0 z - x) \sqrt{2gz} \quad (3.182c)$$

$$A_{3/2} = \frac{2}{g} \sin \theta_0 (6 \sin \theta_0 z - x) \sqrt{\bar{v}_l + \sqrt{2gz}} \quad (3.182d)$$

$$A_2 = \frac{2}{g} \sin \theta_0 (11 \sin \theta_0 z - x) \quad (3.182e)$$

$$A_{5/2} = \frac{6}{g^2} \sin^2 \theta_0 \sqrt{2gz} \sqrt{\bar{v}_l + \sqrt{2gz}} \quad (3.182f)$$

$$A_3 = \frac{8}{g^2} \sin^2 \theta_0 \sqrt{2gz} \quad (3.182g)$$

$$A_{7/2} = \frac{2}{g^2} \sin^2 \theta_0 \sqrt{\bar{v}_l + \sqrt{2gz}} \quad (3.182h)$$

$$A_4 = \frac{2}{g^2} \sin^2 \theta_0 \quad (3.182i)$$

Comme la densité atteint son maximum lorsque $u = 0$, nous ne conservons que les termes d'ordre 2 en u dans l'expression de $n(x, z, v_l)$. Nous pouvons

¹⁸Dans la suite, nous n'indiquons plus la dépendance en x et z des différents coefficients pour ne pas alourdir l'écriture.

ainsi mettre l'intégrale (3.179) sous la forme :

$$\begin{aligned}
n(x, z) = & \frac{n_{z_1} n_{s_0}}{\sqrt{2\pi} v_{l_{\text{rms}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\bar{v}_l + \sqrt{2gz}}} e^{-\alpha} \left\{ K_- e^{-C_-} \int_0^{+\infty} e^{-A_- u^2 - B_- u} \right. \\
& \times \left(1 + D_- u^{1/2} + E_- u + F_- u^{3/2} + G_- u^2 \right) \left(u^{1/2} + \sqrt{2gz} u^{-1/2} \right) du \\
& + K_+ e^{-C_+} \int_0^{+\infty} e^{-A_+ u^2 - B_+ u} \left(1 - D_+ u^{1/2} + E_+ u - F_+ u^{3/2} + G_+ u^2 \right) \\
& \times \left(u^{1/2} + \sqrt{2gz} u^{-1/2} \right) du \left. \right\} \quad (3.183)
\end{aligned}$$

où les différents coefficients valent :

$$\alpha = \frac{(\sqrt{2gz} - \bar{v}_l)^2}{2v_{l_{\text{rms}}}^2} \quad (3.184a)$$

$$A_{\pm} = \frac{R_{\pm}^{*2} + 2v_{l_{\text{rms}}}^2 A_2}{2v_{l_{\text{rms}}}^2 R_{\pm}^{*2}} \quad (3.184b)$$

$$B_{\pm} = \frac{R_{\pm}^{*2} (\sqrt{2gz} - \bar{v}_l) + v_{l_{\text{rms}}}^2 A_1}{v_{l_{\text{rms}}}^2 R_{\pm}^{*2}} \quad (3.184c)$$

$$C_{\pm} = \frac{A_0}{R_{\pm}^{*2}} \quad (3.184d)$$

$$D_{\pm} = \frac{A_{1/2}}{R_{\pm}^{*2}} \quad (3.184e)$$

$$E_{\pm} = \frac{A_{1/2}^2}{2R_{\pm}^{*2}} \quad (3.184f)$$

$$F_{\pm} = \frac{A_{3/2}}{R_{\pm}^{*2}} + \frac{A_{1/2}^3}{6R_{\pm}^{*6}} \quad (3.184g)$$

$$G_{\pm} = \frac{A_{1/2} A_{3/2}}{R_{\pm}^{*4}} + \frac{A_{1/2}^4}{24R_{\pm}^{*8}} \quad (3.184h)$$

Introduisons le résultat de l'intégrale suivante [AS72] :

$$\begin{aligned}
 I_n^\pm &= \int_0^{+\infty} e^{-A_\pm u^2 - B_\pm u} u^n du \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ A_\pm^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{n+1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{B_\pm^2}{4A_\pm}\right) \right. \\
 &\quad \left. - B_\pm A_\pm^{-\frac{n}{2}+1} \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) {}_1F_1\left(\frac{n}{2}+1; \frac{3}{2}; \frac{B_\pm^2}{4A_\pm}\right) \right\} \quad (3.185)
 \end{aligned}$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction Γ et ${}_1F_1(a; b; z)$ est la fonction hypergéométrique confluyente de Kummer [AS72]. Nous pouvons alors mettre la densité $n(x, z)$ sous la forme :

$$\begin{aligned}
 n(x, z) &= \frac{n_0}{\sqrt{2\pi} v_{l_{\text{rms}}}} \cdot \frac{v_L}{\sqrt{v_L^2 - 2gh_t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\bar{v}_l + \sqrt{2gz}}} e^{-\alpha} \left\{ K_- e^{-C_-} \left(H_{1/2}^- \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sqrt{2gz} H_{-1/2}^- \right) + K_+ e^{-C_+} \left(H_{1/2}^+ + \sqrt{2gz} H_{-1/2}^+ \right) \right\} \quad (3.186)
 \end{aligned}$$

où nous avons posé :

$$H_k^\pm = I_k^\pm \mp D_\pm I_{k+\frac{1}{2}}^\pm + E_\pm I_{k+1}^\pm \mp F_\pm I_{k+\frac{3}{2}}^\pm + G_\pm I_{k+2}^\pm \quad (3.187)$$

et

$$n_0 = n_{z_0} n_{s_0} \quad (3.188)$$

la densité initiale du jet à la sortie de la source. La dépendance en x et z des différents coefficients a été omise pour ne pas alourdir l'écriture. A ce stade, il est intéressant de calculer le profil de densité du jet le long de son axe de symétrie z . Comme la vitesse longitudinale moyenne $\bar{v}_l$ du jet est plus élevée que la vitesse longitudinale nominale v_{l_0} , l'abscisse de l'apogée du jet x^* est légèrement plus grande que l'abscisse nominale $x_0 = L$:

$$x^* = x_0 + \Delta x^* \quad (3.189)$$

$\Delta x^* \simeq 4$ mm pour les paramètres typiques du jet. Nous avons reporté dans la Fig. 3.36 le profil de densité $n(x, z)/n_0$, calculé avec l'équation (3.186) pour $x = x^*$, en fonction de l'altitude z pour trois températures transverses : $T_t = 100$ nK, $1 \mu\text{K}$ et $5 \mu\text{K}$.

On remarque sur cette figure que lorsque la température transverse du jet diminue, la densité maximale du jet à l'apogée augmente. Ceci est évidemment conforme à ce que l'on attendait puisque quand la température transverse diminue, la densité surfacique du jet à l'apogée devient plus localisée

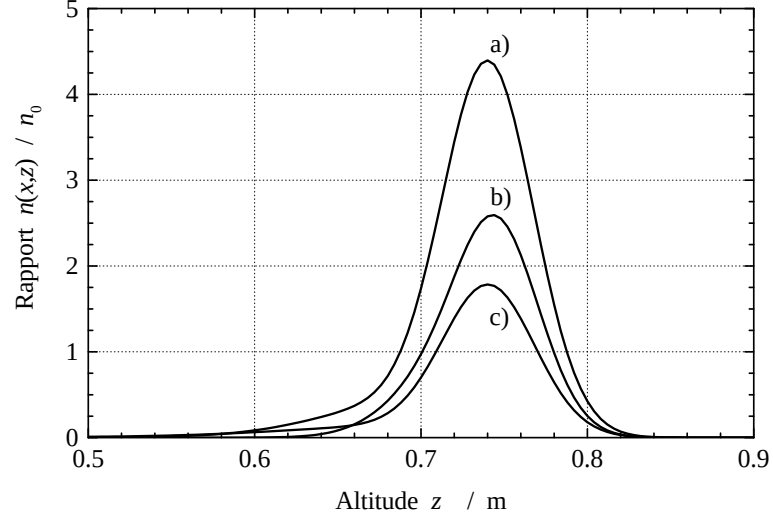


Fig. 3.36: Rapport $n(x, z)/n_0$ de la densité le long de l'axe de symétrie du jet en fonction de l'altitude z . Ce rapport est calculé avec l'équation (3.186) pour $x = x^*$ et représenté pour trois températures transverses : a) $T_t = 100$ nK ; b) $T_t = 1$ μ K et c) $T_t = 5$ μ K.

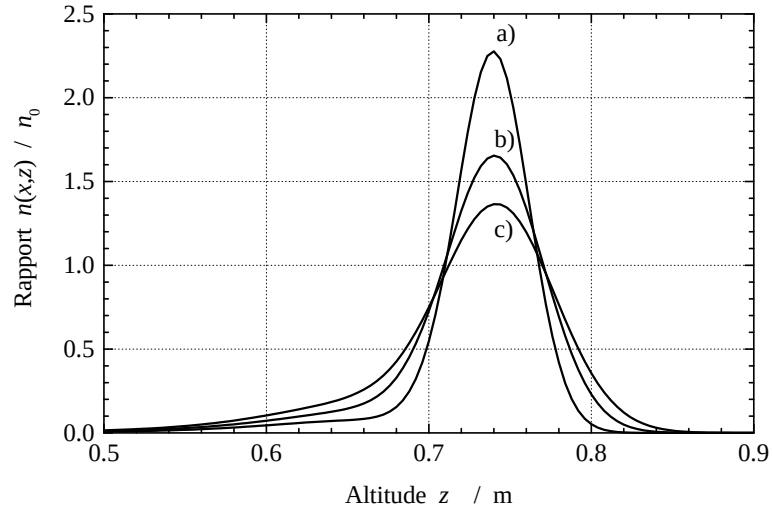


Fig. 3.37: Rapport $n(x, z)/n_0$ de la densité le long de l'axe de symétrie du jet en fonction de l'altitude z . Ce rapport est calculé avec l'équation (3.186) pour $x = x^*$ et représenté pour trois températures longitudinales : a) $T_l = 50$ μ K ; b) $T_l = 100$ μ K et c) $T_l = 150$ μ K.

et sa valeur au centre augmente. Notons que pour les paramètres typiques du jet, la densité maximale $n_{\max}$ du jet à l'apogée moyen vaut seulement $n_{\max} \simeq 1.8 n_0$. Si la température transverse du jet passe de $T_t \simeq 5 \mu\text{K}$ (ordre de grandeur de la température actuelle du jet) à une température à peu près nulle, on voit que la densité du jet à l'apogée moyen augmente d'un facteur ~ 2.4 . On constate également que lorsque cette température diminue, la dispersion du jet selon z à l'apogée moyen reste pratiquement la même, en particulier sa hauteur maximale est identique. Ceci n'est pas étonnant car la température transverse affecte les dimensions du jet dans un plan transversal tandis que la dispersion des apogées selon z est dépendante, comme nous allons le voir, de la température longitudinale.

En effet, nous avons représenté dans la Fig. 3.37 ce même profil de densité mais pour trois températures longitudinales : $T_l = 50 \mu\text{K}$, $100 \mu\text{K}$ et $150 \mu\text{K}$. Nous observons aussi une augmentation de la densité du jet à l'apogée moyen avec la diminution de la température longitudinale du jet. Cette augmentation de densité est la conséquence de la concentration des trajectoires autour de l'apogée moyen lorsque T_l diminue. Elle est plus importante qu'avec la température transverse lorsque la température longitudinale devient très faible, car dans ce cas la densité linéique contient une singularité qui fait tendre la densité à l'apogée moyen vers l'infini. On constate encore que la dispersion du jet selon z à l'apogée moyen augmente avec T_l et inversement. Ceci est dû à la dispersion des apogées des trajectoires atomiques avec la distribution de vitesse longitudinale. Pour les paramètres typiques du jet de la fontaine continue, l'apogée moyen du jet se situe à $\bar{H}_{\text{ap}} \simeq 0.74 \text{ m}$ au-dessus du centre de la mélasse optique. Il est un peu plus élevé que l'apogée nominal situé à $H_0^{\text{tot}} = 0.728 \text{ m}$ puisque la vitesse de lancement est plus grande que la vitesse de lancement nominale. La variation de la densité du jet avec l'altitude ayant une forme de courbe en cloche centrée autour de l'apogée moyen, nous pouvons définir la dispersion moyenne Δz_{ap} du jet à l'apogée moyen comme la pleine largeur à mi-hauteur du profil de la densité. Pour ces paramètres, nous obtenons une valeur de $\Delta z_{\text{ap}} \simeq 67 \text{ mm}$ pour la dispersion du jet. Remarquons encore que le jet s'étend jusqu'à une hauteur maximale de $\sim 0.84 \text{ m}$ au-dessus de la source, soit à peu près à la hauteur qui limite le jet ($H_{\text{cyl}} \simeq 0.828 \text{ m}$). On en déduit donc que le jet de la fontaine continue n'est pas limité physiquement en hauteur par les dimensions du résonateur. Par conséquent ceci n'entraîne pas de limitation sur le flux d'atomes à la détection.

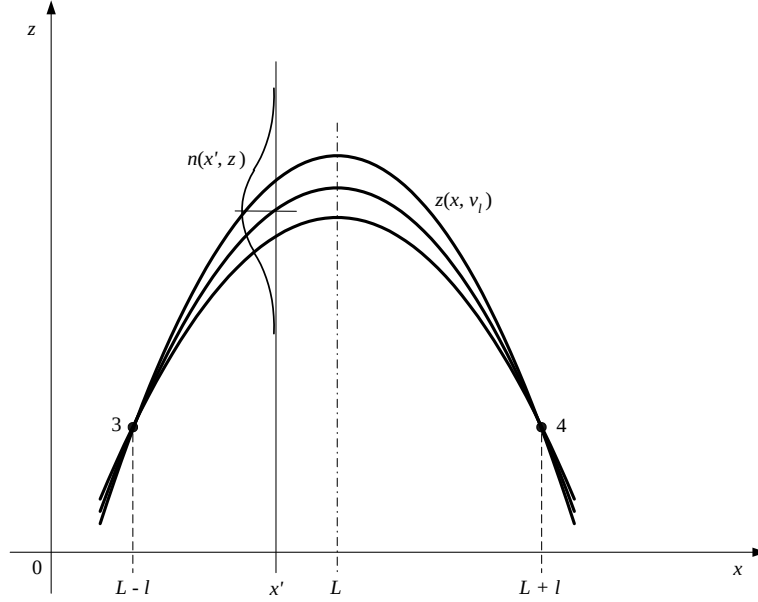


Fig. 3.38: Schéma des trajectoires dans le plan Oxz du jet effectif au-dessus de la cavité micro-onde. Ce sont des paraboles $z(x, v_l)$ dont l'axe de symétrie coïncide avec celui de la cavité et dont la hauteur dépend de la vitesse longitudinale. Leur équation est décrite par (3.190). Nous avons également représenté la densité moyenne $n(x', z)$ le long de l'axe z et à l'abscisse x' .

3.5.2 Densité moyenne en fonction de l'abscisse x

Poursuivons le calcul en faisant la moyenne de la densité $n(x, z)$ sur les trajectoires du jet effectif. Comme le montre la Fig. 3.38, les trajectoires du jet effectif dans le plan Oxz sont des paraboles dont l'axe de symétrie coïncide avec celui de la cavité et dont la hauteur dépend de la vitesse longitudinale. Nous avons aussi représenté sur cette figure la densité moyenne $n(x', z)$ le long de l'axe z et à l'abscisse x' . L'équation de ces trajectoires est donnée en fonction de la vitesse longitudinale par :

$$z(x, v_l) = \frac{v_l^2}{2g} \left(2 - \frac{x}{L} \right) \frac{x}{L} \quad (3.190)$$

On peut maintenant moyenner la densité (3.186) sur ces trajectoires par l'intermédiaire de la distribution effective de vitesse longitudinale donnée par (3.153). Ceci revient à moyenner la densité sur z dans la section verticale traversée par les atomes utiles du jet. La densité moyenne en fonction de la position x s'écrit alors :

$$\bar{n}(x) = \int_{v_{l,\min}}^{v_{l,\max}} \rho_{\text{eff}}(v_l) n(x, z(x, v_l)) dv_l \quad (3.191)$$

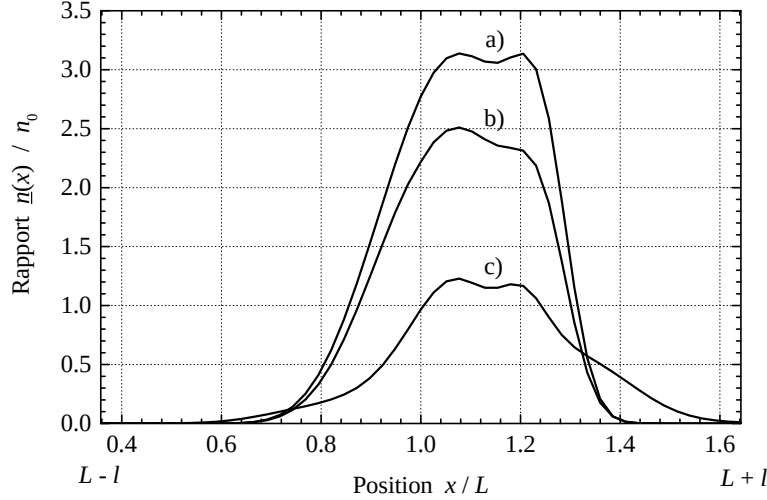


Fig. 3.39: Rapport $\bar{n}(x)/n_0$ de la densité moyenne du jet effectif (densité moyennée sur z dans la section verticale traversée par les atomes utiles) en fonction de la position x . Ce rapport est calculé avec l'équation (3.191) et représenté pour trois températures transverses : a) $T_t = 0.1 \mu\text{K}$; b) $T_t = 1 \mu\text{K}$ et c) $T_t = 5 \mu\text{K}$.

La vitesse minimale $v_{l_{\min}}$ est donnée dans le Tab. 3.8 pour un jet issu d'une source étendue avec température transverse non-nulle. La vitesse maximale $v_{l_{\max}}$ dépend de la limitation en hauteur des trajectoires du jet. Pour la fontaine continue, elle vaut environ $v_{l_{\max}} \simeq 4.05 \text{ m/s}$.

Nous avons calculé cette densité moyenne dans le cas du jet de la fontaine continue pour quelques valeurs typiques des paramètres. On peut voir le profil de densité $\bar{n}(x)/n_0$ obtenu en fonction de la position x , pour les mêmes valeurs de températures que précédemment, dans la Fig. 3.39 (température transverse en paramètre) et la Fig. 3.40 (température longitudinale en paramètre). Nous avons représenté la densité moyenne du jet pour des positions comprises entre $x = L - l$ et $x = L + l$, soit entre le centre de la première zone d'interaction et celui de la deuxième. On voit que la densité du jet est concentrée autour de son axe de symétrie. Elle est très faible au niveau des zones d'interaction car la composante z de la vitesse longitudinale est encore élevée, puis elle augmente rapidement lorsque le jet commence à s'incliner et que v_{l_z} décroît notablement. Comme nous l'avons déjà mentionné, l'axe de symétrie du jet est légèrement déplacé à droite de l'axe de symétrie de la cavité ($x = L$) car la vitesse de lancement est supérieure à la vitesse nominale. La dépendance particulière de la densité avec la position, notamment la présence de deux maxima locaux est probablement due à l'effet du recouvrement du jet dans la région de l'apogée. On note aussi, de manière générale,

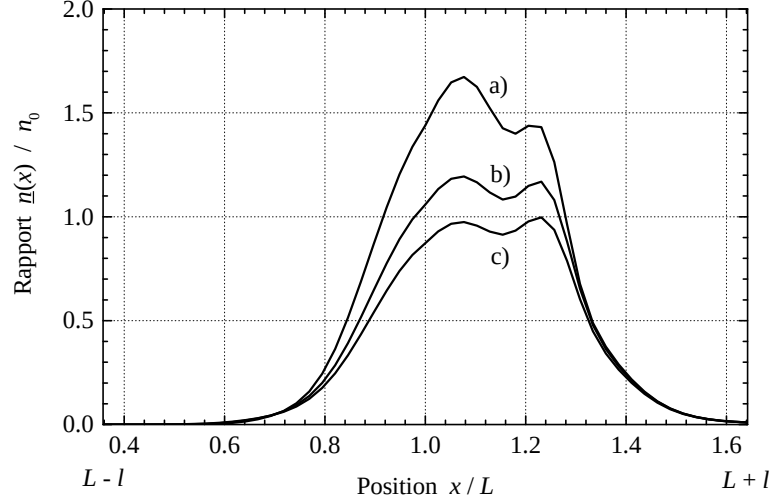


Fig. 3.40: Rapport $\bar{n}(x)/n_0$ de la densité moyenne du jet effectif (densité moyennée sur z dans la section verticale traversée par les atomes utiles) en fonction de la position x . Ce rapport est calculé avec l'équation (3.191) et représenté pour trois températures longitudinales : a) $T_l = 50 \mu\text{K}$; b) $T_l = 100 \mu\text{K}$ et c) $T_l = 150 \mu\text{K}$.

le même effet des températures transverse et longitudinale sur la densité que précédemment. Cependant, la température transverse a tendance à élargir la région des positions pour lesquelles la densité moyenne est significative. Ceci résulte du fait que lorsque la température transverse augmente, la section du jet s'élargit.

3.5.3 Densité moyenne au-dessus de la cavité

Pour terminer, nous sommes enfin en mesure de calculer la densité moyenne du jet effectif au-dessus de la cavité micro-onde. Pour ce faire, il reste à estimer la moyenne temporelle de la densité $n(x)$ sur le temps de transit moyen $\bar{T}$. En introduisant l'équation horaire de la position x :

$$x(t) = v_l \sin \theta_0 t \quad (3.192)$$

dans l'équation (3.191) de la densité, nous obtenons finalement la densité moyenne $\bar{n}$ du jet effectif au-dessus de la cavité¹⁹ par la relation suivante :

$$\bar{n} = \frac{1}{\bar{T}} \int_{t_3 + \frac{\pi}{2}}^{t_3 + \frac{\pi}{2} + \bar{T}} \bar{n}(x(t)) dt \quad (3.193)$$

¹⁹C'est la moyenne de la densité du jet au-dessus de la cavité dans le volume délimité par les atomes utiles du jet, c.-à-d. par les atomes qui atteignent la détection et contribuent au signal d'horloge.

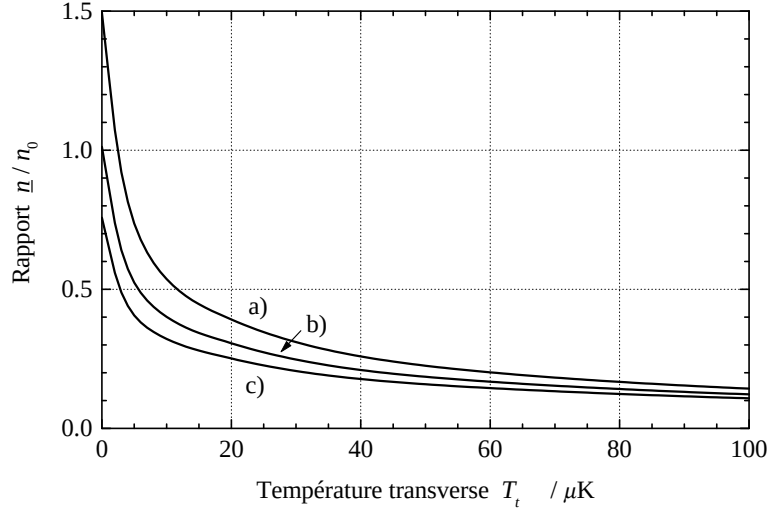


Fig. 3.41: Rapport $\bar{n}/n_0$ de la densité moyenne du jet effectif au-dessus de la cavité en fonction de la température transverse T_t . Ce rapport est calculé avec l'équation (3.193) et représenté pour trois températures longitudinales : a) $T_l = 50 \mu\text{K}$; b) $T_l = 100 \mu\text{K}$ et c) $T_l = 150 \mu\text{K}$.

où t_3 est le temps de vol depuis la source jusqu'à la première zone d'interaction et $\bar{\tau}$ est le temps d'interaction moyen dans la cavité.

Nous avons calculé cette densité moyenne dans le cas du jet de la fontaine continue pour quelques valeurs typiques des paramètres. Nous reportons dans les Figs. 3.41 et 3.42, la densité moyenne obtenue en fonction de la température transverse et de la température longitudinale. Ces figures nous montrent que la densité moyenne du jet au-dessus de la cavité diminue bien avec l'augmentation de la température transverse et de la température longitudinale du jet. La décroissance de la densité moyenne avec la température transverse est semblable à celle de la densité surfacique. Elle est significative jusqu'à des températures de l'ordre de $T_t \simeq 40 \mu\text{K}$, mais au-delà, elle ne diminue presque plus. La cause en est que pour une température transverse suffisamment élevée, la densité surfacique devient très étendue et sa valeur ne dépend pratiquement plus de sa distance au centre du jet. Il s'ensuit que la moyenne de la densité devient presque indépendante de cette température. Pour les paramètres typiques du jet de la fontaine continue, la densité moyenne du jet au-dessus de la cavité se monte à $\bar{n} \simeq 0.65 n_0$. On peut noter que si on refroidit transversalement plus efficacement le jet et que sa température transverse diminue de $T_t = 5 \mu\text{K}$ à une température à peu près nulle, la densité moyenne du jet au-dessus de la cavité est multipliée seulement par un facteur de ~ 1.7 .

La décroissance de la densité moyenne avec la température longitudi-

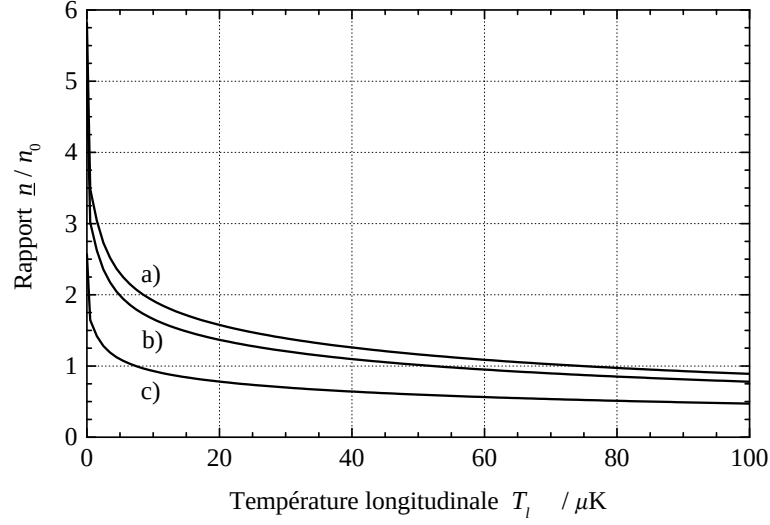


Fig. 3.42: Rapport $\bar{n}/n_0$ de la densité moyenne du jet effectif au-dessus de la cavité en fonction de la température longitudinale T_l . Ce rapport est calculé avec l'équation (3.193) et représenté pour trois températures transverses : a) $T_t = 0.1 \mu K$; b) $T_t = 1 \mu K$ et c) $T_t = 5 \mu K$.

nale est quand à elle beaucoup plus rapide, sur un intervalle de température $0 < T_l < 5 \mu K$, que celle correspondant à la température transverse. Ceci est dû à la singularité de la densité linéique en $T_l = 0$. A peine la température longitudinale est-elle supérieure à zéro que la moyenne de la densité ne comporte plus de singularité et de ce fait chute très rapidement. Physiquement, cela revient à disperser les apogées des trajectoires atomiques selon z avec l'introduction d'une distribution de vitesse longitudinale. Cette dispersion est très efficace pour faire chuter la densité moyenne du jet. Pour des températures $T_l \gtrsim 5 \mu K$, malgré la dispersion des apogées, cette décroissance est beaucoup plus lente. C'est notamment dû au fait que nous estimons uniquement la densité moyenne du jet effectif. Cela revient à calculer la densité moyenne du jet dans le volume délimité par les atomes utiles du jet, ce volume reste plus ou moins constant à partir d'une certaine température longitudinale, alors que le volume du jet entier augmente. Remarquons encore que si on refroidit longitudinalement le jet, pour une température transverse de $T_t = 5 \mu K$, de telle sorte que sa température passe de $T_l \simeq 75 \mu K$ à $T_l \simeq 0$ (jet monocinétique), la densité moyenne du jet au-dessus de la cavité va augmenter d'un facteur ~ 4 . Si on refroidit encore transversalement le jet jusqu'à une température de $T_t \simeq 0$, ce facteur passe à ~ 9 . On constate donc que le refroidissement "complet" du jet, qui est bénéfique en ce qui concerne le

flux à la détection, n'engendre pas une augmentation de la densité moyenne du jet qui est importante et de ce fait n'aggrave pas le déplacement de la fréquence de résonance de l'étalon dû aux collisions entre atomes froids.

3.5.4 Détermination de n_0

Déterminons pour finir la valeur de la densité initiale du jet à la sortie de la source. De l'équation (3.49) du flux à la sortie de la source, nous en déduisons la densité linéique initiale n_{z_0} :

$$n_{z_0} = \frac{\Phi_0}{v_L} \quad (3.194)$$

où Φ_0 représente le flux initial à la sortie de la source et v_L la vitesse de lancement du jet. En introduisant la valeur (3.62) de n_{s_0} dans la relation (3.188), nous obtenons l'expression de n_0 :

$$n_0 = \frac{\Phi_0}{\pi R_0^2 v_L} \quad (3.195)$$

où R_0 est la rayon quadratique moyen du jet à la sortie de la source. Nous ne connaissons pas le flux initial Φ_0 car nous ne pouvons pas le mesurer directement dans la fontaine continue. Nous avons mesuré par contre, par deux méthodes différentes, le flux à la détection 1 lorsque les paramètres expérimentaux sont optimaux (cf. sous-section 6.3.4). Nous obtenons une valeur typique du flux de $\Phi_{d1}^{\text{mes}} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ at/s}$. Comme nous l'avons mentionné dans la sous-section 3.4.2, le rapport Φ_{d1}/Φ_0 estimé, pour les paramètres typiques de la fontaine continue, est de l'ordre de 3.4 %. On peut donc exprimer n_0 à partir du flux mesuré à la détection Φ_{d1}^{mes} et du rapport estimé $(\Phi_{d1}/\Phi_0)_{\text{est}}$:

$$n_0 = \frac{\Phi_{d1}^{\text{mes}}}{\pi R_0^2 v_L (\Phi_{d1}/\Phi_0)_{\text{est}}} \quad (3.196)$$

Avec la valeur mesurée du rayon quadratique moyen initial du jet de $R_0 \simeq 6 \text{ mm}$ et une vitesse de lancement de $v_L = 3.89 \text{ m/s}$, la densité initiale du jet se monte à $n_0 \simeq 1.3 \cdot 10^4 \text{ at/cm}^3$. Cette valeur nous sera utile dans le chapitre 7, lorsque nous nous intéresserons au déplacement de la fréquence de résonance de la transition d'horloge engendrée par les collisions entre atomes froids dans le jet.

Nous résumons dans le Tab. 3.10 les principales grandeurs caractéristiques du jet obtenues dans cette section.

<i>Grandeur</i>	<i>Notation</i>	<i>Valeur</i>
Densité initiale du jet	n_0	$1.3 \cdot 10^4 \text{ at/cm}^3$
Hauteur apogée moyen - source	$\overline{H}_{\text{ap}}$	0.74 m
Densité max. du jet à l'apogée moyen	n_{max}	$1.8 n_0$
Dispersion du jet à l'apogée moyen	Δz_{ap}	67 mm
Densité moyenne du jet effectif	$\bar{n}$	$0.65 n_0$

Tab. 3.10: Grandeurs caractéristiques du jet déduites du calcul de la densité moyenne du jet effectif au-dessus de la cavité. Ces grandeurs ont été calculées pour les paramètres typiques du jet.

3.6 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre les aspects liés à la balistique du jet atomique de la fontaine continue. Nous avons d'abord déterminé les grandeurs caractéristiques nominales du jet d'après les dimensions mécaniques de la fontaine. Ce sont, principalement, les paramètres géométriques de la trajectoire, la vitesse de lancement du jet et la vitesse du jet au niveau de la cavité micro-onde. Nous avons également calculé les différents temps de vol correspondant à cette trajectoire ainsi que les temps de transit, d'interaction, de détection et leur interdépendance dont la connaissance nous sera utile dans le chapitre suivant.

Afin de pouvoir mieux caractériser le jet de la fontaine continue, nous avons réalisé une étude théorique de l'évolution du jet le long de sa trajectoire. Pour ce faire, nous avons développé un modèle analytique, basé sur l'évolution de la densité surfacique du jet, qui nous permet de prendre en compte l'effet de la cavité et des diaphragmes sur l'évolution du jet depuis la source jusqu'à la zone de détection. Ce modèle a été complété par des simulations Monte-Carlo des trajectoires atomiques.

Dans un premier temps, nous avons déterminé la température de la distribution de vitesse longitudinale du jet à partir de la mesure des temps de vol des atomes du jet. Cette mesure a été effectuée dans le cas d'un jet sans refroidissement transverse et sans la présence de la cavité micro-onde. Nous en déduisons une température longitudinale typique de $T_l \simeq 75 \mu\text{K}$.

Le flux d'atomes qui atteignent la détection est une grandeur importante en ce qui concerne la stabilité à court terme de l'horloge. Nous avons étudié sa dépendance par rapport aux principaux paramètres du jet. Les simulations effectuées dans le cas du jet sans refroidissement transverse nous permettent de supposer que le jet était déjà incliné du bon angle à la sortie de la source

pour atteindre la détection. Cette inclinaison du jet est probablement due à un champ magnétique de compensation selon l'axe x qui est non nul. Dans le cas du jet avec refroidissement transverse nous avons observé une bonne concordance entre les résultats du modèle analytique et ceux des simulations Monte-Carlo. Il en ressort que le paramètre qui a le plus d'influence sur le flux à la détection est évidemment la température transverse du jet. En nous basant sur la mesure expérimentale de l'augmentation du flux due à l'implémentation du refroidissement transverse, et en supposant que le jet sans refroidissement transverse était déjà incliné, nous avons pu estimer cette température à $T_t \simeq 6 \mu\text{K}$. Si on arrive à refroidir transversalement plus efficacement le jet et à abaisser sa température près de zéro par des techniques plus performantes, on peut gagner un facteur de l'ordre de 4 sur le flux à la détection. Cette perspective, qui augmenterait la stabilité à court terme de la fréquence de l'étalon, est une motivation pour développer une technique de refroidissement transverse plus efficace. Des travaux dans cette direction sont déjà en cours sur la fontaine expérimentale [Dom02].

Toujours à l'aide du modèle développé, nous avons étudié également la distribution de vitesse longitudinale du jet après la cavité ainsi que les distributions de temps de transit, d'interaction et de détection en supposant que la distribution initiale de vitesse longitudinale du jet à la sortie de la source est gaussienne. Il en découle que, pour les paramètres typiques du jet de la fontaine continue, la distribution effective de vitesse longitudinale peut aussi être décrite, avec une bonne approximation, par une gaussienne. Il en va de même pour toutes les distributions de temps. Nous avons pu relier la température effective de la distribution de vitesse longitudinale à la température de la distribution de vitesse longitudinale après le refroidissement transverse et ainsi montrer le rôle de filtre de la cavité par rapport à ces vitesses. L'accord entre le modèle analytique et les simulations est également satisfaisant. Pour une température longitudinale de $T_l = 75 \mu\text{K}$ et pour les paramètres typiques du jet, nous avons calculé que la température longitudinale effective se monte à $T_l^{\text{eff}} \simeq 60 \mu\text{K}$. Dans le cas où la température transverse du jet est proche de zéro, cette température devient même inférieure à $T_l/2$. Nous avons encore montré que l'on pouvait relier simplement les distributions de temps d'interaction et de temps de détection à la distribution de temps de transit, ce qui nous sera utile dans le chapitre suivant lorsque nous calculerons le signal d'horloge de la fontaine continue.

Pour terminer ce chapitre, nous avons estimé à l'aide du modèle analytique la densité moyenne du jet effectif au-dessus de la cavité micro-onde. Cette densité moyenne correspond à la moyenne de la densité du jet au-dessus de la cavité dans le volume délimité par les atomes utiles du jet, c.-à-d. par les atomes qui atteignent la détection et contribuent au signal d'horloge. La

connaissance de cette densité moyenne est nécessaire pour évaluer le déplacement de la fréquence de l'étalon dû aux collisions entre atomes froids dans le jet. Ce calcul nous a fourni plusieurs informations intéressantes sur le jet. En particulier, pour les paramètres typiques du jet, sa densité maximale à l'apogée moyen atteint ~ 1.8 fois sa densité initiale à la sortie de la source. L'apogée moyen est situé à ~ 0.74 m au-dessus du centre de la mélasse optique et la dispersion moyenne du jet selon z , autour de l'apogée moyen, vaut ~ 67 mm. La densité moyenne du jet effectif au-dessus de la cavité se monte, pour les paramètres typiques du jet, à un peu plus de la moitié de la densité initiale du jet à la sortie de la source, qui est estimée à $n_0 \simeq 1.3 \cdot 10^4$ at/cm³. La densité moyenne croît brusquement lorsque les températures transverse et longitudinale s'approchent de zéro, la température longitudinale ayant l'effet le plus important. Toutefois, cette augmentation semble n'être pas très élevée puisque, pour un jet dont ces deux températures seraient nulles, elle atteindrait seulement un facteur de ~ 9 .

Chapitre 4

Interaction micro-onde

4.1 Introduction

Dans la fontaine continue, les contraintes géométriques imposées au jet atomique (en particulier la limitation du volume sous vide, l'angle d'inclinaison du jet au niveau des zones d'interaction et l'encombrement minimal entre la source et la détection) entraînent que les deux zones d'interaction de la cavité micro-onde sont très rapprochées spatialement l'une de l'autre. Un moyen parmi d'autres de mettre deux zones d'interaction à une distance comprise entre une et deux longueurs d'onde de la fréquence micro-onde utilisée ($\nu_0 \approx 9$ GHz, ce qui correspond à $\lambda_0 \approx 3$ cm) est d'employer une cavité micro-onde coaxiale. Ce type de cavité offre en outre l'avantage de posséder une symétrie cylindrique qui permet d'obtenir des tolérances de fabrication élevées.

Nous consacrons la première partie de ce chapitre (section 4.2) à la cavité micro-onde coaxiale utilisée dans la fontaine continue. Nous commençons par décrire brièvement la cavité (sous-section 4.2.1), puis nous calculons dans la sous-section 4.2.2 les modes et fréquences propres associés à la géométrie particulière de cette cavité. Nous en déduisons notamment les dimensions de la cavité pour une fréquence de résonance correspondant à la fréquence de la transition d'horloge de l'atome de césium (cf. annexe A). Ensuite, pour une cavité idéalisée, nous estimons (sous-section 4.2.3) le facteur de qualité non-chargé pour le mode utilisé ainsi que le gradient de phase radial (sous-section 4.2.4) et longitudinal (sous-section 4.2.5) de la composante z du champ magnétique au centre des trous de passage. Pour terminer, nous exposons dans la sous-section 4.2.6 les résultats des mesures micro-onde effectuées sur la cavité développée pour la fontaine continue.

Dans la seconde partie de ce chapitre (section 4.3), nous abordons l'étude

des franges de Ramsey obtenues pour un profil sinusoïdal du champ magnétique micro-onde. C'est précisément ce type de profil de champ qui est généré dans le mode utilisé de la cavité coaxiale. Nous développons notamment, dans la sous-section 4.3.1, une formule approchée qui décrit la frange centrale pour une telle forme de champ dans le cas d'un jet monocinétique. Nous en déduisons la largeur de la frange centrale en fonction des paramètres de l'interrogation micro-onde. Nous introduisons ensuite une distribution gaussienne de temps de transit, conformément aux résultats du chapitre précédent, et nous analysons son effet sur les franges de Ramsey.

Dans la sous-section 4.3.2, nous ajustons les courbes théoriques aux mesures expérimentales de la transition d'horloge et des franges de Ramsey réalisées sur la fontaine continue. Ceci en tenant compte de l'effet perturbateur de la lumière de fluorescence de la source. Nous estimons entre autres la température longitudinale effective du jet atomique. Cette méthode de mesure de la température longitudinale qui peut être appelée *thermomètre Ramsey* est plus précise que la méthode du temps de vol décrite dans le chapitre précédent.

Pour terminer ce chapitre, nous tentons encore (sous-section 4.3.3) de modéliser l'effet du couplage de la lumière de fluorescence de la source et des positions transverses des atomes dans les zones d'interaction sur la probabilité de transition. Ceci dans le but de reproduire le comportement modulé des oscillations de Rabi du sommet et du bas de la frange centrale mesuré expérimentalement sur la fontaine continue.

4.2 Cavité micro-onde coaxiale

4.2.1 Description de la cavité

La cavité micro-onde utilisée dans la fontaine continue est du type cylindrique coaxiale. Elle possède donc une symétrie de révolution. Nous avons esquissé dans la Fig. 4.1 une coupe de cette cavité dans un plan vertical passant par son axe de symétrie. Les dimensions mécaniques indiquées dans la figure sont résumées dans le Tab. 4.1. La cavité est formée d'un corps cylindrique extérieur (1) et d'un poteau central (2) sur lesquels viennent s'appuyer un couvercle inférieur (3) et un couvercle supérieur (4). Deux ouvertures cylindriques sont percées le long d'un diamètre, à équidistance de l'axe de symétrie, dans chaque couvercle pour permettre le passage du jet. Un guide d'onde cylindrique sous la coupure (5) est posé sur chaque ouverture pour empêcher les fuites micro-onde. Remarquons que les deux guides d'onde inférieurs sont inclinés vers l'extérieur de la cavité d'un angle de 2.5° par rapport à la ver-

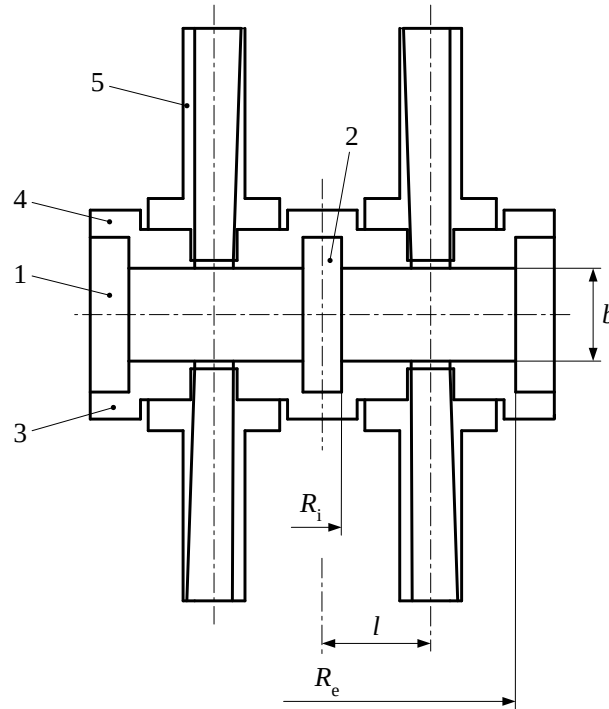


Fig. 4.1: Coupe de la cavité micro-onde coaxiale dans un plan vertical passant par son axe de symétrie. 1) corps cylindrique extérieur ; 2) poteau central ; 3) couvercle inférieur ; 4) couvercle supérieur ; 5) guide d'onde cylindrique sous la coupure. Les dimensions mécaniques indiquées sont résumées dans le Tab. 4.1.

ticale pour faciliter le passage du jet. Cet angle correspond à l'inclinaison nominale du jet dans le plan médian de la cavité. Les deux guides d'onde supérieurs sont quant à eux inclinés du même angle mais vers l'intérieur de la cavité pour ne pas trop perturber la trajectoire parabolique du jet. Le couplage de la cavité est réalisé par deux iris opposés situés à mi-hauteur sur le corps extérieur de la cavité et disposés le long d'un diamètre perpendiculaire à celui qui relie les trous de passage. Cette configuration étant symétrique, chaque trou de passage est situé à une distance identique des iris de couplage. Le couplage de la micro-onde, des câbles coaxiaux à la cavité, est réalisé par l'intermédiaire d'une section de guide d'onde rectangulaire.

Toutes les pièces qui composent cette cavité sont réalisées en cuivre électrolytique ultra pur (OFHC). La Fig. 4.2 donne une vue de la cavité avec les guides d'onde supérieurs et au premier plan la transition câble coaxial - cavité. Les parois intérieures de la cavité sont polies pour augmenter le facteur de qualité. L'étanchéité micro-onde de la cavité entre tous ses composants est assurée par des joints profilés en indium qui permettent de conserver les

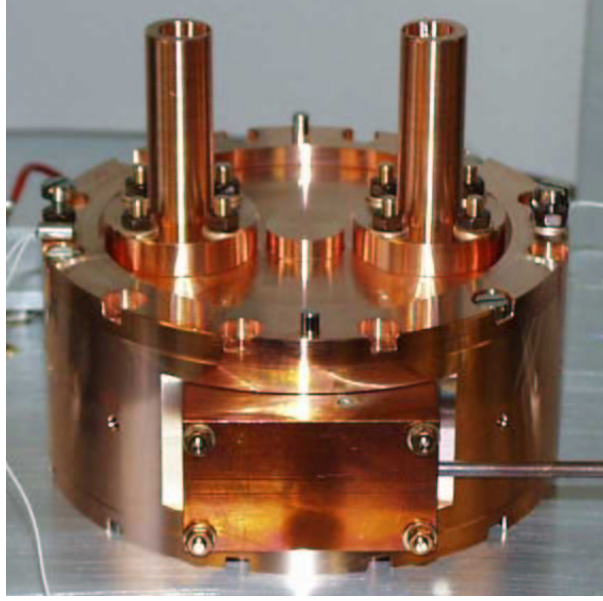


Fig. 4.2: Cavité micro-onde coaxiale utilisée dans la fontaine continue avec les deux guides d'onde supérieurs et au premier plan la pièce de transition câble coaxial - cavité.

tolérances mécaniques des pièces usinées. La cavité est montée sur un berceau rotatif qui autorise un positionnement azimutal de cette dernière, reproductible au centième de millimètre près (cf. sous-section 2.2.3). Ceci pour des raisons dont nous parlerons au chapitre 7.

4.2.2 Modes et fréquences propres de la cavité

Détermination des dimensions de la cavité et du mode utilisé

Nous allons déterminer les dimensions géométriques de la cavité cylindrique coaxiale afin que sa fréquence de résonance corresponde à la fréquence de la transition d'horloge de l'atome de césium. Pour ce faire, nous calculons les modes et fréquences propres de cette cavité à partir des équations de Maxwell de l'électrodynamique. Pour simplifier au maximum, nous faisons les hypothèses suivantes :

- nous considérons une cavité cylindrique coaxiale géométriquement idéale, c.-à-d. sans trous de passage et guides d'onde sous la coupure ainsi que sans iris et guides d'onde de couplage
- les parois métalliques de la cavité sont composées d'un conducteur électrique parfait (conductivité $\sigma \rightarrow \infty$)
- le milieu remplissant la cavité est le vide parfait ($\varepsilon = \varepsilon_0$ et $\mu = \mu_0$)

- la cavité ne contient pas de densité de charge électrique ($\rho = 0$)
- les champs électrique et magnétique ont une dépendance temporelle harmonique de pulsation ω :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{-j\omega t} \text{ et } \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r}) e^{-j\omega t}$$

Avec ces hypothèses, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = j\omega\mu_0\vec{H} \quad (4.1a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = -j\omega\varepsilon_0\vec{E} \quad (4.1b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.1c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (4.1d)$$

où μ_0 , respectivement ε_0 , est la constante magnétique, respectivement électrique, du vide. En raison de la symétrie cylindrique de la cavité coaxiale, nous pouvons dégager une variation spatiale des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ en ondes progressives selon l'axe z et introduire des coordonnées cylindriques (r, φ, z) dont l'origine est placée au centre de la cavité¹ :

$$\vec{E}(r, \varphi, z) = \vec{E}(r, \varphi) e^{\pm jk_z z} \quad (4.2a)$$

$$\vec{H}(r, \varphi, z) = \vec{H}(r, \varphi) e^{\pm jk_z z} \quad (4.2b)$$

où k_z est le nombre d'onde longitudinal selon z . En décomposant le champs $\vec{E}(r, \varphi)$, respectivement $\vec{H}(r, \varphi)$, en composantes transverse $\vec{E}_t(r, \varphi)$ et longitudinale $\vec{E}_z(r, \varphi)$, respectivement $\vec{H}_t(r, \varphi)$ et $\vec{H}_z(r, \varphi)$, on peut montrer [Jac72] que la composante transverse de ces champs est alors donnée en fonction de leur composante longitudinale par les équations suivantes :

$$\vec{E}_t(r, \varphi) = \frac{1}{k_r^2} \left\{ \vec{\nabla}_t \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - j\omega\mu_0 \vec{e}_z \times \vec{\nabla}_t H_z \right\} \quad (4.3a)$$

$$\vec{H}_t(r, \varphi) = \frac{1}{k_r^2} \left\{ \vec{\nabla}_t \left(\frac{\partial H_z}{\partial z} \right) + j\omega\varepsilon_0 \vec{e}_z \times \vec{\nabla}_t E_z \right\} \quad (4.3b)$$

$\vec{\nabla}_t$ est la partie transverse de l'opérateur $\vec{\nabla}$, $\vec{e}_z$ le vecteur unité le long de l'axe z et k_r le nombre d'onde transverse défini par :

$$k_r^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} - k_z^2 \quad (4.4)$$

où nous avons introduit la vitesse de la lumière dans le vide c_0 . Les composantes longitudinales $E_z(r, \varphi)$ et $H_z(r, \varphi)$ du champ doivent quant à elles

¹Soit à mi-hauteur sur l'axe de symétrie de la cavité.

vérifier l'équation de Helmholtz transverse :

$$\vec{\nabla}_t^2 \psi(r, \varphi) + k_r^2 \psi(r, \varphi) = 0 \quad (4.5)$$

avec les conditions aux limites sur les surfaces cylindriques intérieur S_i et extérieur S_e de la cavité données, pour un conducteur parfait, par :

$$E_z|_{S_i, S_e} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial H_z}{\partial n} \right|_{S_i, S_e} = 0 \quad (4.6)$$

La dérivée est la dérivée normale en un point des surfaces S_i et S_e . Plusieurs modes de résonance différents peuvent exister dans une cavité électromagnétique coaxiale. On peut les classer en trois types :

- Modes TE (transverse électrique) où la composante z du champ électrique est nulle ($E_z = 0$)
- Modes TM (transverse magnétique) où la composante z du champ magnétique est nulle ($H_z = 0$)
- Modes TEM (transverse électrique et magnétique) où la composante z du champ électrique et magnétique est nulle ($E_z = H_z = 0$)

Modes transverse électrique TE :

Commençons avec les modes TE qui sont ceux qui nous intéressent. Les conditions aux limites sur les surfaces horizontales inférieure ($z = -b/2$) et supérieure ($z = b/2$) de la cavité permettent de déterminer k_z . Pour un conducteur parfait et ce type de mode, elles sont les suivantes :

$$H_z(r, \varphi, -b/2) = 0 \quad \text{et} \quad H_z(r, \varphi, b/2) = 0 \quad (4.7)$$

On en déduit la dépendance en z du champ longitudinal à partir de (4.2b) :

$$H_z(r, \varphi, z) = H_z(r, \varphi) \cos(k_{z_p} z) \quad (4.8)$$

avec k_{z_p} le nombre d'onde longitudinal :

$$k_{z_p} = \frac{p\pi}{b} \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (4.9)$$

Pour ce type de mode, le champ $H_z(r, \varphi)$ est solution de l'équation (4.5) dont la solution générale, sur une surface circulaire, est donnée sous la forme [Jac72] :

$$\psi(r, \varphi) = \mathcal{R}_m(r) \Phi_m(\varphi) \quad (4.10)$$

avec la partie radiale :

$$\mathcal{R}_m(r) = J_m(k_r r) + A_r N_m(k_r r) \quad (4.11)$$

où A_r est un coefficient à déterminer et $J_m(x)$, respectivement $N_m(x)$, est la fonction de Bessel de 1^{ère} espèce, respectivement de 2^{ème} espèce, d'ordre m . La partie angulaire s'écrit :

$$\Phi_m(\varphi) = \cos m\varphi + A_\varphi \sin m\varphi \quad (4.12)$$

où A_φ est aussi un coefficient à déterminer. Des conditions aux limites (4.6), nous déduisons pour la partie angulaire de $\psi(r, \varphi)$ la condition :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}(r, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_\varphi = 0 \quad (4.13)$$

La symétrie azimutale des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ doit être périodique de période 2π du fait que la cavité est couplée généralement par un seul iris. Ceci a pour conséquence que m doit être un entier. La partie angulaire se réduit donc à :

$$\Phi_m(\varphi) = \cos(m\varphi) \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.14)$$

Appliquées à la partie radiale de $\psi(r, \varphi)$, les conditions (4.6) et (4.14) donnent les relations suivantes sur les deux surfaces cylindriques S_i et S_e :

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}(R_i, \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad J'_m(k_r R_i) + A_r N'_m(k_r R_i) = 0 \quad i = i, e \quad (4.15)$$

où $J'_m(x) = dJ_m(x)/dx$ et $N'_m(x) = dN_m(x)/dx$. R_i est le rayon de la paroi intérieure de la cavité et R_e celui de la paroi extérieure (cf. Fig. 4.1). Ces deux équations déterminent les valeurs que peut prendre k_r . Pour que des solutions $\neq 0$ existent, il faut que le déterminant $D_m(k_r)$ de ce système d'équations soit nul. On trouve alors que le nombre d'onde transverse k_r doit vérifier l'équation suivante :

$$D_m(k_r) = J'_m(k_r R_i) N'_m(k_r R_e) - J'_m(k_r R_e) N'_m(k_r R_i) = 0 \quad (4.16)$$

En repérant les solutions de cette équation par $k_{r_{mn}}$, on peut en déduire les fréquences propres f_{mnp}^{TE} de la cavité coaxiale pour ce type de modes. D'après l'équation (4.4), il vient :

$$f_{mnp}^{\text{TE}} = \frac{c_0}{2\pi} \sqrt{k_{r_{mn}}^2 + \frac{p^2 \pi^2}{b^2}} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad \text{et} \quad n, p = 1, 2, 3, \dots \quad (4.17)$$

Nous voyons qu'elles sont déterminées uniquement par les dimensions géométriques de la cavité et les propriétés du milieu qui la remplit. Il en existe une infinité correspondant chaque fois à un mode propre du champ dans la cavité. Ces modes peuvent être repérés par les nombres m, n et p . On parlera dans ce cas de modes TE_{mnp} pour un *mode transverse électrique*². L'expression de la partie spatiale des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ pour un mode TE_{mnp} quelconque peut être obtenue à partir de (4.8), (4.10), (4.11), (4.14) et des équations (4.3). Nous ne donnons ici uniquement que l'expression du champ $\vec{H}$ car c'est celui qui nous intéresse. On trouve pour $R_i \leq r \leq R_e, -\pi \leq \varphi \leq \pi$ et $-b/2 \leq z \leq b/2$:

$$H_r(r, \varphi, z) = -H_0 \frac{k_{zp}}{k_{r_{mn}}} \left(J'_m(k_{r_{mn}} r) + A_{r_{mnp}} N'_m(k_{r_{mn}} r) \right) \quad (4.18a)$$

$$\times \cos(m\varphi) \sin(k_{zp} z)$$

$$H_\varphi(r, \varphi, z) = -H_0 \frac{m k_{zp}}{k_{r_{mn}}^2 r} \left(J_m(k_{r_{mn}} r) + A_{r_{mnp}} N_m(k_{r_{mn}} r) \right) \quad (4.18b)$$

$$\times \sin(m\varphi) \sin(k_{zp} z)$$

$$H_z(r, \varphi, z) = H_0 \left(J_m(k_{r_{mn}} r) + A_{r_{mnp}} N_m(k_{r_{mn}} r) \right) \quad (4.18c)$$

$$\times \cos(m\varphi) \cos(k_{zp} z)$$

où le coefficient $A_{r_{mnp}}$ est déterminé à partir des équations (4.15) avec $k_r = k_{r_{mn}}$. Le mode transverse électrique qui nous intéresse pour le résonateur de la fontaine continue est le mode dont la composante z du champ $\vec{H}$ présente un ventre à environ mi-distance des deux parois cylindriques de la cavité (on désire avoir un champ magnétique selon z qui soit le plus uniforme sur la section de passage du jet). Le premier mode de ce type est le mode TE_{021} .

Dimensions géométriques de la cavité :

Nous souhaitons maintenant déterminer les dimensions géométriques de la cavité pour que la fréquence de résonance de ce mode TE_{021} corresponde à la fréquence de résonance ν_0 de la transition d'horloge de l'atome de césium. Si on pose $f_{021}^{\text{TE}} = \nu_0$ dans l'équation des fréquences propres (4.17), on peut exprimer le nombre d'onde transverse en fonction de la hauteur b de la cavité :

$$k_{r_{02}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{4b^2}} \quad (4.19)$$

²Cette nomenclature n'est pas satisfaisante car elle est identique à celle définissant les modes propres d'une cavité cylindrique.

où $\lambda_0 = c_0/\nu_0 = 3.26$ cm est la longueur d'onde dans le vide de l'onde électromagnétique correspondant à la transition d'horloge de l'atome de césium 133 (cf. annexe A). La hauteur de coupure b_c s'en déduit :

$$b_c = \frac{\lambda_0}{2} = 1.63 \text{ cm} \quad (4.20)$$

En dessous de cette longueur, aucun mode TE_{021} ne peut exister dans la cavité.

Fixons la hauteur de la cavité à $b = 26.0$ mm $> b_c$ de façon que le temps d'interaction moyen $\bar{\tau}$ soit de l'ordre de 10 ms. Pour un mode TE_{021} , on obtient alors pour le nombre d'onde transverse :

$$k_{r02} = 150.064 \text{ m}^{-1} \quad (4.21)$$

d'après (4.19), et pour le nombre d'onde longitudinal, avec (4.9) :

$$k_{z1} = \frac{\pi}{b} = 120.830 \text{ m}^{-1} \quad (4.22)$$

Fixons encore le rayon de la paroi extérieure de la cavité à une valeur de $R_e = 49.3$ mm. Ceci nous permet de déterminer le coefficient A_r pour le mode TE_{021} à partir des équations (4.15). Pour $i = e$, on obtient :

$$A_{r02} = -\frac{J_1(k_{r02}R_e)}{N_1(k_{r02}R_e)} = 0.399 \quad (4.23)$$

L'équation (4.15) pour $i = i$ fixe maintenant la valeur du rayon R_i de la paroi cylindrique intérieure de la cavité. Elle détermine également la valeur du rayon R_{ie} où la composante longitudinale H_z du champ atteint un extrémum local entre R_i et R_e , c.-à-d. la position radiale l du centre des trous de passage de la cavité. Ces deux rayons sont donc solution de l'équation suivante :

$$J_1(k_{r02}R_i) + A_{r02}N_1(k_{r02}R_i) = 0 \quad (4.24)$$

avec $i = i$ pour la première solution et $i = ie$ pour la seconde. Pour le mode TE_{021} , on trouve $R_i = 5.51$ mm et $R_{ie} = l = 28.1$ mm. Remarquons que $R_{ie} > \bar{R} = (R_i + R_e)/2 = 27.4$ mm. Le point où se trouve l'extrémum local de la composante longitudinale H_z du champ n'est pas situé à mi-distance des parois cylindriques de rayon R_i et R_e , mais il est un peu plus près de la paroi extérieure que de la paroi intérieure (cf. Fig. 4.5). Les calculs montrent que c'est toujours le cas pour ce mode et que l'on ne peut pas placer ce point à mi-distance des deux parois cylindriques quel que soit leur rayon et la valeur de la hauteur b pour une cavité de dimension finie. Notons que l'équation (4.24)

<i>Grandeur</i>	<i>Notation</i>	<i>Valeur</i>
Hauteur	b	26.00 mm
Rayon intérieur	R_i	5.51 mm
Rayon extérieur	R_e	49.30 mm
Demi-distance des trous de passage	l	28.1 mm

Tab. 4.1: Valeur des dimensions mécaniques de la cavité micro-onde cylindrique coaxiale de la fontaine continue (cf. Fig. 4.1).

implique aussi que la composante radiale H_r du champ s'annule en $r = l$. Il est intéressant de voir où se situe le point d'inflexion de la dépendance avec r de la composante radiale H_r du champ. Sa position R_{in} est déterminée pour le mode TE_{021} par la condition :

$$\frac{\partial^2 H_r}{\partial r^2}(R_{in}, \varphi, z) = 0 \quad (4.25)$$

$$\Rightarrow 3J_1(k_{r02}R_{in}) - J_3(k_{r02}R_{in}) + A_{r02}(3N_1(k_{r02}R_{in}) - N_3(k_{r02}R_{in})) = 0$$

On obtient une valeur de $R_{in} = 26.3 \text{ mm} < \bar{R}$. On constate que le point d'inflexion est situé un peu plus près de la paroi cylindrique intérieure que de la paroi extérieure (cf. Fig. 4.4). Ceci est toujours vrai pour ce mode quelle que soit la valeur des rayons R_i et R_e et celle de la hauteur b pour une cavité de dimension finie. On ne peut donc pas faire coïncider le point d'inflexion de H_r avec le point où H_z est maximum, c.-à-d. pour $r = l$. Les dimensions de la cavité ainsi établies sont résumées dans le Tab. 4.1.

Champ magnétique du mode TE_{021} :

Nous donnons ci-dessous l'expression de la partie spatiale du champs $\vec{H}$ dans la cavité pour le mode TE_{021} :

$$H_r(r, z) = H_c \frac{k_{z1}}{k_{r02}} \cdot \frac{J_1(k_{r02}r) + A_{r02} N_1(k_{r02}r)}{J_0(k_{r02}l) + A_{r02} N_0(k_{r02}l)} \sin(k_{z1}z) \quad (4.26a)$$

$$H_\varphi(r, z) = 0 \quad (4.26b)$$

$$H_z(r, z) = H_c \frac{J_0(k_{r02}r) + A_{r02} N_0(k_{r02}r)}{J_0(k_{r02}l) + A_{r02} N_0(k_{r02}l)} \cos(k_{z1}z) \quad (4.26c)$$

où H_c est la valeur maximum de la composante z du champ magnétique à la distance³ $r = l$, k_{r02} et k_{z1} sont donnés respectivement par (4.21) et (4.22),

³C'est en fait la valeur du champ au centre de la cavité sur l'axe des trous de passage.

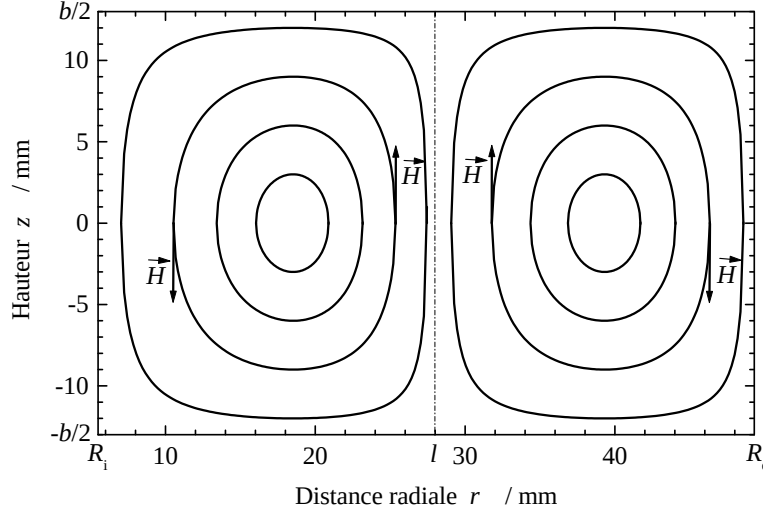


Fig. 4.3: Lignes de champ dans un plan radial (r, z) du champ magnétique du mode TE_{021} de la cavité. A la distance $r = l$, où passe le jet atomique, la direction du champ magnétique est verticale et son amplitude varie selon z comme $\cos(\pi z/b)$.

et $A_{r_{02}}$ par (4.23). Nous remarquons évidemment que ce mode n'a pas de dépendance azimutale et que sa composante azimutale H_φ est nulle. Nous voyons également que pour un rayon donné, en particulier à $r = l$ (centre des trous de passage de la cavité), $H_z(l, z)$ varie avec z selon $\cos(\pi z/b)$. C'est précisément cette composante qui induit la transition d'horloge dans la fontaine continue. Nous établirons dans la deuxième partie de ce chapitre (sous-section 4.3.1) la probabilité de transition des atomes de césium soumis à l'action d'un champ magnétique hyperfréquence de ce type dans deux zones d'interaction spatialement séparées.

Puisque les composantes H_r et H_z du champ sont indépendantes de φ et comme, en plus, la composante azimutale du champ est nulle, les lignes de champ du mode TE_{021} de la cavité sont contenues entièrement dans un plan vertical radial (r, z) et sont indépendantes de la position azimutale φ . Il en résulte que dans un plan (r, φ) , les lignes de champ sont des droites radiales. On peut facilement déterminer l'équation des lignes de champ dans le plan radial (r, z) à partir des équations (4.26). Elle est donnée par :

$$\ln \left\{ \cos \left(\frac{\pi z}{b} \right) \right\} = -k_{r_{02}} \int \frac{J_0(k_{r_{02}}r) + A_{r_{02}} N_0(k_{r_{02}}r)}{J_1(k_{r_{02}}l) + A_{r_{02}} N_1(k_{r_{02}}l)} dr + C \quad (4.27)$$

où C est une constante. Les lignes de champ correspondantes dans ce plan sont représentées dans la Fig. 4.3. On voit bien qu'à la distance radiale $r = l$, qui correspond à l'endroit où passe le jet atomique, la direction du champ

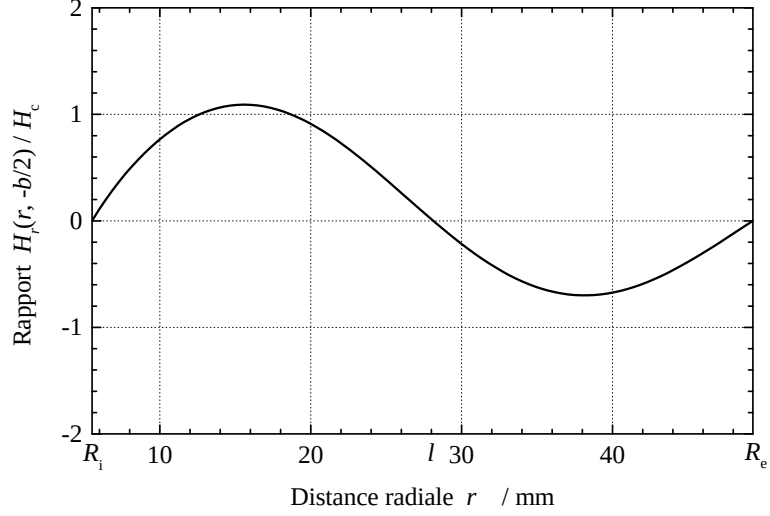


Fig. 4.4: Rapport $H_r(r, -b/2)/H_c$ de la composante r du champ magnétique du mode TE_{021} en fonction de la distance radiale r entre le rayon intérieur R_i et le rayon extérieur R_e des parois cylindriques de la cavité. Ce rapport est représenté au bas de la cavité ($z = -b/2$). Il s'annule pour $r = l$.

magnétique est verticale. Nous avons reporté dans les Fig. 4.4 et 4.5 la dépendance radiale des composantes $H_r(r, -b/2)$ et $H_z(r, 0)$ du champ magnétique du mode TE_{021} de la cavité.

Nous pouvons également déterminer quelle est l'intensité B_c du champ d'induction magnétique (correspondant à H_c) dans la cavité lors du fonctionnement normal de l'étalon. Elle est reliée à la fréquence de Rabi Ω_c de l'interaction micro-onde (cf. sous-section 4.3.1) par :

$$B_c = \frac{\hbar \Omega_c}{\mu_B} \quad (4.28)$$

Avec la fréquence de Rabi optimale $\Omega_{c,1}$ correspondant à la 1^{ère} puissance optimale (cf. sous-section 4.3.1), l'expression de B_c est la suivante :

$$B_c = \frac{\hbar \pi^2}{4\mu_B \bar{\tau}} \quad (4.29)$$

où $\bar{\tau}$ est le temps d'interaction moyen. Avec la valeur de $\bar{\tau}$ estimée dans la sous-section 3.4.4, on obtient une valeur de $B_c \simeq 2.6 \text{ nT}$.

Courants du mode TE_{021} :

Les courants circulants sur les parois de la cavité pour ce mode TE_{021} se déterminent aisément à partir des composantes (4.26) du champ magnétique.

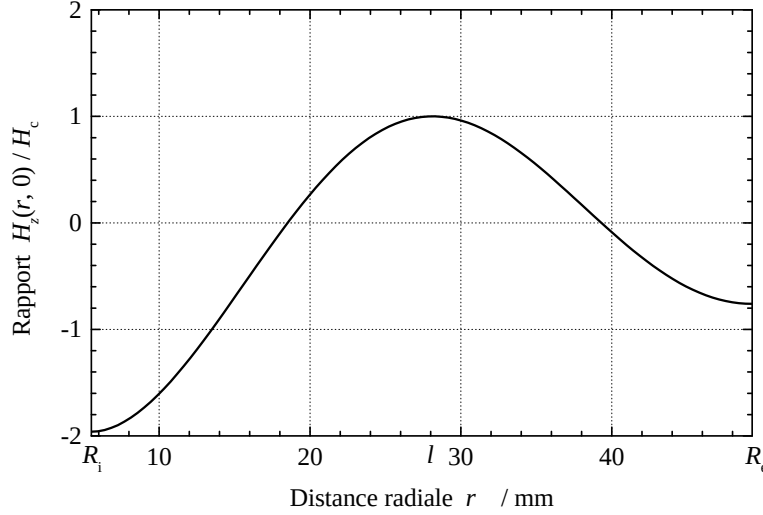


Fig. 4.5: Rapport $H_z(r, 0)/H_c$ de la composante z du champ magnétique du mode TE_{021} en fonction de la distance radiale r entre le rayon intérieur R_i et le rayon extérieur R_e des parois cylindriques de la cavité. Ce rapport est représenté à mi-hauteur de la cavité ($z = 0$). Il atteint un maximum local pour $r = l$.

La densité de courant surfacique $\vec{j}_s$ est donnée par :

$$\vec{j}_s = \vec{n} \times \vec{H}_s \quad (4.30)$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la surface considérée et $\vec{H}_s$ est le champ magnétique tangentiel à la surface. Nous obtenons ainsi, sur les parois cylindriques, la partie spatiale de la densité de courant suivante :

$$\vec{j}_{s\varphi}(z) = \begin{cases} +H_z(R_i, z) & \text{paroi intérieure} \\ -H_z(R_e, z) & \text{paroi extérieure} \end{cases} \quad (4.31a)$$

$$\vec{j}_{sz}(z) = 0 \quad (4.31b)$$

Et sur les parois horizontales, la densité de courant vaut :

$$\vec{j}_{sr}(r) = 0 \quad (4.32a)$$

$$\vec{j}_{s\varphi}(r) = \begin{cases} +H_r(r, -b/2) & \text{paroi inférieure} \\ -H_z(r, b/2) & \text{paroi supérieure} \end{cases} \quad (4.32b)$$

On constate que tous les courants sur les parois de la cavité sont azimutaux et sont contenus entièrement dans un plan horizontal aussi bien sur les parois verticales que sur celles horizontales des couvercles. Il n'y a donc pas de courants qui circulent entre les couvercles et la partie cylindrique de la

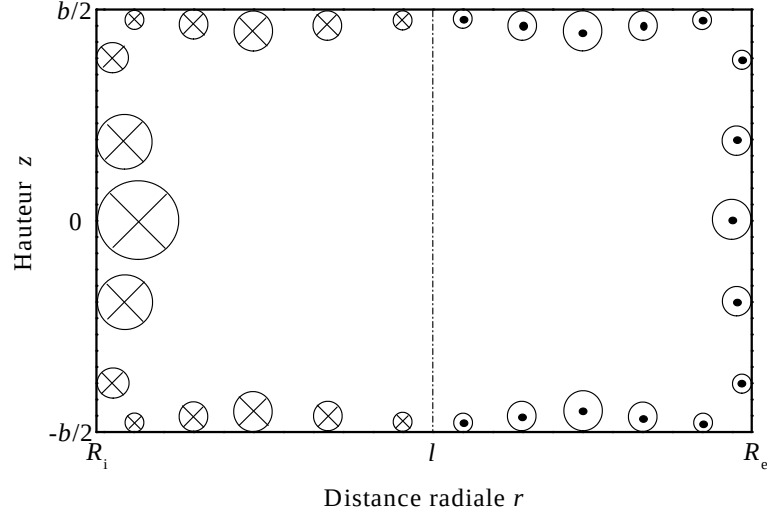


Fig. 4.6: Esquisse dans le plan (r, z) du sens et de l'intensité des courants sur les parois de la cavité pour le mode TE_{021} . Les courants sont purement azimutaux, c.-à-d. perpendiculaires au plan (r, z) .

cavité pour ce mode. Le sens et l'intensité des courants sur les parois de la cavité sont esquissés dans la Fig. 4.6. On remarque que les courants sont nuls dans les quatre coins de la cavité, ce qui n'est pas étonnant puisqu'à ces endroits le champ magnétique est nul. Le courant le plus élevé qui circule sur les parois de la cavité se trouve à mi-hauteur sur le poteau central.

Champ électrique du mode TE_{021} :

Quant au champ électrique associé au mode TE_{021} , on en déduit facilement son expression à partir de l'équation (4.3a). Sa partie spatiale est donnée par :

$$E_r(r, z) = 0 \quad (4.33a)$$

$$E_\varphi(r, z) = Z_0 H_c \frac{k_0}{k_{r02}} \cdot \frac{J_1(k_{r02}r) + A_{r02}N_1(k_{r02}r)}{J_0(k_{r02}l) + A_{r02}N_0(k_{r02}l)} \cos(k_{z1}z) \quad (4.33b)$$

$$E_z(r, z) = 0 \quad (4.33c)$$

où $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ et $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ est l'impédance du vide. Le champ électrique ne possède qu'une composante azimutale qui ne dépend pas de φ . Sa dépendance radiale est identique à celle de H_r . Les lignes de champ électrique sont toutes des cercles centrés sur l'axe de symétrie de la cavité et qui sont entièrement contenus dans un plan horizontal. Le sens et l'intensité du champ électrique est esquissé dans la Fig. 4.7. On constate notamment que le champ

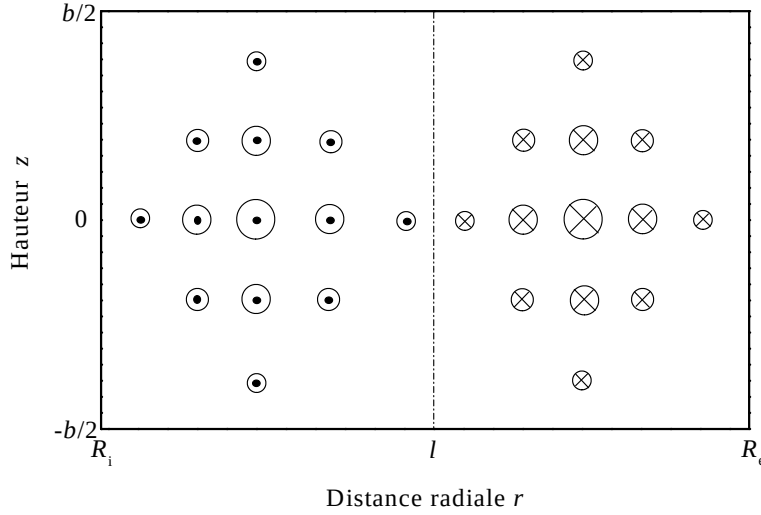


Fig. 4.7: Esquisse dans le plan (r, z) du sens et de l'intensité du champ électrique de la cavité pour le mode TE_{021} . Le champ électrique est purement azimutal, c.-à-d. perpendiculaire au plan (r, z) .

électrique est nul le long de l'axe des trous de passage à la distance $r = l$. C'est évidemment aussi le cas sur les parois de la cavité, puisque nous avons considéré des conditions aux bords pour un métal parfaitement conducteur.

Détermination du spectre de la cavité

Passons maintenant à la détermination du spectre de la cavité autour de la fréquence de résonance ν_0 .

Modes transverses électriques TE :

Pour les modes TE, les fréquences de résonance s'obtiennent avec les équations (4.16) et (4.17). Les deux modes les plus proche du mode TE_{021} sont le mode TE_{221} avec une fréquence de résonance de $f_{221}^{TE} = 8.660$ GHz et le mode TE_{611} avec une fréquence de $f_{611}^{TE} = 9.271$ GHz.

Modes transverses magnétiques TM :

Pour calculer les fréquences propres des modes TM, nous procédons de la même manière que pour les modes TE mais avec les conditions aux limites (4.6) correspondantes. On en déduit ainsi que la fréquence propre d'un mode

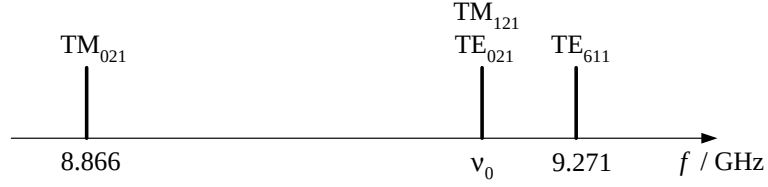


Fig. 4.8: Schéma du spectre des modes de la cavité cylindrique coaxiale les plus proches du mode TE₀₂₁ utilisé dans la fontaine continue. Le mode TM₁₂₁ est dégénéré avec le mode TE₀₂₁. Nous avons également indiqué la fréquence de résonance de ces modes.

TM_{mnp} est donnée par :

$$f_{mnp}^{\text{TM}} = \frac{c_0}{2\pi} \sqrt{k_{r_{mn}}^2 + \frac{p^2\pi^2}{b^2}} \quad m, p = 0, 1, 2, \dots \quad \text{et} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.34)$$

avec le nombre d'onde transverse $k_{r_{mn}}$ solution cette fois de l'équation aux valeurs propres suivante :

$$D_m(k_{r_{mn}}) = J_m(k_{r_{mn}} R_i) N_m(k_{r_{mn}} R_e) - J_m(k_{r_{mn}} R_e) N_m(k_{r_{mn}} R_i) = 0 \quad (4.35)$$

Certains modes TM sont dégénérés avec des modes TE, c.-à-d. que leur fréquence de résonance est identique. On peut montrer à partir des équations (4.16) et (4.35) que c'est le cas en particulier des modes TM_{1np} et TE_{0np} pour $n, p = 1, 2, 3, \dots$. Donc, le mode TE₀₂₁ est dégénéré avec le mode TM₁₂₁. Les autres modes TM les plus proches du mode TE₀₂₁ sont le mode TM₀₂₁ de fréquence de résonance $f_{021}^{\text{TM}} = 8.866$ GHz et le mode TM₄₁₁ de fréquence $f_{411}^{\text{TM}} = 9.337$ GHz.

Modes transverses électriques et magnétiques TEM :

Reste encore à considérer le cas des modes TEM ($E_z = H_z = 0$). Comme le numérateur de (4.3) est nul dans ce cas, pour que les champs transverses E_t et H_t soient non-nul, il faut que le dénominateur soit nul. On en déduit donc que $k_r^2 = 0$. Les fréquences de résonance de ces modes sont alors données par :

$$f_p^{\text{TEM}} = \frac{p c_0}{2b} \quad p = 1, 2, \dots \quad (4.36)$$

Les deux modes TEM les plus proches du mode TE₀₂₁ sont les deux premiers modes TEM₁ de fréquence $f_1^{\text{TEM}} = 5.765$ GHz et TEM₂ de fréquence $f_2^{\text{TEM}} = 11.531$ GHz. Nous résumons finalement dans la Fig. 4.8 les modes les plus proches du mode TE₀₂₁ ainsi que leur fréquence de résonance.

4.2.3 Estimation du facteur de qualité non-chargé

Nous avons calculé le facteur de qualité non-chargé Q_0 de la cavité pour le mode TE_{021} . Ce facteur de qualité revient à ne prendre en compte que les pertes dues à l'énergie dissipée dans les parois imparfaitement conductrices. Il est défini par [VA89] :

$$Q_0 = 2\pi\nu_0 \frac{\overline{W}}{P_w} \quad (4.37)$$

où $\overline{W}$ est l'énergie totale moyenne stockée dans la cavité et P_w la puissance dissipée dans les parois de la cavité. L'énergie électromagnétique totale moyenne dans la cavité est donnée par :

$$\overline{W} = \int_{V_c} \bar{w} dV \quad (4.38)$$

V_c est le volume de la cavité et $\bar{w}$ la densité moyenne d'énergie électromagnétique. Pour un champ à résonance, elle est définie par :

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\vec{E}|^2 \quad (4.39)$$

La puissance dissipée dans les parois de la cavité se calcule avec l'expression suivante :

$$P_w = \frac{1}{2} R_s \int_{S_c} |\vec{j}_s|^2 dS \quad (4.40)$$

où S_c est la surface totale des parois de la cavité et $\vec{j}_s$ la densité de courant surfacique donnée par (4.30). R_s est la résistance de surface des parois de la cavité :

$$R_s = \frac{1}{\sigma\delta} \quad (4.41)$$

avec σ la conductivité du métal des parois et δ son épaisseur de peau qui est donnée par :

$$\delta = \left(\frac{2}{\mu_0 \omega_0 \sigma} \right)^{1/2} \quad (4.42)$$

où $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ est la pulsation de la transition d'horloge de l'atome de césium. Pour une valeur de la conductivité de $\sigma = 5.98 \cdot 10^7$ S/m, correspondant à du cuivre avec un bon état de surface, l'épaisseur de peau à cette fréquence vaut $\delta \simeq 0.6 \mu\text{m}$ et la résistance de surface $R_s \simeq 30 \text{ m}\Omega$. Avec les expressions (4.26) et (4.33) des champs $\vec{H}$ et $\vec{E}$, nous pouvons calculer le facteur de qualité non-chargé de la cavité pour le mode TE_{021} . Après évaluation des

intégrales, nous trouvons :

$$Q_0 = \frac{b}{\delta} \cdot \frac{(\pi^2 + k_{r02}^2 b^2) (\xi(k_{r02} R_e) - \xi(k_{r02} R_i))}{2\pi^2 (\xi(k_{r02} R_e) - \xi(k_{r02} R_i)) + k_{r02}^4 b^3 R_i \left(\mathcal{R}_0^2(k_{r02} R_i) + \frac{R_e}{R_i} \mathcal{R}_0^2(k_{r02} R_e) \right)} \quad (4.43)$$

où $\xi(x)$ est donné par :

$$\xi(x) = x^2 \mathcal{R}_1'^2(x) + (x^2 - 1) \mathcal{R}_1^2(x) \quad (4.44)$$

avec $\mathcal{R}_1'(x) = d\mathcal{R}_1(x)/dx$ et où $\mathcal{R}_n(x)$ est la partie radiale du champ :

$$\mathcal{R}_n(x) = J_n(x) + A_{r02} N_n(x) \quad n = 0, 1 \quad (4.45)$$

Pour les dimensions de la cavité données dans le Tab. 4.1 et la valeur de la conductivité spécifiée plus haut, on obtient pour le facteur de qualité non-chargé une valeur de $Q_0 = 27\,457$.

4.2.4 Gradient de phase radial

Nous nous intéressons dans cette sous-section au gradient de phase radial de la composante longitudinale du champ magnétique qui est généré par les parois imparfaitement conductrices de la cavité. Nous verrons dans le chapitre 7 que si la phase moyenne du champ magnétique “vue” par les atomes du jet n’est pas identique dans les deux zones d’interaction de la cavité, ceci peut engendrer un déplacement de la fréquence de résonance mesurée de la transition d’horloge. Avec la fontaine continue, nous visons une exactitude relative de fréquence de l’ordre de 10^{-15} , ce qui conduit à des exigences sévères en ce qui concerne le contrôle de la phase du champ magnétique dans la cavité. Notre but, ici, n’est pas de calculer exactement les variations spatiales de cette phase, mais seulement d’en obtenir une estimation afin d’être en mesure d’évaluer l’ordre de grandeur du déplacement de fréquence résultant (cf. section 7.5).

Toutes les cavités micro-onde développées dans les différents laboratoires de métrologie pour les fontaines à atomes froids sont des cavités cylindriques. Pour ce type de cavité, de nombreux travaux théoriques ont été réalisés afin de déterminer la phase du champ magnétique du mode utilisé due à des parois imparfaitement conductrices et au couplage micro-onde de la cavité avec l’extérieur [VD93, KM94, KVM95, KVM96]. Ces travaux ont notamment montré que la variation radiale de la phase, due à des parois imparfaitement conductrices, était en principe quadratique autour de l’axe des trous de passage du

“jet” atomique, qui correspond en fait à l’axe de symétrie de la cavité. De plus, le mode du champ perturbé conserve les mêmes caractéristiques géométriques que le mode non-perturbé. De ces études, il en ressort en particulier qu’il est possible de maintenir, avec ce type de cavité et un mode TE_{011} , une variation radiale de la phase de quelques μrad sur l’ouverture des trous de passage. Ceci garantit un déplacement relatif de la fréquence de résonance de l’étalon inférieur à 10^{-15} .

Comme nous utilisons une cavité cylindrique coaxiale, les résultats de ces études ne s’appliquent pas dans notre cas. C’est pourquoi, nous avons repris certaines de ces études dans le cas de la cavité cylindrique coaxiale utilisée dans la fontaine continue.

Pour ce faire, nous avons entrepris un calcul perturbatif de la variation radiale de la phase, dans le plan médian de la cavité, du champ magnétique H_z du mode TE_{021} qui induit la transition micro-onde. Ce calcul est basé sur l’article de Vecchi *et al.* [VD93] qui décrit le principe du calcul de la variation radiale de la phase du champ magnétique longitudinal dans une cavité cylindrique. Pour ce calcul, nous faisons les hypothèses suivantes :

- les deux parois intérieures des couvercles ainsi que les deux parois cylindriques intérieures de la cavité sont supposées être des surfaces métalliques imparfaitement conductrices (conductivité finie)
- ces surfaces ont les mêmes propriétés électromagnétiques et sont homogènes (la conductivité est identique et constante)
- nous négligeons le couplage avec d’autres modes de la cavité introduit par des parois métalliques imparfaitement conductrices

La prise en compte de parois métalliques imparfaitement conductrices modifie les conditions aux limites (4.6). Elles peuvent être approximées, sous les hypothèses ci-dessus, par les conditions aux limites à impédance de surface suivantes :

sur la surface cylindrique intérieure S_i :

$$E_z(R_i, z) + \underline{Z}_s H_\varphi(R_i, z) = 0 \quad (4.46a)$$

$$E_\varphi(R_i, z) - \underline{Z}_s H_z(R_i, z) = 0 \quad (4.46b)$$

sur la surface cylindrique extérieure S_e :

$$E_z(R_e, z) - \underline{Z}_s H_\varphi(R_e, z) = 0 \quad (4.47a)$$

$$E_\varphi(R_e, z) + \underline{Z}_s H_z(R_e, z) = 0 \quad (4.47b)$$

où $\underline{Z}_s = (1 + j)R_s$ est l'impédance de surface des parois métalliques et R_s la résistance de surface donnée par (4.41). Les composantes spatiales des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont données par (4.33) et (4.26) respectivement. D'après les hypothèses précédentes, les conditions (4.46a) et (4.47a) sont automatiquement vérifiées pour le mode TE_{021} . En introduisant les composantes des champs dans les deux autres conditions, et en nous restreignant au plan médian de la cavité ($z = 0$), nous obtenons un système d'équations qui détermine la nouvelle valeur du nombre d'onde transverse k_{r02} . Pour que des solutions $\neq 0$ existent, le déterminant $D_0(k_{r02})$ de ce système doit être nul. Le nombre d'onde k_{r02} doit donc vérifier l'équation suivante :

$$D_0(k_{r02}) = \left[J'_0(k_{r02}R_i) + j \frac{\underline{Z}_s k_{r02}}{Z_0 k_0} J_0(k_{r02}R_i) \right] \cdot \left[N'_0(k_{r02}R_e) - j \frac{\underline{Z}_s k_{r02}}{Z_0 k_0} N_0(k_{r02}R_e) \right] - \left[J'_0(k_{r02}R_e) - j \frac{\underline{Z}_s k_{r02}}{Z_0 k_0} J_0(k_{r02}R_e) \right] \cdot \left[N'_0(k_{r02}R_i) + j \frac{\underline{Z}_s k_{r02}}{Z_0 k_0} N_0(k_{r02}R_i) \right] = 0 \quad (4.48)$$

Comme pour le cuivre la conductibilité est élevée, on a donc $R_s \ll Z_0$. On peut ainsi considérer que les termes contenant $\underline{Z}_s$ sont une perturbation dans les équations (4.46), (4.47) et (4.48). On le voit bien si on pose $\sigma \rightarrow \infty$ dans ces équations, puisque dans ce cas on retrouve les conditions (4.6) et l'équation (4.16) pour un métal parfait. Ceci nous permet de résoudre l'équation ci-dessus de manière perturbative par rapport à k_{r02} . Posons :

$$\varepsilon_s = \frac{R_s}{Z_0} \simeq 6.5 \cdot 10^{-5} \ll 1 \quad (4.49)$$

le paramètre de perturbation, il faut alors remplacer $\underline{Z}_s$ par $(1 + j)\varepsilon_s Z_0$ dans (4.48). On cherche maintenant une solution complexe $\underline{k}_{r02}$ de cette équation en développant $\underline{k}_{r02}$ de manière perturbative par rapport au paramètre ε_s en nous restreignant aux termes dominants à l'ordre de perturbation le plus bas. Dans ce cas, la partie réelle de $\underline{k}_{r02}$ vaut $k'_{r02} = k_{r02}$, qui est la solution pour $\varepsilon_s = 0$ que nous avons obtenue dans la sous-section 4.2.2, et la partie imaginaire k''_{r02} est donnée par :

$$k''_{r02} = \varepsilon_s \frac{k_{r02}}{k_0} \cdot \frac{C}{D} \quad (4.50)$$

avec

$$C = J'_0(k_{r02} R_i) N_0(k_{r02} R_e) - J_0(k_{r02} R_i) N'_0(k_{r02} R_e) + J'_0(k_{r02} R_e) N_0(k_{r02} R_i) - J_0(k_{r02} R_e) N'_0(k_{r02} R_i) \quad (4.51a)$$

$$D = R_e \left(J'_0(k_{r02} R_i) N''_0(k_{r02} R_e) - N'_0(k_{r02} R_i) J''_0(k_{r02} R_e) \right) + R_i \left(N'_0(k_{r02} R_e) \times J''_0(k_{r02} R_i) - J'_0(k_{r02} R_e) N''_0(k_{r02} R_i) \right) \quad (4.51b)$$

A partir de l'équation (4.47b), nous pouvons exprimer le nouveau coefficient $\underline{A}_{r02}$, qui est maintenant également complexe, de la partie radiale du champ :

$$\underline{A}_{r02} = - \frac{J'_0(\underline{k}_{r02} R_e) - j \frac{\underline{Z}_s \underline{k}_{r02}}{Z_0 k_0} J_0(\underline{k}_{r02} R_e)}{N'_0(\underline{k}_{r02} R_e) - j \frac{\underline{Z}_s \underline{k}_{r02}}{Z_0 k_0} N_0(\underline{k}_{r02} R_e)} \quad (4.52)$$

En remplaçant $\underline{Z}_s$ par $(1+j)\varepsilon_s Z_0$ et en introduisant le nombre d'onde transverse complexe $\underline{k}_{r02}$ dans l'équation ci-dessus, on peut déterminer le coefficient $\underline{A}_{r02}$. En ne conservant que les termes dominants à l'ordre de perturbation le plus bas, la partie réelle de $\underline{A}_{r02}$ vaut $A'_{r02} = A_{r02}$, qui est le coefficient dans le cas d'un métal parfaitement conducteur lorsque $\varepsilon_s = 0$, et la partie imaginaire A''_{r02} est donnée par :

$$A''_{r02} = \varepsilon_s \frac{F}{G} \quad (4.53)$$

avec

$$F = N'_0(k_{r02} R_e) \left(J''_0(k_{r02} R_e) k''_{r02} R_e + \frac{k_{r02} c}{\omega_0} J_0(k_{r02} R_e) \right) - J'_0(k_{r02} R_e) \times \left(N''_0(k_{r02} R_e) k''_{r02} R_e + \frac{k_{r02} c}{\omega_0} N_0(k_{r02} R_e) \right) \quad (4.54a)$$

$$G = N_0'^2(k_{r02} R_e) \quad (4.54b)$$

où $J''_0(x) = d^2 J_0(x)/dx^2$ et $N''_0(x) = d^2 N_0(x)/dx^2$. Nous sommes maintenant en mesure de déterminer la phase radiale de la composante z du champ magnétique. Il suffit pour cela d'introduire $\underline{k}_{r02}$ et $\underline{A}_{r02}$ dans l'expression (4.26c) de $H_z(r, 0)$. En séparant cette expression en partie réelle et imaginaire, on trouve immédiatement la variation radiale, au 1^{er} ordre de perturbation, de la correction $\phi_z^1(r, 0)$ de la phase du champ :

$$\phi_z^1(r, 0) = \arctan \left\{ \frac{A''_{r02} N_0(k_{r02} r) + \left(J_1(k_{r02} r) + A_{r02} N_1(k_{r02} r) \right) k''_{r02} r}{J_0(k_{r02} r) + A_{r02} N_0(k_{r02} r)} \right\} \quad (4.55)$$

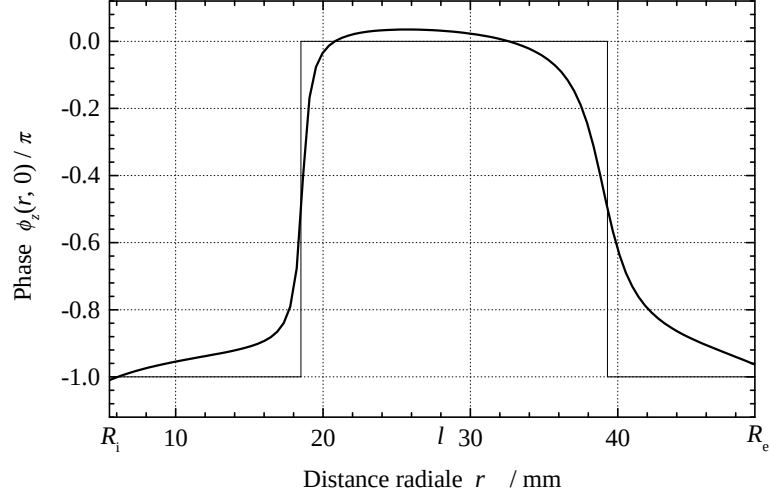


Fig. 4.9: Variation radiale de la phase $\phi_z(r, 0)$ dans le plan médian de la cavité. Pour bien visualiser sa variation, nous avons volontairement exagéré la valeur de ε_s . La courbe en trait fin représente la phase $\phi_z^0(r, 0)$ du champ non-perturbé dans le cas de parois métalliques parfaitement conductrices.

La dépendance radiale $\phi_z(r, 0)$ de la phase du champ magnétique longitudinal dans le plan médian de la cavité est alors donnée par :

$$\phi_z(r, 0) = \phi_z^0(r, 0) + \phi_z^1(r, 0) \quad (4.56)$$

où $\phi_z^0(r, 0)$ est la phase du champ non-perturbé pour des parois parfaitement conductrices ($\varepsilon_s = 0$) :

$$\phi_z^0(r, 0) = \begin{cases} -\pi & R_i \leq r < R' \\ 0 & R' \leq r < R'' \\ -\pi & R'' \leq r \leq R_e \end{cases}$$

$R' = 18.5$ mm et $R'' = 39.3$ mm sont les rayons pour lesquels $H_z(r, 0)$ s'annule la première fois, respectivement la deuxième. L'allure de la variation radiale de $\phi_z(r, 0)$ est représentée dans la Fig. 4.9. Pour bien visualiser sa variation, nous avons volontairement exagéré la valeur de ε_s . La courbe en trait fin correspond à la phase $\phi_z^0(r, 0)$ du champ non-perturbé. On observe qu'il y a un gradient de phase négatif à l'endroit où le jet atomique traverse le plan médian de la cavité ($r = l$). La variation de la phase sur la section des trous de passage de la cavité est reportée dans la Fig. 4.10. Les droites verticales en traitillé symbolisent les dimensions géométriques des trous de passage de la cavité. La courbe a été calculée pour du cuivre de conductivité

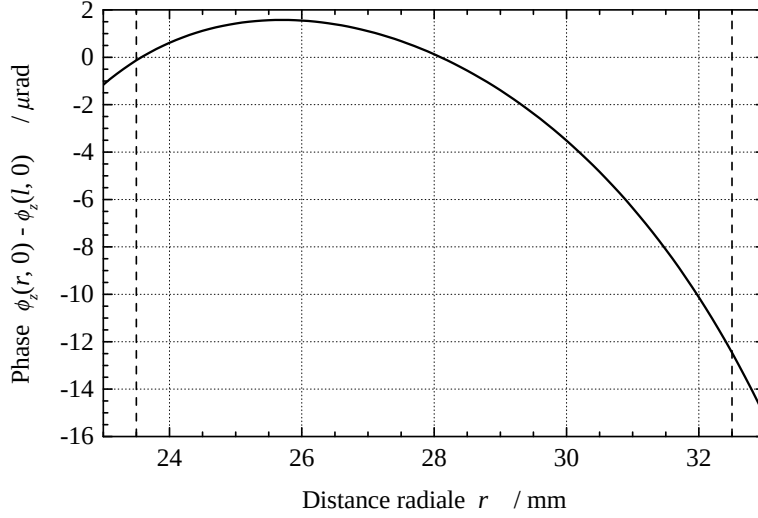


Fig. 4.10: Variation radiale de la phase $\phi_z(r, 0) - \phi_z(l, 0)$ autour des trous de passage dans le plan médian de la cavité. Les droites verticales en traitillé symbolisent les dimensions géométriques des trous de passage. La courbe a été calculée pour du cuivre et une fréquence correspondant à la fréquence de la transition d'horloge du césium. Le gradient de phase radial, à $r = l$, est de $\nabla_r \phi_z \simeq -1.3 \mu\text{rad}/\text{mm}$.

$\sigma = 5.98 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ et pour la pulsation ω_0 de la transition d'horloge du césium. Le paramètre de perturbation correspondant vaut $\varepsilon_s = 6.5 \cdot 10^{-5}$. Le gradient de phase radial à $r = l$ est, dans ce cas, de $\nabla_r \phi_z \simeq -1.3 \mu\text{rad}/\text{mm}$.

Nous utiliserons cette valeur dans la section 7.5 pour estimer grossièrement le déplacement relatif de la fréquence de résonance de la transition d'horloge due à la variation spatiale de la phase du champ magnétique d'interrogation. Remarquons qu'il n'est pas possible, sous les hypothèses que nous avons faites, d'annuler ce gradient de phase pour une cavité de dimensions finies.

4.2.5 Gradient de phase longitudinal

Comme nous avons déterminé la perturbation du nombre d'onde transverse k_{r02} dans la sous-section précédente pour le cas idéal supposé, il est aisé d'en déduire la variation longitudinale de la phase de la composante H_z du champ magnétique de la cavité dans ce cas. La variation longitudinale de cette phase donne lieu à un effet Doppler du 1^{er} ordre qui peut engendrer un déplacement de la fréquence de résonance de l'étalon. En fait, ce déplacement de fréquence devrait s'annuler, si la phase ne dépend pas de la position radiale, du fait que lors des deux traversées de la cavité par le jet atomique,

les vitesses longitudinales sont inversées. Ceci est vrai bien que le mouvement des atomes soit accéléré et même s'il existe une asymétrie de la phase par rapport au centre de la zone d'interaction, due par exemple à des propriétés électromagnétiques des surfaces internes des couvercles de la cavité qui sont différentes mais toutefois homogènes. En réalité, la phase longitudinale est couplée avec la position radiale, si bien que la dispersion des trajectoires atomiques dans le plan transverse induit quand même un déplacement de fréquence résiduel dû à l'effet Doppler du 1^{er} ordre. En effet, les atomes lors de la traversée de la deuxième zone d'interaction ne passeront pas en général à la même distance de l'axe du trou de passage que lors de la traversée de la première zone d'interaction. Le déplacement de fréquence résultant devrait être faible et nous ne l'évaluerons pas dans la suite de ce travail.

Nous nous contentons ici de déterminer la variation longitudinale de la phase engendrée par les hypothèses que nous avons faites dans la sous-section précédente. Nous pouvons calculer la perturbation correspondante du nombre d'onde longitudinal k_{z1} induite par la perturbation du nombre d'onde transverse k_{r02} avec la relation (4.4). Nous trouvons ainsi la constante de propagation longitudinale complexe $\underline{\gamma}_z$. A l'ordre de perturbation le plus bas, la fréquence de résonance de la cavité reste inchangée et la partie réelle de $\underline{\gamma}_z$ vaut $\gamma'_z = -\alpha_z$ où α_z est la constante d'atténuation qui est donnée par :

$$\alpha_z = \varepsilon_s \frac{k_{r02}}{k_{z1}} k''_{r02} \quad (4.57)$$

et la partie imaginaire vaut $\gamma''_z = k_{z1}$. Avec les valeurs des grandeurs déterminées dans la sous-section précédente, on obtient pour la constante d'atténuation une valeur de $\alpha_z \simeq 2.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$. La théorie des lignes de transmission nous permet d'écrire la dépendance longitudinale de la composante z du champ magnétique perturbé $\underline{H}_z$ sous la forme :

$$\underline{H}_z(r, z) = H_c \frac{J_0(\underline{k}_{r02} r) + \underline{A}_{r02} N_0(\underline{k}_{r02} r)}{J_0(\underline{k}_{r02} l) + \underline{A}_{r02} N_0(\underline{k}_{r02} l)} \cdot \frac{e^{-\underline{\gamma}_z |z|} + \underline{\Gamma}_H e^{\underline{\gamma}_z |z|}}{1 + \underline{\Gamma}_H} \quad (4.58)$$

où $\underline{\Gamma}_H$ est le coefficient de réflexion du champ magnétique sur les couvercles inférieur et supérieur de la cavité. Il s'exprime par :

$$\underline{\Gamma}_H = \frac{Z_0 - \underline{Z}_s}{Z_0 + \underline{Z}_s} \quad (4.59)$$

De l'expression (4.58) du champ perturbé, on en déduit facilement la variation longitudinale de la phase $\phi_z(l, z)$ de la composante H_z du champ magnétique de la cavité. Au 1^{er} ordre de perturbation et dans la limite $\alpha_z b/2 \ll 1$, on obtient :

$$\phi_z(l, z) \simeq -\arctan \{ \alpha_z z \tan(k_{z1} z) \} \quad (4.60)$$

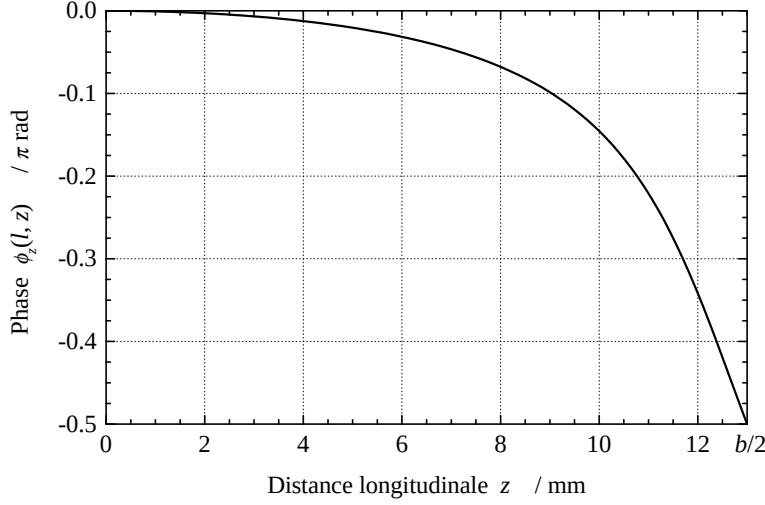


Fig. 4.11: Variation longitudinale de la phase $\phi_z(l, z)$ le long de l'axe des trous de passage de la cavité. La phase est représentée pour la moitié supérieure de la cavité et nous avons volontairement exagéré la valeur de ε_s pour mieux la visualiser. Le gradient de phase longitudinal au sommet de la cavité est de $\nabla_z \phi_z(l, b/2) \simeq -3.8 \text{ krad/mm}$.

La variation longitudinale de la phase $\phi_z(l, z)$ le long de l'axe des trous de passage de la cavité est représentée dans la Fig. 4.11 pour la moitié supérieure de la cavité. Conformément aux hypothèses que nous avons faites, la phase longitudinale de la composante H_z du champ magnétique est symétrique par rapport au centre de la zone d'interaction ($z = 0$) et varie quadratiquement autour du centre. Quoique pas très réaliste, puisque nous avons considéré une cavité idéalisée sans trou de passage dans les couvercles, nous donnons quand même l'expression du gradient de phase longitudinal $\nabla_z \phi_z$ au sommet et au bas de la cavité ($z = \pm b/2$) :

$$\nabla_z \phi_z = \mp \frac{2k_{z1}}{\alpha_z b} \quad (4.61)$$

Avec les valeurs déterminées précédemment, il vaut $\nabla_z \phi_z \simeq \mp 3.8 \text{ krad/mm}$.

Remarques :

Avec le modèle idéalisé de la cavité que nous avons considéré pour déterminer la variation spatiale de la phase de la composante z du champ magnétique, on peut écrire cette phase, au 1^{er} ordre de perturbation, simplement comme la somme des deux variations indépendantes que nous avons estimées :

$$\phi_z(r, z) = \phi_z(r, 0) + \phi_z(l, z) \quad (4.62)$$

On peut interpréter de manière générale la variation spatiale de la phase du champ magnétique H_z en termes de flux d'énergie. En effet, il a été montré [KVM96] que le gradient de phase spatial est relié à la partie réelle du vecteur de Poynting par la relation :

$$\text{Re}(\vec{S}) = -Z_0 |\vec{H}|^2 \frac{\vec{\nabla}\phi}{k_0} \quad (4.63)$$

Variation radiale de la phase :

Ainsi, on peut interpréter la variation radiale de la phase représentée dans la Fig. 4.9 comme due, d'une part, à un flux d'énergie radial positif qui va environ du centre de la zone d'interaction vers la paroi cylindrique extérieure (gradient de phase négatif), et d'autre part, à un flux d'énergie négatif du centre de la zone d'interaction vers la paroi cylindrique intérieure (gradient de phase positif). Ceci est conforme à l'effet que l'on attend de parois métalliques avec pertes, à savoir que l'énergie s'écoule de l'endroit où le champ magnétique est élevé vers les parois où elle est dissipée.

On voit alors que l'endroit où le gradient s'annule correspond au point où le flux d'énergie s'inverse. On remarque que ce point ne se situe pas à l'endroit où le champ magnétique est maximum ($r = l$), mais environ 2 mm plus au centre de la cavité. On en déduit ainsi que le champ électrique du mode perturbé, dont le champ magnétique H_z est donné par (4.58), ne s'annule plus sur l'axe des trous de passage de la cavité, mais environ 2 mm plus au centre puisque le champ magnétique à cet endroit n'est pas nul. Ceci n'est pas étonnant car la perturbation due à des parois imparfaitement conductrices, bien que faible, n'est pas négligeable là où le champ électrique s'annule. Par contre, la perturbation du champ magnétique H_z à cet endroit est négligeable car le champ y est élevé.

Variation longitudinale de la phase :

On peut faire la même observation pour la variation longitudinale de la phase en ce qui concerne les flux d'énergie. Ici, du fait de la symétrie de la phase, le point où le flux d'énergie s'inverse se situe dans le plan médian de la cavité ($z = 0$). Nous avons considéré une cavité idéalisée sans ouvertures de passage pour le jet atomique dans les couvercles inférieur et supérieur. La prise en compte de ces ouvertures devrait notablement diminuer la variation longitudinale de la phase comme cela a été montré dans le cas d'une cavité cylindrique [KM94]. Nous avons également négligé l'effet du couplage de la cavité avec la micro-onde par le guide d'onde de couplage. Cet effet

devrait engendrer une variation non plus quadratique de la phase autour du plan médian de la cavité mais plutôt linéaire [VD93].

Variation azimutale de la phase :

Dans le cas idéal que nous avons considéré, la phase du champ H_z ne varie pas azimutalement car il n'y a aucune dépendance azimutale du mode TE_{021} . Si l'on considère le couplage de la cavité avec l'extérieur, cela va introduire une dépendance azimutale des champs. Si la cavité est couplée asymétriquement (par un seul côté), il y aura un gradient de phase azimutal non-nul au centre des zones d'interaction mais qui sera identique pour chaque zone. En effet, dans ce cas il y a un flux d'énergie azimutal qui s'écoule depuis le couplage vers le point opposé de la cavité, donnant lieu à un gradient de phase azimutal négatif dans le sens positif et inversement. Si le couplage de la cavité est parfaitement symétrique (par deux endroits opposés), la phase va varier azimutalement quadratiquement autour de l'axe des trous de passage et le gradient de phase sera nul sur cet axe. En effet, vu la symétrie de la cavité, le flux d'énergie azimutal s'inverse dans ce cas sur l'axe des trous de passage.

4.2.6 Mesures micro-onde sur la cavité

Pour terminer cette section, nous présentons les quelques mesures micro-ondes que nous avons effectuées sur la cavité avant de la monter dans la fontaine continue. Ces mesures ont été effectuées sous vide pour se placer dans les conditions de fonctionnement de la cavité. L'ajustement fin de la fréquence de résonance de la cavité a été réalisé en diminuant la hauteur b de la cavité par polissage mécanique. Le coefficient de variation de la fréquence de résonance du mode TE_{021} avec la hauteur de la cavité est de $\partial f_{021}^{TE}/\partial z = -139 \text{ kHz}/\mu\text{m}$ autour de la hauteur nominale b . On a ainsi pu amener la fréquence de résonance à moins de 1MHz de sa valeur théorique. L'ajustement final de la fréquence de résonance de la cavité sur ν_0 est effectué par l'intermédiaire de la température. Le coefficient thermique de la cavité, mesuré sous vide, est de $\partial f_{021}^{TE}/\partial T = -140 \text{ kHz/K}$ autour de la température ambiante, une valeur qui est en bon accord avec une valeur estimée de $\partial f_{021}^{TE}/\partial T \simeq -152 \text{ kHz/K}$ basée sur le coefficient de dilatation linéaire du cuivre.

Nous avons mesuré une efficacité d'atténuation α_c des guides d'onde cylindriques sous la coupure (cf. Fig. 4.1) supérieure à 110 dB. Cette valeur est actuellement limitée par la technique de mesure utilisée. Pour comparaison, l'atténuation estimée du mode évanescent dominant est supérieure à 150 dB en négligeant la conductivité finie des parois. Nous avons vu dans la sous-

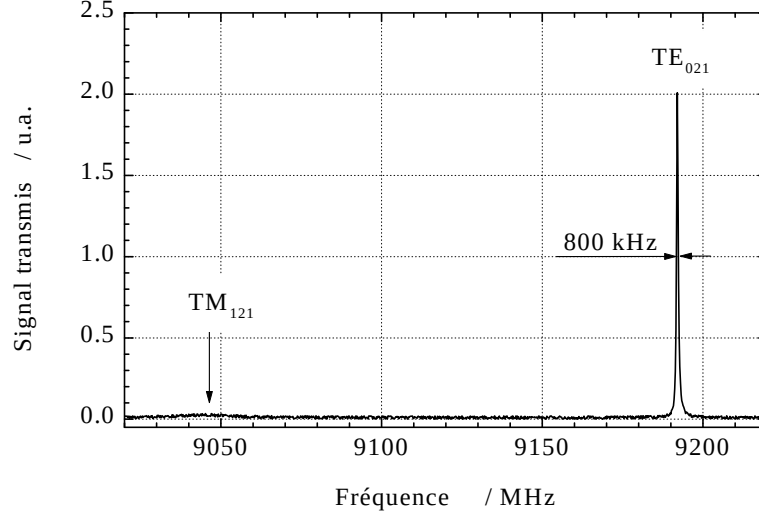


Fig. 4.12: Spectre mesuré en transmission de la cavité cylindrique coaxiale autour du mode TE_{021} . Le mode dégénéré TM_{121} est fortement atténué et déplacé d'environ 140 MHz vers les basses fréquences par rapport au mode TE_{021} . La largeur de la résonance du mode TE_{021} est de $\Delta\nu_{1/2}^{\text{TE}_{021}} = 800 \text{ kHz}$.

section 4.2.2, que le mode TM_{121} est dégénéré avec le mode utile TE_{021} . Pour atténuer ce mode et le déplacer, afin qu'il ne perturbe pas le mode TE_{021} , nous avons réalisé un filtre de mode. Il est composé d'une rainure coaxiale cylindrique étroite de longueur quart d'onde (choke) placée dans les deux couvercles inférieur et supérieur de la cavité à l'endroit où le champ magnétique du mode TE_{021} est nul. Ce type d'atténuateur empêche le champ électrique du mode TM_{121} de se propager puisque les conditions aux limites ainsi créées sont incompatibles avec ce mode. De plus, l'augmentation du volume de la cavité qui en résulte dans une région où le champ électrique de ce mode est élevé contribue à diminuer sa fréquence de résonance et ainsi permet de l'éloigner du mode TE_{021} . Ceci est confirmé par la mesure en transmission du spectre de la cavité autour de la fréquence de résonance du mode TE_{021} représenté dans la Fig. 4.12. On voit que le mode TM_{121} est fortement atténué et que sa fréquence de résonance est également diminuée d'environ 140 MHz par rapport à la fréquence de résonance du mode TE_{021} . La largeur de la résonance du mode TE_{021} est de $\Delta\nu_{1/2}^{\text{TE}_{021}} = 800 \text{ kHz}$, ce qui conduit à un facteur de qualité chargé de la cavité pour ce mode de $Q_L = 11\,500$.

Cette valeur est évidemment inférieure à celle du facteur de qualité non-chargé calculé dans la sous-section 4.2.3 ($Q_0 = 27\,457$). On constate que le couplage de la cavité n'est pas loin du couplage optimal pour lequel $Q_L = Q_0/2$ [VD93]. De la connaissance de ces deux facteurs de qualité, on peut

en déduire le facteur de qualité de couplage de la cavité Q_e pour le mode TE_{021} en supposant que la cavité est couplée asymétriquement (par un côté seulement) et qu'il n'y a pas d'autres sources de pertes :

$$Q_e = \frac{Q_0 Q_L}{Q_0 - Q_L} \simeq 19\,800 \quad (4.64)$$

Il en ressort que la puissance non-couplée à la cavité est d'environ 1.4 fois la puissance dissipée dans les parois.

Pour terminer, nous résumons dans le Tab. 4.2 les valeurs numériques des principales grandeurs que nous avons déterminées dans cette section.

4.3 Franges de Ramsey

Dans cette section, nous nous intéressons aux franges de Ramsey produites par l'interaction micro-onde des atomes de césium dans la fontaine continue. Plus particulièrement, notre attention se porte sur la frange centrale qui est à la base du principe de fonctionnement de l'étalon.

Nous faisons tout d'abord, dans la sous-section 4.3.1, une étude théorique détaillée des caractéristiques de la frange centrale obtenue avec la fontaine continue. A cette fin, nous dérivons dans un premier temps une formule approchée de la probabilité de transition pour un jet monocinétique, valable pour de faibles désaccords micro-onde (frange centrale) dans le cas d'une interrogation de Ramsey avec un champ magnétique oscillant dont l'amplitude varie sinusoidalement dans chaque zone d'interaction. C'est le cas, nous l'avons vu dans la section précédente, de la cavité cylindrique coaxiale utilisée dans la fontaine continue. Nous introduisons ensuite une distribution de temps de transit conformément aux résultats du chapitre précédent. Nous en déduisons ainsi une formule qui va nous permettre d'ajuster théoriquement les franges de Ramsey expérimentales mesurées sur la fontaine continue.

L'ajustement théorique de ces mesures est réalisé dans la sous-section 4.3.2. Afin de mieux reproduire les résultats expérimentaux, nous développons une formule de la probabilité de transition qui prend en compte une perte de population de l'état $|F = 4, m_F = 0\rangle$ due à l'effet du pompage optique de la lumière de fluorescence de la source sur le jet atomique dans la zone d'interaction. De l'ajustement des mesures expérimentales, nous obtenons des informations sur les temps de transit et d'interaction moyen du jet de la fontaine continue ainsi qu'une estimation de la température longitudinale du jet utile qui est plus fiable que celle réalisée dans le chapitre précédent à partir des mesures de temps de vol. Nous pouvons également estimer le taux de pompage optique de la lumière de fluorescence.

<i>Grandeur</i>	<i>Notation</i>	<i>Valeur</i>
<i>Mode TE₀₂₁ :</i>		
Hauteur de coupure	b_c	1.63 cm
Nombre d'onde transverse	k_{r02}	150.064 m ⁻¹
Nombre d'onde longitudinal	k_{z1}	120.830 m ⁻¹
Coefficient de la partie radiale $\mathcal{R}_m(r)$	A_{r02}	0.399
Rayon 1 ^{ère} annulation de H_z	R'	18.5 mm
Rayon 2 ^{ème} annulation de H_z	R''	39.3 mm
Rayon du point d'inflexion de H_r	R_{in}	26.3 mm
Coefficient de variation f_{021}^{TE} avec z	$\partial f_{021}^{TE}/\partial z$	-139 kHz/ μ m
Coefficient de variation f_{021}^{TE} avec T	$\partial f_{021}^{TE}/\partial T$	-140 kHz/K
Coefficient d'atténuation cutoff (mesuré)	$\alpha_{c,mes}$	> 110 dB
Coefficient d'atténuation cutoff (estimé)	α_c	> 150 dB
<i>Gradient de phase :</i>		
Conductivité du cuivre	σ	$5.98 \cdot 10^7$ S/m
Epaisseur de peau (à ν_0)	δ	0.6 μ m
Résistance de surface (à ν_0)	R_s	30 m Ω
Paramètre de perturbation	ε_s	$6.5 \cdot 10^{-5}$
Gradient radial (à $z = 0$)	$\nabla_r \phi_z$	-1.3 μ rad/mm
Constante d'atténuation longitudinale	α_z	$2.4 \cdot 10^{-3}$ m ⁻¹
Gradient longitudinal (à $z = \pm b/2$)	$\nabla_z \phi_z$	∓ 3.8 krad/mm
<i>Facteur de qualité :</i>		
Facteur de qualité non-chargé	Q_0	27 457
Facteur de qualité chargé	Q_L	11 500
Facteur de qualité de couplage	Q_e	19 800

Tab. 4.2: Valeur numérique des principales grandeurs physiques relatives à la cavité micro-onde coaxiale déterminées dans la section 4.2.

Enfin, pour clore ce chapitre, nous étudions dans la sous-section 4.3.3 le comportement particulier des oscillations de Rabi observées avec la fontaine continue sans la trappe à lumière. Pour essayer de reproduire théoriquement ce comportement, nous prenons en compte l'effet combiné du couplage des positions transverses des trajectoires atomiques avec la fréquence de Rabi et une perte de population de l'état $|F = 4, m_F = 0\rangle$.

4.3.1 Etude théorique de la frange centrale

Dans un étalon atomique à jet de césium, le signal mesuré à la sortie du résonateur est proportionnel à la probabilité que l'atome effectue la transition d'horloge après avoir traversé la cavité de Ramsey. Pour l'atome de césium, la transition d'horloge $|F = 3, m_F = 0\rangle \leftrightarrow |F = 4, m_F = 0\rangle$ est une transition entre deux sous-niveaux Zeeman hyperfins de l'état fondamental. La séparation en énergie de ces deux sous-niveaux est de $\Delta E = h\nu_0$, où h est la constante de Planck et ν_0 la fréquence de la transition d'horloge de l'atome de césium 133 (cf. annexe A). La radiation correspondante se situe dans le domaine des micro-ondes. La transition d'horloge est une transition dipolaire magnétique qui peut être excitée par un champ d'induction magnétique oscillant $\vec{B}_{\text{RF}}$ linéairement polarisé dont la direction de polarisation doit être parallèle à l'axe de quantification défini par le champ C. La composante du champ dans la direction de polarisation peut s'écrire de façon générale :

$$B_{\text{RF}}(t) = B_c g(t) \cos(\omega t + \phi) \quad (4.65)$$

où ω est la pulsation du champ d'induction magnétique et ϕ sa phase initiale. B_c est l'amplitude du champ et $g(t)$ caractérise son éventuelle dépendance temporelle. Dans le résonateur, les atomes sont soumis à un faible champ magnétique statique, appelé champ C, qui permet de séparer les niveaux d'énergie hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium par effet Zeeman. Dans le cas d'un champ quasi-résonnant ($\omega \simeq \omega_0$), on peut considérer l'atome de césium comme un système à deux niveaux pour la transition d'horloge. Si l'on suppose qu'il n'y a pas de relaxation des degrés de liberté atomiques internes dans le jet, l'interaction entre la radiation micro-onde et le système à deux niveaux est décrite par l'Hamiltonien semi-classique suivant :

$$\mathcal{H}(t) = H_0 + H(t) \quad (4.66)$$

où H_0 est l'Hamiltonien libre de l'atome :

$$H_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_z \quad (4.67)$$

et $H(t)$ l'Hamiltonien d'interaction :

$$H(t) = -\hbar\Omega_c g(t) \cos(\omega t + \phi) \sigma_x \quad (4.68)$$

où $\hbar$ est la constante de Planck réduite et σ_z, σ_x sont respectivement la 3^{ème} et la 1^{ère} matrice de Pauli. Ω_c est la pulsation de Rabi magnétique qui est définie par :

$$\hbar\Omega_c = \mu_B B_c \quad (4.69)$$

avec μ_B le magnéton de Bohr. Connaissant les conditions initiales du système à deux niveaux, l'évolution du système est gouvernée par l'équation suivante :

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} = \mathcal{H}(t) U \quad (4.70)$$

où $U = U(t, t_0)$ est l'opérateur d'évolution unitaire par lequel l'évolution de la fonction d'onde $\psi(t)$ est déterminée. Soit :

$$\psi(t) = U(t, t_0) \psi(t_0) \quad (4.71)$$

Si l'amplitude du champ est constante ($g(t) = \text{const.}$) durant la durée de l'interaction, la solution de l'équation (4.70) peut être calculée analytiquement de manière exacte et, par suite, la probabilité que l'atome effectue la transition après un temps τ . Dans le cas contraire, ceci n'est pas possible et il faut recourir à une intégration numérique de l'équation d'évolution (4.70). Pour une interrogation de Ramsey (deux champs magnétiques oscillants spatialement séparés) dont l'amplitude du champ magnétique est constante, et si l'inversion de population initiale est totale (niveau $|F = 3, m_F = 0\rangle$ uniquement peuplé), la formule exacte de la probabilité de transition pour un jet monocinétique est bien connue [Ram56, VA89]. Si par contre, l'amplitude du champ n'est pas constante mais varie durant l'interaction, en particulier pour un champ variant sinusoïdalement, on peut obtenir une formule approchée valable pour un champ quasi-résonnant (frange centrale) [VA89].

Pour les besoins d'évaluation métrologique de l'exactitude relative de fréquence, au niveau de 10^{-15} voir plus bas, des étalons atomiques primaires de nouvelle génération (fontaines atomiques, en particulier la fontaine continue), il peut être utile de disposer d'une formule analytique décrivant plus précisément la frange centrale dans le cas où l'amplitude du champ magnétique varie sinusoïdalement dans les zones d'interaction. En effet, l'évaluation de l'exactitude revient à déterminer des déplacements de fréquence qui demandent des intégrations numériques multiples si l'on ne dispose pas d'une relation analytique au départ, conduisant à des temps de calcul importants et à une estimation de l'incertitude imprécise.

Le problème du calcul analytique approché de l'évolution de l'atome sous l'action d'un champ magnétique variant sinusoïdalement a été traité en détail dans l'article de Bava *et al.* [BS92]. Nous reprenons ici les résultats établis dans cet article pour en déduire une formule explicite de la probabilité de transition, valable pour la frange centrale, qui est plus précise que celle donnée dans [VA89]. Cette relation pourra être utile pour une future évaluation métrologique précise de la fontaine continue.

Jet monocinétique

Nous rappelons tout d'abord brièvement, en utilisant les mêmes notations, le principe de la méthode utilisée par Bava *et al.* . Le profil de l'amplitude du champ magnétique est décrit par :

$$g(t) = \cos(2t/\tau) \quad -\pi/2 \leq 2t/\tau \leq \pi/2 \quad (4.72)$$

et zéro en dehors de cet intervalle⁴. B_c correspond alors à l'amplitude du champ au centre de la zone d'interaction, soit à l'amplitude maximum qui a été évaluée dans la sous-section 4.2.2. Pour des questions de convergence de la solution, une représentation d'interaction est utilisée par la transformation :

$$H_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} H(t) e^{-iH_0 t/\hbar} \quad (4.73)$$

En effectuant l'approximation du champ tournant (RWA) sur cet Hamiltonien, on peut alors montrer que la solution de l'équation d'évolution converge dans l'intervalle $[-\pi\tau/4, \pi\tau/4]$ si la condition $\Omega_c\tau \lesssim 2\pi$ est réalisée. Cette condition est remplie dans les étalons atomiques puisque généralement $\Omega_c\tau = \pi/2$. On introduit ensuite les paramètres sans dimensions suivant :

$$x = \frac{2t}{\tau} \quad (4.74a)$$

$$\vartheta = \frac{\Omega_0\tau}{2} \quad (4.74b)$$

$$\alpha = \frac{\Omega_c\tau}{4} \quad (4.74c)$$

⁴Nous considérons ici que le mouvement vertical des atomes du jet se fait à vitesse constante dans la zone d'interaction, c.-à-d. nous négligeons l'effet de l'accélération durant l'interaction micro-onde. On a dans ce cas une relation linéaire entre l'altitude et le temps, et le profil temporel du champ magnétique vu par les atomes lors de la traversée de la zone d'interaction est isomorphe au profil spatial du champ dans la cavité qui est bien de la forme (4.72).

où $\Omega_0 = \omega - \omega_0$ est le désaccord micro-onde entre la pulsation du champ et celle de l'atome de césium. Après élimination de la phase ϕ avec la transformation :

$$\tilde{H}(x) = e^{i(\phi/2)\sigma_z} H_{\text{I,RWA}}(x) e^{-i(\phi/2)\sigma_z} \quad (4.75)$$

on obtient l'équation d'évolution finale :

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{U}(x, x_i)}{\partial x} = \tilde{H}(x) \tilde{U}(x, x_i) \quad (4.76)$$

avec

$$\tilde{H}(x) = -\hbar\alpha \cos x \left(\cos(\vartheta x) \sigma_x + \sin(\vartheta x) \sigma_y \right) \quad (4.77)$$

où σ_y est la 2^{ème} matrice de Pauli. Les valeurs initiale x_i et finale x_f de x sont $-\pi/2$ et $\pi/2$ respectivement. Comme on ne peut pas trouver une solution analytique exacte de l'équation (4.76), on peut obtenir une solution approchée en utilisant la méthode du développement de Magnus. Dans cette méthode, on cherche une solution exponentielle du type :

$$\tilde{U}(x_f, x_i) = e^{\tilde{A}(x_f, x_i)} \quad (4.78)$$

où $\tilde{A}$ est un opérateur anti-Hermitien et $\tilde{A}(x_i, x_i) = 0$. $\tilde{A}$ est alors développé en série de termes anti-Hermitiens obtenus par une procédure itérative. Pour une fonction $g(x)$ paire, on peut mettre l'opérateur $\tilde{U}$ sous la forme :

$$\tilde{U}(x_f, x_i) = \begin{pmatrix} W^* & iS \\ iS & W \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

Bava *et al.* donne l'expression explicite des quatre premiers termes du développement de $\tilde{U}$ ainsi que la relation reliant W et S à ces termes. Comme les expressions de W et S sont relativement compliquées, un développement au 3^{ème} ordre en ϑ , valable donc pour de faibles désaccords Ω_0 , de la partie réelle et imaginaire de W ainsi que de S est également donné. Pour une zone d'interaction avec un profil de champ de la forme $g(t)$, l'opérateur d'évolution $U_{\text{I,RWA}}(-\pi/2, \pi/2)$ est représenté par une matrice de la forme :

$$U_{\text{I,RWA}}(-\pi/2, \pi/2) = \begin{pmatrix} W^* & iS e^{-i\phi} \\ iS e^{i\phi} & W \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

où ϕ est la phase du champ au centre de la zone d'interaction. Dans le cas d'une interrogation de Ramsey dont la séquence temporelle est schématisée dans la Fig. 4.13, avec deux zones de champ magnétique dont le profil est de la forme $g(t)$ et de temps d'interaction τ identiques séparées par une zone

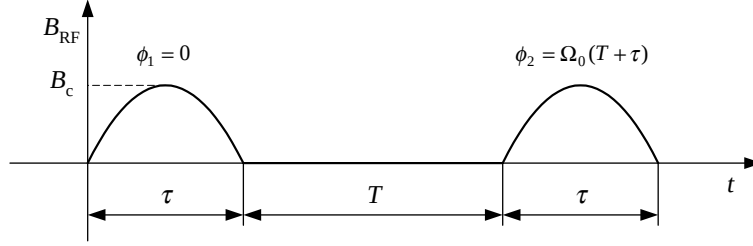


Fig. 4.13: Schéma de la séquence temporelle d'une interrogation du type Ramsey avec deux zones de champ magnétique spatialement séparées. τ représente la durée de chacune des deux interactions micro-onde et T est le temps de transit, sans champ magnétique, entre ces deux interactions. ϕ_1 et ϕ_2 sont les phases du champ au centre de la première, respectivement de la deuxième, zone d'interaction.

sans champ magnétique de temps de transit T , l'opérateur d'évolution total est le produit de deux matrices du type ci-dessus avec les phases :

$$\phi_1 = 0 \quad \text{et} \quad \phi_2 = \Omega_0(T + \tau) \quad (4.81)$$

où nous avons posé nulle la phase du champ dans la première zone d'interaction. La probabilité de transition totale $P(\Omega_0)$ est alors donnée par :

$$P(\Omega_0) = 4S^2|W|^2 \cos \left(\frac{1}{2} \Omega_0(T + \tau) - \beta \right) \quad (4.82)$$

où β est la phase de W .

Probabilité de transition :

Nous avons calculé cette probabilité avec les expressions pour W et S correspondant à la 4^{ème} itération de $\tilde{A}$ et développées au 2^{ème} ordre en ϑ . L'expression ainsi obtenue pour un jet monocinétique est la suivante :

$$P(\tau, T, \Omega_0) = \frac{1}{2} \left\{ \sin^2(\Omega_e \tau) + \xi(\Omega_e \tau) \Omega_0^2 \tau^2 + O(\Omega_0^4 \tau^4) \right\} \quad |\Omega_0| \lesssim 1/2T \\ \times \left\{ 1 + \cos \left(\Omega_0 \left[T + \eta(\Omega_e \tau) \tau + O(\Omega_0^2 \tau^2) \right] \right) \right\} \quad (4.83)$$

avec les coefficients :

$$\begin{aligned} \xi(\Omega_e \tau) = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\Omega_e \tau}{2} \sin(\Omega_e \tau / 2) & \left(1 - 2 \cos^2(\Omega_e \tau / 2) \right) \\ & \times \left(2q_4(\Omega_e \tau) \cos(\Omega_e \tau / 2) + \frac{\pi^2}{128} p_4^2(\Omega_e \tau) \Omega_e \tau \sin(\Omega_e \tau / 2) \right) \end{aligned} \quad (4.84a)$$

$$\eta(\Omega_e \tau) = 1 + \frac{1}{8} p_4(\Omega_e \tau) \Omega_e \tau \tan(\Omega_e \tau / 2) \quad (4.84b)$$

$$p_4(\Omega_e \tau) = 1 + \frac{\Omega_e^2 \tau^2}{64} \quad (4.84c)$$

$$q_4(\Omega_e \tau) = \frac{\pi^2}{8} - 1 + \frac{\Omega_e^2 \tau^2}{16} \left(\frac{32}{27} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{32} p_4^2(\Omega_e \tau) \right) \quad (4.84d)$$

où Ω_e est la pulsation de Rabi magnétique équivalente qui est reliée à la pulsation de Rabi (4.69) par :

$$\Omega_e = \frac{2}{\pi} \Omega_c \quad (4.85)$$

Le coefficient $\xi(\Omega_e \tau)$ dans (4.83) donne la correction au piédestal de Rabi. Il dépend évidemment de la puissance micro-onde puisque l'on sait que le piédestal de Rabi varie fortement avec cette dernière. Nous pouvons encore définir le temps de transit effectif $T^*(\Omega_e)$ qui est donné par :

$$T^*(\Omega_e) = T + \eta(\Omega_e \tau) \tau \quad (4.86)$$

Puissances micro-onde optimales :

Pour une puissance micro-onde optimale d'ordre n , la fréquence de Rabi correspondante est définie par $\Omega_{e,n} \tau = n\pi/2$ avec $n = 1, 3, 5, \dots$. Le coefficient $\xi(n\pi/2) = 0$ ainsi qu'on pouvait s'y attendre puisque le piédestal de Rabi est plat autour de la frange centrale lorsque la puissance micro-onde est optimale. La formule (4.83) se réduit donc à :

$$P_{\text{opt}}(\tau, T, \Omega_0) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + O(\Omega_0^4 \tau^4) + \cos \left(\Omega_0 \left[T + \eta(n\pi/2) \tau + O(\Omega_0^2 \tau^2) \right] \right) \right\} \quad (4.87)$$

A cet ordre d'approximation, on remarque qu'elle ne diffère de celle correspondante à un champ magnétique dont l'amplitude est constante [VA89] uniquement par le temps de transit effectif T_n^* correspondant à la $n^{\text{ème}}$ puissance micro-onde optimale :

$$T_n^* = T + \eta(n\pi/2) \tau \quad (4.88)$$

qui est toujours supérieur à T . Dans le cas de la 1^{ère} puissance micro-onde optimale, soit $n = 1$, le coefficient $\eta(\pi/2)$ vaut :

$$\eta(\pi/2) = 1 + \frac{\pi}{16} \left(1 + \frac{\pi^2}{256} \right) \simeq 1.2039 \quad (4.89)$$

Ce résultat a déjà été mis en évidence par Thomann [Tho90] dans une approche quelque peu différente. Comme l'on mentionné Bava *et al.*, l'expression ci-dessus est en très bon accord avec le résultat cité dans [Tho90]. En effet, pour un champ dont le profil varie sinusoïdalement, $\eta(\pi/2)$ est à comparer avec le coefficient $\sqrt{2} J_0(\pi/4) = 1.2044$ qui est effectivement très proche.

Largeur de la frange centrale :

Pour la 1^{ère} puissance optimale, la pleine largeur à mi-hauteur (FWHM) de la frange centrale $\Delta\nu_{1/2}$ est alors donnée par :

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{1}{2T_1^*} \quad (4.90)$$

Puisque l'on a $T_1^* > T$, la frange centrale est en réalité plus étroite qu'elle ne le serait avec des zones d'interaction infiniment courtes⁵. Ceci vient du fait qu'avec des zones d'interaction de durée finie, le dipole atomique croît progressivement pendant la durée de l'interaction pour atteindre sa valeur finale à la fin de l'interaction. Il peut donc déjà accumuler un déphasage avec le champ dans la zone d'interaction, ce qu'il ne pourrait pas faire si cette dernière était de durée infiniment courte. Evidemment, le déphasage accumulé pendant cette période dépend du profil du champ (pour un champ de profil constant, $\eta(\pi/2) = 4/\pi$) ainsi que de la puissance micro-onde (η dépend de Ω_e).

Avec les valeurs typiques de temps de transit et de temps d'interaction de la fontaine continue déterminées dans le chapitre précédent, soit $T \simeq 0.481$ s et $\tau \simeq 10.8$ ms, la largeur à mi-hauteur de la frange centrale vaut $\Delta\nu_{1/2} \simeq 1.01$ Hz.

Pour des puissances optimales supérieures ($n > 1$), les valeurs du coefficient $\eta(n\pi/2)$ diffèrent notablement de celles obtenues par la méthode décrite dans [Tho90] qui donne dans ce cas le coefficient suivant :

$$\eta_{\text{Th}}(n\pi/2) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{2} |J_0(n\pi/4)| \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots \quad (4.91)$$

⁵Comme nous ne considérons dans les chapitres suivants que le cas de la 1^{ère} puissance optimale, nous désignons à partir d'ici le temps de transit effectif T_1^* pour la 1^{ère} puissance optimale par T^* pour simplifier la notation.

En effet, la valeur absolue de $\eta(n\pi/2) - 1$ est une fonction croissante de n alors qu'elle devrait être décroissante car le temps de transit effectif diminue lorsque la puissance optimale augmente. De plus, $\eta(n\pi/2) \rightarrow \pm \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$ alors qu'il devrait tendre vers zéro puisque $T^* = T$ dans ce cas du fait que le déphasage accumulé par le dipole atomique se moyenne à zéro dans chaque zone d'interaction. Par contre, ce comportement est correctement décrit par la relation (4.91). Le désaccord avec cette relation est cependant attendu car le développement de la probabilité de transition (4.83) est correct tant que la puissance micro-onde est de l'ordre de la 1^{ère} puissance optimale ou inférieure évidemment. Au-delà, on sort du domaine de validité de la formule (4.83) et notamment de l'expression (4.84b) du coefficient η . Par conséquent, les valeurs données par cette expression n'ont plus grande signification lorsque $n \gtrsim 3$.

Il est également intéressant de comparer la dépendance de la largeur de la frange centrale avec la puissance micro-onde fournie par la relation (4.84b) avec celle prédite à partir de [Tho90]. Ceci pour une puissance micro-onde comprise entre 0 et $2\Omega_{e,1}$, afin de rester dans le domaine de validité de (4.84b). La largeur de la frange centrale est donc donnée par (4.90) avec l'expression (4.84b) pour le coefficient η en fonction de la puissance micro-onde, et par la relation suivante pour celui livré par la méthode décrite dans [Tho90] :

$$\eta_{\text{Th}}(\Omega_e\tau) = 2 \frac{\sin(\Omega_e\tau/2)}{\sin(\Omega_e\tau)} J_0(\Omega_e\tau/2) \quad (4.92)$$

La variation correspondante de $\Delta\nu_{1/2}$ avec Ω_e est représentée sur la Fig. 4.14. La courbe en traitillé est obtenue avec l'expression (4.84b) pour le coefficient $\eta(\Omega_e\tau)$ et celle en trait continu fin avec le relation (4.92). Ces courbes ont été calculées pour $T = 0.5$ s et $\tau = 10.8$ ms. L'allure générale de ces courbes montre que la largeur de la frange centrale diminue continûment d'une valeur maximale à la limite des faibles puissances $\Delta\nu_{1/2}(0) = 1/2(T + \tau)$ à une largeur nulle lorsque la puissance tend vers $2\Omega_{e,1}$. On a, dans ce cas limite, un pulse π dans chaque zone d'interaction et la hauteur de la frange centrale tend également vers zéro. L'allure de cette variation est donc identique, comme on pouvait s'y attendre, à celle correspondant à un champ magnétique constant dans la zone d'interaction ainsi qu'il est montré dans [Dud96]. On observe surtout que la concordance entre les deux courbes est remarquablement parfaite, il n'y a pratiquement pas de différence, ce qui confirme la validité de la formule (4.83).

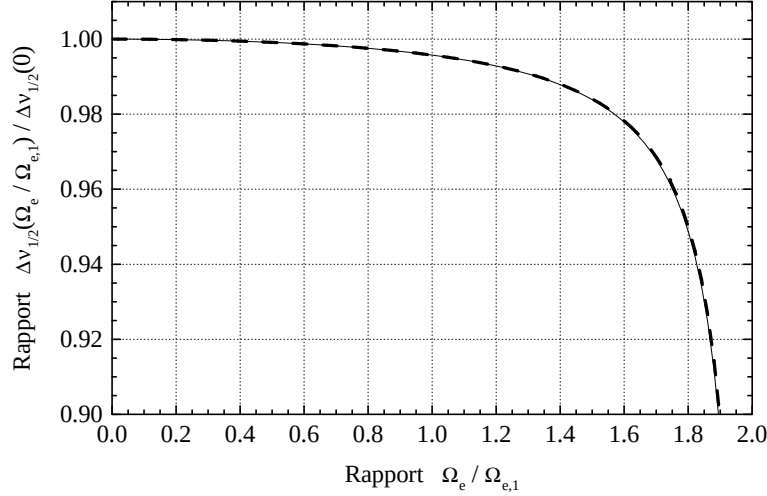


Fig. 4.14: Pleine largeur à mi-hauteur $\Delta\nu_{1/2}$ de la frange centrale en fonction de la puissance micro-onde Ω_e . $\Delta\nu_{1/2}$ est rapportée à la largeur à puissance nulle $\Delta\nu_{1/2}(0) = 1/2(T + \tau)$ et Ω_e à la 1^{ère} puissance optimale $\Omega_{e,1}$. La courbe en traitillé a été calculée avec l'expression (4.84b) pour le coefficient $\eta(\Omega_e\tau)$ et celle en trait continu fin avec la relation (4.92) d'après la méthode décrite dans [Tho90]. Les valeurs utilisées sont $T = 0.5$ s $\tau = 10.8$ ms.

Jet non-monocinétique

Etudions maintenant la frange centrale plus particulièrement dans le cas de la fontaine continue où le jet atomique n'est pas monocinétique, mais peut être décrit par une distribution gaussienne de temps de transit. Nous avons montré en effet dans la sous-section 3.4.4 que si le jet à la sortie de la source avait une distribution gaussienne de vitesse longitudinale, la distribution de temps de transit dans la cavité cylindrique coaxiale pouvait être décrite, en bonne approximation, par une distribution gaussienne normalisée de densité de probabilité :

$$\rho(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} T_{\text{rms}}} e^{-(T-\bar{T})^2/2T_{\text{rms}}^2} \quad (4.93)$$

où $\bar{T}$ est le temps de transit moyen et T_{rms} est le temps de transit quadratique moyen qui est relié à la vitesse longitudinale quadratique moyenne effective du jet $v_{l_{\text{rms}}}^{\text{eff}}$ par :

$$T_{\text{rms}} = T'_0 v_{l_{\text{rms}}}^{\text{eff}} \quad (4.94)$$

Nous avons également montré que la distribution de temps d'interaction $\rho(\tau)$ correspondante pouvait être décrite de manière satisfaisante par la même

distribution (4.93) avec la correspondance suivante entre τ et T :

$$\tau(T) = \bar{\tau} + k_\tau (T - \bar{T}) \quad (4.95)$$

Probabilité de transition :

On peut donc moyenner la probabilité de transition (4.83) sur la distribution (4.93) pour obtenir la probabilité de transition $P(\Omega_0)$ pour un jet non-monocinétique :

$$P(\Omega_0) = \int_0^{+\infty} \rho(T) P(\tau(T), T, \Omega_0) dT \quad (4.96)$$

En conservant la variation du coefficient $\xi(\Omega_e \tau)$ au 2^{ème} ordre avec τ et au 1^{er} ordre pour le coefficient $\eta(\Omega_e \tau)$, on obtient l'expression suivante pour $|\Omega_0| \lesssim \Delta\nu_{1/2}$:

$$P(\Omega_0) = \frac{1}{2} \left\{ A(\Omega_0) + e^{-\frac{1}{2} \Omega_0^2 \tilde{T}_{\text{rms}}^2} \left(B(\Omega_0) \cos(\Omega_0 \bar{T}^*) - C(\Omega_0) \sin(\Omega_0 \bar{T}^*) \right) \right\} \quad (4.97)$$

avec :

$$A(\Omega_0) = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-2 \Omega_e^2 \tau_{\text{rms}}^2} \cos(2 \Omega_e \bar{\tau}) \right) + \left\{ \xi(\Omega_e \bar{\tau}) + \frac{\tau_{\text{rms}}^2}{\bar{\tau}^2} \left(\xi(\Omega_e \bar{\tau}) + 2 \Omega_e \bar{\tau} \xi'(\Omega_e \bar{\tau}) + \frac{1}{2} \Omega_e^2 \bar{\tau}^2 \xi''(\Omega_e \bar{\tau}) \right) \right\} \Omega_0^2 \bar{\tau}^2 \quad (4.98a)$$

$$B(\Omega_0) = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-2 \Omega_e^2 \tau_{\text{rms}}^2} \cos(2 \Omega_e \bar{\tau}) \cosh(2 \Omega_e \tau_{\text{rms}} \Omega_0 \tilde{T}_{\text{rms}}) \right) + \left\{ \xi(\Omega_e \bar{\tau}) + \frac{\tau_{\text{rms}}^2}{\bar{\tau}^2} \left(1 - \Omega_0^2 \tilde{T}_{\text{rms}}^2 \right) \left(\xi(\Omega_e \bar{\tau}) + 2 \Omega_e \bar{\tau} \xi'(\Omega_e \bar{\tau}) + \frac{1}{2} \Omega_e^2 \bar{\tau}^2 \xi''(\Omega_e \bar{\tau}) \right) \right\} \Omega_0^2 \bar{\tau}^2 \quad (4.98b)$$

$$C(\Omega_0) = \frac{1}{2} e^{-2 \Omega_e^2 \tau_{\text{rms}}^2} \sin(2 \Omega_e \bar{\tau}) \sinh(2 \Omega_e \tau_{\text{rms}} \Omega_0 \tilde{T}_{\text{rms}}) + \frac{\tau_{\text{rms}}}{\bar{\tau}} \times \left(2 \xi(\Omega_e \bar{\tau}) + \Omega_e \bar{\tau} \xi'(\Omega_e \bar{\tau}) \right) \Omega_0 \tilde{T}_{\text{rms}} \Omega_0^2 \bar{\tau}^2 \quad (4.98c)$$

$$\tilde{T}_{\text{rms}} = T_{\text{rms}} + \left(\eta(\Omega_e \bar{\tau}) + \Omega_e \bar{\tau} \eta'(\Omega_e \bar{\tau}) \right) \tau_{\text{rms}} \quad (4.98d)$$

$$\bar{T}^* = \bar{T} + \eta(\Omega_e \bar{\tau}) \bar{\tau} \quad (4.98e)$$

où $\tilde{T}_{\text{rms}}$ est le temps de transit quadratique moyen effectif, $\bar{T}^*$ est le temps de transit effectif moyen et nous avons posé $\xi'(x) = d\xi(x)/dx$, $\eta'(x) = d\eta(x)/dx$ et $\xi''(x) = d^2\xi(x)/dx^2$.

1^{ère} puissance optimale :

Avec un jet non-monocinétique, la condition $\Omega_{e,1}\bar{\tau} = \pi/2$, qui définit la fréquence de Rabi $\Omega_{e,1}$ de la 1^{ère} puissance optimale, ne peut plus être vérifiée par tous les atomes puisqu'il y a une distribution de temps d'interaction. Voyons dans ce cas quelle est la nouvelle puissance optimale. Le sommet de la frange centrale est donné d'après (4.97) par :

$$P(0) = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-2\Omega_e^2 \tau_{\text{rms}}^2} \cos(2\Omega_e \bar{\tau}) \right) \quad (4.99)$$

La puissance optimale est définie comme la fréquence de Rabi optimale qui maximise $P(0)$, soit :

$$\frac{\partial P(0)}{\partial \Omega_e} = 0 \quad (4.100)$$

On obtient donc l'équation suivante pour déterminer $\Omega_{e,1}$:

$$2\Omega_{e,1} \tau_{\text{rms}}^2 \cos(2\Omega_{e,1} \bar{\tau}) + \bar{\tau} e^{-2\Omega_{e,1}^2 \tau_{\text{rms}}^2} \sin(2\Omega_{e,1} \bar{\tau}) = 0 \quad (4.101)$$

Cherchons la nouvelle fréquence de Rabi correspondant à la 1^{ère} puissance optimale sous la forme :

$$\Omega_{e,1} = \Omega_{e,1}^0 + \Delta\Omega_{e,1} \quad (4.102)$$

où $\Omega_{e,1}^0 = \pi/2\bar{\tau}$ est la 1^{ère} fréquence de Rabi optimale pour un jet monocinétique et $\Delta\Omega_{e,1}$ la correction due à la température longitudinale du jet. On trouve alors pour la correction relative de la 1^{ère} fréquence de Rabi optimale pour un jet monocinétique :

$$\frac{\Delta\Omega_{e,1}}{\Omega_{e,1}^0} \simeq -\frac{\tau_{\text{rms}}^2}{\bar{\tau}^2} = -0.31 \% \quad (4.103)$$

pour le cas de la fontaine continue. La différence avec la puissance optimale pour un jet monocinétique est très faible. Même si la précision avec laquelle on peut ajuster la puissance micro-onde permettait de distinguer entre les deux valeurs, il ne serait pas possible de le vérifier car nous ne pouvons pas nous mettre expérimentalement dans la configuration d'un jet monocinétique.

Probabilité de transition :

Pour la fréquence de Rabi correspondant à la 1^{ère} puissance optimale $\Omega_{e,1}$, la probabilité de transition (4.97) peut s'écrire au 2^{ème} ordre⁶ en $\tau_{\text{rms}}/\bar{\tau}$:

$$P_{\text{opt}}(\Omega_0) \simeq P_{\text{opt}}^T(\Omega_0) - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\tau_{\text{rms}}}{\bar{\tau}} \zeta(\Omega_0) - \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\tau_{\text{rms}}^2}{\bar{\tau}^2} \chi(\Omega_0) \quad |\Omega_0| \lesssim \Delta\nu_{1/2} \quad (4.104)$$

où $P_{\text{opt}}^T(\Omega_0)$ est la probabilité de transition en négligeant la distribution de temps d'interaction qui est donnée par⁷ :

$$P_{\text{opt}}^T(\Omega_0) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + e^{-\frac{1}{2} \Omega_0^2 T_{\text{rms}}^2} \cos(\Omega_0 \bar{T}^*) \right\} \quad (4.105)$$

où

$$\begin{aligned} \chi(\Omega_0) = & (1 - D \Omega_0^2 \bar{\tau}^2) \cos^2(\Omega_0 \bar{T}^*/2) - \frac{1}{2} \left(\frac{T_{\text{rms}}^2}{\bar{\tau}^2} - \frac{1}{2} G^2 \right) \Omega_0^2 \bar{\tau}^2 \cos(\Omega_0 \bar{T}^*) \\ & + \frac{1}{2} \cdot \frac{T_{\text{rms}}}{\bar{\tau}} \cdot \frac{\tau_{\text{rms}}}{\bar{\tau}} \Omega_0 \bar{\tau} \sin(\Omega_0 \bar{T}^*) \end{aligned} \quad (4.106a)$$

$$\zeta(\Omega_0) = \frac{1}{2} G \frac{T_{\text{rms}}}{\bar{\tau}} \Omega_0^2 \bar{\tau}^2 \cos(\Omega_0 \bar{T}^*) \quad (4.106b)$$

avec les coefficients :

$$D = \frac{2}{\pi} \left(\xi'(\pi/2) + \frac{\pi}{4} \xi''(\pi/2) \right) = 0.159 \quad (4.107a)$$

$$G = \frac{2}{\pi} \left(\eta(\pi/2) + \frac{\pi}{2} \eta'(\pi/2) \right) = 1.11 \quad (4.107b)$$

Notons que le piédestal de Rabi autour de la frange centrale n'est plus plat, comme il l'était pour un jet monocinétique, mais il est très légèrement incurvé vers le haut. Ceci se voit en prenant la moyenne de la probabilité (4.104) sur le temps de transit effectif moyen $\bar{T}^*$. On obtient ainsi pour le piédestal de Rabi :

$$P_{\text{Rabi}}(\Omega_0) \simeq \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\tau_{\text{rms}}^2}{\bar{\tau}^2} + \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\tau_{\text{rms}}^2}{\bar{\tau}^2} D \Omega_0^2 \bar{\tau}^2 \right\} \quad |\Omega_0| \lesssim \Delta\nu_{1/2} \quad (4.108)$$

⁶En parlant de "2^{ème} ordre en $\tau_{\text{rms}}/\bar{\tau}$ ", nous nous plaçons dans le cas des ordres de grandeurs des paramètres de la fontaine continue.

⁷Comme nous ne considérons dans les chapitres suivants que le cas de la 1^{ère} puissance micro-onde optimale, et afin de simplifier la notation, nous désignons à partir d'ici par $\bar{T}^*$ le temps de transit effectif moyen donné par (4.98e) pour la 1^{ère} puissance micro-onde optimale.

La courbure du piédestal de Rabi autour de la frange centrale est vraiment très faible à la puissance optimale.

Sommet de la frange centrale :

Comme la condition qui définit la puissance optimale ne peut pas être vérifiée par tous les atomes, il s'ensuit que la probabilité de transition pour la 1^{ère} puissance optimale au sommet de la frange centrale $P_{\text{opt}}(0)$ doit être < 1 . D'après l'équation (4.104) en posant $\Omega_0 = 0$, on trouve pour la diminution relative du sommet de la frange centrale due à un jet non-monocinétique l'expression suivante :

$$\frac{\Delta P_{\text{opt}}(0)}{P_{\text{opt}}(\bar{\tau}, \bar{T}, 0)} \simeq -\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\tau_{\text{rms}}^2}{\bar{\tau}^2} = -0.78 \% \quad (4.109)$$

pour le cas de la fontaine continue. Remarquons qu'à cet ordre d'approximation, la valeur de la diminution relative est identique, que la puissance optimale soit celle correspondant à un jet monocinétique ou non.

Largeur de la frange centrale :

Quel est l'effet de la température longitudinale du jet en ce qui concerne la largeur de la frange centrale pour la 1^{ère} puissance micro-onde ? Pour le déterminer, calculons d'abord la hauteur du bas de la 1^{ère} frange. Le désaccord $\Omega_{0,1}$ correspondant est défini par la condition :

$$\frac{\partial P_{\text{opt}}(\Omega_{0,1})}{\partial \Omega_0} = 0 \quad \text{avec} \quad 0 < \Omega_{0,1} < 2\pi/\bar{T}^* \quad (4.110)$$

Cherchons à nouveau $\Omega_{0,1}$ sous la forme :

$$\Omega_{0,1} = \Omega_{0,1}^0 + \Delta\Omega_{0,1} \quad (4.111)$$

où $\Omega_{0,1}^0 = \pi/\bar{T}^*$ est le désaccord correspondant au bas de la 1^{ère} frange pour un jet monocinétique et $\Delta\Omega_{0,1}$ la correction due à la température longitudinale non-nulle du jet. En introduisant (4.111) dans (4.110), on obtient à l'ordre le plus bas en $\tilde{T}_{\text{rms}}/\bar{T}^*$:

$$\frac{\Delta\Omega_{0,1}}{\Omega_{0,1}^0} \simeq -\frac{\tilde{T}_{\text{rms}}^2}{\bar{T}^{*2}} \quad (4.112)$$

La hauteur du bas de la 1^{ère} frange vaut alors :

$$P_{\text{opt}}(\Omega_{0,1}) \simeq \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\tilde{T}_{\text{rms}}^2}{\bar{T}^{*2}} \quad (4.113)$$

Le désaccord à mi-hauteur $\Omega_{0,1/2}$ de la frange centrale est défini par l'équation :

$$P_{\text{opt}}(\Omega_{0,1}) + \frac{1}{2} \left(P_{\text{opt}}(0) - P_{\text{opt}}(\Omega_{0,1}) \right) \simeq P_{\text{opt}}(\Omega_{0,1/2}) \quad (4.114)$$

Posons encore une fois :

$$\Omega_{0,1/2} = \Omega_{0,1/2}^0 + \Delta\Omega_{0,1/2} \quad (4.115)$$

où $\Omega_{0,1/2}^0 = \pi/2\bar{T}^*$ est le désaccord à mi-hauteur de la frange centrale dans le cas d'un jet monocinétique et $\Delta\Omega_{0,1/2}$ la correction due à la température longitudinale du jet. Introduisons (4.115) dans (4.114), et avec (4.113) et (4.97), nous obtenons l'expression suivante, en ne gardant que les termes dominants, pour la correction relative à la largeur de la frange centrale due à la température longitudinale non-nulle du jet :

$$\frac{\Delta\Omega_{0,1/2}}{\Omega_{0,1/2}^0} = \frac{\delta(\Delta\nu_{1/2})}{\Delta\nu_{1/2}} \simeq -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\tilde{T}_{\text{rms}}^2}{\bar{T}^{*2}} = -0.33 \% \quad (4.116)$$

pour le cas de la fontaine continue. On constate donc que la température longitudinale non-nulle du jet diminue la largeur de la frange centrale⁸. Notons que l'effet de la distribution de temps d'interaction sur cette diminution est négligeable.

Remarquons également que les corrections que nous venons de calculer sont toutes au 2^{ème} ordre des rapports $\tau_{\text{rms}}/\bar{\tau}$ et $\tilde{T}_{\text{rms}}/\bar{T}^*$ ou de leur produit. Ceci est dû au fait que les distributions de temps d'interaction, respectivement de temps de transit, que nous avons considérées sont symétriques par rapport à $\bar{\tau}$, respectivement à $\bar{T}$.

4.3.2 Franges de Ramsey expérimentales et ajustements théoriques

Voyons maintenant si les franges de Ramsey mesurées correspondent bien à la théorie. Nous avons enregistré expérimentalement les franges de Ramsey obtenues sur la fontaine continue avec refroidissement 2D transverse du jet pour la transition d'horloge $|F = 3, m_F = 0\rangle \Leftrightarrow |F = 4, m_F = 0\rangle$. Un enregistrement complet de cette transition, avec le piédestal de Rabi, est présenté dans la Fig. 4.15 alors que la Fig. 4.16 représente les franges de Ramsey uniquement. Ces figures amènent quelques commentaires.

⁸Cette diminution de la largeur de la frange centrale est négligeable pour les buts poursuivis dans ce travail. C'est pourquoi, pour la suite, nous désignons par $\Delta\nu_{1/2} = 1/2\bar{T}^*$ la pleine largeur à mi-hauteur de la frange centrale pour un jet non-monocinétique et pour la 1^{ère} puissance micro-onde optimale.

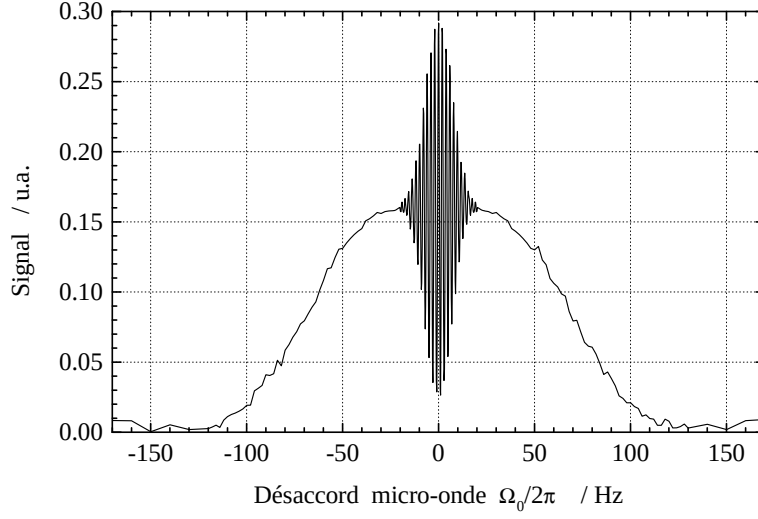


Fig. 4.15: Enregistrement de la transition d'horloge complète $|F = 3, m_F = 0\rangle \Leftrightarrow |F = 4, m_F = 0\rangle$. Elle a été mesurée sur la fontaine continue dans la configuration avec refroidissement transverse 2D du jet, mais sans la trappe à lumière rotative.

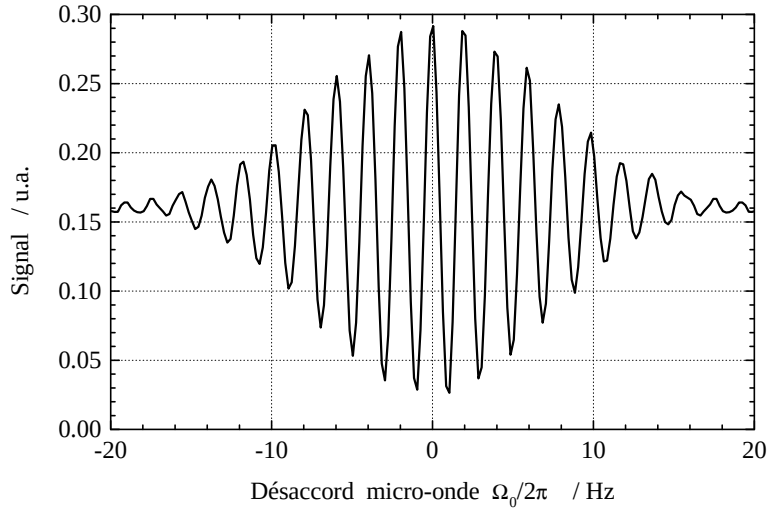


Fig. 4.16: Franges de Ramsey de la transition d'horloge $|F = 3, m_F = 0\rangle \Leftrightarrow |F = 4, m_F = 0\rangle$. Elles ont été mesurées sur la fontaine continue dans la configuration avec refroidissement transverse 2D du jet, mais sans la trappe à lumière rotative.

Tout d'abord, nous observons nettement l'effet de la température longitudinale du jet sur la décroissance de l'enveloppe des franges de Ramsey. En effet, nous pouvons compter ~ 10 franges à partir de la frange centrale avant que celles-ci ne disparaissent, dû à l'interférence destructive des franges de chaque classe de vitesse des atomes du jet. Ceci est particulier à la fontaine continue. Dans les fontaines pulsées, les boules d'atomes froids ont une température résiduelle beaucoup plus basse, ce qui permet de distinguer un nombre nettement plus élevé de franges (typiquement on observe des franges sur tout le piédestal de Rabi, soit ~ 35 franges à partir de la frange centrale).

Ensuite, on remarque que le contraste de l'enveloppe des franges n'est pas maximum mais est notablement réduit ($\sim 90\%$). Ceci ne provient pas de l'effet de la température longitudinale non-nulle du jet car, nous l'avons vu dans la sous-section précédente, elle n'engendre qu'une faible diminution du sommet de la frange centrale. De plus, le contraste de l'enveloppe des franges reste toujours à 100% puisque la hauteur du piédestal de Rabi à désaccord nul est toujours égal à la moitié du sommet de la frange centrale. La raison est donc à rechercher ailleurs. Une cause possible de cette diminution de contraste pourrait être la perte de population de l'état $|F = 4, m_F = 0\rangle$ après la première zone d'interaction, due à la lumière de fluorescence de la source du jet continu d'atomes froids. Pour vérifier cette hypothèse, et afin de pouvoir reproduire correctement les franges de Ramsey expérimentales par la théorie, nous avons calculé la probabilité de transition en tenant compte d'une perte de population de l'état $|F = 4, m_F = 0\rangle$ après la première zone d'interaction.

Effet d'une perte de population de l'état $|F = 4, m_F = 0\rangle$

L'effet d'une perte de cohérence atomique ou de population induite par de la lumière a déjà été observée dans une fontaine atomique. Featonby *et al.* [FWS⁺98] ont étudié expérimentalement et théoriquement cet effet dans une fontaine atomique pulsée.

Mis à part un déplacement des franges de Ramsey toujours présent, ils ont observé une diminution du contraste des franges de Ramsey dans le cas d'une perte de cohérence micro-onde entre les deux zones d'interaction. Cette perte de cohérence a été provoquée par un pulse de lumière, linéairement polarisée à la fréquence de la lumière de fluorescence, interagissant avec la boule d'atomes au sommet de la trajectoire parabolique. Ils ont aussi considéré le cas d'une perte de population de l'état excité entre les deux zones d'interaction engendrée par une interaction des atomes avec de la lumière diffusée à la même fréquence. L'expérience a montré également une diminution du contraste des franges de Ramsey combinée avec une diminution du piédestal

de Rabi.

C'est précisément cet effet qui pourrait être responsable de la perte de contraste des franges de Ramsey mesurées sur la fontaine continue. Elle serait provoquée par l'interaction du jet atomique avec la lumière diffusée par la source d'atomes froids, principalement après la première zone d'interaction de la cavité micro-onde. Cette interaction provoquerait un pompage Zeeman des atomes de l'état $|F = 4, m_F = 0\rangle$ vers les états excités $|F' = 5, m_F = \pm 1\rangle$ par de la lumière polarisée σ^+ et σ^- .

Nous avons essayé de modéliser cet effet sur la probabilité de transition calculée dans la sous-section précédente. Bien que le pompage optique commence avant la première zone d'interaction micro-onde, nous supposons pour simplifier que ce dernier a lieu seulement à partir de la sortie de la première zone d'interaction. Dans ce cas, l'évolution de la population de l'état $|F = 4, m_F = 0\rangle$ sous l'action du pompage optique peut être décrite par la décroissance exponentielle suivante :

$$p_4(\tau + t) \simeq p_4(\tau) e^{-W_{45'} t} \quad t \geq \tau \quad (4.117)$$

où $W_{45'}$ est le taux d'absorption de la transition $|F = 4, m_F = 0\rangle \Leftrightarrow |F' = 5, m_F = \pm 1\rangle$ et $p_4(\tau)$ la population de l'état $|F = 4, m_F = 0\rangle$ à la sortie de la première zone d'interaction. La demi-différence de population w est alors donnée par :

$$w(\tau + t) = \frac{1}{2} \left(p_4(\tau + t) - p_3(\tau) \right) \simeq \frac{1}{2} \left(p_4(\tau) e^{-W_{45'} t} - p_3(\tau) \right) \quad (4.118)$$

avec $p_3(\tau)$ la population de l'état $|F = 3, m_F = 0\rangle$ après la première interaction micro-onde. Exprimons $w(\tau + t)$ en fonction de la demi-différence de population à la sortie de la première zone d'interaction $w(\tau)$ en introduisant :

$$p_3(\tau) = \frac{1}{2} - w(\tau) \quad \text{et} \quad p_4(\tau) = w(\tau) + \frac{1}{2} \quad (4.119)$$

dans l'équation (4.118). Il vient alors :

$$w(\tau + t) \simeq \frac{1}{2} w(\tau) \left(1 + e^{-W_{45'} t} \right) - \frac{1}{4} \left(1 - e^{-W_{45'} t} \right) \quad (4.120)$$

Déterminons aussi l'évolution des cohérences micro-ondes u et v (cf. annexe E). Puisque seul le niveau supérieur du système à deux niveaux se relaxe, les cohérences micro-ondes se relaxent avec un taux $\gamma_{\text{rel}} = W_{45'}/2$. On peut donc écrire :

$$u(\tau + t) \simeq u(\tau) e^{-W_{45'} t/2} \quad (4.121a)$$

$$v(\tau + t) \simeq v(\tau) e^{-W_{45'} t/2} \quad (4.121b)$$

Nous ne pouvons pas calculer précisément le taux d'absorption $W_{45'}$ car on ne connaît pas suffisamment bien l'intensité de la lumière de fluorescence ainsi que son profil spatial, après la première zone d'interaction. De plus, la durée d'interaction Δt de la lumière avec le jet atomique est difficile à estimer du fait qu'elle a lieu principalement le long de la partie montante de la trajectoire parabolique dans un volume qui est mal défini. Nous introduisons, par conséquent, le paramètre β_0 qui mesure la fraction de la population restante de l'état $|F = 4, m_F = 0\rangle$ après interaction du jet atomique avec la lumière de fluorescence. Il est donc défini par :

$$\beta_0 = e^{-W_{45'} \Delta t} \quad (4.122)$$

On peut maintenant écrire l'expression des composantes du vecteur de Bloch après l'interaction des atomes avec la lumière de fluorescence sous la forme :

$$u(\tau + \Delta t) \simeq \sqrt{\beta_0} u(\tau) \quad (4.123a)$$

$$v(\tau + \Delta t) \simeq \sqrt{\beta_0} v(\tau) \quad (4.123b)$$

$$w(\tau + \Delta t) \simeq \frac{1}{2} (1 + \beta_0) w(\tau) - \frac{1}{4} (1 - \beta_0) \quad (4.123c)$$

Par conséquent, dans le formalisme des équations de Bloch⁹, l'effet sur l'évolution du vecteur de Bloch $\vec{b}$ d'une perte de population de l'état $|F = 4, m_F = 0\rangle$ après la première zone d'interaction peut être modélisée de la manière suivante :

$$\vec{b}_f = \mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{R}_2 \cdot (\mathbf{R}_{\beta_0} \cdot \mathbf{R}_1 \cdot \vec{b}_i - \mathbf{S}_{\beta_0}) \quad (4.124)$$

avec les matrices décrivant la perte de population :

$$\mathbf{R}_{\beta_0} = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_0} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta_0} & 0 \\ 0 & 0 & (1 + \beta_0)/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_{\beta_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1 - \beta_0)/4 \end{pmatrix} \quad (4.125)$$

$\vec{b}_i$ est le vecteur de Bloch initial avant l'entrée dans la première zone d'interaction micro-onde et $\vec{b}_f$ le vecteur final à la sortie de la deuxième. $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ et $\mathbf{R}_3$ sont les matrices d'évolution décrivant respectivement la première interaction micro-onde, la zone de précession libre et la deuxième interaction micro-onde.

Nous avons vu dans la sous-section 4.3.1 que, pour un jet monocinétique, la formule de la probabilité de transition pour un champ magnétique de profil sinusoïdal (pour un désaccord faible et une puissance micro-onde proche de

⁹Nous présentons brièvement les équations de Bloch magnétiques dans l'annexe E.

la 1^{ère} puissance optimale) diffère de celle correspondant à un champ magnétique constant par la fréquence de Rabi équivalente Ω_e , le temps de transit effectif T^* et la correction $\xi(\Omega_e\tau)$ du piédestal de Rabi. Nous pouvons ainsi utiliser le formalisme des équations de Bloch pour un champ constant afin de déduire la probabilité de transition dans le cas d'une perte de population de l'état $|F = 4, m_F = 0\rangle$. Ensuite, pour obtenir la probabilité de transition pour un champ sinusoïdal, il suffit d'introduire la fréquence de Rabi équivalente, le temps de transit effectif et la correction du piédestal de Rabi dans la formule obtenue.

En procédant de cette manière avec l'équation (4.124) et les matrices $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ et $\mathbf{R}_3$ données dans l'annexe E, l'équation (E.12) de cette dernière nous permet de calculer la probabilité de transition. Nous obtenons ainsi l'expression suivante pour un jet monocinétique :

$$P_{\beta_0}(\tau, T, \Omega_0) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (1 - \beta_0) (1 - \cos(\Omega_e\tau)) + \left(\frac{1}{2} (1 + \beta_0) - \sqrt{\beta_0} \right) \times \left(\sin^2(\Omega_e\tau) + \xi(\Omega_e\tau) \Omega_0^2 \tau^2 \right) \right\} + \sqrt{\beta_0} P_1(\tau, T, \Omega_0) \quad (4.126)$$

où $P_1(\tau, T, \Omega_0) = P(\tau, T, \Omega_0)$ est la probabilité de transition sans perte de population ($\beta_0 = 1$) donnée par (4.83). Pour la 1^{ère} puissance optimale ($\Omega_e\tau = \pi/2$), la probabilité se réduit à :

$$P_{\beta_0}^{\text{opt}}(\tau, T, \Omega_0) = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\beta_0} \cos(\Omega_0 T^*) \right) \quad (4.127)$$

On constate donc sur cette équation que $\sqrt{\beta_0}$ correspond au contraste de l'enveloppe des franges. Afin d'ajuster directement le paramètre du modèle en fonction du contraste des franges de Ramsey mesurées, posons $\xi_0 = \sqrt{\beta_0}$. La probabilité de transition pour un jet monocinétique s'écrit alors avec ce nouveau paramètre dans l'hypothèse d'une perte de contraste relativement petite ($1 - \xi_0 \ll 1$) :

$$P_{\xi_0}(\tau, T, \Omega_0) = \frac{1}{2} \left\{ (1 - \xi_0) (1 - \cos(\Omega_e\tau)) \right\} + \xi_0 P_1(\tau, T, \Omega_0) \quad (4.128)$$

Dans le cas qui nous intéresse d'un jet non-monocinétique avec distribution de temps de transit et d'interaction, la probabilité de transition est finalement donnée par l'expression suivante :

$$P_{\xi_0}(\Omega_0) = \frac{1}{2} \left\{ (1 - \xi_0) \left(1 - e^{-\frac{1}{2} \Omega_e^2 \tau_{\text{rms}}^2} \cos(\Omega_e \bar{\tau}) \right) \right\} + \xi_0 P_1(\Omega_0) \quad (4.129)$$

où $P_1(\Omega_0) = P(\Omega_0)$ est la probabilité de transition pour un jet non-monocinétique sans perte de population ($\xi_0 = 1$) donnée par (4.97).

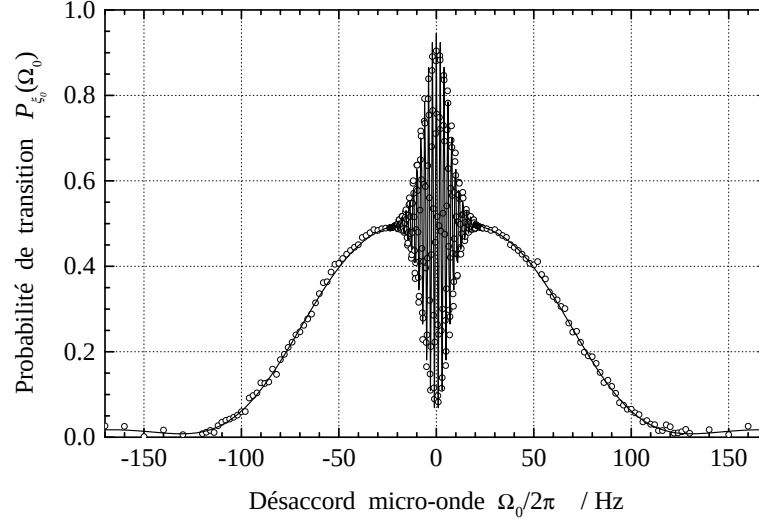


Fig. 4.17: Ajustement théorique de la transition d'horloge complète $|F = 3, m_F = 0\rangle \Leftrightarrow |F = 4, m_F = 0\rangle$ mesurée sur la fontaine continue. L'ajustement est effectué avec une simulation numérique de la probabilité de transition. Les cercles représentent les points de mesure et la courbe est le résultat de la simulation.

Ajustement théorique de la transition d'horloge complète

Nous avons réalisé un ajustement théorique de la transition d'horloge $|F = 3, m_F = 0\rangle \Leftrightarrow |F = 4, m_F = 0\rangle$ complète, avec le piédestal de Rabi, mesurée sur la fontaine continue (Fig. 4.15). Pour cela, nous avons simulé la probabilité de transition en résolvant numériquement, avec une méthode du type Runge-Kutta, les équations de Bloch (E.1) pour un champ magnétique dont le profil est sinusoïdal. Nous prenons en compte dans la simulation numérique une distribution gaussienne de temps de transit et de temps d'interaction conformément aux résultats du chapitre 3. Nous avons également introduit le modèle de dépopulation développé, à savoir les équations (4.123) avec le paramètre ξ_0 , dans le calcul numérique des composantes du vecteur de Bloch. Cet ajustement nous permet de déterminer principalement la valeur du temps d'interaction moyen $\bar{\tau}$ d'après la largeur du piédestal de Rabi ainsi que la puissance micro-onde Ω_e d'après la forme de ce piédestal.

Le résultat de cet ajustement est représenté dans la Fig. 4.17. Les cercles représentent les points de mesure et la courbe est le résultat de la simulation numérique de la probabilité de transition. La concordance entre les mesures et la simulation est très bonne. De cet ajustement, nous déduisons une valeur de $\bar{\tau} = 10.7$ ms pour le temps d'interaction moyen et une puissance micro-onde $\Omega_e \bar{\tau} = \pi/2$ correspondant à la 1^{ère} puissance optimale. De la valeur de

ce temps d'interaction moyen, nous pouvons estimer la largeur à mi-hauteur du piédestal de Rabi $\Delta\nu_{1/2\text{Rabi}}$. Elle est donnée par la relation suivante pour un champ magnétique dont le profil est sinusoïdal [VA89] :

$$\Delta\nu_{1/2\text{Rabi}} = \frac{9.56}{2\pi\bar{\tau}} \simeq 142.2 \text{ Hz} \quad (4.130)$$

Une mesure directe sur le graphique donne, aux incertitudes près, une valeur de $\Delta\nu_{1/2\text{Rabi}} \simeq 140 \text{ Hz}$ en bon accord avec la valeur ci-dessus. Nous ne pouvons pas déterminer avec cet ajustement la valeur de la largeur de la distribution de temps d'interaction τ_{rms} . En effet, comme cette valeur est petite, que τ_{rms} soit fixé à son ordre de grandeur attendu ($\sim 0.4 \text{ ms}$) où à zéro n'a pratiquement pas d'influence sur le piédestal de Rabi. Quant aux autres paramètres, nous pouvons mieux les estimer en ajustant la probabilité de transition (4.129) sur les franges de Ramsey.

Ajustement théorique des franges de Ramsey

Des franges de Ramsey mesurées sur la fontaine continue (Fig. 4.15), nous avons effectué un ajustement théorique avec la formule (4.129) de la probabilité de transition qui prend en compte une perte de population de l'état $|F = 4, m_F = 0\rangle$ après la première interaction micro-onde. Comme le nombre de franges visibles est petit, dû à la température longitudinale du jet, le désaccord des dernières franges visibles est relativement faible. Ceci nous permet donc d'utiliser la formule (4.129) dans un domaine où sa validité est bonne. Nous avons aussi constaté que la distribution de temps d'interaction supposée n'avait pratiquement pas d'influence sur les franges de Ramsey calculées avec (4.129). Nous pouvons par conséquent poser $\tau_{\text{rms}} = 0$ dans l'équation (4.129) sans modifier le résultat de l'ajustement. Nous conservons toutefois la dépendance avec τ_{rms} dans l'argument des exponentielles. En posant encore $\Omega_e\bar{\tau} = \pi/2$ dans cette équation, puisque de l'ajustement précédent on a déduit que la puissance micro-onde correspondait à la 1^{ère} puissance optimale, la probabilité de transition se réduit à l'expression simple suivante :

$$P_{\xi_0}^{\text{opt}}(\Omega_0) = \frac{1}{2} \left(1 + \xi_0 e^{-\frac{1}{2} \Omega_0^2 \tilde{T}_{\text{rms}}^2} \cos(\Omega_0 \bar{T}^*) \right) \quad (4.131)$$

L'ajustement de la courbe théorique, calculée avec l'équation ci-dessus, sur les franges expérimentales est représenté dans la Fig. 4.18. Les cercles représentent les points de mesure et la courbe est le résultat de l'ajustement théorique. On constate que l'on arrive bien à reproduire les mesures par la courbe théorique. Toutefois, on remarque que pour $|\Omega_0| \gtrsim 15 \text{ Hz}$, la courbe

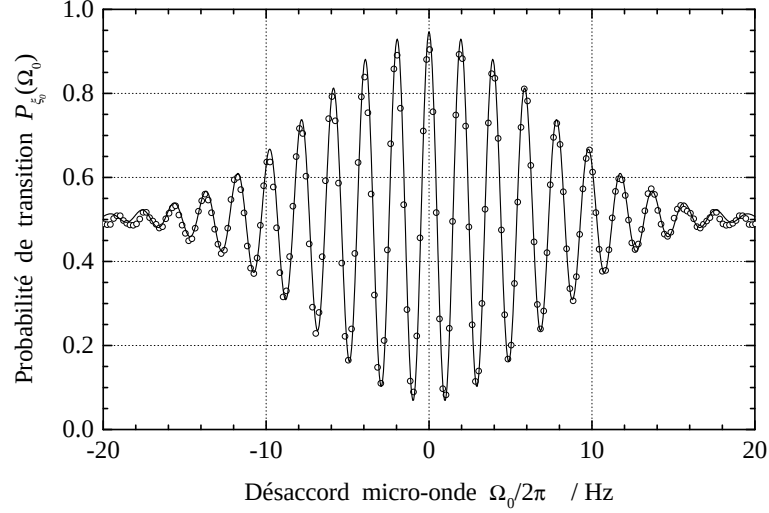


Fig. 4.18: Ajustement théorique des franges de Ramsey de la transition d'horloge $|F = 3, m_F = 0\rangle \leftrightarrow |F = 4, m_F = 0\rangle$ mesurées sur la fontaine continue. Les cercles représentent les points de mesure et la courbe est calculée avec la formule (4.131) de la probabilité de transition.

théorique commence à se situer légèrement au-dessus des franges mesurées. Ceci est attendu car la relation simplifiée (4.131) ne prend pas en compte l'effet du piédestal de Rabi qui commence à se manifester pour de tels désaccords. Nous verrons plus loin que les franges calculées numériquement, à partir des équations de Bloch, reproduisent bien ce léger écart.

De cet ajustement, nous pouvons en déduire tout d'abord le contraste de l'enveloppe des franges. Nous obtenons un contraste de $\xi_0 = 0.89$ ce qui correspond à une population de l'état $|F = 4, m_F = 0\rangle$ avant la deuxième interaction micro-onde de $\beta_0 = \xi_0^2 = 0.79$. Ainsi, on perd environ 20% de la population de l'état $|F = 4, m_F = 0\rangle$ par pompage Zeeman par la lumière de fluorescence de la source.

L'ajustement fournit également une valeur du temps de transit effectif moyen de $\bar{T}^* = 0.5103$ s, ce qui correspond à une largeur à mi-hauteur de la frange centrale de $\Delta\nu_{1/2} = 0.9797$ Hz. Avec la valeur du temps d'interaction moyen déterminée précédemment ($\bar{\tau} = 10.7$ ms), on arrive à un temps de transit moyen de $\bar{T} = 0.4975$ s. De cette valeur, on peut en déduire, au moyen de la relation (3.27), la vitesse longitudinale moyenne $\bar{v}_l$ du jet après refroidissement transverse. Le calcul donne $\bar{v}_l = 3.74$ m/s, ce qui correspond à une vitesse de lancement moyenne du jet au centre de la source de $\bar{v}_L = 3.87$ m/s. Les franges ont été mesurées pour une différence de fréquence des faisceaux de refroidissement montant et descendant de $\Delta f = 3.24$ MHz, par

rapport à la fréquence des faisceaux horizontaux, conduisant à une vitesse longitudinale moyenne d'entraînement théorique de la mélasse mouvante de $\bar{v}_{\text{MM}}^{\text{th}} = 3.90 \text{ m/s} > \bar{v}_{\text{L}}$. Cette différence de vitesse indiquerait qu'il existe un "glissement" entre la vitesse de défilement théorique de la mélasse mouvante et la vitesse de lancement des atomes du jet.

La valeur livrée par l'ajustement en ce qui concerne le temps de transit quadratique moyen effectif est de $\tilde{T}_{\text{rms}} \simeq 23.0 \text{ ms}$. Connaissant le rapport probable ($k_{\tau_0} = 0.028$, déterminé dans le chapitre précédent) entre le temps d'interaction quadratique moyen τ_{rms} et le temps de transit quadratique moyen T_{rms} , nous pouvons les déterminer à partir de la valeur de $\tilde{T}_{\text{rms}}$. Nous obtenons ainsi $T_{\text{rms}} \simeq 22.3 \text{ ms}$ et $\tau_{\text{rms}} \simeq 0.6 \text{ ms}$. Nous pouvons alors estimer la température longitudinale effective du jet d'après la relation (3.160). On trouve de cette manière une valeur de $T_l^{\text{eff}} \simeq 75 \mu\text{K}$ qui est quelque peu supérieure à la température déduite des mesures de temps de vol ($T_l \simeq 58 \mu\text{K}$) dans le chapitre précédent. Au niveau de la source, cela correspondrait à une température longitudinale de l'ordre de $T_l \simeq 100 \mu\text{K}$ contre $T_l \simeq 75 \mu\text{K}$ évalué lors des mesures de temps de vol. Cette différence n'est pas étonnante pour les raisons suivantes. Les mesures de temps de vol ont été effectuées sans le refroidissement transverse 2D du jet, or on sait que ce dernier réchauffe longitudinalement le jet continu. De plus, les conditions dans la source (champ magnétique, réglages des faisceaux lasers, etc.) ne sont vraisemblablement plus les mêmes que lors des mesures de temps de vol puisque l'on a ajouté la cavité micro-onde et les blindages depuis. Ceci a probablement aussi une influence sur la température du jet. Si ces conditions n'avaient pas changé, on pourrait en déduire que le refroidissement transverse réchauffe longitudinalement le jet de l'ordre de $\Delta T_l \simeq 25 \mu\text{K}$. Cette valeur paraît relativement faible comparée à l'estimation ($\Delta T_l \simeq 100 \mu\text{K}$) faite dans [Ber00].

Comme nous l'avons mentionné, la formule (4.131) ne prend pas en compte le piédestal de Rabi dans la probabilité de transition. L'effet du piédestal de Rabi est d'incurver très légèrement vers le bas la valeur moyenne des franges de Ramsey qui, sinon, serait constante. Ceci se voit clairement sur la Fig. 4.19 où nous avons reporté les franges de Ramsey calculées avec la formule simplifiée (4.131) (courbe en trait continu) et celles calculées numériquement à partir des équations de Bloch magnétiques pour un champ dont le profil est sinusoïdal (courbe en traitillé). On observe une très faible discordance entre les franges pour des désaccords $|\Omega_0| \gtrsim 15 \text{ Hz}$. Comme attendu, les franges calculées avec les équations de Bloch reproduisent mieux les franges de Ramsey expérimentales. Toutefois, l'écart constaté ne remet pas en cause les résultats de l'ajustement réalisé avec la formule (4.131). Ceci d'autant plus, si l'on considère la simplification apportée par le fait de disposer d'une relation ana-

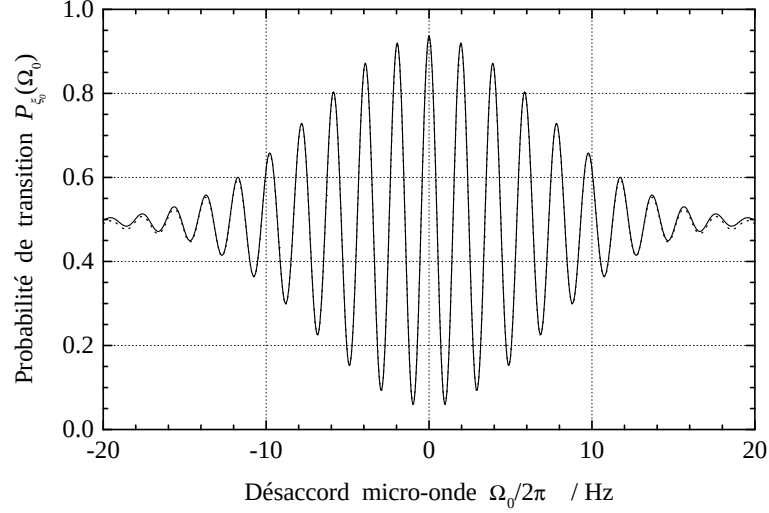


Fig. 4.19: Comparaison des franges de Ramsey calculées avec la formule simplifiée (4.131) (courbe en trait continu) avec celles calculées numériquement à partir des équations de Bloch magnétiques (courbe en traitillé). Ces deux courbes se superposent presque parfaitement, on observe seulement une très faible discordance entre les franges pour des désaccords $|\Omega_0| \gtrsim 15$ Hz.

lytique pour l’ajustement théorique des mesures par rapport à un ajustement à partir d’une simulation numérique.

4.3.3 Oscillations de Rabi

Nous allons nous intéresser, pour terminer ce chapitre, aux oscillations de Rabi obtenues avec la fontaine continue dans la configuration sans la trappe à lumière. Nous avons mesuré les oscillations de Rabi du sommet ainsi que du bas de la frange centrale en fonction de la puissance micro-onde dans la cavité. Le résultat de ces mesures est reporté dans les Fig. 4.20 et 4.21.

$\Omega_{e,1}^{\text{inp}}$ est la 1^{ère} pulsation de Rabi optimale pour un jet non-ponctuel et non-monocinétique. Nous remarquons premièrement que les oscillations du sommet de la frange centrale s’atténuent avec la puissance micro-onde. Ceci est dû au fait que le jet possède une certaine température longitudinale qui induit une distribution des temps d’interaction. Cette dernière peut aussi être vue comme une distribution de puissance micro-onde (fréquence de Rabi), ce qui engendre une décroissance des oscillations de Rabi. Nous observons également que ces oscillations décroissent de manière irrégulière. En effet, la décroissance du sommet de ces oscillations semble régulière, alors que celle du bas ne l’est pas. Il apparaît que l’amplitude des oscillations pour des

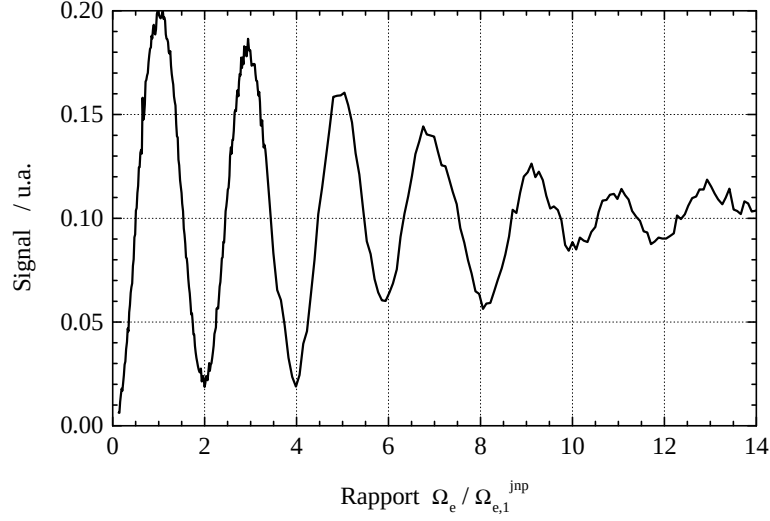


Fig. 4.20: Oscillations de Rabi du sommet de la frange centrale en fonction de la puissance micro-onde pour la transition d'horloge $|F = 3, m_F = 0\rangle \leftrightarrow |F = 4, m_F = 0\rangle$. Elles ont été mesurées sur la fontaine continue dans la configuration avec refroidissement transverse 2D du jet, mais sans la trappe à lumière rotative.

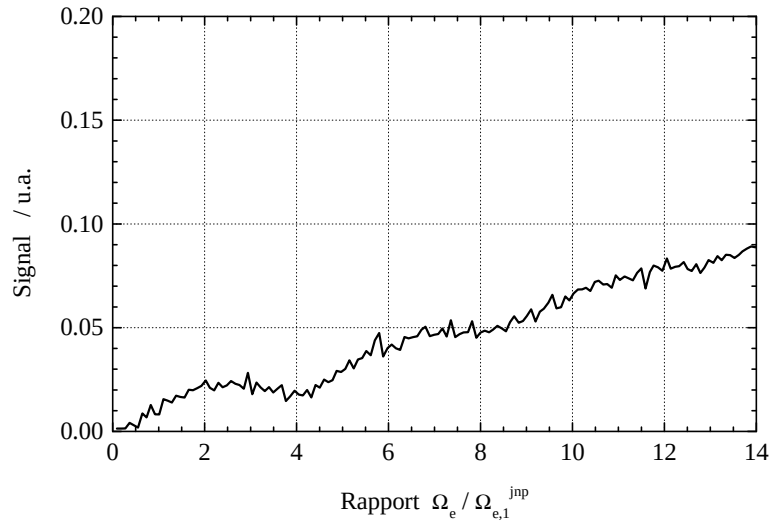


Fig. 4.21: Oscillations de Rabi du bas de la frange centrale en fonction de la puissance micro-onde pour la transition d'horloge $|F = 3, m_F = 0\rangle \leftrightarrow |F = 4, m_F = 0\rangle$. Elles ont été mesurées sur la fontaine continue dans la configuration avec refroidissement transverse 2D du jet, mais sans la trappe à lumière rotative.

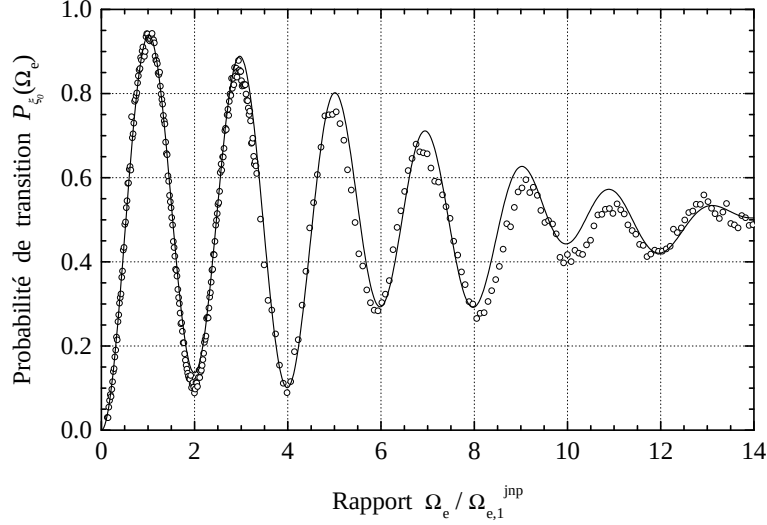


Fig. 4.22: Comparaison des oscillations de Rabi du sommet de la frange centrale en fonction de la puissance micro-onde. La courbe est calculée avec l'équation (4.132) pour $\tau_{\text{rms}} = 0.6 \text{ ms}$ et $\xi_0 = 0.89$. Les cercles représentent les points de mesure.

multiples impairs du double de la puissance optimale est atténuée tandis que celle correspondant à des multiples pairs est renforcée. Ce phénomène pourrait être engendré par la perte de population de l'état $|F = 4, m_F = 0\rangle$ qui, comme on l'a vu, réduit le contraste des franges de Ramsey.

Effet d'une perte de population de l'état $|F = 4, m_F = 0\rangle$

Afin de vérifier cette hypothèse, nous avons essayé de reproduire ces oscillations à l'aide du modèle développé dans la sous-section précédente. Pour ce faire, nous utilisons la formule de la probabilité de transition (4.129) dans laquelle nous posons $\Omega_0 = 0$ pour se mettre au sommet de la frange centrale et nous conservons bien entendu la distribution de temps d'interaction. Nous obtenons ainsi la relation suivante :

$$P_{\xi_0}(\Omega_e) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - (1 - \xi_0) e^{-\frac{1}{2} \Omega_e^2 \tau_{\text{rms}}^2} \cos(\Omega_e \bar{\tau}) - \xi_0 e^{-2 \Omega_e^2 \tau_{\text{rms}}^2} \cos(2 \Omega_e \bar{\tau}) \right\} \quad (4.132)$$

Avec les valeurs des paramètres déterminés dans la sous-section précédente, à savoir $\tau_{\text{rms}} \simeq 0.6 \text{ ms}$ et $\xi_0 \simeq 0.89$, nous obtenons la courbe représentée dans la Fig. 4.22 où les cercles représentent les points de mesure. Nous constatons premièrement que la décroissance de l'amplitude des franges calculées pour $\tau_{\text{rms}} = 0.6 \text{ ms}$ correspond relativement bien à celle mesurée, quoique légèrement trop lente. Ceci confirme néanmoins la valeur k_{τ_0} du rapport entre τ_{rms}

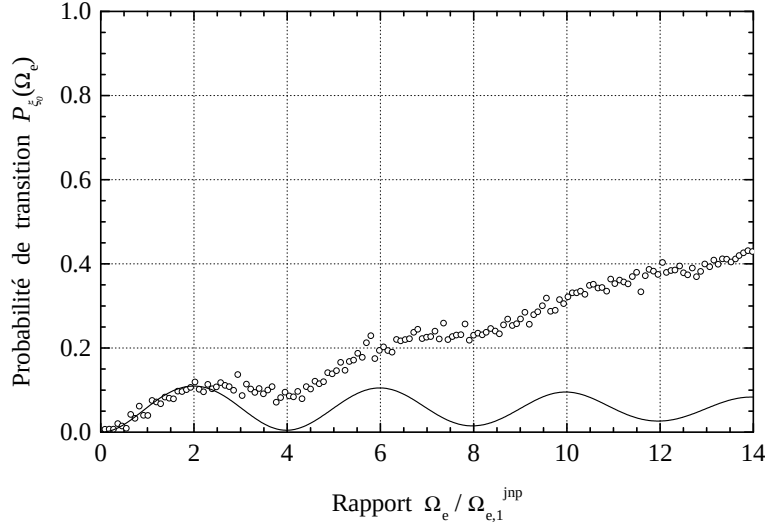


Fig. 4.23: Comparaison des oscillations de Rabi du bas de la frange centrale en fonction de la puissance micro-onde. La courbe est calculée avec l'équation (4.133) pour $\tau_{\text{rms}} = 0.6$ ms et $\xi_0 = 0.89$. Les cercles représentent les points de mesure.

et T_{rms} . Enfin, la modulation de l'amplitude des oscillations pour des valeurs paires du rapport $\Omega_e/\Omega_{e,1}^{\text{jnp}}$ est également reproduite de manière satisfaisante avec le modèle de dépopulation. Ceci semble bien confirmer que la perte de population de l'état $|F = 4, m_F = 0\rangle$ après la première zone d'interaction est la cause principale de cette modulation.

Regardons si on arrive à reproduire les mesures correspondant au bas de la frange centrale avec ce modèle. En posant alors $\Omega_0 = 2\pi\Delta\nu_{1/2}$ dans l'équation (4.129) et en ne conservant que les termes dominants de la contribution de la distribution de temps de transit, on obtient la formule suivante :

$$P_{\xi_0}(\Omega_e) = \frac{1}{2} \left\{ (1 - \xi_0) \left(1 - e^{-\frac{1}{2} \Omega_e^2 \tau_{\text{rms}}^2} \cos(\Omega_e \bar{\tau}) \right) + \xi_0 \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{T_{\text{rms}}^2}{\bar{T}^{*2}} \right. \\ \left. \times \left(1 - e^{-2 \Omega_e^2 \tau_{\text{rms}}^2} \cos(2 \Omega_e \bar{\tau}) \right) \right\} \quad (4.133)$$

La courbe, calculée avec les mêmes valeurs des paramètres, est représentée avec les points de mesures expérimentaux (cercles) dans la Fig. 4.23. On voit que le modèle reproduit bien les oscillations avec la bonne période, mais leur valeur moyenne est constante ($\simeq (1 - \xi_0)/2$) alors que sur les mesures elle augmente avec une pente régulière. On constate donc que ce modèle ne peut pas rendre compte d'une caractéristique essentielle observée expérimentalement. Une autre cause qui pourrait engendrer une décroissance supplémen-

taire des oscillations de Rabi, et en particulier faire tendre la probabilité de transition du bas de la frange centrale vers $1/2$ pour des puissance micro-onde élevées, serait l'introduction d'une distribution de fréquences de Rabi.

Effet d'une distribution de fréquences de Rabi combinée avec une perte de population de l'état $|F = 4, m_F = 0\rangle$

En effet, nous avons vu dans la sous-section 4.2.2 que le profil radial de la composante z du champ magnétique atteint un maximum au centre des trous de passage de la cavité (cf. Fig. 4.5). Comme le jet à une certaine dimension transverse et une température transverse non-nulle (cf. chapitre 3), il va recouvrir toute la section des trous de passage aussi bien lors de la première interaction micro-onde que lors de la deuxième. Les atomes du jet vont donc être soumis à un champ magnétique dont l'amplitude maximum dépend de leur position transverse dans le plan médian de la cavité à l'altitude $z = H_c$. Il en résulte que l'interaction micro-onde n'a pas lieu pour une fréquence de Rabi bien définie, mais pour une distribution de fréquences de Rabi qui est induite par la distribution de densité transverse du jet sur la section des ouvertures de la cavité. De plus, le fait que le jet traverse les zones d'interaction micro-onde avec un angle non-nul par rapport à l'axe z a pour conséquence que le profil sinusoïdal du champ magnétique est déformé. Ceci engendre également des fréquences de Rabi différentes suivant la position transverse des atomes du jet. Nous nous proposons donc de prendre en compte dans ce modèle le couplage entre la position transverse des atomes du jet dans les zones d'interaction et la fréquence de Rabi du champ magnétique.

Fréquence de Rabi moyenne :

La fréquence de Rabi Ω_c est proportionnelle à la composante $H_z(r, z)$ du champ magnétique dans la cavité. En supposant que la composante z de la vitesse des atomes est constante durant l'interaction micro-onde, nous pouvons exprimer la fréquence de Rabi dans chaque zone d'interaction en fonction du temps d'interaction t à partir de l'expression (4.26c) de $H_z(r, z)$:

$$\Omega_{c\pm}(t) = \Omega_c h_{\pm}(t) \sin(\pi t/\tau) \quad 0 \leq t \leq \tau \quad (4.134)$$

où le signe $-$ se réfère à la première zone d'interaction et le signe $+$ à la deuxième. Ω_c est la fréquence de Rabi nominale, τ la durée de l'interaction micro-onde et $h_{\pm}(t)$ la dépendance temporelle due à la variation radiale du champ magnétique donnée par :

$$h_{\pm}(t) = \frac{\mathcal{R}_0(r_{\pm}(t))}{\mathcal{R}_0(l)} \quad (4.135)$$

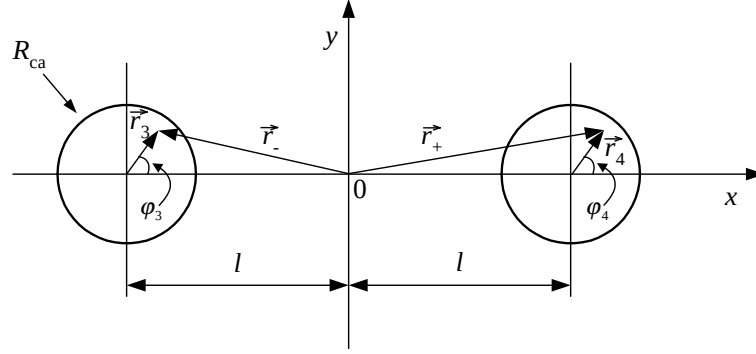


Fig. 4.24: Schéma des coordonnées de la position des trajectoires atomiques dans le plan médian de la cavité micro-onde. (r_3, φ_3) sont les coordonnées dans la première zone d'interaction et (r_4, φ_4) celles dans la deuxième.

avec $\mathcal{R}_0(x)$ la partie radiale du champ fournie par l'équation (4.45). $r_{\pm}(t)$ décrit le déplacement radial de la trajectoire des atomes durant l'interaction micro-onde due à la légère inclinaison du jet. En supposant que toutes les trajectoires atomiques durant l'interaction micro-onde se situent dans un plan vertical parallèle à l'axe x qui relie les centres des deux ouvertures de la cavité, $r_{\pm}(t)$ s'écrit :

$$r_{\pm}(t) = r_{\pm} \pm \bar{v}_{l_x} \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \quad 0 \leq t \leq \tau \quad (4.136)$$

où $\bar{v}_{l_x}$ est la vitesse moyenne du jet selon x après le refroidissement transverse. $r_{\pm}$ est la distance radiale, dans le plan médian de la cavité, de la trajectoire atomique. Elle s'exprime, d'après le schéma de la Fig. 4.24, par :

$$r_{\pm} = \left(l^2 + r_i^2 \pm 2lr_i \cos \varphi_i \right)^{1/2} \quad (i = 3, 4) \quad (4.137)$$

où (r_i, φ_i) sont les coordonnées de la trajectoire, par rapport au centre des trous de passage, dans la première zone d'interaction ($i = 3$) et dans la deuxième ($i = 4$). Nous faisons l'hypothèse que $h_{\pm}(t)$ varie peu par rapport à $\sin(\pi t/\tau)$ dans l'intervalle $0 \leq t \leq \tau$, ainsi la dépendance temporelle des fréquences de Rabi équivalentes $\Omega_{e\pm}(t)$ peut s'écrire :

$$\Omega_{e\pm}(t) \simeq \Omega_e h_{\pm}(t) \quad (4.138)$$

avec Ω_e la fréquence de Rabi équivalente nominale. Comme le déplacement radial de la trajectoire durant l'interaction micro-onde et la position de la trajectoire par rapport au centre des trous de passage sont petits devant la

distance l , on peut développer $h_{\pm}(t)$ autour de l . Il vient, en tenant compte que $\mathcal{R}'_0(l) = 0$:

$$h_{\pm}(t) \simeq 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathcal{R}''_0(l)}{\mathcal{R}_0(l)} \left(r_i \cos \varphi_i + \bar{v}_{l_x} \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right)^2 \quad (4.139)$$

Prenons la moyenne de $\Omega_{e\pm}(t)$ sur la durée de l'interaction τ , on obtient :

$$\Omega_{e\pm} \simeq \Omega_e \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathcal{R}''_0(l)}{\mathcal{R}_0(l)} r_i^2 \cos^2 \varphi_i + \frac{1}{12} \cdot \frac{\mathcal{R}''_0(l)}{\mathcal{R}_0(l)} \bar{v}_{l_x}^2 \tau^2 \right) \quad (4.140)$$

On voit que l'effet de l'inclinaison du jet s'annule bien au 1^{er} ordre. Nous négligeons son effet au 2^{ème} ordre et nous ne conservons par conséquent que le 1^{er} terme de l'expression (4.140). La fréquence de Rabi équivalente dans chaque zone d'interaction peut donc s'écrire en fonction de la position de la trajectoire dans le plan médian de la cavité :

$$\Omega_{e\pm}(\vec{r}_i) \simeq \Omega_e (1 - A r_i^2 \cos^2 \varphi_i) \quad (4.141)$$

où nous avons posé :

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\mathcal{R}''_0(l)|}{\mathcal{R}_0(l)} \quad (4.142)$$

Calculons à présent la moyenne de $\Omega_{e\pm}$ sur la distribution de position dans le plan médian de la cavité. La distribution des positions transverses a été dérivée approximativement du modèle de la densité surfacique dans l'annexe C. La moyenne est ainsi définie par :

$$\langle \Omega_{e\pm} \rangle = \int_{S_4} \int_{S_3} \kappa_N^*(\vec{r}_3, \vec{r}_4) \Omega_{e\pm}(\vec{r}_i) d^2 r_3 d^2 r_4 \quad (4.143)$$

où $\kappa_N^*(\vec{r}_3, \vec{r}_4)$ est la densité de probabilité simplifiée de la distribution des positions transverses dans la première et deuxième zone d'interaction, donnée par l'équation (C.8). S_3 et S_4 sont les sections apparentes, de rayon R_{ca} , des trous de passage de la cavité. La fréquence de Rabi moyenne $\langle \Omega_{e\pm} \rangle$, calculée à partir de (4.141) avec (4.143), est finalement donnée par l'expression suivante :

$$\langle \Omega_{e\pm} \rangle \simeq \Omega_e (1 - A \langle r_i^2 \cos^2 \varphi_i \rangle) \quad (4.144)$$

où la moyenne $\langle r_i^2 \cos^2 \varphi_i \rangle$ vaut :

$$\langle r_i^2 \cos^2 \varphi_i \rangle = \frac{1}{2\xi_i} \cdot \frac{1 - (1 + \xi_i R_{ca}^2) e^{-\xi_i R_{ca}^2}}{1 - e^{-\xi_i R_{ca}^2}} \quad (i = 3, 4) \quad (4.145)$$

avec $\xi_3 = \beta'(t_4)$ et $\xi_4 = \alpha'(t_4)$ qui sont donnés par les équations (B.61c) et (B.61b).

Notons que la 1^{ère} puissance optimale est maintenant définie, pour un jet monocinétique, par la condition :

$$(\langle \Omega_{e+} \rangle + \langle \Omega_{e-} \rangle) \tau = \pi \quad (4.146)$$

Il en résulte que dans ce cas, la fréquence de Rabi optimale $\Omega_{e,1}^{0,\text{inp}}$ vaut :

$$\Omega_{e,1}^{0,\text{inp}} \tau = \frac{\pi}{2 - A(\langle r_3^2 \cos^2 \varphi_3 \rangle + \langle r_4^2 \cos^2 \varphi_4 \rangle)} > \frac{\pi}{2} \quad (4.147)$$

Donc, si les fréquences de Rabi sont différentes dans les deux zones d'interaction, la 1^{ère} puissance optimale est supérieure à la puissance optimale dans le cas où ces fréquences sont identiques.

Probabilité de transition avec des fréquences de Rabi différentes dans chaque zone d'interaction et une perte de population de l'état $|F = 4, m_F = 0\rangle$:

Nous désirons maintenant moyenner la probabilité de transition sur la distribution de fréquences de Rabi induite par la distribution $\kappa_N(\vec{r}_3, \vec{r}_4)$ des positions transverses. Pour cela, il nous faut tout d'abord calculer la probabilité de transition, pour un jet monocinétique, dans le cas où les fréquences de Rabi sont différentes dans chaque zone d'interaction en prenant en compte la perte de population de l'état $|F = 4, m_F = 0\rangle$ après la première zone d'interaction. En procédant de la même manière que pour le calcul de la probabilité de transition avec perte de population au moyen du formalisme des équations de Bloch, mais en considérant cette fois une fréquence de Rabi $\Omega_{e-}(\vec{r}_3)$ pour la première interaction et $\Omega_{e+}(\vec{r}_4)$ pour la deuxième, nous sommes conduit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} P_{\xi_0}(\tau, T, \Omega_0, \Omega_e, \vec{r}_3, \vec{r}_4) = & \\ = \frac{1}{2} \Big\{ & 1 - (1 - \xi_0) \cos(\Omega_{e+}(\vec{r}_4) \tau) - \xi_0 \cos\{(\Omega_{e+}(\vec{r}_4) - \Omega_{e-}(\vec{r}_3)) \tau\} \\ & + \frac{1}{2} \xi_0 \Big(\cos\{(\Omega_{e+}(\vec{r}_4) - \Omega_{e-}(\vec{r}_3)) \tau\} - \cos\{(\Omega_{e+}(\vec{r}_4) + \Omega_{e-}(\vec{r}_3)) \tau\} \Big) \\ & \times \Big(1 + \cos(\Omega_0 \overline{T}^*) \Big) \Big\} \end{aligned} \quad (4.148)$$

Moyennons cette probabilité de transition sur la distribution des positions

transverses. On obtient :

$$\begin{aligned}
P_{\xi_0}(\tau, T, \Omega_0, \Omega_e) &= \int_{S_4} \int_{S_3} \kappa_N(\vec{r}_3, \vec{r}_4) P_{\xi_0}(\tau, T, \Omega_0, \Omega_e, \vec{r}_3, \vec{r}_4) d^2 r_3 d^2 r_4 \\
&= \frac{1}{2} \left\{ 1 - (1 - \xi_0) \langle \cos(\Omega_{e+}(\vec{r}_4) \tau) \rangle - \xi_0 \langle \cos \{ (\Omega_{e+}(\vec{r}_4) - \Omega_{e-}(\vec{r}_3)) \tau \} \rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \xi_0 \left(\langle \cos \{ (\Omega_{e+}(\vec{r}_4) - \Omega_{e-}(\vec{r}_3)) \tau \} \rangle - \langle \cos \{ (\Omega_{e+}(\vec{r}_4) + \Omega_{e-}(\vec{r}_3)) \tau \} \rangle \right) \right. \\
&\quad \left. \times \left(1 + \cos(\Omega_0 \bar{T}^*) \right) \right\} \quad (4.149)
\end{aligned}$$

avec les expressions suivantes pour les moyennes :

$$\begin{aligned}
\langle \cos(\Omega_{e+}(\vec{r}_4) \tau) \rangle &= \cos(\Omega_e \tau) \langle \cos(\Omega_e \tau A r_4^2 \cos^2 \varphi_4) \rangle \\
&\quad + \sin(\Omega_e \tau) \langle \sin(\Omega_e \tau A r_4^2 \cos^2 \varphi_4) \rangle \quad (4.150)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle \cos \{ (\Omega_{e+}(\vec{r}_4) + \Omega_{e-}(\vec{r}_3)) \tau \} \rangle = \\
&= \left\{ \cos(2\Omega_e \tau) \langle \cos(\Omega_e \tau A r_3^2 \cos^2 \varphi_3) \rangle + \sin(2\Omega_e \tau) \langle \sin(\Omega_e \tau A r_3^2 \cos^2 \varphi_3) \rangle \right\} \\
&\quad \times \langle \cos(\Omega_e \tau A r_4^2 \cos^2 \varphi_4) \rangle + \left\{ \sin(2\Omega_e \tau) \langle \cos(\Omega_e \tau A r_3^2 \cos^2 \varphi_3) \rangle \right. \\
&\quad \left. - \cos(2\Omega_e \tau) \langle \sin(\Omega_e \tau A r_3^2 \cos^2 \varphi_3) \rangle \right\} \langle \sin(\Omega_e \tau A r_4^2 \cos^2 \varphi_4) \rangle \quad (4.151)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle \cos \{ (\Omega_{e+}(\vec{r}_4) - \Omega_{e-}(\vec{r}_3)) \tau \} \rangle = \\
&= \langle \cos(\Omega_e \tau A r_3^2 \cos^2 \varphi_3) \rangle \langle \cos(\Omega_e \tau A r_4^2 \cos^2 \varphi_4) \rangle \\
&\quad + \langle \sin(\Omega_e \tau A r_3^2 \cos^2 \varphi_3) \rangle \langle \sin(\Omega_e \tau A r_4^2 \cos^2 \varphi_4) \rangle \quad (4.152)
\end{aligned}$$

Les différentes moyennes ont été calculées en négligeant la dépendance par rapport à φ . On obtient dans ce cas les relations suivantes ($i = 3, 4$) :

$$\begin{aligned}
&\langle \cos(\Omega_e \tau A r_i^2 \cos^2 \varphi_i) \rangle = \quad (4.153) \\
&\frac{4\xi_i^2}{4\xi_i^2 + A^2 \Omega_e^2 \tau^2} \cdot \frac{1 + e^{-\xi_i R_{ca}^2} \left(\frac{A \Omega_e \tau}{2\xi_i} \sin\left(\frac{1}{2} A \Omega_e \tau R_{ca}^2\right) - \cos\left(\frac{1}{2} A \Omega_e \tau R_{ca}^2\right) \right)}{1 - e^{-\xi_i R_{ca}^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle \sin(\Omega_e \tau A r_i^2 \cos^2 \varphi_i) \rangle = \quad (4.154) \\
&\frac{4\xi_i^2}{4\xi_i^2 + A^2 \Omega_e^2 \tau^2} \cdot \frac{\frac{A \Omega_e \tau}{2\xi_i} - e^{-\xi_i R_{ca}^2} \left(\frac{A \Omega_e \tau}{2\xi_i} \cos\left(\frac{1}{2} A \Omega_e \tau R_{ca}^2\right) + \sin\left(\frac{1}{2} A \Omega_e \tau R_{ca}^2\right) \right)}{1 - e^{-\xi_i R_{ca}^2}}
\end{aligned}$$

Enfin, pour obtenir la probabilité de transition finale, il faut encore intégrer l'équation (4.149) sur les distributions de temps de transit et d'interaction :

$$P_{\xi_0}(\Omega_0, \Omega_e) = \int_0^{+\infty} \rho(T) P_{\xi_0}(\tau(T), T, \Omega_0, \Omega_e) dT \quad (4.155)$$

Cette dernière moyenne est calculée numériquement.

Ajustements avec les mesures expérimentales :

Voyons maintenant ce que donne ce modèle. Pour le sommet ($\Omega_0 = 0$) et le bas ($\Omega_0 = 2\pi\Delta\nu_{1/2}$) de la frange centrale, nous avons calculé la probabilité de transition donnée par (4.155) en fonction de la puissance micro-onde Ω_e . Nous utilisons les mêmes valeurs de τ_{rms} et ξ_0 que précédemment, soit $\tau_{\text{rms}} = 0.6 \text{ ms}$ et $\xi_0 = 0.89$. Les valeurs des paramètres de la distribution des positions transverses employées pour le calcul sont les valeurs typiques estimées dans le chapitre précédent.

Avec la valeur typique de $R_{\text{ca}} = 3 \text{ mm}$ du rayon apparent de la cavité, déterminé dans la sous-section 3.3.1, nous reproduisons bien l'allure de la courbe mesurée en ce qui concerne le sommet de la frange centrale, comme avec le modèle sans distribution de fréquences de Rabi. Mais maintenant, la décroissance des oscillations est un peu trop lente. La courbe correspondant au bas de la frange montre cette fois des oscillations qui suivent une pente régulière comme on l'observe sur les mesures, mais dont la pente est environ le quart de celle mesurée expérimentalement. On constate donc que l'introduction d'une distribution de fréquences de Rabi reproduit bien qualitativement l'effet observé expérimentalement sur le bas de la frange centrale. Il n'est pas étonnant cependant que la pente de la courbe théorique ne corresponde pas à celle mesurée. En effet, la distribution des positions transverses dans les zones d'interaction, et par suite la distribution de fréquence de Rabi, n'approche probablement pas tout à fait la réalité de ce qui se passe dans la fontaine continue. Nous n'avons pas suffisamment d'informations sur les conditions initiales du jet d'une part, et nous avons fait beaucoup d'hypothèses simplificatrices pour dériver cette distribution d'autre part.

Nous avons alors essayé d'ajuster le rayon apparent R_{ca} , qui détermine la valeur des moyennes, pour reproduire la courbe mesurée expérimentalement pour le bas de la frange. Pour un rayon de $R_{\text{ca}} = 5.7 \text{ mm}$, nous arrivons très bien à reproduire la courbe expérimentale avec la bonne pente. Dans ce cas, la courbe correspondant au sommet de la frange centrale approche mieux celle mesurée expérimentalement (la décroissance des franges notamment est meilleure). Le résultat de cet ajustement est présenté dans la Fig. 4.25 (sommet de la frange) et la Fig. 4.26 (bas de la frange). Pour cette valeur du

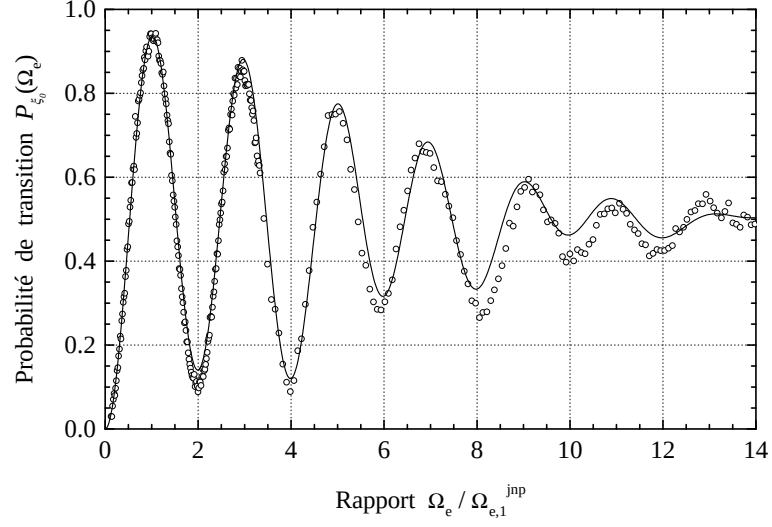


Fig. 4.25: Ajustement théorique des oscillations de Rabi du sommet de la frange centrale en fonction de la puissance micro-onde. La courbe est calculée avec l'équation (4.155) pour $\Omega_0 = 0$, $\tau_{\text{rms}} = 0.6 \text{ ms}$, $\xi_0 = 0.89$ et $R_{\text{ca}} = 5.7 \text{ mm}$. Les cercles représentent les points de mesure.

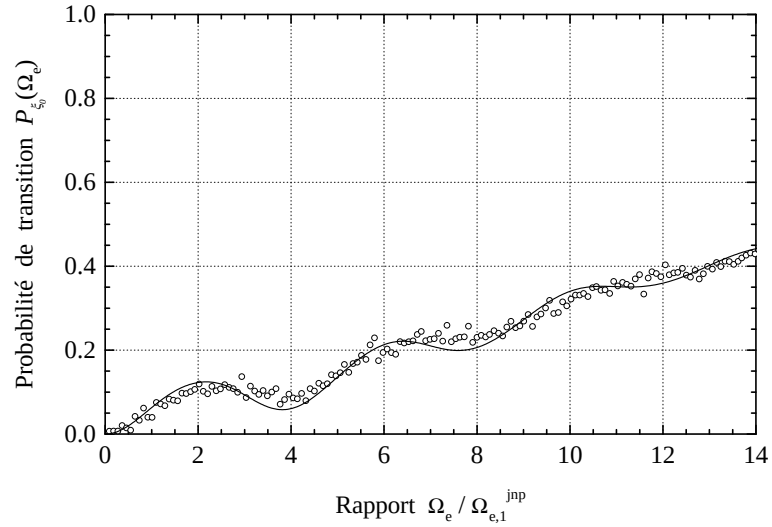


Fig. 4.26: Ajustement théorique des oscillations de Rabi du bas de la frange centrale en fonction de la puissance micro-onde. La courbe est calculée avec l'équation (4.155) pour $\Omega_0 = 2\pi\Delta\nu_{1/2}$, $\tau_{\text{rms}} = 0.6 \text{ ms}$, $\xi_0 = 0.89$ et $R_{\text{ca}} = 5.7 \text{ mm}$. Les cercles représentent les points de mesure.

rayon apparent, les fréquences de Rabi moyennes valent $\Omega_{e-} \simeq 0.935 \Omega_{e,1}^0$ dans la première zone d'interaction et $\Omega_{e+} \simeq 0.915 \Omega_{e,1}^0$ dans la deuxième où $\Omega_{e,1}^0$ est la 1^{ère} puissance optimale pour un jet monocinétique et ponctuel. Par rapport à la puissance optimale pour un jet monocinétique et non-ponctuel $\Omega_{e,1}^{0,jnp}$ donnée par (4.147), elles valent $\Omega_{e-} \simeq 1.01 \Omega_{e,1}^{0,jnp}$ et $\Omega_{e+} \simeq 0.99 \Omega_{e,1}^{0,jnp}$. On en déduit que l'on fait $\sim 101\%$ du 1^{er} pulse $\pi/2$ avec la première interaction micro-onde et $\sim 99\%$ du second pulse avec la deuxième interaction.

On constate donc que l'on peut reproduire de manière satisfaisante les mesures effectuées sur la fontaine continue avec un modèle qui prend en compte une perte de population de l'état $|F = 4, m_F = 0\rangle$ après la première interaction micro-onde et une distribution de fréquences de Rabi différente dans chaque zone d'interaction. Toutefois, le fait de devoir augmenter le rayon apparent R_{ca} par rapport à la valeur typique estimée, pour pouvoir reproduire les mesures, signifie que la distribution transverse de densité du jet dans le plan médian de la cavité est probablement plus prononcée dans la première zone d'interaction et plus "plate" dans la deuxième que ce qui a été estimé par le modèle de la densité surfacique développé dans l'annexe B.

En effet, la montée régulière de la courbe du bas de la frange est principalement due au terme en $\langle \cos \{ (\Omega_{e+}(\vec{r}_4) - \Omega_{e-}(\vec{r}_3)) \tau \} \rangle$ où intervient la différence des fréquences $\Omega_{e+}(\vec{r}_4) - \Omega_{e-}(\vec{r}_3)$. Or, augmenter R_{ca} par rapport à sa valeur typique revient à augmenter la moyenne de cette différence de fréquence puisque la densité surfacique du jet n'est pas identique dans les deux zones d'interaction. Plus la densité surfacique sera différente dans les deux zones d'interaction, plus prononcée dans la première et plus "plate" dans la deuxième, et plus la courbe correspondant au bas de la frange montera rapidement. Pour pouvoir rendre compte des mesures avec la valeur estimée du rayon apparent, il faudrait donc que la densité surfacique du jet dans la première zone d'interaction varie plus rapidement sur la section apparente que ce que le modèle de la densité surfacique nous a permis de prévoir. Et il faudrait que ce soit l'inverse pour la deuxième zone. Nous avons tenté de vérifier cette hypothèse en considérant le cas limite où l'on considère un jet ponctuel centré dans la première zone d'interaction et une densité surfacique uniforme dans la seconde zone. Nous n'avons pas pu ainsi reproduire de manière satisfaisante la montée de la courbe du bas de la frange centrale. La pente de la courbe étant toujours insuffisante.

Une autre possibilité de rendre compte de ce fait, avec les densité surfaciques que nous avons estimées, serait de considérer que le jet n'est pas centré sur l'ouverture de la deuxième zone d'interaction comme l'indiquerait les calculs de flux effectués dans le chapitre 3. Si le centre du jet se trouve plus proche de l'extrémité extérieur de cette ouverture, plus d'atomes vont sonder une région où la diminution du champ magnétique par rapport à sa valeur

au centre est plus grande. La conséquence est une diminution de la fréquence de Rabi moyenne dans la deuxième zone d'interaction, alors que celle dans la première n'a pas changé. Ceci résulterait en une montée plus prononcée de la courbe correspondant au bas de la frange, mais nous n'avons pas vérifié cette hypothèse car le modèle développé ne la prend pas en compte.

Pour clore ce chapitre, nous résumons dans le Tab. 4.3, les valeurs numériques des principales grandeurs physiques que nous avons calculées dans cette section.

4.4 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'étude de l'interaction micro-onde entre le jet atomique et le champ magnétique oscillant telle qu'elle se présente dans la fontaine continue.

Dans une première partie, nous avons déterminé les dimensions de la cavité micro-onde coaxiale et le mode d'oscillation du champ magnétique pour la fréquence de résonance de la transition d'horloge $|F = 3, m_F = 0\rangle \leftrightarrow |F = 4, m_F = 0\rangle$ de l'atome de césium 133. Le mode correspondant est un mode du type TE_{021} qui ne possède pas de variation azimutale des champs autour de l'axe de la cavité. Le champ magnétique par contre montre une variation sinusoïdale de son amplitude le long de la trajectoire du jet atomique. Le facteur de qualité chargé de la cavité a été mesuré à $Q_L = 11\,500$, une valeur qui est assez proche de la moitié du facteur de qualité non-chargé, estimé à $Q_0 = 27\,457$, correspondant au couplage optimum [VD93]. Ainsi, la puissance non-couplée à la cavité est environ égale à 1.4 fois la puissance dissipée dans les parois. Nous avons aussi évalué le gradient de phase radial, dans le plan médian de la cavité, de la composante z du champ magnétique sur la section des ouvertures de la cavité. Pour une cavité idéalisée, nous obtenons une valeur moyenne de $\nabla_r \varphi_z \simeq -1.3 \mu\text{rad/mm}$ au centre des ouvertures. Notons qu'il n'est pas possible, sous les hypothèses que nous avons faites, d'annuler sa valeur au centre des trous de passage ou même de rendre sa variation symétrique à cet endroit. Nous avons également estimé le gradient de phase longitudinal du champ H_z le long des axes des trous de passage de la cavité. Pour une cavité idéalisée, sans ouvertures dans les couvercles inférieur et supérieur ainsi que sans couplage micro-onde avec l'extérieur, nous obtenons un gradient de phase maximum au niveau des couvercles qui vaut $\nabla_z \varphi_z \simeq \pm 3.8 \text{ krad/mm}$. Cette valeur n'a évidemment pas grand sens car, dans la cavité réelle, elle est beaucoup plus petite du fait qu'il y a une ouverture dans les couvercles et un guide d'onde cylindrique sous la coupure au-dessus.

<i>Grandeur</i>	<i>Notation</i>	<i>Valeur</i>
<i>Effet température sur la frange centrale :</i>		
Correction 1 ^{ère} puissance optimale	$\Delta\Omega_{e,1}/\Omega_{e,1}^0$	- 0.31 %
Diminution relative du sommet	$\Delta P_{\text{opt}}(0)/P_{\text{opt}}(0)$	- 0.78 %
Correction largeur à mi-hauteur	$\delta(\Delta\nu_{1/2})/\Delta\nu_{1/2}$	- 0.33 %
<i>Fit piédestal de Rabi expérimental :</i>		
Temps d'interaction moyen	$\bar{\tau}$	10.7 ms
Largeur à mi-hauteur du piédestal	$\Delta\nu_{1/2\text{Rabi}}$	142.2 Hz
<i>Fit franges de Ramsey expérimentales :</i>		
Temps de transit effectif moyen	$\bar{T}^*$	0.5103 s
Largeur à mi-hauteur (frange centrale)	$\Delta\nu_{1/2}$	0.9797 Hz
Contraste enveloppe des franges	ξ_0	89 %
Perte population état excité	$1 - \beta_0$	21 %
Temps de transit moyen	$\bar{T}$	0.4975 s
Vitesse longitudinale moy. (refr. trans.)	$\bar{v}_l$	3.74 m/s
Vitesse de lanc. moy. (centre source)	$\bar{v}_L$	3.87 m/s
Temps de transit quadr. moyen effectif	$\tilde{T}_{\text{rms}}$	23.0 ms
Temps d'interaction quadratique moyen	τ_{rms}	0.6 ms
Temps de transit quadratique moyen	T_{rms}	22.3 ms
Température longitudinale effective	T_l^{eff}	75 μK
Température longitudinale (source)	T_l	100 μK
<i>Fit oscillations de Rabi :</i>		
Fréquence de Rabi moyenne (1 ^{ère} int.)	Ω_{e-}	1.01 $\Omega_{e,1}^{0,\text{jnp}}$
Fréquence de Rabi moyenne (2 ^{ème} int.)	Ω_{e+}	0.99 $\Omega_{e,1}^{0,\text{jnp}}$

Tab. 4.3: Valeur numérique des principales grandeurs physiques relatives à l'interaction micro-onde déterminées dans la section 4.3.

Comme le profil du champ magnétique varie sinusoidalement le long de la trajectoire des atomes, nous avons entrepris de dériver une relation analytique de la probabilité de transition dans le cas d’une interrogation de Ramsey pour un tel champ. Cette relation, valable pour $\Omega_0 \ll \Omega_e$, prend mieux en compte l’effet d’une variation sinusoidale de l’amplitude du champ que la relation simplifiée déduite de la probabilité de transition pour un champ dont l’amplitude est constante. Ainsi, nous avons étudié plus finement les caractéristiques de la frange centrale. Nous avons notamment confirmé, pour un jet monocinétique, la dépendance du temps de transit effectif T^* avec la puissance micro-onde prédite par la méthode de calcul de Thomann [Tho90]. Nous avons montré également que, pour un jet avec une distribution gaussienne des temps d’interaction et de transit, la diminution relative du sommet de la frange centrale est proportionnelle au rapport $\tau_{\text{rms}}^2/\bar{\tau}^2$. Pour les valeurs de la fontaine continue, elle se monte à moins de 1%. L’effet de la température longitudinale non-nulle du jet sur la largeur à mi-hauteur de la frange centrale a aussi été déterminé. Il résulte en une réduction de sa largeur, proportionnelle au rapport $\tilde{T}_{\text{rms}}^2/\bar{T}^{*2}$, qui est inférieure à 1%.

Nous avons essayé d’ajuster les franges de Ramsey mesurées sur la fontaine continue, dans la configuration avec refroidissement transverse 2D mais sans la trappe à lumière rotative, avec les franges prévues par la théorie. Une caractéristique importante des franges expérimentales dans cette configuration est une réduction importante ($\sim 10\%$) du contraste de la frange centrale par rapport à sa valeur attendue. La cause probable de cette diminution serait une perte de population de l’état $|F = 4, m_F = 0\rangle$ due à du pompage Zeeman après la première interaction micro-onde. Nous avons effectué un ajustement des franges mesurées avec un modèle théorique qui prend en compte ce phénomène. Ainsi, nous avons pu reproduire les mesures de manière satisfaisante. Il ressort de cet ajustement que la perte de population suspectée de l’état $|F = 4, m_F = 0\rangle$ se monterait à environ 20%.

Cet ajustement a également fournit d’autres informations utiles. Nous avons trouvé une valeur de $\Delta\nu_{1/2} = 0.9797$ Hz pour la largeur de la frange centrale. Une estimation de la vitesse de lancement moyenne du jet au centre de la source a pu être déduite de la valeur obtenue du temps de transit moyen. Elle se monte à $\bar{v}_L \simeq 3.87$ m/s et est légèrement inférieure à la vitesse théorique d’entraînement de la mélasse mouvante ($v_{\text{MM}}^{\text{th}} = 3.90$ m/s). Ceci indiquerait un certain “glissement” entre la vitesse de défilement théorique de la mélasse mouvante et la vitesse d’entraînement réelle des atomes du jet. Notons que cette différence devrait être même plus élevée si l’on prend en compte l’effet de la pression de radiation sur la vitesse de lancement des atomes. De la valeur de T_{rms} livrée par l’ajustement, on a estimé la tempé-

rature longitudinale effective du jet à $T_l^{\text{eff}} \simeq 75 \mu\text{K}$, ce qui correspondrait à une température de $T_l \simeq 100 \mu\text{K}$ au niveau de la source du jet continu. Cette température est plus élevée que celle obtenue en premier lors des mesures de temps de vol ($T_l \simeq 75 \mu\text{K}$). Ceci n'est pas étonnant car, d'une part, on sait que le refroidissement transverse du jet après la source crée un réchauffement longitudinal et, d'autre part, les conditions expérimentales dans la source ne sont probablement plus les mêmes, ce qui peut aussi influencer la température du jet.

L'ajustement des oscillations de Rabi mesurées sur la fontaine continue a fourni aussi des informations intéressantes. Le même modèle de perte de population de l'état $|F = 4, m_F = 0\rangle$ a permis de reproduire qualitativement la modulation des oscillations de Rabi du sommet de la frange centrale observée sur les mesures, confirmant ainsi que ce phénomène est bien responsable de la diminution du contraste de l'enveloppe des franges. Néanmoins, la décroissance des oscillations de Rabi mesurées est légèrement plus rapide que celle obtenue avec le modèle pour une température longitudinale de $T_l \simeq 75 \mu\text{K}$. En plus, les oscillations de Rabi expérimentales correspondant au bas de la frange centrale ne peuvent pas être correctement reproduites avec ce modèle. Nous avons alors pris en compte, dans ce modèle, l'effet d'une distribution des fréquences de Rabi dans les zones d'interaction due à l'étendue transverse du jet et à la variation de l'amplitude du champ magnétique sur les ouvertures de la cavité. En ajustant le paramètre qui décrit la moyenne et la largeur des distributions de fréquences de Rabi dans ce modèle, nous avons pu reproduire de façon satisfaisante les caractéristiques principales des oscillations observées, aussi bien pour le sommet que pour le bas de la frange centrale. Par rapport à un jet monocinétique et ponctuel, on a trouvé que les fréquences de Rabi moyennes valent $0.935 \Omega_{e,1}^0$ pour la première interaction et $0.915 \Omega_{e,1}^0$ pour la seconde. Ceci correspond à faire $\sim 101\%$ du 1^{er} pulse $\pi/2$ avec la première interaction micro-onde et $\sim 99\%$ du deuxième pulse avec la seconde.

Ce modèle nous a permis également de montrer que si le jet est bien centré sur les ouvertures de la cavité et le rayon apparent correctement évalué, on ne peut pas reproduire les mesures en supposant que la densité surfacique du jet dans les zones d'interaction est très différente de celle estimée par le modèle de la densité surfacique. Ceci pourrait indiquer que le jet n'est pas vraiment centré sur l'ouverture de la deuxième zone d'interaction comme l'indiqueraient les calculs du chapitre 3. Cette hypothèse permettrait peut-être de reproduire convenablement les mesures avec la valeur typique du rayon apparent. Elle n'a pas été testée car le modèle développé ne le permet pas sans y apporter des modifications substantielles.

Chapitre 5

Interrogation continue

5.1 Introduction

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 1, le principe de fonctionnement d'un étalon de fréquence atomique au césium (qu'il soit basé sur un jet thermique traditionnel ou sur des atomes froids) nécessite d'extraire du signal Ramsey de résonance une information utile relative à la fréquence du signal micro-onde injecté dans la cavité. Cette information doit nous renseigner si la fréquence du signal micro-onde généré par l'oscillateur local est exactement égale à la fréquence de la transition d'horloge des atomes de césium ou non.

Comme l'écart entre la fréquence du signal micro-onde généré par l'oscillateur local et la fréquence de résonance de l'atome de césium est très faible, et que la pente du signal de résonance est nulle à son sommet, on ne peut pas utiliser directement la variation du signal Ramsey qui en résulterait pour obtenir cette information de manière précise. On procède donc différemment en utilisant la technique bien connue du *lock-in* qui consiste à moduler le signal micro-onde injecté dans la cavité, puis à démoduler de manière synchrone le signal résultant à la sortie du résonateur au moyen d'un détecteur synchrone. On obtient ainsi, au bout du processus, un signal sous la forme d'une tension électrique qui est nul si la fréquence de l'oscillateur local est exactement égale à la fréquence de résonance de l'atome de césium. Si ce n'est pas le cas, ce signal n'est pas nul et il peut être utilisé pour piloter la fréquence de l'oscillateur local, au moyen d'une boucle d'asservissement, de façon qu'elle s'ajuste parfaitement sur la fréquence de résonance atomique.

Nous allons nous concentrer dans ce chapitre sur le processus de modulation - démodulation qui est à la base de l'obtention du signal d'erreur qui permet d'asservir la fréquence de l'oscillateur local sur celle de la résonance

atomique. Du fait du caractère intrinsèquement continu de la fontaine, ce processus est par conséquent continu comme dans un étalon à jet thermique traditionnel. Ceci veut dire, notamment, que le signal d'erreur est toujours disponible pour corriger la fréquence de l'oscillateur local contrairement aux autres fontaines atomiques qui ont un fonctionnement intrinsèquement pulsé qui ne le permet pas. Nous verrons plus en détail dans le prochain chapitre quelles en sont les conséquences sur la stabilité de l'horloge. Du fait de la largeur très étroite de la résonance atomique obtenue avec des atomes froids, par rapport à un jet thermique, la fréquence de modulation utile est du même ordre de grandeur que la largeur de la frange centrale. Il s'ensuit que l'étude ne peut plus se faire dans le cadre de l'approximation quasistatique standard. Nous considérons donc, dans tout ce chapitre, une modulation non-quasistatique du signal d'interrogation micro-onde.

La première partie de ce chapitre (section 5.2) est consacrée à l'étude des paramètres qui optimisent le signal d'erreur. Nous déterminons en particulier les effets de la température longitudinale non-nulle du jet et de la phase entre le signal de modulation et celui de démodulation. Pour commencer, nous dérivons le signal d'erreur dans la sous-section 5.2.1. Nous considérons ensuite les trois types de modulation les plus courants. Nous commençons avec la modulation carrée de phase (sous-section 5.2.2), puis nous poursuivons avec la modulation sinusoïdale de fréquence (sous-section 5.2.3) et nous terminons avec la modulation carrée de fréquence (sous-section 5.2.4). Pour chaque type de modulation, nous considérons une démodulation avec une fonction de forme carrée.

La seconde et dernière partie de ce chapitre (section 5.3) est consacrée à l'étude des transitoires apparaissant dans le signal de sortie du résonateur dans le cas de la modulation carrée de phase. Nous considérons le cas d'un jet monocinétique et des zones d'interaction micro-onde de dimension finie pour commencer (sous-section 5.3.1), puis le cas d'un jet non-monocinétique (sous-section 5.3.2). Nous déterminons la fréquence de modulation optimale ainsi que l'amplitude et la durée des transitoires. Ceci aussi bien pour un champ d'induction magnétique B_{RF} dont l'amplitude est constante que pour un champ dont l'amplitude varie sinusoïdalement comme dans la fontaine continue.

5.2 Schémas de modulation-démodulation

5.2.1 Expression du signal d'erreur

Nous allons dériver ici l'expression du signal d'erreur à la sortie du détecteur synchrone. Cette expression sera ensuite utilisée pour déterminer la valeur des paramètres qui optimisent le signal d'erreur pour les divers types de modulation considérés.

Nous supposons que la cavité de Ramsey est alimentée avec un signal de la forme :

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi(t)) \quad (5.1)$$

Les atomes du jet sont donc soumis à deux zones de champ magnétique de fréquence angulaire ω dont l'amplitude est sinusoïdale. Nous considérons, pour simplifier, le cas d'un résonateur de Ramsey idéal avec des zones d'interaction infiniment courtes (pulses de Rabi) de telle façon que la phase puisse être considérée constante durant l'interaction micro-onde. Ainsi, la phase du champ magnétique dans la première zone vaut $\phi(t - T_{d1}^* - T^*)$ et celle dans la deuxième $\phi(t - T_{d1}^*)$. T_{d1}^* est le temps de détection effectif du détecteur 1, correspondant à la fontaine continue pour des zones d'interaction infiniment courtes équivalentes dans le cas d'un champ magnétique à profil sinusoïdal. Il vaut :

$$T_{d1}^* = T_{d1} + \left(1 - \frac{1}{2} \eta(\pi/2)\right) \tau \quad (5.2)$$

où T_{d1} et τ sont respectivement les temps de détection du détecteur 1 et d'interaction déterminés dans le chapitre 3, et $\eta(\pi/2)$ est le facteur numérique défini par l'équation (4.89). T^* est le temps de transit effectif pour un champ dont l'amplitude varie sinusoïdalement, et il est donné par (4.88) pour $n = 1$. La phase instantanée du champ $\phi(t)$ dépend donc du temps et contient plusieurs termes :

$$\phi(t) = \phi_{\text{mod}}(t) + \delta\phi(t) + \phi_0 \quad (5.3)$$

Le 1^{er} terme $\phi_{\text{mod}}(t)$ est une modulation déterministe de la phase, nécessaire pour déterminer avec précision le centre de la résonance atomique par détection synchrone. La forme de modulation peut être quelconque mais nous nous restreignons aux trois types de modulation énoncés précédemment. Le 2^{ème} terme $\delta\phi(t)$ décrit les fluctuations aléatoires de la phase et ϕ_0 est une phase constante arbitraire. Nous supposons encore qu'il n'y a pas de distortion de la résonance et que le désaccord $\Omega_0 = \omega - \omega_0$ entre la pulsation de la micro-onde et celle de la transition d'horloge de l'atome de césium est faible ($\Omega_0 \ll \Omega_e$). Dans ce cas, la probabilité de transition dépendant du temps est donnée en bonne approximation d'après l'équation (4.83), pour un jet monocinétique et

deux pulses $\pi/2$, par¹ :

$$P(t, T) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos (\Omega_0 T^* + \phi(t, T)) \right\} \quad (5.4)$$

$\phi(t, T)$ est la différence de phase apparente instantanée subie par les atomes entre les deux pulses micro-onde [VA89]. Elle résulte de l'effet combiné de la modulation déterministe de la phase, des fluctuations de phase et du mouvement des atomes dans le résonateur. Elle est donnée par :

$$\phi(t, T) = \phi(t - T_{d1}^*) - \phi(t - T_{d1}^* - T^*) \quad (5.5)$$

En insérant (5.3) dans l'équation ci-dessus, la différence de phase apparente instantanée s'écrit :

$$\phi(t, T) = \phi_{\text{mod}}(t, T) + \delta\phi(t, T) + \Delta\phi \quad (5.6)$$

Le 1^{er} terme est dû à la modulation de phase générée volontairement :

$$\phi_{\text{mod}}(t, T) = \phi_{\text{mod}}(t - T_{d1}^*) - \phi_{\text{mod}}(t - T_{d1}^* - T^*) \quad (5.7)$$

où $\phi_{\text{mod}}(t - T_{d1}^* - T^*)$ et $\phi_{\text{mod}}(t - T_{d1}^*)$ sont les phases de modulation instantanées respectivement dans la première et la deuxième zone d'interaction. Le 2^{ème} terme $\delta\phi(t, T)$ décrit l'effet des fluctuations de phase sur la différence de phase apparente instantanée. Quant à $\Delta\phi$, il représente une différence de phase constante :

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \quad (5.8)$$

où ϕ_1 (ϕ_2) est une phase arbitraire constante dans la première (deuxième) zone d'interaction.

Pour établir l'expression du signal à la sortie du résonateur, nous supposons encore qu'il n'y a pas de flux atomique de fond, indépendant de la fréquence, dans la zone de détection. La réponse temporelle du résonateur à la modulation de phase, qui est alors proportionnelle pour un jet monocinétique à la probabilité de transition dépendant du temps (5.4), est donnée par le courant électrique $I(t, T)$ d'un photodétecteur placé dans la zone de détection et peut être écrite comme :

$$I(t, T) = \frac{1}{2} I_0 \left\{ 1 + \cos (\Omega_0 T^* + \phi(t, T)) \right\} \quad (5.9)$$

où I_0 est le signal à résonance ($\Omega_0 = 0$) et sans modulation ($\phi(t, T) = 0$). Comme nous nous intéressons ici uniquement à l'effet de la modulation déterministe de la phase, nous négligeons pour le moment le terme $\delta\phi(t, T)$

¹Nous n'indiquons de manière générale que la dépendance avec T puisque tous les autres temps intervenant dans les équations peuvent être exprimés en fonction de T .

décrivant les fluctuations de phase. Nous prendrons en compte ce terme dans le chapitre 6 lorsque nous aborderons l'étude de l'effet de ces fluctuations sur la stabilité de fréquence de la fontaine continue. Nous faisons aussi l'hypothèse qu'il n'y pas de différence de phase permanente entre les deux zones de champ magnétique ($\Delta\phi = 0$). Il ne reste donc que l'effet de la modulation extérieure de la phase $\phi_{\text{mod}}(t, T)$ dans l'expression de la différence de phase apparente instantanée.

Pour les formes de modulation généralement utilisées dans les étalons de fréquence, en particulier pour les trois types considérés ici, $\phi_{\text{mod}}(t)$ est supposée être une fonction périodique, de symétrie impaire et de période T_M dont le spectre contient seulement des harmoniques impaires de la fréquence de modulation $f_M = 1/T_M$. Elle satisfait par conséquent la condition [VA89] :

$$\phi_{\text{mod}}(t + T_M/2) = -\phi_{\text{mod}}(t) \quad (5.10)$$

Nous pouvons ainsi écrire $\phi_{\text{mod}}(t, T)$ sous la forme :

$$\phi_{\text{mod}}(t, T) = 2\phi_m c(t, T) \quad (5.11)$$

où $c(t, T)$ est une fonction périodique de période T_M dont le spectre contient uniquement des harmoniques impaires de f_M et telle que le maximum de $|c(t, T)|$ est égal à 1. ϕ_m est l'amplitude de modulation de $\phi_{\text{mod}}(t)$. La réponse du résonateur devient ainsi :

$$I(t, T) = \frac{1}{2} I_0 \left\{ 1 + \cos(\Omega_0 T^* + 2\phi_m c(t, T)) \right\} \quad (5.12)$$

Pour un jet non-monocinétique avec une distribution de temps de transit $\rho(T)$, elle est donnée par :

$$I(t) = \frac{1}{2} I_0 \int_0^{+\infty} \rho(T) I(t, T) dT \quad (5.13)$$

Nous avons supposé que le désaccord micro-onde était faible, soit $\Omega_0 T^* \ll 2\phi_m$, nous pouvons donc développer (5.12) au 1^{er} ordre du rapport $\Omega_0 T^*/2\phi_m$. Il vient :

$$\begin{aligned} I(t) &\simeq \frac{1}{2} I_0 \int_0^{+\infty} \rho(T) \left\{ 1 + \cos(2\phi_m c(t, T)) \right\} dT \\ &\quad - \frac{1}{2} I_0 \Omega_0 \bar{T}^* \int_0^{+\infty} \rho(T) \frac{T^*(T)}{\bar{T}^*} \sin(2\phi_m c(t, T)) dT \end{aligned} \quad (5.14)$$

où $\bar{T}^*$ est le temps de transit effectif moyen. Ce signal est ensuite démodulé de manière synchrone à la fréquence f_M et filtré au moyen d'un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_F \ll f_M$. Comme le spectre de la fonction

périodique $c(t, T)$ ne contient que des harmoniques impaires, il s'ensuit que le spectre de $\cos(2\phi_m c(t, T))$, respectivement $\sin(2\phi_m c(t, T))$, ne contient que des harmoniques paires, respectivement impaires. Par conséquent, seul le dernier terme de (5.14) va contribuer au signal d'erreur [VA89]. Soit $d(t)$ la forme d'onde de démodulation du détecteur synchrone, que nous considérons carrée dans tout ce travail. Le signal $s(t)$ après démodulation s'écrit alors :

$$s(t) = I(t) d(t) \quad (5.15)$$

Le signal moyen $\bar{s}$ à la sortie du détecteur synchrone est alors obtenu après filtrage de $s(t)$ pour en extraire la composante continue :

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \overline{I(t) d(t)} \\ &\simeq -\frac{1}{2} K I_0 \Omega_0 \bar{T}^* \int_0^{+\infty} \rho(T) \frac{T^*(T)}{\bar{T}^*} \overline{a(t, T)} dT \end{aligned} \quad (5.16)$$

où K est une constante qui dépend du gain du détecteur synchrone et $a(t, T)$ la partie déterministe² du signal $s(t)$ qui est donnée par :

$$a(t, T) = \sin(2\phi_m c(t, T)) d(t) \quad (5.17)$$

C'est une fonction périodique de période $T_M/2$. Nous avons calculé son développement en série de Fourier en fonction du déphasage φ entre modulation et démodulation. Ce calcul est reporté dans l'annexe D. Posons $c_0(T) = \overline{a(t, T)}$ la valeur moyenne de la fonction $a(t, T)$ qui est donnée par la relation générale (D.4). On obtient ainsi un signal d'erreur $e(\Omega_0)$ qui est proportionnel au désaccord Ω_0 et qui s'exprime par :

$$e(\Omega_0) = -\frac{1}{2} K' I_0 \Omega_0 \bar{T}^* \int_0^{+\infty} \rho(T) \frac{T^*(T)}{\bar{T}^*} c_0(T) dT \quad (5.18)$$

où K' est une constante qui englobe le gain de la boucle d'asservissement. Définissons encore la pente initiale du signal d'erreur a' qui est une quantité sans dimension [VA89] :

$$a' = \frac{e(\Omega_0)}{K' I_0 \Omega_0 \bar{T}^*} \quad (5.19)$$

Elle nous permettra de comparer les performances des différents types de modulation considérés dans ce travail. Avec l'expression (5.18), il vient :

$$a' = -\frac{1}{2} C_0 \quad (5.20)$$

²Cette dénomination prendra tout son sens lorsque nous considérerons la partie aléatoire du signal $s(t)$ dans le chapitre 6.

où le coefficient C_0 est défini par :

$$C_0 = \int_0^{+\infty} \rho(T) \frac{T^*(T)}{\overline{T}^*} c_0(T) dT \quad (5.21)$$

Dans le cas d'un jet monocinétique, C_0 se réduit à $c_0(T)$. Voyons maintenant quelle est la valeur de la quantité a' pour les trois types de modulation considérés.

5.2.2 Modulation carrée de phase

Nous considérons pour commencer le cas de la modulation carrée de phase car c'est ce type de modulation que nous utilisons dans la fontaine continue. Cette modulation est particulière puisqu'elle repose entièrement sur la réponse transitoire du résonateur.

Pente initiale du signal d'erreur a'

Déterminons maintenant la valeur a' de la pente du signal d'erreur. Nous considérons pour commencer le cas d'un jet monocinétique. Nous évaluerons ensuite celui d'un jet non-monocinétique.

Jet monocinétique :

Dans le cas d'un jet monocinétique, le coefficient $c_0(T)$ a été calculé dans l'annexe D en prenant en compte un déphasage φ entre modulation et démodulation pour une démodulation large bande³. Il est donné par l'équation (D.4) avec les coefficients (D.13). La pente initiale du signal d'erreur, qui vaut $a^0 = -c_0(T)/2$ d'après (5.20), est alors donnée par :

$$\begin{aligned} a^0(f_M, \varphi) = & -\frac{4}{\pi^2} \sin(2\phi_m) \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \sin((2p+1)\pi f_M T^*) \\ & \times \left\{ \cos((2p+1)\pi f_M(T^* + 2T_{d1}^*)) \sin((2p+1)\varphi) \right. \\ & \left. + \sin((2p+1)\pi f_M(T^* + 2T_{d1}^*)) \cos((2p+1)\varphi) \right\} \quad (5.22) \end{aligned}$$

On voit que l'amplitude de modulation optimale qui maximalise la pente a^0 ne dépend pas de la fréquence de modulation f_M et vaut $\phi_m^{\text{opt}} = \pi/4$ rad. Quant au déphasage φ optimal qui maximalise a^0 , il est défini en fonction de la fréquence de modulation par la relation :

$$\varphi_{\text{opt}}(f_M) = \frac{\pi}{2} - \pi f_M(T^* + 2T_{d1}^*) \quad (5.23)$$

³Dans ce cas, le signal du résonateur n'est pas filtré avant la démodulation carrée.

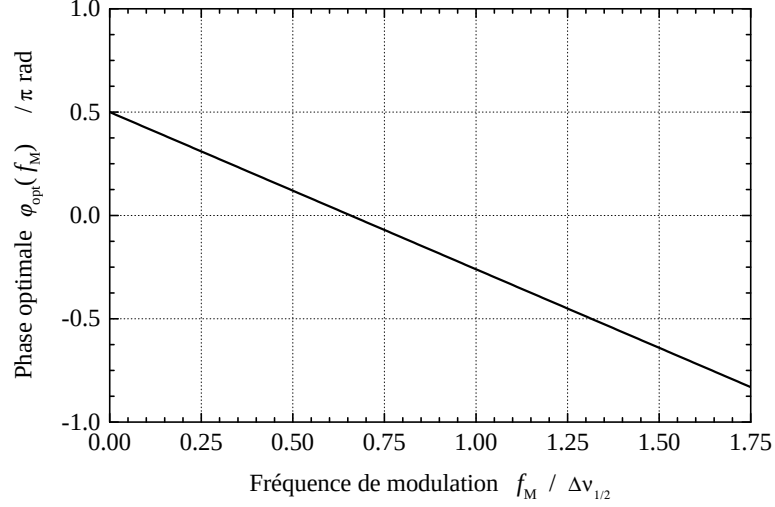


Fig. 5.1: Phase de démodulation optimale $\varphi_{\text{opt}}(f_M)$ en fonction de la fréquence de modulation f_M . La phase est calculée avec l'équation (5.23) et $\Delta\nu_{1/2}$ est la largeur à mi-hauteur de la frange centrale. Les paramètres sont ceux du Tab. 4.3.

Pour les paramètres de la fontaine continue (Tab. 4.3), la phase de démodulation optimale $\varphi_{\text{opt}}(f_M)$ est représentée en fonction de la fréquence de modulation, pour $0 < f_M < 1.75 \Delta\nu_{1/2}$, dans la Fig. 5.1. Avec cette phase optimale, la pente a'^0 donnée par l'expression (5.22) se réduit à :

$$a_1'^0(f_M) = -\frac{4}{\pi^2} \sin(\pi f_M T^*) \quad (5.24)$$

pour une démodulation de la 1^{ère} harmonique du signal du résonateur uniquement⁴ ($p = 0$). Dans le cas d'une démodulation large bande, elle est donnée par :

$$a_{\text{LB}}'^0(f_M) = -\frac{4}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \sin((2p+1)\pi f_M T^*) \quad (5.25)$$

La valeur absolue $|a_{1,\text{LB}}'^0|$ de la pente est représentée en fonction de la fréquence de modulation f_M dans la Fig. 5.2. La courbe en traitillé correspond au cas de la 1^{ère} harmonique (formule (5.24)) et celle en trait continu au cas d'une démodulation large bande (formule (5.25)). On constate bien que la pente est maximale dans les deux cas pour une fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. En fait, c'est le cas pour toute fréquence de modulation qui est un multiple impair de la largeur à mi-hauteur de la frange centrale ($f_M = (2n+1)\Delta\nu_{1/2}$,

⁴La 1^{ère} harmonique du signal du résonateur est obtenue par ex. par filtrage avant la démodulation carrée.

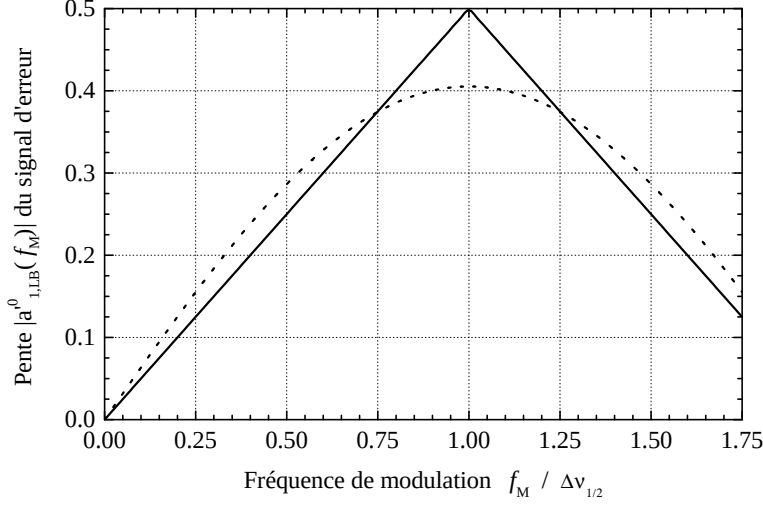


Fig. 5.2: Pente $|a''^0_{1, LB}(f_M)|$ du signal d'erreur en fonction de la fréquence de modulation f_M dans le cas de la modulation carrée de phase. La courbe en traitillé correspond à une démodulation de la 1^{ère} harmonique ($|a''^0_1(f_M)|$) et celle en trait continu à une démodulation large bande ($|a''^0_{LB}(f_M)|$). Les courbes sont calculées avec les équations (5.24) et (5.25) pour une amplitude de modulation et une démodulation optimales. $\Delta\nu_{1/2}$ est la largeur à mi-hauteur de la frange centrale.

$n = 0, 1, 2, \dots$). Si l'on s'écarte de cette condition, la valeur de la pente décroît linéairement avec l'écart pour une démodulation large bande. Elle atteint zéro dans les deux cas lorsque la fréquence de modulation est nulle. Plus généralement, c'est le cas lorsque la fréquence de modulation est un multiple pair de la largeur à mi-hauteur de la frange centrale ($f_M = 2n \Delta\nu_{1/2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$). Dans le cas d'une démodulation large bande, la valeur maximale de la pente vaut $|a''^0_{LB}| = 0.5$ tandis qu'elle est de $|a''^0_1| = 4/\pi^2 = 0.405$ pour une démodulation de la 1^{ère} harmonique seulement.

Nous avons représenté, dans la Fig. 5.3, la pente a''^0 en fonction du déphasage φ entre modulation et démodulation pour la 1^{ère} fréquence de modulation optimale $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. La courbe en traitillé correspond à une démodulation de la 1^{ère} harmonique et celle en trait continu à une démodulation large bande. On remarque que la valeur absolue de la pente $|a''^0_{LB}|$ décroît linéairement si l'on s'écarte de la phase optimale de démodulation dans le cas d'une démodulation large bande. La phase optimale de démodulation φ_{opt} pour la 1^{ère} fréquence de modulation optimale vaut :

$$\varphi_{\text{opt}} = -\pi \frac{T_{d1}^*}{T^*} \simeq -0.82 \text{ rad} \quad (5.26)$$

pour les paramètres de la fontaine continue.

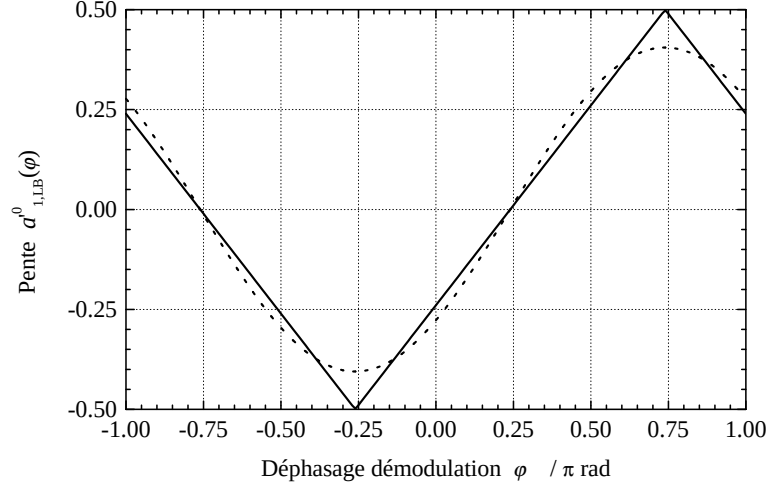


Fig. 5.3: Pente $a'_{1, LB}{}^0(\varphi)$ du signal d'erreur en fonction du déphasage φ entre modulation et démodulation dans le cas de la modulation carrée de phase. Les courbes sont représentées pour une fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. La courbe en traitillé correspond à une démodulation de la 1^{ère} harmonique ($a_1^0(\varphi)$) et celle en trait continu à une démodulation large bande ($a_{LB}^0(\varphi)$). Les courbes sont calculées avec l'équation (5.22) pour une amplitude de modulation optimale.

Jet non-monocinétique :

Dans le cas d'un jet non-monocinétique avec une distribution de temps de transit $\rho(T)$, la pente a' peut s'écrire, d'après (5.20) et (5.21), sous la forme :

$$a'(f_M, \varphi) = -\frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \left\{ A_{2p+1}(f_M) \sin((2p+1)\varphi) + B_{2p+1}(f_M) \cos((2p+1)\varphi) \right\} \quad (5.27)$$

Les coefficients $A_{2p+1}(f_M)$ et $B_{2p+1}(f_M)$ se calculent avec les relations suivantes :

$$A_{2p+1}(f_M) = \int_0^{+\infty} \rho(T) \frac{T^*(T)}{\overline{T}^*} a_{2p+1}(f_M, T) dT \quad (5.28a)$$

$$B_{2p+1}(f_M) = \int_0^{+\infty} \rho(T) \frac{T^*(T)}{\overline{T}^*} b_{2p+1}(f_M, T) dT \quad (5.28b)$$

Les deux coefficients $a_{2p+1}(f_M, T)$ et $b_{2p+1}(f_M, T)$ sont donnés par les expressions (D.13) dans lesquelles on a posé l'amplitude de modulation optimale $\phi_m^{\text{opt}} = \pi/4$ rad.

Pour une démodulation de la 1^{ère} harmonique avec la phase optimale, la valeur absolue de la pente a'_1 est donnée par :

$$|a'_1(f_M)| = \frac{1}{\pi} \left\{ A_1^2(f_M) + B_1^2(f_M) \right\}^{1/2} \quad (5.29)$$

Comme la distribution $\rho(T)$ est étroite, nous négligeons la variation de $T^*/\bar{T}^*$ avec T , ainsi que celle de τ , dans les expressions (5.28) et nous approximations $\eta(\pi/2)$ par $\eta(\pi/2) \simeq 1$ dans (5.2). En utilisant la relation (3.36) pour la dépendance de T_{d1} avec T , on obtient alors l'expression suivante :

$$|a'_1(f_M)| = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} e^{-\pi^2 f_M^2 (1+2k_{d10}) T_{rms}^2} \times \left\{ \cosh \left(2\pi^2 f_M^2 (1+2k_{d10}) T_{rms}^2 \right) - \cos \left(2\pi f_M \bar{T}^* \right) \right\}^{1/2} \quad (5.30)$$

Afin de simplifier les calculs dans le cas de la démodulation large bande, nous gardons la phase optimale (5.23) valable pour un jet monocinétique pour l'évaluation de la pente a'_{LB} dans le cas d'un jet non-monocinétique⁵. En procédant de cette manière, avec les mêmes approximations que précédemment, nous sommes conduit à l'expression suivante pour la pente a'_{LB} :

$$a'_{LB}(f_M) = -\frac{2}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \sin \left((2p+1) \pi f_M \bar{T}^* \right) \times e^{-(2p+1)^2 2\pi^2 f_M^2 k_{d10}^2 T_{rms}^2} \left\{ 1 + e^{-(2p+1)^2 2\pi^2 f_M^2 (1+2k_{d10}) T_{rms}^2} \right\} \quad (5.31)$$

Nous avons reporté dans la Fig. 5.4 la variation de la valeur absolue $|a'_{LB}|$ de la pente a'_{LB} en fonction de la fréquence de modulation ($0 < f_M < 1.75 \Delta\nu_{1/2}$) pour un jet de température longitudinale $T_l = 75 \mu K$. Cette température correspond à celle que nous avons déduite de l'ajustement des franges de Ramsey expérimentales dans le chapitre précédent (cf. Tab. 4.3). Nous utilisons pour le calcul la distribution de temps de transit $\rho(T)$ que nous avons déterminée dans le chapitre 3 (équ. (3.159)) avec les paramètres du Tab. 4.3. Nous avons également reporté dans cette figure le cas d'un jet monocinétique (courbe en trait fin) pour comparaison. Le principal effet de l'introduction d'une température longitudinale $T_l > 0$ est de diminuer la valeur maximale de la pente $|a'_{LB}|$ autour de la fréquence de modulation optimale $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. Notons en passant que cette diminution est d'autant plus

⁵Comme la distribution de temps de transit $\rho(T)$ est étroite (température longitudinale du jet faible), la phase optimale de démodulation dans le cas d'un jet non-monocinétique ne devrait pas être très différente de celle pour un jet monocinétique pour des fréquences de modulations $0 < f_M < 1.75 \Delta\nu_{1/2}$.

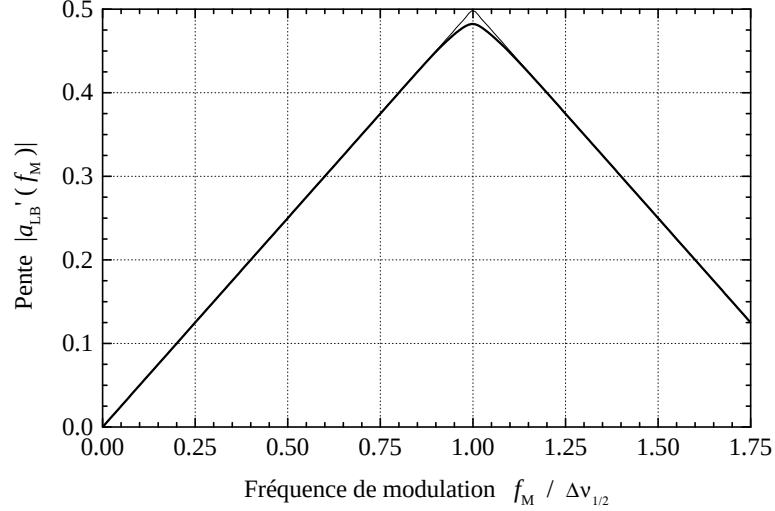


Fig. 5.4: Pente $|a'_{LB}(f_M)|$ du signal d'erreur en fonction de la fréquence de modulation f_M dans le cas de la modulation carrée de phase et pour une démodulation large bande. Les courbes sont calculées avec l'équation (5.31) pour une amplitude de modulation et une démodulation optimales. La courbe en trait épais correspond à un jet de température longitudinale $T_l = 75 \mu\text{K}$ et celle en trait fin à un jet monocinétique. $\Delta\nu_{1/2}$ est la largeur à mi-hauteur de la frange centrale.

importante que la fréquence de modulation est un multiple (impair) élevé de $\Delta\nu_{1/2}$. La valeur absolue de la pente a'_1 pour le cas de la démodulation de la 1^{ère} harmonique n'a pas été représentée graphiquement car, pour cet ordre de grandeur de température, la courbe est pratiquement identique au cas monocinétique (cf. Fig. 5.2). On constate ainsi, comme l'on pouvait s'y attendre, que la fréquence de modulation optimale pour un jet non-monocinétique est dans les deux cas de $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. Pour cette fréquence, la valeur maximale de la pente pour une démodulation de la 1^{ère} harmonique seulement est quasiment identique à celle d'un jet monocinétique ($|a'_1| \simeq |a'^0_1|$). Par contre, dans le cas d'une démodulation large bande, la pente diminue légèrement à une valeur de $|a'_{LB}| = 0.482$.

Nous avons aussi reporté dans la Fig. 5.5 la valeur de la pente a' en fonction du déphasage φ entre modulation et démodulation pour la fréquence de modulation optimale $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ et une température longitudinale du jet de $T_l = 75 \mu\text{K}$. La courbe en traitillé correspond au cas d'une démodulation de la 1^{ère} harmonique et celle en trait continu à une démodulation large bande. Par comparaison avec la Fig. 5.3 du cas monocinétique, on remarque qu'il n'y a pas beaucoup de différence. Notamment, pour une démodulation large bande, la pente a'_{LB} varie toujours passablement autour de la phase optimale

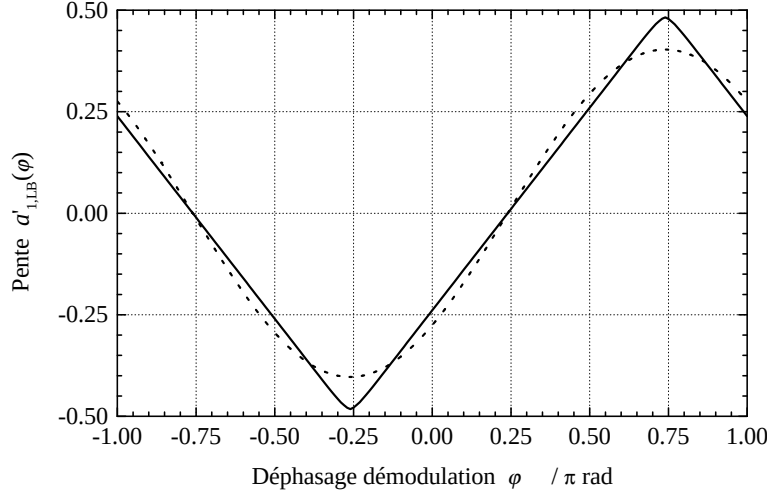


Fig. 5.5: Pente $a'_{1, LB}(\varphi)$ du signal d'erreur en fonction du déphasage φ entre modulation et démodulation dans le cas de la modulation carrée de phase et pour une température longitudinale de $T_l = 75 \mu\text{K}$. La courbe en trait continu correspond à une démodulation large bande ($a'_{LB}(\varphi)$) et celle en traitillé à la 1^{ère} harmonique ($a'_1(\varphi)$). Les courbes sont calculées avec l'équation (5.27) pour une amplitude de modulation et une démodulation optimales.

par rapport au cas de la 1^{ère} harmonique. Pour finir, nous avons également calculé la diminution de la valeur absolue de la pente a' en fonction de la température longitudinale du jet à la fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. Le résultat est représenté dans la Fig. 5.6 pour le cas de la 1^{ère} harmonique (courbe en traitillé) et celui de la démodulation large bande (courbe en trait continu). La diminution relative de $|a'|$ due à la température longitudinale du jet est très faible dans le cas de la 1^{ère} harmonique et se monte à $\sim -4\%$ pour une température de $T_l = 100 \mu\text{K}$ pour une démodulation large bande.

Signal à la sortie du résonateur

Nous calculons encore le signal à la sortie du résonateur pour une modulation carrée de phase. Ceci, dans le but de comparer sa dynamique pour les trois types de modulation considérés. Nous nous contentons ici de calculer le signal à la sortie du résonateur pour un jet monocinétique et dans le cas de zones d'interaction infiniment courtes. Nous étudierons l'effet de zones d'interaction finies et d'un jet non-monocinétique sur la forme de ce signal dans la deuxième partie de ce chapitre lorsque nous aborderons les transitoires dus à la modulation carrée de phase.

Sous ces hypothèses, la réponse temporelle du résonateur est donnée de

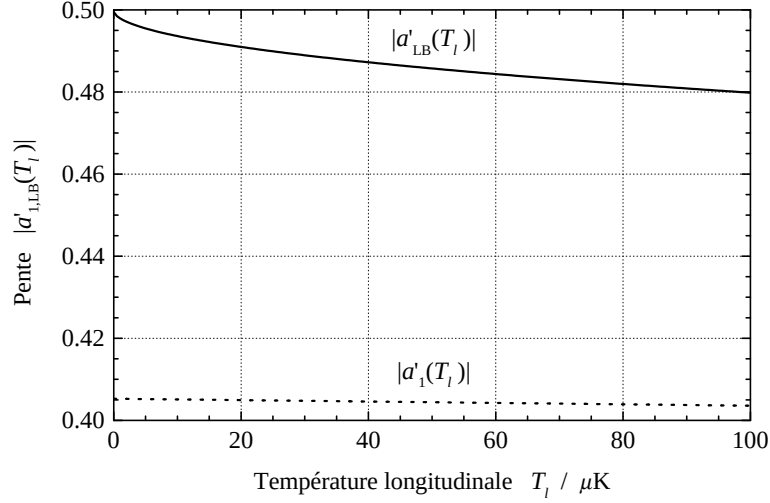


Fig. 5.6: Pente $|a'_{1, LB}(T_l)|$ du signal d'erreur en fonction de la température longitudinale T_l du jet dans le cas de la modulation carrée de phase. La courbe en trait continu correspond à une démodulation large bande ($|a'_{LB}(T_l)|$) et celle en traitillé à la 1^{ère} harmonique ($|a'_1(T_l)|$). Les courbes sont calculées avec les équations (5.30) et (5.31) pour $f_M = \Delta\nu_{1/2}$.

manière générale par l'équation (5.12) :

$$I(t, T) = \frac{1}{2} I_0 \left\{ 1 + \cos \left(\Omega_0 T^* + 2\phi_m c(t, T) \right) \right\} \quad (5.32)$$

La fonction $c(t, T)$ pour la modulation carrée de phase est donnée par l'expression (D.11) dans laquelle on pose $\tau = 0$. Elle est calculée pour une amplitude de modulation optimale $\phi_m^{\text{opt}} = \pi/4$ rad et une fréquence de modulation optimale $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. Dans ces conditions, le signal temporel du résonateur est représenté dans la Fig. 5.7 sur une période de modulation T_M pour un désaccord faible de $\Omega_0 = 0.01 \cdot 2\pi\Delta\nu_{1/2}$. On remarque que la dynamique du signal est très faible. En fait, plus le désaccord est petit, plus la variation du signal est petite et elle devient même nulle à résonance ($I(t) = 1/2$). Cette caractéristique est spécifique à la modulation carrée de phase. En effet, nous verrons qu'avec les deux autres types de modulation la dynamique du signal reste importante, même à résonance. En particulier, la composante de 2^{ème} harmonique est importante, alors qu'elle est nulle avec la modulation carrée de phase. Avec une modulation carrée de phase optimale, rechercher la résonance revient à détecter la différence de deux niveaux constants très proche l'un de l'autre. C'est un avantage car ceci peut être fait avec une résolution élevée du fait que l'écart entre les niveaux est faible ce qui se répercute favorablement sur les performances de l'asservissement de fréquence.

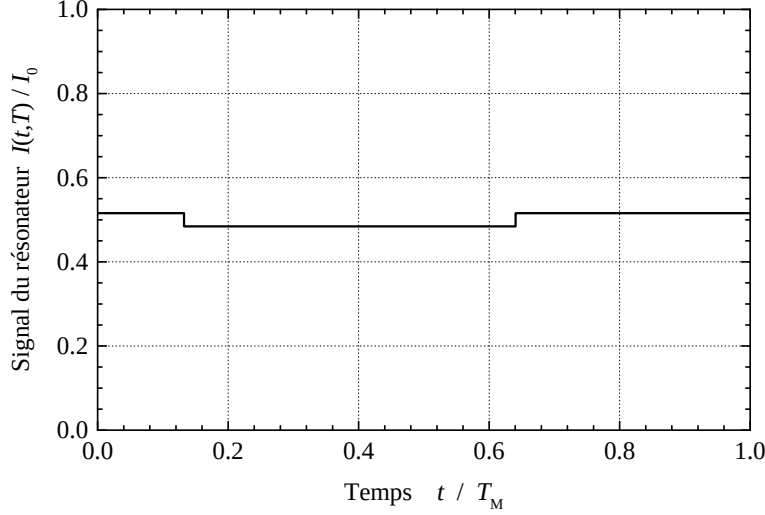


Fig. 5.7: Signal temporel $I(t, T)/I_0$ à la sortie du résonateur dans le cas de la modulation carrée de phase. L'amplitude de modulation vaut $\phi_m^{\text{opt}} = \pi/4$ rad et la fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. La courbe est calculée avec l'équation (5.32) pour un désaccord $\Omega_0 = 0.01 \cdot 2\pi\Delta\nu_{1/2}$. T_M est la période de modulation.

5.2.3 Modulation sinusoïdale de fréquence

Passons au deuxième type de modulation considéré qui est celui de la modulation sinusoïdale de fréquence.

Pente initiale du signal d'erreur a'

Jet monocinétique :

Le coefficient $c_0(T)$ est toujours donné par (D.4) mais avec les coefficients (D.18). La pente initiale du signal d'erreur s'exprime ainsi par :

$$\begin{aligned}
 a'^0(f_M, \varphi) = & -\frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} J_{2p+1} \left(\omega_m T^* \frac{\sin(\pi f_M T^*)}{\pi f_M T^*} \right) \\
 & \times \left\{ \cos((2p+1)\pi f_M(T^* + 2T_{d1}^*)) \sin((2p+1)\varphi) \right. \\
 & \left. + \sin((2p+1)\pi f_M(T^* + 2T_{d1}^*)) \cos((2p+1)\varphi) \right\} \quad (5.33)
 \end{aligned}$$

Avec le déphasage φ optimal qui maximalise a'^0 (équ. (5.23)), l'expression de la pente se réduit à la relation :

$$a'^0(f_M) = -\frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} J_{2p+1} \left(\omega_m T^* \frac{\sin(\pi f_M T^*)}{\pi f_M T^*} \right) \quad (5.34)$$

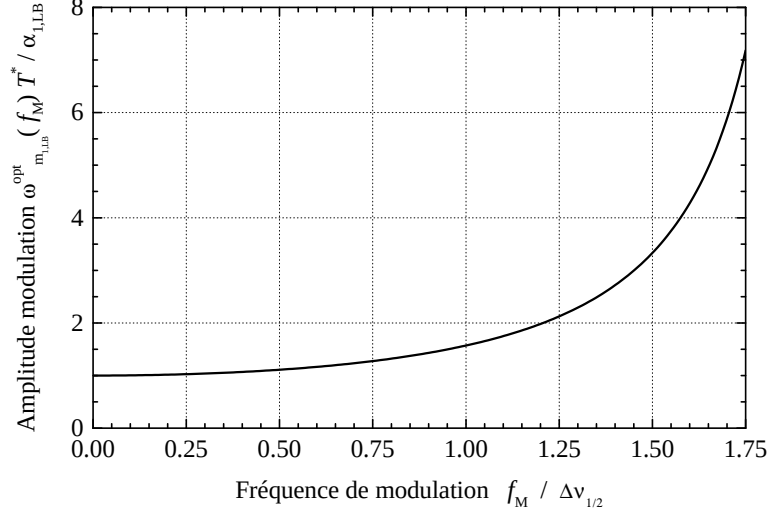


Fig. 5.8: Amplitude de modulation optimale normalisée $\omega_{m1, LB}^{opt} T^* / \alpha_{1, LB}$ en fonction de la fréquence de modulation f_M dans le cas de la modulation sinusoïdale de fréquence. La courbe est calculée avec l'équation (5.35) pour un jet monocinétique.

L'amplitude de modulation optimale de fréquence ω_m^{opt} qui maximalise la pente a'^0 dépend maintenant de la fréquence de modulation f_M et du type de modulation. Elle se déduit de l'équation ci-dessus et vaut :

$$\omega_{m1, LB}^{opt}(f_M) = \frac{\alpha_{1, LB}}{T^*} \cdot \frac{\pi f_M T^*}{|\sin(\pi f_M T^*)|} \quad (5.35)$$

avec le coefficient :

$$\alpha_{1, LB} = \begin{cases} 1.84 & 1^{\text{ère}} \text{ harmonique} \\ 1.98 & \text{large bande} \end{cases} \quad (5.36)$$

Nous avons représenté dans la Fig. 5.8 l'amplitude de modulation optimale normalisée $\omega_{m1, LB}^{opt} T^*$ divisée par $\alpha_{1, LB}$ en fonction de la fréquence de modulation f_M dans l'intervalle $0 < f_M < 1.75 \Delta\nu_{1/2}$. Evidemment, dans ce cas théorique, on a que $\omega_{m1, LB}^{opt} \rightarrow \infty$ lorsque $f_M \rightarrow 2n \Delta\nu_{1/2}$ ($n = 1, 2, \dots$) pour que la différence de phase apparente soit finie. Avec cette amplitude de modulation optimale, la valeur absolue $|a'^0|$ de la pente maximale du signal d'erreur est une constante et ne dépend donc pas de la fréquence de modulation f_M . Elle se monte à :

$$|a'_{1, LB}| = \begin{cases} \frac{2}{\pi} J_1(1.84) = 0.370 & 1^{\text{ère}} \text{ harmonique} \\ \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} J_{2p+1}(1.98) = 0.395 & \text{large bande} \end{cases} \quad (5.37)$$

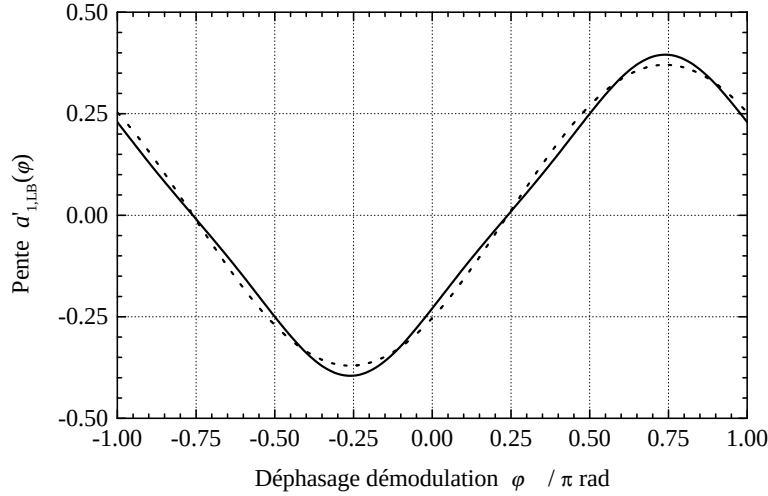


Fig. 5.9: Pente $a'_{1, LB}(\varphi)$ du signal d'erreur en fonction du déphasage φ entre modulation et démodulation dans le cas de la modulation sinusoïdale de fréquence. Les courbes sont représentées pour une fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. La courbe en traitillé correspond à une démodulation de la 1^{ère} harmonique ($a'_1(\varphi)$) et celle en trait continu à une démodulation large bande ($a'_{LB}(\varphi)$). Les courbes sont calculées avec l'équation (5.33) pour une amplitude de modulation optimale.

On constate que la valeur de la pente est inférieure, dans les deux cas, à celle obtenue avec la modulation carrée de phase. Nous avons à nouveau reporté dans la Fig. 5.9 la pente a'^0 en fonction du déphasage φ entre modulation et démodulation. La courbe en traitillé représente le cas de la 1^{ère} harmonique et celle en trait continu celui de la démodulation large bande. On remarque que pour ce dernier cas, autour de la phase optimale, la pente a'_{LB} varie plus lentement que dans le cas de la modulation carrée de phase (cf. Fig. 5.3).

Jet non-monocinétique :

Pour un jet non-monocinétique, la pente a' est donnée par l'équation (5.27) avec les coefficients (5.28). Pour le calcul de ces derniers, il faut maintenant prendre les coefficients $a_{2p+1}(\omega_m, f_M, T)$ et $b_{2p+1}(\omega_m, f_M, T)$ correspondant à la modulation sinus de fréquence. Ils sont donnés par les équations (D.18).

Pour le cas de la 1^{ère} harmonique, la valeur absolue de la pente a'_1 est toujours donnée par (5.29). Les coefficients $A_1(f_M)$ et $B_1(f_M)$, en gardant

l'amplitude de modulation optimale monocinétique (5.35), se calculent par :

$$A_1(f_M) \simeq 2 \int_0^{+\infty} \rho(T) J_1 \left(\alpha_1 \frac{\sin(\pi f_M T^*(T))}{|\sin(\pi f_M \bar{T}^*)|} \right) \times \cos \left(\pi f_M (T^* - \bar{T}^* + 2(T_{d1}^* - \bar{T}_{d1}^*)) \right) dT \quad (5.38a)$$

$$B_1(f_M) \simeq 2 \int_0^{+\infty} \rho(T) J_1 \left(\alpha_1 \frac{\sin(\pi f_M T^*(T))}{|\sin(\pi f_M \bar{T}^*)|} \right) \times \sin \left(\pi f_M (T^* - \bar{T}^* + 2(T_{d1}^* - \bar{T}_{d1}^*)) \right) dT \quad (5.38b)$$

Pour une démodulation large bande avec la phase optimale monocinétique (5.23) et l'amplitude de modulation optimale monocinétique (5.35), la pente a'_{LB} s'exprime par :

$$a'_{LB}(f_M) = -\frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A_{2p+1}(f_M)}{2p+1} \quad (5.39)$$

avec

$$A_{2p+1}(f_M) \simeq \int_0^{+\infty} \rho(T) J_{2p+1} \left(\alpha_{LB} \frac{\sin(\pi f_M T^*(T))}{|\sin(\pi f_M \bar{T}^*)|} \right) \times \cos \left((2p+1)\pi f_M (T^* - \bar{T}^* + 2(T_{d1}^* - \bar{T}_{d1}^*)) \right) dT \quad (5.40)$$

La dépendance de $|a'|$ avec f_M pour un jet non-monocinétique de température longitudinale $T_l = 75 \mu K$ est représentée dans la Fig. 5.10 pour le cas de la 1^{ère} harmonique (courbe en traitillé) et celui d'une démodulation large bande (courbe en trait continu). On remarque que l'effet de la température est insignifiant jusqu'à une fréquence de modulation de l'ordre de $f_M \simeq 1.5 \Delta\nu_{1/2}$. Ceci aussi bien pour le cas de la 1^{ère} harmonique que pour celui de la démodulation large bande. Au-delà de cette valeur, $|a'|$ commence à diminuer et devient très petit lorsque $f_M \rightarrow 2 \Delta\nu_{1/2}$. Comme l'effet de la température sur $|a'|$ est très faible pour une fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$, nous n'avons pas recalculé la variation de $|a'|$ en fonction de la phase dans le cas d'un jet non-monocinétique. Cette dépendance devrait être identique à celle du cas monocinétique (cf. Fig. 5.9) pour cette fréquence. La variation de $|a'|$ en fonction de la température longitudinale T_l à cette fréquence de modulation n'est également pas reportée car, comme nous l'avons vu, la pente ne diminue pratiquement pas pour des températures de l'ordre de celles obtenues dans la fontaine continue.

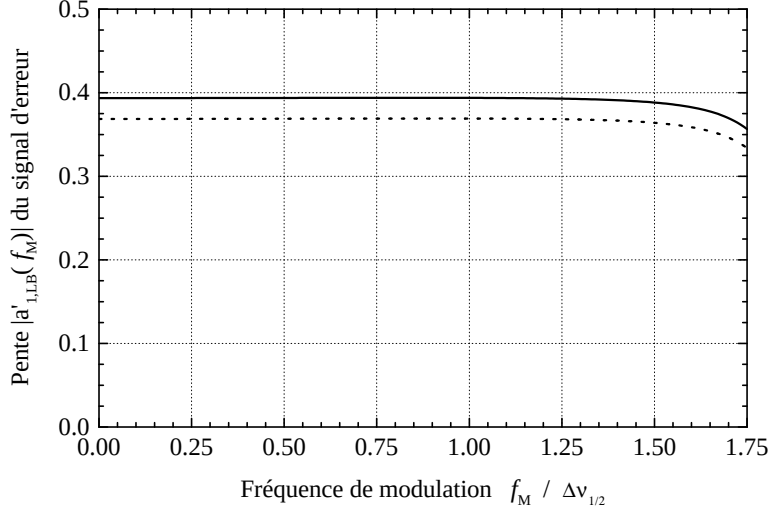


Fig. 5.10: Pente $|a'_{1,LB}(f_M)|$ du signal d'erreur en fonction de la fréquence de modulation f_M dans le cas de la modulation sinusoïdale de fréquence pour un jet non-monocinétique de température longitudinale $T_l = 75 \mu\text{K}$. Les courbes sont calculées pour une amplitude de modulation et une démodulation optimales (monocinétique). La courbe en trait continu correspond à une démodulation large bande ($|a'_{LB}(f_M)|$) et celle en traitillé au cas de la 1^{ère} harmonique ($|a'_1(f_M)|$). $\Delta\nu_{1/2}$ est la largeur à mi-hauteur de la frange centrale.

Signal à la sortie du résonateur

Le signal à la sortie du résonateur se calcule, sous les mêmes hypothèses que précédemment, avec l'équation (5.32) où la fonction $c(t, T)$ pour la modulation sinusoïdale de fréquence est donnée par l'expression (D.15). L'évolution temporelle du signal est représentée dans la Fig. 5.11, pour une amplitude de modulation optimale, à la fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. On remarque que la dynamique du signal est importante par rapport à celle de la modulation carrée de phase. Et ceci même à résonance, car elle varie entre $\sim 0.3 I_0$ et I_0 . Le contenu en 2^{ème} harmonique du signal est important. Si le signal est numérisé, la sensibilité de la détection de la résonance s'en trouve par conséquent diminuée par rapport à celle de la modulation carrée de phase.

5.2.4 Modulation carrée de fréquence

Passons au dernier type de modulation considéré qui est celui de la modulation carrée de fréquence.

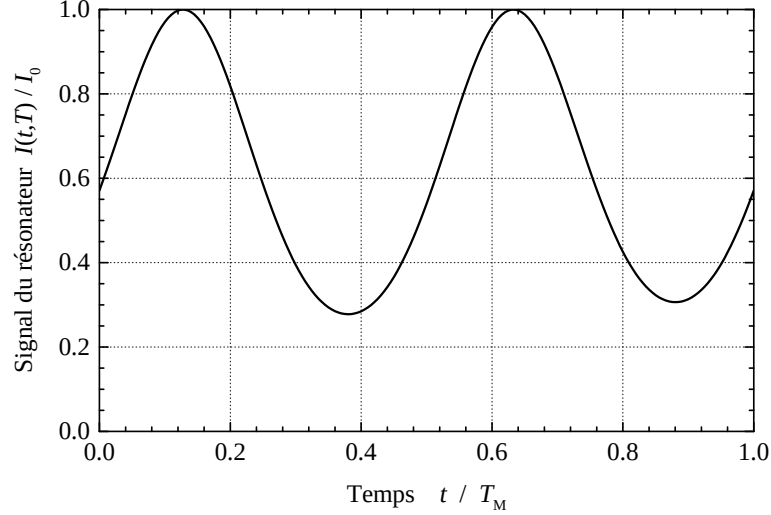


Fig. 5.11: Signal temporel $I(t, T)/I_0$ à la sortie du résonateur dans le cas de la modulation sinusoïdale de fréquence. L'amplitude de modulation est optimale pour la fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. La courbe est calculée avec l'équation (5.32) pour un désaccord $\Omega_0 = 0.01 \cdot 2\pi\Delta\nu_{1/2}$. T_M est la période de modulation.

Pente initiale du signal d'erreur a'

Jet monocinétique :

Le coefficient $c_0(T)$ est encore donné par (D.4) mais cette fois avec les coefficients $a_{2p+1}(\omega_m, f_M, T)$ et $b_{2p+1}(\omega_m, f_M, T)$ donnés par les équations (D.23). La pente initiale du signal d'erreur s'exprime ainsi par :

$$a'^0(f_M, \varphi) = -\frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \left\{ a_{2p+1}(\omega_m, f_M, T) \sin((2p+1)\varphi) + b_{2p+1}(\omega_m, f_M, T) \cos((2p+1)\varphi) \right\} \quad (5.41)$$

Avec le déphasage φ optimal (équ. (5.23)), l'expression de la pente se réduit à la relation :

$$a'^0(f_M) = -\frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \left\{ a_{2p+1}(\omega_m, f_M, T) \cos((2p+1)\pi f_M(T^* + 2T_{d1}^*)) + b_{2p+1}(\omega_m, f_M, T) \sin((2p+1)\pi f_M(T^* + 2T_{d1}^*)) \right\} \quad (5.42)$$

L'amplitude de modulation optimale de fréquence ω_m^{opt} qui maximalise la pente a'^0 dépend également de la fréquence de modulation f_M . Sa variation,

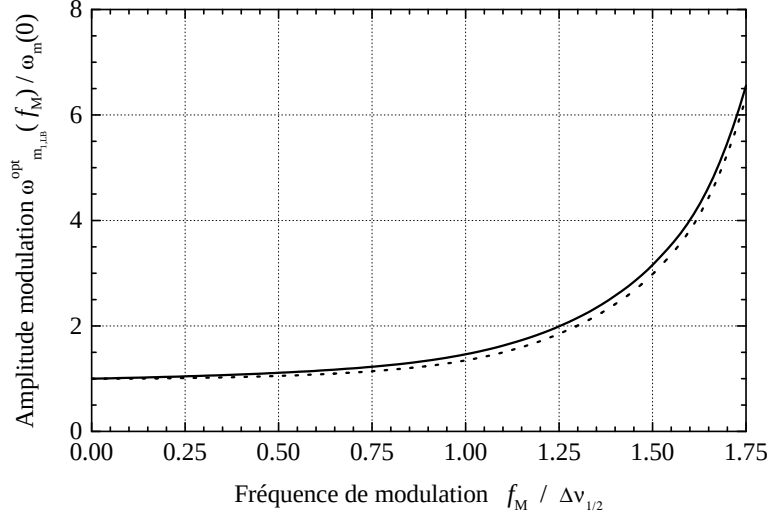


Fig. 5.12: Amplitude de modulation optimale normalisée $\omega_{m_{LB}}^{\text{opt}}(f_M)/\omega_m^{\text{opt}}(0)$ en fonction de la fréquence de modulation f_M dans le cas de la modulation carrée de fréquence. La courbe en traitillé correspond au cas de la 1^{ère} harmonique ($\omega_{m_1}^{\text{opt}}(f_M)$) et celle en trait continu à la démodulation large bande ($\omega_{m_{LB}}^{\text{opt}}(f_M)$). Les courbes sont calculées numériquement à partir de l'équation (5.42) pour un jet monocinétique.

normalisée à sa valeur quasi-statique limite $\omega_m^{\text{opt}}(0)$, en fonction de la fréquence de modulation est représentée dans la Fig. 5.12 pour le cas de la 1^{ère} harmonique (courbe en traitillé) et celui de la démodulation large bande (courbe en trait continu). La différence entre les deux cas est faible, l'amplitude de modulation optimale est légèrement plus grande dans le cas de la démodulation large bande que dans celui de la 1^{ère} harmonique, comme c'est le cas pour la modulation sinusoïdale de fréquence. La valeur absolue de la pente a^0 en fonction de la fréquence de modulation f_M , calculée avec l'amplitude de modulation optimale de la Fig. 5.12, est représentée dans la Fig. 5.13 pour le cas de la 1^{ère} harmonique (courbe en traitillé) et celui de la démodulation large bande (courbe en trait continu). On remarque que l'allure générale des deux courbes est semblable. La pente $|a^0|$ est maximale lorsque la fréquence de modulation $f_M \rightarrow 0$ (cas quasi-statique standard). La valeur de la pente diminue lorsque la fréquence de modulation augmente pour atteindre un minimum lorsque la fréquence est égale à la largeur à mi-hauteur de la frange centrale ($f_M = \Delta\nu_{1/2}$). Au-delà, la pente augmente à nouveau pour atteindre la valeur maximale théorique limite lorsque la fréquence $f_M \rightarrow 2\Delta\nu_{1/2}$, pour une amplitude de modulation $\omega_m^{\text{opt}} \rightarrow +\infty$. On constate donc que la pente a^0 est minimale dans les deux cas à $f_M = \Delta\nu_{1/2}$, contrairement à la modulation carrée de phase, et vaut $|a_{LB}^0| = 0.362$ pour la

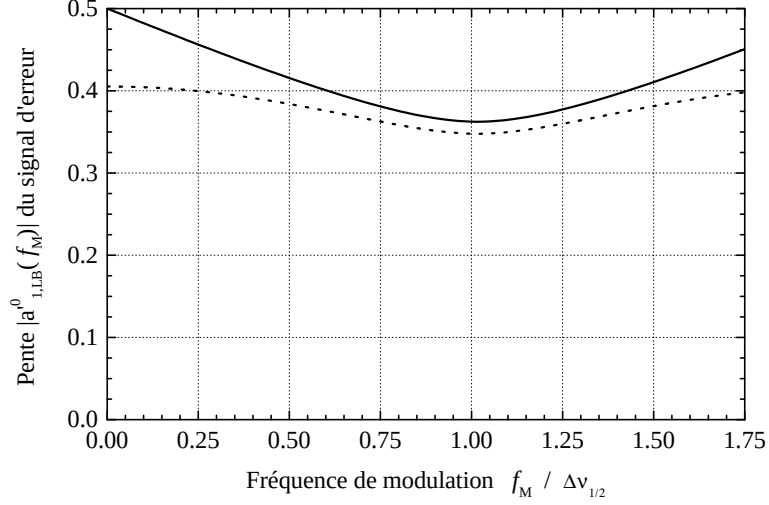


Fig. 5.13: Pente $|a_{1, LB}^0(f_M)|$ du signal d'erreur en fonction de la fréquence de modulation f_M dans le cas de la modulation carrée de fréquence. La courbe en traitillé correspond à une démodulation de la 1^{ère} harmonique ($a_1^0(f_M)$) et celle en trait continu à une démodulation large bande ($a_{LB}^0(f_M)$). Les courbes sont calculées avec l'équation (5.42) pour une amplitude de modulation et une démodulation optimales. $\Delta\nu_{1/2}$ est la largeur à mi-hauteur de la frange centrale.

démodulation large bande et $|a_1^0| = 0.347$ dans le cas de la 1^{ère} harmonique. La valeur maximale de a^0 est atteinte pour une fréquence $f_M \rightarrow 0$ et vaut $|a_{LB}^0| = 0.5$ pour le cas large bande et $|a_1^0| = 4/\pi^2 = 0.405$ pour la 1^{ère} harmonique. Nous avons aussi reporté dans la Fig. 5.14 la pente a^0 en fonction du déphasage φ entre modulation et démodulation pour $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. La courbe en traitillé représente le cas de la 1^{ère} harmonique et celle en trait continu celui de la démodulation large bande. On note que pour ce dernier cas, autour de la phase optimale, la pente a_{LB}^0 varie légèrement plus lentement que dans le cas de la modulation sinusoïdale de fréquence (cf. Fig. 5.9).

Jet non-monocinétique :

Dans le cas du jet non-monocinétique démodulé avec la phase optimale monocinétique (5.23), la pente a' s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
 a'(f_M) = & -\frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \left\{ A_{2p+1}(\omega_m, f_M) \cos\left(\pi f_M (\bar{T}^* + 2\bar{T}_{d1}^*)\right) \right. \\
 & \left. + B_{2p+1}(\omega_m, f_M) \sin\left(\pi f_M (\bar{T}^* + 2\bar{T}_{d1}^*)\right) \right\} \quad (5.43)
 \end{aligned}$$

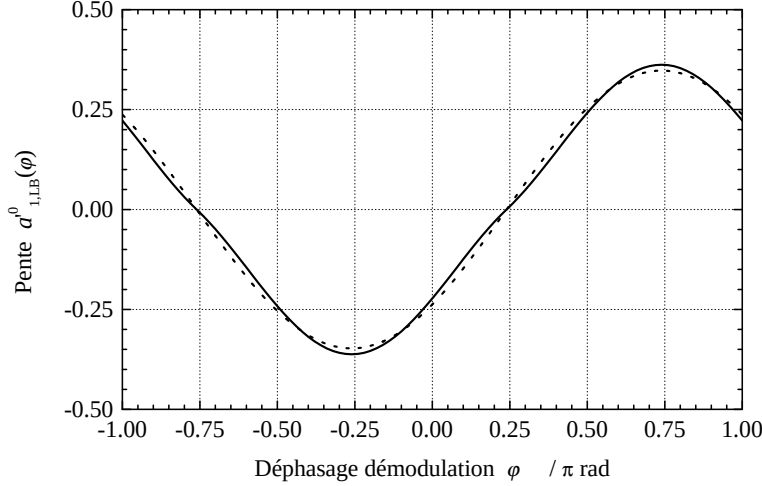


Fig. 5.14: Pente $a'_{1, LB}{}^0(\varphi)$ du signal d'erreur en fonction du déphasage φ entre modulation et démodulation dans le cas de la modulation carrée de fréquence. Les courbes sont représentées pour une fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. La courbe en traitillé correspond à une démodulation de la 1^{ère} harmonique ($a_1^0(\varphi)$) et celle en trait continu à une démodulation large bande ($a_{LB}^0(\varphi)$). Les courbes sont calculées avec l'équation (5.41) pour une amplitude de modulation optimale.

Les coefficients $A_{2p+1}(\omega_m, f_M)$ et $B_{2p+1}(\omega_m, f_M)$ se calculent avec les relations (5.28) et les coefficients $a_{2p+1}(\omega_m, f_M, T)$ et $b_{2p+1}(\omega_m, f_M, T)$ d'après les équ. (D.23) avec l'amplitude de modulation optimale ω_m^{opt} déterminée dans la Fig. 5.12.

Afin de simplifier les calculs, remarquons que la variation de cette amplitude optimale est très bien approchée dans l'intervalle $0 < f_M < 1.75 \Delta\nu_{1/2}$, en particulier pour le cas large bande, par une dépendance en fonction de la fréquence de modulation identique au cas de la modulation sinusoïdale de fréquence (équ. (5.35)). On peut donc décrire l'amplitude de modulation optimale dans le cas de la modulation carrée de fréquence, pour une démodulation de la 1^{ère} harmonique et une démodulation large bande, par la relation suivante :

$$\omega_m^{\text{opt}}(f_M) = \omega_m^{\text{opt}}(0) \frac{\pi f_M \bar{T}^*}{|\sin(\pi f_M \bar{T}^*)|} \quad (5.44)$$

où $\omega_m^{\text{opt}}(0)$ est l'amplitude de modulation optimale quasi-statique pour $f_M \rightarrow 0$ donnée par :

$$\omega_m(0) = 2\pi \frac{\Delta\nu_{1/2}}{2} \quad (5.45)$$

En calculant de cette manière, on obtient pour la valeur absolue de la pente a' en fonction de la fréquence de modulation, pour un jet non-monocinétique de

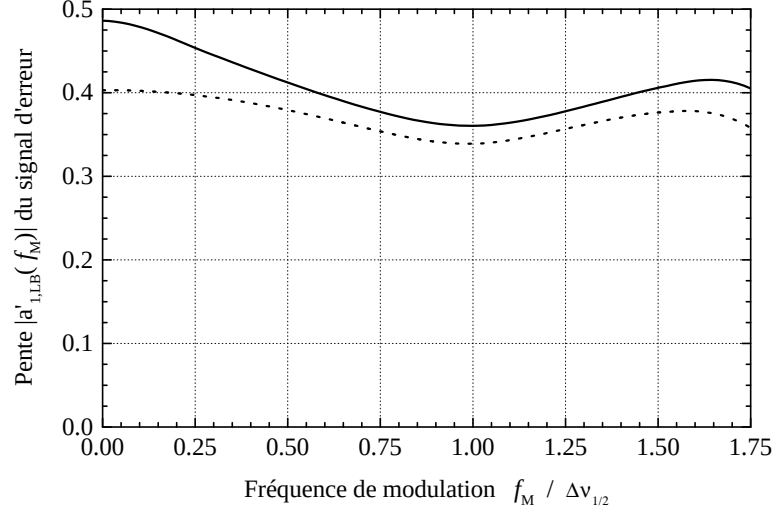


Fig. 5.15: Pente $|a'_{1, LB}(f_M)|$ du signal d'erreur en fonction de la fréquence de modulation f_M dans le cas de la modulation carrée de fréquence pour un jet non-monocinétique de température longitudinale $T_l = 75 \mu\text{K}$. Les courbes sont calculées pour une amplitude de modulation et une démodulation optimales (monocinétique). La courbe en trait continu correspond à une démodulation large bande ($a'_{LB}(f_M)$) et celle en traitillé au cas de la 1^{ère} harmonique ($a'_1(f_M)$). $\Delta\nu_{1/2}$ est la largeur à mi-hauteur de la frange centrale.

température longitudinale $T_l = 75 \mu\text{K}$, le résultat présenté dans la Fig. 5.15. L'effet général de la température sur la valeur de la pente $|a'|$ est similaire au cas de la modulation sinusoïdale de fréquence. Il est faible jusqu'à une fréquence de modulation de l'ordre de $f_M \simeq 1.5 \Delta\nu_{1/2}$. Ceci aussi bien pour le cas de la 1^{ère} harmonique que pour celui de la démodulation large bande. Au-delà de cette valeur, $|a'|$ commence à diminuer véritablement et devient très petit lorsque $f_M \rightarrow 2 \Delta\nu_{1/2}$. La valeur maximale de la pente pour une fréquence de modulation $f_M \rightarrow 0$ (limite quasi-statique) vaut $|a'_1| = 0.403$ pour la 1^{ère} harmonique et $|a'_{LB}| = 0.486$ pour la démodulation large bande. A la fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$, on obtient $|a'_1| = 0.339$ et $|a'_{LB}| = 0.360$. Ici aussi, nous n'avons pas recalculé la variation de $|a'|$ en fonction de la phase dans le cas d'un jet non-monocinétique. Cette dépendance devrait être identique à celle du cas monocinétique (cf. Fig. 5.14) pour une fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. La variation de $|a'|$ en fonction de la température longitudinale T_l n'est également pas reportée car pour cette fréquence de modulation, comme nous l'avons vu, la pente ne diminue pratiquement pas pour des températures de l'ordre de celles obtenues dans la fontaine continue.

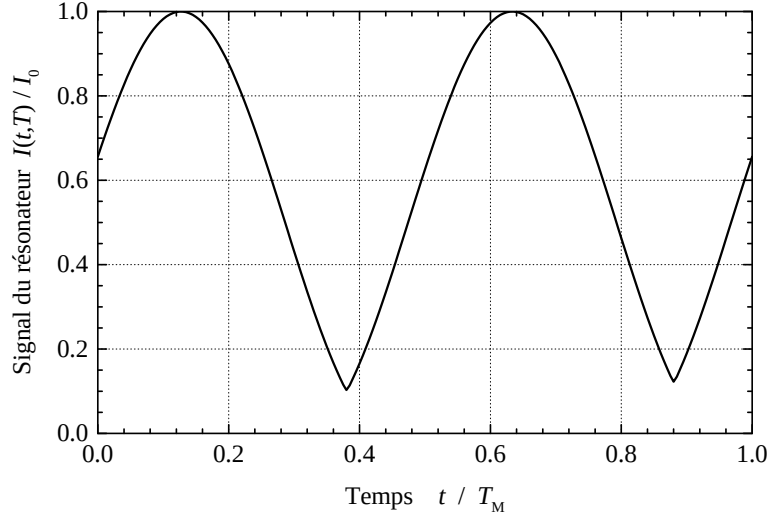


Fig. 5.16: Signal temporel $I(t, T)/I_0$ à la sortie du résonateur dans le cas de la modulation carrée de fréquence. L'amplitude de modulation est optimale pour la fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. La courbe est calculée avec l'équation (5.32) pour un désaccord $\Omega_0 = 0.01 \cdot 2\pi\Delta\nu_{1/2}$. T_M est la période de modulation.

Signal à la sortie du résonateur

Le signal à la sortie du résonateur se calcule toujours avec l'équation (5.32) où la fonction $c(t, T)$ pour la modulation carrée de fréquence est donnée par l'expression (D.22). L'évolution temporelle du signal est représentée dans la Fig. 5.16, pour une amplitude de modulation optimale, à la fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ et pour un désaccord micro-onde $\Omega_0 = 0.01 \cdot 2\pi\Delta\nu_{1/2}$. On observe que la dynamique du signal est encore plus importante (contenu en 2^{ème} harmonique) dans ce cas que dans celui de la modulation sinusoïdale de fréquence. Même à résonance, elle varie entre $\sim 0.1 I_0$ et I_0 . La sensibilité de la détection de la résonance s'en trouve par conséquent encore diminuée par rapport à la modulation sinusoïdale de fréquence.

Pour terminer cette section consacrée aux différents schémas de modulation - démodulation, nous résumons dans le Tab. 5.1 les valeurs numériques de la pente $|a'|$ et les valeurs des paramètres de modulation correspondants pour chaque type de modulation pour la fréquence de modulation optimale. Dans le Tab. 5.2, nous avons encore reporté les valeurs numériques de la pente $|a'|$ et des paramètres de modulation correspondants à la fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ pour les modulations sinusoïdale et carrée de fréquence.

Grandeur	Notation	Valeur	
		Jet mono. $T_l = 0$	Jet non-mono. $T_l = 75 \mu\text{K}$
<i>Modulation carrée de phase :</i>			
Valeur absolue de la pente a'_1	$ a_1^0 , a'_1 $	0.405	0.404
Valeur abs. de la pente a'_{LB}	$ a_{\text{LB}}^0 , a'_{\text{LB}} $	0.5	0.482
Amplitude modul. optimale	$\phi_{\text{m}}^{\text{opt}}$	$\pi/4 \text{ rad}$	$\pi/4 \text{ rad}$
Phase démodulation optimale	φ_{opt}	-0.82 rad	-0.82 rad
<i>Modulation sinus. de fréq. :</i>			
Amplitude de modul. norm.	$\omega_{\text{m1}}^{\text{opt}} T^*$	2.89	2.89
Valeur absolue de la pente a'_1	$ a_1^0 , a'_1 $	0.370	0.369
Amplitude de modul. norm.	$\omega_{\text{mLB}}^{\text{opt}} T^*$	3.11	3.11
Valeur abs. de la pente a'_{LB}	$ a_{\text{LB}}^0 , a'_{\text{LB}} $	0.395	0.394
Phase démodulation optimale	φ_{opt}	-0.82 rad	-0.82 rad
<i>Modulation carrée de fréq. :</i>			
Amplitude de modul. norm.	$\omega_{\text{m1}}^{\text{opt}} T^*$	2.15	2.15
Valeur absolue de la pente a'_1	$ a_1^0 , a'_1 $	0.347	0.339
Amplitude de modul. norm.	$\omega_{\text{mLB}}^{\text{opt}} T^*$	2.33	2.33
Valeur abs. de la pente a'_{LB}	$ a_{\text{LB}}^0 , a'_{\text{LB}} $	0.362	0.360
Phase démodulation optimale	φ_{opt}	-0.82 rad	-0.82 rad

Tab. 5.1: Valeurs numériques de la pente $|a'_{1,\text{LB}}|$ et des paramètres de modulation correspondants déterminés dans la section 5.2. Ces valeurs sont indiquées pour chaque type de modulation à la fréquence de modulation $f_{\text{M}} = \Delta\nu_{1/2}$.

Grandeur	Notation	Valeur	
		Jet mono. $T_l = 0$	Jet non-mono. $T_l = 75 \mu\text{K}$
<i>Modulation sinus. de fréq. :</i>			
Amplitude de modul. norm.	$\omega_{m1}^{\text{opt}} T^*$	1.84	1.84
Valeur absolue de la pente a'_1	$ a_1^0 , a'_1 $	0.370	0.369
Amplitude de modul. norm.	$\omega_{mLB}^{\text{opt}} T^*$	1.98	1.98
Valeur abs. de la pente a'_{LB}	$ a_{LB}^0 , a'_{LB} $	0.395	0.394
Phase démodulation optimale	φ_{opt}	$\pi/2 \text{ rad}$	$\pi/2 \text{ rad}$
<i>Modulation carrée de fréq. :</i>			
Amplitude de modul. norm.	$\omega_{m1}^{\text{opt}} T^*$	$\pi/2$	$\pi/2$
Valeur absolue de la pente a'_1	$ a_1^0 , a'_1 $	0.405	0.403
Amplitude de modul. norm.	$\omega_{mLB}^{\text{opt}} T^*$	$\pi/2$	$\pi/2$
Valeur abs. de la pente a'_{LB}	$ a_{LB}^0 , a'_{LB} $	0.5	0.486
Phase démodulation optimale	φ_{opt}	$\pi/2 \text{ rad}$	$\pi/2 \text{ rad}$

Tab. 5.2: Valeurs numériques de la pente $|a'_{1, LB}|$ et des paramètres de modulation correspondants à la limite quasi-statique $f_M \rightarrow 0$ pour les modulations sinusoïdale et carrée de fréquence.

5.3 Transitoires et modulation carrée de phase

Ainsi que nous le verrons dans le prochain chapitre, la modulation carrée de phase est particulièrement bien adaptée en ce qui concerne la stabilité de fréquence de la fontaine continue. Comme nous venons de le voir dans cette première partie, ce type de modulation fournit, à la résonance, un signal à la sortie du résonateur qui ne contient pas de 2^{ème} harmonique. Par rapport aux autres formes de modulation, ceci est un avantage. Cependant, nous avons calculé la forme de ce signal en faisant plusieurs hypothèses simplificatrices. Notamment, nous avons considéré des zones d'interaction micro-onde infiniment courtes équivalentes. Si l'on tient compte de la largeur finie des zones d'interaction micro-onde, les atomes du jet peuvent subir un changement de la phase du champ magnétique oscillant lorsqu'ils traversent ces zones d'interaction. Il en résulte une brusque variation du signal du résonateur sur un intervalle temporel de l'ordre de la durée de l'interaction micro-onde qui se répète deux fois sur la période de modulation. Cette variation rapide du signal est appelée transitoire et sa forme dépend des paramètres de la modulation. Nous nous proposons, dans la seconde partie de ce chapitre, d'étudier la forme de ces transitoires afin de déterminer la valeur des paramètres, en particulier de la fréquence de modulation, qui minimisent ces transitoires.

5.3.1 Jet monocinétique et zones d'interaction finies

Commençons avec le cas d'un jet monocinétique et des zones d'interaction finies. On a vu que dans la modulation carrée de phase, la phase est constante pendant une demi-période de modulation. Il s'ensuit qu'une méthode de calcul possible pour tenir compte d'un changement de phase à l'intérieur d'une zone d'interaction consiste à découper l'interaction micro-onde en deux séquences temporelles successives pour lesquelles la phase du champ magnétique oscillant est constante. L'interrogation de Ramsey totale est ainsi décrite par cinq séquences temporelles, s'il y a un changement de phase dans chaque zone d'interaction, où la phase du champ est constante. Ceci est schématisé dans la Fig. 5.17 pour le cas où il y a un changement de phase dans chaque zone d'interaction. En utilisant le formalisme des équations de Bloch et du spin fictif exposé dans l'annexe E, on peut représenter l'évolution du vecteur de Bloch durant chaque séquence temporelle par une rotation de ce vecteur dans l'espace du spin fictif autour d'un axe déterminé. Une rotation d'un angle α autour d'un axe $\vec{\Omega}$ de coordonnées $(-\Omega_c \cos \phi, \Omega_c \sin \phi, \Omega_0)$, où Ω_c est la fréquence de Rabi micro-onde définie par (4.69), ϕ la phase du champ RF et Ω_0 le désaccord micro-onde, est décrite par une matrice de rotation $\mathbf{R}(\Omega_c, \phi, \Omega_0, \alpha)$ dont les éléments de matrice sont donnés par les équations

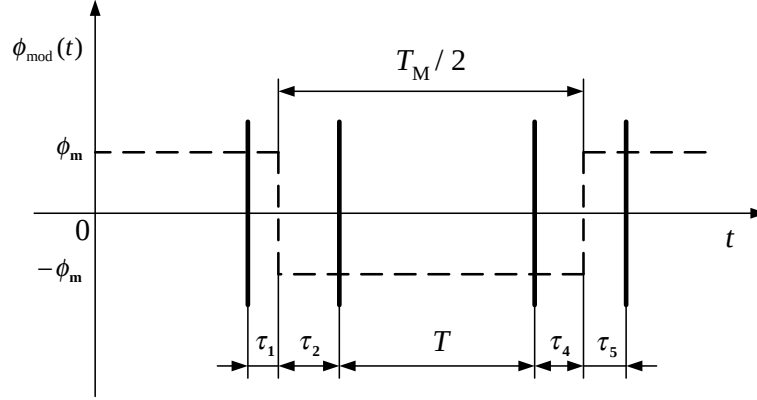


Fig. 5.17: Représentation schématique de la décomposition de l'interrogation de Ramsey avec modulation carrée de phase en séquences temporelles où la phase du champ magnétique est constante. Nous avons représenté le cas où il y a un changement de phase dans chaque zone d'interaction micro-onde. L'interaction totale des atomes du jet avec le champ RF est alors décrite par cinq séquences temporelles.

(E.9). L'évolution temporelle du vecteur de Bloch final $\vec{b}_f(t)$ à la sortie de la deuxième zone d'interaction peut alors s'écrire :

$$\vec{b}_f(t) = \mathbf{R}_{\text{tot}}(t) \cdot \vec{b}_i \quad (5.46)$$

où $\vec{b}_i$ est le vecteur de Bloch initial à l'entrée de la première zone d'interaction micro-onde et $\mathbf{R}_{\text{tot}}(t)$ est la matrice qui décrit la rotation totale du vecteur de Bloch au temps t sous la forme du produit chronologique des matrices de rotation correspondant à chaque séquence temporelle :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\text{tot}}(t) = & \mathbf{R}(\Omega_c, \phi_5(t), \Omega_0, \alpha_5(t)) \cdot \mathbf{R}(\Omega_c, \phi_4(t), \Omega_0, \alpha_4(t)) \\ & \cdot \mathbf{R}(0, 0, \Omega_0, \Omega_0 T) \cdot \mathbf{R}(\Omega_c, \phi_2(t), \Omega_0, \alpha_2(t)) \\ & \cdot \mathbf{R}(\Omega_c, \phi_1(t), \Omega_0, \alpha_1(t)) \end{aligned} \quad (5.47)$$

où $\alpha_i(t)$ et $\phi_i(t)$ ($i = 1, 2, 4, 5$) représentent l'évolution temporelle, respectivement de l'angle de rotation et de la phase du champ magnétique⁶, correspondant à la séquence temporelle i d'une zone d'interaction.

Le signal temporel $I(t)$ à la sortie du résonateur est supposé proportionnel à la probabilité de transition temporelle $P(t)$. Cette dernière est reliée à $\vec{b}_f(t)$ par l'équation (E.12) si l'inversion de population initiale est complète ($w_i = -1/2$). Le signal $I(t)$ s'exprime alors par la relation suivante :

$$I(t) = \frac{1}{2} I_0 \left(1 - \mathbf{R}_{\text{tot}33}(t) \right) \quad (5.48)$$

⁶Les phases $\phi_i(t)$ sont des fonctions constantes par morceaux.

où I_0 est le signal maximal lorsque l'on se place au sommet de la frange centrale et $\mathbf{R}_{\text{tot}33}(t)$ est le troisième élément diagonal de la matrice de rotation totale. Nous donnons ci-dessous l'expression de l'élément $\mathbf{R}_{\text{tot}33}(t)$ dans le cas où l'on néglige le désaccord Ω_0 ($\Omega_0/\Omega_c \ll 1$) dans les zones d'interaction (éléments de matrice donnés par (E.10) et (E.11)) et en supposant qu'il n'existe pas de différence de phase constante entre ces deux zones ($\Delta\phi = 0$). Sous ces hypothèses, on obtient l'expression suivante :

$$\mathbf{R}_{\text{tot}33}(t) = \eta(t) - \kappa(t) \cos(\Omega_0 T) - \sigma(t) \sin(\Omega_0 T) \quad (5.49)$$

avec

$$\begin{aligned} \eta(t) = & \left\{ \cos(\alpha_5(t)) \cos(\alpha_4(t)) - (\cos^2\phi_m - \sin^2\phi_m) \sin(\alpha_5(t)) \sin(\alpha_4(t)) \right\} \\ & \times \left\{ \cos(\alpha_2(t)) \cos(\alpha_1(t)) - (\cos^2\phi_m - \sin^2\phi_m) \sin(\alpha_2(t)) \sin(\alpha_1(t)) \right\} \end{aligned} \quad (5.50a)$$

$$\begin{aligned} \kappa(t) = & \cos^2\phi_m \left\{ \left[2 \sin^2\phi_m (1 - \cos(\alpha_4(t))) + \cos(\alpha_4(t)) \right] \sin(\alpha_5(t)) \right. \\ & + \cos(\alpha_5(t)) \sin(\alpha_4(t)) \left. \right\} \left\{ \left[2 \sin^2\phi_m (1 - \cos(\alpha_2(t))) + \cos(\alpha_2(t)) \right] \right. \\ & \times \sin(\alpha_1(t)) + \sin(\alpha_2(t)) \cos(\alpha_1(t)) \left. \right\} - \sin(\phi_4(t)) \sin(\phi_1(t)) \\ & \times \left\{ \left[2 \cos^2\phi_m (1 - \cos(\alpha_4(t))) + \cos(\alpha_4(t)) \right] \sin(\alpha_5(t)) - \cos(\alpha_5(t)) \right. \\ & \times \sin(\alpha_4(t)) \left. \right\} \left\{ \left[2 \cos^2\phi_m (1 - \cos(\alpha_2(t))) + \cos(\alpha_2(t)) \right] \sin(\alpha_1(t)) \right. \\ & \left. - \sin(\alpha_2(t)) \cos(\alpha_1(t)) \right\} \end{aligned} \quad (5.50b)$$

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \cos\phi_m \sin(\phi_4(t)) \left\{ \left[2 \cos^2\phi_m (1 - \cos(\alpha_4(t))) + \cos(\alpha_4(t)) \right] \right. \\ & \times \sin(\alpha_5(t)) - \cos(\alpha_5(t)) \sin(\alpha_4(t)) \left. \right\} \left\{ \left[2 \sin^2\phi_m (1 - \cos(\alpha_2(t))) \right. \right. \\ & + \cos(\alpha_2(t)) \left. \right] \sin(\alpha_1(t)) + \sin(\alpha_2(t)) \cos(\alpha_1(t)) \left. \right\} - \sin(\phi_1(t)) \\ & \times \cos\phi_m \left\{ \left[2 \sin^2\phi_m (1 - \cos(\alpha_4(t))) + \cos(\alpha_4(t)) \right] \sin(\alpha_5(t)) \right. \\ & - \cos(\alpha_5(t)) \sin(\alpha_4(t)) \left. \right\} \left\{ \left[2 \cos^2\phi_m (1 - \cos(\alpha_2(t))) + \cos(\alpha_2(t)) \right] \right. \\ & \times \sin(\alpha_1(t)) - \sin(\alpha_2(t)) \cos(\alpha_1(t)) \left. \right\} \end{aligned} \quad (5.50c)$$

où ϕ_m est l'amplitude de modulation de la phase.

Cas des champ B_{RF} à amplitude constante et sinusoïdale

Pour le calcul des transitoires, nous allons considérer les deux types de profil d'intensité du champ magnétique B_{RF} les plus courants : le champ dont l'amplitude est constante et le champ dont l'amplitude varie sinusoïdalement.

Pour ces deux cas, les angles de rotation $\alpha_i(t)$ sont donnés par :

$$\alpha_i^{B_{\text{RF}}^{\text{const}}}(t) = \Omega_c \tau_i(t) \quad (5.51a)$$

$$\alpha_i^{B_{\text{RF}}^{\text{sinus}}}(t) = \int_0^{\tau_i(t)} \Omega_c(t') dt' = \frac{1}{2} \Omega_c \tau \left\{ 1 - \cos(\pi \tau_i(t)/\tau) \right\} \quad (5.51b)$$

où $\tau_i(t)$ est le temps d'interaction, à l'instant t , correspondant à la séquence temporelle i d'une zone d'interaction et τ le temps d'interaction total dans une zone d'interaction. Pour calculer $I(t)$, il faut connaître la dépendance temporelle des angles de rotation $\alpha_i(t)$, c.-à-d. des temps d'interactions $\tau_i(t)$, et des phases $\phi_i(t)$ pour chaque fréquence de modulation considérée.

Nous considérons ici uniquement les transitoires correspondants aux intervalles de fréquence de modulation qui sont couverts par les atomes d'un jet non-monocinétique où la fréquence de modulation optimale est ajustée pour la vitesse longitudinale moyenne du jet. Nous avons déterminé ces différents intervalles de fréquence autour de la fréquence de modulation optimale $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ et l'évolution temporelle correspondante des $\tau_i(t)$ et $\phi_i(t)$ dans chaque intervalle. Nous indiquons ci-après les intervalles de fréquence à prendre en considération pour le jet de la fontaine continue. Nous ne donnons pas l'expression analytique des transitoires pour chaque intervalle de fréquence, exception faite du cas de la fréquence optimale, mais seulement une représentation graphique typique. Comme ces transitoires contiennent des composantes qui sont des multiples paires de la fréquence de modulation, ils apparaissent deux fois sur la période de modulation comme l'illustre la Fig. 5.18. Pour bien faire apparaître la forme de ces transitoires, nous ne représentons que le premier sur les graphiques puisqu'ils sont identiques. La courbe en traitillé correspond au cas d'un champ dont l'amplitude est constante et celle en trait continu à celui d'un champ dont l'amplitude est sinusoïdale. Les différents cas considérés sont regroupés dans la Fig. 5.19. En les classant par fréquence de modulation croissante (période de modulation T_M décroissante), on peut faire les remarques suivantes :

$$T_{\text{d1}} + T + \tau > T_M/2 \geq T + 2\tau :$$

La durée des transitoires est supérieure à 2τ et leur amplitude maximale atteint I_0 (cas *a*) de la Fig. 5.19). Lorsque la condition $T_M/2 = T + 2\tau$ est remplie, les transitoires ont une durée égale à 2τ et leur sommet atteint I_0 (cas *b*) de la Fig. 5.19).

$$T + 2\tau > T_M/2 \geq T + \tau :$$

La durée des transitoires est inférieure à 2τ mais supérieure à τ et leur ampli-

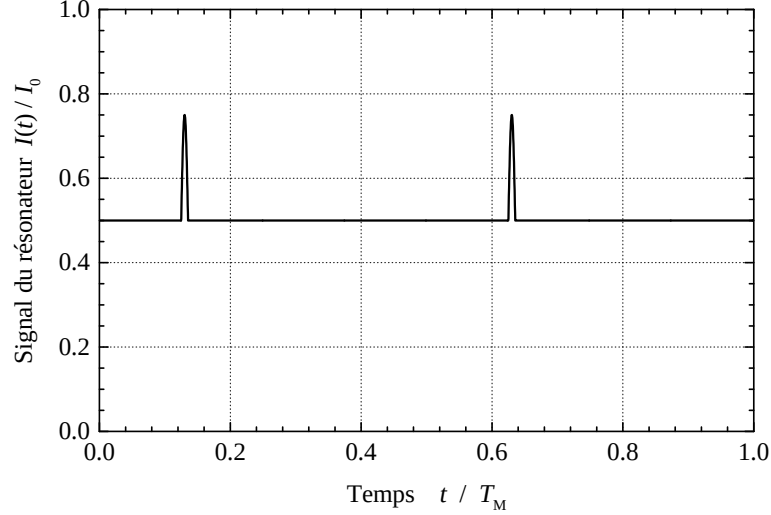


Fig. 5.18: Exemple de signal temporel $I(t)/I_0$ à la sortie du résonateur dans le cas de la modulation carrée de phase avec zones d'interaction finies. La courbe est calculée à résonance ($\Omega_0 = 0$) et fait apparaître deux transitoires identiques. T_M est la période de modulation.

tude maximale est inférieure à I_0 (cas *c*) de la Fig. 5.19). Lorsque la condition $T_M/2 = T + \tau$ est remplie, les transitoires ont une durée égale à τ et leur sommet atteint $0.75 I_0$. C'est la condition de modulation optimale qui minimise l'importance des transitoires (cf. Fig. 5.20).

$T + \tau > T_M/2 \geq T$:

La durée des transitoires est supérieure à τ mais inférieure à 2τ et leur amplitude maximale est inférieure à I_0 (cas *d*) de la Fig. 5.19). Lorsque la condition $T_M/2 = T$ est remplie, les transitoires ont une durée égale à 2τ et leur sommet atteint I_0 (cas *e*) de la Fig. 5.19).

$T > T_M/2 > \tau + T/2 + T_{d1}/2$:

La durée des transitoires est supérieure à 2τ et leur amplitude maximale vaut I_0 (cas *f*) de la Fig. 5.19).

Comme mentionné, la période de modulation optimale qui minimise les transitoires (amplitude et durée) vaut $T_M/2 = T + \tau$. Elle correspond à une fréquence de modulation $f_M = 1/2(T + \tau)$ qui est très proche de celle ($f_M = 1/2T^*$) qui maximalise la pente a' du signal d'erreur dans le cas de la modulation carrée de phase comme nous l'avons vu dans la sous-section 5.2.2. Pour la période de modulation optimale, il est aisé de calculer l'expression

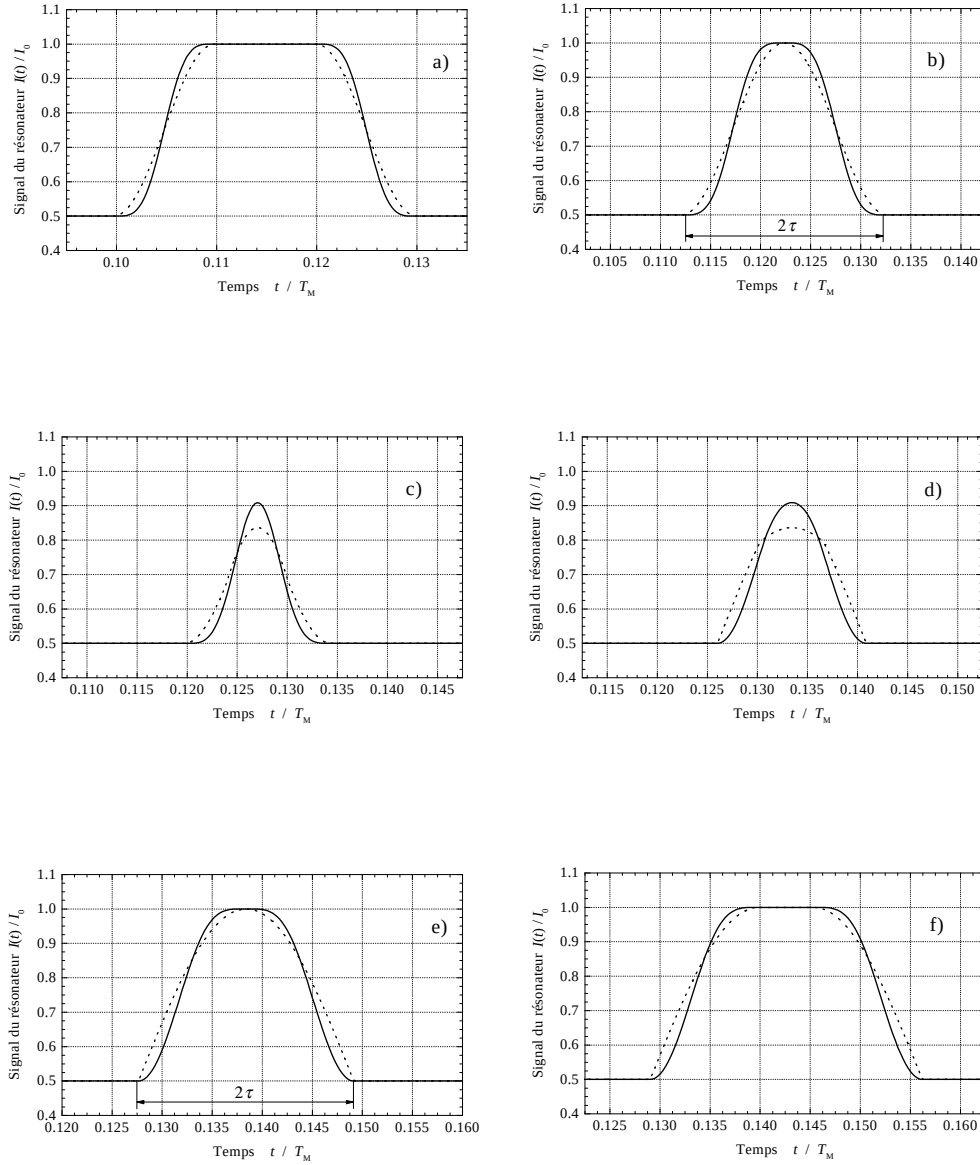


Fig. 5.19: Forme des transitoires pour un jet monokinétique dans le cas de la modulation carrée de phase avec zones d'interaction finies. La courbe en traitillé correspond au cas du champ à profil constant et celle en trait continu à celui du champ à profil sinusoïdal. La période de modulation est la suivante : a) $T_M/2 = T + 3\tau$; b) $T_M/2 = T + 2\tau$; c) $T_M/2 = T + 1.4\tau$; d) $T_M/2 = T + 0.6\tau$; e) $T_M/2 = T$; f) $T_M/2 = T - \tau/2$.

analytique des transitoires. Si rien n'est indiqué sur l'équation, l'expression est identique pour les deux types de champ.

$0 \leq t \leq T_{d1} :$

$$I(t) = \frac{1}{2} I_0 \quad (5.52a)$$

$T_{d1} \leq t \leq T_{d1} + \tau :$

$$I(t)_{B_{RF}^{const}}(t) = \frac{1}{2} I_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \sin(2\Omega_c(T_{d1} + \tau - t)) \right\} \quad (5.52b)$$

$$I(t)_{B_{RF}^{sinus}}(t) = \frac{1}{2} I_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos \left[\frac{\pi}{2} \cos(\pi(T_{d1} + \tau - t)/\tau) \right] \right\} \quad (5.52c)$$

$T_{d1} + \tau \leq t \leq T_{d1} + T + \tau :$

$$I(t) = \frac{1}{2} I_0 \quad (5.52d)$$

$T_{d1} + T + \tau \leq t \leq T_{d1} + T + 2\tau :$

$$I(t)_{B_{RF}^{const}}(t) = \frac{1}{2} I_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \sin(2\Omega_c(T_{d1} + 2\tau + T - t)) \right\} \quad (5.52e)$$

$$I(t)_{B_{RF}^{sinus}}(t) = \frac{1}{2} I_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos \left[\frac{\pi}{2} \cos(\pi(T_{d1} + 2\tau + T - t)/\tau) \right] \right\} \quad (5.52f)$$

$T_{d1} + T + 2\tau \leq t \leq T_M :$

$$I(t) = \frac{1}{2} I_0 \quad (5.52g)$$

La forme des transitoires pour les deux types de champ à la fréquence de modulation optimale est présentée dans la Fig. 5.20. Ces transitoires sont entièrement créés par les atomes du jet qui subissent une commutation de la phase dans chaque zone d'interaction. Le sommet du transitoire, situé à $t = T_{d1} + \tau/2$, correspond aux atomes qui ont subi une première commutation de phase $+\phi_m \rightarrow -\phi_m$ dans la première zone d'interaction et une seconde commutation $-\phi_m \rightarrow +\phi_m$ dans la deuxième zone d'interaction, tel que les instants de commutation se situent au centre de chaque zone d'interaction. Le flanc gauche, respectivement droite, du transitoire correspond aux atomes qui ont subi chaque commutation dans la seconde, respectivement la première, moitié de chaque zone d'interaction.

De façon générale, on remarque que les transitoires, dans le cas d'un champ dont le profil varie sinusoïdalement, n'ont aucun point où la pente du

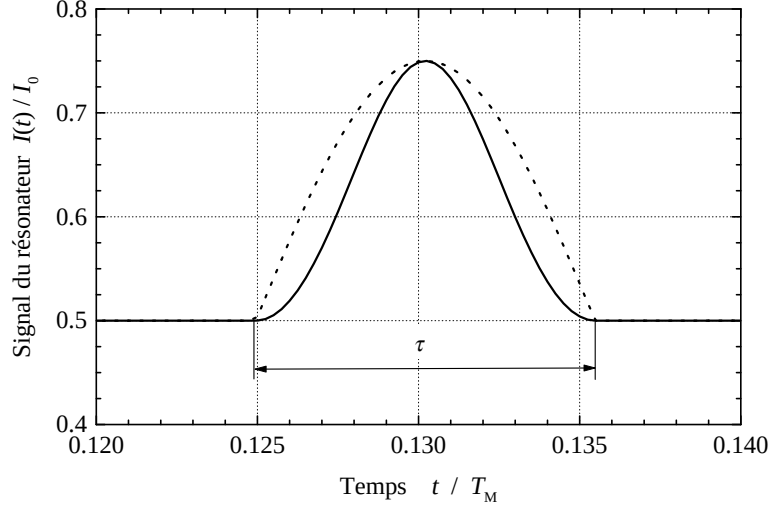


Fig. 5.20: Formes des transitoires pour un jet monocinétique dans le cas de la modulation carrée de phase avec zones d'interaction finies pour la période de modulation optimale $T_M/2 = T + \tau$. L'amplitude des transitoires au-dessus du niveau constant est minimale ainsi que leur durée pour cette fréquence de modulation.

signal varie de manière discontinue. On note aussi que l'amplitude des transitoires au-dessus du niveau constant augmente plus rapidement lorsqu'on s'éloigne de la condition de modulation optimale avec un champ sinusoïdal qu'avec un champ constant.

Amplitude des transitoires

A partir des équations (5.48) et (5.49), il est aisé de déterminer l'amplitude I_{tr} des transitoires en fonction des divers paramètres. Nous avons calculé l'amplitude des transitoires au-dessus du niveau constant en fonction de la période de modulation T_M dans l'intervalle $T + 2\tau > T_M/2 > T$ autour de la période de modulation optimale. Nous obtenons ainsi l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 I_{tr}(T_M)/I_0 = & \frac{1}{2} \cos^2 \phi_m \left\{ \left[2 \sin^2 \phi_m \left(1 - \cos(\alpha_4(T_M)) \right) \right] + \cos(\alpha_4(T_M)) \right\} \sin(\alpha_1(T_M)) \\
 & + \cos(\alpha_1(T_M)) \times \sin(\alpha_4(T_M)) \Big\}^2 + \frac{1}{2} \sin^2 \phi_m \left\{ \left[2 \cos^2 \phi_m \left(1 - \cos(\alpha_4(T_M)) \right) \right] \right. \\
 & \left. + \cos(\alpha_4(T_M)) \right\} \sin(\alpha_1(T_M)) - \cos(\alpha_1(T_M)) \sin(\alpha_4(T_M)) \Big\}^2 - \dots
 \end{aligned}$$

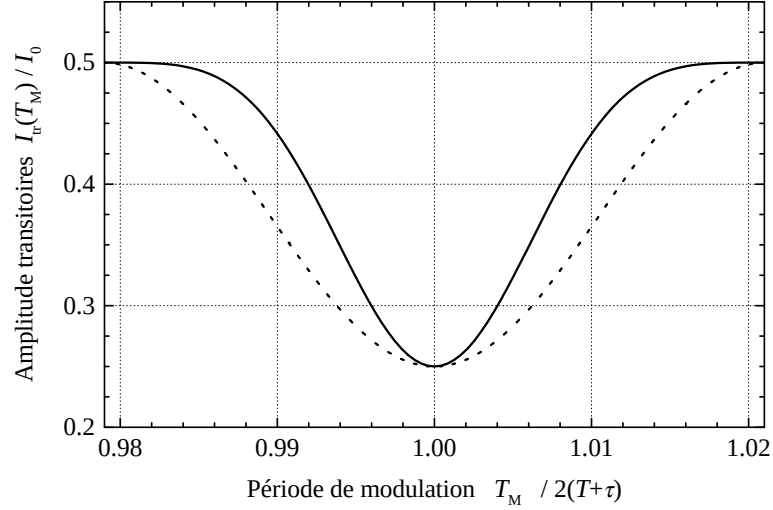


Fig. 5.21: Amplitude des transitoires $I_{\text{tr}}(T_M)/I_0$ au-dessus du niveau constant en fonction de la période de modulation T_M pour un jet monocinétique dans le cas de la modulation carrée de phase avec zones d'interaction finies. La courbe en traitillé correspond au cas d'un champ à profil constant et celle en trait continu à celui d'un champ à profil sinusoïdal.

$$\begin{aligned}
 & - \left\{ \cos(\alpha_1(T_M)) \cos(\alpha_4(T_M)) - (\cos^2 \phi_m - \sin^2 \phi_m) \sin(\alpha_1(T_M)) \right. \\
 & \quad \left. \times \sin(\alpha_4(T_M)) \right\}^2
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

Les angles $\alpha_i(T_M)$ sont donnés par les équations (5.51), suivant le profil du champ magnétique, avec les valeurs suivantes des temps d'interaction $\tau_i(T_M)$:

$$\tau_1(T_M) = \tau + \frac{T + \tau}{2} - \frac{T_M}{4} \tag{5.54a}$$

$$\tau_4(T_M) = \frac{T_M}{4} - \frac{T + \tau}{2} \tag{5.54b}$$

La Fig. 5.21 représente l'amplitude $I_{\text{tr}}(T_M)/I_0$ des transitoires en fonction de la période de modulation pour une amplitude de modulation optimale $\phi_m^{\text{opt}} = \pi/4$ rad. La courbe en traitillé représente le cas d'un champ à profil constant et celle en trait continu celui d'un champ à profil sinusoïdal. L'amplitude minimale est atteinte dans les deux cas pour la période de modulation optimale et vaut $I_{\text{tr}}^{\text{min}} = 0.25 I_0$. Lorsque l'on s'éloigne de cette condition, l'amplitude augmente jusqu'à sa valeur maximale $I_{\text{tr}}^{\text{max}} = 0.5 I_0$ qu'elle atteint pour les périodes de modulation $T_M/2 = T$ et $T_M/2 = T + 2\tau$. On

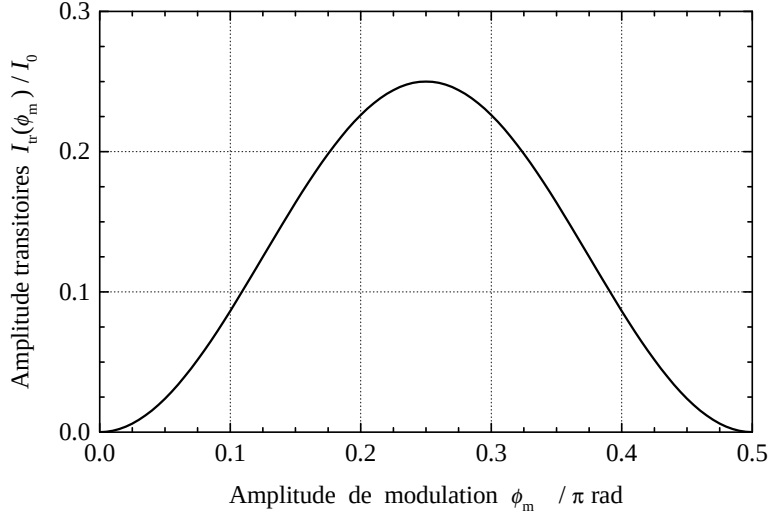


Fig. 5.22: Amplitude des transitoires $I_{\text{tr}}(\phi_m)/I_0$ au-dessus du niveau constant en fonction de l'amplitude de modulation ϕ_m pour un jet monocinétique dans le cas de la modulation carrée de phase avec zones d'interaction finies. La dépendance est la même pour les deux types de profil de champ magnétique.

remarque bien que dans le cas d'un champ à profil sinusoïdal, l'augmentation de l'amplitude des transitoires autour de la période de modulation optimale est plus rapide que dans le cas d'un champ à profil constant.

Nous avons également calculé la variation de l'amplitude $I_{\text{tr}}(\phi_m)$ des transitoires au-dessus du niveau constant en fonction de l'amplitude de modulation ϕ_m pour la période de modulation optimale $T_M/2 = T + \tau$. Cette variation est la même quel que soit le type de champ, elle s'exprime simplement à partir des équations (5.48) et (5.49) par :

$$I_{\text{tr}}(\phi_m) = \frac{1}{8} I_0 \left(1 - \cos(4\phi_m) \right) \quad (5.55)$$

et est représentée dans la Fig. 5.22. L'amplitude des transitoires est maximale pour $\phi_m^{\text{opt}} = \pi/4 \text{ rad}$ qui est l'amplitude de modulation optimale qui maximalise le signal d'erreur.

5.3.2 Jet non-monocinétique et zones d'interaction finies

Abordons maintenant le cas du jet réel de la fontaine continue où nous avons une distribution de vitesse longitudinale. Nous nous bornons au calcul

des transitoires dans le cas où la période de modulation est égale à la période de modulation optimale $T_M/2 = \bar{T} + \bar{\tau}$. En présence d'une distribution effective de vitesse longitudinale $\rho_{\text{eff}}(v_l)$, le signal du résonateur peut s'écrire :

$$I(t) = \int_{v_{l_{\min}}}^{v_{l_{\max}}} \rho_{\text{eff}}(v_l) I_{T_M(v_l)}(t) dv_l \quad (5.56)$$

où $I_{T_M(v_l)}(t)$ représente le signal temporel pour une forme de transitoires qui dépend de la vitesse longitudinale v_l par l'intermédiaire de la période de modulation. $v_{l_{\min}}$ et $v_{l_{\max}}$ sont respectivement les vitesses longitudinales minimale et maximale du jet de la fontaine continue. Dans le cas de la fontaine continue, pour la température longitudinale typique que nous avons déterminée dans la sous-section 4.3.2, la largeur de la distribution effective de vitesse longitudinale $\rho_{\text{eff}}(v_l)$ englobe les quatre types différents de forme de transitoires (a, c, d et f) présentés dans la Fig. 5.19. Pour calculer les transitoires résultants d'un jet non-monocinétique, il faut alors déterminer les vitesses limites de chaque forme de transitoires $I_{T_M(v_l)}(t)$ et les sommer sur la distribution $\rho_{\text{eff}}(v_l)$. Pour les paramètres de la fontaine continue, on obtient les valeurs suivantes :

$$v_{a_{\min}} = 3.26 \text{ m/s} \quad (5.57a)$$

$$v_{ac} = 3.706 \text{ m/s} \quad (5.57b)$$

$$v_{cd} = \bar{v} = 3.74 \text{ m/s} \quad (5.57c)$$

$$v_{df} = 3.773 \text{ m/s} \quad (5.57d)$$

$$v_{f_{\max}} = 4.512 \text{ m/s} \quad (5.57e)$$

où $v_{a_{\min}}$ est la vitesse minimale pour la forme du type a , v_{ij} la vitesse de transition entre les formes du type i et j et $v_{f_{\max}}$ la vitesse maximale pour la forme du type f . $\bar{v}$ est la vitesse longitudinale moyenne de la distribution $\rho_{\text{eff}}(v_l)$. La vitesse minimale du jet vaut $v_{l_{\min}} = 3.50 \text{ m/s}$ (cf. Tab. 3.8) et la vitesse maximale $v_{l_{\max}} \simeq 4.05 \text{ m/s}$ est due à la limitation en hauteur des trajectoires du jet. Ces valeurs se situent bien dans l'intervalle de vitesse qui correspond aux quatre types de formes de transitoires. Les transitoires calculés pour une température longitudinale de $T_l = 75 \mu\text{K}$ sont reportés dans la Fig. 5.23 pour un champ magnétique dont le profil est constant (courbe en traitillé) et sinusoïdal (courbe continue). On remarque que les transitoires sont élargis par rapport aux transitoires correspondant au jet monocinétique pour la période de modulation optimale (cf. Fig. 5.20) dont la durée vaut $\bar{\tau}$. Ceci n'est pas étonnant puisque pour un jet non-monocinétique, la condition $T_M/2 = T + \tau$ ne peut plus être vérifiée par tous les atomes du jet. Il s'ensuit, comme nous l'avons déjà mentionné, que des transitoires dont la forme est du

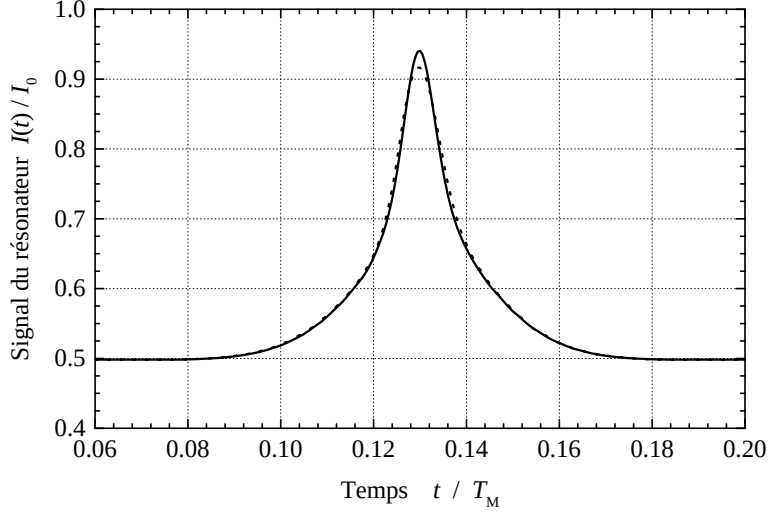


Fig. 5.23: Transitoires pour un jet non-monocinétique de température longitudinale $T_l = 75 \mu\text{K}$ dans le cas de la modulation carrée de phase avec zones d'interaction finies. La courbe en traitillé correspond au cas d'un champ à profil constant et celle en trait continu à celui d'un champ à profil sinusoïdal.

type a , c , d et f contribuent maintenant au signal. Comme ces transitoires ont une durée supérieure à $\bar{\tau}$, le transitoire résultant est alors élargi. On constate aussi, évidemment, que son amplitude au-dessus du niveau constant est plus élevée que dans le cas monocinétique où $I_{\text{tr}}^{\text{min}} = 0.25 I_0$. La raison en est la même que pour l'augmentation de la durée, puisque les différentes formes de transitoires qui contribuent au signal ont une amplitude qui est supérieure à $0.25 I_0$. L'amplitude des transitoires pour un profil de champ magnétique sinusoïdal est légèrement plus élevée que pour un profil constant comme nous pouvions le supposer. En effet, nous avons vu (cf. Fig. 5.21) que l'amplitude des transitoires pour un champ à profil sinusoïdal variait plus rapidement lorsque l'on s'écarte de la période de modulation optimale que dans le cas d'un champ à profil constant. Notons encore que la forme des transitoires n'est plus symétrique par rapport à l'axe vertical passant par le sommet des transitoires comme c'était le cas pour un jet monocinétique. Ceci n'apparaît pas très clairement sur la Fig. 5.23, mais le flanc descendant des transitoires est moins raide que le flanc montant. Toutefois, les deux transitoires qui apparaissent sur une période de modulation sont toujours identiques. Le second transitoire est simplement translaté de $T_M/2$ par rapport au premier. Nous avons vérifié que nous obtenons les mêmes résultats en intégrant numériquement directement les équations de Bloch magnétiques (E.1), avec la dépendance temporelle correcte des temps d'interaction $\tau_i(t)$ et des phases

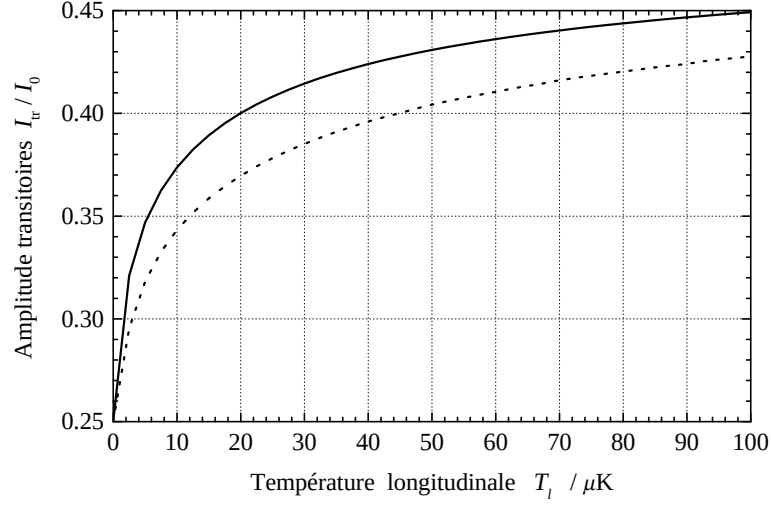


Fig. 5.24: Amplitude I_{tr} des transitoires au-dessus du niveau constant pour un jet non-monocinétique en fonction de la température longitudinale T_l du jet. La courbe en traitillés correspond au cas d'un champ à profil constant et celle en trait continu à celui d'un champ à profil sinusoïdal. Ces courbes ont été calculées pour la période de modulation optimale $T_M/2 = \bar{T} + \bar{\tau}$.

$\phi_i(t)$, ceci aussi bien pour le cas d'un jet monocinétique que pour celui d'un jet non-monocinétique.

Effet de la température longitudinale sur l'amplitude et la durée des transitoires

Nous avons encore déterminé la variation de l'amplitude des transitoires ainsi que de leur durée en fonction de la température longitudinale T_l du jet. L'amplitude I_{tr} au-dessus du niveau constant est représentée en fonction de la température longitudinale du jet entre $T_l = 0$ et $T_l = 100 \mu\text{K}$ dans la Fig. 5.24. La courbe en traitillés se réfère au cas du champ magnétique avec un profil constant et celle en trait continu à celui avec un profil sinusoïdal. Ce graphique confirme que l'amplitude des transitoires est plus élevée dans le cas d'un champ magnétique dont le profil varie sinusoïdalement. On constate que l'amplitude des transitoires, qui vaut $I_{tr}^{\min} = 0.25 I_0$ pour $T_l = 0$, croît rapidement lorsque la température longitudinale varie de $T_l = 0$ à $T_l \sim 20 \mu\text{K}$. Au-delà, la croissance des transitoires est plus lente et on atteint déjà $\sim 88\%$ de l'amplitude maximale pour $T_l = 75 \mu\text{K}$ dans le cas d'un champ avec un profil sinusoïdal.

Voyons pour terminer comment varie la durée des transitoires avec la température. Nous définissons, pour un jet non-monocinétique, la durée $\Delta\tau$

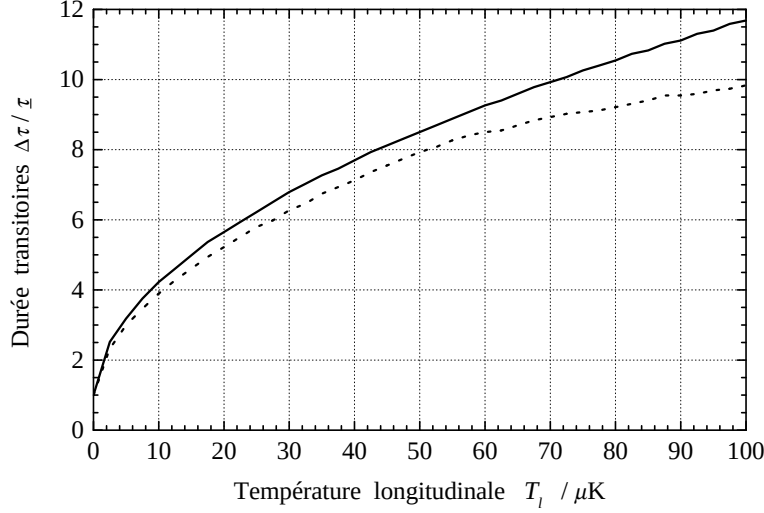


Fig. 5.25: Durée $\Delta\tau/\bar{\tau}$ des transitoires pour un jet non-monocinétique en fonction de la température longitudinale T_l du jet. La courbe en traitillé correspond au cas d'un champ à profil constant et celle en trait continu à celui d'un champ à profil sinusoïdal. Ces courbes ont été calculées pour la période de modulation optimale $T_M/2 = \bar{T} + \bar{\tau}$.

des transitoires comme l'écart temporel entre les deux points pour lesquels le signal temporel $I(t)$ est supérieur au niveau constant de 10^{-3} en valeur relative, soit :

$$\Delta\tau = t_2 - t_1 \quad \text{tel que} \quad (I(t_i) - I_b)/I_b = 10^{-3} \quad (i = 1, 2) \quad (5.58)$$

où I_b est le niveau constant (à résonance) du signal $I(t)$. Le résultat du calcul de la durée des transitoires ainsi définie est présentée dans la Fig. 5.25 pour le champ avec un profil constant (courbe en traitillé) et le champ avec un profil sinusoïdal (courbe en trait continu). On remarque également que la durée des transitoires est légèrement plus élevée dans le cas du champ magnétique sinusoïdal que pour celui du champ constant. La durée des transitoires, qui vaut $\Delta\tau = \bar{\tau}$ pour $T_l = 0$, augmente rapidement avec la température jusque vers $T_l \sim 10 \mu\text{K}$ puis elle croît plus lentement. Elle atteint $\Delta\tau \simeq 9 \bar{\tau}$ pour une amplitude constante du champ B_{RF} et $\Delta\tau \simeq 10.5 \bar{\tau}$ pour une amplitude sinusoïdale à $T_l = 75 \mu\text{K}$.

Pour finir ce chapitre, nous regroupons les principaux résultats obtenus concernant les transitoires pour la période de modulation optimale dans le Tab. 5.3.

<i>Grandeur</i>	<i>Notation</i>	<i>Valeur</i>	
		<i>Jet mono.</i> $T_l = 0$	<i>Jet non-mono.</i> $T_l = 75 \mu\text{K}$
<i>Champ B_{RF} constant :</i>			
Durée des transitoires	$\Delta\tau$	$\bar{\tau}$	$9 \bar{\tau}$
Amplitude des transitoires	I_{tr}	$0.25 I_0$	$0.42 I_0$
<i>Champ B_{RF} sinusoïdal :</i>			
Durée des transitoires	$\Delta\tau$	$\bar{\tau}$	$10.5 \bar{\tau}$
Amplitude des transitoires	I_{tr}	$0.25 I_0$	$0.44 I_0$

Tab. 5.3: Valeurs numériques typiques des paramètres des transitoires, calculées pour la période de modulation optimale $T_M/2 = \bar{T} + \bar{\tau}$.

5.4 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre trois schémas différents de modulation-démodulation qui permettent d'obtenir le signal d'erreur pour corriger l'oscillateur à quartz. Pour cette étude, nous avons supposé une forme carrée du signal de démodulation et nous avons considéré le cas de la démodulation large bande et celui de la démodulation de la 1^{ère} harmonique seulement. Le premier type de modulation envisagé est la modulation carrée de phase, ensuite nous avons considéré la modulation sinusoïdale de fréquence et enfin la modulation carrée de fréquence. Cette étude a été entreprise, notamment, pour déterminer les paramètres de modulation optimaux de chaque type de modulation dans le cas concret de la fontaine continue et pour établir quelques résultats préliminaires qui seront utilisés dans le chapitre 6 consacré à l'effet Dick continu.

En terme de performance pour établir le signal d'erreur, la modulation carrée de phase à la fréquence de modulation optimale de $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ atteint les mêmes performances (pente $a'_{\text{LB}} = 0.5$) que la modulation carrée de fréquence usuelle à la limite quasi-statique (fréquence de modulation $f_M \rightarrow 0$) dans le cas d'un jet monocinétique. La modulation sinusoïdale de fréquence à la limite quasi-statique est quelque peu moins performante ($a'_{\text{LB}} = 0.395$). Pour un jet non-monocinétique et des paramètres de modulation optimaux, la diminution de la pente a' est très légèrement plus importante pour la modulation carrée de phase ($a'_{\text{LB}} = 0.482$) que pour la modulation carrée de fréquence ($a'_{\text{LB}} = 0.486$)⁷. Par contre, la modulation sinusoïdale de fréquence

⁷Du point de vue de la détection, il est préférable de travailler à une fréquence de

est très peu sensible à la température du jet ($a'_{LB} = 0.394$). De manière générale, pour des paramètres de modulation-démodulation optimaux, la modulation carrée de phase est plus sensible à la variation de ces paramètres (fréquence de modulation et phase de démodulation) que les deux autres types de modulation. En particulier, la modulation sinusoïdale de fréquence est relativement insensible à la fréquence de modulation jusqu'à $f_M \simeq 1.5 \Delta\nu_{1/2}$. A la fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ qui est intéressante du point de vue de l'effet Dick continu dans le fontaine continue, la modulation carrée de phase présente les performances les plus élevées par rapport aux deux autres modulations. Elle est donc, de ce fait, particulièrement attractive pour la fontaine continue.

Le signal modulé à la sortie du résonateur présente, à résonance, une dynamique utile beaucoup plus faible dans le cas de la modulation carrée de phase que pour les deux autres types de modulation, ce qui est un avantage en terme de résolution des niveaux. En fait, pour des zones d'interaction infiniment courtes, il ne contient pas de signal de 2^{ème} harmonique. De ce point de vue, la modulation carrée de fréquence engendre la plus grande dynamique du signal du résonateur (contenu en 2^{ème} harmonique le plus élevé).

Comme la modulation carrée de phase est particulièrement indiquée pour la fontaine continue, nous avons entrepris également une étude des transitoires qui apparaissent dans le signal modulé à la sortie du résonateur lorsque l'on prend en compte des zones d'interaction de durée finie. L'étude a montré que ces transitoires sont minimisés pour la fréquence de modulation optimale $f_M = 1/2(T + \tau)$ qui est légèrement plus élevée que la fréquence $f_M = 1/2T^*$ qui optimise le signal d'erreur. Dans ce cas, leur amplitude au-dessus du niveau constant vaut $0.25 I_0$ et leur durée est égale à $\bar{\tau}$ pour un jet monocinétique. Seule leur forme diffère selon le type de champ magnétique RF considéré (profil constant ou sinusoïdal). Si l'on s'écarte de la condition optimale, l'amplitude des transitoires augmente. Cette augmentation est un peu plus rapide pour un champ du type sinusoïdal que pour un champ constant. Dans le cas d'un jet non-monocinétique, la durée des transitoires augmente ainsi que leur amplitude par rapport au cas monocinétique. Nous avons calculé ces transitoires pour les paramètres typiques du jet de la fontaine continue ($T_l = 75 \mu\text{K}$). Il en ressort que les transitoires sont un peu plus élevés et leur durée un peu plus grande dans le cas d'un champ RF à profil sinusoïdal ($I_{tr} \simeq 0.44 I_0$ et $\Delta\tau \simeq 10.5 \bar{\tau}$) que pour un champ à profil constant ($I_{tr} \simeq 0.42 I_0$ et $\Delta\tau \simeq 9 \bar{\tau}$). Leur forme est par contre sensiblement la même.

modulation f_M aussi élevée que possible pour s'affranchir du bruit en $1/f$. La modulation carrée de phase est donc plus appropriée pour atteindre ce but.

Comme les deux transitoires qui apparaissent sur le signal modulé à la sortie du résonateur sont identiques et ne contiennent que des composantes paires de la fréquence de modulation, ils ne devraient pas être démodulés et ainsi ne pas contribuer au signal d'erreur. Toutefois, si ces transitoires devaient poser problème, l'évaluation de leur durée va nous permettre d'estimer l'effet de leur suppression éventuelle sur l'instabilité résiduelle due à l'effet Dick continu. La présence de ces transitoires et leur prise en compte augmente la dynamique utile du signal à la sortie du résonateur. Néanmoins, à résonance, cette dynamique est toujours très inférieure à celle correspondant à la modulation carrée ou sinusoïdale de fréquence.

Chapitre 6

Effet Dick continu et stabilité

6.1 Introduction

Le présent chapitre est consacré aux problèmes concernant la stabilité de fréquence de l'étalon. Il est séparé en deux parties distinctes. Dans la première partie, nous abordons les problèmes liés à l'échantillonnage du bruit de phase de l'oscillateur local qui peuvent apparaître avec la fontaine continue. C'est un problème assez général qui se rencontre aussi bien dans les fontaines pulsées que dans les étalons passifs à interrogation continue.

Toutes les fontaines à atomes froids, qui sont actuellement en construction ou déjà opérationnelles dans divers laboratoires, sont basées sur un principe de fonctionnement qui est intrinsèquement pulsé [CGS⁺96]. Ce mode particulier de fonctionnement a montré qu'il peut être la cause de sévères limitations sur la stabilité limite atteignable avec ce type de fontaines [SAM⁺98]. En effet, la nature discrète du signal de correction de l'oscillateur local rend la stabilité de fréquence de ce type de fontaines particulièrement sensible au bruit de phase de l'oscillateur. Ce phénomène, qui porte le nom générique d'*effet Dick* [Dic87], se rencontre dans tous les étalons passifs de fréquence basés sur un asservissement périodique de la fréquence de l'étalon sur la référence atomique.

Dans les étalons dont le principe de fonctionnement est continu, une dégradation similaire de la stabilité de fréquence peut apparaître. Quoique de nature quelque peu différente, le mécanisme responsable de cette dégradation est identique à celui du fonctionnement pulsé. Cependant, on le dénomme usuellement par *effet d'intermodulation* [ACD91]. Il peut ainsi également limiter la stabilité ultime de la fontaine continue. Afin de pouvoir maintenir cette dégradation à une valeur acceptable, nous avons entrepris dans la section 6.2 une étude générale de ce phénomène dans le cadre de la fontaine

continue. Nous analysons l'effet des paramètres de modulation sur l'importance de cette dégradation dans un cas idéal, et en déduisons que cette limitation peut être totalement supprimée sous certaines conditions. Ensuite, nous estimons la dégradation résiduelle de la stabilité de fréquence qui subsiste dans un cas non-idéal et montrons qu'elle ne devrait pas limiter les performances de la fontaine continue.

La seconde partie est consacrée à une étude assez générale de l'effet du schéma de modulation-démodulation sur la stabilité à court terme de la fontaine continue. Dans un étalon de fréquence passif, la stabilité de fréquence à court terme dépend principalement de deux paramètres : le facteur de qualité de la résonance atomique Q_{at} et le rapport signal-sur-bruit S/N du signal du résonateur [VA89].

Le premier paramètre est fortement augmenté dans les fontaines atomiques par l'utilisation d'atomes froids par rapport à sa valeur dans un étalon passif à jet thermique. En effet, dans les fontaines atomiques la largeur de la résonance est de l'ordre de 1 Hertz ce qui conduit à un facteur de qualité de la résonance qui est très élevé, de l'ordre de $Q_{\text{at}} = 10^{10}$. Dans les étalons à jet thermique, la largeur de la résonance est en gros deux ordres de grandeur plus élevée. Il en résulte un facteur de qualité qui est ainsi deux ordres de grandeur plus petit. Ainsi, les fontaines à atomes froids bénéficient d'une amélioration de la stabilité de fréquence qui est due à l'utilisation d'atomes lents.

Le second facteur qui influence la stabilité de fréquence est lié au rapport signal-sur-bruit du signal du résonateur. Comme ce signal est proportionnel à la lumière de fluorescence des atomes du jet dans la zone de détection, il est par conséquent aussi proportionnel au flux d'atomes qui atteignent la zone de détection. Donc, augmenter ce flux permet d'augmenter la stabilité de fréquence de l'étalon. C'est la raison pour laquelle nous avons discuté en détail, dans le chapitre 3, l'influence des divers paramètres expérimentaux sur le flux d'atomes à la détection. Dans la section 6.3, nous effectuons une étude théorique de la stabilité à court terme de la fontaine continue et nous comparons de ce point de vue les performances des trois types de modulations considérés dans ce travail. Ensuite, nous comparons la stabilité théorique de la fontaine continue, déterminée d'après la mesure du rapport signal-sur-bruit du signal du résonateur, avec la valeur mesurée expérimentalement.

6.2 Effet Dick continu

6.2.1 Introduction

Dans les étalons de fréquence passifs qui fonctionnent en mode pulsé, comme les trappes à ions ou les fontaines à atomes froids, il a été démontré aussi bien théoriquement [Kra74, Dic87, DPGM90] qu'expérimentalement [SAM⁺98], que ce mode de fonctionnement particulier pouvait conduire à une dégradation de la stabilité de fréquence. Dans ce type d'étalons, le bruit de phase (ou de fréquence) de l'oscillateur local (LO) autour des harmoniques de la fréquence d'interrogation est converti par un phénomène de repliement de spectre dans la bande passante de l'asservissement en fréquence. Ce mécanisme, appelé *effet Dick* dans la littérature car il a été prédit et décrit en premier par Dick à JPL [Dic87], limite la stabilité ultime de l'étalon atteignable avec des oscillateurs à quartz conventionnels, même de haute qualité.

Dans les étalons de fréquence passifs dont le mode de fonctionnement est continu, une dégradation semblable de la stabilité de fréquence peut également apparaître. Elle dépend du type de schéma de modulation-démodulation utilisé pour générer le signal d'erreur qui contrôle la fréquence de l'oscillateur local et de la valeur de la fréquence de modulation. Ce mécanisme, dénommé usuellement *effet d'intermodulation* a été proposé en premier par Kramer [Kra74], puis décrit en détail par Audoin *et al.* [ACD91] pour le cas d'un étalon passif à cellule dans l'approximation quasi-statique (fréquence de modulation beaucoup plus petite que la largeur de la résonance atomique).

Nous sommes intéressé ici aux dégradations possibles, dues au bruit de phase de l'oscillateur local, de la stabilité de fréquence d'un résonateur de Ramsey alimenté par un jet atomique continu dont l'intensité est constante. C'est en fait le cas de la fontaine continue. Dans ce type d'étalon, les atomes sont continûment interrogés et tout saut de phase de l'oscillateur local sera détecté et produira un signal d'erreur. Il est attendu que cette absence de temps morts constituera un avantage significatif sur les fontaines pulsées, où le repliement de spectre est inévitable. Une généralisation du formalisme de Dick (développé pour les résonateurs de Ramsey pulsés) au cas continu a été proposée par Makdissi *et al.* [MdCAC98, Mak99] et brièvement abordé dans Lo Presti *et al.* [PRM98]. Notre approche du problème est complémentaire à [Mak99, PRM98] dans le sens que nous débutons par le signal d'erreur généré dans le cas continu et nous dérivons la "formule de Dick" comme un cas particulier où le signal d'erreur est échantillonné périodiquement.

Afin d'évaluer si le repliement de spectre persiste dans le cas continu, nous avons développé un modèle simple, décrit dans la sous-section 6.2.2, d'un étalon de fréquence continu utilisant un résonateur de Ramsey. Nous en

déduisons le signal d'erreur dans le cas général pour n'importe quel type de schéma de modulation-démodulation. Puis, nous calculons le spectre de puissance de l'oscillateur local asservi (LLO) (*Locked Local Oscillator*) à partir de la connaissance de la densité spectrale de puissance $S_y^{\text{LO}}(f)$ des fluctuations relatives de fréquence de l'oscillateur local non asservi. Nous en déduisons finalement la densité spectrale de puissance des fluctuations relatives de fréquence de l'oscillateur local asservi $S_{y,\text{Dc}}^{\text{LLO}}(f)$ due à l'effet d'intermodulation (effet Dick continu). Le résultat constitue une formule valide pour les résonateurs de Ramsey en fonctionnement continu qui est similaire à la "formule de Dick" qui a été développée spécifiquement pour les résonateurs en mode pulsé. Ensuite, nous discutons ses caractéristiques principales dans la sous-section 6.2.3 ainsi que les limitations du modèle. Dans la sous-section suivante (6.2.4) nous montrons qu'il est possible de retrouver la "formule de Dick" pour le cas spécifique d'une fontaine pulsée par une opération d'échantillonnage du signal d'erreur. Enfin, dans la section 6.2.5, nous comparons des simulations numériques de la variance de Allan due à l'effet Dick continu en fonction de la fréquence de modulation pour les trois types de modulation considérés. Pour cela, nous avons modélisé la densité spectrale de bruit de l'oscillateur local d'après les spécifications techniques d'un oscillateur à quartz donné.

Dans une deuxième partie, nous considérons le cas d'une situation non-idéale où nous prenons en compte la température non-nulle du jet atomique. Nous incluons ce paramètre (sous-section 6.2.6) dans le modèle développé et nous sommes alors en mesure d'estimer l'importance de l'instabilité de fréquence résiduelle qui va apparaître. Nous effectuons ensuite à nouveau, dans la sous-section 6.2.7, des simulations numériques de la variance de Allan de l'instabilité de fréquence résiduelle due à l'effet Dick continu. Les résultats montrent en fait que cette instabilité est très faible dans le cas de la fontaine continue et qu'elle ne devrait pas limiter ses performances. Pour terminer, nous estimons encore l'effet (sous-section 6.2.8) d'une suppression des transitoires de la modulation carrée de phase, si cela s'avérait nécessaire, par l'introduction de temps morts.

6.2.2 Dérivation de la formule de l'effet Dick continu dans le cas d'un jet monocinétique

Dans la dérivation que nous faisons ici de la limitation de la stabilité de fréquence de l'oscillateur local asservi, nous nous concentrons sur les étalons de fréquence passifs utilisant un schéma d'interrogation de Ramsey continu. C'est en fait le cas de la fontaine continue.

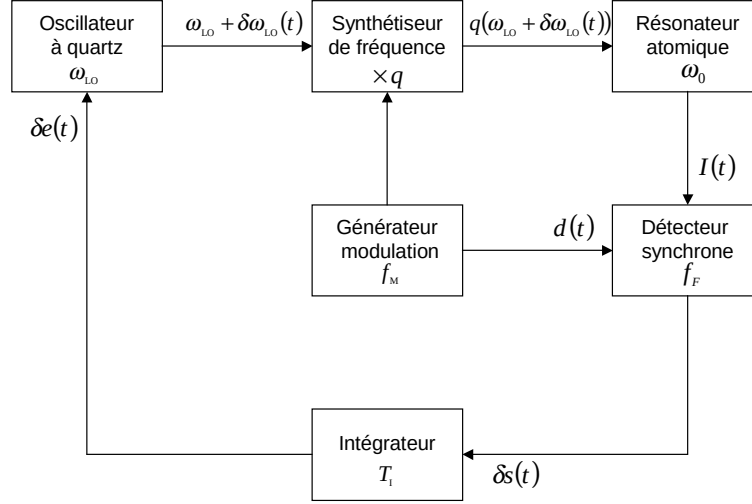


Fig. 6.1: Schéma-bloc fonctionnel de la fontaine continue.

Modèle de l'asservissement en fréquence

Un schéma-bloc fonctionnel de la fontaine continue est représenté dans la Fig. 6.1. Afin de simplifier au maximum le modèle, nous faisons les hypothèses suivantes :

- Nous supposons que l'oscillateur local est un oscillateur à quartz conventionnel caractérisé par une densité spectrale de puissance des fluctuations relatives de fréquence $S_y^{LO}(f)$.
- Le résonateur atomique est supposé être un résonateur de Ramsey idéal avec deux zones d'interaction infiniment courtes équivalentes pour un champ magnétique dont l'amplitude varie sinusoïdalement.
- Le signal à la sortie du résonateur est obtenu par détection synchrone à la fréquence de modulation f_M . Ainsi, après intégration, il génère le signal d'erreur continu $e(t)$ utilisé pour contrôler la fréquence de l'oscillateur local.
- Dans le but d'évaluer la contribution spécifique de l'effet Dick à l'instabilité de fréquence, nous ne prenons pas en compte le bruit de grenaille

(*Shot noise*) du jet atomique¹ et nous supposons également que le résonateur de Ramsey, le synthétiseur de fréquence, le détecteur synchrone, et le générateur de modulation n'ajoutent pas de bruit au signal d'erreur.

Signal d'erreur de l'asservissement en fréquence

La dérivation du signal d'erreur de l'asservissement en fréquence est similaire à celle effectuée dans la sous-section 5.2.1 lors de l'étude des différents schémas de modulation-démodulation dans le chapitre 5. La seule différence est que nous prenons en compte maintenant le terme $\delta\phi(t, T)$ décrivant les fluctuations de phase que nous avons négligées dans le chapitre 5. En ajoutant ce terme dans l'équation (5.12), nous pouvons alors écrire l'expression du signal à la sortie du résonateur :

$$I(t, T) = \frac{1}{2} I_0 \left\{ 1 + \cos \left(\Omega_0 T^* + 2\phi_m c(t, T) + \delta\phi(t, T) \right) \right\} \quad (6.1)$$

où I_0 est le signal au sommet de la frange centrale et T^* est le temps de transit effectif pour des zones d'interaction infiniment courtes équivalentes. Le second terme dans la phase provient de la modulation extérieure de la phase de la micro-onde et le dernier, $\delta\phi(t, T)$, représente les fluctuations de la différence de phase apparente instantanée. C'est une composante aléatoire qui est due aux fluctuations de phase de l'oscillateur local :

$$\delta\phi(t, T) = q \left(\delta\phi_{\text{LO}}(t - T_{\text{d1}}^*) - \delta\phi_{\text{LO}}(t - T_{\text{d1}}^* - T^*) \right) \quad (6.2)$$

où $\delta\phi_{\text{LO}}(t - T_{\text{d1}}^* - T^*)$ et $\delta\phi_{\text{LO}}(t - T_{\text{d1}}^*)$ sont les fluctuations de phase instantanées de l'oscillateur local dans le premier, respectivement le second pulse de Rabi et q est le facteur multiplicatif du synthétiseur de fréquence. Ce terme peut être exprimé directement en fonction des fluctuations de fréquence :

$$\delta\phi(t, T) = q \int_{t - T_{\text{d1}}^* - T^*}^{t - T_{\text{d1}}^*} \delta\omega_{\text{LO}}(t') dt' \quad (6.3)$$

où $\delta\omega_{\text{LO}}(t)$ est une fonction aléatoire représentant les fluctuations de fréquence de l'oscillateur local. Dans la suite, nous restreignons notre analyse au cas où la condition de résonance est vérifiée en moyenne. Nous supposons donc que l'asservissement en fréquence maintient le désaccord moyen

¹Cette contribution à l'instabilité, statistiquement indépendante du bruit de l'oscillateur local, peut être évaluée séparément (cf. section 6.3).

$\Omega_0 = \omega - \omega_0$ égal à zéro. Le faible désaccord dépendant du temps qui subsiste est alors dû uniquement aux fluctuations de fréquence de l'oscillateur local autour de ω . De plus, la déviation standard de $\delta\phi(t, T)$ est beaucoup plus petite que $2\phi_m$ qui est usuellement de l'ordre de $\pi/2$ radian :

$$\delta\phi(t, T) \ll 2\phi_m \quad (6.4)$$

Nous pouvons alors développer l'expression (6.1) au 1^{er} ordre du rapport $\delta\phi(t, T)/2\phi_m$. En procédant ensuite de la même façon que dans la sous-section 5.2.1, on obtient pour le signal à la sortie du détecteur synchrone l'expression suivante :

$$\delta s(t) = -\frac{1}{2} K I_0 \delta\phi(t, T) a(t, T) \quad (6.5)$$

où K est une constante qui dépend du gain du détecteur synchrone et $a(t, T)$ est la fonction introduite dans le chapitre 5 qui est définie par l'équation (5.17). Elle regroupe l'effet du processus de modulation-démodulation qui intervient dans la génération du signal d'erreur. Le signal d'erreur $\delta e(t)$ proprement dit, qui est appliqué à l'oscillateur local, est obtenu après passage au travers d'un intégrateur. Il s'écrit donc :

$$\delta e(t) = \frac{1}{T_I} \int_{-\infty}^t \delta s(t') dt' \quad (6.6)$$

avec T_I la constante de temps de l'intégrateur. Les équations (6.5) et (6.6) sont les relations de base de notre modèle, à partir desquelles nous pouvons calculer la densité spectrale de puissance des fluctuations relatives de fréquences de l'oscillateur local asservi.

Densité spectrale de puissance bilatérale du signal d'erreur $S'_{\delta e}(f)$

Nous sommes intéressé maintenant à calculer la densité spectrale de puissance du signal d'erreur défini par (6.5) et (6.6). Le signal $\delta s(t)$ à la sortie du détecteur synchrone est le produit de deux parties :

- une partie aléatoire $\delta\phi(t, T)$ dépendant des fluctuations de fréquence angulaire $\delta\omega_{LO}(t)$ de l'oscillateur local. Nous supposons dans ce qui suit que le processus aléatoire $\delta\omega_{LO}(t)$ est stationnaire au sens large² et de valeur moyenne nulle.

²Ceci revient à faire l'hypothèse que la valeur moyenne $\overline{\delta\omega_{LO}(t)}$ du processus aléatoire est constante et que sa fonction d'autocorrélation $R_{\delta\omega_{LO}}(t, \tau) = \overline{\delta\omega_{LO}(t + \tau) \delta\omega_{LO}(t)}$ ne dépend que de τ .

- une partie déterministe $a(t, T) = \sin(2\phi_m c(t, T))d(t)$ qui dépend du schéma de modulation-démodulation.

Commençons par calculer la densité spectrale de puissance bilatérale $S'_{\delta\phi}(f)$ de la partie aléatoire $\delta\phi(t, T)$. Cette dernière peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\delta\phi(t, T) &= q \int_{t-T_{d1}^*-T^*}^{t-T_{d1}^*} \delta\omega_{LO}(t') dt' \\ &= q \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\omega_{LO}(t') h(t - T_{ad1} - t', T) dt' \\ &= q \delta\omega_{LO}(t) * h(t - T_{ad1}, T)\end{aligned}\quad (6.7)$$

où le symbole $*$ dénote le produit de convolution et nous avons posé $T_{ad1} = T^*/2 + T_{d1}^*$ le temps de détection depuis l'apogée de la trajectoire (centre de l'interrogation de Ramsey). $h(t, T)$ est une fenêtre rectangulaire définie par :

$$h(t, T) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T^*/2 \\ 0 & |t| \geq T^*/2 \end{cases}\quad (6.8)$$

La fonction d'autocorrélation $R_{\delta\phi}(\tau)$ de $\delta\phi(t, T)$ se déduit alors facilement de (6.7). Il vient :

$$R_{\delta\phi}(\tau, T) = q^2 R_{\delta\omega_{LO}}(\tau) * h(-\tau + T_{ad1}, T) * h(\tau - T_{ad1}, T)\quad (6.9)$$

avec $R_{\delta\omega_{LO}}(\tau)$ la fonction d'autocorrélation de $\delta\omega_{LO}(t)$. La densité spectrale de puissance bilatérale $S'_{\delta\phi}(f)$ est obtenue en prenant la transformée de Fourier de $R_{\delta\phi}(\tau)$. En appliquant la règle que la transformée de Fourier d'un produit de convolution est le produit des transformées de Fourier, on trouve :

$$S'_{\delta\phi}(f) = q^2 |H(f, T)|^2 S'_{\delta\omega_{LO}}(f)\quad (6.10)$$

où $H(f, T)$ est la fonction de transfert de la fenêtre rectangulaire $h(t - T_{ad1}, T)$ et $S'_{\delta\omega_{LO}}(f)$ est la densité de puissance bilatérale des fluctuations de fréquence angulaire de l'oscillateur local. Définissons maintenant le développement en série de Fourier de la partie déterministe $a(t, T)$ du signal d'erreur. Il s'écrit, d'après l'annexe D, de la façon suivante :

$$a(t, T) = c_0(T) + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k}(T) e^{i4k\pi f_M t} + \text{c.c.}\quad (6.11)$$

L'abréviation c.c. désigne le complexe conjugué et $c_0(T)$, respectivement $c_{2k}(T)$, sont respectivement la valeur moyenne et les coefficients de Fourier complexes ($c_{2k}(T) = (a_{2k}(T) + jb_{2k}(T))/2$) de $a(t, T)$. L'expression des coefficients $c_0(T)$, $a_{2k}(T)$ et $b_{2k}(T)$ sont donnés dans l'annexe D pour les trois types de modulation étudiés dans le chapitre 5. La fonction d'autocorrélation $R_a(\tau)$ de $a(t, T)$ est alors la suivante :

$$R_a(\tau) = c_0^2(T) + \sum_{k=1}^{+\infty} |c_{2k}(T)|^2 \left(e^{i4k\pi f_M \tau} + e^{-i4k\pi f_M \tau} \right) \quad (6.12)$$

La densité spectrale de puissance bilatérale $S'_a(f)$ se déduit immédiatement :

$$S'_a(f) = c_0^2(T) \delta(f) + \sum_{k=1}^{+\infty} |c_{2k}(T)|^2 \left(\delta(f - 2kf_M) + \delta(f + 2kf_M) \right) \quad (6.13)$$

avec $\delta(f)$ la fonction delta de Dirac. La fonction d'autocorrélation du signal $\delta s(t)$ à la sortie du détecteur synchrone est quant à elle donnée par :

$$R_{\delta s}(\tau) = \frac{K^2 I_0^2}{4} R_{\delta \phi}(\tau) R_a(\tau) \quad (6.14)$$

puisque $\delta \phi(t, T)$ et $a(t)$ sont deux variables indépendantes [JR87]. Après filtrage à travers un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure f_F , dont la fonction de transfert est donnée par :

$$H_F(f) = \begin{cases} 1 & |f| < f_F \\ 0 & |f| > f_F \end{cases} \quad (6.15)$$

et en utilisant le fait que la transformée de Fourier d'un produit est le produit de convolution des transformées de Fourier, la densité spectrale de puissance bilatérale $S'_{\delta s}(f)$ de $\delta s(t)$ est facilement obtenue, elle vaut :

$$S'_{\delta s}(f) = \frac{K^2 I_0^2}{4} S'_{\delta \phi}(f) * S'_a(f) \quad |f| < f_F \quad (6.16)$$

A la sortie de l'intégrateur, et en évitant toute complication mathématique, la densité spectrale de puissance bilatérale $S'_{\delta e}(f)$ du signal d'erreur $\delta e(t)$ peut s'écrire comme :

$$S'_{\delta e}(f) = \frac{S'_{\delta s}(f)}{(2\pi f T_1)^2} \quad |f| < f_F \quad (6.17)$$

Puis en insérant (6.10), (6.13) et (6.16) dans (6.17), nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 S'_{\delta e}(f) = & F^2(f) c_0^2(T) |H(f, T)|^2 S'_{\delta\omega_{LO}}(f) + F^2(f) \sum_{k=1}^{+\infty} \left\{ |c_{2k}(T)|^2 \right. \\
 & \times \left[|H(f - 2kf_M, T)|^2 S'_{\delta\omega_{LO}}(f - 2kf_M) + |H(f + 2kf_M, T)|^2 \right. \\
 & \left. \left. \times S'_{\delta\omega_{LO}}(f + 2kf_M) \right] \right\} \quad |f| < f_F \quad (6.18)
 \end{aligned}$$

où l'on a posé $F(f) = KI_0 q / 4\pi f T_1$. Cette densité spectrale est composée de deux parties. La première, qui contient $S'_{\delta\omega_{LO}}(f)$, correspond au signal d'erreur qui corrige effectivement les fluctuations de fréquence de l'oscillateur local dans la bande passante de l'asservissement. La seconde, qui contient la somme, provient d'un signal d'erreur parasite qui est généré par conversion des fluctuations de fréquence de l'oscillateur local à toutes les harmoniques paires de la fréquence de modulation f_M . C'est la partie du spectre qui est due à ce phénomène de repliement de spectre provoqué dans ce cas par l'effet d'intermodulation.

Densité spectrale de puissance des fluctuations relatives de fréquence de l'oscillateur local asservi $S_y^{\text{LLO}}(f)$

Déterminons pour finir la densité spectrale de puissance des fluctuations relatives de fréquence de l'oscillateur local asservi $S_y^{\text{LLO}}(f)$. Pour cela, on a besoin de l'équation de la boucle d'asservissement en fréquence de l'oscillateur local. Elle s'écrit, dans le domaine temporel, de la manière suivante :

$$\delta\omega_{\text{LLO}}(t) = \delta\omega_{\text{LO}}(t) + K_e \delta e(t) \quad (6.19)$$

où $\delta\omega_{\text{LO}}(t)$ représente les fluctuations de fréquence de l'oscillateur local libre et K_e est une constante caractéristique de l'oscillateur local (oscillateur à quartz). En déduisant le spectre du signal d'erreur de l'expression (6.18) de $S'_{\delta e}(f)$, cette relation se transpose dans le domaine fréquentiel (aux phases près) sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \delta\Omega_{\text{LLO}}(f) = & \delta\Omega_{\text{LO}}(f) - G(f) c_0(T) H(f, T) \delta\Omega_{\text{LLO}}(f) - G(f) \\
 & \times \sum_{k=1}^{+\infty} \left\{ c_{2k}(T) \left[H(f - 2kf_M, T) \delta\Omega_{\text{LLO}}(f - 2kf_M) \right. \right. \\
 & \left. \left. + H(f + 2kf_M, T) \delta\Omega_{\text{LLO}}(f + 2kf_M) \right] \right\} \quad |f| < f_F \quad (6.20)
 \end{aligned}$$

où $G(f) = K_e F(f)$ est le gain de boucle. $\delta\Omega_{\text{LLO}}(f)$ est le spectre de l'oscillateur local asservi et $\delta\Omega_{\text{LO}}(f)$ celui de l'oscillateur local libre. Afin d'extraire facilement $\delta\Omega_{\text{LLO}}(f)$ de cette équation, on suppose que la fréquence de coupure f_F du filtre passe-bas est telle que $f_F \ll f_M$, ce qui est généralement le cas en détection synchrone. On peut alors approximer $\delta\Omega_{\text{LLO}}(f \pm 2kf_M)$ par $\delta\Omega_{\text{LO}}(\pm 2kf_M)$, $H(f \pm 2kf_M, T)$ par $H(\pm 2kf_M, T)$ et $H(f, T)$ par $H(0, T)$. Il vient dans ce cas pour $\delta\Omega_{\text{LLO}}(f)$:

$$\begin{aligned} \delta\Omega_{\text{LLO}}(f) \simeq & \frac{1}{1 + G(f) c_0(T) H(0, T)} \delta\Omega_{\text{LO}}(f) - \frac{G(f)}{1 + G(f) c_0(T) H(0, T)} \\ & \times \sum_{k=1}^{+\infty} \left\{ c_{2k}(T) \left[H(-2kf_M, T) \delta\Omega_{\text{LO}}(-2kf_M) \right. \right. \\ & \left. \left. + H(2kf_M, T) \delta\Omega_{\text{LO}}(2kf_M) \right] \right\} \quad |f| < f_F \end{aligned} \quad (6.21)$$

De cette équation, on déduit immédiatement la densité spectrale de puissance des fluctuations relatives de fréquence de l'oscillateur local asservi $S_y^{\text{LLO}}(f)$. Elle est donnée par la relation suivante dans la limite d'un gain de boucle élevé ($G(0) \gg 1$) :

$$\begin{aligned} S_y^{\text{LLO}}(f) \simeq & \frac{1}{G^2(f) c_0^2(T) |H(0, T)|^2} S_y^{\text{LO}}(f) \quad |f| < f_F \\ & + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|c_{2k}(T)|^2}{c_0^2(T)} \cdot \frac{|H(2kf_M, T)|^2}{|H(0, T)|^2} S_y^{\text{LO}}(2kf_M) \end{aligned} \quad (6.22)$$

avec $S_y^{\text{LO}}(f)$ la densité spectrale de puissance des fluctuations relatives de fréquence de l'oscillateur local libre. Le premier terme provient des fluctuations de fréquence de l'oscillateur local dans la bande passante de l'asservissement. Ce terme peut être rendu aussi petit que l'on veut si l'on augmente le gain de la boucle d'asservissement. C'est d'ailleurs bien un des buts de l'asservissement en fréquence. Premièrement maintenir la fréquence moyenne de l'oscillateur local égale à la fréquence de référence, en l'occurrence la fréquence de la transition d'horloge de l'atome de césium. Ce fait n'apparaît pas ici, car nous avons supposé au départ que cette condition était vérifiée. Deuxièmement, supprimer les fluctuations de fréquence de l'oscillateur local dans la bande passante.

Le second terme est dû au phénomène de repliement de spectre provoqué par l'effet d'intermodulation. C'est la partie de la densité spectrale qui nous intéresse. Il fait intervenir les fluctuations de fréquence de l'oscillateur local

aux fréquences de Fourier qui sont des harmoniques paires de la fréquence de modulation. L'effet d'intermodulation est donc responsable d'une translation dans la bande passante, par un phénomène non-linéaire, des fluctuations de fréquence de l'oscillateur local autour des harmoniques paires de la fréquence de modulation. Evidemment, ce bruit parasite dégrade la stabilité de fréquence de l'oscillateur asservi, empêchant ainsi d'atteindre la stabilité ultime de l'étalon limitée par le bruit de grenaille du jet atomique. On cherche donc à le supprimer si possible, ou tout au moins à le minimiser.

En introduisant l'expression de la fonction de transfert $H(f, T)$ dans (6.22), nous obtenons finalement la formule suivante pour la densité spectrale de puissance unilatérale, due à l'effet de repliement de spectre (intermodulation ou effet Dick continu (Dc)), des fluctuations relatives de fréquence de l'oscillateur local asservi :

$$\left\| S_{y, \text{Dc}}^{\text{LLO}}(f) \simeq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{|c_{2k}(T)|^2}{c_0^2(T)}}_{\substack{\text{schéma} \\ \text{mod. - démod.}}} \underbrace{\text{sinc}^2(2k\pi f_M T^*)}_{\text{filtrage cavité}} \underbrace{S_y^{\text{LO}}(2kf_M)}_{\text{bruit oscillateur}} \right\|$$

$$0 < f < f_F \quad (6.23)$$

où nous désignons par $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ le sinus cardinal. Cette relation est l'équation de base pour analyser l'effet des différents types de schémas de modulation-démodulation sur la stabilité de fréquence de l'oscillateur local asservi.

6.2.3 Discussion du modèle

Sans développer plus loin l'équation (6.23), nous pouvons déjà dégager quelques points intéressants de ce résultat.

Fréquence de modulation optimale

En inspectant l'argument du sinus cardinal dans (6.23), on remarque en particulier que si la fréquence de modulation vérifie la condition $f_M = 1/2T^*$ ou $T_M/2 = T^*$, ce terme s'annule quel que soit k et il en résulte que la densité spectrale de puissance $S_{y, \text{Dc}}^{\text{LLO}}(f)$ est également nulle. Cette propriété peut être exprimée différemment en disant que si la fréquence de modulation est égale à la largeur de la résonance atomique, ou la demi-période de modulation est égale au temps de transit effectif, aucune instabilité de fréquence due au phénomène de repliement de spectre ne sera ajoutée à la fréquence de l'oscillateur local asservi. Une autre caractéristique remarquable est que cette

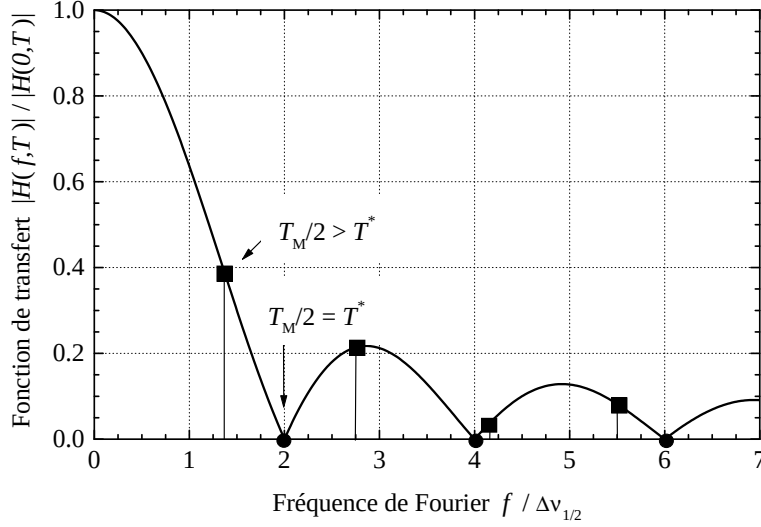


Fig. 6.2: Module de la fonction de transfert normalisée $|H(f, T)|/|H(0, T)|$ en fonction de la fréquence de Fourier f normalisée à la largeur de la résonance $\Delta\nu_{1/2}$. Cette courbe illustre l'effet de filtrage du résonateur de Ramsey. Nous avons reporté la position des harmoniques qui sont converties : (■) pour $T_M/2 > T^*$; (●) pour $T_M/2 = T^*$.

propriété est vraie pour tous les schémas de modulation-démodulation usuels, puisque l'effet de ces derniers n'intervient dans la formule que par l'intermédiaire des coefficients de Fourier $c_{2k}(T)$ et $c_0(T)$ (on suppose évidemment que $c_0(T) > 0$).

Interprétation de l'annulation de l'effet Dick

Nous pouvons interpréter cette propriété de la manière suivante. Dans notre modèle, l'opération de modulation-démodulation à la fréquence f_M , qui est nécessaire pour obtenir un signal d'erreur afin de corriger la fréquence de l'oscillateur à quartz, a pour effet de traduire le bruit de phase de l'oscillateur autour des harmoniques de $2f_M$ dans la bande passante de l'asservissement. Ceci donnera lieu à un signal d'erreur parasite qui va dégrader la stabilité de fréquence de l'oscillateur local asservi. Ce phénomène de repliement de spectre est à la base de l'effet Dick continu. L'effet du résonateur de Ramsey est de filtrer, par moyennage sur le temps de transit effectif, les fluctuations de fréquence de l'oscillateur local dont la période est un sous-multiple du temps de transit effectif comme on peut le voir dans (6.3). Ainsi, si la période de modulation est telle que $T_M/2 = T^*$, toutes les fluctuations de fréquence de l'oscillateur local aux harmoniques de $2f_M$ seront supprimées à la sortie du résonateur comme le montre la Fig. 6.2. Il s'ensuit

qu'aucune conversion dans la bande passante du bruit de l'oscillateur local par le processus de modulation-démodulation n'est possible dans ce cas. En d'autres termes, aucune instabilité de fréquence ne peut être ajoutée à la fréquence de l'oscillateur local asservi par un phénomène de repliement de spectre.

Liens avec les travaux précédents

Cette propriété d'annulation de l'effet Dick avait déjà été dérivée précédemment par Makdissi [Mak99] d'une manière différente, en fait dans le contexte d'une extension du concept de la fonction de sensibilité (cf. [Dic87]) du résonateur pulsé au résonateur continu. La généralisation proposée dans [Mak99] est intéressante puisqu'elle part du formalisme développé par Dick [Dic87, DPGM90] et l'étend au cas continu. Ce formalisme utilise les deux notions de : 1) *saut de phase* pour décrire une fluctuation de phase élémentaire de l'oscillateur local et 2) *fonction de sensibilité* $g(t)$, décrivant la réponse temporelle du résonateur à un tel saut de phase. La situation idéale pour un étalon de fréquence est d'avoir une fonction de sensibilité $g(t)$ constante, qui ne produit pas de repliement de spectre. Dans un résonateur de Ramsey idéal, $g(t)$ est non-nulle sur la durée T^* du temps de transit effectif, qui est, dans le cas d'une fontaine pulsée, plus court que le cycle d'interrogation $T_M/2$. Dans ce formalisme, le phénomène appelé *effet Dick* (repliement de spectre produit par des temps morts) peut être vu comme la conséquence du fait que si un saut de phase se produit à un certain instant (pendant un temps mort), aucun signal d'erreur n'est produit (car $g(t) = 0$). Par conséquent, il est intuitivement compréhensible que dans une fontaine continue [DMJ⁺00, DMJ⁺92], ou une fontaine quasi-continue [OKIN95, FG99] où les atomes sont toujours présents dans le résonateur, aucun effet Dick n'apparaîtra alors que les étalons pulsés sont soumis à un tel effet. L'effet d'intermodulation [ACD91] a une origine similaire mais est légèrement différent, puisqu'il apparaît même s'il n'y a pas de temps morts [DMD⁺99]. Dans le formalisme de Dick, cet effet peut être décrit mathématiquement en disant que $g(t)$ n'est pas constant et physiquement en disant que l'amplitude de la réponse du résonateur dépend de "quand" le saut de phase se produit. Par conséquent, on peut penser que si le signal instantané est modulé ($I(t)$ ou $\delta s(t)$) soit à cause du schéma de modulation (avec la modulation sinusoïdale par exemple, cf. [PRM98]) ou parce que le jet atomique est modulé [OKIN95, FG99], l'effet d'intermodulation va apparaître et limiter la stabilité, même dans une fontaine continue. Comme il est montré dans [Mak99] et dans cette étude, ce n'est pas nécessairement le cas puisque le signal ($I(t)$, $\delta s(t)$ et $\delta e(t)$) produit par un saut de phase dure pendant T^* , le temps passé par les atomes dans le résonateur de Ramsey. Si

ce temps est égal au cycle d'interrogation ($T_M/2$), le signal d'erreur $\delta e(t)$ appliqué à l'oscillateur local pour corriger un saut de phase devient indépendant de l'instant d'apparition du saut de phase, et ceci pour n'importe quel type de modulation comme dans [Mak99]. La difficulté d'appliquer le formalisme développé par Dick à une fontaine continue vient du fait que dans ce cas la demi-période de modulation devient comparable à T^* et le signal d'erreur produit par un saut de phase couvre au moins deux cycles d'interrogation. Cette difficulté est supprimée par l'approche présentée ici. Notre approche est entièrement basée sur un fonctionnement continu du résonateur, considérant un fonctionnement pulsé comme une modulation particulière du signal d'erreur continu (cf. sous-section 6.2.4).

Le cas de la modulation carrée de phase

On peut voir dans l'équation (6.23) que pour la condition particulière $T_M/2 = T^*$ évoquée précédemment, on s'attend à ce que la modulation carrée de phase supprime plus fortement les instabilités de fréquence de l'oscillateur local asservi. En effet, puisque dans ce cas la fonction $a(t)$ est constante, ses coefficients de Fourier $c_{2k}(T)$ (dans (6.11)) sont tous nuls pour $k \neq 0$. Cette caractéristique sera probablement favorable dans le cas plus réaliste d'un jet atomique avec distribution de vitesse et d'un résonateur de Ramsey avec des zones d'interaction finies, où la condition $T_M/2 = T^*$ ne peut plus être vérifiée par tous les atomes.

Limitations du modèle

Dans le modèle simple que nous avons développé, nous avons fait plusieurs idéalizations afin d'obtenir une formule analytique relativement simple pour la densité spectrale de puissance des fluctuations relatives de fréquence de l'oscillateur local asservi dues au phénomène de repliement de spectre. Ces simplifications apportent une limitation aux conclusions que nous pouvons tirer directement de la formule (6.23). Dans le but de mieux décrire un étalon de fréquence réel et d'obtenir des prédictions quantitatives, une extension du modèle est nécessaire pour inclure les principaux points suivants.

Distribution de vitesse du jet :

Dans notre modèle, le jet atomique est considéré monocinétique. Nous avons vu (cf. chapitre 3) qu'en réalité le jet atomique de la fontaine continue possédait une distribution de vitesse longitudinale étroite (température longitudinale $T_l \simeq 75 \mu\text{K}$) autour de la vitesse moyenne. Cette distribution de vitesse longitudinale induit une distribution de temps de transit dans la cavité de

Ramsey. Quoique faible, cet effet doit être pris en compte car, dans ce cas, la condition $T_M/2 = T^*$ ne peut plus être vérifiée par tous les atomes. Il s'ensuit une dégradation résiduelle de la stabilité de fréquence ($S_{y,al.}^{LLO}(f) > 0$), que nous aimerions estimer (cf. sous-section 6.2.6).

Interactions de Rabi de durée finie :

Le temps d'interaction fini d'un résonateur de Ramsey dans un étalon de fréquence réel n'a pas été pris en compte dans cette étude³. Cet effet devrait aussi être étudié, spécialement dans le cas de la modulation carrée de phase où il est supposé avoir des conséquences plus significatives. Précisément, dans ce cas une petite partie des atomes du jet peuvent subir une commutation de phase dans une ou deux zones d'interaction. Nous avons vu, dans la deuxième partie du chapitre 5, que cela donne lieu à des transitoires brusques dans le signal de sortie du résonateur. L'effet de ces transitoires sur la stabilité de fréquence de l'oscillateur local asservi et la possibilité de les supprimer par des temps morts, ce qui devrait réintroduire un faible effet d'échantillonnage (effet Dick) avec une distribution de vitesse, devrait être également pris en compte. Il vaut la peine de noter que, pour la condition $T_M/2 = T^*$ et avec un jet monocinétique, l'introduction de temps morts dans la détection ne devrait pas créer de dégradation de la stabilité de fréquence puisque dans ce cas les propriétés de symétrie de la fonction $a(t)$ sont conservées (cf. sous-section 6.2.8).

Déphasage entre modulation et démodulation :

Dans l'analyse présentée ici nous n'avons pas tenu compte du déphasage éventuel entre l'opération de modulation et de démodulation. Nous avons supposé que la forme d'onde de démodulation est en phase avec le signal modulé, ce qui est la condition optimale pour un jet monocinétique. Mais, avec une distribution de vitesse longitudinale des atomes du jet, le temps de transit T^* et le temps de détection T_{dl}^* entre la sortie du résonateur et la détection ne sont pas les mêmes pour tous les atomes. Ceci a pour conséquence que le signal modulé à la sortie du résonateur est déformé par rapport à celui correspondant à un jet monocinétique. Il n'est donc pas évident a priori de dire quelle est la phase optimale de démodulation. L'analyse de l'effet de cet

³On peut montrer facilement que l'introduction de zones d'interaction finies pour un champ magnétique constant ou sinusoïdal dans le cas d'un jet monocinétique, et sans tenir compte de la modulation, revient à ajouter un terme correctif de l'ordre de $(\tau/T)^2$ au sinus cardinal dans la formule (6.23). Le calcul correct à partir des équations de Bloch magnétiques pour un champ à profil sinusoïdal, et en tenant compte de l'effet de la modulation, est un développement conséquent qui sort du cadre limité de cet ouvrage. Il fait notamment intervenir les notions de fonction de sensibilité d'interrogation et du résonateur.

ajustement de phase sur l'instabilité de fréquence résiduelle de l'oscillateur local permet d'apporter une réponse (cf. sous-section 6.2.7).

Bande passante du détecteur :

Le détecteur considéré dans ce modèle est un détecteur idéal avec une bande passante infiniment large. La fréquence de coupure supérieure d'un détecteur réel va introduire une déformation du signal modulé du résonateur (comme nous l'a suggéré C. Audoin). Par conséquent, pour la modulation carrée de phase, les coefficients de Fourier $c_{2k}(T)$ de la fonction $a(t)$ ne s'annuleront pas pour la condition $T_M/2 = T^*$ (comme discuté précédemment) puisque $a(t)$ n'est plus le produit de deux carrés parfaits. Même s'il est supposé conduire à une dégradation faible de la stabilité de fréquence de l'oscillateur local asservi, cet effet devrait être pris en compte.

6.2.4 Réduction au cas pulsé

Il est intéressant maintenant de comparer notre modèle au cas bien connu de l'effet Dick apparaissant dans le fonctionnement pulsé d'une fontaine à atomes froids. Le caractère pulsé du jet (boules d'atomes froids lancées à intervalles réguliers) peut être simulé dans notre modèle par un échantillonnage de l'intensité du jet atomique continu I_0 avec une période T_c , qui est la période du cycle. Ainsi, on peut écrire l'intensité du jet pulsé sous la forme :

$$I_{\text{pulsé}}(t) = I_0 u(t) \quad (6.24)$$

où $u(t)$ est un peigne de Dirac donné par :

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_c) \quad (6.25)$$

De l'expression (6.5) du signal à la sortie du détecteur synchrone, on voit que cette opération est équivalente à échantillonner la fonction $a(t)$ dans le cas d'un jet monocinétique. On pourrait donc simuler l'effet d'un jet pulsé en échantillonnant la fonction de détection $d(t)$. Comme dans une fontaine pulsée le signal d'erreur est disponible tous les deux cycles, pour se mettre dans la même situation avec la fontaine continue, il faut que l'on ait $T_M/2 = T_c$ puisque le signal d'erreur est généré sur une période de modulation T_M . Une représentation de la fonction $a(t)$ échantillonnée est donnée dans la Fig. 6.3. Sous ces hypothèses, et en tenant compte de la périodicité de la fonction $a(t)$, l'expression de la fonction $a(t)$ échantillonnée s'écrit :

$$a_{\text{pulsé}}(t) = a(T_c) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_c) \quad (6.26)$$

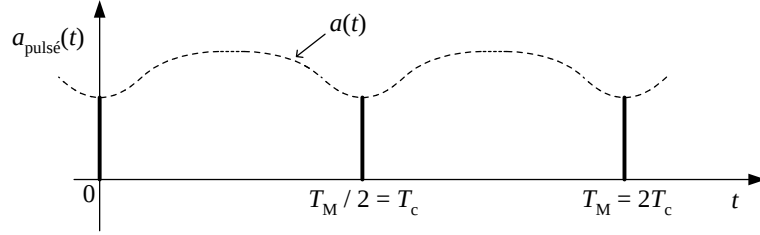


Fig. 6.3: Représentation de la fonction échantillonnée $a_{\text{pulsé}}(t)$ qui permet de se ramener au cas d'une fontaine pulsée. La courbe en traitillés est la fonction $a(t)$ continue et la fonction $a_{\text{pulsé}}(t)$ est composée de Diracs régulièrement espacés toutes les demi-périodes de modulation $T_M/2$. T_c est la période des cycles d'interrogation de la fontaine pulsée.

On peut alors calculer sa densité spectrale de puissance bilatérale qui est donnée par :

$$S'_{a_{\text{pulsé}}}(f) = \frac{a^2(T_c)}{T_c^2} \delta(f) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^2(T_c)}{T_c^2} \left(\delta(f - 2kf_c) + \delta(f + 2kf_c) \right) \quad (6.27)$$

où $f_c = 1/T_c$ est la fréquence des cycles d'interrogation. En remplaçant $S'_a(f)$ par $S'_{a_{\text{pulsé}}}(f)$ dans l'équation (6.5), et en procédant exactement de la même manière que précédemment, on trouve pour la densité spectrale de puissance des fluctuations relatives de fréquence de l'oscillateur local asservi dues à l'effet d'échantillonnage (effet Dick (D)) dans le cas pulsé :

$$S_{y,D}^{\text{LLO}}(f) \simeq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \text{sinc}^2(k\pi f_c T^*) S_y^{\text{LO}}(kf_c) \quad 0 < f < f_F \quad (6.28)$$

Cette formule correspond exactement à la *formule de Dick* bien connue dans le cas d'une fontaine pulsée. En effet, la partie contenant le sinus cardinal dans (6.28) est égale au rapport g_k^2/g_0^2 des coefficients de Fourier du développement en série de Fourier de la fonction de sensibilité $g(t)$, ainsi qu'elle est définie dans [San96].

6.2.5 Simulations de l'effet Dick continu

Nous avons entrepris des simulations de la contribution de l'effet Dick continu, ou effet d'intermodulation, à l'instabilité de fréquence de la fontaine continue. Nous considérons à nouveau les trois types de schéma de modulation-démodulation que nous avons étudiés dans le chapitre 5. A savoir, une démodulation du signal du résonateur avec une forme d'onde carrée et une modulation du signal d'interrogation du type carré de phase, sinusoïdal de fréquence ou carré de fréquence.

<i>Grandeur</i>	<i>Notation</i>	<i>Valeur</i>
Bruit de fréquence en marche aléatoire	h_{-2}	—
Bruit de scintillation de fréquence	h_{-1}	$5.76 \cdot 10^{-26}$
Bruit blanc de fréquence	h_0	—
Bruit de scintillation de phase	h_1	$2.77 \cdot 10^{-27} \text{ Hz}^{-2}$
Bruit blanc de phase	h_2	$1.05 \cdot 10^{-29} \text{ Hz}^{-3}$

Tab. 6.1: Valeurs des paramètres des différentes contributions au bruit de l'oscillateur local libre. Ces valeurs correspondent à un oscillateur à quartz du type BVA OCXO 8607 5MHz d'Oscilloquartz.

Densité spectrale de bruit de l'oscillateur

Pour ces simulations, nous avons besoin de connaître la densité spectrale de puissance des fluctuations relatives de fréquence de l'oscillateur local libre $S_y^{\text{LO}}(f)$. Pour cela, nous utilisons un modèle polynomial standard pour décrire les diverses fluctuations aléatoires de fréquence qui affectent les oscillateurs à quartz. Ainsi, la densité spectrale $S_y^{\text{LO}}(f)$ peut être modélisée en général par :

$$S_y^{\text{LO}}(f) = \sum_{\alpha=-2}^{+2} h_{\alpha} f^{\alpha} \quad (6.29)$$

Les valeurs typiques des paramètres h_{α} des différentes contributions au bruit de l'oscillateur local sont résumées dans le Tab. 6.1 pour un oscillateur à quartz du type BVA OCXO 8607 5MHz d'Oscilloquartz. L'allure de la densité spectrale correspondante à cet oscillateur est représentée dans la Fig. 6.4.

Variance de Allan des fluctuations relatives de fréquence dues à l'effet Dick continu

En général, pour quantifier l'instabilité de fréquence dans les étalons de fréquence, il est d'usage d'utiliser la variance de Allan $\sigma_y(f)$ définie par la relation suivante en fonction de la densité spectrale de puissance des fluctuations relatives de fréquence $S_y(f)$:

$$\sigma_y^2(\tau) = 2 \int_0^{+\infty} S_y(f) \frac{1}{1 + (f/f_{\text{coup}})^2} \cdot \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df \quad (6.30)$$

où f_{coup} est la fréquence de coupure d'un filtre passe-bas à un pôle qui simule la bande passante finie de tout système physique en général. τ est le temps d'intégration des mesures de stabilité. Comme la densité spectrale $S_{y, \text{Dc}}^{\text{LLO}}(f)$

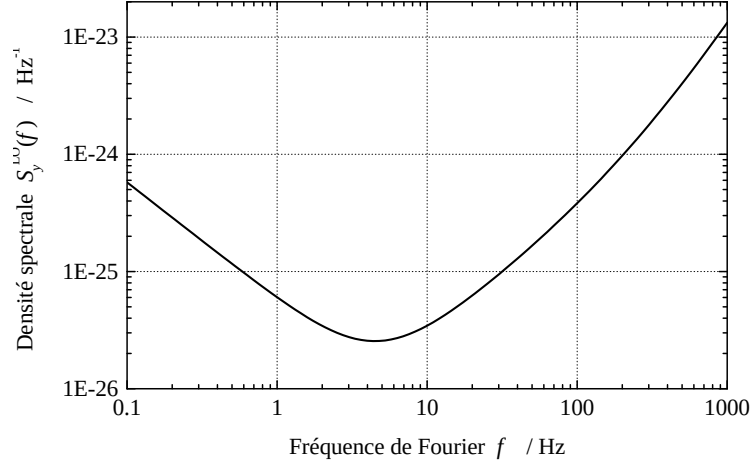


Fig. 6.4: Graphique de la densité spectrale de puissance de bruit de la fréquence nominale de l'oscillateur à quartz BVA OCXO 8607 5MHz d'Oscilloquartz. Les valeurs des paramètres h_α sont tirées du Tab. 6.1.

des perturbations de fréquence dues à l'effet Dick continu peut être considérée comme du bruit blanc dans l'intervalle $0 < f < f_F$, où f_F est la bande passante de l'asservissement, la variance de Allan limite due à l'effet Dick continu est donnée par la relation :

$$\sigma_{y,\text{Dc}}^{\text{lim}^2}(\tau) \simeq S_{y,\text{Dc}}^{\text{LLO}}(0)/2\tau \quad (6.31)$$

avec $S_{y,\text{Dc}}^{\text{LLO}}(0)$ donné par (6.23). Cette expression est une formule asymptotique de la variance de Allan $\sigma_{y,\text{Dc}}^2(\tau)$ valable si la condition $2\pi f_{\text{coup}}\tau \gg 1$ est remplie. Comme la fréquence de coupure f_{coup} peut être remplacée par f_F qui est très faible, puisqu'elle est en général beaucoup plus petite que la fréquence de modulation f_M qui est de l'ordre du Hertz dans la fontaine continue, cette formule est valable pour des temps d'intégration grands ($\tau > 10$ s).

Modulation carrée de phase

Dans le cas de la modulation carrée de phase, les coefficients de Fourier $c_0(T)$ et $c_{2k}(T)$ peuvent se calculer sous forme analytique pour une démodulation large bande optimale avec les paramètres déterminés dans le chapitre 5. En posant $\xi = f_M/\Delta\nu_{1/2}$, la variance de Allan est alors donnée par l'ex-

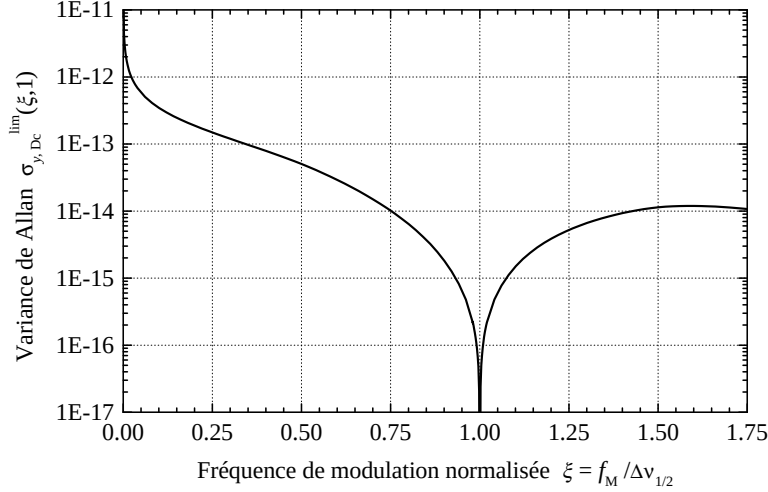


Fig. 6.5: Variance de Allan limite $\sigma_{y,Dc}^{lim}(\xi, 1)$ due à l'effet Dick continu fonction de la fréquence de modulation f_M pour la modulation carrée de phase. Elle est calculée pour un temps d'intégration de $\tau = 1$ s avec la formule (6.32).

pression suivante en fonction de la fréquence de modulation :

$$\sigma_{y,Dc}^{lim}(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi^2\xi(1-|\xi-1|)} \left\{ h_{-1} T^* \frac{\zeta_5(\xi)}{\xi} + \frac{h_1}{T^*} \xi \zeta_3(\xi) + \frac{h_2}{T^{*2}} \xi^2 \zeta_2(\xi) \right\}^{1/2} \tau^{-1/2} \quad 0 < \xi < 2 \quad (6.32)$$

où l'on a posé $\zeta_i(\xi)$ la somme suivante :

$$\zeta_i(\xi) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin^4(k\pi\xi)}{k^i} \quad (i = 2, 3 \text{ et } 5) \quad (6.33)$$

Nous avons calculé la valeur de la variance de Allan limite (6.32) pour un temps d'intégration $\tau = 1$ s. Les résultats du calcul pour une fréquence de modulation comprise dans l'intervalle $0 < f_M < 1.75 \Delta\nu_{1/2}$ sont présentés dans la Fig. 6.5. On constate que l'instabilité de fréquence due à l'effet Dick continu disparaît lorsque la fréquence de modulation est égale à la largeur à mi-hauteur de la résonance. En fait, on peut montrer que la variance de Allan $\sigma_{y,Dc}^{lim}(\xi, 1)$ s'annule lorsque $\xi \rightarrow 1$ comme $\sigma_{y,Dc}^{lim}(\xi, 1) \sim (\xi - 1)^2$. L'annulation de l'effet Dick continu à la fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ est due aux propriétés de filtrage du résonateur de Ramsey discutées dans la sous-section précédente. Pour $\xi \rightarrow 0$, la variance de Allan diverge car la densité spectrale $S_{y,Dc}^{LLO}(f)$ diverge du fait que le rapport $c_{2k}(T)/c_0(T)$ est non-nul dans ce cas.

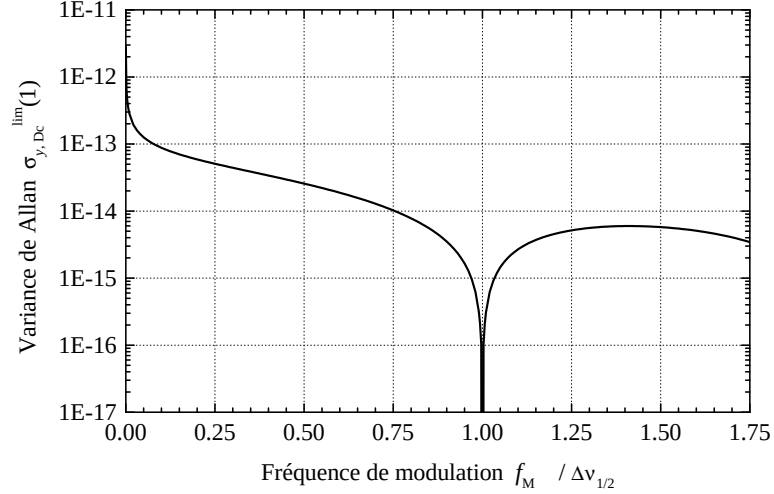


Fig. 6.6: Variance de Allan limite $\sigma_{y,Dc}^{\lim}(1)$ due à l'effet Dick continu en fonction de la fréquence de modulation f_M pour la modulation sinusoïdale de fréquence. Elle est calculée pour un temps d'intégration de $\tau = 1$ s.

Modulation sinusoïdale de fréquence

Pour la modulation sinusoïdale de fréquence, nous calculons la densité spectrale $S_{y,Dc}^{LLO}(0)$ avec l'équation (6.23). Les coefficients de Fourier $c_0(T)$ et $c_{2k}(T)$ sont définis par (D.4), (D.6) et (D.7) avec les coefficients $a_{2p+1}(\omega_m, f_M, T)$ et $b_{2p+1}(\omega_m, f_M, T)$ donnés par (D.18). Nous déterminons ensuite la variance de Allan au moyen de la relation (6.31). La Fig. 6.6 présente la variance de Allan limite en fonction de la fréquence de modulation f_M pour $\tau = 1$ s. On remarque à nouveau l'annulation, par l'effet de filtrage du résonateur de Ramsey, de l'instabilité de fréquence due à l'effet Dick continu pour $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. Pour une fréquence de modulation $f_M \rightarrow 0$, la densité spectrale $S_{y,Dc}^{LLO}(f)$ diverge aussi du fait que les coefficients de Fourier $c_{2k}(T)$ sont non-nuls.

Modulation carrée de fréquence

Dans le cas de la modulation carrée de fréquence, nous calculons toujours la densité spectrale $S_{y,Dc}^{LLO}(0)$ avec l'équation (6.23). Les coefficients de Fourier $c_0(T)$ et $c_{2k}(T)$ sont donnés par (D.4), (D.6) et (D.7). Les coefficients $a_{2p+1}(\omega_m, f_M, T)$ et $b_{2p+1}(\omega_m, f_M, T)$ se calculent maintenant numériquement d'après les équations (D.23). Nous déterminons ensuite la variance de Allan avec la relation (6.31). Le résultat est reporté dans la Fig. 6.7 en fonction de la fréquence de modulation f_M pour $\tau = 1$ s. Ici encore, l'annulation de l'instabilité de fréquence pour $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ est due à l'effet de filtrage du

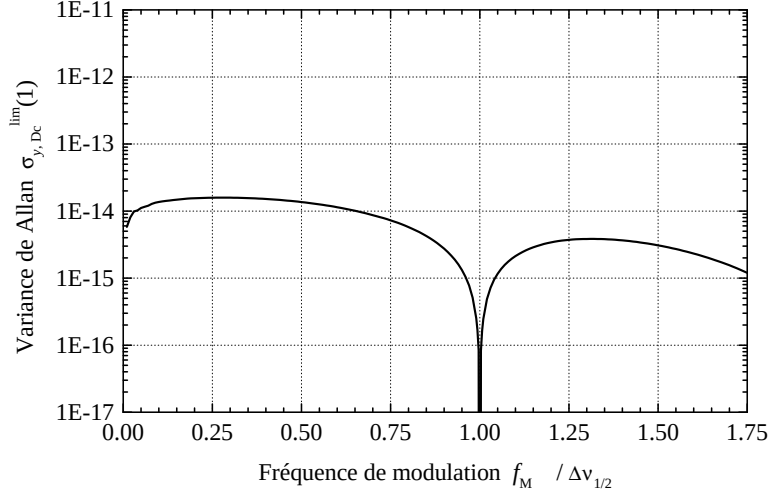


Fig. 6.7: Variance de Allan limite $\sigma_{y,Dc}^{lim}(1)$ due à l'effet Dick continu en fonction de la fréquence de modulation f_M pour la modulation carrée de fréquence. Elle est calculée pour un temps d'intégration de $\tau = 1$ s.

résonateur de Ramsey. Pour une fréquence de modulation $f_M \rightarrow 0$, la densité spectrale $S_{y,Dc}^{LLO}(f) \rightarrow 0$ car les coefficients de Fourier $c_{2k}(T)$ s'annulent. Par conséquent, la variance de Allan $\sigma_{y,Dc}^{lim}(1) \rightarrow 0$ à fréquence de modulation nulle.

Discussion

On voit donc, si on compare les trois types de modulation, que l'annulation de l'effet Dick continu (ou effet d'intermodulation) est toujours réalisé pour une fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. Comme on l'a dit, cette annulation n'est pas due au type de schéma de modulation utilisé, mais aux propriétés de filtrage du résonateur de Ramsey. Par contre, la façon dont s'annule la variance de Allan dépend du type de modulation et ce fait devrait jouer un rôle dans le cas d'un jet non-monocinétique. En effet, dans le cas de la modulation carrée de phase, les coefficients de Fourier $c_{2k}(T)$ s'annulent pour $f_M = \Delta\nu_{1/2}$, ce qui n'est pas le cas des deux autres types de modulation. Comme nous l'avons fait remarquer dans la sous-section 6.2.3, cette propriété de la modulation carrée de phase devrait être favorable pour limiter l'instabilité de fréquence avec un jet non-monocinétique. Pour obtenir la même propriété intéressante en ce qui concerne la limitation de l'effet Dick continu, il faudrait utiliser la modulation carrée de fréquence à la limite quasi-statique ($f_M \rightarrow 0$), ce qui n'est pas concevable en pratique.

6.2.6 Dérivation de la formule de l'effet Dick continu dans le cas d'un jet non-monocinétique

Nous voulons maintenant tenir compte du fait que le jet atomique de la fontaine continue n'est pas rigoureusement monocinétique. En particulier, nous aimerions quantifier la non-annulation de l'effet Dick continu qui en résulte à la fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. Pour cela, nous introduisons une distribution de vitesse longitudinale ou de temps de transit dans le modèle que nous avons développé.

Signal d'erreur de l'asservissement en fréquence

Le signal à la sortie du résonateur devient d'après l'équation (6.1) :

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^{+\infty} \rho(T) I(t, T) dT \\ &= \frac{1}{2} I_0 \int_0^{+\infty} \rho(T) \left\{ 1 + \cos(\Omega_0 T^* + 2\phi_m c(t, T) + \delta\phi(t, T)) \right\} dT \end{aligned} \quad (6.34)$$

En faisant les mêmes hypothèses que dans la dérivation du signal $s(t)$ à la sortie du détecteur synchrone pour le cas d'un jet monocinétique, ce signal s'écrit maintenant :

$$\delta s(t) = -\frac{1}{2} K I_0 \int_0^{+\infty} \rho(T) \delta\phi(t, T) a(t, T) dT \quad (6.35)$$

Le signal d'erreur $\delta e(t)$ est, quant à lui, toujours relié au signal $\delta s(t)$ par l'équation (6.6).

Densité spectrale de puissance bilatérale $S'_{\delta s}(f)$

Déterminons la densité spectrale de puissance bilatérale $S'_{\delta s}(f)$ du signal du détecteur synchrone. Pour cela, calculons la fonction d'autocorrélation de $\delta s(t)$. Elle s'écrit dans ce cas de la manière suivante :

$$R_{\delta s}(\tau) = \frac{1}{4} K^2 I_0^2 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \rho(T) \rho(T') \overline{\eta(t, T) \eta(t + \tau, T')} dT dT' \quad (6.36)$$

où nous avons posé $\eta(t, T) = \delta\phi(t, T) a(t, T)$. La barre supérieure sur le produit des fonctions η symbolise la moyenne temporelle définie par :

$$\overline{y(t,)} = \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{1}{t'} \int_0^{t'} y(t,) dt \quad (6.37)$$

Le produit intervenant dans (6.36) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}\overline{\eta(t, T) \eta(t + \tau, T')} &= \overline{\delta\phi(t, T) \delta\phi(t + \tau, T')} \cdot \overline{a(t, T) a(t + \tau, T')} \\ &= R_{\delta\phi}(\tau, T, T') R_a(\tau, T, T')\end{aligned}\quad (6.38)$$

puisque $\delta\phi(t, T)$ et $a(t, T)$ sont deux variables indépendantes. La première fonction d'autocorrélation est donnée d'après (6.7) et (6.9) par :

$$R_{\delta\phi}(\tau, T, T') = q^2 R_{\delta\omega_{\text{LO}}}(\tau) * h(-\tau + T_{\text{ad1}}, T) * h(\tau - T_{\text{ad1}}, T') \quad (6.39)$$

La seconde se calcule d'après le développement en séries de Fourier (6.11) de la fonction $a(t, T)$. Il vient :

$$R_a(\tau, T, T') = c_0(T) c_0(T') + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k}(T) c_{2k}^*(T') e^{-i4k\pi f_M \tau} + \text{c.c.} \quad (6.40)$$

En insérant (6.39) et (6.40) dans (6.36), et en prenant la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $R_{\delta s}(\tau)$ résultante après le filtre passe-bas idéal, on obtient pour la densité spectrale de puissance bilatérale $S'_{\delta s}(f)$ de $\delta s(t)$ l'expression suivante :

$$\begin{aligned}S'_{\delta s}(f) &= \frac{1}{4} K^2 q^2 I_0^2 \left\{ S'_{\delta\omega_{\text{LO}}}(f) \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \rho(T) \rho(T') c_0(T) c_0(T') H^*(f, T) \right. \\ &\quad \times H(f, T') dT dT' + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \rho(T) \rho(T') \left[c_{2k}(T) c_{2k}^*(T') \right. \\ &\quad \times \delta(f + 2kf_M) + c_{2k}^*(T) c_{2k}(T') \delta(f - 2kf_M) \Big] * S'_{\delta\omega_{\text{LO}}}(f) \\ &\quad \times H^*(f, T) H(f, T') dT dT' \Big\} \quad |f| < f_F\end{aligned}\quad (6.41)$$

Densité spectrale de puissance des fluctuations relatives de fréquence de l'oscillateur local asservi $S_y^{\text{LLO}}(f)$

Pour la suite, nous procédons de la même manière et nous faisons les mêmes approximations que dans le cas d'un jet monocinétique à partir de l'équation (6.16). En définissant les coefficients suivants :

$$C_{2k}(f_M) = \int_0^{+\infty} \rho(T) \frac{H(2kf_M, T)}{\overline{T}^*} c_{2k}^*(T) dT \quad (6.42a)$$

$$C_0 = \int_0^{+\infty} \rho(T) \frac{H(0, T)}{\overline{T}^*} c_0(T) dT \quad (6.42b)$$

on peut mettre la densité spectrale de puissance unilatérale des fluctuations relatives de fréquence de l'oscillateur local asservi, dues à l'effet Dick continu, sous la forme :

$$S_{y, \text{Dc}}^{\text{LLO}}(f) \simeq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|C_{2k}(f_M)|^2}{C_0^2} S_y^{\text{LO}}(2kf_M) \quad 0 < f < f_F \quad (6.43)$$

Développons le coefficient $C_{2k}(f_M)$. Le calcul de la fonction de transfert $H(f, T)$ de la fenêtre rectangulaire $h(t - T_{\text{ad1}}, T)$ donne :

$$H(f, T) = T^* e^{-2\pi i f T_{\text{ad1}}} \frac{1 - e^{-2\pi i f T^*}}{2\pi i f T^*} \quad (6.44)$$

En séparant $H(f, T)$ en partie réelle et imaginaire, $H(f, T)/\overline{T}^*$ s'écrit :

$$\frac{H(f, T)}{\overline{T}^*} = 2 \frac{T^*}{\overline{T}^*} \left(H_r(f, T) + i H_i(f, T) \right) \quad (6.45)$$

avec

$$H_r(f, T) = \frac{\sin(\pi f T^*) \cos(2\pi f (T^* + T_{\text{d1}}^*))}{2\pi f T^*} \quad (6.46a)$$

$$H_i(f, T) = -\frac{\sin(\pi f T^*) \sin(2\pi f (T^* + T_{\text{d1}}^*))}{2\pi f T^*} \quad (6.46b)$$

On voit que l'on a :

$$\frac{H(0, T)}{\overline{T}^*} = \frac{T^*}{\overline{T}^*} \quad (6.47)$$

ce qui montre bien que l'on arrive à la même définition du coefficient C_0 que celle donnée par (5.21). Avec la relation $c_{2k}^*(T) = (a_{2k}(T) + i b_{2k}(T))/2$, on peut développer le produit $c_{2k}^*(T) H(2kf_M, T)/\overline{T}^*$ dans le coefficient (6.42a). Finalement, on peut mettre la formule (6.43) sous la forme suivante :

$$S_{y, \text{Dc}}^{\text{LLO}}(f) \simeq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{C_{2k,r}^2(f_M) + C_{2k,i}^2(f_M)}{C_0^2} S_y^{\text{LO}}(2kf_M) \quad 0 < f < f_F \quad (6.48)$$

où nous avons posé :

$$C_{2k,r}(f_M) = a_{2k,r}(f_M) - b_{2k,i}(f_M) \quad (6.49a)$$

$$C_{2k,i}(f_M) = a_{2k,i}(f_M) + b_{2k,r}(f_M) \quad (6.49b)$$

$$a_{2k,r}(f_M) = \int_0^{+\infty} \rho(T) \frac{T^*}{\overline{T}^*} H_r(2kf_M, T) a_{2k}(T) dT \quad (6.49c)$$

$$a_{2k,i}(f_M) = \int_0^{+\infty} \rho(T) \frac{T^*}{\overline{T}^*} H_i(2kf_M, T) a_{2k}(T) dT \quad (6.49d)$$

$$b_{2k,r}(f_M) = \int_0^{+\infty} \rho(T) \frac{T^*}{\overline{T}^*} H_r(2kf_M, T) b_{2k}(T) dT \quad (6.49e)$$

$$b_{2k,i}(f_M) = \int_0^{+\infty} \rho(T) \frac{T^*}{\overline{T}^*} H_i(2kf_M, T) b_{2k}(T) dT \quad (6.49f)$$

$$C_0 = \int_0^{+\infty} \rho(T) \frac{T^*}{\overline{T}^*} c_0(T) dT \quad (6.49g)$$

La structure de la formule est semblable à celle pour un jet monocinétique, l'effet de filtrage du résonateur de Ramsey est maintenant lié à celui provenant du schéma de modulation par l'intermédiaire des coefficients $a_{2k,r(i)}(f_M)$ et $b_{2k,r(i)}(f_M)$. Estimons l'effet de la distribution de temps de transit $\rho(T)$ effective de la fontaine continue sur l'instabilité de fréquence due à l'effet Dick continu pour les trois schémas de modulation considérés.

6.2.7 Simulations numériques

Nous avons à nouveau effectué des simulations numériques de l'instabilité de fréquence due à l'effet d'intermodulation, ou effet Dick continu, en fonction de la fréquence de modulation pour un jet non-monocinétique. Ceci dans le but d'estimer l'instabilité résiduelle de fréquence engendrée par la température longitudinale du jet atomique. Nous considérons, ici aussi, les trois types de modulation que nous avons pris en compte dans le cas du jet monocinétique.

Modulation carrée de phase

Nous calculons la densité spectrale $S_{y,Dc}^{LLO}(0)$ avec l'équation (6.48). Les coefficients de Fourier $c_0(T)$, $a_{2k}(T)$ et $b_{2k}(T)$ sont définis par (D.4), (D.6)

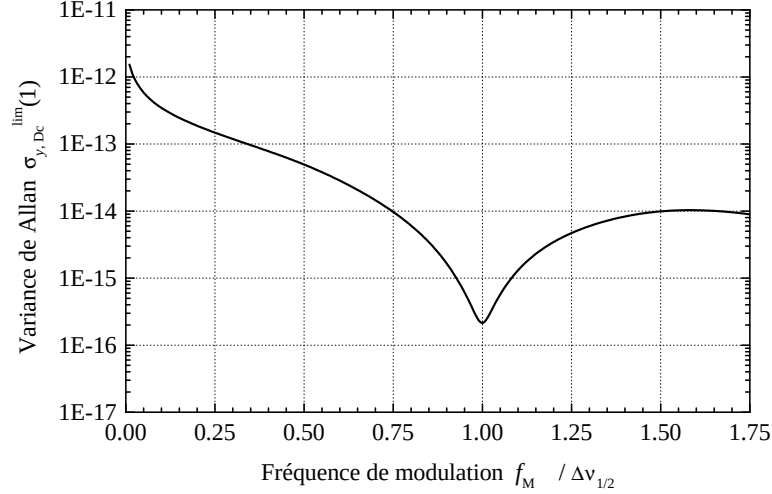


Fig. 6.8: Variance de Allan limite $\sigma_{y,Dc}^{\text{lim}}(1)$ due à l'effet Dick continu en fonction de la fréquence de modulation f_M pour la modulation carrée de phase. Elle est calculée pour un temps d'intégration de $\tau = 1$ s et une température longitudinale du jet de $T_l = 75 \mu\text{K}$.

et (D.7) avec les coefficients $a_{2p+1}(f_M, T)$ et $b_{2p+1}(f_M, T)$ donnés par (D.13). Pour calculer les coefficients $a_{2k,r(i)}(f_M)$, $b_{2k,r(i)}(f_M)$ et C_0 nous utilisons une distribution de temps de transit gaussienne avec les paramètres que nous avons estimés dans le chapitre 4, soit en particulier une température longitudinale effective du jet de $T_l = 75 \mu\text{K}$. Nous déterminons ensuite la variance de Allan au moyen de la relation (6.31). Pour un temps d'intégration $\tau = 1$ s, la Fig. 6.8 présente la variance d'Allan limite en fonction de la fréquence de modulation. La courbe est peu différente du cas monocinétique, mis à part que l'instabilité de fréquence ne s'annule plus à $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ comme on s'y attendait. Un zoom autour de cette fréquence de modulation est reporté dans la Fig. 6.9. La valeur minimale de la variance de Allan de l'instabilité de fréquence due à l'effet Dick continu se monte à $\sigma_{y,Dc}^{\text{lim}}(1)|_{\text{min}} \simeq 2.1 \cdot 10^{-16}$. Cette valeur est très faible et ne constitue en aucun cas une limitation de la stabilité de fréquence atteignable avec la fontaine continue. En effet, elle est beaucoup plus petite que la stabilité limite à court terme, due au bruit de grenaille du jet atomique, qui est projetée à $\sigma_y^{\text{lim}}(1) \simeq 7 \cdot 10^{-14}$ sur $\tau = 1$ s et qui est actuellement de l'ordre de $\sigma_y^{\text{lim}}(1) \simeq 2.5 \cdot 10^{-13}$. On remarque également que la valeur de la fréquence de modulation n'est pas critique. En effet, une variation de $\pm 4\%$ autour de $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ maintient toujours l'instabilité de fréquence à une valeur inférieure à $\sigma_{y,Dc}^{\text{lim}}(1) \simeq 5 \cdot 10^{-16}$.

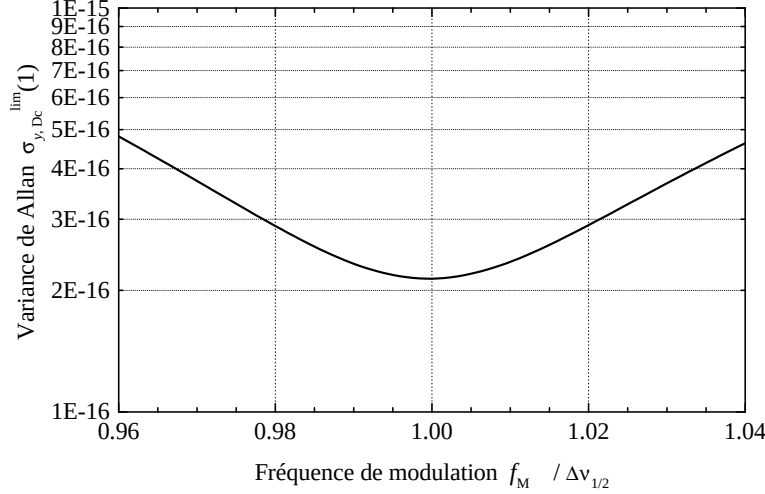


Fig. 6.9: Variance de Allan limite $\sigma_{y, Dc}^{\lim}(1)$ due à l'effet Dick continu autour de la fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ pour la modulation carrée de phase. Elle est calculée pour un temps d'intégration de $\tau = 1$ s et une température longitudinale du jet de $T_l = 75 \mu\text{K}$.

Effet de la température sur l'instabilité minimale :

Afin de voir quel est l'effet de la température longitudinale sur l'instabilité de fréquence résiduelle à la fréquence de modulation optimale $f_M \simeq \Delta\nu_{1/2}$, nous avons calculé la variance de Allan en fonction de la température longitudinale du jet atomique T_l . La courbe est représentée dans la Fig. 6.10 pour une température longitudinale comprise entre $0 \leq T_l \leq 100 \mu\text{K}$. On remarque que l'instabilité de fréquence résiduelle due à l'effet Dick continu reste complètement négligeable jusqu'à une température de $T_l = 100 \mu\text{K}$. En effet, elle est plus de deux ordres de grandeur inférieure à l'instabilité de fréquence ultime attendue due au bruit de grenaille du jet atomique. Ainsi, pour la modulation carrée de phase à la fréquence de modulation optimale et pour une température longitudinale typique comprise entre $T_l = 50 \mu\text{K}$ et $T_l = 100 \mu\text{K}$, l'effet Dick continu n'impose aucune limitation de la stabilité de fréquence de la fontaine continue.

Effet du déphasage entre modulation et démodulation :

Regardons encore quel est l'effet du déphasage entre le signal modulé du résonateur et la forme d'onde de démodulation. L'intérêt ici est de se rendre compte si cet ajustement est critique par rapport à l'instabilité résiduelle de fréquence minimale. A cette fin, nous avons représenté dans la Fig. 6.11 la variance de Allan due à l'effet Dick continu, pour la fréquence de modulation optimale $f_M \simeq \Delta\nu_{1/2}$, en fonction du déphasage φ entre modulation et

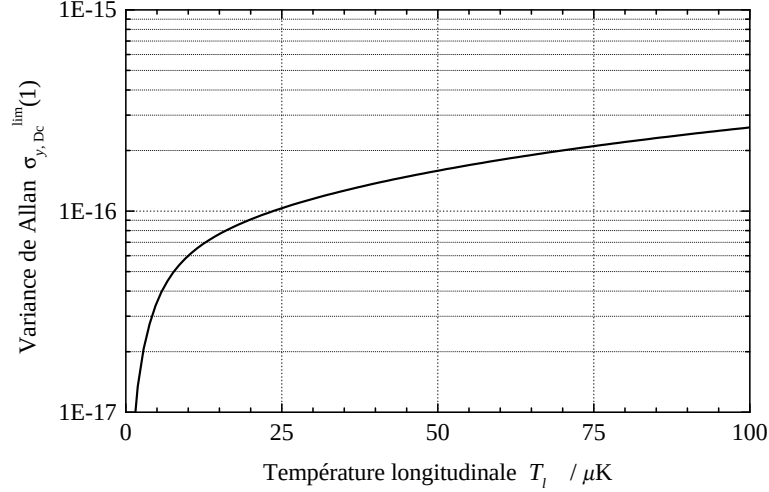


Fig. 6.10: Variance de Allan limite $\sigma_{y,Dc}^{lim}(T_l)$ due à l'effet Dick continu en fonction de la température longitudinale T_l du jet atomique pour la modulation carrée de phase. La variance est calculée à la fréquence de modulation optimale $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ pour un temps d'intégration de $\tau = 1$ s.

démodulation dans l'intervalle $0 \leq \varphi \leq \pi$. On remarque que l'instabilité de fréquence diverge brutalement, mais reste finie, pour une certaine valeur de la phase. Cette valeur correspond au déphasage qui minimise le signal d'erreur (coefficient C_0). En effet, on peut vérifier sur la Fig. 5.3 du chapitre 5 que la valeur de la phase correspond bien à celle qui annule le signal d'erreur dans le cas monocinétique. L'ajustement de la phase n'est pas critique, comme le montre la Fig. 6.12 qui représente un agrandissement autour de la phase optimale de démodulation. Pour une variation de la phase de $\pm 5\%$ autour de la phase de démodulation optimale, la variance de Allan reste inférieure à $\sigma_{y,Dc}^{lim}(1) \simeq 4 \cdot 10^{-16}$ ce qui est bien sûr négligeable.

Modulation sinusoïdale de fréquence

Nous calculons la variance de Allan de la même façon que pour la modulation carrée de phase. Les coefficients $a_{2p+1}(\omega_m, f_M, T)$ et $b_{2p+1}(\omega_m, f_M, T)$ intervenants dans la définition des coefficients de Fourier $c_0(T)$, $a_{2k}(T)$ et $b_{2k}(T)$ sont donnés par (D.18). Nous calculons les coefficients $a_{2k,r(i)}(f_M)$, $b_{2k,r(i)}(f_M)$ et C_0 avec la même distribution de temps de transit. La variance de Allan obtenue est présentée dans la Fig. 6.13 en fonction de la fréquence de modulation. La courbe est également peu différente du cas monocinétique, et là aussi l'instabilité de fréquence ne s'annule plus à $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. Nous avons à nouveau reporté un zoom autour de cette fréquence de modulation dans

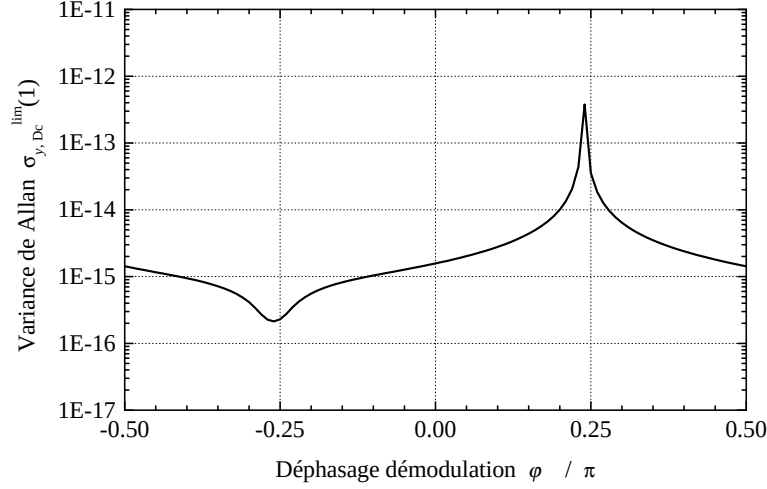


Fig. 6.11: Variance de Allan limite $\sigma_{y,Dc}^{lim}(1)$ due à l'effet Dick continu en fonction du déphasage φ entre modulation et démodulation pour la modulation carrée de phase. La variance est calculée à $f_M \simeq \Delta\nu_{1/2}$ pour un temps d'intégration de $\tau = 1$ s et une température longitudinale du jet de $T_l = 75 \mu\text{K}$.

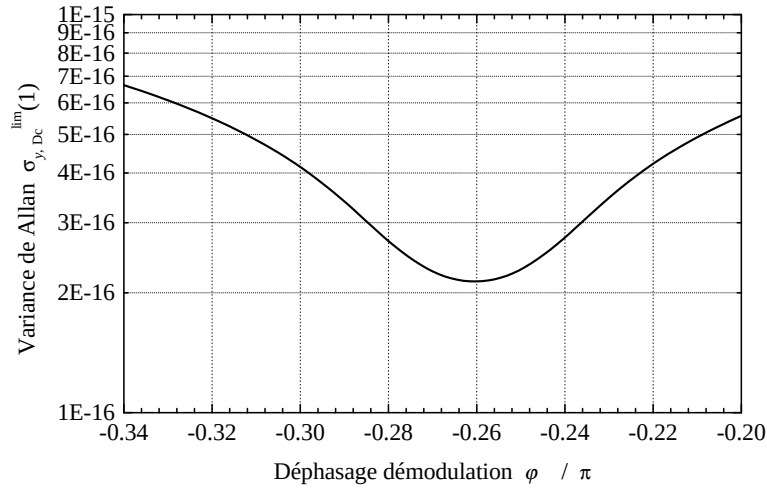


Fig. 6.12: Variance de Allan limite $\sigma_{y,Dc}^{lim}(1)$ due à l'effet Dick continu autour de la phase de démodulation optimale pour la modulation carrée de phase. La variance est calculée à $f_M \simeq \Delta\nu_{1/2}$ pour un temps d'intégration de $\tau = 1$ s et une température longitudinale du jet de $T_l = 75 \mu\text{K}$.

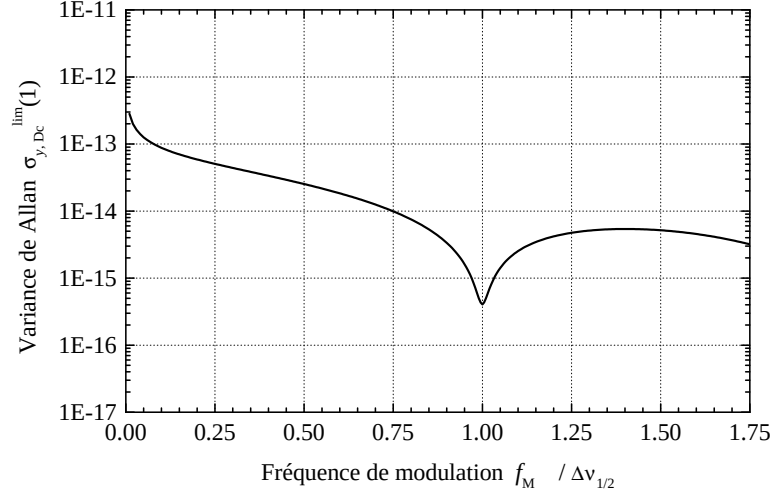


Fig. 6.13: Variance de Allan limite $\sigma_{y,Dc}^{\lim}(1)$ due à l'effet Dick continu en fonction de la fréquence de modulation f_M pour la modulation sinusoïdale de fréquence. Elle est calculée pour un temps d'intégration de $\tau = 1$ s et une température longitudinale du jet de $T_l = 75 \mu\text{K}$.

la Fig. 6.14 . La valeur minimale de la variance de Allan de l'instabilité de fréquence due à l'effet Dick continu se monte à $\sigma_{y,Dc}^{\lim}(1)|_{\min} \simeq 4.0 \cdot 10^{-16}$. Cette valeur est environ le double de celle obtenue avec la modulation carrée de phase, mais reste très faible et ne constitue pas une limitation de la stabilité de fréquence atteignable avec la fontaine continue. On remarque aussi que la valeur de la fréquence de modulation n'est pas critique. En effet, une variation de $\pm 4\%$ autour de $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ maintient encore l'instabilité de fréquence à une valeur inférieure à $\sigma_{y,Dc}^{\lim}(1) \simeq 2 \cdot 10^{-15}$.

Effet de la température sur l'instabilité minimale :

Nous avons aussi déterminé la dépendance de la variance de Allan, à la fréquence de modulation optimale, par rapport à la température longitudinale du jet atomique. La courbe est représentée dans la Fig. 6.15 pour une température longitudinale comprise entre $0 \leq T_l \leq 100 \mu\text{K}$. Là également, l'instabilité de fréquence est négligeable car elle atteint seulement $\sigma_{y,Dc}^{\lim}(1) \simeq 5 \cdot 10^{-16}$ pour $T_l = 100 \mu\text{K}$.

Effet du déphasage entre modulation et démodulation :

La Fig. 6.16 présente la variance de Allan due à l'effet Dick continu en fonction du déphasage φ entre modulation et démodulation, dans l'intervalle $0 \leq \varphi \leq \pi$, pour la fréquence de modulation optimale $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. Les ca-

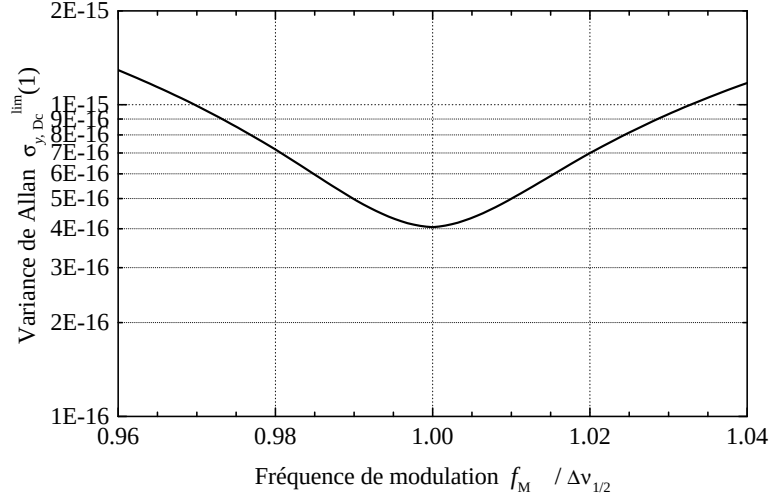


Fig. 6.14: Variance de Allan limite $\sigma_{y,Dc}^{\text{lim}}(1)$ due à l'effet Dick continu autour de la fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ pour la modulation sinusoïdale de fréquence. Elle est calculée pour un temps d'intégration de $\tau = 1$ s et une température longitudinale du jet de $T_l = 75 \mu K$.

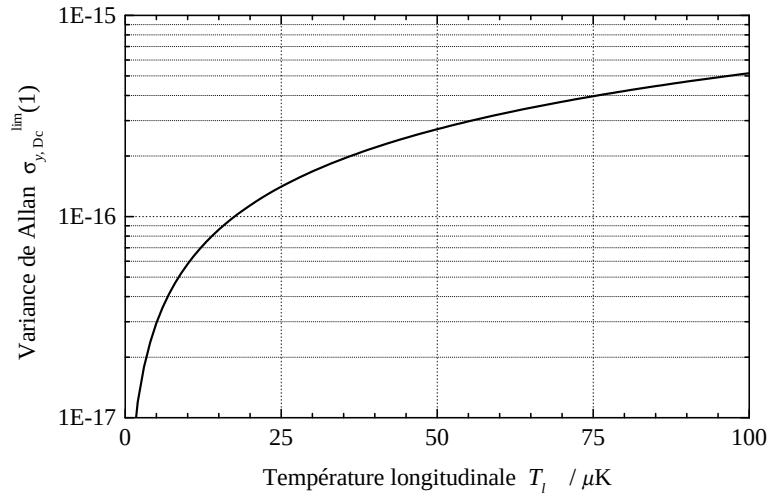


Fig. 6.15: Variance de Allan limite $\sigma_{y,Dc}^{\text{lim}}(1)$ due à l'effet Dick continu en fonction de la température longitudinale T_l du jet atomique pour la modulation sinusoïdale de fréquence. La variance est calculée à la fréquence de modulation optimale $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ pour un temps d'intégration de $\tau = 1$ s.

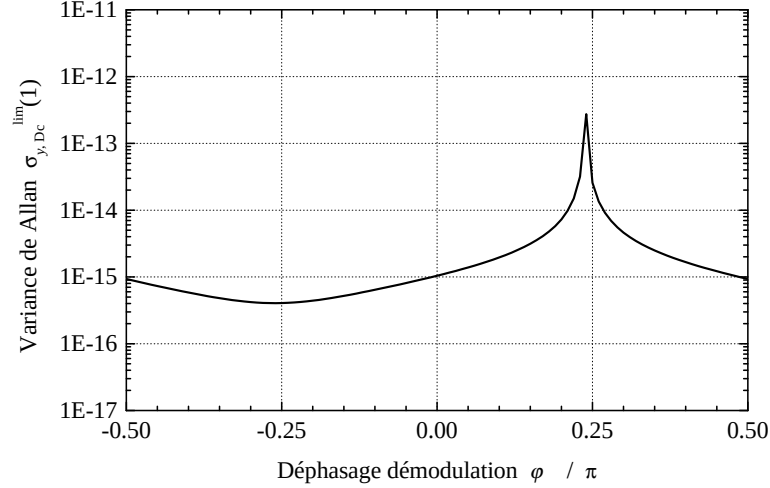


Fig. 6.16: Variance de Allan limite $\sigma_{y,Dc}^{\lim}(1)$ due à l'effet Dick continu en fonction du déphasage φ entre modulation et démodulation pour la modulation sinusoïdale de fréquence. La variance est calculée à $f_M \simeq \Delta\nu_{1/2}$ pour un temps d'intégration de $\tau = 1$ s et une température longitudinale du jet de $T_l = 75 \mu\text{K}$.

ractéristiques générales de la courbe sont semblables à celles correspondants à la modulation carrée de phase. Ceci n'est pas étonnant puisque c'est le coefficient C_0 qui domine le comportement avec φ de l'instabilité résiduelle de fréquence. Or, pour la modulation carrée de phase, la dépendance de la pente a^0 avec φ (Fig. 5.3) présente également le même comportement général que pour la modulation sinusoïdale de fréquence (Fig. 5.9). La valeur de l'instabilité de fréquence résiduelle n'est pas sensible à la phase φ dans une gamme qui est très étendue comme le montre la Fig. 6.17 qui représente un agrandissement autour de la phase optimale. Effectivement, pour une variation de la phase de $\pm 10\%$ autour de la phase de démodulation optimale, l'instabilité résiduelle augmente de moins de $1 \cdot 10^{-16}$.

Modulation carrée de fréquence

Nous calculons encore la variance de Allan de la même façon que précédemment. Les coefficients $a_{2p+1}(\omega_m, f_M, T)$ et $b_{2p+1}(\omega_m, f_M, T)$ utilisés pour calculer les coefficients de Fourier $c_0(T)$, $a_{2k}(T)$ et $b_{2k}(T)$ sont donnés par (D.23). La distribution de temps de transit utilisée est identique. La variance de Allan en fonction de la fréquence de modulation est représentée dans la Fig. 6.18. Elle est légèrement plus élevée que dans le cas du jet monocinétique pour des fréquences de modulation différentes de $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. Pour cette dernière fréquence de modulation, l'instabilité de fréquence ne s'annule plus

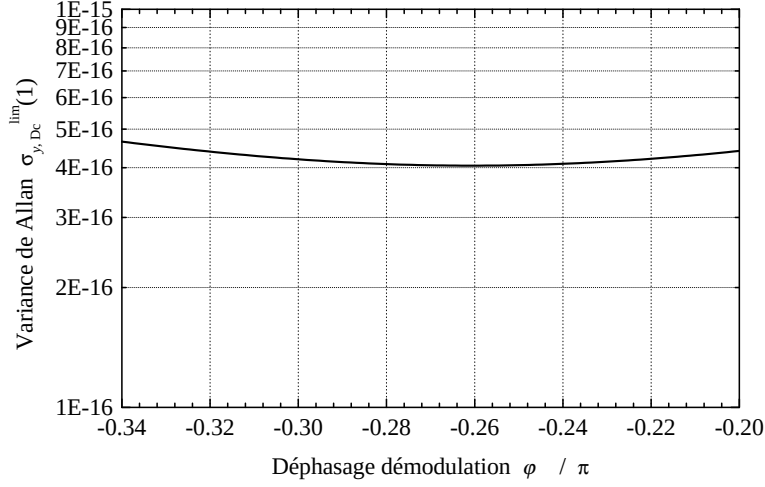


Fig. 6.17: Variance de Allan limite $\sigma_{y,Dc}^{\lim}(1)$ due à l'effet Dick continu autour de la phase de démodulation optimale pour la modulation sinusoïdale de fréquence. La variance est calculée à $f_M \simeq \Delta\nu_{1/2}$ pour un temps d'intégration de $\tau = 1$ s et une température longitudinale du jet de $T_l = 75 \mu\text{K}$.

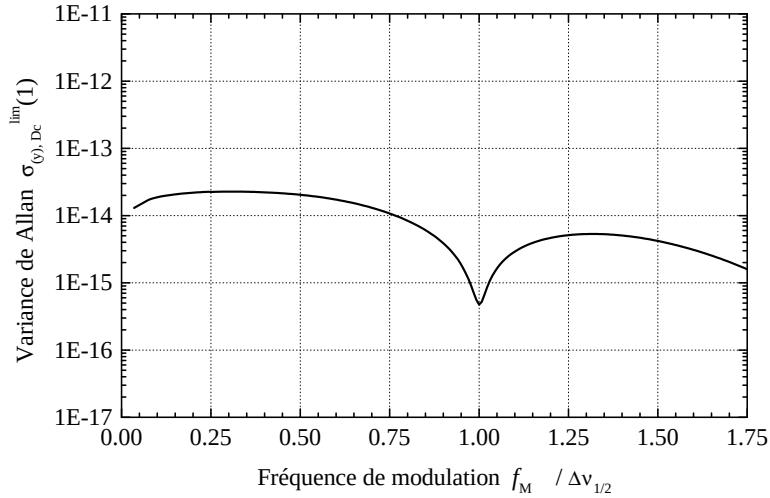


Fig. 6.18: Variance de Allan limite $\sigma_{y,Dc}^{\lim}(1)$ due à l'effet Dick continu en fonction de la fréquence de modulation f_M pour la modulation carrée de fréquence. Elle est calculée pour un temps d'intégration de $\tau = 1$ s et une température longitudinale du jet de $T_l = 75 \mu\text{K}$.

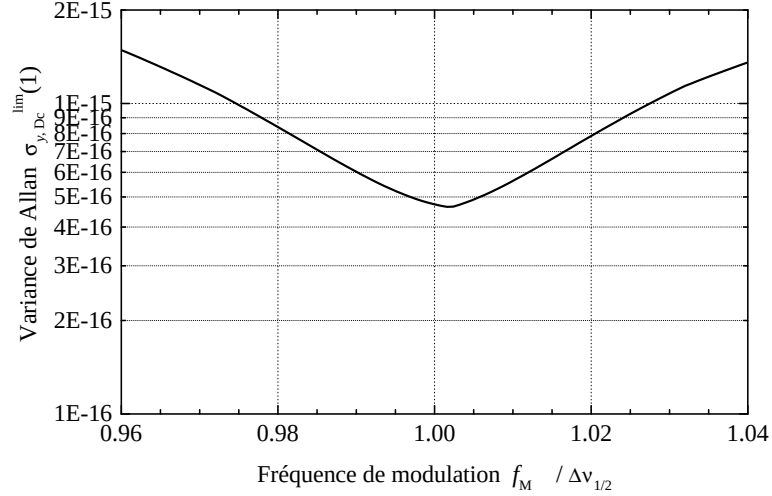


Fig. 6.19: Variance de Allan limite $\sigma_{y,Dc}^{\text{lim}}(1)$ due à l'effet Dick continu autour de la fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ pour la modulation carrée de fréquence. Elle est calculée pour un temps d'intégration de $\tau = 1$ s et une température longitudinale du jet de $T_l = 75 \mu\text{K}$.

comme pour les autres types de modulation. La Fig. 6.19 montre un zoom autour de cette fréquence de modulation. La valeur minimale de la variance de Allan de l'instabilité de fréquence due à l'effet Dick continu se monte à $\sigma_{y,Dc}^{\text{lim}}(1)|_{\text{min}} \simeq 4.6 \cdot 10^{-16}$. Quoique supérieure à la valeur obtenue avec la modulation carrée de phase, cette valeur reste très faible et ne constitue pas une limitation de la stabilité de fréquence atteignable avec la fontaine continue. On remarque également que la valeur de la fréquence de modulation n'est pas critique. En effet, une variation de $\pm 4\%$ autour de $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ maintient toujours l'instabilité de fréquence à une valeur inférieure à $\sigma_{y,Dc}^{\text{lim}}(1) \simeq 2 \cdot 10^{-15}$.

Effet de la température sur l'instabilité minimale :

La dépendance de la variance de Allan, à la fréquence de modulation optimale, par rapport à la température longitudinale du jet atomique est représentée dans la Fig. 6.20 pour une température longitudinale comprise entre $0 \leq T_l \leq 100 \mu\text{K}$. Les remarques sont identiques aux deux autres types de modulation, à savoir que l'instabilité de fréquence résiduelle est négligeable pour une température du jet atomique de l'ordre de celle obtenue dans la fontaine continue. En effet, pour une température de $T_l = 100 \mu\text{K}$, la variance de Allan se monte seulement à $\sigma_{y,Dc}^{\text{lim}}(1) \simeq 1 \cdot 10^{-15}$.

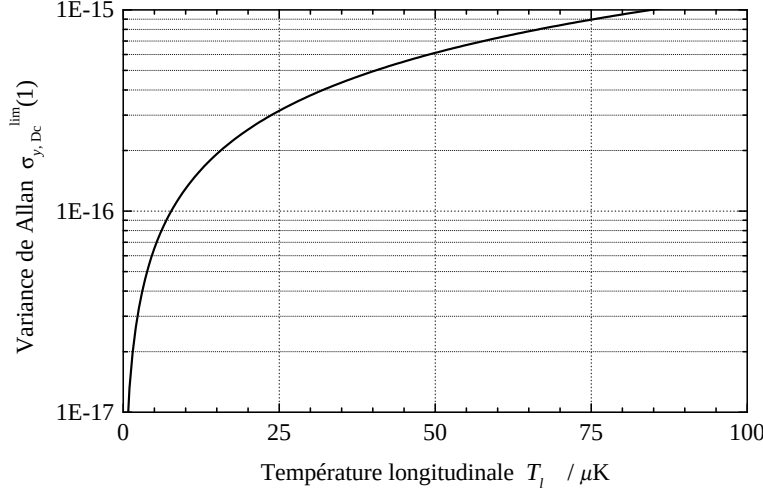


Fig. 6.20: Variance de Allan limite $\sigma_{y,Dc}^{lim}(1)$ due à l'effet Dick continu en fonction de la température longitudinale T_l du jet atomique pour la modulation carrée de fréquence. La variance est calculée à la fréquence de modulation optimale $f_M \simeq \Delta\nu_{1/2}$ pour un temps d'intégration de $\tau = 1$ s.

Effet du déphasage entre modulation et démodulation :

La variance de Allan due à l'effet Dick continu en fonction du déphasage φ entre modulation et démodulation, dans l'intervalle $0 \leq \varphi \leq \pi$, est reportée dans la Fig. 6.21 pour la fréquence de modulation optimale $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. On remarque que l'allure de la courbe est très similaire à celle de la modulation sinusoïdale de fréquence. En effet, si l'on compare la courbe représentant la dépendance de la pente a'^0 avec la phase de démodulation φ pour la modulation sinusoïdale de fréquence (Fig. 5.9) et la modulation carrée de fréquence (Fig. 5.14), on constate que ces deux courbes sont très semblables. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, c'est le coefficient C_0 qui domine le comportement de la variance de Allan avec φ . Il n'est donc pas étonnant que le comportement avec φ de l'instabilité de fréquence résiduelle pour ces deux types de modulation soit presque identique. Ceci paraît évident étant donné que, de manière générale, la modulation carrée de fréquence se rapproche plus de la modulation sinusoïdale de fréquence que de la modulation carrée de phase. Ainsi, comme pour la modulation sinusoïdale de fréquence, la valeur de l'instabilité de fréquence résiduelle n'est pas sensible à la phase φ dans une gamme qui est très étendue comme le montre la Fig. 6.22. Pour une variation de la phase de $\pm 10\%$ autour de la phase de démodulation optimale, l'instabilité résiduelle augmente de moins de $1 \cdot 10^{-16}$ également.

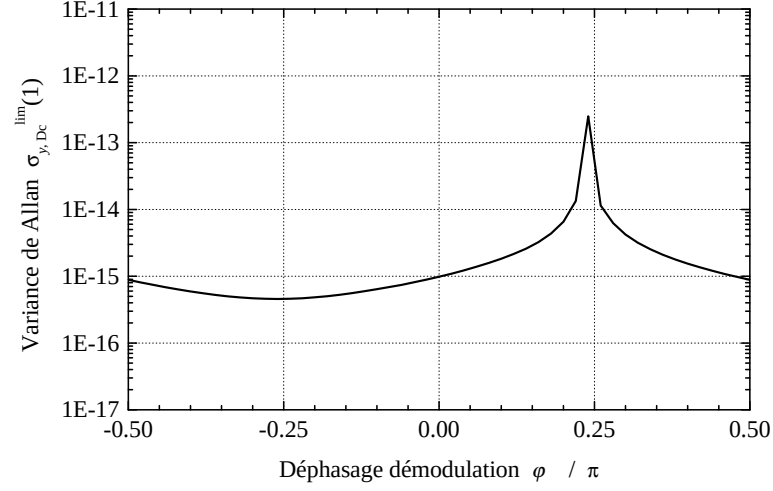


Fig. 6.21: Variance de Allan limite $\sigma_{y,Dc}^{lim}(1)$ due à l'effet Dick continu en fonction du déphasage φ entre modulation et démodulation pour la modulation carrée de fréquence. La variance est calculée à $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ pour un temps d'intégration de $\tau = 1$ s et une température longitudinale du jet de $T_l = 75 \mu\text{K}$.

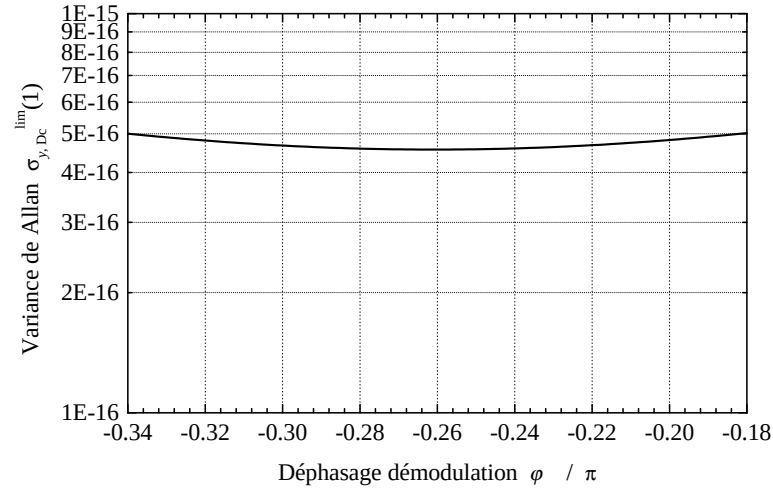


Fig. 6.22: Variance de Allan limite $\sigma_{y,Dc}^{lim}(1)$ due à l'effet Dick continu autour de la phase de démodulation optimale pour la modulation carrée de fréquence. La variance est calculée à $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ pour un temps d'intégration de $\tau = 1$ s et une température longitudinale du jet de $T_l = 75 \mu\text{K}$.

6.2.8 Effet de temps morts

Nous avons vu dans le chapitre 5, que dans le cas de la modulation carrée de phase on avait l'apparition de transitoires sur le signal du résonateur. La durée minimale de ces transitoires, pour la fréquence de modulation optimale $f_M = \Delta\nu_{1/2}$, est égale au temps d'interaction τ dans le cas d'un jet monocinétique. Pour un jet non-monocinétique et cette même fréquence de modulation, la durée des transitoires atteint environ $10.5 \bar{\tau}$. Les deux transitoires apparaissant par période de modulation sont symétriques et ne contiennent que des harmoniques paires de la fréquence de modulation. Ils devraient donc théoriquement ne pas être démodulés et ne pas perturber le signal d'erreur. Il se peut néanmoins que ce ne soit pas le cas et qu'il soit nécessaire de supprimer ces transitoires (*blanking*) avant démodulation dans le détecteur synchrone. Cette opération va introduire des temps morts dans le processus d'interrogation qui vont dégrader la stabilité de fréquence de l'oscillateur local asservi puisque le processus d'interrogation n'est plus continu. En fait, le fonctionnement de l'étalon devient pulsé, mais dans un rapport beaucoup plus favorable que celui qui prévaut pour une fontaine à atomes froids pulsée traditionnelle.

Nous avons entrepris d'estimer l'importance de la dégradation de stabilité de fréquence de l'étalon due à la suppression de ces transitoires. Pour cela, nous avons pris en compte l'effet de la suppression de ces transitoires en introduisant un temps mort, de durée égale à la durée des transitoires, dans le processus de démodulation. Cela revient à rendre la forme d'onde de démodulation nulle pendant cet intervalle de temps chaque demi-période. Une esquisse de la forme d'onde de démodulation $d(t)$ correspondante est représentée dans la Fig. 6.23 pour une forme de démodulation initiale carrée. Introduisons le taux de temps morts β défini par :

$$\beta = \frac{T_b}{T_M} \quad (6.50)$$

où T_M est la période de modulation et $T_b/2$ est l'intervalle de temps mort par demi-période de modulation. Ce dernier est égal à la durée des transitoires. Pour la forme de démodulation de la Fig. 6.23, nous avons calculé les coefficients de Fourier $c_0(T)$, $a_{2k}(T)$ et $b_{2k}(T)$ de la fonction $a(t)$ comme nous l'avons fait dans l'annexe D. Nous obtenons ainsi les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} c_0(T) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \left\{ a_{2p+1}(T) \sin((2p+1)\varphi) \cos((2p+1)\beta\pi/2) \right. \\ \left. + b_{2p+1}(T) \cos((2p+1)\varphi) \cos((2p+1)\beta\pi/2) \right\} \end{aligned} \quad (6.51)$$

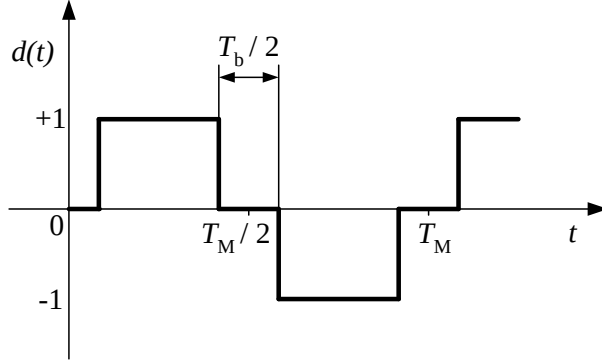


Fig. 6.23: Esquisse de la forme d'onde de démodulation $d(t)$ considérée pour la suppression des transitoires de la modulation carrée de phase. On introduit des temps morts de durée T_b sur une période de modulation.

$$\begin{aligned}
 a_{2k}(T) = & \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2 - (2k)^2} \left\{ a_{2p+1}(T) \left[\eta_{2p+1,k}(\beta) \sin((2p+1)\varphi) \right. \right. \\
 & \times \cos(2k\varphi) - \xi_{2p+1,k}(\beta) \cos((2p+1)\varphi) \sin(2k\varphi) \Big] \\
 & + b_{2p+1}(T) \left[\eta_{2p+1,k}(\beta) \cos((2p+1)\varphi) \cos(2k\varphi) \right. \\
 & \left. \left. + \xi_{2p+1,k}(\beta) \sin((2p+1)\varphi) \sin(2k\varphi) \right] \right\} \quad (6.52a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{2k}(T) = & -\frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2 - (2k)^2} \left\{ a_{2p+1}(T) \left[\xi_{2p+1,k}(\beta) \cos((2p+1)\varphi) \right. \right. \\
 & \times \cos(2k\varphi) + \eta_{2p+1,k}(\beta) \sin((2p+1)\varphi) \sin(2k\varphi) \Big] \\
 & + b_{2p+1}(T) \left[\eta_{2p+1,k}(\beta) \cos((2p+1)\varphi) \sin(2k\varphi) \right. \\
 & \left. \left. - \xi_{2p+1,k}(\beta) \sin((2p+1)\varphi) \cos(2k\varphi) \right] \right\} \quad (6.52b)
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \eta_{2p+1,k}(\beta) = & (2p+1) \cos((2p+1)\beta\pi/2) \cos(k\beta\pi) + 2k \sin((2p+1)\beta\pi/2) \\
 & \times \sin(k\beta\pi) \quad (6.53a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \xi_{2p+1,k}(\beta) = & (2p+1) \sin((2p+1)\beta\pi/2) \sin(k\beta\pi) + 2k \cos((2p+1)\beta\pi/2) \\
 & \times \cos(k\beta\pi) \quad (6.53b)
 \end{aligned}$$

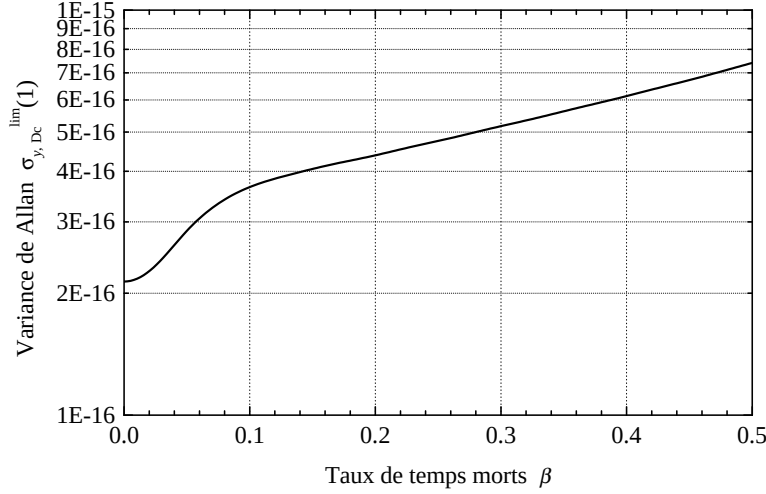


Fig. 6.24: Variance de Allan limite $\sigma_{y,Dc}^{lim}(1)$ due à l'effet Dick continu en fonction du taux de temps morts β pour la modulation carrée de phase. La variance est calculée à $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ pour un temps d'intégration de $\tau = 1$ s et un jet de température longitudinale $T_l = 75 \mu K$.

Dans ce calcul simplifié nous ne tenons pas compte de l'effet des zones d'interaction finies, qui introduisent en fait les transitoires, dans la fonction de transfert $H(f, T)$ de la cavité de Ramsey. Nous considérons cette dernière pourvue de zones d'interaction infiniment courtes comme nous l'avons fait jusqu'ici. Nous prenons donc en compte uniquement l'effet de la suppression des transitoires dans la démodulation, ce qui se traduit par une modification des coefficients de la fonction $a(t)$. Pour visualiser l'effet de l'introduction de temps morts, nous calculons la variance de Allan limite $\sigma_{y,Dc}^{lim}(1)$ en fonction du taux de temps morts β , à la fréquence de modulation optimale $f_M = \Delta\nu_{1/2}$, en utilisant les coefficients (6.52). Le résultat du calcul est présenté dans la Fig. 6.24 pour un paramètre β compris dans l'intervalle $0 < \beta < 0.5$.

On constate que la dégradation de la stabilité de fréquence est faible, puisque pour $\beta = 0.5$ la variance de Allan est inférieure à $\sigma_{y,Dc}^{lim}(1) = 8 \cdot 10^{-16}$. Nous avons calculé que la durée des transitoires pour un jet de température longitudinale $T_l = 75 \mu K$ était d'environ $10.5 \bar{\tau}$. Supprimer complètement ces transitoires revient à introduire des temps morts avec un taux $\beta = 21\bar{\tau}/T_M = 0.44$. Ceci correspond à une instabilité de fréquence de $\sigma_{y,Dc}^{lim}(1) \simeq 6.4 \cdot 10^{-16}$ qui est toujours complètement négligeable. En fait, comme nous l'avons mentionné, la dégradation de la stabilité de fréquence devrait être plus grande car nous n'avons pas pris en compte l'effet des zones

<i>Grandeur</i>	<i>Notation</i>	<i>Valeur</i>	
		<i>Jet mono.</i> $T_l = 0$	<i>Jet non-mono.</i> $T_l = 75 \mu\text{K}$
<i>Modulation carrée de phase :</i>			
Variance de Allan limite	$\sigma_{y,\text{Dc}}^{\text{lim}}(1)$	0	$2.1 \cdot 10^{-16}$
<i>Modulation sinus. de fréq. :</i>			
Variance de Allan limite	$\sigma_{y,\text{Dc}}^{\text{lim}}(1)$	0	$4.0 \cdot 10^{-16}$
<i>Modulation carrée de fréq. :</i>			
Variance de Allan limite	$\sigma_{y,\text{Dc}}^{\text{lim}}(1)$	0	$4.6 \cdot 10^{-16}$

Tab. 6.2: Valeurs numériques de la variance de Allan limite $\sigma_{y,\text{Dc}}^{\text{lim}}(1)$ due à l'effet Dick continu pour un jet monocinétique et pour le jet correspondant à la fontaine continue. Ces valeurs sont indiquées à la fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ pour les trois types de modulation considérés.

d'interaction finies de la cavité de Ramsey. Néanmoins, si cette dégradation additionnelle est du même ordre de grandeur que celle engendrée par l'introduction de temps morts, l'instabilité résiduelle de fréquence sera encore négligeable.

Pour terminer cette partie consacrée à une étude partielle de l'effet Dick continu dans une fontaine continue, nous résumons les valeurs numériques des principaux résultats obtenus concernant la variance de Allan des fluctuations relatives de fréquence de l'oscillateur local asservi. Le Tab. 6.2 regroupe la valeur de la variance de Allan pour les différents types de modulation considérés à la fréquence de modulation optimale pour la modulation carrée de phase, soit $f_M = \Delta\nu_{1/2}$.

Nous avons aussi reporté dans le Tab. 6.3 la valeur de la variance de Allan à la fréquence de modulation optimale (cas quasi-statique) pour les modulation sinusoïdale et carrée de fréquence.

<i>Grandeur</i>	<i>Notation</i>	<i>Valeur</i>	
		<i>Jet mono.</i> $T_l = 0$	<i>Jet non-mono.</i> $T_l = 75 \mu\text{K}$
<i>Modulation sinus. de fréq. :</i>			
Variance de Allan limite			
pour $f_M = 0.1 \Delta\nu_{1/2}$	$\sigma_{y,\text{Dc}}^{\text{lim}}(1)$	$8.7 \cdot 10^{-14}$	$9.0 \cdot 10^{-14}$
<i>Modulation carrée de fréq. :</i>			
Variance de Allan limite			
pour $f_M = 0.1 \Delta\nu_{1/2}$	$\sigma_{y,\text{Dc}}^{\text{lim}}(1)$	$1.3 \cdot 10^{-14}$	$1.8 \cdot 10^{-14}$

Tab. 6.3: Valeurs numériques de la variance de Allan limite $\sigma_{y,\text{Dc}}^{\text{lim}}(1)$ due à l'effet Dick continu pour un jet monocinétique et pour le jet correspondant à la fontaine continue. Ces valeurs sont indiquées pour des fréquences de modulation quasi-statiques pour la modulation sinusoïdale et carrée de fréquence.

6.3 Stabilité de fréquence de l'étalon

6.3.1 Introduction

Dans la seconde et dernière partie de ce chapitre, nous nous intéressons à la stabilité de fréquence ultime de l'étalon, déterminée par le bruit de détection du jet atomique. Même si l'étalon était "parfait", c.-à-d. qu'il ne souffre d'aucun déplacement de fréquence (cf. chapitre 7) et qu'il n'y a aucun bruit d'origine technique qui le perturbe, sa fréquence souffrirait toujours d'une instabilité résiduelle, due au bruit intrinsèque du jet atomique, qu'il n'est pas possible de supprimer totalement. En effet, ce bruit est lié à l'origine fondamentalement discrète (atomique) du jet. Cette instabilité de fréquence résiduelle fondamentale impose la limite ultime de la stabilité et de l'exactitude de fréquence atteignable avec ce type d'étalon. On s'efforce donc toujours, dans les étalons de fréquence primaires, d'approcher le plus possible cette limite fondamentale.

En fait, le bruit de détection du jet atomique domine la stabilité de fréquence pour des durées de mesure τ allant de quelques secondes à quelques jours. Dans cet intervalle, l'instabilité de fréquence diminue comme $\tau^{-1/2}$ avec l'augmentation de la durée de mesure. Pour des durées supérieures à quelques jours, l'influence de l'environnement extérieur de l'étalon (température, champ magnétique, etc.) devient prépondérante et résulte en une instabilité de fréquence qui augmente avec la durée de mesure.

Nous nous proposons dans une première partie d'établir l'expression théorique de la stabilité de fréquence ultime de la fontaine continue (sous-section 6.3.2), soit la variance de Allan des fluctuations relatives de fréquence dues au bruit de détection du jet atomique. Dans la sous-section 6.3.3, nous étudions ensuite l'influence des trois types de modulation considérés sur la valeur de la stabilité et estimons sa valeur théorique, pour la fontaine continue, d'après une mesure du rapport signal-sur-bruit du signal du résonateur.

Dans une deuxième partie, nous comparons la mesure expérimentale de la stabilité de fréquence de la fontaine continue, dans la sous-section 6.3.4, avec le comportement théorique déduit auparavant. Pour terminer, nous réalisons (sous-section 6.3.5) une simulation numérique du comportement de la variance de Allan de la stabilité de fréquence ultime visée avec la fontaine continue.

6.3.2 Stabilité de fréquence théorique

Pour dériver l'expression théorique de la stabilité de fréquence ultime de la fontaine continue, nous utilisons le même modèle d'asservissement de fréquence de l'étalon que celui supposé dans l'établissement de la formule de l'effet Dick continu dans la sous-section 6.2.2, et nous faisons les mêmes hypothèses. Nous considérons directement le cas d'un jet non-monocinétique ($T_l > 0$) et nous faisons également l'approximation de zones d'interaction infiniment courtes équivalentes pour un champ magnétique RF dont l'amplitude varie sinusoïdalement.

Fluctuations de phase équivalentes de l'oscillateur local

Les fluctuations du signal du résonateur dues au bruit de détection du jet atomique sont interprétées par l'asservissement de fréquence de l'étalon comme étant dues à des fluctuations de fréquence de l'oscillateur local (oscillateur à quartz) et corrigées en tant que telles. Ainsi, ces fluctuations d'origine physique sont équivalentes, pour l'asservissement, à des fluctuations de fréquence de l'oscillateur local. Déterminons tout d'abord ces fluctuations de phase équivalentes de l'oscillateur local. Les fluctuations du signal de sortie du détecteur synchrone, si elles sont dues uniquement au bruit de détection du jet atomique, sont données par :

$$\delta s_{\text{at}}(t) = K \delta I(t) d(t) \quad (6.54)$$

où K et $d(t)$ ont la même signification que dans la sous-section 5.2.1. $\delta I(t)$ représente les fluctuations du signal de sortie du résonateur qui est donné

par :

$$I(t) = \frac{1}{2} I_0 \int_0^{+\infty} \rho(T) \left\{ 1 + \cos(2\phi_m c(t, T)) \right\} dT \quad (6.55)$$

Les fluctuations équivalentes de $\delta s_{\text{at}}(t)$ peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \delta s_{\text{at}}^{\text{equ}}(t) &= -\frac{1}{2} K I_0 \int_0^{+\infty} \rho(T) \delta \phi_{\text{at}}^{\text{equ}}(t) a(t, T) dT \\ &= -\frac{1}{2} K I_0 \delta \phi_{\text{at}}^{\text{equ}}(t) \underbrace{\int_0^{+\infty} \rho(T) a(t, T) dT}_{A(t)} \end{aligned} \quad (6.56)$$

où $\delta \phi_{\text{at}}^{\text{equ}}(t)$ sont les fluctuations de phase équivalentes de l'oscillateur local et $a(t, T)$ est la fonction introduite dans le chapitre 5, qui est définie par l'équation (5.17). En égalant les expressions (6.54) et (6.56), on obtient la relation :

$$\delta \phi_{\text{at}}^{\text{equ}}(t) A(t) = -2 \frac{\delta I(t)}{I_0} d(t) \quad (6.57)$$

Densité spectrale de puissance bilatérale du signal d'erreur

Les fluctuations résultantes du signal de sortie du détecteur synchrone sont dues maintenant aux fluctuations de phase réelles $\delta \phi(t, T)$ et équivalentes $\delta \phi_{\text{at}}^{\text{equ}}(t)$. Elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} \delta s(t) &= -\frac{1}{2} K I_0 \int_0^{+\infty} \rho(T) (\delta \phi_{\text{at}}^{\text{equ}}(t) + \delta \phi(t, T)) a(t, T) dT \\ &= -\frac{1}{2} K I_0 \left\{ \delta \phi_{\text{at}}^{\text{equ}}(t) A(t) + \int_0^{+\infty} \rho(T) \delta \phi(t, T) a(t, T) dT \right\} \end{aligned} \quad (6.58)$$

En introduisant la relation (6.57) et en posant à nouveau :

$$\eta(t, T) = \delta \phi(t, T) a(t, T) \quad (6.59)$$

il vient :

$$\delta s(t) = K \left\{ \delta I(t) d(t) - \frac{1}{2} I_0 \int_0^{+\infty} \rho(T) \eta(t, T) dT \right\} \quad (6.60)$$

Nous sommes alors en mesure de calculer la densité spectrale de $\delta s(t)$. Sa fonction d'autocorrélation s'écrit, d'après (6.36) et (6.38), en tenant compte du fait que $\delta \phi(t, T)$ et $\delta I(t)$ sont des variables indépendantes :

$$\begin{aligned} R_{\delta s}(\tau) &= K^2 R_{\delta I}(\tau) R_d(\tau) \\ &\quad + \frac{1}{4} K^2 I_0^2 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \rho(T) \rho(T') R_{\delta \phi}(\tau, T, T') R_a(\tau, T, T') dT dT' \end{aligned} \quad (6.61)$$

où $R_{\delta I}(\tau)$ et $R_d(\tau)$ sont les fonctions d'autocorrélation de $\delta I(t)$ et $d(t)$ respectivement. Pour calculer la densité spectrale de puissance bilatérale de $\delta s(t)$, nous prenons la transformée de Fourier de $R_{\delta s}(\tau)$ après avoir introduit les expressions (6.39) et (6.40) dans (6.61). On ne s'intéresse ici qu'à l'instabilité de fréquence due au bruit de détection du jet, c'est pourquoi nous négligeons l'instabilité de fréquence engendrée par l'effet Dick continu (cf. section 6.2). Dans ce cas, la densité spectrale de puissance bilatérale $S'_{\delta s}(f)$ du signal de sortie du détecteur synchrone, après le filtre passe-bas idéal, s'exprime par :

$$S'_{\delta s}(f) = K^2 S'_{\delta I}(f) * S'_d(f) + \frac{1}{4} K^2 I_0^2 q^2 S'_{\delta \omega_{LO}}(f) \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \rho(T) \rho(T') \\ \times c_0(T) c_0(T') H^*(f, T) H(f, T') dT dT' \quad f < f_F \quad (6.62)$$

où $S'_{\delta I}(f)$ et $S'_d(f)$ sont les densités spectrales de puissance bilatérales de $\delta I(t)$ et $d(t)$ respectivement. La densité spectrale $S'_d(f)$ se déduit facilement du développement en série de Fourier de la forme d'onde de démodulation (onde carrée) :

$$d(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_{2k+1} e^{i(2k+1)2\pi f_M t} + \text{c.c.} \quad (6.63)$$

Calculons maintenant la densité spectrale de puissance bilatérale $S'_{\delta e}(f)$ du signal d'erreur $\delta e(t)$. En introduisant l'expression de $S'_d(f)$ et la même fonction $F(f)$ que dans (6.18), elle est donnée par :

$$S'_{\delta e}(f) = \frac{4}{q^2 I_0^2} F^2(f) \sum_{k=0}^{+\infty} \left\{ |d_{2k+1}|^2 \left(S'_{\delta I}(f - (2k+1)f_M) \right. \right. \\ \left. \left. + S'_{\delta I}(f + (2k+1)f_M) \right) \right\} + F^2(f) \bar{T}^{*2} C_0^2 S'_{\delta \omega_{LO}}(f) \quad f < f_F \quad (6.64)$$

avec C_0 le coefficient défini par l'équation (5.21).

Densité spectrale de puissance bilatérale $S_y^{\text{LLO}}(f)$

Le dernier pas consiste à déterminer la densité spectrale de puissance $S_y^{\text{LLO}}(f)$ des fluctuations relatives de fréquence de l'oscillateur local en boucle fermée. Pour ce faire, nous procédons de la même manière que lors de l'établissement de $S_{y, \text{Dc}}^{\text{LLO}}(f)$ dans le cas de l'effet Dick continu. A partir de l'équation (6.19) de la boucle d'asservissement de fréquence de l'oscillateur local et du spectre du signal d'erreur déduit de (6.64), le spectre $\delta \Omega_{\text{LLO}}(f)$ des

fluctuations de fréquence de l'oscillateur local asservi s'écrit :

$$\delta\Omega_{\text{LLO}}(f) = \frac{2}{qI_0} \cdot \frac{G(f)}{1 + G(f)C_0\bar{T}^*} \sum_{k=0}^{+\infty} \left\{ d_{2k+1} \left(\delta I(f - (2k+1)f_M) \right. \right. \quad (6.65)$$

$$\left. \left. + \delta I(f + (2k+1)f_M) \right) \right\} + \frac{1}{1 + G(f)C_0\bar{T}^*} \delta\Omega_{\text{LO}}(f) \quad f < f_F$$

où $G(f)$ a la même signification que dans l'équation (6.20). Le bruit de détection du jet est un bruit de grenaille dont le spectre est blanc ($S_{\delta I}(f) = S_{\delta I} = \text{const.}$). En faisant les mêmes approximations que dans la dérivation de la relation (6.21), et dans la limite d'un gain de boucle élevé, la densité spectrale de puissance des fluctuations relatives de fréquence de l'oscillateur local asservi devient :

$$S_y^{\text{LLO}}(f) = \frac{4\xi^*}{\omega_0^2 I_0^2 C_0^2 \bar{T}^{*2}} S_{\delta I} \quad (6.66)$$

où ξ^* est un facteur numérique qui dépend des coefficients du développement en série de Fourier de la forme d'onde de démodulation $d(t)$. Pour une démodulation avec un carré, on a les valeurs suivantes pour ξ^* :

$$\xi_{1,\text{LB}}^* = \begin{cases} 2|d_1|^2 = 8/\pi^2 & 1^{\text{ère}} \text{ harmonique} \\ 2 \sum_{k=0}^{+\infty} |d_{2k+1}|^2 = 1 & \text{large bande} \end{cases} \quad (6.67)$$

En introduisant le facteur de qualité de la résonance atomique $Q_{\text{at}} = \omega_0 \bar{T}^* / \pi$, il vient :

$$S_y^{\text{LLO}}(f) = \frac{4\xi^*}{\pi^2 C_0^2 Q_{\text{at}}^2 I_0^2} S_{\delta I} \quad (6.68)$$

On peut relier maintenant la densité spectrale $S_{\delta I}$ au rapport signal-sur-bruit du signal du résonateur. La densité spectrale du signal du résonateur due au bruit de grenaille du jet est égale au double du flux moyen d'électron (cf. par ex. [VA89]), soit :

$$S_{\delta I} = 2e \overline{I(t)} = \eta^* e I_0 \quad (6.69)$$

où e est la charge de l'électron, et nous avons introduit le coefficient :

$$\eta^* = \int_0^{+\infty} \rho(T) \left\{ 1 + \overline{\cos(2\phi_m c(t, T))} \right\} dT \quad (6.70)$$

La barre au-dessus du cosinus signifie que l'on effectue la moyenne temporelle sur la demi-période de modulation :

$$\overline{y(t)} = \frac{2}{T_M} \int_0^{T_M/2} y(t) dt \quad (6.71)$$

Remarquons encore que :

$$\frac{2eI_0}{I_0^2} = (S/N)^{-2} \quad (6.72)$$

où S/N est le rapport signal-sur-bruit, dans une bande spectrale de 1 Hz, du signal du résonateur à résonance ($\Omega_0 = 0$) et sans modulation ($c(t, T) = 0$). Nous pouvons alors mettre la densité spectrale $S_y^{\text{LLO}}(f)$ sous la forme :

$$S_y^{\text{LLO}}(f) = \frac{2\xi^*\eta^*}{\pi^2 C_0^2 Q_{\text{at}}^2 (S/N)^2} \quad (6.73)$$

Variance de Allan de la stabilité de fréquence

Pour finir, déterminons la variance de Allan des fluctuations relatives de fréquence de l'oscillateur local asservi. Comme la densité spectrale $S_y^{\text{LLO}}(f)$ correspond à du bruit blanc de fréquence, la variance de Allan limite $\sigma_y^{\text{lim}}(\tau)$ se déduit immédiatement avec la relation (6.31) et vaut :

$$\sigma_y^{\text{lim}}(\tau) = \beta^* \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\tau^{-1/2}}{Q_{\text{at}} (S/N)} \quad (6.74)$$

où nous avons encore introduit le facteur numérique β^* défini par :

$$\beta^* = \frac{\sqrt{\xi^*\eta^*}}{|C_0|} \quad (6.75)$$

Ce dernier contient l'effet du schéma de modulation considéré ainsi que l'effet de la température longitudinale du jet et permet de mettre en évidence l'expression bien connue de la variance de Allan limite due au bruit de grenaille du jet atomique [AG98]. Elle est en effet *inversement proportionnelle* au facteur de qualité de la résonance atomique et à son rapport signal-sur-bruit en amplitude. Et elle décroît comme $\tau^{-1/2}$ avec le temps de mesure, ce qui est la signature du bruit de grenaille du jet atomique. Notons que l'expression (6.74) ainsi dérivée, avec le coefficient (6.75), correspond bien au résultat indiqué dans [ACV86, VA89] pour le cas d'une démodulation de la 1^{ère} harmonique. Dans le cas d'un jet monocinétique, le facteur β^* se réduit à :

$$\beta^* = \frac{\sqrt{\xi^*}}{|c_0(\bar{T})|} \left\{ 1 + \overline{\cos(2\phi_m c(t, \bar{T}))} \right\}^{1/2} \quad (6.76)$$

6.3.3 Effet de la fréquence de modulation et de la température du jet

Nous allons voir dans cette sous-section quel est l'effet de la fréquence de modulation et de la température longitudinale du jet sur la stabilité de

fréquence de l'étalon. Nous considérons à nouveau dans cette étude le cas des trois modulations, à savoir la modulation carrée de phase, sinusoïdale de fréquence et carrée de fréquence.

Modulation carrée de phase

Pour ce type de modulation, nous allons regarder plus en détail le comportement du facteur β^* en fonction de la fréquence de modulation f_M , de la phase de démodulation φ et de la température longitudinale du jet T_l .

Effet de la fréquence de modulation :

Dans le cas de la modulation carrée de phase, l'expression du coefficient β^* peut se calculer analytiquement en fonction de la fréquence de modulation pour un jet monocinétique. Le coefficient de Fourier $c_0(\overline{T})$ peut s'écrire, pour une démodulation avec la phase optimale φ_{opt} , sous la forme :

$$c_0(\overline{T}) = \sin(2\phi_m) \overline{c(t, \overline{T})} \quad (6.77)$$

où la moyenne temporelle est la même que celle définie par (6.71). La valeur moyenne du cosinus intervenant dans l'expression (6.76) de β^* peut s'écrire :

$$\overline{\cos(2\phi_m c(t, \overline{T}))} = 1 - (1 - \cos(2\phi_m)) \overline{|c(t, \overline{T})|} \quad (6.78)$$

Ainsi, pour une amplitude de modulation optimale ($\phi_m^{\text{opt}} = \pi/4$ rad), le facteur β^* est donné en fonction de la fréquence de modulation, pour une démodulation large bande, par l'expression suivante :

$$\beta_{\text{LB}}^*(\xi) = \frac{\sqrt{1 + |\xi - 1|}}{1 - |\xi - 1|} \quad 0 < \xi < 2 \quad (6.79)$$

où nous avons posé à nouveau $\xi = f_M/\Delta\nu_{1/2}$. Dans le cas d'une démodulation de la 1^{ère} harmonique seulement, le facteur β^* en fonction de la fréquence de modulation vaut :

$$\beta_1^*(\xi) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + |\xi - 1|}}{\sin(\xi\pi/2)} \quad 0 < \xi < 2 \quad (6.80)$$

La dépendance de ces deux facteurs en fonction de la fréquence de modulation est représentée dans les Figs. 6.25 et 6.26, dans l'intervalle $0 < f_M < 1.75 \Delta\nu_{1/2}$, par les courbes (a) en trait fin. Le coefficient β^* atteint un minimum dans les deux cas pour la fréquence de modulation optimale $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ et vaut $\beta_{\text{LB}}^*(1) = 1$ pour une démodulation large bande et

$\beta_1^*(1) = \pi/2\sqrt{2} \simeq 1.11$ pour une démodulation de la 1^{ère} harmonique uniquement. Dès que l'on s'éloigne de cette condition, β^* augmente assez rapidement. Autour de la fréquence de modulation optimale, β^* varie linéairement selon :

$$\beta_{1,\text{LB}}^*(\xi) - \beta_{1,\text{LB}}^*(1) \simeq \alpha_{1,\text{LB}}^\xi |\xi - 1| \quad \xi \approx 1 \quad (6.81)$$

avec :

$$\alpha_{1,\text{LB}}^\xi = \begin{cases} \pi/4\sqrt{2} = 0.56 & \text{1^{ère} harmonique} \\ 3/2 & \text{large bande} \end{cases} \quad (6.82)$$

On note que dans le cas d'une démodulation de la 1^{ère} harmonique, cette variation est plus lente que pour une démodulation large bande. Ceci correspond au comportement de l'inverse de la pente a' , calculée dans les Figs. 5.2 et 5.4, où la démodulation large bande est plus sélective avec la fréquence de modulation. Remarquons que ce comportement est très différent de celui des deux autres types de modulation. Nous avons aussi reporté dans les Figs. 6.25 et 6.26 (courbes (a) en trait épais) la dépendance de β_{LB}^* et β_1^* dans le cas d'un jet non-monocinétique avec une température longitudinale typique de $T_l = 75 \mu\text{K}$. La valeur de β^* est peu différente de celle pour un jet monocinétique dans les deux cas. On a $\beta_{\text{LB}}^*(1) = 1.05$ pour une démodulation large bande et $\beta_1^*(1) = 1.13$ pour une démodulation de la 1^{ère} harmonique.

Effet de la phase de démodulation :

Le facteur β^* peut s'écrire de manière plus générale, pour une amplitude de modulation optimale et une fréquence de modulation comprise dans l'intervalle $0 < f_M < 1.75 \Delta\nu_{1/2}$, sous la forme :

$$\beta_{1,\text{LB}}^* = \frac{\sqrt{2\xi_{1,\text{LB}}^*(1 - |a'_{\text{LB}}|)}}{2|a'_{1,\text{LB}}|} \quad (6.83)$$

Avec les résultats de la sous-section 5.2.2 concernant la valeur de la pente a' en fonction de la phase de démodulation φ à la fréquence $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ (cf. Figs. 5.3 et 5.5), nous pouvons calculer la variation de β^* en fonction de φ à cette fréquence de modulation. Les résultats sont représentés dans la Fig. 6.27 autour de la phase optimale pour une démodulation large bande (courbes (a)) et de la 1^{ère} harmonique (courbes (b)). Nous avons représenté le cas d'un jet monocinétique (courbes en trait fin) et celui d'un jet avec une température longitudinale de $T_l = 75 \mu\text{K}$ (courbes en trait épais).

Nous remarquons ici aussi que la démodulation large bande est plus sensible à la phase que celle de la 1^{ère} harmonique. On voit clairement, encore

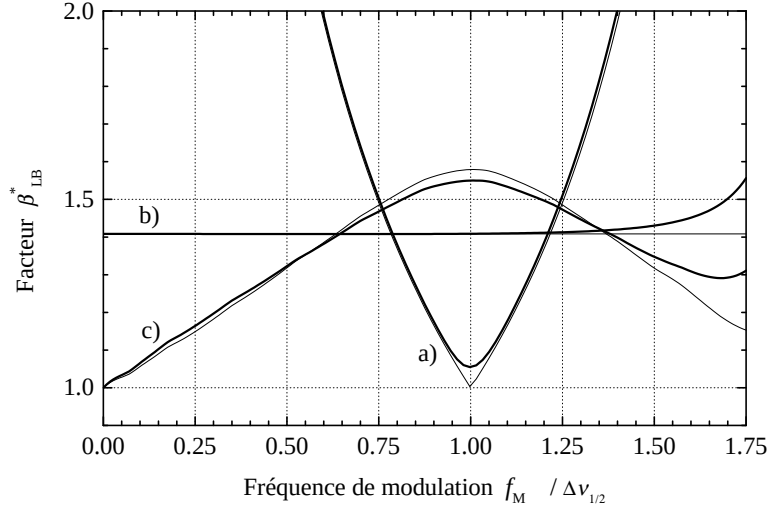


Fig. 6.25: Facteur β_{LB}^* en fonction de la fréquence de modulation pour les trois types de modulation : a) carré de phase ; b) sinusoïdal de fréquence ; c) carré de fréquence. Nous avons représenté le cas d'un jet monocinétique (courbes en trait fin) et celui d'un jet avec une température longitudinale typique de $T_l = 75 \mu\text{K}$ (courbes en trait épais).

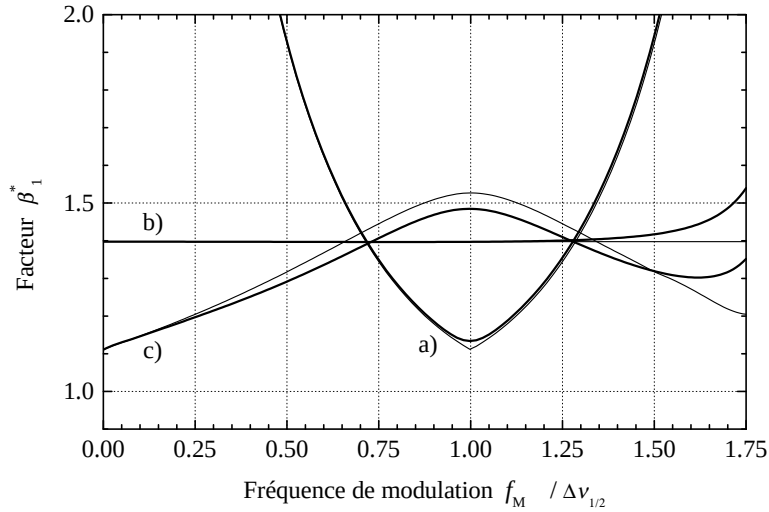


Fig. 6.26: Facteur β_1^* en fonction de la fréquence de modulation pour les trois types de modulation : a) carré de phase ; b) sinusoïdal de fréquence ; c) carré de fréquence. Nous avons représenté le cas d'un jet monocinétique (courbes en trait fin) et celui d'un jet avec une température longitudinale typique de $T_l = 75 \mu\text{K}$ (courbes en trait épais).

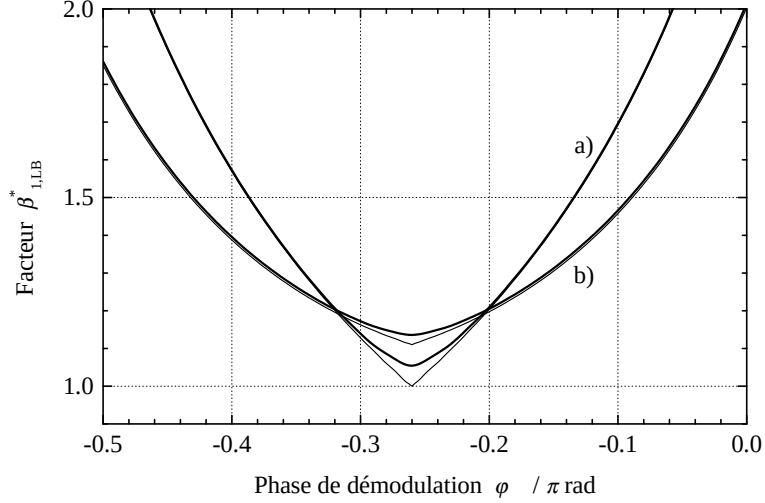


Fig. 6.27: Facteur $\beta_{1, LB}^*$ en fonction de la phase de démodulation φ pour la modulation carrée de phase avec démodulation large bande (courbes (a)) et de la 1^{ère} harmonique (courbes (b)). Nous avons représenté le cas d'un jet monocinétique (courbes en trait fin) et celui d'un jet avec une température longitudinale typique de $T_l = 75 \mu\text{K}$ (courbes en trait épais).

une fois, qu'il faut bien tenir compte du retard introduit par la détection car, sinon, β_{LB}^* est augmenté d'un facteur ~ 2.6 . Pour un jet monocinétique, le coefficient β^* augmente linéairement autour de la phase de démodulation optimale φ_{opt} selon :

$$\beta_{1, LB}^*(\varphi) - \beta_{1, LB}^*(\varphi_{\text{opt}}) \simeq \alpha_{1, LB}^\varphi |\varphi - \varphi_{\text{opt}}| \quad \varphi \approx \varphi_{\text{opt}} \quad (6.84)$$

avec :

$$\alpha_{1, LB}^\varphi = \begin{cases} 0.35 & 1^{\text{ère}} \text{ harmonique} \\ 1 & \text{large bande} \end{cases} \quad (6.85)$$

Effet de la température longitudinale :

Pour être complet, nous avons encore déterminé, avec la relation (6.83), la dépendance du facteur β^* avec la température longitudinale T_l . Elle est représentée, pour une température comprise entre $0 \leq T_l \leq 100 \mu\text{K}$, dans la Fig. 6.28 pour une démodulation large bande (β_{LB}^*) et de la 1^{ère} harmonique (β_1^*). L'augmentation relative de β^* avec la température est faible. Elle se monte, pour une température de $T_l = 100 \mu\text{K}$, à $\sim 3\%$ pour une démodulation de la 1^{ère} harmonique et à $\sim 6\%$ dans le cas large bande .

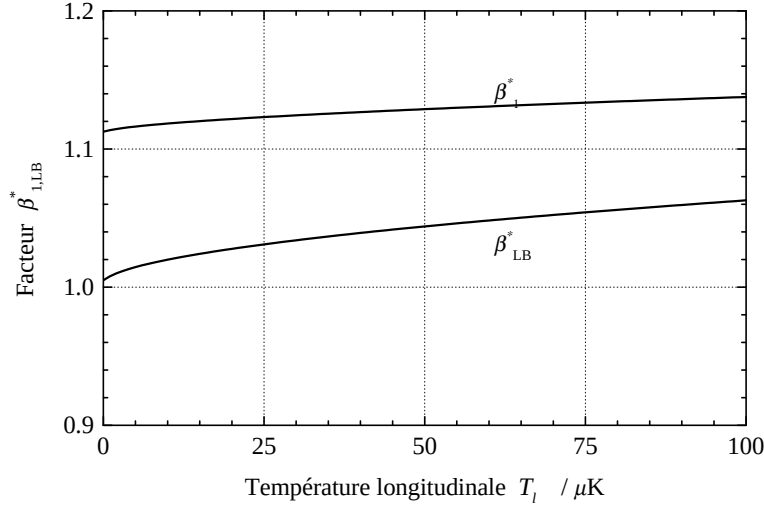


Fig. 6.28: Facteur $\beta_{1, \text{LB}}^*$ en fonction de la température longitudinale T_l pour la modulation carrée de phase avec démodulation large bande (β_{LB}^*) et de la 1^{ère} harmonique (β_1^*).

Modulation sinusoïdale de fréquence

Pour ce type de modulation, la valeur moyenne du cosinus se calcule facilement en utilisant la relation suivante :

$$\overline{\cos(z \cos \omega t)} = J_0(z) \quad (6.86)$$

où $J_0(z)$ est la fonction de Bessel de 1^{ère} espèce et d'ordre 0. Pour une modulation avec l'amplitude de modulation optimale $\omega_m^{\text{opt}}(f_M)$ (cf. Fig. 5.8), il vient alors pour un jet monocinétique :

$$\overline{\cos(2\phi_m c(t, \overline{T}))} = J_0(\alpha_{1, \text{LB}}) \quad (6.87)$$

La valeur du coefficient $\alpha_{1, \text{LB}}$ est indiquée dans (5.36) pour les deux types de démodulation. Le coefficient $|c_0(\overline{T})|$ se déduit, avec (5.20), de la pente $|a'^0|$ qui est donnée par (5.37). β^* est donc comme la pente $|a'^0|$ une constante indépendante de la fréquence de modulation. Il prend les valeurs suivantes :

$$\beta_{1, \text{LB}}^* = \begin{cases} \frac{\sqrt{2(1+J_0(\alpha_1))}}{\pi |a'_1|} = 1.40 & \text{1^{ère} harmonique} \\ \frac{\sqrt{1+J_0(\alpha_{\text{LB}})}}{2 |a'_{\text{LB}}|} = 1.41 & \text{large bande} \end{cases} \quad (6.88)$$

Le coefficient β^* est aussi reporté dans les Fig. 6.25 et 6.26 (courbes (b) en trait fin). On constate que la valeur de β^* est très proche pour les deux

types de démodulation et qu'elle est supérieure à celle correspondant à la modulation carrée de phase à la fréquence de modulation optimale.

Dans le cas d'un jet non-monocinétique, la valeur moyenne du cosinus se calcule avec l'expression suivante :

$$\langle \overline{\cos(2\phi_m c(t, T))} \rangle = \int_0^{+\infty} \rho(T) J_0 \left(\alpha_{1, \text{LB}} \frac{\sin(\pi f_M T^*(T))}{|\sin(\pi f_M \bar{T}^*)|} \right) dT \quad (6.89)$$

Le coefficient C_0 s'obtient dans ce cas à partir (5.39) et (5.40). La valeur de β^* , calculée avec (6.75), est représentée (courbes (b) en trait épais) dans les Fig. 6.25 et 6.26 en fonction de la fréquence de modulation f_M pour une température longitudinale du jet de $T_l = 75 \mu\text{K}$. Le comportement de β^* correspond également à l'inverse de celui de $|a'|$ (cf. Fig. 5.10). L'effet de la température est pratiquement insignifiant jusqu'à une fréquence de modulation de l'ordre de $f_M \simeq 1.5 \Delta\nu_{1/2}$. Au-delà de cette valeur, β^* commence à augmenter.

Modulation carrée de fréquence

Voyons pour finir le cas de la modulation carrée de fréquence. La valeur moyenne du cosinus apparaissant dans (6.76) se calcule dans ce cas numériquement. En utilisant les résultats de la sous-section 5.2.4 concernant le calcul de la pente $|a^0|$, nous avons reporté sur les Fig. 6.25 et 6.26 la valeur du coefficient β^* en fonction de la fréquence de modulation pour un jet monocinétique (courbes (c) en trait fin). L'allure des courbes correspond, ici aussi, au comportement de l'inverse de la pente $|a^0|$ (cf. Fig. 5.13). La valeur minimale de β^* est obtenue à la limite quasi-statique ($f_M \rightarrow 0$), que ce soit pour une démodulation large bande ou de la 1^{ère} harmonique. On a dans ce cas les valeurs suivantes : $\beta_{\text{LB}}^* = 1$ et $\beta_1^* = \pi/2\sqrt{2} = 1.11$. Pour une fréquence de modulation $f_M > 0$, le coefficient β^* augmente et devient maximal à $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ pour les deux types de démodulation. Il atteint les valeurs de $\beta_{\text{LB}}^* = 1.58$ et $\beta_1^* = 1.53$. Ici aussi, en ce qui concerne le coefficient β^* et pour un jet monocinétique, on remarque qu'à la limite quasi-statique, la modulation carrée de fréquence atteint les mêmes performances que la modulation carrée de phase à la fréquence optimale.

Nous avons aussi calculé la valeur de β^* pour un jet non-monocinétique de température longitudinale $T_l = 75 \mu\text{K}$ en considérant que l'amplitude de modulation optimale $\omega_m^{\text{opt}}(f_M)$ est donnée par (5.44). Les résultats obtenus sont aussi reportés dans les Fig. 6.25 et 6.26 (courbes (c) en trait épais). On constate de manière générale que, par rapport au cas monocinétique, la valeur de β^* baisse autour de la fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ et

Grandeur	Notation	Valeur	
		Jet mono. $T_l = 0$	Jet non-mono. $T_l = 75 \mu\text{K}$
<i>Modulation carrée de phase :</i>			
Facteur β^* , démod. large bande	β_{LB}^*	1.0	1.05
Facteur β^* , démod. 1 ^{ère} harm.	β_1^*	1.11	1.13
<i>Modulation sinus. de fréq. :</i>			
Facteur β^* , démod. large bande	β_{LB}^*	1.41	1.41
Facteur β^* , démod. 1 ^{ère} harm.	β_1^*	1.40	1.40
<i>Modulation carrée de fréq. :</i>			
Facteur β^* , démod. large bande	β_{LB}^*	1.58	1.55
Facteur β^* , démod. 1 ^{ère} harm.	β_1^*	1.53	1.48

Tab. 6.4: Valeurs numériques du facteur β^* pour un jet monocinétique et pour le jet correspondant à la fontaine continue. Ces valeurs sont indiquées à la fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ pour chaque type de modulation considéré, ainsi que pour une démodulation large bande β_{LB}^* et de la 1^{ère} harmonique β_1^* .

augmente au-delà de $f_M \simeq 1.5 \Delta\nu_{1/2}$. A la limite quasi-statique, la valeur est par contre identique. On obtient, à la fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$, une valeur de $\beta_{\text{LB}}^* = 1.55$ pour une démodulation large bande et $\beta_1^* = 1.48$ pour le cas de la 1^{ère} harmonique.

Pour terminer cette sous-section, nous résumons les différentes valeurs du facteur β^* que nous avons déterminées. Dans le Tab. 6.4 nous indiquons les valeurs de β^* , à la fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$, pour les trois types de modulation considérés et pour une démodulation large bande ainsi que de la 1^{ère} harmonique. Pour les modulations sinusoïdale et carrée de fréquence, nous avons également reporté dans le Tab. 6.5 les valeurs de β^* à la limite quasi-statique ($f_M \rightarrow 0$) ainsi que pour une fréquence de modulation quasi-statique de $f_M = 0.1 \Delta\nu_{1/2}$. Ces valeurs sont données pour un jet monocinétique et dans le cas d'une démodulation large bande et de la 1^{ère} harmonique.

<i>Grandeur</i>	<i>Valeur</i>	
	<i>1^{ère} harm.</i>	<i>Large bande</i>
	β_1^*	β_{LB}^*
<i>Modulation sinus. de fréquence :</i>		
Facteur β^* , $f_M \rightarrow 0$	1.40	1.41
Facteur β^* , $f_M = 0.1 \Delta\nu_{1/2}$	1.40	1.41
<i>Modulation carrée de fréquence :</i>		
Facteur β^* , $f_M \rightarrow 0$	1.11	1.00
Facteur β^* , $f_M = 0.1 \Delta\nu_{1/2}$	1.12	1.06

Tab. 6.5: Valeurs numériques du facteur β^* pour une modulation quasi-statique sinusoïdale et carrée de fréquence. Ces valeurs sont indiquées à la limite quasi-statique ($f_M \rightarrow 0$) pour un jet monocinétique ainsi que pour une démodulation large bande β_{LB}^* et de la 1^{ère} harmonique β_1^* . Nous donnons également les valeurs pour une fréquence de modulation quasi-statique de $f_M = 0.1 \Delta\nu_{1/2}$.

6.3.4 Estimation et mesure de la stabilité de fréquence de l'étalon

Estimation de la stabilité de fréquence théorique de l'étalon

Afin d'estimer théoriquement la stabilité de fréquence de la fontaine continue avec la relation (6.74), nous avons mesuré le bruit de détection à résonance pour être en mesure de déterminer le rapport S/N . La Fig. 6.29 montre une mesure du bruit de courant du photodétecteur pour une fréquence de Fourier f comprise entre 0 et 12 Hz ainsi que les différentes sources de bruit qui y contribuent. La courbe en traitillé représente le bruit du photodétecteur dans le noir ($5 \text{ fA}/\sqrt{\text{Hz}}$), celle en trait continu fin le bruit avec le laser sonde allumé ($6 \text{ fA}/\sqrt{\text{Hz}}$) et celle en trait continu épais le bruit total avec le jet atomique ($30 \text{ fA}/\sqrt{\text{Hz}}$). La valeur moyenne mesurée pour le bruit du photodétecteur est très basse et le bruit ajouté par le laser sonde est très faible ($\sim 1 \text{ fA}/\sqrt{\text{Hz}}$). Remarquons que le spectre de bruit de courant du photodétecteur est plat (bruit blanc) entre 0.5 Hz et 20 Hz et qu'il ne contient pas de composante de bruit en $1/f$ dans cet intervalle et en particulier à la fréquence de modulation de 1 Hz. Il en va de même des deux autres sources de bruit, en particulier du bruit du jet atomique qui ne contient pas de composante de bruit d'origine technique en $1/f$ (fluctuations des lasers par ex.) à la fréquence de modulation. Ainsi, le bruit de grenaille du jet atomique est clairement accessible avec cette détection puisqu'il domine nettement les

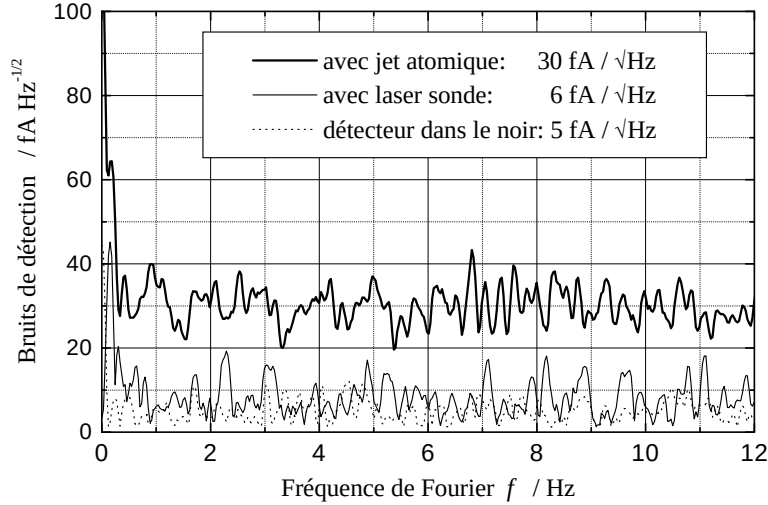


Fig. 6.29: Mesure du bruit de courant du photodétecteur en fonction de la fréquence de Fourier f . La courbe en traitillé représente le bruit du photodétecteur dans le noir, celle en trait continu fin le bruit avec le laser sonde allumé et celle en trait continu épais le bruit total avec le jet atomique. Les valeurs indiquées sont des valeurs moyennes.

autres types de bruit. La stabilité de fréquence de la fontaine continue est donc uniquement limitée par le bruit de grenaille du jet atomique, même si le flux de ce dernier n'a pas encore atteint la valeur désirée.

Le courant du photodétecteur est converti en tension avec un rapport de conversion de 10^{11} V/A (résistance de $1\text{ G}\Omega$ suivie d'un gain de 100). Cette tension est la grandeur qui est démodulée afin d'obtenir la tension de correction appliquée à l'oscillateur à quartz. Le signal à résonance ($\Omega_0 = 0$) et sans modulation est mesuré à $S = 0.9\text{ V}$ ($I = 9\text{ fA}$) et le bruit de tension se déduit des valeurs de la Fig. 6.29, soit $N = 3\text{ mV}/\sqrt{\text{Hz}}$. On obtient avec ces valeurs un rapport $S/N \simeq 300\sqrt{\text{Hz}}$. On peut déduire de cette mesure du rapport signal-sur-bruit le flux d'atomes détectés, si on se trouve dans le régime où chaque photon émis par les atomes donne lieu à au moins un photo-électron dans le détecteur, ce qui est le cas. Ainsi le flux d'atomes détectés est donné par la relation :

$$\Phi_{\text{dl}}^{\text{mes}} = 2 \left(\frac{S}{N} \right)^2 \simeq 180\,000 \text{ at/s} \quad (6.90)$$

Le facteur de qualité Q_{at} de la résonance atomique intervenant dans (6.74) se déduit de la valeur de $\Delta\nu_{1/2}$ donnée dans le Tab. 4.3. On obtient une valeur de $Q_{\text{at}} = 9\,383\,108\,880$. Nous sommes alors en mesure de calculer la stabilité de fréquence théorique de la fontaine continue. Avec la relation (6.74), et en prenant la valeur du facteur β^* pour une modulation carrée de phase

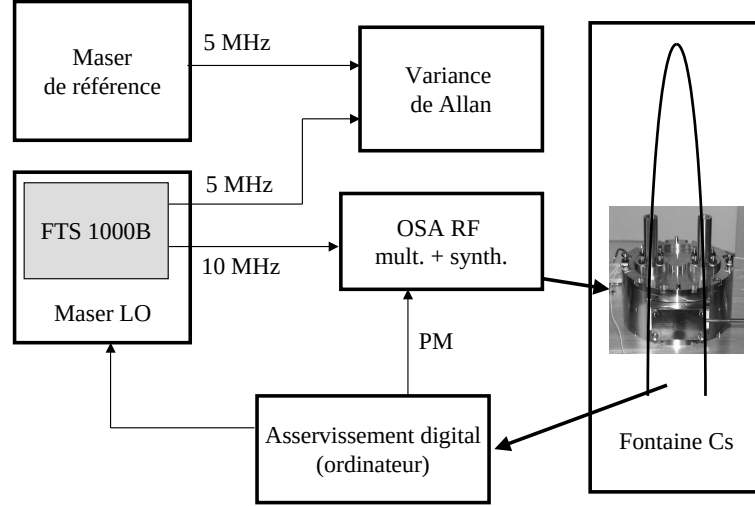


Fig. 6.30: Schéma de l'installation expérimentale pour la mesure de la stabilité de fréquence de la fontaine continue.

à la fréquence optimale et une démodulation large bande ($\beta_{LB}^* = 1.05$, cf. Tab. 6.4), on trouve :

$$\sigma_y(\tau) \simeq 1.2 \cdot 10^{-13} \tau^{-1/2} \quad (6.91)$$

Cette valeur est déjà relativement basse malgré le fait que nous n'ayons pas encore le flux atomique attendu. Elle est du même ordre de grandeur que les valeurs obtenues avec les fontaines pulsées existantes [WSB01, MJSP01]. Le but final est d'atteindre une stabilité de fréquence de $\sigma_y(\tau) \simeq 7 \cdot 10^{-14} \tau^{-1/2}$, ce qui veut dire qu'il faudrait multiplier le flux actuel estimé du jet à la détection par un facteur égal à ~ 3 . Ceci devrait être réalisable dans le futur au moyen de techniques plus performantes de refroidissement transverse du jet atomique, actuellement à l'étude à l'Observatoire de Neuchâtel [Dom02].

Mesure de la stabilité de fréquence de l'étalon

Nous avons mesuré expérimentalement la stabilité de fréquence de la fontaine continue. Le schéma de l'installation de mesure est représenté dans la Fig. 6.30. Nous utilisons un oscillateur à quartz *FTS 1000B* asservi à un maser comme oscillateur local. Sa sortie 10 MHz est utilisée pour alimenter la synthèse de fréquence (*OSA RF*) d'un étalon de fréquence commercial. Pour moduler le signal d'interrogation, nous utilisons la modulation carrée de phase (PM) à 1 Hz et nous faisons une démodulation carrée du signal de

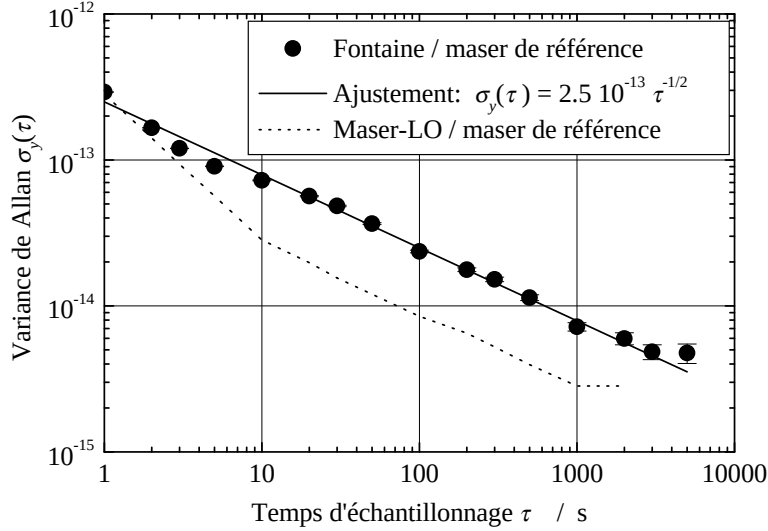


Fig. 6.31: Résultats de la mesure expérimentale de la variance de Allan $\sigma_y(\tau)$ de la stabilité de fréquence de la fontaine continue.

sortie du résonateur. Pour mesurer la stabilité de fréquence, nous comparons la sortie 5 MHz de l'oscillateur local asservi à la fontaine au signal d'un maser de référence dans un système de mesure qui donne directement la variance de Allan de la comparaison.

La Fig. 6.31 montre les résultats de la mesure. Les cercles pleins représentent les points de mesure expérimentaux de la stabilité de fréquence de la fontaine continue par rapport au maser de référence. La courbe en traitillé représente la stabilité de fréquence schématisée de l'oscillateur local utilisé (maser) par rapport au maser de référence. Notons que pour des temps d'échantillonnage $\tau \approx 1$ s, l'oscillateur local (*FTS 1000B*) n'est pas asservi au maser et il en va de même pour celui du maser de référence. On mesure dans ce cas la stabilité de fréquence résultante des deux oscillateurs libres. Pour des temps d'échantillonnage compris entre $1 \text{ s} < \tau \lesssim 10 \text{ s}$, l'oscillateur local (maser) n'est pas asservi à la fontaine. On mesure en fait, dans cet intervalle, la stabilité de fréquence du maser en tant qu'oscillateur local par rapport au maser de référence. Pour des temps d'échantillonnage $\tau \gtrsim 10 \text{ s}$, on voit clairement sur le graphique que l'oscillateur local est asservi sur la fontaine continue, puisqu'on dégrade sa stabilité qui autrement suivrait la courbe en traitillé. Remarquons aussi que le maser de référence n'affecte pas la valeur de la stabilité de fréquence mesurée. En effet, pour $10 \text{ s} \lesssim \tau \lesssim 3000 \text{ s}$, sa stabilité de fréquence intrinsèque est nettement inférieure à celle de la fontaine continue. Ainsi, la variance de Allan dans cet intervalle correspond bien à la

stabilité de fréquence atteinte avec la fontaine continue. Nous avons effectué un ajustement des points de mesure dans cet intervalle avec une droite de pente $-1/2$. Cet ajustement fournit une valeur de la variance de Allan de $\sigma_y(\tau) \simeq 2.5 \cdot 10^{-13} \tau^{-1/2}$. Cette valeur est en bon accord avec la stabilité théorique déterminée précédemment ($\sigma_y(\tau) \simeq 1.2 \cdot 10^{-13} \tau^{-1/2}$) à partir de la mesure du rapport signal-sur-bruit. Toutefois, la valeur de la variance de Allan mesurée est supérieure d'un facteur ~ 2 à la valeur calculée. Ce résultat n'est pas très bien compris pour l'instant et, malgré les incertitudes de mesure, ceci semble indiquer qu'il y aurait du bruit supplémentaire qui est introduit dans le signal de correction, qui ne provient pas du bruit de grenaille du jet atomique. Pour des temps d'échantillonnage $\tau \gtrsim 3000$ s, la stabilité de fréquence de la fontaine semble ne plus diminuer. Elle est limitée probablement par la stabilité de fréquence du maser de référence qui atteint sa valeur plancher, comme on peut le voir sur la courbe en traitillé, ou par la stabilité du déplacement radiatif qui est de $\Delta\nu_{LS}/\nu_0 \simeq 1.4 \cdot 10^{-12}$ (cf. sous-section 7.3.2). On peut en déduire, dans ce dernier cas, que le déplacement radiatif est stable à mieux que 1 % (stabilité des lasers de refroidissement par ex.).

6.3.5 Simulation de la stabilité de fréquence visée de l'étalon

Il est prévu de construire une deuxième version de la fontaine continue avec de substantielles améliorations afin d'atteindre les objectifs visés qui sont une stabilité de fréquence à court terme de $\sigma_y(\tau) \simeq 7 \cdot 10^{-14} \tau^{-1/2}$ et une exactitude relative $\delta\nu/\nu_0 \lesssim 1 \cdot 10^{-15}$. Pour avoir une idée de l'évolution de la variance de Allan de la stabilité de fréquence de la future fontaine avec le temps d'échantillonnage τ , nous avons effectué une simulation de cette évolution. Pour cela, nous avons considéré l'asservissement de fréquence le plus simple qui est décrit par une fonction de transfert du 1^{er} ordre. La densité spectrale des fluctuations relatives de fréquence de l'oscillateur local asservi s'écrit dans ce cas [VA89] :

$$S_y^{\text{LLO}}(f) = \frac{(2\pi f\mathcal{T})^2}{1 + (2\pi f\mathcal{T})^2} S_y^{\text{LO}}(f) + \frac{1}{1 + (2\pi f\mathcal{T})^2} S_y^{\text{ref}}(f) \quad (6.92)$$

où $\mathcal{T}$ est la constante de temps de la boucle d'asservissement. $S_y^{\text{LO}}(f)$ est la densité spectrale de puissance des fluctuations relatives de fréquence de l'oscillateur local libre modélisée par la relation (6.29), avec les valeurs du Tab. 6.1 pour un oscillateur à quartz du type *BVA OCXO 8607 5MHz* d'*Oscilloquartz*. $S_y^{\text{ref}}(f)$ est la densité spectrale de puissance des fluctuations

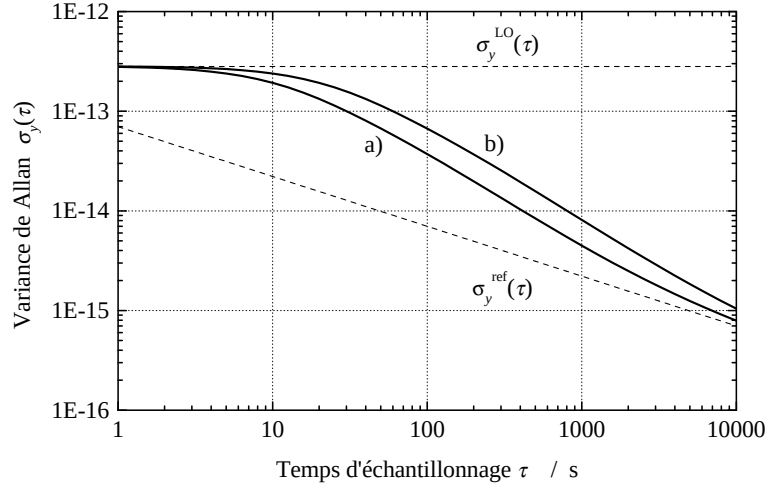


Fig. 6.32: Simulation de la variance de Allan $\sigma_y(\tau)$ de la stabilité de fréquence de la fontaine continue visée dans le futur en fonction du temps d'échantillonnage τ . Nous avons calculé $\sigma_y(\tau)$ pour deux valeurs de la constante de temps de l'asservissement : a) $T = 5$ s et b) $T = 10$ s. La droite horizontale en traitillé représente la variance de Allan de l'oscillateur local libre et la droite inclinée celle de la référence.

relatives de fréquence de la référence dues au bruit de grenaille du jet atomique. Nous avons pris la valeur correspondant à la variance de Allan visée ($\sigma_y(\tau) \simeq 7 \cdot 10^{-14} \tau^{-1/2}$) qui est de $S_y^{\text{ref}}(f) = 9.8 \cdot 10^{-27} \text{ Hz}^{-1}$. Nous calculons ensuite la variance de Allan à l'aide de la relation (6.30) en prenant une fréquence de coupure typique du système de mesure de $f_{\text{coup}} = 1 \text{ kHz}$. Les résultats de la simulation sont présentés dans la Fig. 6.32. Nous avons calculé la variance de Allan $\sigma_y(\tau)$ pour une constante de temps de la boucle d'asservissement de $T = 5$ s (courbe a)) et $T = 10$ s (courbe b)). La droite horizontale en traitillé représente la variance de Allan de l'oscillateur local libre $\sigma_y^{\text{LO}}(\tau)$ et la droite inclinée celle de la référence $\sigma_y^{\text{ref}}(\tau)$. On constate que l'approche de la variance de Allan limite (celle de la référence) est plus lente que dans le cas d'un étalon à jet thermique⁴ avec le même oscillateur local et la même bande passante de l'asservissement. Vu la basse fréquence de modulation, due aux franges de Ramsey étroites dans une fontaine atomique, il est difficile d'ouvrir plus la bande passante de l'asservissement (diminuer T) pour mieux profiter de la stabilité de fréquence ultime limitée par le bruit du jet atomique.

⁴Dans ce cas, la variance de Allan limite à $\tau = 1$ s de la stabilité de fréquence limitée par le bruit de grenaille du jet est généralement plus élevée que celle de l'oscillateur local et son approche est de ce fait plus rapide avec l'augmentation de τ .

6.4 Conclusion

Nous avons consacré ce chapitre à quelques aspects concernant la stabilité de fréquence d'une fontaine continue à atomes froids. Dans la première partie, nous avons entrepris une étude partielle de l'effet Dick dans une fontaine continue. A cette fin, nous avons considéré un modèle simplifié d'asservissement continu de fréquence d'un étalon passif. Ce modèle nous a permis de dériver une formule analytique pour l'estimation de l'effet Dick continu dans la fontaine pour les trois types de modulation les plus couramment utilisés. Cette relation est assez similaire à la formule de Dick [Dic87] développée pour des étalons passifs basés sur un fonctionnement pulsé. Elle fait aussi intervenir les composantes spectrales du bruit de l'oscillateur local aux harmoniques paires de la fréquence de modulation. Elle tient compte en plus du schéma de modulation-démodulation qui est responsable de l'effet d'intermodulation [ACD91] dans le fonctionnement continu d'un étalon de fréquence.

Nous avons montré que cette formule se ramène à la formule de Dick si l'on simule un fonctionnement pulsé de l'étalon en introduisant une forme d'onde de démodulation qui est non-nulle uniquement à des instants discrets, régulièrement espacés, avec la période T_c correspondant à un cycle d'interrogation. Notre modèle englobe donc un fonctionnement pulsé comme cas limite.

Nous avons effectué des simulations numériques de l'effet Dick continu pour les trois types de modulation les plus courants, à savoir la modulation carrée de phase, la modulation sinusoïdale de fréquence et la modulation carrée de fréquence, démodulés avec une forme d'onde carrée. La densité spectrale de puissance de bruit de fréquence de l'oscillateur local a été approximée par un modèle polynomial. Nous avons utilisé les données techniques relatives au bruit d'un oscillateur à quartz du type *BVA OCXO 8607 5MHz d'Oscilloquartz*. Les effets de quelques paramètres influençant l'effet Dick continu ont été estimés.

La fréquence de modulation est un paramètre qui influence beaucoup la dégradation de la stabilité de fréquence d'une fontaine continue. En ce qui concerne l'effet Dick continu, la fréquence de modulation qui permet de le minimiser est égale à la largeur à mi-hauteur de la résonance atomique ($f_M = \Delta\nu_{1/2}$), ceci quel que soit le type de modulation considéré. Pour cette fréquence de modulation, la modulation qui donne les meilleurs résultats est la modulation carrée de phase, comme nous pouvions nous y attendre. Il est possible d'utiliser la modulation carrée de fréquence en régime quasi-statique ($f_M \ll \Delta\nu_{1/2}$), mais ceci au prix d'une dégradation plus importante de la stabilité de fréquence de l'oscillateur local asservi. Par contre, la modulation sinusoïdale de fréquence en régime quasi-statique est à proscrire car elle gé-

nère une dégradation de la stabilité de fréquence de l'étalon qui n'est pas compatible avec les performances visées.

A la fréquence de modulation optimale qui minimise l'effet Dick continu, la température longitudinale du jet atomique a l'effet le plus important. Elle engendre une instabilité de fréquence résiduelle qui serait nulle autrement pour un jet monocinétique dans un cas idéal. Cependant, cette instabilité résiduelle de fréquence ne limite pas du tout les performances de l'étalon car elle est complètement négligeable, et ceci quel que soit le type de modulation. Pour la modulation carrée de fréquence quasi-statique notamment, l'effet de la température est d'augmenter très légèrement l'instabilité de fréquence par rapport à la valeur qui correspond à un jet monocinétique.

L'ajustement de la phase de la forme d'onde de démodulation autour de la phase optimale n'est pas critique du point de vue de l'effet Dick continu, quel que soit le type de modulation. C'est pour la modulation carrée de phase que l'ajustement de la phase est le plus sensible, il ne pose toutefois aucun problème.

La suppression des transitoires créés par la modulation carrée de phase, en introduisant des plages de temps morts dans la détection, augmente l'instabilité de fréquence résiduelle d'un facteur ~ 3 pour un jet de température longitudinale de $T_l = 75 \mu\text{K}$. Cette dégradation additionnelle de la stabilité de fréquence reste cependant toujours négligeable. La prise en compte de l'effet des zones d'interaction finies de la cavité de Ramsey ne devrait pas apporter de dégradation importante de la stabilité de fréquence. Cette dernière devrait ainsi probablement rester à niveau négligeable.

La seconde partie de ce chapitre a été consacrée à l'établissement de la relation qui lie le bruit de grenaille du jet atomique à la stabilité de fréquence ultime à court terme de l'étalon. Nous avons fait une étude de la variation du facteur numérique intervenant dans cette relation en fonction de divers paramètres (fréquence de modulation, température du jet, type de démodulation, etc.). Il en ressort que la modulation carrée de phase à une fréquence de modulation égale à la largeur à mi-hauteur de la résonance atomique ($f_M = \Delta\nu_{1/2}$) permet d'atteindre les performances les plus élevées. Elle est suivie de près par la modulation carrée de fréquence quasi-statique ($f_M \simeq 0.1 \Delta\nu_{1/2}$) qui peut être relativement difficile à mettre en oeuvre à des fréquences de modulations si basses. Il en résulte notamment que l'on récolte tout le bruit en $1/f$ aux harmoniques de la fréquence de modulation inférieures à $\sim 0.5 \text{ Hz}$. Par conséquent, si elle conduit théoriquement à des performances presque équivalentes dans un cas idéal (bruit blanc uniquement), en réalité elle va conduire à des performances concernant la stabilité de fréquence qui

seront moins bonnes que celles obtenues avec la modulation carrée de phase. Quant à la modulation sinusoïdale de fréquence quasi-statique, ses performances théoriques sont déjà nettement inférieures. Elle ne supporte donc pas la comparaison avec la modulation carrée de phase. Toutefois, elle pourrait s'avérer intéressante pour effectuer des mesures de stabilité de fréquence liées à l'effet Dick continu sur la fontaine. En effet, ses performances sont presque indépendantes de la fréquence de modulation jusqu'à une fréquence de $f_M \simeq 1.5 \Delta\nu_{1/2}$ (si on ajuste l'amplitude de modulation et la phase de démodulation avec la fréquence). On pourrait alors mettre en évidence l'effet de filtrage de la cavité de Ramsey en fonction de la fréquence de modulation sans perdre du signal, si toutefois cet effet est mesurable.

La stabilité de fréquence théorique de la fontaine continue, due au bruit de grenaille du jet atomique, a été estimée actuellement à $\sigma_y(\tau) \simeq 1.2 \cdot 10^{-13} \tau^{-1/2}$ d'après une mesure du rapport signal-sur-bruit. Cette valeur correspond à un flux d'atomes détectés évalué à $\Phi_{\text{dét}} \simeq 180\,000$ at/s. Elle est cependant encore supérieure au but visé, qui est d'atteindre une stabilité de fréquence de $\sigma_y(\tau) \simeq 7 \cdot 10^{-14} \tau^{-1/2}$ ce qui revient à augmenter le flux détecté d'un facteur ~ 3 .

Nous avons aussi mesuré expérimentalement la stabilité de fréquence de la fontaine en utilisant un maser comme oscillateur local. La stabilité de fréquence à court terme mesurée est de $\sigma_y(\tau) \simeq 2.5 \cdot 10^{-13} \tau^{-1/2}$. Elle est supérieure à la stabilité théorique estimée d'un facteur ~ 2 . Bien que ce résultat ne soit pas très bien compris, ceci semble indiquer qu'il y a du bruit, qui ne provient pas du jet atomique, qui est introduit dans la tension de correction de la fréquence de l'oscillateur local.

Nous avons encore simulé le comportement de la variance de Allan des fluctuations relatives de fréquence en fonction du temps d'échantillonnage pour le cas de la deuxième version améliorée de la fontaine continue qui devrait atteindre les performances initialement visées aussi bien en stabilité de fréquence qu'en exactitude. La simulation montre que la variance de Allan limite qui correspond au bruit de grenaille du jet atomique est approchée plus lentement que dans le cas d'un étalon à jet thermique utilisant le même oscillateur local et les mêmes paramètres de la boucle d'asservissement.

En conclusion finale à ce chapitre, il ressort que la modulation carrée de phase à la fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$ est la mieux adaptée pour obtenir une stabilité de fréquence élevée dans une fontaine continue. Ceci, tant du point de vue de l'effet Dick continu que de celui de la stabilité à court terme.

Chapitre 7

Aspects métrologiques

7.1 Introduction

La fontaine continue a été conçue pour devenir un étalon atomique primaire de fréquence. En d'autres termes, ce sera un étalon de référence qui aura une contribution dans le génération du temps atomique international (TAI). Pour ce type d'étalon de laboratoire, l'évaluation minutieuse des différentes causes d'erreurs possibles qui seraient susceptibles de créer un déplacement systématique de la fréquence de l'étalon¹ est une tâche importante pour la validation de l'étalon en tant qu'étalon primaire. Le résultat de ce travail se résume dans l'établissement du budget d'erreur détaillé de l'étalon, qui caractérise son exactitude. Le budget d'erreur fait la liste de toutes les contributions connues au déplacement de la fréquence de l'étalon et quantifie ces déplacements ainsi que leur incertitude. Une fois le budget d'erreur établi, on peut estimer l'incertitude relative totale de tous ces effets sur la fréquence de l'étalon. Cette valeur détermine l'exactitude finale de l'étalon qui est un des deux principaux paramètres qui caractérise ses performances avec la stabilité relative de fréquence (cf. sous-section 1.2.2).

Nous n'avons pas pour but, dans ce chapitre, d'établir le budget d'erreur complet de la fontaine continue. C'est un travail de longue haleine qui se poursuit durant le fonctionnement effectif de l'étalon. Nous nous bornons seulement à aborder quelques aspects métrologiques de la fontaine continue qui lui sont spécifiques. Pour commencer, nous estimons brièvement, dans la section 7.2, l'effet des collisions entre atomes froids dans le jet atomique qui sont responsables d'un déplacement de la fréquence de l'étalon (*colli-*

¹Nous entendons un déplacement de la fréquence de l'étalon par rapport à la fréquence $\nu_{00} = 9\,192\,631\,770\text{ Hz}$ de la transition d'horloge de l'atome de césium 133 au repos qui définit la seconde.

sional shift). Dans la section suivante (7.3), nous abordons le problème du déplacement de la fréquence de l'étalon dû à l'effet de la lumière de fluorescence de la source (*light-shift*). C'est un problème particulier qui est lié au fonctionnement continu de la fontaine. Nous décrivons notamment la trappe à lumière rotative que nous avons développée pour éliminer ce problème. Ensuite, nous discutons (section 7.4) l'effet de l'inhomogénéité spatiale du champ magnétique constant généré dans le résonateur (champ C) sur le déplacement Zeeman du 2^{ème} ordre (*2nd order Zeeman shift*). Ce déplacement est le plus important de tous, et l'estimation de son incertitude est discutée en détail. Pour terminer ce chapitre, nous abordons encore dans la section 7.5 un autre aspect métrologique qui est particulier à la fontaine continue. Il s'agit des déplacements de fréquence dus respectivement à un déphasage global du champ magnétique entre les deux zones d'interaction (*end-to-end phase shift*) et à un gradient de phase radial du champ (*distributed phase shift*). Nous faisons une évaluation de leurs grandeurs et nous discutons notamment des méthodes développées pour pouvoir les mesurer expérimentalement.

7.2 Déplacement collisionnel

7.2.1 Introduction

Nous avons vu dans les chapitres précédents l'avantage qu'apporte un jet d'atomes ralentis à une vitesse moyenne de quelques mètres par seconde en ce qui concerne les performances, stabilité et exactitude de fréquence, d'une fontaine atomique. Cependant, le ralentissement de la vitesse moyenne des atomes du jet s'accompagne d'une réduction de la largeur de la distribution de vitesse autour de la vitesse moyenne, ou autrement dit de la température longitudinale du jet. Ceci a pour conséquence que la vitesse relative moyenne entre deux atomes du jet dans un certain volume est également plus petite qu'elle ne l'est dans un jet thermique. Or, il a été montré [GLLC96] que pour de très petites vitesses relatives entre atomes, de l'ordre de quelques centimètres par seconde, la section efficace de collision des atomes de césium augmente considérablement. Ainsi, le taux de collision entre atomes froids de césium est beaucoup plus élevé que dans le cas d'atomes thermiques. Si des collisions se produisent entre atomes de césium dans le jet pendant la durée de l'interrogation micro-onde (entre les deux zones d'interaction), la fréquence de résonance de leur transition d'horloge va être perturbée, ce qui va résulter en un déplacement de la fréquence de l'étalon appelé déplacement collisionnel (*collisional frequency shift*). Dans les étalons de fréquence à jet thermique, ce déplacement de fréquence est négligeable. Par contre, dans les fontaines

à atomes froids pulsées, les températures cinétiques atteintes sont de l'ordre de quelques μK et les densités moyennes du nuage atomique nécessaires pour atteindre la stabilité de fréquence requise provoquent un déplacement de fréquence qui n'est plus négligeable. Il y a donc un compromis à faire entre la stabilité (densité atomique élevée) et l'exactitude (densité atomique faible). De plus, il est difficile d'estimer précisément l'incertitude sur ce déplacement de fréquence car les mesures de densité sont peu précises. Des méthodes sophistiquées (passage adiabatique par ex.) ont été développées pour mesurer précisément la densité du nuage atomique et ainsi pouvoir réduire l'incertitude sur ce déplacement à un niveau compatible avec les performances d'une fontaine atomique.

Dans le cas d'une fontaine continue, ce problème ne se pose pas avec la même acuité. En effet, d'une part la température résiduelle du jet continu ($T_l \simeq 75 \mu\text{K}$) est nettement plus élevée que dans une fontaine pulsée (quelques μK). D'autre part, et surtout, pour un même flux moyen détecté, la densité moyenne du jet pendant l'interrogation micro-onde est beaucoup plus faible dans une fontaine continue que dans une fontaine pulsée. Ceci résulte en un déplacement de fréquence qui est négligeable dans une fontaine continue comme nous allons le voir. C'est un des avantages importants lié au fonctionnement continu de la fontaine.

7.2.2 Estimation du déplacement collisionnel

Nous avons essayé de calculer dans la section 3.5 la densité moyenne du jet de la fontaine continue au-dessus de la cavité, c.-à-d. durant l'interaction micro-onde. Pour les paramètres typiques de la fontaine continue, nous avons obtenu une valeur de $\bar{n} \simeq 0.65 n_0$ où $n_0 \simeq 1.3 \cdot 10^4 \text{ at/cm}^3$ est la densité initiale estimée du jet à la sortie de la source. On arrive alors à une valeur de la densité moyenne du jet de $\bar{n} \simeq 0.85 \cdot 10^4 \text{ at/cm}^3$. Le déplacement de fréquence dû aux collisions entre atomes froids est proportionnel à la densité moyenne des atomes froids. Il a été mesuré pour des atomes froids de césium dans l'état fondamental [GLLC96] en fonction de la densité moyenne. Dans la fontaine continue actuelle, nous ne faisons pas de sélection d'état initiale. C'est-à-dire que tous les atomes de césium dans l'état $|F = 3\rangle$ participent à l'interrogation, mais seul les atomes dans l'état $|F = 4, m_F = 0\rangle$ sont détectés. Ainsi, tous les atomes, quel que soit leur sous-niveau Zeeman, participent également aux collisions pendant l'interrogation. Dans ce cas, le déplacement de fréquence moyen est donné par [GLLC96] :

$$\frac{\Delta\nu_C}{\nu_0} \simeq -0.8 \cdot 10^{-21} \bar{n} \quad (7.1)$$

On obtient, avec la valeur précédente de $\bar{n}$, un déplacement collisionnel de :

$$\frac{\Delta\nu_C}{\nu_0} \simeq -0.7 \cdot 10^{-17} \quad (7.2)$$

On constate qu'effectivement ce déplacement est complètement négligeable ainsi que son incertitude. Si le flux est augmenté en réduisant encore la température transverse du jet après la source ainsi que sa température longitudinale, nous avons estimé que l'augmentation de la densité moyenne ne devrait pas dépasser un ordre de grandeur. Ainsi, même dans ce cas, le déplacement collisionnel devrait rester toujours négligeable.

7.3 Déplacement radiatif

7.3.1 Introduction

Nous abordons dans cette sous-section le problème du déplacement de la fréquence de transition d'horloge de l'atome de césium sous l'action de la lumière de fluorescence émise par la source d'atomes froids (*déplacement radiatif* ou *light-shift*). Ce problème est spécifique au fonctionnement continu de la fontaine. En effet, dans une fontaine à atomes froids qui fonctionne en mode pulsé, ce problème n'existe pas car lors de la phase d'interrogation des atomes dans la cavité micro-onde, tous les lasers de refroidissement des atomes dans la source sont éteints. Les atomes ne sont donc soumis à aucune lumière perturbatrice. Par contre, il n'est pas possible d'éteindre les lasers de refroidissement dans une fontaine continue puisque le principe même de ce type de fontaine est d'utiliser un jet continu d'atomes froids qui nécessite un fonctionnement continu de la source [Ber00], et par conséquent des lasers de refroidissement. Comme le déplacement de fréquence engendré par la lumière émise par la source est inacceptable pour un étalon primaire de fréquence qui vise une exactitude relative de fréquence de l'ordre de 10^{-15} , il est impératif de le supprimer ou de le rendre négligeable à ce niveau d'exactitude.

Dans ce but, nous avons développé un piège à lumière rotatif (cf. chapitre 2) qui permet d'empêcher la lumière qui provient de la source de pénétrer dans la partie résonateur de la fontaine continue tout en laissant passer les atomes du jet. Notre but ici n'est pas de déterminer précisément quel est la valeur du déplacement radiatif, il devrait disparaître avec la mise en fonction du piège à lumière, mais plutôt de décrire le développement et la réalisation de ce piège.

Nous commençons dans la sous-section 7.3.2 par les mesures du déplacement radiatif effectuées sur la fontaine continue sans le piège à lumière. Nous

poursuivons dans la sous-section 7.3.3 en exposant le calcul de l'atténuation du jet provoquée par la trappe ainsi que le dimensionnement géométrique du piège à lumière. Ensuite, nous décrivons (sous-section 7.3.4) les tests optiques effectués sur les plaquettes de verre composant les pales ainsi que sur la trappe en rotation. Enfin, les tests de rotation et d'équilibrage sous vide du piège à lumière sont rapportés dans la sous-section 7.3.6.

7.3.2 Mesures du déplacement radiatif

La première source d'instabilité (et d'inexactitude) connue de la fontaine continue est constituée par le déplacement radiatif dû à la lumière de fluorescence de la source. Afin d'évaluer cet effet et de déterminer l'atténuation nécessaire de la lumière générée par la source, l'étalon a déjà fonctionné sans la trappe à lumière. Dans cette configuration, le déplacement de fréquence résultant est très important et se mesure aisément. Le schéma de mesure est le même que pour la mesure de la stabilité de fréquence (cf. Fig. 6.30).

Nous avons mesuré le déplacement radiatif de fréquence relatif $\Delta\nu_{LS}/\nu_0$ en fonction de la 2^{ème} harmonique du signal du résonateur. Pour cela, nous changeons la puissance du laser repompeur dans le faisceau x (cf. Fig. 2.6). Si on suppose que le laser repompeur n'a pas d'effet sur la température du jet atomique, le signal détecté est une mesure du flux d'atomes émis par la source et par conséquent de sa luminosité. Le résultat des mesures est reporté dans la Fig. 7.1. La valeur maximale de :

$$\frac{\Delta\nu_{LS}}{\nu_0} \simeq 1.4 \cdot 10^{-12} \quad (7.3)$$

obtenue avec le flux maximum, est en accord avec une estimation basée sur l'effet de la fluorescence des atomes froids dans la source. La valeur positive du déplacement de fréquence mesuré correspond également à ce qui était attendu si ce dernier est dû principalement à l'effet de la lumière diffusée par la source d'atomes froids. On voit sur la Fig. 7.1 que le déplacement de fréquence décroît proportionnellement avec la luminosité de la source. Cette dépendance du déplacement de fréquence suggère fortement que la lumière diffusée par la source est la contribution principale au déplacement de fréquence total mesuré. Par conséquent, une atténuation par un facteur $2 \cdot 10^3$ de la lumière diffusée est déjà suffisante pour réduire le déplacement radiatif à un niveau inférieur à 10^{-15} et sa contribution au budget d'incertitude inférieure à 10^{-16} . Nous verrons dans la sous-section 7.3.4 que le facteur d'atténuation du piège à lumière est nettement plus élevé que cette valeur minimum.

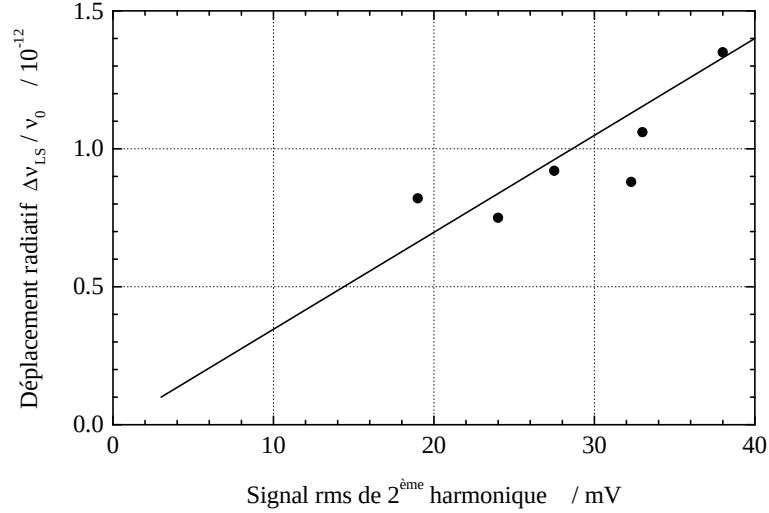


Fig. 7.1: Mesures du déplacement radiatif relatif $\Delta\nu_{LS}/\nu_0$ de la fréquence de la transition d'horloge en fonction de la luminosité de la source. Ces mesures ont été effectuées sur la fontaine continue avant implémentation du piège à lumière. La 2^{ème} harmonique du signal du résonateur est une mesure du peux de luminosité de la source d'atomes froids.

7.3.3 Effet du piège rotatif sur le jet atomique

Principe de fonctionnement du piège

L'idée du piège à lumière rotatif est de laisser passer les atomes du jet et d'empêcher la lumière en provenance de la source de pénétrer dans le résonateur. Pour réaliser cela, on peut profiter de la grande différence de vitesse qui existe entre le mouvement vertical des atomes du jet et le déplacement des photons de la lumière émise par la source. Expliquons le principe de fonctionnement du piège à lumière rotatif sur la Fig. 7.2. Déplaçons par exemple un miroir infiniment mince incliné à 45° , par rapport à la verticale, avec une vitesse horizontale identique à la composante de vitesse verticale des atomes du jet. Puisque le miroir se déplace verticalement avec la même vitesse que les atomes, il n'entrave pas leur mouvement alors que pour les photons, il semble fixe et ceux-ci sont défléchis hors du jet atomique vers un piège à lumière. Le moyen le plus simple de réaliser ce principe de fonctionnement en continu dans un espace restreint est d'utiliser une succession de petits miroirs à 45° répartis régulièrement sur une circonférence et de faire tourner le tout à une vitesse de rotation telle que la vitesse circonférentielle moyenne des miroirs corresponde avec la vitesse verticale des atomes. Il s'agit donc plutôt d'un sélecteur de vitesse combiné à un piège proprement dit comme le montre la Fig. 7.3. On obtient alors une petite turbine qu'il faut faire

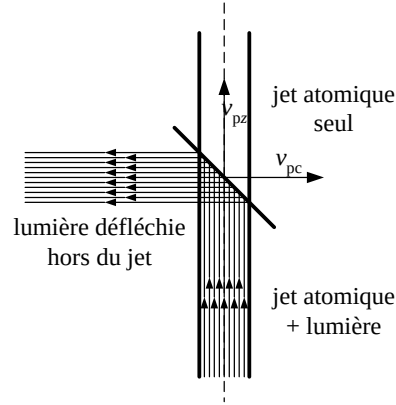


Fig. 7.2: Schéma du principe de la séparation de la lumière du jet atomique. Un miroir infiniment mince, incliné à 45° , est déplacé à droite avec une vitesse v_t égale à la vitesse verticale du mouvement des atomes dans le jet v_z . Dans ce cas le jet n'est pas perturbé et la lumière est défléchie hors du jet.

tourner de manière continue dans un vide poussé. C'est là que réside la plus grande difficulté de l'entreprise ainsi que nous le verrons dans la sous-section 7.3.6. Comme les petits miroirs ne peuvent pas être infiniment minces, leur épaisseur va découper une mince rondelle dans le jet et ainsi hacher périodiquement le jet, conduisant à une légère atténuation du flux atomique moyen après la trappe à lumière.

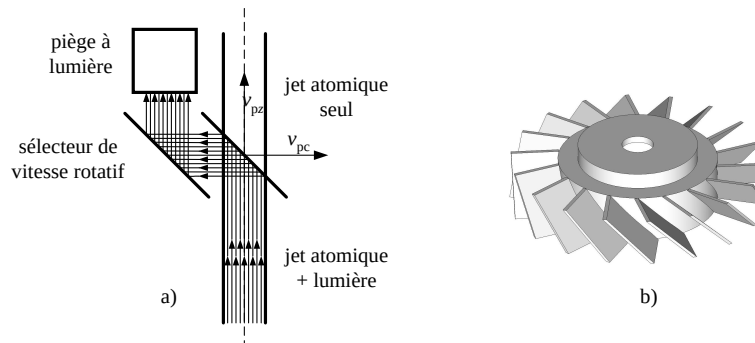


Fig. 7.3: Schéma de la trappe à lumière basée sur la sélection de vitesse. a) Principe de fonctionnement ; b) trappe à lumière rotative.

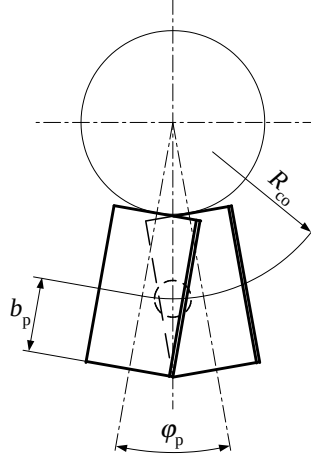


Fig. 7.4: Schéma du recouvrement de deux pales successives de la turbine vue de dessus. Le cercle en traitillé représente l'ouverture de passage du jet dans la trappe à lumière. φ_p est l'angle entre deux pales successives, R_{co} le rayon du centre de l'ouverture d'entrée de la trappe à lumière par rapport à l'axe de rotation de la turbine et b_p la distance entre l'extrémité de la pale et le centre de l'ouverture.

Atténuation d'un jet ponctuel et monocinétique : dimensionnement de la turbine

Nous essayons de fixer les dimensions de la trappe à lumière rotative de façon que son effet sur le jet atomique soit le plus faible possible étant donné l'espace à disposition pour son implémentation. Il s'agit en fait de déterminer le nombre de pales de la turbine et leurs dimensions.

Nous désirons que la superposition des pales adjacentes soit complète sur toute leur longueur comme le montre la Fig. 7.4. Le rayon R_{co} est le rayon du centre de l'ouverture d'entrée de la trappe à lumière par rapport à l'axe de rotation de la turbine et b_p est la distance entre l'extrémité de la pale et le centre de l'ouverture. La largeur l_p d'une pale doit vérifier la condition suivante pour qu'il y ait recouvrement total des pales :

$$l_p \geq 2\sqrt{2} (R_{co} + b_p) \tan(\varphi_p/2) - e_p \quad (7.4)$$

où φ_p est l'angle formé par deux pales successives et e_p est l'épaisseur des pales. Evaluons l'effet de la rotation de la turbine sur le flux du jet atomique. Pour ce faire, il faut tenir compte du fait que pour $R_{co} \gtrsim l_p$, la relation entre la vitesse circonférentielle v_c^p de la pale à un rayon R_{co} donné et sa vitesse verticale v_z^p n'est plus linéaire du fait que la "courbure" locale (le rapport v_c^p/v_z^p) de la pale varie avec son angle de rotation. On peut ainsi décrire

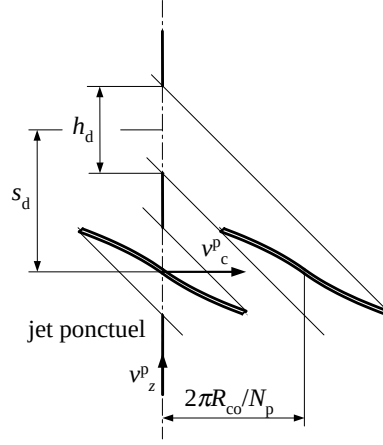


Fig. 7.5: Schéma de la découpe d'un jet ponctuel par des pales avec une certaine "courbure" due à la valeur finie du rayon R_{co} . h_d est la hauteur découpée dans le jet par chaque pale durant la rotation de la turbine et s_d est la séparation entre chaque découpe dans le jet. La courbure des pales a été fortement exagérée sur le schéma.

l'effet du passage d'une pale à travers un jet ponctuel et monocinétique en remplaçant une pale plate et inclinée à 45° (cf. Fig. 7.2) par une pale avec une certaine courbure comme l'indique le schéma de la Fig. 7.5. Le rapport v_c^p/v_z^p (la "courbure" de la pale) vaut 1 en son centre et augmente lorsque l'on s'en éloigne. Nous avons fortement exagéré la courbure de la pale pour rendre le schéma plus claire. Soit h_d la hauteur découpée dans le jet par le passage d'une pale et s_d la distance entre chaque découpe. Le rapport du flux moyen $\bar{\Phi}_+^0$ du jet après passage à travers la turbine sur le flux Φ_-^0 du jet atomique avant la turbine est alors donné par :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\Phi}_+^0}{\Phi_-^0} &= 1 - \frac{h_d}{s_d} \\ &= 1 - \frac{N_p}{2\pi R_{co}} x_p h_d \end{aligned} \quad (7.5)$$

où N_p est le nombre de pales composant la turbine et nous avons posé $x_p = v_c^p/v_z^p$ le rapport des vitesses. On distingue alors différents régimes de rotation de la turbine suivant la valeur du rapport x_p (cf. Fig. 7.6). Définissons les grandeurs sans dimensions suivantes :

$$y_p = \left(1 + \frac{b_p}{R_{co}}\right) \tan\left(\frac{\pi}{N_p}\right) \quad (7.6a)$$

$$z_p = \frac{e_p}{2\sqrt{2} R_{co}} \quad (7.6b)$$

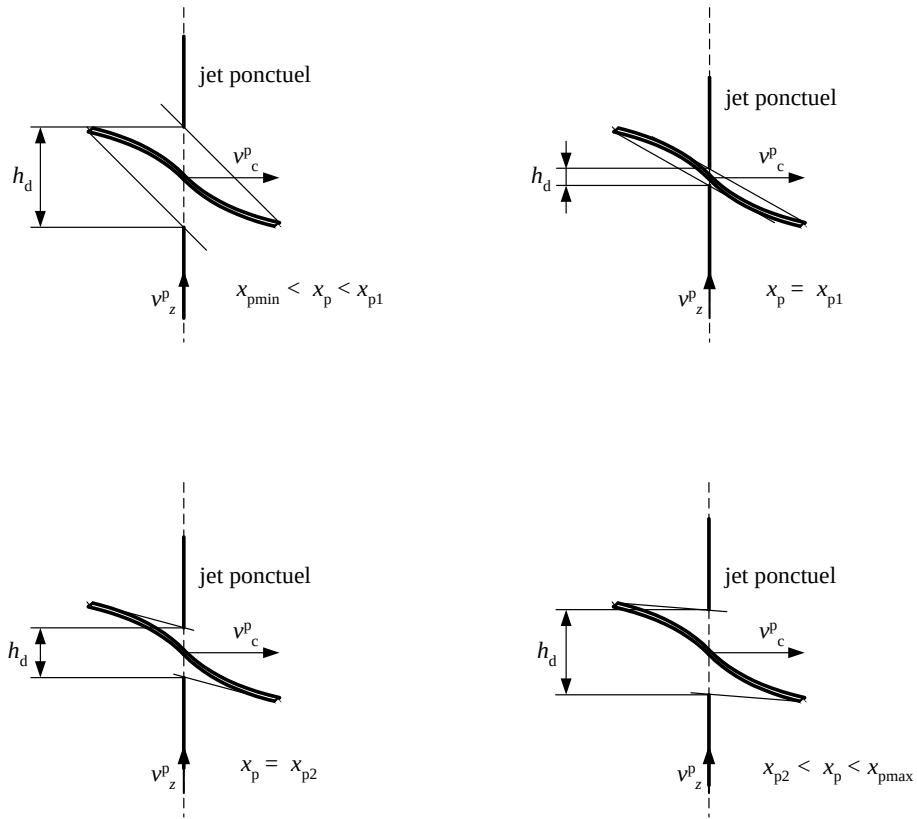


Fig. 7.6: Schéma de la découpe d'un jet ponctuel par les pales de la turbine suivant sa vitesse de rotation. On distingue quatre cas principaux suivant le rapport des vitesses $x_p = v_c^p / v_z^p$. La "courbure" des pales a été fortement exagérée sur le schéma.

Connaissant l'équation de la "courbure" de la pale, on peut déterminer la hauteur h_d pour chaque régime de rotation de la turbine. Ainsi, par ordre de vitesses de rotation croissantes de la turbine et pour une vitesse verticale moyenne du jet fixe de $\bar{v}_z^p$ au centre des pales, on a les intervalles suivants pour le rapport x_p des vitesses :

$$x_{p_{\min}} \leq x_p \leq x_{p_1} :$$

$x_{p_{\min}}$ correspond à la vitesse de rotation minimale et est donné par :

$$x_{p_{\min}} = \frac{\arcsin y_p + z_p - \frac{\pi}{N_p}}{y_p - z_p} \quad (7.7)$$

Pour une vitesse de rotation inférieure à cette valeur les atomes du jet ne peuvent plus traverser la turbine. La vitesse circonférentielle $v_{c_1}^p$, correspondant à x_{p_1} , est la vitesse de rotation optimale de la turbine pour laquelle la tranche de jet découpée par les pales est la plus étroite. La valeur de x_{p_1} est déterminée par la relation :

$$\frac{1}{x_{p_1}} = \frac{y_p + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{x_{p_1}}\right)^2}}{\arccos\left(\frac{1}{x_{p_1}}\right) + \arcsin y_p} \quad (7.8)$$

La hauteur h_d découpée dans le jet par les pales vaut dans cet intervalle :

$$h_d = 2R_{co} \left(\frac{\arcsin y_p + z_p}{x_p} - (y_p - z_p) \right) \quad (7.9)$$

$$x_{p_1} \leq x_p \leq x_{p_2} :$$

x_{p_2} correspond à la vitesse pour laquelle le rapport x_p des vitesses est égal à la "courbure" des pales à leurs extrémités pour un rayon R_{co} donné (cf. Fig. 7.6). Son expression est la suivante :

$$x_{p_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_p^2}} \quad (7.10)$$

et la hauteur h_d pour cet intervalle est donnée par :

$$h_d = 2R_{co} \left(\frac{\sqrt{x_p^2 - 1} - \arccos\left(\frac{1}{x_p}\right) - z_p}{x_p} + z_p \right) \quad (7.11)$$

$$x_{p_2} \leq x_p \leq x_{p_{\max}} :$$

La vitesse de rotation maximale correspondant à $x_{p_{\max}}$ est la vitesse de rotation de la turbine au-delà de laquelle les atomes du jet ne traversent plus la trappe à lumière. Elle vaut :

$$x_{p_{\max}} = \frac{\frac{\pi}{N_p} + \arcsin y_p - z_p}{y_p + z_p} \quad (7.12)$$

et la hauteur h_d s'obtient pour cet intervalle par l'expression :

$$h_d = 2R_{co} \left(y_p + z_p - \frac{\arcsin y_p - z_p}{x_p} \right) \quad (7.13)$$

Calculons maintenant le flux moyen $\bar{\Phi}_+^0$ après la turbine en fonction du nombre de pales N_p pour la vitesse de rotation optimale. Il est donné par (7.5) avec (7.8) et (7.9). Pour un rayon R_{co} compris entre $30 \text{ mm} \leq R_{co} \leq 40 \text{ mm}$, qui est l'ordre de grandeur du rayon possible de la turbine, et pour une distance $b_p = 7.5 \text{ mm}$ et une épaisseur des pales de $e_p = 1.0 \text{ mm}$, la valeur du rapport $\bar{\Phi}_+^0/\Phi_-^0$ est représentée dans la Fig. 7.7.

On constate que le flux maximum est obtenu avec $N_p = 7$ pales pour un rayon R_{co} compris entre $30 \text{ mm} \leq R_{co} \leq 40 \text{ mm}$. Ce nombre optimal de pales conduit à une largeur correspondante des pales l_p , donnée par l'égalité de la relation (7.4), qui est trop importante. Pour garder les pales dans des dimensions raisonnables, et pour des raisons de découpe des pales (nous verrons plus loin qu'elles sont en verre), nous avons choisi un nombre de pales égal à $N_p = 18$ donnant un angle de $\varphi_p = 20^\circ$ entre chaque pales. Le rayon R_{co} entre l'axe de rotation de la turbine et le centre de l'ouverture du piège à lumière a été fixé à $R_{co} = 34.1 \text{ mm}$. Pour qu'il y ait recouvrement des pales, leur largeur l_p doit alors être $> 19.7 \text{ mm}$. On a choisi $l_p = 23.0 \text{ mm}$ ce qui donne une hauteur verticale des pales de 17.0 mm . Pour ces valeurs de paramètres, l'atténuation du flux après la turbine se monte à $\bar{\Phi}_+^0/\Phi_-^0 = 0.88$ pour un jet ponctuel et monocinétique à la vitesse circonférentielle optimale $v_{c_{opt}}^p$ correspondant à $x_{p_1} = v_{c_{opt}}^p/\bar{v}_z^p = 1.007$.

Dans la fontaine continue, la hauteur du milieu des pales de la turbine, au-dessus du centre du refroidissement transverse, est de $H_p \simeq 52 \text{ mm}$. La composante selon z de la vitesse moyenne du jet à travers la turbine est alors donnée approximativement par :

$$\bar{v}_z^p \simeq \sqrt{\bar{v}_l^2 - 2gH_p} \quad (7.14)$$

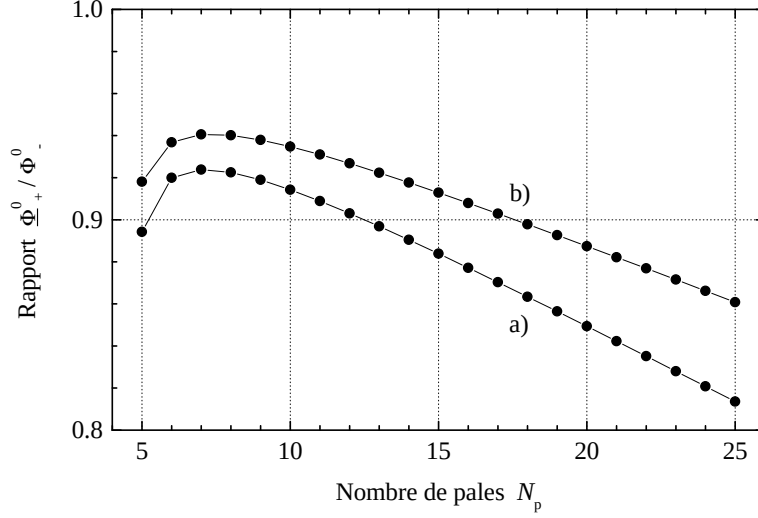


Fig. 7.7: Rapport $\bar{\Phi}_+^0 / \Phi_-^0$ du flux moyen après la turbine en fonction du nombre de pales N_p pour a) $R_{co} = 30$ mm et b) $R_{co} = 40$ mm. Il est calculé pour une vitesse de rotation optimale de la turbine et une distance $b_p = 7.5$ mm ainsi que pour une épaisseur de $e_p = 1.0$ mm. Nous avons relié les points entre eux pour plus de clarté.

où $\bar{v}_l$ est la vitesse longitudinale moyenne du jet au niveau du refroidissement transverse. La fréquence de rotation de la turbine f_{turb} est reliée à la vitesse circonférentielle v_c^p des pales au rayon R_{co} par la relation :

$$f_{\text{turb}} = \frac{v_c^p}{2\pi R_{co}} \quad (7.15)$$

Nous pouvons alors déterminer, à l'aide des équations (7.5) à (7.15), l'atténuation en flux $\bar{\Phi}_+^0 / \Phi_-^0$ du jet par la turbine en fonction de sa fréquence de rotation f_{turb} . Pour une vitesse de lancement moyenne du jet au centre de la source de $\bar{v}_L \simeq 3.87$ m/s (cf. Tab. 4.3), qui correspond à une vitesse de $\bar{v}_l \simeq 3.74$ m/s, nous obtenons la courbe présentée dans la Fig. 7.8 pour un jet ponctuel et monocinétique. La fréquence de rotation optimale de la trappe à lumière est de $f_{\text{turb}}^{\text{opt}} \simeq 16.9$ Hz. On voit que si l'on s'éloigne de cette fréquence, la décroissance du flux moyen du jet après la turbine est quasiment linéaire avec l'écart de fréquence. L'intervalle de fréquence de rotation dans lequel le jet peut traverser la turbine est de $4.3 \text{ Hz} < f_{\text{turb}} < 28.4 \text{ Hz}$.

Atténuation d'un jet ponctuel et non-monocinétique

Nous avons vu dans le chapitre 4 que le jet de la fontaine continue n'était pas monocinétique, mais possédait une température longitudinale de $T_l =$

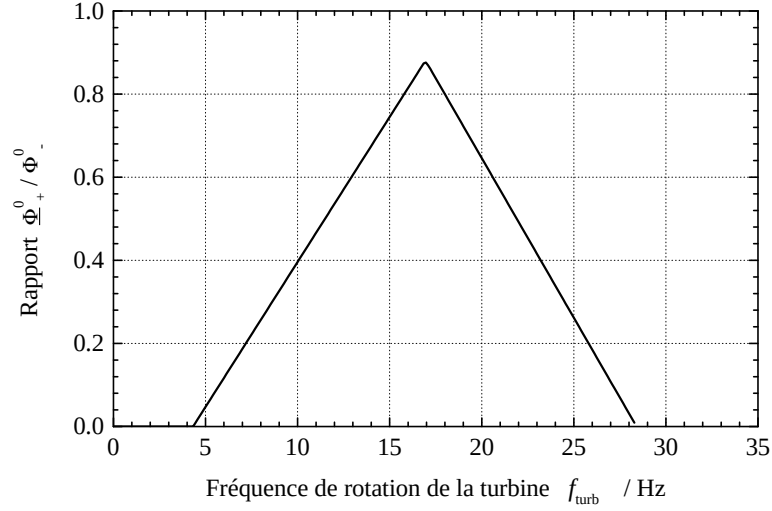


Fig. 7.8: Rapport $\bar{\Phi}_+^0 / \Phi_-^0$ du flux moyen après la turbine pour un jet ponctuel et monocinétique en fonction de la fréquence de rotation de la turbine f_{turb} . Ce rapport est calculé pour une vitesse de lancement moyenne du jet au centre de la source de $\bar{v}_L \simeq 3.87$ m/s.

75 μK . Estimons l’atténuation supplémentaire du flux moyen après la turbine que la température longitudinale du jet va engendrer. Pour cela, on peut déterminer une sorte de “fonction de transfert” de la trappe à lumière pour la vitesse selon z du jet dans le cas d’un jet ponctuel et monocinétique. Cette “fonction de transfert” qui caractérise la sélectivité en vitesse de la turbine, s’obtient en exprimant le rapport $\bar{\Phi}_+^0 / \Phi_-^0$ en fonction de la vitesse longitudinale du jet. A la fréquence de rotation optimale $f_{\text{turb}}^{\text{opt}}$ de la trappe à lumière pour la vitesse de lancement moyenne $\bar{v}_L = 3.87$ m/s du jet à la source, la courbe correspondante est illustrée dans la Fig. 7.9 par rapport à la vitesse de lancement moyenne. En observant la courbe, la trappe à lumière paraît assez sélective en vitesse, surtout pour les basses vitesses. Mais si la fréquence de rotation de la turbine est bien ajustée à la fréquence optimale, l’atténuation supplémentaire du flux dû à la température longitudinale du jet devrait être faible car la dispersion des vitesses des atomes autour de la vitesse moyenne est étroite (pour $T_l = 75 \mu\text{K}$, on a typiquement $v_{l,\text{rms}} = 6.5$ cm/s). L’intervalle de vitesse de lancement du jet dans lequel les atomes peuvent traverser la trappe à lumière vaut $2.6 \text{ m/s} < v_L < 14.2 \text{ m/s}$.

L’estimation de la diminution de flux due à la température longitudinale du jet se fait de la manière suivante. Posons

$$x_p(f_{\text{turb}}, v_l) = \frac{2\pi R_{\text{co}} f_{\text{turb}}}{\sqrt{v_l^2 - 2gH_p}} \quad (7.16)$$

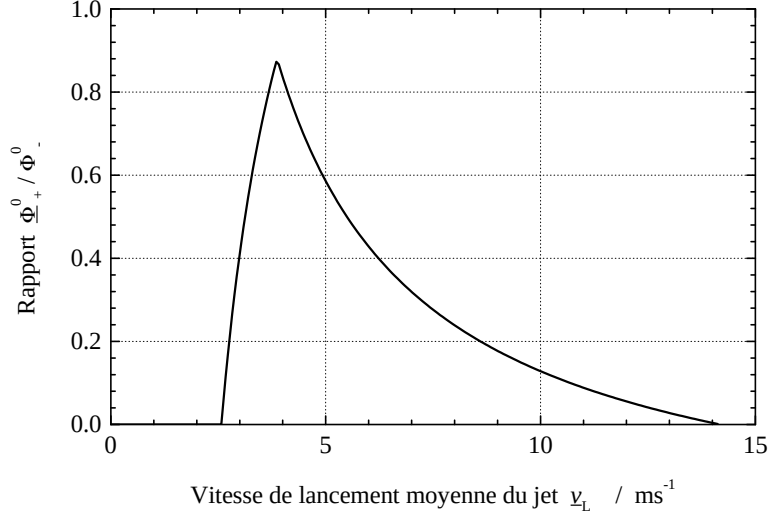


Fig. 7.9: Rapport $\bar{\Phi}_+^0 / \Phi_-^0$ du flux moyen après la turbine pour un jet ponctuel et monocinétique en fonction de la vitesse de lancement moyenne du jet au centre de la source $\bar{v}_L$. Ce rapport est calculé pour une fréquence de rotation optimale de la turbine $f_{\text{turb}}^{\text{opt}}$ correspondant à une vitesse de lancement moyenne de $\bar{v}_L \simeq 3.87$ m/s.

le rapport de la vitesse circonférentielle des pales au rayon R_{co} sur la vitesse selon z du jet au niveau de la turbine. Appelons encore $\bar{\Phi}_+^0(f_{\text{turb}}, v_l) / \Phi_+^0$ le rapport $\bar{\Phi}_+^0 / \Phi_-^0$ obtenu avec (7.5), et les trois équations (7.9), (7.11) et (7.13), dans lesquelles on a remplacé x_p par $x_p(f_{\text{turb}}, v_l)$. La courbe des Fig. 7.8 et 7.9 correspond respectivement à $\bar{\Phi}_+^0(f_{\text{turb}}, \bar{v}_l) / \Phi_+^0$ et $\bar{\Phi}_+^0(f_{\text{turb}}^{\text{opt}}, v_l(v_L)) / \Phi_+^0$ où la relation $v_l(v_L)$ se déduit de (3.10). Le rapport $\bar{\Phi}_+ / \Phi_-$ pour un jet non-monocinétique est alors obtenu en intégrant $\bar{\Phi}_+^0(f_{\text{turb}}, v_l) / \Phi_+^0$ sur la distribution effective de vitesse longitudinale du jet, de densité de probabilité $\rho_{\text{eff}}(v_l)$ donnée par (3.153). Le rapport est donc donné par :

$$\frac{\bar{\Phi}_+}{\Phi_-}(f_{\text{turb}}) = \int_0^{+\infty} \rho_{\text{eff}}(v_l) \frac{\bar{\Phi}_+^0}{\Phi_+^0}(f_{\text{turb}}, v_l) dv_l \quad (7.17)$$

En prenant garde de respecter les limites de validité des équations (7.9), (7.11) et (7.13), nous pouvons ainsi calculer le rapport $\bar{\Phi}_+ / \Phi_-$ en fonction de la fréquence de rotation de la turbine pour différentes températures du jet. Le résultat est reporté dans la Fig. 7.10 pour une température longitudinale de $T_l = 75 \mu\text{K}$.

Puisque la température est faible, on remarque une différence de la courbe par rapport au cas monocinétique uniquement pour la fréquence de rotation optimale et les fréquences minimale et maximale. L'augmentation de l'atté-

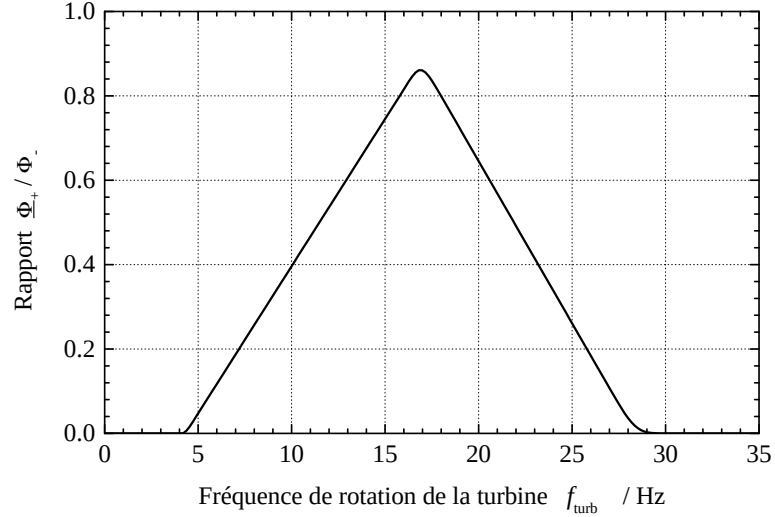


Fig. 7.10: Rapport $\bar{\Phi}_+/\Phi_-$ du flux moyen après la turbine en fonction de la fréquence de rotation de la turbine f_{turb} pour un jet ponctuel avec une température longitudinale de $T_l = 75 \mu\text{K}$. Ce rapport est calculé pour une vitesse de lancement moyenne du jet au centre de la source de $\bar{v}_L \simeq 3.87 \text{ m/s}$.

nuation du jet à la fréquence de rotation optimale est peu importante comme le montre la Fig. 7.11 pour des températures de $T_l = 75 \mu\text{K}$ et $T_l = 150 \mu\text{K}$. La courbe en traitillé représente le cas d'un jet ponctuel et monocinétique. La fréquence de rotation optimale de la turbine pour une vitesse de lancement moyenne du jet de $\bar{v}_L \simeq 3.87 \text{ m/s}$ est la même que pour un jet monocinétique, à savoir $f_{\text{turb}}^{\text{opt}} \simeq 16.9 \text{ Hz}$. L'atténuation du flux moyen du jet après la turbine se monte à $\bar{\Phi}_+/\Phi_- \simeq 0.862$ pour une température de $T_l = 75 \mu\text{K}$.

Nous n'avons pas déterminé l'effet de la dimension finie du jet sur l'atténuation du flux après la turbine. Il est clair que le diamètre du jet (égal au diamètre $d = 11 \text{ mm}$ de l'ouverture d'entrée dans la trappe à lumière) va engendrer une atténuation supplémentaire du flux. Toutefois, nous avons vu dans le chapitre 3, que la température transverse du jet après le refroidissement transverse et l'ouverture d'entrée dans la deuxième zone d'interaction de la cavité micro-onde opéraient une sélection du jet utile qui atteint effectivement la zone de détection. Cet effet a tendance à sélectionner le jet utile plutôt au centre du jet après le refroidissement transverse que dans les bords. Ainsi, le diamètre effectif du jet est beaucoup plus petit que le diamètre de 11 mm de l'ouverture de la trappe. Il en résulte que la diminution supplémentaire du flux moyen après le jet devrait être faible par rapport au cas d'un jet ponctuel et non-monocinétique que nous avons considéré.

Nous avons supposé dans cette estimation de l'atténuation du flux par

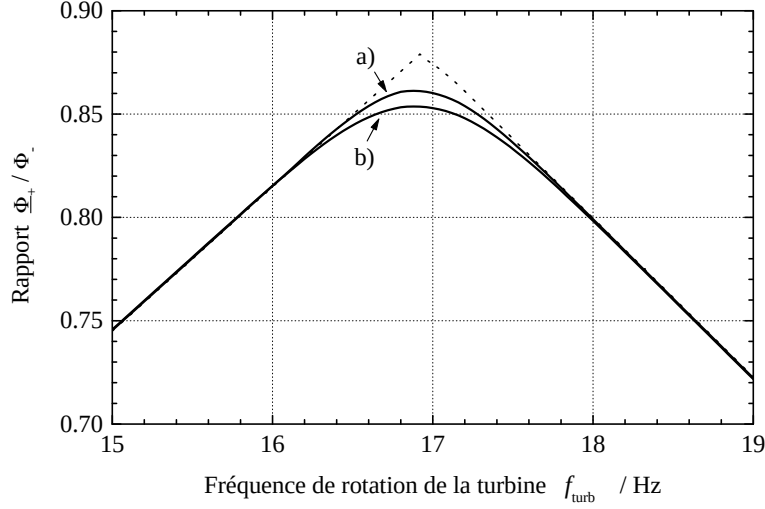


Fig. 7.11: Rapport $\bar{\Phi}_+/\bar{\Phi}_-$ du flux moyen après la turbine pour un jet ponctuel en fonction de la fréquence de rotation de la turbine f_{turb} autour de la fréquence optimale pour une vitesse de lancement moyenne du jet de $\bar{v}_L \simeq 3.87 \text{ m/s}$. Ce rapport est calculé pour une température longitudinale de a) $T_l = 75 \mu\text{K}$ et b) $T_l = 150 \mu\text{K}$. La courbe en traitillé représente le cas d'un jet ponctuel et monocinétique.

la turbine que le jet était vertical comme l'axe de rotation de la turbine. En fait, il est légèrement incliné, au niveau du refroidissement transverse, par rapport à la verticale pour faciliter son passage à travers la cavité micro-onde. Le faible angle d'inclinaison du jet ($\sim 1.8^\circ$ au niveau du refroidissement transverse) ne devrait cependant pas avoir d'effet très marqué sur le rapport $\bar{\Phi}_+/\bar{\Phi}_-$.

Dans cette évaluation, nous n'avons également pas tenu compte de l'effet de la température transverse du jet. Comme nous l'avons mentionné précédemment, l'effet principal de la température transverse est de réduire le diamètre du jet utile au niveau de la trappe à lumière. Ce qui est plutôt bien vis-à-vis du flux moyen après la trappe. Il ne semble pas, toutefois, qu'elle pourrait engendrer, par un autre mécanisme, une perte d'atomes importante du jet au passage de la turbine.

Modulation de densité du jet atomique après passage dans la trappe à lumière

Dans ce dernier paragraphe consacré à l'effet de la trappe à lumière sur le jet, nous allons montrer que la modulation de la densité du jet de la fontaine continue, engendrée par la trappe, s'atténue totalement avant d'atteindre la cavité. Ceci est dû au fait que la température longitudinale du jet continu est

relativement élevée. Pour le montrer, nous calculons l'évolution de la densité d'un jet ponctuel après traversée de la trappe à lumière.

Jet ponctuel et monocinétique :

Considérons d'abord le cas idéal d'un jet ponctuel monocinétique et sans température transverse. Comme nous l'avons vu précédemment, l'effet de la trappe est de hacher le jet. La dépendance temporelle de la densité du jet après la trappe peut ainsi être modélisée, dans le plan médian de la turbine, par une modulation périodique de la densité entre 0 et 100 % sous la forme :

$$n_+(H_p, t) = n_p \left\{ 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \text{rect}_{t_d}(t - kT_d - t_0) \right\} \quad (7.18)$$

où n_p est la densité du jet dans le plan médian de la turbine (milieu des pales) à la hauteur H_p et $\text{rect}_{t_d}(t)$ est une impulsion rectangulaire de durée t_d définie par :

$$\text{rect}_{t_d}(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq t_d/2 \\ 0 & |t| \geq t_d/2 \end{cases} \quad (7.19)$$

avec t_d l'intervalle de temps correspondant à la largeur de la tranche de jet découpée par une pale. Il est relié à la hauteur h_d découpée dans le jet par :

$$t_d = \frac{h_d}{s_d} T_d \quad (7.20)$$

où T_d est la période de modulation qui s'exprime en fonction de la séparation verticale s_d entre les tranches :

$$T_d = \frac{s_d}{\bar{v}_z^p} \quad (7.21)$$

$\bar{v}_z^p$ est la vitesse moyenne du jet selon z , dans le plan médian de la turbine, donnée par (7.14). Nous avons fixé l'origine du temps t_0 de manière qu'elle coïncide avec le centre d'une tranche de jet découpée par une pale. La conservation du flux du jet nous permet de déterminer l'évolution de la densité du jet entre la trappe à lumière et la cavité micro-onde. Comme la densité selon z est périodique en fonction du temps, nous nous bornons à la calculer aux temps $t_k = t_0 + kT_d$ pour lesquels le centre d'une tranche de jet découpée se situe dans le plan médian à la hauteur H_p . On obtient alors l'expression suivante :

$$n_+(z, t_k) = n_p \frac{\bar{v}_z^p}{\bar{v}_z(z)} \left\{ 1 - \sum_{k=0}^{k_{\max}} \text{rect}_{h_{dk}}(z - z_k) \right\} \quad H_p \leq z \leq z_{k_{\max}} \quad (7.22)$$

où $\text{rect}_{h_{d_k}}(z)$ est une impulsion rectangulaire de longueur h_{d_k} et la vitesse $\bar{v}_z(z)$ est donnée par :

$$\bar{v}_z(z) = \sqrt{\bar{v}_z^{\text{p}^2} - 2g(z - H_{\text{p}})} \quad (7.23)$$

z_k est l'altitude atteinte au temps t_k par une tranche découpée au temps t_0 :

$$z_k = H_{\text{p}} + ks_{\text{d}} - \frac{1}{2} gk^2 T_{\text{d}}^2 \quad (7.24)$$

et h_{d_k} est la hauteur d'une découpe à l'altitude z_k qui vaut :

$$h_{d_k} = h_{\text{d}} \frac{\bar{v}_z(z_k)}{\bar{v}_z^{\text{p}}} \quad (7.25)$$

k_{max} est un nombre entier tel que $z_{k_{\text{max}}} \leq H_0$.

Jet ponctuel et non-monocinétique :

Voyons maintenant le cas plus réaliste d'un jet ponctuel non-monocinétique et sans température transverse. Le calcul de l'évolution de la densité du jet à partir de la condition aux limites (7.18) est relativement compliqué. Comme on a que $t_{\text{d}} \ll T_{\text{d}}$, on peut négliger l'évolution du jet pendant ce laps de temps. Le problème se simplifie alors passablement. On peut, dans ce cas, considérer une distribution initiale de densité selon z donnée par la distribution monocinétique (7.22) et faire évoluer chaque impulsion de densité $\text{rect}_{h_{d_k}}(z - z_k)$ pendant le temps $t_k - t_0$ dans le champ de gravitation terrestre sous l'action de la distribution effective de vitesse longitudinale.

En partant de la relation (B.6) de l'annexe A, adaptée à une dimension, et en incluant l'effet de l'accélération terrestre, on peut écrire l'évolution d'une distribution de densité initiale $n(z, t_0)$ sous la forme :

$$n(z, t) = \iint_0^{+\infty} \rho_{\text{eff}}(v_l) n(z', t_0) \delta\left(z - z' + \frac{1}{2} g(t - t_0)^2 - v_z(v_l)(t - t_0)\right) dv_l dz' \quad (7.26)$$

avec $\rho_{\text{eff}}(v_l)$ la densité de probabilité de la distribution effective de vitesse longitudinale et $v_z(v_l)$ la composante z de la vitesse du jet au niveau du plan médian de la turbine :

$$v_z(v_l) = \sqrt{v_l^2 - 2g(H_{\text{p}} - h_t)} \quad (7.27)$$

Comme on a que $2g(H_{\text{p}} - h_t) \ll \bar{v}_l^2$, on admet pour simplifier que $v_z(v_l) \simeq v_l$. De plus, puisque la distribution de vitesse est étroite ($v_{l_{\text{rms}}} \ll \bar{v}_l$), on fait à nouveau la même approximation que pour le calcul du flux à la détection

dans le chapitre 3 (passage des formules (3.96) à (3.98)). En considérant une impulsion rectangulaire de densité n_p et de largeur h_d comme distribution initiale de densité, la relation (7.26) devient alors :

$$n(z, t) \simeq \frac{n_p}{t - t_0} \int_{-h_d/2}^{+h_d/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\text{eff}} \left(\frac{u}{t - t_0} \right) \times \delta \left(z - z' + \frac{1}{2} g(t - t_0)^2 - \bar{v}_{z_p}(t - t_0) - u \right) du dz' \quad (7.28)$$

En effectuant les intégrations avec la densité de probabilité $\rho_{\text{eff}}(v_l)$ donnée par (3.153), on obtient :

$$n(z, t) = n_p \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{z - z(t) - h_d/2}{\sqrt{2} v_{l_{\text{rms}}}(t - t_0)}, \frac{z - z(t) + h_d/2}{\sqrt{2} v_{l_{\text{rms}}}(t - t_0)} \right) \quad (7.29)$$

où $\operatorname{erf}(x_1, x_2)$ est la fonction d'erreur généralisée et $z(t)$ l'équation horaire de la composante verticale de la trajectoire des atomes :

$$z(t) = H_p + \bar{v}_{z_p}(t - t_0) - \frac{1}{2} g(t - t_0)^2 \quad (7.30)$$

$v_{l_{\text{rms}}}$ est la vitesse quadratique moyenne de la distribution de vitesse. Il est facile maintenant de calculer l'évolution de la densité le long du jet dans le cas d'une distribution initiale de densité donnée par (7.22). On obtient finalement l'expression suivante de la densité pour $H_p \leq z \leq z_{k_{\text{max}}}$:

$$n_+(z) = n_p \frac{\bar{v}_z^p}{v_z(z)} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k_{\text{max}}} \operatorname{erf} \left(\frac{z - z_k - h_{d_k}/2}{\sqrt{2} k v_{l_{\text{rms}}} T_d}, \frac{z - z_k + h_{d_k}/2}{\sqrt{2} k v_{l_{\text{rms}}} T_d} \right) \right\} \quad (7.31)$$

Nous avons calculé avec cette relation la densité le long du jet depuis la trappe à lumière jusqu'à la cavité. La Fig. 7.12 montre l'allure de la densité en fonction de l'altitude z pour un jet monocinétique et pour un jet avec une température longitudinale typique de $T_l = 75 \mu\text{K}$. Nous voyons que pour un jet de température longitudinale $T_l = 75 \mu\text{K}$, la modulation du jet s'atténue rapidement après la turbine et qu'il ne subsiste plus aucune modulation de la densité du jet au niveau de la cavité micro-onde. Afin de se rendre compte de l'effet de la température longitudinale sur la modulation de la densité du jet dans la cavité, nous avons reporté dans la Fig. 7.13 l'évolution de la densité dans la première zone d'interaction pour trois températures longitudinales du jet : $T_l = 0.1 \mu\text{K}$, $T_l = 5 \mu\text{K}$ et $T_l = 75 \mu\text{K}$. Définissons un indice de

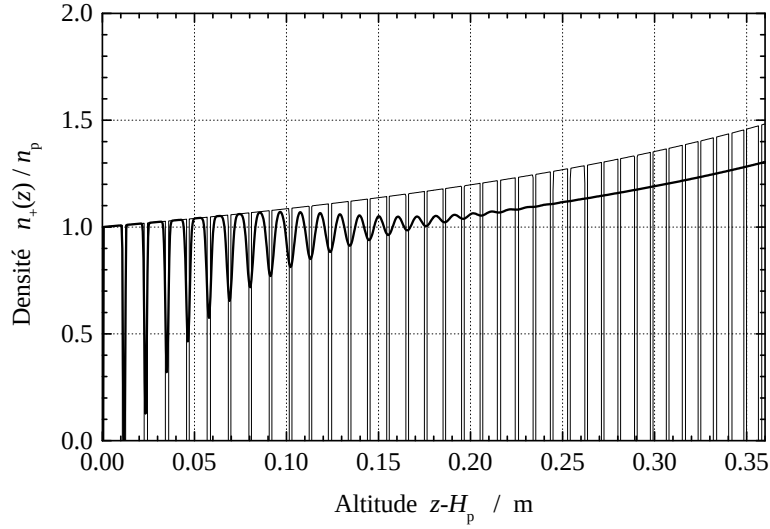


Fig. 7.12: Evolution de la densité $n_+(z)$ du jet avec l'altitude z après passage à travers la turbine pour un jet ponctuel et sans température transverse. La densité a été calculée pour deux jets de température longitudinale différente : $T_l = 0$ (trait fin) et $T_l = 75 \mu\text{K}$ (trait épais). Nous avons représenté la densité entre le plan médian de la turbine ($z = H_p$) et la cavité micro-onde ($0.333 \leq z - H_p \leq 0.359$).

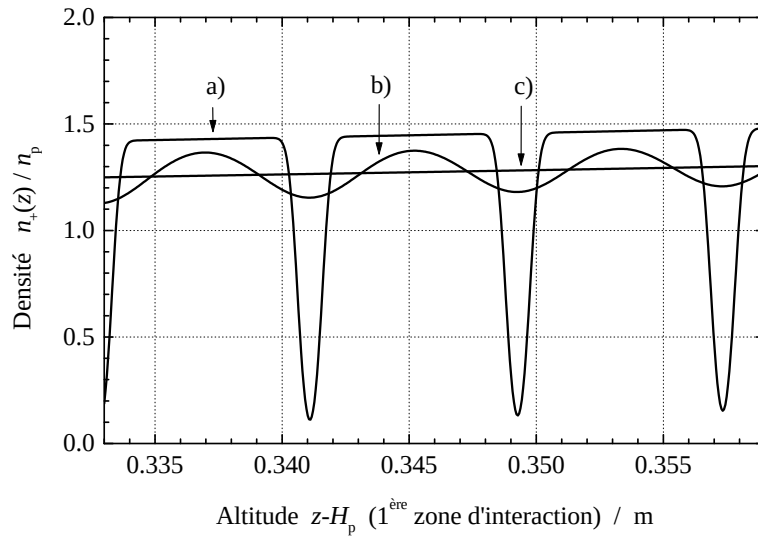


Fig. 7.13: Evolution de la densité $n_+(z)$ du jet avec l'altitude z dans la première zone d'interaction de la cavité pour un jet ponctuel et sans température transverse. La densité a été calculée pour trois températures longitudinales du jet : a) $T_l = 0.1 \mu\text{K}$; b) $T_l = 5 \mu\text{K}$ et c) $T_l = 75 \mu\text{K}$.

modulation moyen du jet $\bar{\xi}$ dans la première zone d'interaction de la cavité :

$$\bar{\xi} = \frac{n_+^{\max}(H_c) - n_+^{\min}(H_c)}{n_+^{\max}(H_c)} \quad (7.32)$$

où $n_+^{\max}(H_c)$ et $n_+^{\min}(H_c)$ sont respectivement les densités maximales et minimales du jet au niveau du centre de la zone d'interaction. On constate bien que pour une température longitudinale typique du jet continu de $T_l = 75 \mu\text{K}$, il n'y a aucune modulation du jet dans la première zone d'interaction de la cavité ($\bar{\xi} = 0$). Il faut atteindre des températures faibles ($T_l \approx 5 \mu\text{K}$) pour que la modulation du jet commence à être notable ($\bar{\xi} = 0.14$). Si le jet a une température proche de zéro ($T_l \approx 0.1 \mu\text{K}$), la modulation du jet devient évidemment importante ($\bar{\xi} = 0.91$).

Effet de l'étendue et de la température transverse du jet :

Nous avons considéré pour simplifier le calcul un jet ponctuel sans température transverse. En réalité, le jet est étendu transversalement et possède une température transverse $T_t > 0$. Une pale de la turbine va donc découper une tranche dans le jet qui est plus haute que dans le cas d'un jet ponctuel. Mais cette tranche est inclinée à $\sim 45^\circ$ par rapport à l'axe du jet et du fait de la température transverse, elle va disparaître probablement plus rapidement que pour un jet ponctuel. Ainsi, la modulation de la densité, moyennée sur une section transverse du jet, devrait s'atténuer plus rapidement que dans le cas d'un jet ponctuel. Même pour un jet totalement refroidi longitudinalement et transversalement ($T_l = T_t = 0$), la densité moyenne du jet dans la cavité n'atteint jamais zéro et, par conséquent, l'indice de modulation $\bar{\xi}$ est < 1 .

7.3.4 Tests optiques sur la trappe à lumière

Les pales de la turbine sont en fait composées de plaquettes de verres. Ceci peut paraître étonnant à première vue, car on ne voit pas très bien comment on peut stopper de la lumière avec du verre, pour laquelle il est en général assez transparent. La différence vient de ce que la lumière émise par les atomes froids de la source ne se situe pas dans le domaine du visible, mais dans le proche infrarouge ($\lambda \sim 850 \text{ nm}$), domaine pour lequel il existe des verres avec un pouvoir absorbant élevé. Nous profitons ainsi de deux effets pour piéger la lumière. D'une part, la plus grande partie de la lumière est déviée hors du jet atomique par réflexion sur les pales à 45° , et d'autre part la majorité de la lumière qui traverse les pales en verre est absorbée par le verre lui-même. Seule une très faible quantité de lumière peut traverser complètement les pales en verre.

<i>Grandeur</i>	<i>Notation</i>	<i>Valeur</i>
Masse volumique	ρ_{verre}	2.69 g cm^{-3}
Coefficient de dilatation	α_{verre}	$8.9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
Température de transformation	T_g	$475 \text{ }^\circ\text{C}$
Indice de réfraction ($\lambda = 587.6 \text{ nm}$)	n_2	1.54
Coefficient de réflexion	ρ_i	$4.6 \cdot 10^{-2}$
Coefficient de transmission ($\lambda = 520 \text{ nm}$)	τ_i	0.93
Coefficient de transmission ($\lambda = 850 \text{ nm}$)	τ_i	$< 1 \cdot 10^{-5}$

Tab. 7.1: Caractéristiques physiques principales du verre Schott BG42. Les coefficients de réflexion et de transmission sont donnés à incidence normale pour une épaisseur de $e_p = 1 \text{ mm}$.

La raison d'utiliser des pales en verre au lieu de pales en un matériau absorbant la lumière, par exemple des pales en métal recouvertes de graphite, est que l'utilisation du verre permet de diminuer la lumière diffusée par la surface. En effet, le verre poli diffuse très peu la lumière et la lumière réfléchie l'est dans une direction bien définie, ce qui permet de la piéger aisément. Le risque avec de la lumière diffusée dans toutes les directions est qu'elle trouve son chemin vers la sortie de la trappe à lumière et pénètre ainsi dans le résonateur. Ce risque est minimisé avec l'utilisation du verre poli. De plus, le verre est léger et ne pose pas de problème pour l'obtention d'un vide élevé. Des pales en aluminium, par exemple, seraient envisageables, mais il est difficile de polir l'aluminium aussi bien que le verre et la lumière diffusée serait donc probablement plus importante. Les mesures optiques effectuées sur les plaquettes de verre utilisées pour réaliser les pales de la turbine ont pour but de vérifier que la lumière transmise à travers les pales est très faible et parfaitement tolérable.

Mesures optiques sur les plaquettes de verre

Le verre utilisé pour réaliser les pales de la trappe à lumière rotative est un filtre optique qui a une transmission élevée dans l'ultraviolet et très faible dans l'infrarouge. Il s'agit d'un verre Schott du type BG42 de la série des verres bleu. Ses caractéristiques physiques principales sont reportées dans le Tab. 7.1. Calculons les coefficients de réflexion, de transmission et d'absorption, ainsi que le facteur d'atténuation, pour des pales en verre d'épaisseur $e_p = 1 \text{ mm}$ inclinées à 45° par rapport à la direction de propagation de la lumière incidente. Puisque le verre absorbe beaucoup à la longueur d'onde qui nous intéresse, nous pouvons négliger les réflexions multiples à l'intérieur

<i>Grandeur</i>	<i>Notation</i>	<i>Valeur</i>
Coefficient de réflexion	ρ_{tot}	$5.6 \cdot 10^{-2}$
Coefficient de transmission	τ_{tot}	$< 2.1 \cdot 10^{-6}$
Coefficient d'absorption	α_{abs}	> 0.944
Facteur d'atténuation	γ_{at}	$> 4.8 \cdot 10^5$

Tab. 7.2: Valeurs calculées des coefficients définis dans la sous-section 7.3.4 pour un angle d'incidence de $\theta_1 = 45^\circ$. Ces valeurs sont calculées avec les grandeurs du Tab. 7.1 à la longueur d'onde de $\lambda = 852 \text{ nm}$ pour une épaisseur de verre de $e_p = 1 \text{ mm}$.

de la plaque de verre. Le coefficient de réflexion total vaut alors :

$$\rho_{\text{tot}} \simeq \rho_1 \quad (7.33)$$

où ρ_1 est le coefficient de réflexion sur le premier interface air-verre. Il est donné par la formule de Fresnel :

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2(\theta_2 - \theta_1)}{\sin^2(\theta_2 + \theta_1)} + \frac{\tan^2(\theta_2 - \theta_1)}{\tan^2(\theta_2 + \theta_1)} \right) \quad (7.34)$$

avec θ_1 l'angle d'incidence de la lumière sur la plaque de verre et θ_2 l'angle de réfraction qui est relié à θ_1 par la loi de Descartes :

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \quad (7.35)$$

où n_1 et n_2 sont les indices de réfraction de l'air et du verre respectivement. Le coefficient de transmission total τ_{tot} est donné par l'expression suivante :

$$\tau_{\text{tot}} \simeq (1 - \rho_1)^2 \tau_i \quad (7.36)$$

où τ_i est le coefficient de transmission interne du verre. Le coefficient d'absorption α_{abs} se déduit de la conservation de l'énergie, il s'exprime par la relation :

$$\alpha_{\text{abs}} \simeq 1 - \rho_1 \quad (7.37)$$

et le facteur d'atténuation γ_{at} est l'inverse du coefficient de transmission total τ_{tot} . En utilisant les valeurs du Tab. 7.1, nous obtenons les résultats indiqués dans le Tab. 7.2.

Nous avons aussi mesuré le coefficient de réflexion et de transmission des plaquettes de verre à un angle d'incidence de 45° pour un rayonnement de longueur d'onde $\lambda_2 = 852.1 \text{ nm}$ correspondant à la longueur d'onde de la

<i>Grandeur</i>	<i>Notation</i>	<i>Valeur</i>	
		<i>Pol. </i>	<i>Pol. ⊥</i>
Coefficient de réflexion	ρ_{tot}	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$9.5 \cdot 10^{-2}$
Coefficient de transmission	τ_{tot}	$1.5 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-6}$
Coefficient d'absorption	α_{abs}	0.987	0.905
Facteur d'atténuation	γ_{at}	$6.7 \cdot 10^5$	$7.7 \cdot 10^5$

Tab. 7.3: Valeurs des coefficients de réflexion et de transmission mesurées pour un angle d'incidence de $\theta_1 = 45^\circ$ et un rayonnement de longueur d'onde $\lambda_2 = 852.1$ nm sur des plaquettes de verre BG42 d'épaisseur $e_p = 1$ mm. || et $\perp$ signifient respectivement parallèle et perpendiculaire au plan d'incidence. Le coefficient d'absorption et le facteur d'atténuation ont été déduits des mesures.

lumière émise par les atomes froids de césium. Pour réaliser ces mesures, nous avons utilisé la lumière émise par un laser accordé sur la transition D_2 du césium. Les résultats obtenus sont résumés dans le Tab. 7.3 pour un verre d'épaisseur $e_p = 1$ mm et pour une polarisation de la lumière parallèle (||) ainsi que perpendiculaire ($\perp$) au plan d'incidence. Le coefficient d'absorption et le facteur d'atténuation ont été calculés à partir des valeurs mesurées de ρ_{tot} et τ_{tot} .

On remarque que le coefficient de réflexion calculé correspond bien au coefficient mesuré moyenné sur la polarisation qui vaut $\bar{\rho}_{\text{tot}} = 5.4 \cdot 10^{-2}$. Le coefficient de transmission mesuré est effectivement inférieur à celui calculé, et ceci quelle que soit la polarisation de la lumière. En ce qui concerne l'absorption de la lumière par le verre, le coefficient d'absorption moyenné sur la polarisation, qui vaut $\bar{\alpha}_{\text{abs}} = 0.946$, est effectivement supérieur à celui calculé. Le facteur d'atténuation mesuré est par conséquent, quelle que soit la polarisation, également supérieur au facteur calculé. Moyenné sur la polarisation, il s'élève à $\bar{\gamma}_{\text{at}} = 7.2 \cdot 10^5$. Ainsi, on constate que pour la longueur d'onde qui nous intéresse, l'atténuation de la lumière par des pales à 45° est très importante. Avec un verre d'épaisseur $e_p = 1$ mm et quelle que soit la polarisation de la lumière, le facteur d'atténuation obtenu est $> 10^5$ ce qui est largement suffisant pour réduire le déplacement radiatif à un niveau négligeable (cf. 7.3.2).

Mesures optiques sur un prototype

Nous avons réalisé un prototype de la trappe à lumière rotative sur lequel nous avons effectués des mesures concernant l'atténuation de la lumière par les pales lorsque la turbine est en rotation. Le schéma du montage utilisé pour ces mesures est représenté dans la Fig. 7.14. Le prototype contient 18

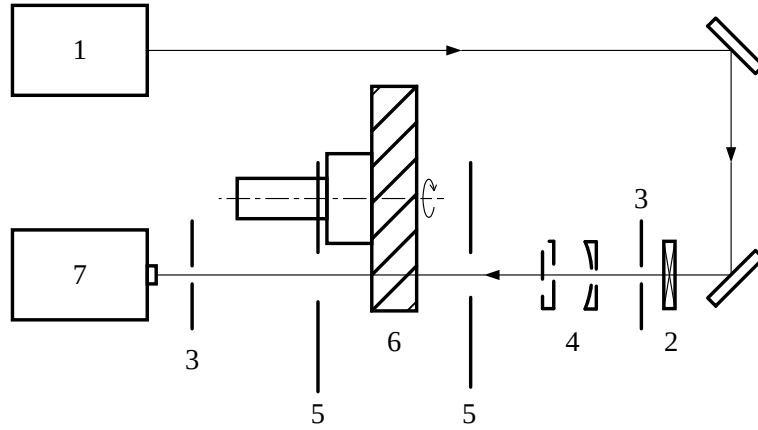


Fig. 7.14: Schéma du montage pour les mesures d'atténuation sur la turbine prototype. 1 : diode laser ; 2 : lame demi-onde ; 3 : diaphragme $\varnothing = 4$ mm ; 4 : verre dépoli + lentille divergente ; 5 : diaphragme $\varnothing = 10$ mm ; 6 : turbine prototype ; 7 : photodétecteur.

pales de largeur $l_p = 23.0$ mm et d'épaisseur $e_p = 1$ mm. En ce qui concerne l'aspect optique, seul le rayon moyen des pales est un peu plus grand que la version finale montée dans la fontaine continue. Le prototype est monté sur un petit moteur électrique dont l'axe de rotation est horizontal. Toutes les mesures ont été réalisées sur la turbine en rotation continue à l'air libre à la fréquence de rotation de $f_{\text{turb}} = 11$ Hz. Nous utilisons la lumière fournie par un laser dont la fréquence est ajustée sur la transition D_2 du césium pour simuler la lumière en provenance de la source. Nous avons effectué des mesures avec un faisceau parallèle de diamètre $\varnothing = 4$ mm et pour quelques mesures un diamètre de $\varnothing = 2$ mm. Nous avons aussi utilisé une lumière diffuse pour simuler la lumière diffusée par la source d'atomes froids. Cette lumière a été obtenue à l'aide d'une lentille divergente suivie d'un verre dépoli placé sur la trajectoire du faisceau parallèle (en traitillé sur la Fig. 7.14). Nous mesurons l'intensité I_- du faisceau avant la trappe rotative et son intensité moyenne $\bar{I}_+$ après son passage à travers la turbine. Le rapport $\bar{\gamma}_{\text{at}} = I_- / \bar{I}_+$ donne le facteur d'atténuation moyen de la trappe en rotation. L'intensité est mesurée par un photodétecteur étalonné, la tension qu'il fournit est directement proportionnelle à l'intensité de la lumière dans l'intervalle $0 - 4 \mu\text{W}$. Nous avons placé également deux diaphragmes, de diamètre $\varnothing = 10$ mm, un avant et un après les pales de la turbine, afin de simuler les ouvertures d'entrée et de sortie de la trappe à lumière.

Mesure du facteur d'atténuation en fonction du rayon :

Nous avons mesuré le facteur d'atténuation moyen en fonction de la distance

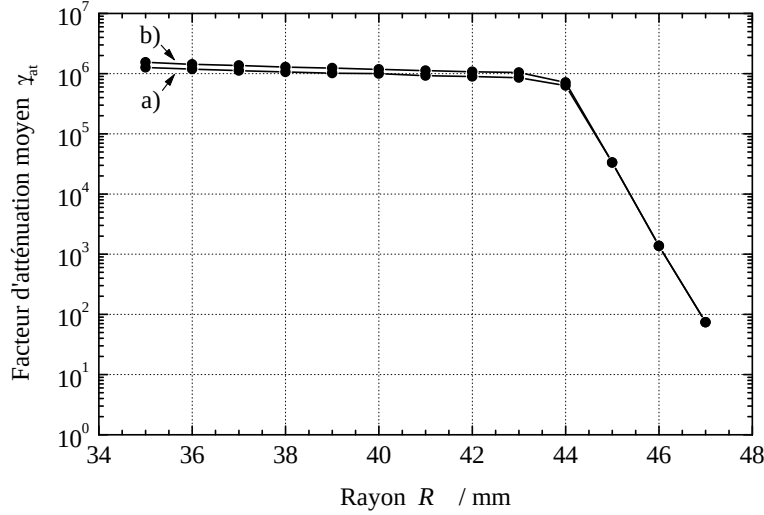


Fig. 7.15: Facteur d'atténuation moyen $\bar{\gamma}_{at}$ mesuré en fonction du rayon R avec un faisceau parallèle de diamètre $\varnothing = 4$ mm. a) polarisation parallèle au plan d'incidence et b) polarisation perpendiculaire au plan d'incidence. Nous avons relié les points de mesure pour plus de clarté.

entre l'axe de rotation de la turbine et l'axe du faisceau. Les résultats pour un faisceau parallèle de diamètre $\varnothing = 4$ mm et une polarisation parallèle et perpendiculaire au plan d'incidence sont reportés dans la Fig. 7.15. Nous avons fait les mêmes mesures avec de la lumière diffuse pour une distance de $l_d = 87$ mm entre la position de la lentille divergente et la position du premier diaphragme de $\varnothing = 10$ mm. Nous avons vérifié cependant que le facteur d'atténuation ne dépendait pas de la position de la source de lumière diffuse (verre dépoli + lentille divergente). Les valeurs obtenues du facteur d'atténuation dans ce cas sont résumées dans la Fig. 7.16.

Le facteur d'atténuation moyen se situe autour de $\bar{\gamma}_{at} = 10^6$ pour un rayon R compris entre $35 \text{ mm} < R < 43 \text{ mm}$. Au-delà de ce rayon, le facteur d'atténuation diminue rapidement dans le cas de la lumière diffuse et un peu plus lentement pour un faisceau parallèle. Ceci vient du fait que lorsque $R > 44$ mm (pour un faisceau parallèle) la lumière commence à atteindre l'extrémité des pales. Or l'extrémité des pales n'est pas située au même rayon pour toutes les pales car leur découpe n'est pas parfaite. Il en résulte qu'il commence à y avoir des ouvertures ou une diminution de l'épaisseur effective des pales ce qui entraîne une diminution du facteur d'atténuation. On remarque également une légère augmentation de ce dernier lorsque l'axe du faisceau se rapproche du centre de la turbine. Elle est due à l'augmentation du rapport recouvrement/non-recouvrement de deux pales successives quand

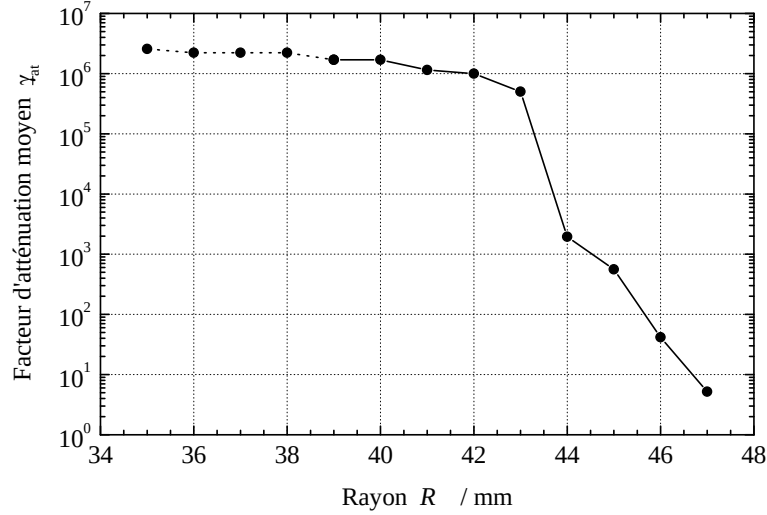


Fig. 7.16: Facteur d'atténuation moyen $\bar{\gamma}_{at}$ mesuré en fonction du rayon R avec de la lumière diffuse. La distance entre la lentille divergente et le premier diaphragme de $\varnothing = 10$ mm est de $l_{ld} = 87$ mm. Nous avons relié les points de mesure pour plus de clarté. La courbe en traitillé est une estimation.

le rayon diminue.

Comme la turbine finale n'est pas tout à fait identique à la turbine prototype utilisée pour les mesures optiques, et afin de pouvoir comparer la situation expérimentale des mesures optiques avec la situation réelle dans la fontaine continue, nous avons regroupé dans la Fig. 7.17 une vue de face des deux turbines. Sur la turbine prototype (figure a)), nous avons indiqué deux positions différentes du diaphragme utilisé pour les mesures ($R = 40$ mm et $R = 45$ mm), et sur la turbine finale (figure b)), nous indiquons la position de l'ouverture d'entrée dans la trappe à lumière.

Mesure du facteur d'atténuation en fonction de l'angle entre l'axe de rotation de la turbine et le plan horizontal :

Remarquons que la principale source de lumière provient en fait d'une source étendue (la mélasse optique) et que la direction de la lumière qui vient du centre de la source fait un angle de $\sim 2^\circ$ avec le centre de l'ouverture d'entrée de la trappe à lumière rotative. Ainsi, si on suppose le diamètre de la source de lumière égal au diamètre à e^{-2} des faisceaux de refroidissement ($\varnothing_{e^{-2}} \simeq 25$ mm), la lumière pourrait traverser directement la trappe dans le plan Oxz sous un angle de $\sim 10^\circ$ par rapport à la verticale et $\sim 8.2^\circ$ dans le plan Oyz . Pour voir quel est cet effet dans le plan Oxz , nous avons effectué des mesures du facteur d'atténuation lorsque l'axe de rotation de la turbine

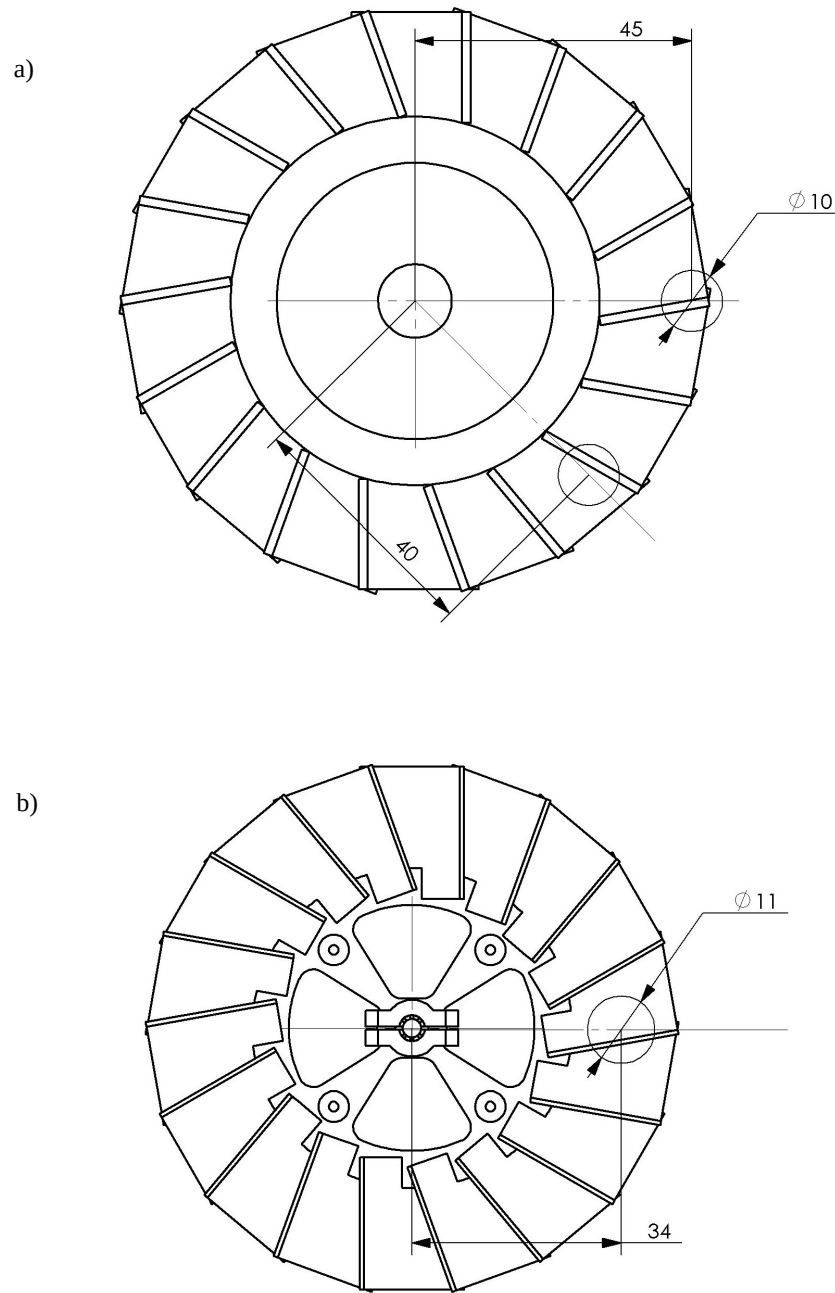


Fig. 7.17: Vue de dessous de la turbine : a) prototype ayant servi aux mesures optiques et b) turbine finale. Pour comparer les mesures avec la situation finale sur l'étalon, nous indiquons deux positions du diaphragme pour les mesures sur le prototype ainsi que la position et le diamètre du trou d'entrée dans la trappe à lumière pour la turbine finale.

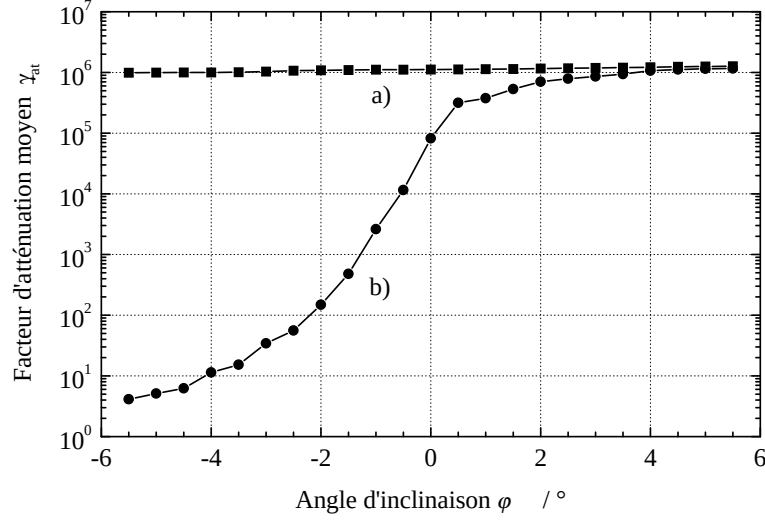


Fig. 7.18: Facteur d'atténuation moyen $\bar{\gamma}_{at}$ mesuré en fonction de l'angle d'inclinaison de l'axe de rotation de la turbine par rapport au plan horizontal. Faisceau parallèle de diamètre $\varnothing = 4$ mm et polarisation parallèle au plan d'incidence. a) $R = 40$ mm et b) $R = 45$ mm. Nous avons relié les points de mesure pour plus de clarté.

est incliné d'un certain angle par rapport au plan horizontal. Les résultats des mesures du facteur d'atténuation dans cette situation sont indiqués dans la Fig. 7.18 (faisceau parallèle) et dans la Fig. 7.19 (lumière diffuse). Si on se place près de l'extrémité des pales ($R = 45$ mm), on constate une diminution du facteur d'atténuation moyen lorsque l'axe de rotation est incliné vers le bas et une augmentation dans le cas contraire, ceci aussi bien en lumière parallèle qu'en lumière diffuse. Cette diminution est probablement due à l'apparition "d'ouvertures" à l'extrémité des pales ou à une diminution du rapport recouvrement/non-recouvrement de deux pales successives à leur extrémité. Elle est d'autant plus importante que l'on se rapproche de l'extrémité des pales. Par contre si on se trouve au centre des pales ($R = 40$ mm), ce phénomène est beaucoup moins accentué et le facteur d'atténuation moyen reste proche de $\bar{\gamma}_{at} = 10^6$. Nous avons vérifié qu'en lumière diffuse, il en va de même. La faible variation du facteur d'atténuation moyen est due, dans ce cas, à la variation de l'épaisseur optique des pales avec l'angle d'inclinaison.

Mesure du facteur d'atténuation en fonction de l'angle entre l'axe de rotation de la turbine et le plan vertical :

Afin de mesurer l'effet, sur le facteur d'atténuation moyen, de l'inclinaison de la lumière dans le plan Oyz , nous avons effectué des mesures du facteur

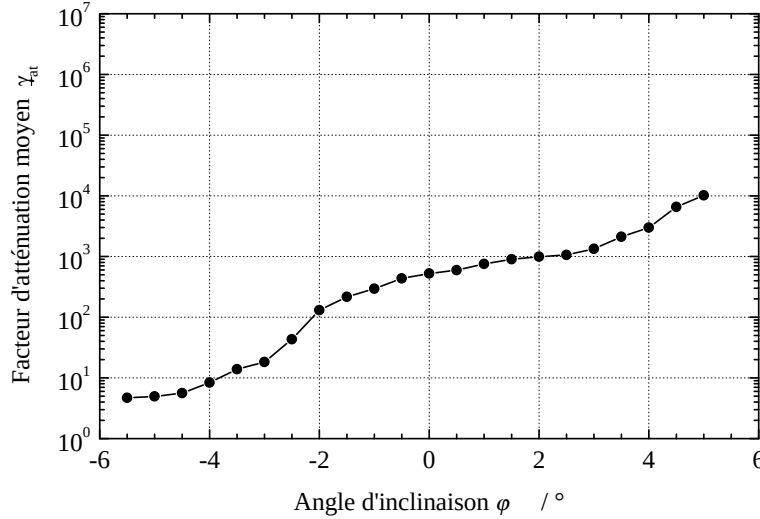


Fig. 7.19: Facteur d'atténuation moyen $\bar{\gamma}_{at}$ mesuré en fonction de l'angle d'inclinaison de l'axe de rotation de la turbine par rapport au plan horizontal avec de la lumière diffuse. La distance entre la lentille divergente et le premier diaphragme de $\varnothing = 10$ mm est de $l_{ld} = 87$ mm. Nous avons relié les points de mesure pour plus de clarté.

d'atténuation lorsque l'axe de rotation de la turbine est tourné d'un certain angle par rapport au plan vertical. Les valeurs du facteur d'atténuation obtenus dans ce cas sont présentés dans la Fig. 7.20 (faisceau parallèle) et dans la Fig. 7.21 (lumière diffuse). Pour un rayon $R = 45$ mm situé près de l'extrémité des pales, le facteur d'atténuation moyen diminue lorsque l'axe de rotation est tourné autour de la direction du faisceau incident, ceci aussi bien en lumière parallèle qu'en lumière diffuse. Cette variation semble plus ou moins symétrique. Cette diminution est probablement aussi due à l'apparition "d'ouvertures" à l'extrémité des pales ou à une diminution du rapport recouvrement/non-recouvrement de deux pales successives à leur extrémité. Pour un rayon $R = 40$ mm qui se trouve au centre des pales, on constate une diminution rapide du facteur d'atténuation moyen pour une rotation positive de l'axe de la turbine. Ceci est probablement dû à "l'ouverture" du recouvrement des pales sous l'effet de la rotation. Par contre, pour une rotation en sens inverse, on n'observe pas cet effet puisque dans ce cas les pales ont plutôt tendance à se "refermer". La faible diminution de $\bar{\gamma}_{at}$ qui subsiste est probablement due à la diminution de l'épaisseur optique moyenne des pales. Toutefois, ce phénomène est beaucoup moins accentué et le facteur d'atténuation moyen reste proche de $\bar{\gamma}_{at} = 10^6$. Nous avons vérifié qu'en lumière diffuse, la tendance est la même.

Pour résumer le résultat de ces mesures, nous pouvons dégager les critères

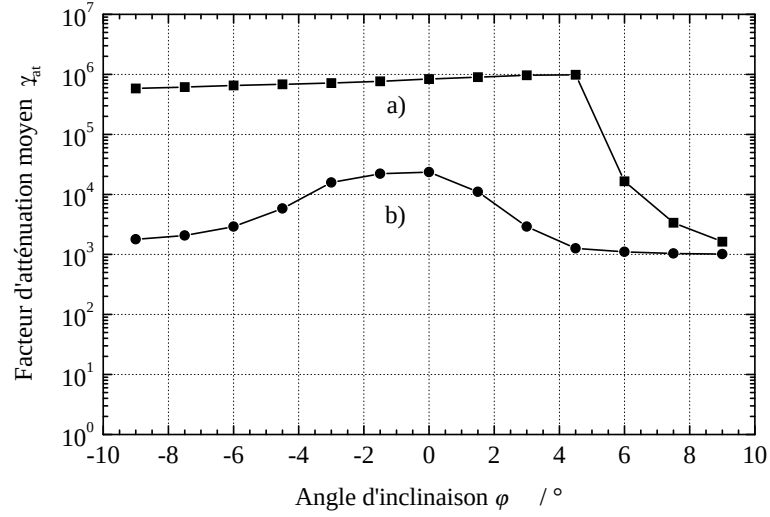


Fig. 7.20: Facteur d'atténuation moyen $\bar{\gamma}_{at}$ mesuré en fonction de l'angle d'inclinaison de l'axe de rotation de la turbine par rapport au plan vertical. Faisceau parallèle de diamètre $\varnothing = 4$ mm et polarisation parallèle au plan d'incidence. a) $R = 40$ mm et b) $R = 45$ mm. Nous avons relié les points de mesure pour plus de clarté.

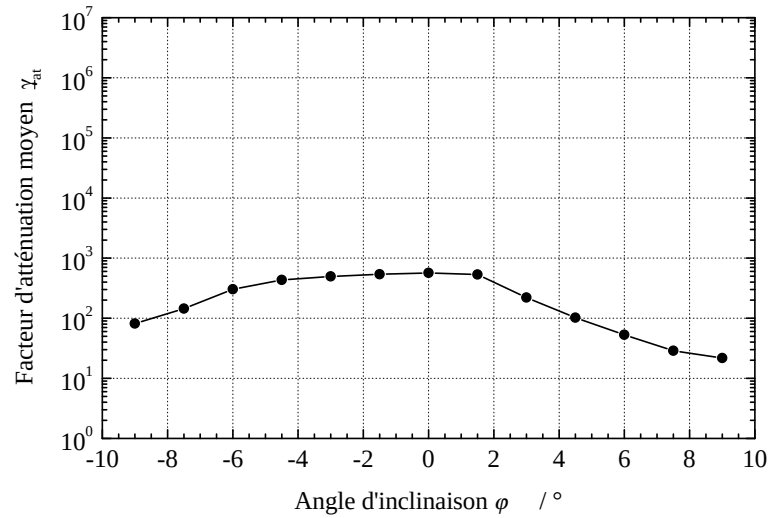


Fig. 7.21: Facteur d'atténuation moyen $\bar{\gamma}_{at}$ mesuré en fonction de l'angle d'inclinaison de l'axe de rotation de la turbine par rapport au plan vertical. Lumière diffuse. La distance entre la lentille divergente et le premier diaphragme de $\varnothing = 10$ mm est de $l_{ld} = 87$ mm et le rayon vaut $R = 45$ mm. Nous avons relié les points de mesure pour plus de clarté.

suivants pour assurer un facteur d'atténuation moyen $\bar{\gamma}_{\text{at}} \gtrsim 10^4$:

- L'extrémité du faisceau de lumière entrant dans la trappe ne doit pas traverser la trappe rotative à une distance inférieure à ≈ 4 mm de l'extrémité des pales. Soit en tenant compte de l'imperfection des pales à ≈ 5 mm du bord des pales.
- L'inclinaison des rayons extrêmes du faisceau de lumière entrant dans la trappe ne doit pas dépasser $\approx 4^\circ$ par rapport à l'axe Oz . Ceci veut dire qu'ils devraient se situer sur un cône vertical de demi-angle au sommet $\lesssim 4^\circ$.

Notons que ces conditions sont approximativement réalisées dans la version finale de la trappe à lumière qui a été montée dans la fontaine continue si la source d'atomes froids est un piège magnéto-optique (MOT). Dans ce cas la taille de la source est petite, de l'ordre de quelques millimètres. Dans la fontaine continue réalisée, la source d'atomes froids est une mélasse optique dont la taille est nettement plus grande ($\varnothing$ de l'ordre de 2 cm). Il se pourrait donc que ces conditions ne soient pas entièrement vérifiées, ce qui expliquerait le niveau relativement élevé de lumière parasite mesuré près de la cavité micro-onde.

Mesures optiques sur la version finale

Avant de monter la version finale de la trappe à lumière dans la fontaine continue, nous avons procédé également à quelques tests optiques. Le schéma du montage expérimental est semblable à celui décrit dans la Fig. 7.14, mais nous utilisons cette fois un laser He - Ne qui fournit un faisceau de lumière visible dans le rouge. Avec un faisceau parallèle de diamètre $\varnothing = 1$ mm dont l'axe est placé à un rayon $R = 34$ mm de l'axe de rotation de la turbine, ce qui correspond environ au centre des pales, nous avons mesuré l'intensité du faisceau transmis. Le résultat est reporté dans la Fig. 7.22 pour une mesure sur une période de rotation de la turbine. On observe une modulation du faisceau transmis suivant que le faisceau incident traverse une pale ou deux pales. On observe bien l'effet des 18 pales qui composent la trappe rotative. La régularité de l'espacement des pales, sur la circonférence moyenne de fixation des pales sur la turbine, peut facilement être vérifiée en relevant la position des flancs montants à mi-hauteur. En convertissant les mesures de temps en mesures de distance, on obtient les résultats résumés dans le diagramme Fig. 7.23. La distance moyenne entre chaque pales est de $s_d =$

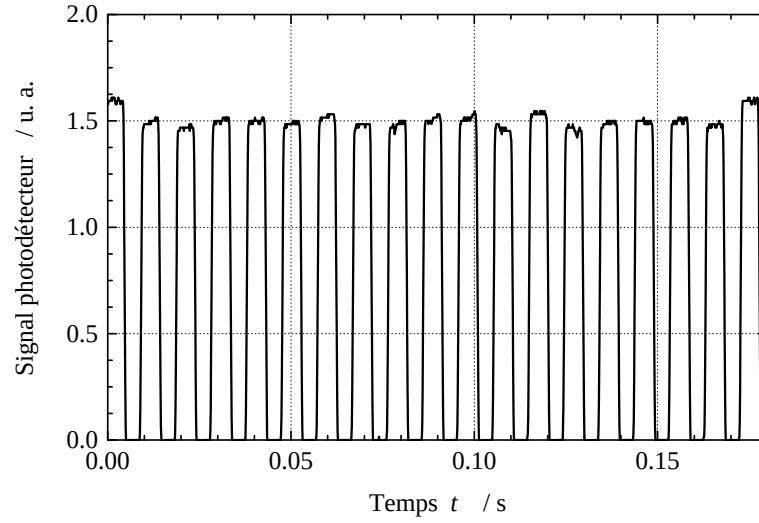


Fig. 7.22: Faisceau transmis après la trappe à lumière, mesuré sur une période de rotation. Le faisceau incident est parallèle, de diamètre $\varnothing = 1$ mm, et situé à une distance $R = 34$ mm de l'axe de rotation. On voit bien la succession des 18 pales sur l'intensité de la lumière transmise.

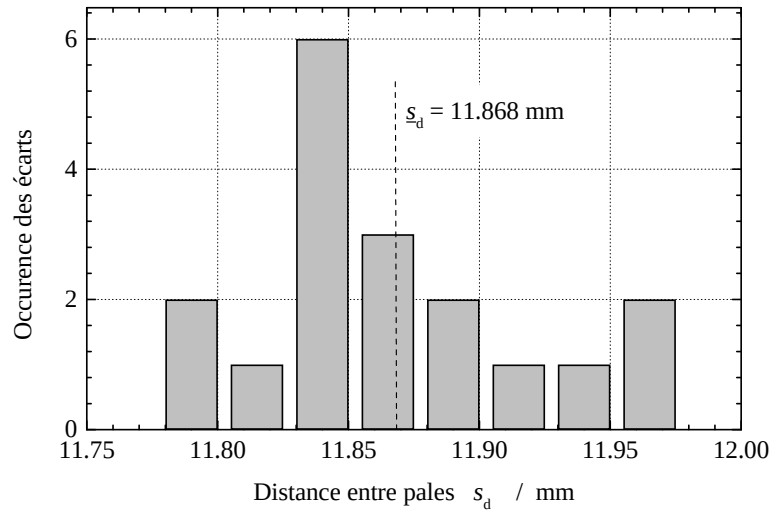


Fig. 7.23: Diagramme de la dispersion de l'écart s_d entre les pales sur la circonférence moyenne de rayon $R = 34$ mm. L'écart moyen est de $\bar{s}_d = 11.868$ mm et l'écart quadratique moyen se monte à $s_{d,\text{rms}} = 53 \mu\text{m}$.

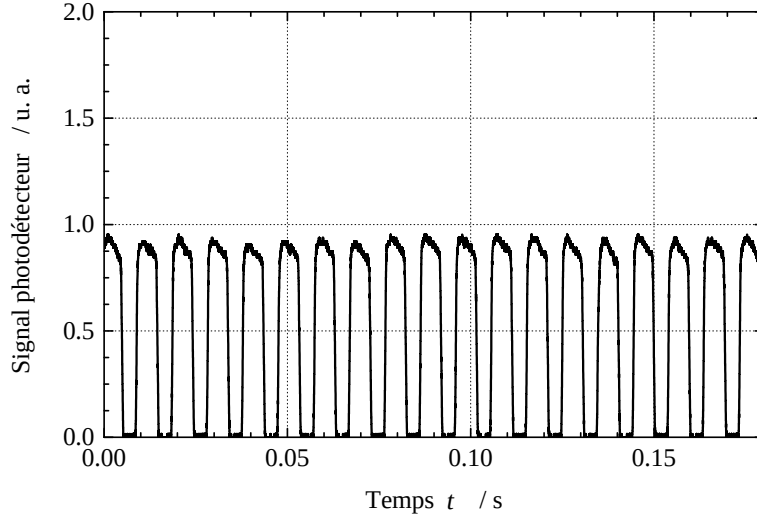


Fig. 7.24: Faisceau défléchi par la trappe à lumière, mesuré sur une période de rotation. Le faisceau incident est parallèle, de diamètre $\varnothing = 1$ mm, et situé à une distance $R = 34$ mm de l'axe de rotation. On voit bien la succession des 18 pales sur l'intensité de la lumière défléchie.

$2\pi R/N_p = 11.870$ mm. L'écart quadratique moyen déduit de la dispersion du diagramme de la Fig. 7.23 se monte à $s_{\text{d}_{\text{rms}}} \simeq 53 \mu\text{m}$. Les sources d'erreur dues à la résolution des mesures sont négligeables par rapport à cette valeur. Comme on va le voir plus loin, cette dispersion des écarts entre les pales est principalement due au défaut de verticalité des pales et non pas à une incertitude sur le positionnement circonférentiel de l'assise des pales.

Nous avons aussi mesuré, sur une période de rotation, l'intensité du faisceau défléchi par deux pales consécutives (Fig. 7.24). Du fait de la rotation des pales, l'intersection du faisceau défléchi avec un plan perpendiculaire à la direction du faisceau incident est un arc de cercle. L'angle moyen du faisceau défléchi par rapport à la direction du faisceau incident a été mesuré pour un faisceau de diamètre $\varnothing = 1$ mm. Il correspond à la situation où le faisceau incident rencontre la pale en son milieu. Nous obtenons un angle de $\bar{\theta} = 20^\circ$, ce qui correspond bien à l'angle φ_p entre chaque pales comme on peut le montrer géométriquement. La dispersion de l'angle de déflexion autour de $\bar{\theta}$ renseigne sur l'orientation radiale des pales. Le diagramme de la Fig. 7.25 représente la dispersion de l'angle de déflexion des pales de la trappe rotative. La fluctuation maximale de cet angle est de $\delta\theta \simeq 7$ mrad, ce qui correspond environ à la fluctuation de l'orientation radiale des pales (défaut de verticalité). Comme les pales sont collées contre un épaulement radial de 5 mm de hauteur, l'écart maximal entre l'épaulement et la face de la pale

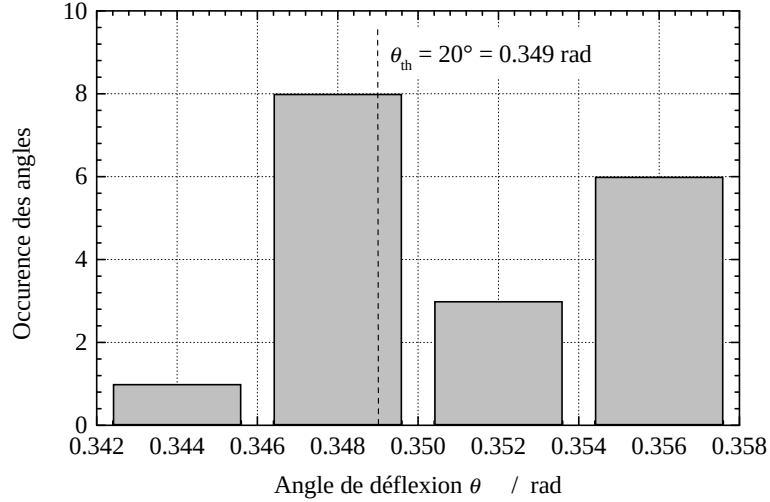


Fig. 7.25: Diagramme de la dispersion de l'angle de déflexion θ de deux pales successives. L'angle théorique vaut $\theta_{th} = 20^\circ$.

est de $\delta s_d \simeq 35 \mu\text{m}$. Ceci montre bien la qualité du collage effectué. Cette fluctuation de l'orientation radiale des pales induit aussi une fluctuation de la position de la pale sur la circonférence moyenne de rayon $R = 34 \text{ mm}$. Elle se monte ainsi à $\delta s_d \simeq 50 \mu\text{m}$. Si on compare cette valeur avec $s_{d_{rms}}$, on constate que la dispersion des positions des pales sur la circonférence moyenne est essentiellement due au défaut d'alignement des pales contre leur épaulement, comme nous l'avons fait remarquer précédemment. A l'aide de ce faisceau de $\varnothing = 1 \text{ mm}$, on a encore profité de recenser toutes les réflexions parasites, quel que soit leur direction, qui apparaissent suivant la position des pales. Nous nous sommes assuré qu'il n'y avait pas de réflexions parasites aux environs immédiats de la position du faisceau transmis.

Pour terminer ces mesures optiques, nous avons essayé de déterminer la position du faisceau défléchi en se rapprochant des conditions réelles de fonctionnement de la trappe. Ceci afin de savoir précisément où placer le petit piège après la turbine. Pour cela, nous avons utilisé un faisceau incident de lumière parallèle de diamètre $\varnothing = 11 \text{ mm}$, ce qui correspond au diamètre de l'ouverture d'entrée dans la trappe à lumière, placé au rayon $R = 34 \text{ mm}$. De plus, il a été incliné d'un angle de $\sim 2.6^\circ$ par rapport à l'axe de rotation de la turbine pour tenir compte de l'inclinaison moyenne de la lumière provenant de la source. Dans ces conditions, l'intersection du faisceau défléchi avec un plan perpendiculaire à la direction du faisceau incident fait apparaître une succession de taches aux formes diverses suivant la position des pales. En regardant la turbine depuis l'entrée de la trappe à lumière, le centre

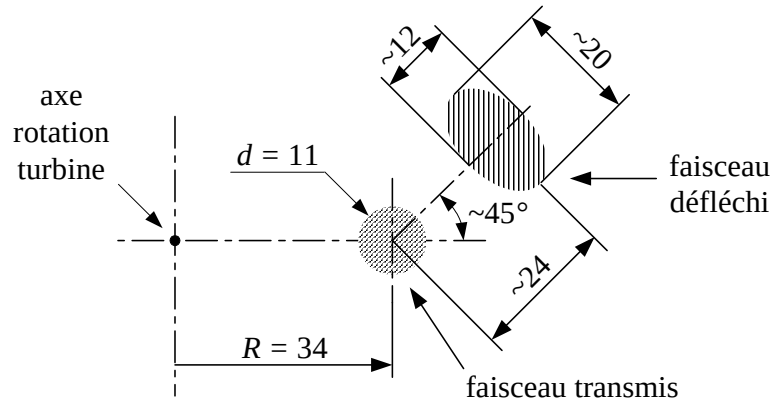


Fig. 7.26: Esquisse de la position du faisceau défléchi par rapport au faisceau transmis. Cette position a été relevée dans un plan perpendiculaire à la direction du faisceau incident, situé à ~ 37 mm du bord arrière des pales de la turbine.

de l'intersection du faisceau défléchi se trouve à droite de celui du faisceau transmis à $\sim 45^\circ$. Une esquisse de la situation, relevée dans un plan situé à ~ 37 mm du bord arrière des pales, est indiquée dans la Fig. 7.26.

7.3.5 Réalisation de la trappe à lumière rotative

La trappe à lumière rotative complète est composée principalement de trois parties fonctionnelles : la turbine proprement dite avec les 18 pales, le moteur électrique d'entraînement et le petit piège à lumière.

Turbine

Pour réaliser la turbine, nous avons procédé tout d'abord à des tests thermiques concernant les collages des plaquettes de verre sur le corps métallique de la turbine. Dans un premier temps, nous avons réalisé plusieurs prototypes du corps de la turbine en aluminium. Notamment pour les tests sous vide (cf. sous-section 7.3.6). Nous avons alors testé thermiquement le collage des plaquettes sur un support en aluminium. Deux plaquettes de verre ont été dépolies sur une hauteur de ~ 5 mm et collées sur le support en aluminium avec de la colle Epotek H72 qui est compatible avec le vide. Ensuite, elles ont été soumises à des cycles thermiques de la température ambiante à $T = 200^\circ\text{C}$ puis refroidies à l'air. Avant la sortie de l'étuve, les deux plaquettes étaient déjà fendues près de l'interface colle-verre, là où les contraintes thermiques sont les plus élevées. La raison en est que le coefficient de dilatation de l'aluminium est environ trois fois plus élevé que celui du verre utilisé, ce qui

<i>Grandeur</i>	<i>Notation</i>	<i>Valeur</i>
<i>Verre BG42 :</i>		
Masse volumique	ρ_{verre}	2.69 g cm ⁻³
Coefficient de dilatation	α_{verre}	$8.9 \cdot 10^{-6}$ K ⁻¹
<i>Aluminium :</i>		
Masse volumique	ρ_{Al}	2.7 g cm ⁻³
Coefficient de dilatation	α_{Al}	$24.5 \cdot 10^{-6}$ K ⁻¹
<i>Titane :</i>		
Masse volumique	ρ_{Ti}	4.5 g cm ⁻³
Coefficient de dilatation	α_{Ti}	$8.8 \cdot 10^{-6}$ K ⁻¹

Tab. 7.4: Comparaison des valeurs de la masse volumique et du coefficient de dilatation pour le verre BG42, l'aluminium et le titane.

provoque des contraintes thermiques trop importantes dans le verre.

Nous avons alors opté pour un corps de la turbine en titane grad 5 car son coefficient de dilatation est le plus proche de celui du verre comme le rappelle le tableau Tab. 7.4. Les plaquettes ont été collées sur deux épaulements de surface 5×5 mm² chacun. Nous avons renouvelé les tests des collages et après 6 cycles thermiques, nous n'avons constaté aucun dégât sur les plaquettes de verre à l'interface colle-verre. Nous avons pesé toutes les plaquettes de verre composant les pales et nous les avons réparties de la manière la plus judicieuse possible sur la circonférence du corps de la turbine de manière à minimiser son balourd résiduel. La dispersion des masses des 18 pales, dues aux tolérances de découpage, est résumée dans la Fig. 7.27. Comme le titane est presque deux fois plus lourd que l'aluminium (cf. Tab. 7.4), nous avons dû alléger le corps de la turbine. La pièce a été usinée en partie sur une fraiseuse à commande numérique et en partie par électroérosion. Une photo de la turbine avec les pales et la bride de fixation sur l'axe du moteur est présentée dans la Fig. 7.28. Ses principales caractéristiques physiques sont résumées dans le Tab. 7.5. Les quatre lamages sur la face avant du corps de la turbine sont prévus pour accueillir des petites masses qui serviront à l'équilibrage dynamique de la turbine (cf. sous-section 7.3.6). Le diamètre extérieur des pales est de 85 mm et leur rayon moyen vaut $\bar{R}_p = 34.1$ mm.

Le rayon extérieur du corps métallique de la turbine a été fixé à 26 mm et la longueur des pales à 21.5 mm.

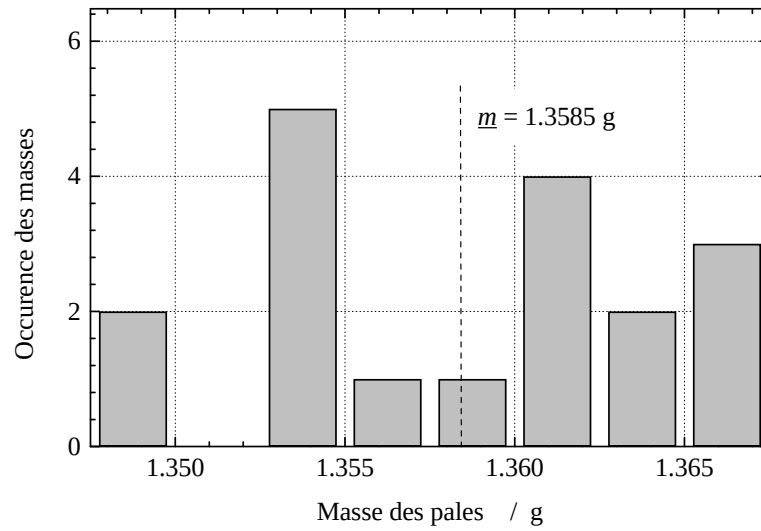


Fig. 7.27: Diagramme de la dispersion de la masse des 18 pales de la version finale de la turbine. La masse moyenne d'une pale vaut $\bar{m} = 1.3585$ g.



Fig. 7.28: Version finale de la turbine avec les 18 pales et la bride de fixation sur l'axe du moteur. Les quatres lamages sur la face avant sont prévus pour la fixation des masses d'équilibrage. Le diamètre extérieur des pales est de 85 mm.

<i>Grandeur</i>	<i>Valeur</i>
Ø extérieur du corps métallique	52.0 mm
Ø extérieur des pales	85.0 mm
Hauteur des pales	17.0 mm
Masse totale des 18 pales	24.5 g
Masse du corps métallique (avec bride)	19.5 g
Masse totale (avec pales et bride)	44.0 g
Moment d'inertie de masse	33255 g mm ²

Tab. 7.5: Principales caractéristiques physiques de la version finale de la turbine.

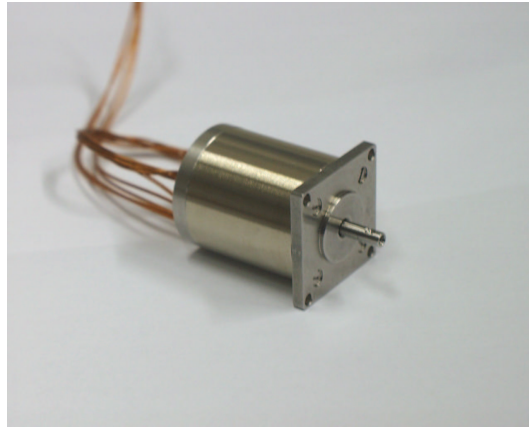


Fig. 7.29: Moteur pas-à-pas *PHYTRON VSS 25.200.1,2 UHV* utilisé pour l'entraînement de la turbine.

Moteur d'entraînement

La rotation continue de la turbine est effectuée à l'aide d'un petit moteur électrique. Le problème est que cette rotation doit être réalisée sous ultravide. Or, faire tourner un moteur électrique sous ultravide, en rotation continue, n'est pas aussi simple que cela peut paraître au premier abord. Le seul moteur que nous avons trouvé, qui a été développé pour fonctionner sous ultra-vide, est un moteur pas-à-pas de la firme *PHYTRON*. Il s'agit du modèle *VSS 25.200.1,2 UHV* (Fig. 7.29) en exécution spéciale, qui garantit un fonctionnement continu de 3 ans minimum sous ultra-vide, à une fréquence de rotation constante de ~ 17 Hz et à température ambiante. Il est équipé de paliers spéciaux (roulements à billes) lubrifiés avec une graisse spécifique (*Ultratherm 2.000/Lubcon*) qui est compatible avec l'ultra-vide. La disposition des aimants permanents est particulière de façon à réduire le champ magnétique produit par le moteur. Le moteur compte 200 pas par

<i>Grandeur</i>	<i>Valeur</i>
Ø axe	3.0 mm
Ø extérieur du moteur	25.0 mm
Longueur du corps du moteur	31.0 mm
Masse	80 g
Moment d'inertie de masse du rotor	200 g mm ²

Tab. 7.6: Valeur de quelques caractéristiques physiques du moteur pas-à-pas *PHYTRON VSS 25.200.1,2 UHV*.

tour, qui peut être augmenté à 400 pas en mode demi-pas. Dans ce mode, la résolution de la fréquence de rotation atteint $1/400 \text{ Hz} = 2.5 \text{ mHz}$. Convertie en vitesse circonférentielle au rayon moyen $\bar{R}_p = 34.1 \text{ mm}$, la résolution en vitesse se monte à 0.5 mm/s , ce qui est largement suffisant pour optimiser expérimentalement la vitesse de rotation. Quelques caractéristiques physiques de ce moteur sont indiquées dans le Tab. 7.6. Ce moteur a été testé sous vide séparément afin de vérifier que l'on peut effectivement atteindre, en fonctionnement continu, un vide qui soit compatible avec la production d'atomes froids (cf. sous-section 7.3.6).

Trappe à lumière complète

La turbine est fixée sur l'axe du moteur par une pince située sur la face avant. Le corps de la turbine recouvre en partie le moteur de façon à limiter le porte à faux sur l'axe du moteur. La plaque de base du moteur est vissée sur un tube circulaire qui est lui-même entouré d'un blindage magnétique afin d'atténuer le champ magnétique généré par le moteur. Ce tube est vissé à son tour sur une plaque sur laquelle est fixé un anneau circulaire en graphite qui supporte un petit piège à lumière circulaire. Cet anneau est placé au-dessus de la turbine, côté sortie de la trappe à lumière, à environ 1 cm du bord supérieur des pales. Sa fonction est d'empêcher toute réflexion de lumière parasite d'atteindre le résonateur, il est percé d'un trou de sortie de $\varnothing = 11 \text{ mm}$ pour le passage du jet atomique. Une fois montés, tous ces éléments sont donc solidaires les uns des autres. La Fig. 7.30 montre une vue de côté de la trappe à lumière avant son montage dans la fontaine continue. On reconnaît la turbine avec le tube support entouré du blindage magnétique et plus bas le piège à lumière sur l'anneau en graphite. Le tout est monté dans une boîte circulaire dont le fond est percé d'un trou de $\varnothing = 11 \text{ mm}$ pour l'entrée du jet dans la trappe à lumière. Le sens du montage est inversé par rapport à la Fig. 7.30, la turbine se trouve au bas de la trappe et l'anneau en graphite

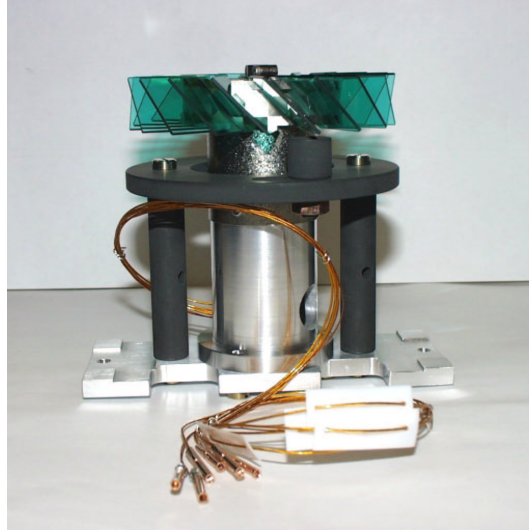


Fig. 7.30: Trappe à lumière rotative complète avant son montage dans l'étalon. On reconnaît la turbine, le support du moteur avec le blindage magnétique et le piège à lumière monté sur l'anneau en graphite.

au sommet.

7.3.6 Tests et équilibrage sous vide de la turbine

Tests de rotation du moteur sous vide

Nous avons procédé à des tests sous vide du moteur pas-à-pas afin de vérifier que ce dernier pouvait fonctionner en régime continu tout en maintenant un vide élevé. Pour cela, nous avons monté le moteur dans une petite enceinte à vide ($\sim 1 - 2 \text{ dm}^3$) avec une charge composée d'une turbine prototype sans les pales dont le corps, en aluminium, a une masse de $m = 17.2 \text{ g}$. Cette charge était fixée sur l'axe du moteur à l'aide d'une vis imbus dont l'extrémité est conique et vient se placer dans une encoche également conique réalisée sur l'axe du moteur. Nous avons placé une vis similaire, à l'opposé de la vis de fixation, pour contrebalancer grossièrement le balourd créé par la vis de fixation. Mais l'ensemble moteur + turbine n'a pas été équilibré. Nous avons testé l'enceinte à vide seule, sans le moteur, pour vérifier que l'on pouvait atteindre effectivement l'ultra-vide. L'enceinte est pompée par une pompe ionique *Varian StarCell VacIon* avec une vitesse de pompage de 30 l/s. Après un étuvage à une température de $T \simeq 140^\circ\text{C}$ pendant 15 jours, on a atteint une pression de $p \simeq 6 \cdot 10^{-10} \text{ mbar}$, ce qui montre qu'on n'est pas limité par le système à vide pour atteindre des vides élevés.

<i>fréq. f_{turb} / Hz</i>	<i>courant I / A</i>	<i>temp. T / °C</i>	<i>pression p / mbar</i>
5.0	0.25	67	$< 3 \cdot 10^{-9}$
2.5	0.25	64	$< 3 \cdot 10^{-9}$
16.5	1.0	227	$\sim 7 \cdot 10^{-9}$
16.5	0.75	200	$\sim 7 \cdot 10^{-9}$
16.5	0.5	176	$\sim 5 \cdot 10^{-9}$
16.5	0.25	139	$\sim 3 \cdot 10^{-9}$

Tab. 7.7: Valeurs de la pression p atteinte avec le moteur pas-à-pas en fonctionnement continu à la fréquence de rotation f_{turb} , avec un courant d'alimentation I et à la température T .

Avec le moteur à l'intérieur du système à vide, nous avons procédé à un étuvage du système à vide et du moteur. Pour commencer, nous avons réalisé un dégazage important du moteur en le faisant tourner (fréquence de rotation de $f_{\text{turb}} = 16.5 \text{ Hz}$) à une température élevée de $T \simeq 290^\circ\text{C}$ en élevant le courant d'alimentation des bobinages du moteur à $I \simeq 1.2 \text{ A}$ pendant ~ 1.5 jours. Ensuite, nous avons étuvé le système à vide à une température de $T \simeq 145^\circ\text{C}$ tout en maintenant la température du moteur en fonctionnement continu à $T \simeq 230^\circ\text{C}$ à la fréquence de rotation de $f_{\text{turb}} = 16.5 \text{ Hz}$. Après un long étuvage de ~ 4 semaines, nous avons atteint une pression $p < 4 \cdot 10^{-10} \text{ mbar}$ lorsque le moteur est à l'arrêt. En fonctionnement continu sur une courte période d'environ une journée, nous avons atteint les pressions résumées dans le tableau Tab. 7.7, pour une fréquence de rotation f , un courant d'alimentation I et une température T du moteur. Les pressions que nous avons obtenues sont relativement basses si l'on prend en compte la température élevée que le moteur atteint en fonctionnement continu. Pour une fréquence de rotation de $f_{\text{turb}} = 16.5 \text{ Hz}$ qui est proche de celle qui sera utilisée dans l'étalon, la pression s'élève à $p \simeq 3 \cdot 10^{-9} \text{ mbar}$. On constate donc que la rotation continue de ce moteur ne nous empêche pas d'atteindre une pression qui est suffisamment basse pour permettre la production d'atomes froids ($p \sim 1 \cdot 10^{-8} \text{ mbar}$).

Cependant, durant cet étuvage, nous avons rencontré des difficultés à démarrer le moteur et à le faire tourner de manière continue sous un vide élevé. Assez souvent, le moteur se bloquait après avoir démarré ou ne démarrait pas au premier essai sans que l'on en connaisse véritablement la raison. Il est possible que suivant la position que le rotor atteint à l'arrêt, il soit plus difficile de le démarrer, mais le fait qu'il se bloque après un certain temps sans raison apparente n'est pas très clair. Toutefois, après quelques essais de démarrage

infructueux dans le pire des cas, il tourne en général sans problème pendant plusieurs jours sous un vide qui est compatible avec la production d'atomes froids.

Tests de rotation longue durée

Vu les difficultés rencontrées lors des premiers tests de rotation du moteur sous vide, et afin de solliciter au minimum les paliers du moteur, nous avons essayé d'équilibrer l'ensemble moteur + turbine prototype (cf. paragraphe équilibrage de la turbine sous vide). Une fois ceci réalisé, nous avons procédé à un test de rotation de longue durée du moteur avec la turbine prototype en aluminium sans les pales. Ce test s'est déroulé sur une durée de presque 4 mois. Le moteur était alimenté avec un courant de $I = 0.25$ A et sa température stationnaire était de $T \simeq 135^\circ\text{C}$ pour une fréquence de rotation de $f_{\text{turb}} = 16.5$ Hz. Il faut noter que nous n'avons pas rencontré les mêmes difficultés pour démarrer le moteur que dans le premier test. En général, il démarrait au premier essai et il ne se bloquait pas en cours de fonctionnement. Mentionnons que nous avons eu quelques problèmes de stabilité du courant de la pompe ionique pendant ces tests. En effet, après avoir démarré le moteur, le courant restait constant un certain temps (typiquement quelques jours) puis commençait à fluctuer de manière erratique. Nous avons vérifié que ces fluctuations n'avaient rien à voir avec le fait que le moteur tourne ou ne tourne pas. Pour supprimer ces fluctuations, il était nécessaire d'arrêter la pompe et de nettoyer le connecteur puis de le remettre. Une fois cette opération effectuée, le courant de la pompe redevenait calme. Pour cette raison, le moteur n'a pas tourné de manière continue sans interruption pendant toute la durée du test. Si l'on additionne le nombre d'heures pendant lesquels le moteur a tourné à la fréquence de rotation constante de $f_{\text{turb}} = 16.5$ Hz pendant la durée du test, on arrive à une valeur de 2330 heures ce qui représente 97 jours ou encore 3 mois et 1 semaine. Comme nous l'avons dit, nous n'avons pas constaté de blocage durant la rotation. La plus longue période durant laquelle nous l'avons laissé tourner sans l'arrêter est de 20 jours. La pression s'est maintenue à $\sim 7 \cdot 10^{-9}$ mbar pendant ce laps de temps avec quelques remontées temporaires jusqu'à $\sim 4 \cdot 10^{-8}$ mbar. A la fin de ce test, il a fonctionné pendant 15 jours sans arrêt et la pression est restée inférieure à $5 \cdot 10^{-9}$ mbar durant les quatre derniers jours. Les résultats de ce test se sont donc avérés concluants. Dans le sens qu'il est possible de faire tourner la turbine prototype sans les pales à une fréquence de rotation constante de $f_{\text{turb}} = 16.5$ Hz pendant plusieurs semaines tout en maintenant une pression relativement basse qui est compatible avec la production d'atomes froids par la technique de la mélasse optique.

Équilibrage sous vide de l'ensemble rotor + turbine

Les paliers (roulements à billes) du moteur sont un élément important en ce qui concerne sa durée de vie sous vide, en particulier pour un fonctionnement en rotation continue de longue durée. Si ces derniers sont endommagés, par une usure précoce par exemple, cela peut se traduire par un mauvais fonctionnement du moteur voire son blocage. Dans ce cas, une ouverture du résonateur de l'étalon pour le réparer ou le changer serait nécessaire, ce qui immobiliserait la fontaine pour une durée importante. Comme nous aimerions que le moteur puisse tourner pendant 3 ans au minimum avant qu'il soit nécessaire de procéder à son renouvellement, il faut veiller à ne pas solliciter de manière trop importante les paliers. C'est pourquoi, afin de limiter l'usure des paliers et d'augmenter leur durée de vie au maximum, il est nécessaire de bien équilibrer la charge en rotation.

Nous avons donc essayé de réaliser un équilibrage de l'ensemble rotor + turbine. Pour cela, nous mesurons les vibrations du moteur à l'aide d'un accéléromètre (Brüel & Kjaer type 4374) placés sur le support du moteur à mi-distance des deux paliers inférieurs et supérieurs. Le moteur étant placé verticalement comme il sera monté dans l'étalon. Afin d'avoir une sensibilité élevée aux vibrations radiales du moteur, nous avons tenté de le suspendre de façon à ne pas entraver ses mouvements dans un plan transversal. Dans ce but, nous avons fabriqué un support pour le moteur avec une sorte de charnière en son milieu qui autorise les mouvements transversaux du corps du moteur selon un axe comme le montre le schéma de la Fig. 7.31. Le support est un tube en aluminium fendu sur les deux tiers de sa longueur pour obtenir deux bras. Un des bras est affaibli à une certaine hauteur afin de réaliser cette sorte de charnière. Pour que l'on ait véritablement une charnière, nous avons dû sectionner le bras et le remplacer sur une longueur de ~ 5 mm par une lame en acier ressort d'une épaisseur de 0.1 mm. Le moteur est alors fixé à l'extrémité inférieure du bras mobile. Pour que l'axe de rotation du moteur reste bien vertical, nous avons placé un contrepoids sur le bras mobile à l'opposé du moteur. On obtient en fait une sorte de pendule dont la masse est celle de l'ensemble moteur + turbine. Nous avons vérifié qu'en position verticale, moteur suspendu, l'ensemble moteur + turbine effectuait bien des oscillations régulières dans un plan vertical s'il était excité. Le support articulé sur lequel est monté l'ensemble moteur + turbine vient fixé sur la bride de fermeture de l'enceinte à vide comme l'illustre la Fig. 7.32. On peut voir sur cette figure l'accéléromètre fixé sur le bras mobile. Le montage expérimental pour ces tests d'équilibrage est à peu près le même que celui utilisé pour les tests de rotation sous vide du moteur. Le système à vide est monté sur des amortisseurs afin de l'isoler le plus possible des vibrations extérieures.

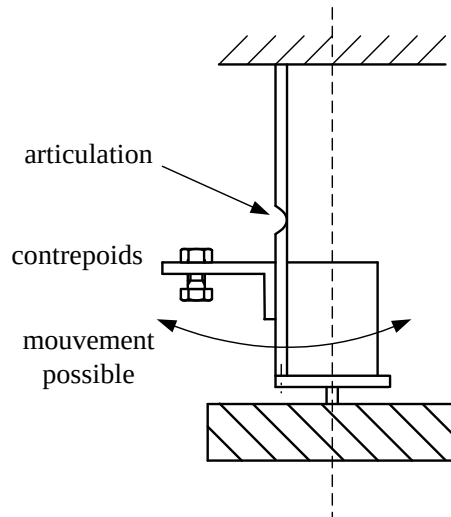


Fig. 7.31: Schéma du principe du support articulé construit pour équilibrer la turbine en rotation.

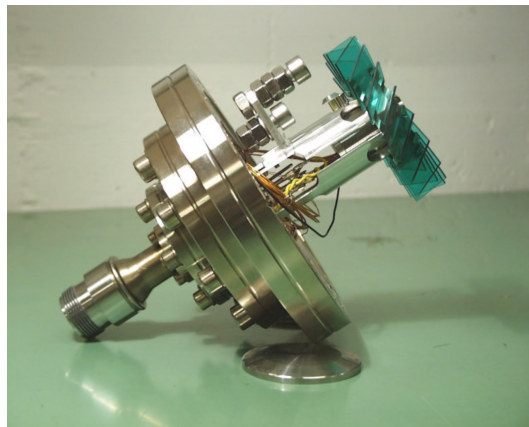


Fig. 7.32: Support articulé pour l'équilibrage de la turbine monté sur le bride de fermeture du système à vide. Outre la turbine, on peut voir l'accéléromètre sur le bras articulé et le moteur à l'intérieur du tube ainsi que le contrepoids.

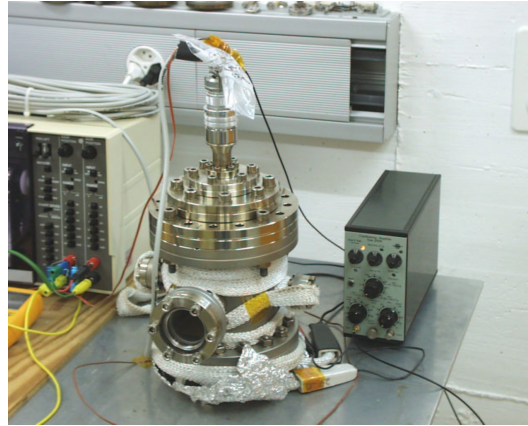


Fig. 7.33: Enceinte à vide utilisée pour les tests d'équilibrage. Le hublot permet d'avoir un contrôle visuel de la turbine en rotation.

L'équilibrage a été réalisé au sous-sol du bâtiment afin de profiter d'une dalle plus stable et d'un environnement moins bruyant aux niveau des vibrations. La Fig. 7.33 montre une vue de l'enceinte à vide où se trouve le moteur et la turbine. Le but de l'équilibrage est de minimiser les vibrations du moteur à la fréquence de rotation qui sera utilisée dans l'étalon, soit autour de $f_{\text{turb}} = 16.5 \text{ Hz}$. Idéalement, il s'agit de réduire les vibrations de l'ensemble rotor + turbine à un niveau tel que leur amplitude au niveau des paliers soit inférieure au jeu des roulement à billes. Dans ce cas, les paliers ne seraient pas sollicités car il n'y aurait pas de contact entre la partie interne du roulement à bille, fixée au rotor et sa partie externe liée au corps du moteur. Si cette situation était réalisée, on ne mesurerait aucune vibration du corps du moteur. En réalité, il est impossible de réaliser une telle situation, mais on peut s'en approcher en essayant de réduire les vibrations du moteur avec la turbine au niveau de ce qu'elles sont lorsque le moteur tourne sans charge.

Le principe de l'équilibrage est de faire tourner l'ensemble rotor + turbine à cette fréquence de rotation et d'analyser le spectre du signal des accéléromètres qui en résulte. Il s'agit alors de minimiser son contenu à la fréquence de rotation f_{turb} en plaçant au bon endroit de petites masses sur le corps métallique de la turbine (cf. Fig. 7.28). Pour se mettre dans les conditions les plus proches de celles dans lesquelles la turbine tournera, nous réalisons cet équilibrage sous vide comme nous l'avons déjà mentionné. Ceci veut dire que chaque essai d'une configuration d'équilibrage implique l'ouverture de l'enceinte à vide pour en extraire le moteur, la modification de la disposition des masses sur le corps de la turbine, la fermeture de l'enceinte, sa remise à niveau et son pompage. Cette opération prend donc du temps, de plus il est en général nécessaire d'attendre suffisamment longtemps pour que le

régime transitoire d'oscillations disparaisse et que l'on atteigne un régime stable. Ceci implique également que la température du moteur se stabilise, ce qui est long, car le spectre des vibrations varie passablement avec sa température. Ajoutons encore que malgré les amortisseurs, le système n'est pas totalement isolé des vibrations extérieures et qu'il faut souvent attendre l'atténuation d'une excitation parasite des vibrations. On comprend bien dès lors que l'équilibrage de l'ensemble rotor + turbine est un travail relativement long.

Dans un premier temps, lors de l'équilibrage de la turbine prototype, nous avons tenté de déterminer la position angulaire du balourd de la turbine pour pouvoir ainsi le corriger plus facilement. Pour cela, nous avons réalisé un système optique qui permet d'obtenir un signal qui repère la position angulaire de la turbine. Il est constitué d'un faisceau laser dirigé à travers un hublot dans l'enceinte à vide. Ce faisceau se réfécit sur une petite surface de papier d'aluminium collée sur le pourtour du corps métallique de la turbine. Le faisceau réfécit est ensuite dirigé sur un photodétecteur qui fournit un signal périodique, lorsque la turbine tourne, à la fréquence de rotation. Ce signal est utilisé comme référence dans un lock-in pour démoduler le signal des accéléromètres à la fréquence de rotation f_{turb} . De la position du maximum de l'amplitude de vibration, il est en principe possible de déterminer la position angulaire du balourd résultant. Comme la fréquence propre d'oscillation de l'ensemble moteur + turbine est petite ($f_0^T \simeq 2.5 \text{ Hz}$) par rapport à la fréquence d'excitation f_{turb} , nous nous approchons de la situation où la réponse du système est en opposition de phase avec l'excitation. Ainsi, la direction du balourd devrait être à l'opposé de la position du maximum d'amplitude. En théorie, il devrait ainsi être possible de déterminer la position du balourd et de le corriger pour une fréquence de rotation donnée. En pratique, il en va autrement et la localisation de la position du balourd n'est pas aussi simple. Nous avons appliqué un balourd sur la turbine de masse et de position (radiale et angulaire) connues et on a essayé de le localiser avec cette méthode. En effectuant des mesures dans les deux sens de rotation, il est possible d'éliminer le déphasage électronique qui n'est pas connu et d'obtenir la position angulaire du balourd. En répétant ce test pour différents balourds, les résultats obtenus n'étaient pas vraiment concluants. Pour quelques balourds, la position déterminée expérimentalement correspondait bien avec la position réelle, mais pour la plupart ce n'était pas du tout le cas. Si la phase du signal à la fréquence de rotation n'était pas clairement définie, son amplitude correspondait par contre très bien avec celle mesurée à l'aide d'un analyseur de spectre à cette fréquence. Nous avons quand même tenté d'équilibrer la turbine avec cette méthode en appliquant une correction de masse à l'opposé de la position de l'amplitude de vibration maximale. La situation en général ne

s'améliorait pas et au bout de quelques itérations elle avait même tendance à empirer. Il est clair qu'il est difficile de placer des masses sur les quatre points équidistants de la turbine de façon que la résultante se situe dans une direction bien précise, ce qui peut avoir comme effet d'empirer la situation au lieu de l'améliorer. Ceci constaté, et le fait que l'on arrive pas à déterminer sans équivoque la position du balourd, rend cette méthode peu applicable en pratique. Nous nous sommes alors contenté d'effectuer l'équilibrage uniquement en nous basant sur l'amplitude du signal des accéléromètres à la fréquence de rotation.

Dans ce cas, on procède par tâtonnement en déplaçant une petite masse sur chacune des quatre positions prévues sur la turbine. En mesurant le spectre du signal des accéléromètres avec un analyseur de spectre, on cherche laquelle des quatre positions améliore la situation au niveau des vibrations, c.-à-d. diminue le contenu du spectre à la fréquence de rotation f_{turb} . Ensuite, on recommence cette opération et on arrive, par itérations successives, à une configuration où toute modification supplémentaire a plutôt tendance à dégrader la situation. Cette configuration d'équilibrage représente la meilleure situation que l'on puisse réaliser avec une méthode aussi simple et des incréments de masse donnés.

Nous donnons les valeurs mesurées relatives à l'équilibrage de la version finale de la turbine avec les pales. Cette version étant quelque peu modifiée par rapport à la version prototype, il n'était plus possible de placer l'accéléromètre supérieur sur le corps du moteur par manque de place. La modification du support pour permettre son logement aurait pris trop de temps, nous nous sommes contenté du seul accéléromètre inférieur. De toute façon, les mesures effectuées sur la turbine prototype ont montrés que les valeurs des deux accéléromètres étaient très proche les unes des autres. L'accéléromètre utilisé est un accéléromètre piézoélectrique Brüel & Kjaer type 4374 dont la sensibilité est de 0.154 pC/ms^{-2} et l'amplificateur est un amplificateur analogique Brüel & Kjaer type 2626 dont la bande passante a été fixée entre 1 Hz-300 Hz et qui donne une tension de sortie de 10 mV/g. Pour faire le vide dans l'enceinte, nous utilisons un groupe *Varian* (pompe à palette sèche + pompe turbomoléculaire) qui nous permet d'atteindre une pression de $p \simeq 1 \cdot 10^{-3} \text{ mbar}$ dans un laps de temps raisonnable. Nous donnons dans le Tab. 7.8 le résultat des mesures qui ont été faites à la fréquence de rotation $f_{\text{turb}} = 16.5 \text{ Hz}$ avec le moteur sans la turbine alimenté avec un courant $I = 0.25 \text{ A}$. Nous avons mesuré le niveau de vibration lorsque le moteur et la pompe sont à l'arrêt ou en fonctionnement. Il s'avère que les vibrations de l'environnement et de la pompe en marche ne sont pas gênantes pour mesurer les vibrations du moteur seul puisque l'on peut nettement distinguer ces vibrations du bruit de fond (rapport $S/N \simeq 4$). On peut donc réaliser

<i>Désignation</i>	<i>P.S.D.</i> $/\mu V_{\text{rms}} \text{ Hz}^{-1/2}$	<i>Spectre</i> $/\mu V_{\text{rms}}$
<i>Pompe à l'arrêt :</i>		
Moteur à l'arrêt	~ 1	~ 17
Moteur en marche (rot. +)		~ 55
Moteur en marche (rot. -)		~ 55
<i>Pompe en marche :</i>		
Moteur à l'arrêt	~ 1	~ 17
Moteur en marche (rot. +)		~ 70
Moteur en marche (rot. -)		~ 60

Tab. 7.8: Mesures du niveau de vibration du moteur, sans la turbine, avec et sans la pompe en marche. La valeur du spectre est donnée à la fréquence de rotation du moteur $f_{\text{turb}} = 16.5 \text{ Hz}$.

l'équilibrage et s'approcher du niveau de vibration du moteur seul avec la pompe en fonctionnement. Le Tab. 7.9 résume la position et l'importance des principales résonances observées autour de la fréquence de rotation nominale. La résonance à $f = 2.56 \text{ Hz}$ correspond aux oscillations propres du moteur suspendu au support articulé.

Nous avons essayé d'équilibrer l'ensemble rotor + turbine pour la fréquence de rotation nominale $f_{\text{turb}} = 16.5 \text{ Hz}$ suivant la procédure décrite précédemment. Pour les mesures, nous réglons le courant d'alimentation du moteur au minimum tel qu'il puisse démarrer dans les deux sens de rotation sans problème avec l'enclenchement de la fonction boost 2 de l'alimentation $SAM\alpha - SE$ et avec la rampe d'accélération minimale de 2500 Hz/s . Les masses appliquées sur le corps de la turbine dans les quatre emplacements prévus à cet effet sont des rondelles métalliques de masse $m_{\text{rond}} = 33.3 \text{ mg}$. Elles sont fixées à l'aide de vis ($m_{\text{vis}} = 184.5 \text{ mg}$), c.-à-d. qu'on a quatre vis en permanence et on ajoute ou on soustrait un certain nombre de rondelles dans chacune des quatre positions. Après un certain nombre d'itérations, on est parvenu à une situation satisfaisante où l'importance des vibrations à la fréquence de rotation nominale est comparable à celle mesurée sur le moteur sans la turbine.

Le Tab. 7.10 donne les valeurs mesurées avant et après équilibrage². Nous

²Nous avons constaté durant la phase de détermination du courant d'alimentation minimum du moteur que le niveau de vibration à la fréquence de rotation nominale varie avec la valeur du courant. Il a plutôt tendance à diminuer avec le courant jusqu'à une certaine valeur à partir de laquelle il devient asymétrique avec le sens de rotation. Dans le sens -

<i>fréquence f</i> <i>/ Hz</i>	<i>Spectre</i> <i>/ μV_{rms}</i>
<i>Moteur à l'arrêt, pompe en marche :</i>	
2.56	~ 15
18.55	~ 6.5
24.65	81
37.10	5.5
<i>Moteur en marche, pompe à l'arrêt :</i>	
6.34	~ 220
10.00	~ 640
19.89	~ 130
29.90	~ 320
<i>Moteur en marche, pompe en marche :</i>	
6.34	~ 220
10.00	~ 650
19.89	~ 160
29.90	~ 320

Tab. 7.9: Position et amplitude des principales résonances observées avec le moteur sans la turbine.

<i>Désignation</i>	<i>Température</i> <i>T / °C</i>	<i>Spectre</i> <i>/ μV_{rms}</i>
<i>Avant équilibrage :</i>		
Moteur rot. +	149	~ 130
Moteur rot. –	149	~ 990
<i>Après équilibrage :</i>		
Moteur rot. +	162	~ 70
Moteur rot. –	162	~ 930

Tab. 7.10: Mesures du niveau de vibration du moteur, avec la turbine, avant et après équilibrage. La valeur du spectre est donnée à la fréquence de rotation nominale du moteur $f_{\text{turb}} = 16.5$ Hz. La température T indiquée est celle du moteur au moment où les mesures ont été faites.

<i>fréquence f</i>	<i>Spectre</i>
<i>/ Hz</i>	<i>/μV_{rms}</i>
<i>Moteur rot. + :</i>	
3.29	~ 430
9.95	~ 420
19.95	~ 1500
32.84	~ 90
<i>Moteur rot. - :</i>	
9.95	~ 500
19.95	~ 600
32.84	~ 120

Tab. 7.11: Position et amplitude des principales résonances observées avec le moteur et la turbine autour de la fréquence de rotation nominale $f_{\text{turb}} = 16.5 \text{ Hz}$ et à la température stationnaire du moteur de $T = 162^\circ\text{C}$.

avons répété ces mesures plusieurs fois après arrêt du moteur et remise à niveau de la table supportant l'enceinte à vide, les valeurs moyennes mesurées sont bien reproductibles si elles sont comparées à la même température du moteur. La température stationnaire du moteur, atteinte en rotation continue à la fréquence nominale, se monte à $T = 162^\circ\text{C}$ avec le courant d'alimentation minimum et sous une pression de l'ordre de $p \simeq 1 \cdot 10^{-3} \text{ mbar}$. Les principales résonances observées autour de la fréquence de rotation nominale une fois l'équilibrage réalisé sont résumées dans le Tab. 7.11. Nous avons en fait observé une oscillation lente de l'ensemble moteur + turbine après un certain temps de fonctionnement du moteur, qui pourrait être la résonance à $f = 3.29 \text{ Hz}$, dont l'amplitude peut être estimée à $\sim 1 \text{ mm}$. Cette résonance a disparu après arrêt du moteur et redémarrage à une température de $T = 64^\circ\text{C}$. Elle n'est pas réapparue à une température plus élevée ($T = 90^\circ\text{C}$) et pourrait peut être provenir d'un environnement momentanément bruyant.

Estimation de l'amplitude des vibrations à la fréquence de rotation nominale :

On peut tenter d'estimer l'ordre de grandeur de l'amplitude des vibrations de l'ensemble rotor + turbine à la fréquence de rotation nominale. En consi-

le niveau est nettement plus élevé que dans le sens +. Comme le sens de rotation qui sera utilisé dans l'étalon est le sens +, ce phénomène va dans le bon sens.

dérant les oscillations radiales selon un axe de l'ensemble rotor + turbine dues à un balourd donné, l'amplitude maximale des oscillations est donnée par l'expression suivante dans le cas où l'on suppose que le rotor ne vient pas en contact avec le corps du palier (amplitude de vibration inférieure au jeu des roulements à billes) :

$$x_{\max}^R = \frac{mr}{M_R} \quad (7.38)$$

où mr est le balourd responsable des oscillations et M_R la masse de l'ensemble rotor + turbine. Dans le cas contraire (amplitude de vibration supérieure au jeu des roulements à billes), elle s'exprime par :

$$x_{\max}^T = \frac{\omega_{\text{turb}}^2}{\omega_{\text{turb}}^2 - \omega_0^2} \cdot \frac{mr}{M_T} \quad (7.39)$$

avec ω_0^T la fréquence angulaire propre d'oscillation de l'ensemble moteur + turbine suspendu au support articulé et ω_{turb} la fréquence angulaire de rotation nominale. Comme on a $\omega^2 \gg \omega_0^2$, le rapport des fréquences vaut ~ 1 . M_T est la masse totale oscillant (moteur + turbine + bras articulé). L'accélération correspondante à cette amplitude maximale vaut :

$$a_{\max}^{R,T} = \omega_{\text{turb}}^2 x_{\max}^{R,T} \quad (7.40)$$

La tension délivrée par l'accéléromètre, en μV_{rms} , est reliée à l'accélération $a_{\max}^{R,T}$ par la relation :

$$S_{\text{acc}}^{R,T} = 10^3 a_{\max}^{R,T} \quad (7.41)$$

où $a_{\max}^{R,T}$ est exprimé en m/s.

On a estimé le balourd résultant de la dispersion des masses des plaquettes de verre constituant les pales et de leur disposition, on obtient une valeur de $mr = 0.19 \text{ g mm}$. On peut également évaluer le balourd créé par une petite masse placée sur l'une des quatre positions d'équilibrage (rayon $r = 18 \text{ mm}$) sur le corps de la turbine. Nous avons évalué l'amplitude des vibrations et le signal délivré par l'accéléromètre pour différentes valeurs d'un balourd placé sur la turbine. Nous comparons, dans le Tab. 7.12, les valeurs calculées du signal de l'accéléromètre avec les mesures effectuées sur la turbine pour différents balourds. On remarque déjà que le niveau de vibration engendré par le balourd dû aux pales est très faible ($\sim 36 \mu V$) puisqu'il est environ la moitié de celui qui subsiste pour le moteur seul ($\sim 70 \mu V_{\text{rms}}$). Si on additionne ces deux niveaux de vibration, on arrive à l'ordre de grandeur du niveau mesuré avant équilibrage. On constate que pour un balourd $mr \lesssim 0.60 \text{ g mm}$, l'amplitude de vibration est inférieure à l'ordre de grandeur du jeu des paliers qui peut être estimé à $\sim 10 \mu m$ pour des roulements à billes de ce diamètre.

<i>Balourd</i>	<i>mr</i> /g mm	$x_{\max}^{\text{R,T}}$ /μm	$S_{\text{acc}}^{\text{R,T}}$ <i>calculé</i> /μV	S_{acc} <i>mesuré</i> /μV _{rms}
<i>Amplitude < jeu paliers :</i>				
Pales turbine	0.19	3.4	36	
1 rondelle	0.60	10.7	120	~ 70
1 vis	3.32	59.3	637	~ 210
1 vis + 1 rondelle	3.92	70.0	752	~ 200
1 vis + 2 rondelles	4.52	80.7	867	~ 220
1 vis + 3 rondelles	5.12	91.4	982	~ 290
1 vis + 4 rondelles	5.72	102.1	1058	~ 400
<i>Amplitude > jeu paliers :</i>				
Pales turbine	0.19	1.4	15	
1 rondelle	0.60	4.2	45	~ 70
1 vis	3.32	23.5	252	~ 210
1 vis + 1 rondelle	3.92	27.8	298	~ 200
1 vis + 2 rondelles	4.52	32.0	344	~ 220
1 vis + 3 rondelles	5.12	36.3	390	~ 290
1 vis + 4 rondelles	5.72	40.6	420	~ 400

Tab. 7.12: Comparaison des valeurs estimées du signal de l'accéléromètre (S_{acc} calculé) avec les valeurs mesurées (S_{acc} mesuré) pour différentes valeurs d'un balourd. mr est la grandeur du balourd et $x_{\max}$ est l'amplitude de vibration estimée. Toutes ces valeurs sont données à la fréquence de rotation nominale du moteur $f_{\text{turb}} = 16.5 \text{ Hz}$.

Par contre, pour des valeurs du balourd $mr > 0.60$ g mm, l'amplitude des vibrations est supérieure au jeu des paliers. Ce fait semble également confirmé par les mesures effectuées. En effet, elles sont en relatif bon accord avec les valeurs évaluées pour des balourds $mr > 0.60$ g mm dans l'hypothèse d'une amplitude de vibration supérieure au jeu des paliers et en total désaccord dans l'hypothèse d'une amplitude de vibration inférieure au jeu des paliers. Ceci semble donc indiquer que l'amplitude des vibrations, à la fréquence de rotation nominale $f_{\text{turb}} = 16.5$ Hz, après équilibrage est de l'ordre de grandeur du jeu des roulements à billes. Elle l'est probablement aussi dans le cas de la rotation du moteur sans charge puisque le niveau de vibration mesuré est assez semblable.

Il apparaît ainsi que nous avons atteint en gros les buts que nous nous étions fixés. A savoir limiter l'amplitude des vibrations du rotor au jeu des roulements à billes de manière à ne pas trop les solliciter pour diminuer leur usure et augmenter leur durée de vie. Il faut toutefois noter que ces résultats ne sont peut être pas transposable sans autre dans la situation où viendra monter la trappe à lumière rotative. En effet, la fixation du moteur sur le support dans l'étalon est différente de celle utilisée pour les tests, en particulier la dissipation de la chaleur sera plus efficace, ce qui résultera en une température stationnaire du moteur probablement plus basse que celle mesurée pendant les tests. Or, nous avons remarqué que le niveau de vibration dépend passablement de la température du moteur, il a plutôt tendance à se stabiliser à la baisse avec l'augmentation de la température. La fixation du moteur dans l'étalon sera rigide, ce qui pourrait modifier le niveau des vibrations, en particulier si les oscillations lentes que l'on a parfois observées se manifestent. De plus, les niveaux de vibration fluctuent en général, nous avons mesuré des moyennes, et ne sont pas toujours bien reproductibles. Tout ceci concourt à être prudent avec les éventuelles conclusions que l'on pourrait tirer concernant les vibrations du moteur en fonctionnement continu dans l'étalon. Toutefois, nous avons essayé de faire le mieux possible pour limiter ces vibrations à un niveau supportable pour les paliers du moteur.

7.4 Déplacement Zeeman du 2^{ème} ordre

7.4.1 Introduction

Comme il est impossible de réaliser pratiquement une situation de champ magnétique parfaitement nul dans tout le volume du résonateur, un champ magnétique statique (*champ C*) est créé pour séparer les sous-niveaux Zeeman de l'état fondamental de l'atome de césium et définir un axe de quan-

tification. Dans la fontaine continue, l'intensité et la direction du champ magnétique sur toute la trajectoire parabolique des atomes joue un rôle important pour le jet atomique lui-même (température, direction de lancement, densité, etc.) et pour l'étalon (position et contraste des franges de Ramsey, forme de l'enveloppe des franges Zeeman, etc.).

Idéalement, les atomes devraient se trouver dans un champ magnétique nul dans la source et faible ($\sim 0.1 \mu\text{T}$), mais très homogène, dans la zone de vol libre entre les deux zones d'interaction micro-onde. À cette fin, trois blindages cylindriques entourent le résonateur (cf. section 2.2), et un quatrième entoure le résonateur ainsi que la source. Le champ statique est généré par un solénoïde placé à l'intérieur de premier blindage. Cependant, malgré l'attention portée à la conception des blindages, des champs résiduels dus au champ magnétique terrestre sont inévitables. La combinaison de leurs inhomogénéités longitudinales avec la distribution de vitesse des atomes du jet peut engendrer principalement deux effets sur les franges de Ramsey des transitions Zeeman dépendant linéairement du champ. Premièrement, déplacer la frange centrale par rapport à l'enveloppe des franges et ensuite réduire le contraste et la symétrie de l'enveloppe. Le premier effet rend difficile l'identification de la frange centrale et par suite l'évaluation correcte du déplacement Zeeman de la transition d'horloge ainsi que son incertitude. Un modèle théorique simple a été développé pour permettre de quantifier cette incertitude, ou de la garder à un niveau négligeable, en déterminant le champ résiduel le long des trajectoires atomiques à partir de la mesure expérimentale du contraste et de l'asymétrie de l'enveloppe des franges des transitions Zeeman.

Nous décrivons (sous-section 7.4.2) le modèle théorique développé pour calculer la forme des franges de Ramsey des transitions dépendant linéairement du champ et nous explicitons ensuite (sous-section 7.4.3) la méthode utilisée pour déterminer les paramètres du champ résiduel et l'appliquons au cas de la fontaine continue. Puis, nous déterminons (sous-section 7.4.4) la position effective de la frange centrale et enfin nous discutons (sous-section 7.4.5) de l'incertitude relative du déplacement Zeeman de la transition d'horloge.

Appliqué à la fontaine continue après une compensation minutieuse du champ magnétique autour de l'apogée, le modèle a montré que le champ à l'apogée moyen est $\lesssim 0.1 \text{ nT}$ et son gradient $\lesssim 2 \text{ nT/m}$. Ce faible champ résiduel conduit encore à un déplacement de $\sim 3 \text{ Hz}$ (~ 1.5 franges) entre la frange centrale et la frange dont le contraste est maximal sur la première transition Zeeman. Cette valeur correspond à une incertitude relative de l'ordre de $3 \cdot 10^{-16}$ sur le déplacement Zeeman du 2^{ème} ordre, ce qui n'est pas encore complètement négligeable dans le budget d'incertitude. Un effort supplémentaire est donc nécessaire afin de diminuer cette incertitude.

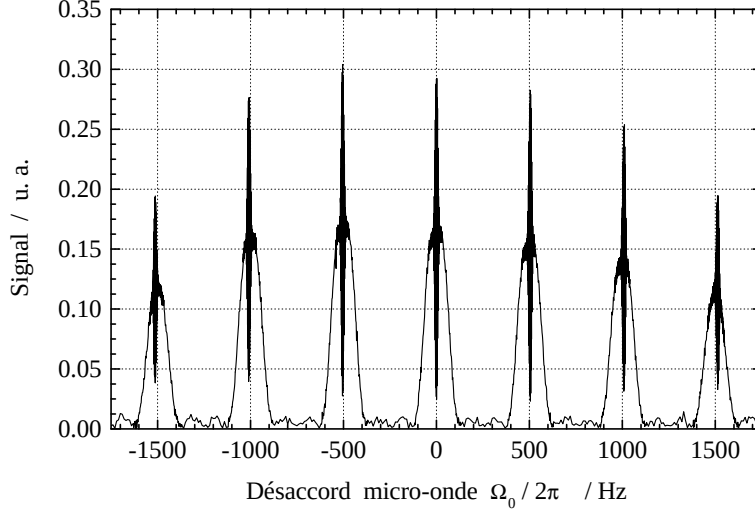


Fig. 7.34: Enregistrement des sept transitions micro-onde $|F = 3, m_F\rangle \leftrightarrow |F = 4, m_F\rangle$ effectué sur la fontaine continue. La séparation entre les transitions est de $\nu_Z = 500$ Hz.

7.4.2 Modèle théorique

Nous avons élaboré un modèle théorique, le plus simple possible, qui puisse permettre d'évaluer les paramètres du champ résiduel et de reproduire la forme des franges des transitions Zeeman dépendant linéairement du champ. La Fig. 7.34 montre un enregistrement des sept transitions micro-onde $|F = 3, m_F\rangle \leftrightarrow |F = 4, m_F\rangle$, effectué sur la fontaine continue dans la configuration sans trappe à lumière, après une compensation minutieuse du champ résiduel autour de l'apogée des trajectoires atomiques. Nous avons reporté le détail des six transitions dépendant linéairement du champ dans la Fig. 7.35 ($m_F = -3, -2, -1$) et la Fig. 7.36 ($m_F = +1, +2, +3$). Pour établir une forme du champ résiduel qui soit compatible avec les observations expérimentales, nous faisons les hypothèses suivantes :

- Nous supposons que le champ résiduel décroît depuis le sommet du résonateur avec une dépendance spatiale selon l'axe z qui est exponentielle. Cette dépendance est justifiée par les ouvertures au sommet des blindages près de l'apogée des trajectoires atomiques.
- De l'asymétrie des franges Zeeman, on peut voir que la valeur du gradient du champ résiduel devrait être positive. Par conséquent, vu la remarque précédente, il en va de même pour la valeur du champ résiduel. La composante verticale du champ terrestre, qui "pénètre" par

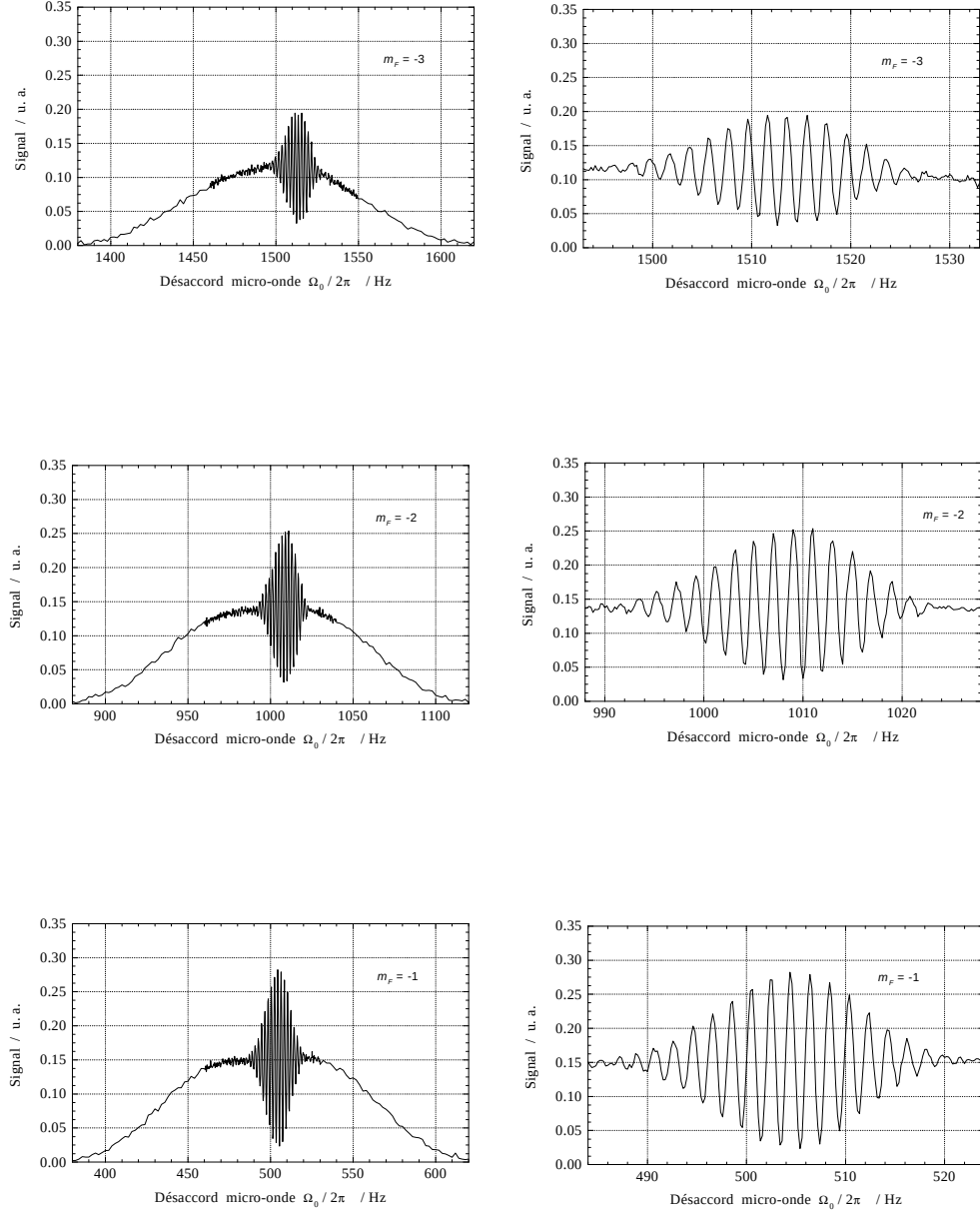


Fig. 7.35: Détail des trois transitions micro-onde $|F = 3, m_F\rangle \Leftrightarrow |F = 4, m_F\rangle$ pour lesquelles m_F est négatif.

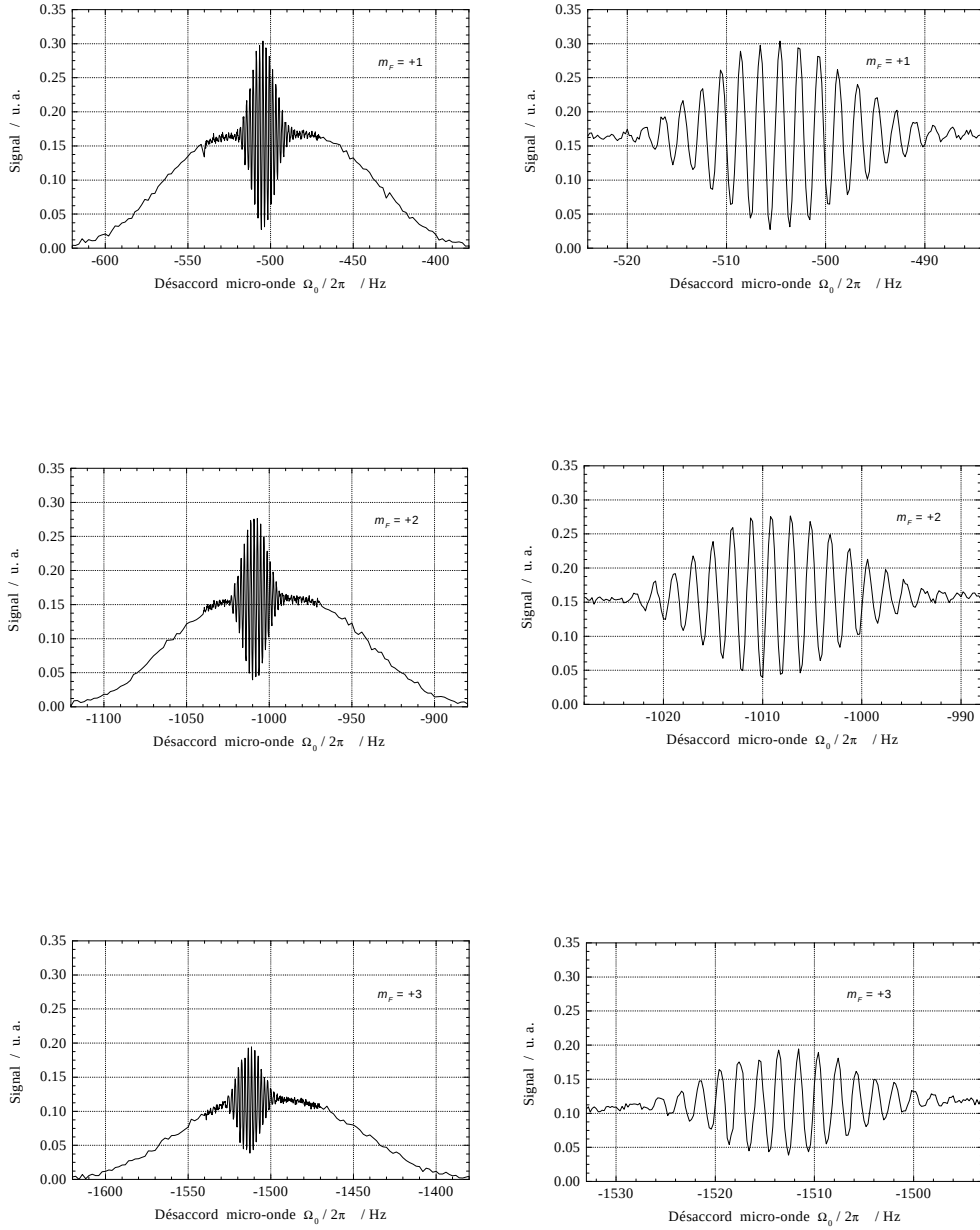


Fig. 7.36: Détail des trois transitions micro-onde $|F = 3, m_F\rangle \leftrightarrow |F = 4, m_F\rangle$ pour lesquelles m_F est positif.

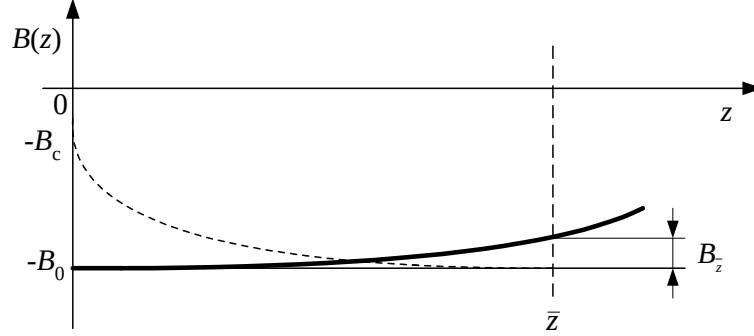


Fig. 7.37: Schéma du champ magnétique statique $B(z)$ supposé régner dans le résonateur. B_0 est le champ constant créé par le solénoïde à l'intérieur des blindages. B_c est le champ dans la cavité et B_z est le champ résiduel à l'apogée moyen $\bar{z}$.

les ouvertures pratiquées au haut des blindages, peut être considérée comme négative (dirigée de haut en bas) par rapport à l'axe z et le champ C qui est créé dans la bobine aussi.

- Comme les atomes passent une partie importante de leur temps de vol autour de l'apogée de leur trajectoire parabolique, les inhomogénéités du champ près de la cavité micro-onde sont négligées. Toutefois, si ces inhomogénéités ont la même forme que celles du haut du résonateur (ce qui est vraisemblable), la valeur du champ C devrait être légèrement plus élevée que la valeur nécessaire pour produire une séparation des transitions Zeeman de $\nu_Z = 500 \text{ Hz}^3$.
- La valeur absolue du champ statique résultant devrait être plus élevée au sommet de la trajectoire parabolique qu'au niveau de la cavité. En effet, les franges Zeeman expérimentales sont déplacées sur le flanc du piedestal de Rabi qui est opposé à la transition d'horloge.

Ainsi que le montre la Fig. 7.37, le champ magnétique statique résultant dans le résonateur peut s'écrire sous la forme de la somme d'un champ constant

³Cette valeur de la fréquence Zeeman a été choisie par commodité pour les premières mesures. On peut montrer qu'il existe une valeur de cette fréquence qui permet de placer le cinquième minima du piedestal de Rabi des transitions voisines $m_F = \pm 1$ à l'endroit où se trouve la frange centrale de la transition d'horloge pour le jet actuel de la fontaine continue. Ceci permet de minimiser le tirage de la fréquence de la transition d'horloge par les transitions voisines (*Rabi pulling*).

B_0 et d'un champ résiduel $B_{\text{res}}(z)$:

$$B(z) = -B_0 + B_{\text{res}}(z) \quad (7.42)$$

Le champ B_0 (champ C) est créé par le solénoïde à l'intérieur des blindages. Sa valeur est ajustée de telle manière que le champ B_c dans la cavité micro-onde produise une séparation des transitions Zeeman de $\Delta\nu_Z = 500$ Hz. Vu les hypothèses faites au début, la valeur de B_0 est donc légèrement plus élevée que celle de B_c et la dépendance du champ résiduel est de la forme :

$$B_{\text{res}}(z) = B_{\bar{z}} e^{\gamma_z(z-\bar{z})} \quad (7.43)$$

$B_{\bar{z}}$ est la valeur du champ résiduel à l'apogée moyen du jet $\bar{z}$ et $\gamma_z > 0$ est le paramètre de décroissance du champ résiduel. Comme le champ magnétique dépend de z , il en va de même du désaccord Zeeman $\Omega_{m_F}(z)$ des transitions dépendant linéairement du champ :

$$\Omega_{m_F}(z) = \Omega - m_F \Omega_{Z_{\bar{z}}} e^{\gamma_z(z-\bar{z})} \quad (7.44)$$

où nous avons posé :

$$\Omega = \Omega_0 - m_F \Omega_{Z_0} \quad (7.45)$$

le désaccord autour d'une transition Zeeman $m_F \neq 0$. $\Omega_0 = \omega_{\text{RF}} - \omega_0$ est le désaccord micro-onde et Ω_{Z_i} ($i = 0$ et $\bar{z}$) la pulsation Zeeman définie par :

$$\Omega_{Z_i} = 2\pi K_Z B_i \quad (7.46)$$

K_Z est la constante Zeeman du 1^{er} ordre pour les transitions hyperfines $\Delta F = \pm 1$, $\Delta m_F = 0$ de l'atome de césium 133 (cf. annexe A). Nous pouvons alors calculer le déphasage accumulé par les atomes sur la durée T^* du temps de transit effectif au-dessus de la cavité. Connaissant la trajectoire horaire des atomes $z(t)$, il est donné pour la transition Zeeman m_F par :

$$\begin{aligned} \varphi_{m_F}(\Omega, T^*) &= \int_0^{T^*} \Omega_{m_F}(\Omega, z(t)) dt \\ &= \Omega T^* - m_F \Omega_{Z_{\bar{z}}} e^{-\beta \bar{T}^{*2}} \int_0^{z_{\text{max}}(T^*)} \frac{e^{\gamma_z z}}{\sqrt{z_{\text{max}}(T^*) - z}} dz \end{aligned} \quad (7.47)$$

où nous avons posé $\beta = \gamma_z g/8$. $\bar{T}^*$ est le temps de transit effectif moyen et $z_{\text{max}}(T^*)$ est l'altitude de l'apogée des trajectoires atomiques au-dessus de la cavité, qui est reliée au temps de transit effectif par la relation :

$$z_{\text{max}}(T^*) = \frac{1}{8} g T^{*2} \quad (7.48)$$

L'intégrale du second terme de l'équation (7.47) vaut :

$$\int_0^{z_{\max}(T^*)} \frac{e^{\gamma z z}}{\sqrt{z_{\max}(T^*) - z}} dz = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^{1/2} e^{\beta T^{*2}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\beta} T^* \right) \quad (7.49)$$

où la notation $\operatorname{erf}(x)$ désigne la fonction d'erreur. Là encore, puisque la distribution effective du temps de transit du jet est étroite, comme nous l'avons vu au chapitre 3, nous développons l'expression (7.47) du déphasage autour de $\bar{T}^*$. En ne conservant que les trois premiers termes du développement, on obtient :

$$\varphi_{m_F}(\Omega, T^*) = \eta_3 (T^* - \bar{T}^*)^3 + \eta_2 (T^* - \bar{T}^*)^2 + (\Omega + \eta_1) (T^* - \bar{T}^*) + \Omega \bar{T}^* + \eta_0 \quad (7.50)$$

avec les coefficients suivants :

$$\eta_3 = \frac{1}{6} m_F \Omega_{Z_{\bar{z}}} \kappa_3 \quad (7.51a)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2} m_F \Omega_{Z_{\bar{z}}} \kappa_2 \quad (7.51b)$$

$$\eta_1 = m_F \Omega_{Z_{\bar{z}}} \kappa_1 \quad (7.51c)$$

$$\eta_0 = m_F \Omega_{Z_{\bar{z}}} \kappa_0 \quad (7.51d)$$

L'expression des κ_i est donnée par :

$$\begin{aligned} \kappa_3 = & 4\beta \left(1 + \beta \bar{T}^{*2} \right) e^{-\beta \bar{T}^{*2}} + 2\pi^{1/2} \beta^{3/2} \bar{T}^* \left(3 + 2\beta \bar{T}^{*2} \right) \\ & \times \operatorname{erf} \left(\sqrt{\beta} \bar{T}^* \right) \end{aligned} \quad (7.52a)$$

$$\kappa_2 = 2\beta \bar{T}^* e^{-\beta \bar{T}^{*2}} + (\pi\beta)^{1/2} \left(1 + 2\beta \bar{T}^{*2} \right) \operatorname{erf} \left(\sqrt{\beta} \bar{T}^* \right) \quad (7.52b)$$

$$\kappa_1 = e^{-\beta \bar{T}^{*2}} + \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^{1/2} \beta \bar{T}^* \operatorname{erf} \left(\sqrt{\beta} \bar{T}^* \right) \quad (7.52c)$$

$$\kappa_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^{1/2} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\beta} \bar{T}^* \right) \quad (7.52d)$$

Comme la décroissance des franges de Ramsey est relativement rapide avec la température longitudinale typique ($T_l = 75 \mu\text{K}$) du jet de la fontaine continue, et que le champ résiduel est supposé petit, nous utilisons la relation

simplifiée de la forme (5.9) pour calculer l'enveloppe des franges des transitions Zeeman. Le signal à la sortie du résonateur de la transition Zeeman m_F peut ainsi s'écrire, dans l'approximation d'une distribution de temps de transit étroite :

$$I_{m_F}(\Omega) \simeq \frac{1}{2} I_0 \int_0^{+\infty} \rho(T) \left\{ 1 + \cos [\varphi_{m_F}(\Omega, T^*(T))] \right\} dT \quad (7.53)$$

$$\simeq \frac{1}{2} I_0 \left\{ 1 + C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha u^2} \cos [\eta_3 u^3 + \eta_2 u^2 + (\Omega + \eta_1)u + \Omega \bar{T}^* + \eta_0] du \right\}$$

où nous avons posé $\alpha = 1/2 T_{\text{rms}}^2$ et $C = \sqrt{\alpha/\pi}$. L'intégrale $\xi_{m_F}(\Omega)$ figurant dans la seconde ligne de l'équation (7.53) peut se développer suivant les puissances du paramètre de perturbation $\varepsilon_3 = \eta_3 T_{\text{rms}}^3$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \xi_{m_F}(\Omega) = & \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left\{ \frac{\varepsilon_3^{2n}}{(2n)!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha u^2} \cos [\eta_2 u^2 + (\Omega + \eta_1)u + \Omega \bar{T}^* + \eta_0] u^{6n} du \right. \\ & \left. - \frac{\varepsilon_3^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha u^2} \sin [\eta_2 u^2 + (\Omega + \eta_1)u + \Omega \bar{T}^* + \eta_0] u^{3(2n+1)} du \right\} \quad (7.54) \end{aligned}$$

En supposant que $\varepsilon_3 \ll 1$, c.-à-d. que l'asymétrie des franges Zeeman est faible, on ne garde que le 1^{er} terme ($n = 0$) du développement ci-dessus. Les deux intégrales qui figurent dans le 1^{er} terme peuvent se calculer analytiquement, on trouve les résultats suivants :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha u^2} \cos [\eta_2 u^2 + (\Omega + \eta_1)u + \Omega \bar{T}^* + \eta_0] du = \\ & = \frac{\pi^{1/2}}{(\alpha^2 + \eta_2^2)^{1/4}} e^{-\frac{(\Omega + \eta_1)^2 \alpha}{4(\alpha^2 + \eta_2^2)}} \cos(\Phi_{m_F}(\Omega)) \quad (7.55a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha u^2} \sin [\eta_2 u^2 + (\Omega + \eta_1)u + \Omega \bar{T}^* + \eta_0] u^3 du = \\ & = \frac{\pi^{1/2}}{8(\alpha^2 + \eta_2^2)^{7/4}} e^{-\frac{(\Omega + \eta_1)^2 \alpha}{4(\alpha^2 + \eta_2^2)}} \left\{ \left(6(\Omega + \eta_1)(\alpha^2 + \eta_2^2)^{1/2} \cos(2\varphi) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (\Omega + \eta_1)^3 \cos(3\varphi) \right) \cos(\Phi_{m_F}(\Omega)) + \left(6(\Omega + \eta_1)(\alpha^2 + \eta_2^2)^{1/2} \sin(2\varphi) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (\Omega + \eta_1)^3 \sin(3\varphi) \right) \sin(\Phi_{m_F}(\Omega)) \right\} \quad (7.55b) \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\Phi_{m_F}(\Omega) = \Omega \bar{T}^* + \eta_0 - \frac{(\Omega + \eta_1)^2 \eta_2}{4(\alpha^2 + \eta_2^2)} - \frac{\varphi'_{m_F}}{2} \quad \text{et} \quad \tan \varphi'_{m_F} = -\frac{\eta_2}{\alpha} \quad (7.56)$$

Nous pouvons maintenant calculer à l'aide de (7.53), (7.54), (7.55) et (7.56) l'expression approximative du signal des transitions Zeeman. Il vient :

$$I_{m_F}(\Omega) \simeq \frac{1}{2} I_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{\eta_2^2}{\alpha^2}\right)^{1/4}} e^{-\frac{(\Omega + \eta_1)^2 \alpha}{4(\alpha^2 + \eta_2^2)}} \left[1 - \eta_3 \left(\frac{3(\alpha^2 - \eta_2^2)}{2(\alpha^2 + \eta_2^2)^2} (\Omega + \eta_1) - \frac{\alpha(\alpha^2 - 3\eta_2^2)}{4(\alpha^2 + \eta_2^2)^3} (\Omega + \eta_1)^3 \right) \right] \cos(\Phi_{m_F}(\Omega) + \varphi''_{m_F}) \right\} \quad (7.57)$$

La phase φ''_{m_F} est une expression assez compliquée, nous ne la donnons pas car nous sommes surtout intéressé par l'enveloppe des franges. Nous voyons donc que l'introduction d'un champ résiduel a un effet sur la largeur des franges de Ramsey, sur leur contraste et sur l'asymétrie de leur enveloppe. C'est pour reproduire ce dernier effet, que l'on observe expérimentalement, que nous avons introduit un terme du 3^{ème} ordre (donné par η_3) dans le développement de la phase (7.50).

Position du maximum des franges

Déterminons maintenant la position du contraste maximal de l'enveloppe des franges. L'équation $I_{m_F}^e(\Omega)$ de l'enveloppe des franges s'obtient à partir de (7.57) en posant $\cos(\Phi_{m_F}(\Omega) + \varphi') = 1$. Le maximum de cette équation est défini par :

$$\frac{\partial I_{m_F}^e(\Omega)}{\partial \Omega} = 0 \quad (7.58)$$

Après calcul, on trouve pour une asymétrie faible ($\varepsilon_3 \ll 1$), la valeur suivante :

$$\Omega_{\max} \simeq -\eta_1 - \frac{3(\alpha^2 - \eta_2^2)}{\alpha(\alpha^2 + \eta_2^2)} \eta_3 \quad (7.59)$$

Le 1^{er} terme est la position du maximum si l'on néglige l'asymétrie des franges et le 2^{ème} est une correction qui prend en compte une asymétrie faible. Notons que dans le cas d'un jet monocinétique ($\alpha \rightarrow +\infty$) cette correction est nulle puisque les franges sont symétriques.

7.4.3 Détermination des paramètres du champ résiduel

Ce que nous aimerions connaître, c'est la valeur des paramètres du champ résiduel ($B_{\bar{z}}$ et γ_z ou son gradient $\gamma_z B_{\bar{z}}$) qui reproduisent avec ce modèle les deux paramètres mesurables des franges Zeeman expérimentales, à savoir le contraste et l'asymétrie de l'enveloppe des franges. Nous cherchons donc à calculer tous les couples $(B_{\bar{z}}, \gamma_z)$ qui donnent une valeur du contraste et de l'asymétrie qui est constante et égale à celle mesurée sur les franges expérimentales.

Contraste des franges

Un paramètre expérimental qui est facilement mesurable sur les franges Zeeman obtenues avec la fontaine continue est le contraste maximal de l'enveloppe des franges. Dans la section 4.3.2, nous avons vu que le contraste des franges de Ramsey de la transitions d'horloge n'atteignait pas son maximum. Ceci, probablement à cause d'un phénomène de pompage optique dû à la lumière de fluorescence de la source. Pour éviter de prendre en compte cet effet dans le calcul du contraste, on normalise le contraste mesuré au contraste de la transition $m_F = 0$. On espère ainsi s'affranchir de cet effet, tout du moins en partie, en utilisant le contraste normalisé défini par :

$$\xi_{m_F}^N = \frac{1}{\xi_0} \cdot \frac{I_{m_F}^{e+}(\Omega_{\max}) - I_{m_F}^{e-}(\Omega_{\max})}{I_{m_F}^{e+}(\Omega_{\max}) + I_{m_F}^{e-}(\Omega_{\max})} \quad (7.60)$$

où $\xi_0 = 89\%$ est le contraste des franges de Ramsey de la transition d'horloge, déterminé dans le chapitre 4. $I_{m_F}^{e+}(\Omega_{\max})$ est la valeur maximale à $\Omega_{\max}$ de l'enveloppe supérieure des franges et $I_{m_F}^{e-}(\Omega_{\max})$ la valeur minimum de l'enveloppe inférieure à la même fréquence. Pour déterminer approximativement la relation entre $B_{\bar{z}}$ et γ_z , posons $\eta_3 = 0$ (c.-à-d. une asymétrie nulle) dans l'équation de l'enveloppe déduite de (7.57). Le contraste maximal est alors obtenu pour $\Omega = -\eta_1$. On en déduit dans ce cas la valeur absolue du champ résiduel $B_{\bar{z}}$ en fonction de γ_z pour un contraste $\xi_{m_F}^N$ donné :

$$B_{\bar{z}}(\gamma_z) = \frac{\alpha \left(\frac{1}{\xi_{m_F}^N - 1} \right)^{1/2}}{|m_F| \pi K_Z \kappa_2(\gamma_z)} \quad (7.61)$$

Partant de cette valeur, on peut, par itérations successives de l'équation de l'enveloppe, déterminer la valeur des paramètres $B_{\bar{z}}$ et γ_z en prenant en compte une asymétrie non-nulle ($\eta_3 \neq 0$) tel que le contraste soit égal à

$\xi_{m_F}^N$. En répétant cette procédure pour différentes valeurs de γ_z , on obtient finalement la relation cherchée dans l'espace des paramètres $(B_{\bar{z}}, \gamma_z)$ qui donne un contraste constant égal à $\xi_{m_F}^N$.

Asymétrie des franges

Le deuxième paramètre expérimental que l'on peut mesurer sur les franges Zeeman est l'asymétrie de l'enveloppe des franges. Nous la définissons de la manière suivante :

$$\eta_{m_F} = \frac{I_{m_F}^{e+}(\Omega_{\max} + \Delta\Omega) - I_{m_F}^{e+}(\Omega_{\max} - \Delta\Omega) + I_{m_F}^{e-}(\Omega_{\max} - \Delta\Omega) - I_{m_F}^{e-}(\Omega_{\max} + \Delta\Omega)}{I_{m_F}^{e+}(\Omega_{\max} + \Delta\Omega) + I_{m_F}^{e+}(\Omega_{\max} - \Delta\Omega) - I_{m_F}^{e-}(\Omega_{\max} - \Delta\Omega) - I_{m_F}^{e-}(\Omega_{\max} + \Delta\Omega)} \quad (7.62)$$

Cette définition permet de s'affranchir, en partie, de l'effet du piédestal de Rabi sur l'asymétrie des franges. La valeur $\Delta\Omega$ correspond à la demi-largeur à mi-hauteur de l'enveloppe des franges en champ résiduel nul. Elle est directement reliée à la température longitudinale du jet par la relation :

$$\Delta\Omega = 2\sqrt{\alpha \ln 2} \quad (7.63)$$

L'écart de fréquence correspondant vaut $\Delta\nu = 7.7 \text{ Hz}$ pour $T_l = 75 \mu\text{K}$. Une fois la valeur expérimentale η_{m_F} de l'asymétrie déterminée, nous cherchons à nouveau les valeurs des paramètres $B_{\bar{z}}$ et γ_z du champ résiduel qui donnent une asymétrie égale à η_{m_F} . Pour ce faire, nous résolvons numériquement l'équation suivante :

$$\frac{I_{m_F}^{e+}(\Omega_{\max} + \Delta\Omega) - I_{m_F}^{e+}(\Omega_{\max} - \Delta\Omega)}{I_{m_F}^{e+}(\Omega_{\max} + \Delta\Omega) + I_{m_F}^{e+}(\Omega_{\max} - \Delta\Omega)} - \eta_{m_F} = 0 \quad (7.64)$$

où $I_{m_F}^{e+}(x)$ est l'équation de l'enveloppe supérieure déduite de (7.57). De cette manière, nous déterminons un nouvel ensemble de points dans l'espace des paramètres $(B_{\bar{z}}, \gamma_z)$ du champ résiduel, pour lequel l'asymétrie est constante et égale à η_{m_F} .

Pour obtenir la valeur des paramètres du champ résiduel qui correspondent à la situation expérimentale, soit un contraste $\xi_{m_F}^N$ et une asymétrie η_{m_F} , on superpose les deux courbes obtenues précédemment dans le plan $OB_{\bar{z}}\gamma_z$. Si ces courbes se croisent, leur intersection donne la valeur des paramètres du champ résiduel supposé par le modèle.

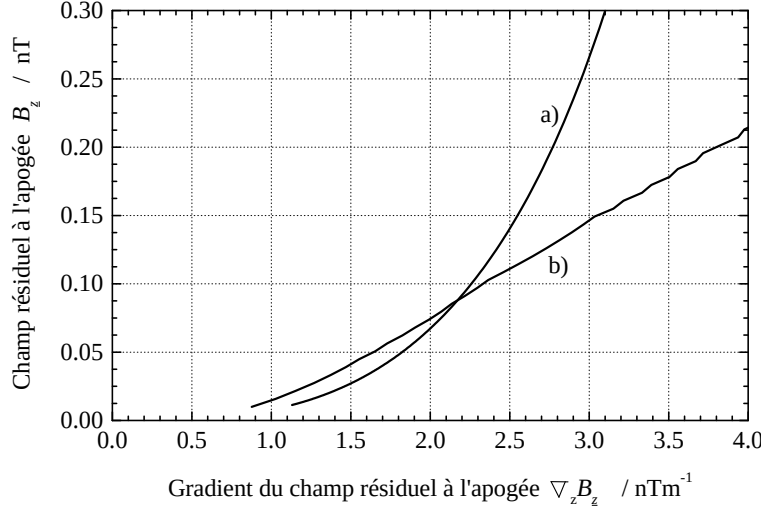


Fig. 7.38: Paramètres $B_{\bar{z}}$ et $\nabla_z B_{\bar{z}}$ du champ résiduel pour que le contraste soit égal à $\xi_{-3}^N = 84\%$ (courbe a)) et l'asymétrie à $\eta_{-3} = -4\%$ (courbe b)). La valeur des paramètres du champ résiduel correspondant vaut $B_{\bar{z}} \simeq 0.09$ nT et $\nabla_z B_{\bar{z}} \simeq 2.2$ nT/m.

Application de la méthode à la détermination du champ résiduel de la fontaine continue

Nous avons appliqué cette méthode à la détermination du champ résiduel de la fontaine continue, après une compensation minutieuse du champ magnétique au niveau de l'apogée des trajectoires atomiques. Les franges Zeeman expérimentales que nous avons obtenues dans cette situation sont représentées dans les Fig. 7.35 et 7.36. Nous avons mesuré le contraste et l'asymétrie sur la transition $m_F = -3$. Nous trouvons pour le contraste normalisé $\xi_{-3}^N \simeq 84\%$ et pour l'asymétrie $\eta_{-3} \simeq -4\%$.

Les deux courbes calculées à partir de ces valeurs par la méthode décrite précédemment sont reportées dans la Fig. 7.38 et représentées dans le plan $OB_{\bar{z}}\nabla_z B_{\bar{z}}$ où $\nabla_z B_{\bar{z}} = \gamma_z B_{\bar{z}}$ est le gradient longitudinal du champ résiduel au niveau de l'apogée moyen. Ces deux courbes se coupent pour une valeur du champ résiduel à l'apogée moyen de $B_{\bar{z}} \simeq 0.09$ nT et un gradient à cet endroit de $\nabla_z B_{\bar{z}} \simeq 2.2$ nT/m. Ces valeurs donnent une estimation grossière du champ résiduel qui dépend évidemment du modèle considéré. Néanmoins, nous possédons une base pour pouvoir évaluer la position de la frange centrale des transitions Zeeman et ainsi déterminer le mieux possible la valeur moyenne $\langle \varphi_{m_F} \rangle$ du déphasage qui nous permet de calculer le déplacement Zeeman du 2^{ème} ordre.

7.4.4 Détermination de la position de la frange centrale

Maintenant que nous connaissons un peu mieux le champ à l'intérieur du résonateur, nous pouvons estimer la position effective de la frange centrale des transitions Zeeman. Calculons pour cela le déphasage moyen $\langle \varphi_{m_F} \rangle$. D'après son expression (7.47), nous trouvons :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{m_F} \rangle(\Omega) &= \int_0^{+\infty} \rho(T) \varphi_{m_F}(\Omega, T^*(T)) dT \\ &= \Omega \bar{T}^* + \eta_0 + \frac{\eta_2}{2\alpha} \end{aligned} \quad (7.65)$$

La position de la frange centrale est définie par la condition $\langle \varphi_{m_F} \rangle(\Omega) = 0$. Il vient donc pour la pulsation de la frange centrale des transitions Zeeman :

$$\Omega_{\text{fc}} = -\frac{1}{\bar{T}^*} \left(\eta_0 + \frac{\eta_2}{2\alpha} \right) \quad (7.66)$$

Il est intéressant de déterminer l'écart en fréquence $\Delta\nu_{\text{fc-max}}$ entre la position de la frange centrale et la position du contraste maximal :

$$\Delta\nu_{\text{fc-max}} = \frac{\Omega_{\text{fc}} - \Omega_{\text{max}}}{2\pi} \quad (7.67)$$

où Ω_{max} est donné par (7.59). Avec les valeurs des paramètres du champ résiduel déterminées précédemment, on trouve $\Delta\nu_{\text{fc-max}} \simeq 8.5 \text{ Hz}$ pour la transition Zeeman $m_F = -3$. On constate donc que la position de la frange centrale ne coïncide pas du tout avec la position du maximum du contraste de l'enveloppe des franges Zeeman. Si l'on prend cette dernière position pour déterminer la fréquence de la frange centrale et en déduire la valeur moyenne du champ magnétique statique, on fait une erreur sur sa valeur qui va se reporter sur l'estimation du déplacement Zeeman du 2^{ème} ordre. C'est ce que nous verrons plus en détail dans la sous-section 7.4.5.

Simulations des franges Zeeman

Nous avons aussi simulé les franges Zeeman $m_F = -3$ à partir des équations de Bloch magnétiques pour le champ résiduel déterminé précédemment en tenant compte de l'effet du pompage optique. Le résultat de ces simulations est comparé aux mesures expérimentales dans la Fig. 7.39. Les cercles reliés en trait fin, pour raison de clarté, correspondent aux points de mesure expérimentaux et la courbe en trait plein à la simulation. On constate que le

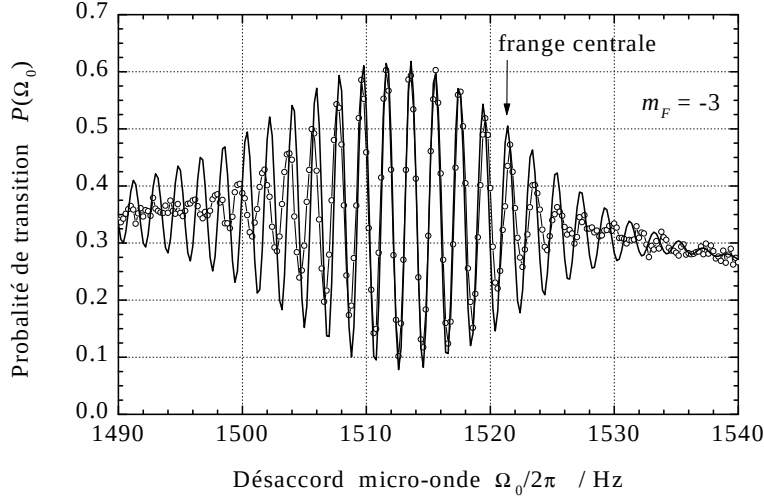


Fig. 7.39: Comparaison des franges Zeeman expérimentales $m_F = -3$ avec une simulation numérique. Les cercles reliés en trait fin (pour raison de clarté) correspondent aux points de mesure expérimentaux et la courbe est obtenue par simulation des équations de Bloch magnétiques pour le champ résiduel déterminé précédemment en tenant compte de l'effet du pompage optique.

contraste maximal des franges ainsi que leur position sont correctement reproduits ce qui n'est pas le cas de la décroissance de l'enveloppe des franges qui est trop lente. Ceci pourrait être dû au fait que la décroissance réelle du champ résiduel n'est pas très bien reproduite par la dépendance exponentielle que nous avons supposée. Dans la Fig. 7.40 sont comparées les simulations des franges Zeeman $m_F = -3$ avec et sans champ résiduel en tenant compte de l'effet du pompage optique. La courbe en trait plein représente la simulation avec champ résiduel (même courbe que celle de la Fig. 7.39) et celle en traitillé la simulation des franges Zeeman sans champ résiduel. On observe bien l'effet du champ résiduel qui résulte en un déplacement vers les basses fréquences et l'apparition d'une asymétrie de l'enveloppe des franges. On voit également clairement qu'avec un champ résiduel, la frange centrale ne se trouve plus à l'endroit où le contraste des franges est maximal, ce qui est évidemment le cas s'il n'y a pas de champ résiduel.

7.4.5 Incertitude relative sur le déplacement Zeeman du 2^{ème} ordre de la transition d'horloge

Discutons maintenant de la détermination du déplacement Zeeman du 2^{ème} ordre de la transition d'horloge. Dans le cas d'un champ magnétique

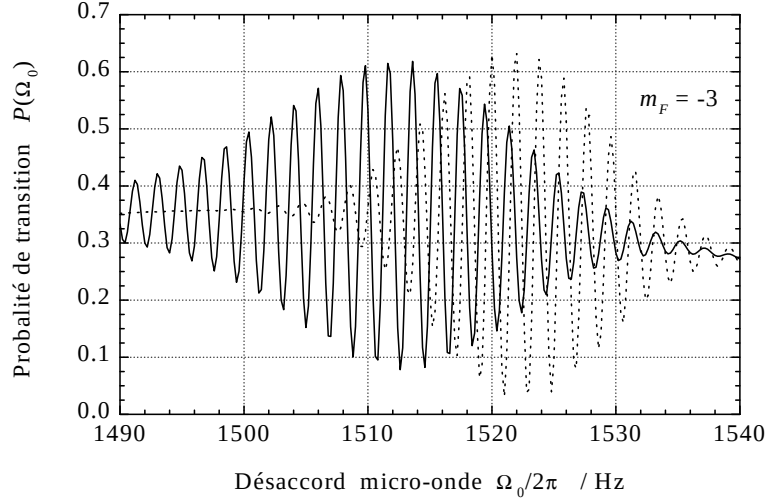


Fig. 7.40: Comparaison des simulations des franges Zeeman $m_F = -3$ avec champ résiduel (courbe en trait plein) et sans champ résiduel (courbe en traitillé). Ces simulations sont obtenues en prenant en considération l'effet du pompage optique engendré par la lumière de fluorescence.

statique constant B_0 , ne présentant pas d'inhomogénéités spatiales, ce déplacement est donné par la relation (cf. annexe A) :

$$\Delta\nu_Z = K_0 B_0^2 \quad (7.68)$$

Il est proportionnel au carré du champ magnétique statique si celui-ci est suffisamment faible. En fait, c'est le cas dans les étalons de fréquence en général et plus particulièrement dans le cas de fontaine continue. En effet, avec l'utilisation d'atomes froids, la largeur des transitions hyperfines est plus étroite. Ceci permet d'utiliser un champ magnétique plus faible pour obtenir une séparation adéquate de ces transitions. Le coefficient de proportionnalité K_0 est la constante Zeeman du 2^{ème} ordre pour la transition d'horloge de l'atome de césium 133 (cf. annexe A).

Si le champ statique est inhomogène, comme c'est le cas en général, il faut alors calculer la position résultante de la frange centrale de la transition d'horloge comme nous l'avons fait pour les transitions dépendant linéairement du champ. En procédant de cette manière, avec les valeurs des paramètres du champ résiduel que nous avons déterminées précédemment avec le modèle, nous obtenons un déplacement Zeeman du 2^{ème} ordre de $\Delta\nu_Z = 2.242 \cdot 10^{-4}$ Hz. Ce déplacement est très petit comparé à celui correspondant à une horloge à tube de césium thermique, qui est typiquement de $\Delta\nu_Z \approx 1.5$ Hz. Ceci est dû, comme nous l'avons mentionné, au faible champ

magnétique statique utilisé dans le résonateur de la fontaine continue qui vaut typiquement $B_0 \approx 70$ nT.

Ce que nous aimerions pouvoir faire, c'est mesurer le champ magnétique statique avec les transitions dépendant linéairement du champ et en déduire la valeur du déplacement Zeeman avec le champ magnétique ainsi obtenu. Or, comme nous avons remarqué dans la sous-section précédente, la position de la frange centrale de ces transitions ne correspond pas avec la position du contraste maximal. Si nous utilisons la valeur du champ déduite de la position du maximum de l'enveloppe des franges, nous obtenons une valeur du déplacement Zeeman du 2^{ème} ordre de $\Delta\nu_Z = 2.216 \cdot 10^{-4}$ Hz. Il en résulte une incertitude relative sur sa détermination, si elle est faite de cette manière, qui vaut $\delta(\Delta\nu_Z)/\nu_0 = 2.7 \cdot 10^{-16}$. Cette valeur est très faible, mais pas complètement négligeable dans le budget d'incertitude si l'on vise une inexactitude globale de l'étalon de l'ordre de 10^{-15} . Toutefois, nous ne jugeons pas nécessaire, pour l'instant, d'améliorer encore la situation si l'on compare le gain en exactitude à attendre et les efforts qu'il faudrait y consacrer. Nous avons également calculé la valeur de $\Delta\nu_Z$ à partir du champ magnétique déduit de la position effective de la frange centrale déterminée dans la sous-section précédente. Nous trouvons exactement la même valeur que celle obtenue avec le calcul complet à partir du déphasage accumulé pendant le temps de vol libre dans la transition d'horloge. Ceci confirme bien, que la position réelle de la frange centrale des transitions Zeeman doit être prise en considération pour évaluer le champ magnétique utilisé dans le calcul du déplacement Zeeman du 2^{ème} ordre si l'on veut obtenir une valeur précise.

Nous constatons donc que l'inhomogénéité longitudinale du champ magnétique statique, obtenue après une compensation minutieuse du champ à l'apogée des trajectoires atomiques, est suffisamment faible pour permettre de mesurer le champ moyen en prenant la position du maximum de l'enveloppe des franges des transitions dépendant linéairement du champ.

Critère expérimental pour rendre l'incertitude sur la détermination de l'effet Zeeman du 2^{ème} ordre pratiquement négligeable

Essayons, pour terminer, de mettre en évidence un critère qui permette de rendre l'incertitude sur la détermination de l'effet Zeeman du 2^{ème} ordre pratiquement négligeable, sans avoir à effectuer des calculs. Nous avons vu que pour un écart en fréquence de $\Delta\nu_{\text{fc-max}} \simeq 8.5$ Hz entre la position réelle de la frange centrale et la position du maximum de l'enveloppe des franges $m_F = -3$, l'incertitude relative de l'effet Zeeman du 2^{ème} ordre se montait à $\delta(\Delta\nu_Z)/\nu_0 = 2.7 \cdot 10^{-16}$. Cet écart correspond à $\Delta\nu_{\text{fc-max}} \simeq 2.8$ Hz sur la transition $m_F = -1$, soit environ une fois et demi la largeur des franges. Si

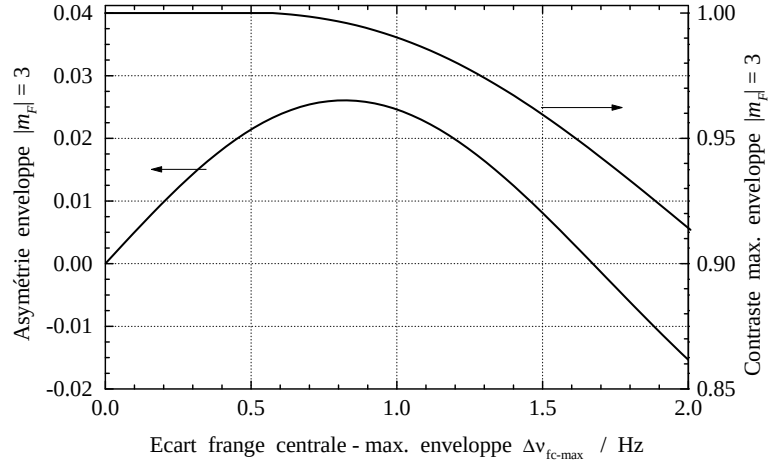


Fig. 7.41: Contraste et asymétrie de l'enveloppe des franges Zeeman $m_F = \pm 3$ en fonction de l'écart de fréquence $\Delta\nu_{\text{fc-max}}$ entre la frange centrale et le maximum de l'enveloppe des franges $m_F = \pm 1$. Le paramètre de décroissance du champ est supposé constant et égal à la valeur déterminée à partir de la mesure expérimentale des franges Zeeman $m_F = -3$.

l'on fixe comme critère que cet écart ne doit pas dépasser la largeur d'une frange sur les transitions $m_F = \pm 1$, l'incertitude qui en résulte est certainement négligeable. Supposons encore que le paramètre de décroissance du champ résiduel γ_z est dû à la géométrie des blindages, et qu'il reste toujours le même. Il est alors possible de calculer le contraste et l'asymétrie des franges $m_F = \pm 3$ qui résulte d'un écart $\Delta\nu_{\text{fc-max}}$ compris entre 0 et 2 Hz (~ 1 frange) sur les transitions $m_F = \pm 1$. Le résultat de ce calcul est présenté sur la Fig. 7.41.

De ce graphique, on peut dire que si la valeur absolue de l'asymétrie de l'enveloppe des franges Zeeman $m_F = \pm 3$ est $\lesssim 3\%$ et son contraste $\gtrsim 90\%$; l'écart en fréquence entre la position de la frange centrale et celle du contraste maximal de l'enveloppe des franges est $\lesssim 2$ Hz. Ainsi, on peut prendre la position du maximum de l'enveloppe des franges pour déterminer la valeur moyenne du champ magnétique statique utilisé dans le calcul du déplacement Zeeman du 2^{ème} ordre. L'incertitude sur la valeur du déplacement Zeeman qui en résulte est alors pratiquement négligeable. La compensation nécessaire du champ résiduel pour atteindre une telle situation ne devrait pas poser trop de problème en pratique. En effet, cette situation a quasiment été atteinte lors des mesures des transitions Zeeman effectuées sur la fontaine continue dans la configuration sans trappe à lumière.

7.5 Déplacements dû à la phase

7.5.1 Introduction

La détermination du déplacement de fréquence d'un étalon primaire dû au déphasage du champ magnétique RF entre les deux zones d'interaction (*end-to-end phase shift*) est un problème bien connu. En effet, il est difficile de réaliser une cavité micro-onde parfaite de telle manière que les deux ouvertures pour le passage du jet soient exactement à la même distance électrique du couplage de la cavité. Il peut donc en résulter un déphasage de la micro-onde entre les deux zones d'interaction qui conduit à un déplacement de fréquence. Dans les étalons thermiques, ce problème est résolu en inversant le jet (*beam reversal*) ce qui inverse le signe du déplacement de fréquence (si les trajectoires atomiques sont identiques dans les deux cas) et permet de le mesurer [BFHS99]. Dans les fontaines atomiques pulsées, ce problème ne se pose pas car les trajectoires atomiques sont des droites verticales et les atomes passent deux fois à travers le même endroit de la cavité et par conséquent voient le même champ magnétique. Dans la fontaine continue par contre, les trajectoires atomiques sont des paraboles et les atomes du jet traversent deux zones d'interaction distinctes et le problème se pose à nouveau. Bien que le déplacement de fréquence attendu soit faible du fait des dimensions relativement petites de la cavité coaxiale, nous avons quand même prévu la possibilité de le mesurer. Une réelle inversion du jet atomique dans ce cas serait très difficile à réaliser. Du fait des dimensions restreintes de la cavité, on peut dans ce cas effectuer un véritable retournement de cavité (*cavity reversal*) qui a l'avantage sur le "beam reversal" d'échanger les zones d'interaction en laissant les trajectoires atomiques inchangées. Nous avons ainsi construit un système qui nous permet de retourner manuellement la cavité sous vide autour de son axe, sans avoir à ouvrir l'enceinte à vide, ce qui va nous permettre de mesurer le déplacement de fréquence dû à un déphasage du champ RF entre les deux zones d'interaction. L'estimation de l'ordre de grandeur de ce déplacement est discutée dans la sous-section 7.5.2.

Du fait de la conductivité finie des parois de la cavité et d'un couplage du mode utilisé qui peut être imparfait, la phase du champ dans le volume de la cavité sondé par les atomes peut varier spatialement. Par conséquent, même s'il n'y a pas de déphasage du champ entre les deux zones d'interaction de la cavité (même phase moyenne dans chaque zone), la dispersion des trajectoires atomiques peut conduire à une phase moyenne sondée par le jet utile qui est différente dans chaque zone d'interaction. Dans ce cas, un déplacement de fréquence de l'étalon (*distributed phase shift*) peut aussi apparaître. Dans le cas des fontaine pulsées, le mode utilisé de la cavité micro-onde est

parfaitement symétrique par rapport à l'axe de la trajectoire des atomes. Il en résulte que l'écart de la phase radiale (qui est la contribution majeure au déplacement de fréquence) varie en principe quadratiquement sur la section de passage des atomes par rapport à sa valeur au centre de l'ouverture, ce qui est un avantage. Ainsi, pour une cavité en cuivre [VD93], on peut maintenir un déplacement relatif de fréquence inférieur à 10^{-15} . Pour ce qui concerne la fontaine continue, la situation n'est pas si simple car le jet ne traverse pas la cavité coaxiale le long de son axe de symétrie. La conséquence en est un gradient de phase radial qui n'est pas nul au centre des trous de passage du jet atomique comme le montrent les calculs effectués dans la sous-section 4.2.4. Cette situation semble à priori moins favorable que dans le cas de la fontaine pulsée. Nous avons essayé d'estimer la valeur de ce déplacement de fréquence (sous-section 7.5.3) à partir de quelques simulations Monte-Carlo des trajectoires atomiques en supposant qu'un gradient de phase radial constant de $1 \mu\text{rad}/\text{mm}$ était présent dans chaque zone d'interaction. Nous avons aussi effectué quelques simulations en plaçant un diaphragme sur la trajectoire du jet afin de se rendre compte s'il était possible de le mesurer expérimentalement en déplaçant radialement le faisceau sonde.

7.5.2 Déplacement de fréquence dû à un déphasage global du champ entre les deux zones d'interaction

S'il existe un déphasage global $\Delta\phi$ du champ magnétique oscillant entre les deux zones d'interaction de la cavité, le déplacement relatif de fréquence résultant est donné par :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -\frac{\Delta\phi}{\pi Q_{\text{at}}} \quad (7.69)$$

où Q_{at} est le facteur de qualité de la résonance atomique. Dans la fontaine continue, on a $Q_{\text{at}} \approx 10^{10}$ et le déplacement relatif de fréquence se monte à environ $3 \cdot 10^{-17}$ par μrad . Les faibles dimensions de la cavité coaxiale utilisée dans la fontaine continue (cf. sous-section 4.2.1) et la haute précision mécanique de son usinage font que les deux zones d'interactions ne devraient pas se trouver géométriquement à une distance très différente des ouvertures de couplage. Si l'on suppose que dans le pire des cas les ouvertures de couplage de la cavité se situent à 0.1 mm de leur position géométrique idéale (à égale distance des trous de passage), et que la conductivité électrique du cuivre de la cavité est uniforme, on peut déterminer une borne supérieure pour le

déplacement de fréquence en considérant une cavité de Ramsey :

$$\left| \frac{\Delta\nu_{\Delta\phi}}{\nu_0} \right| \lesssim 5 \cdot 10^{-16} \quad (7.70)$$

On voit que cette valeur reste toutefois très faible et ne limite pas l'exactitude de l'étalon. Néanmoins, il est toujours possible que ce déplacement de fréquence soit plus grand que prévu. Afin de pouvoir le mesurer, nous avons construit un système qui permet de retourner manuellement la cavité de 180° autour de son axe de symétrie (cf. sous-section 2.2.3) sans avoir à ouvrir l'enceinte à vide. Ce système assure un positionnement angulaire très précis de la cavité dans chacune des deux positions. Ceci rend négligeable une éventuelle différence de phase entre les deux zones d'interaction, due à l'effet d'un gradient de phase, après un double retournement (retour à la position initiale). Ainsi, le problème est résolu et nous pouvons mesurer facilement le déplacement de fréquence, s'il existe, dû à un déphasage global du champ entre les deux zones d'interaction.

7.5.3 Déplacement de fréquence dû à un gradient de phase radial sur la section des trous de passage de la cavité

Nous avons vu dans la sous-section 4.2.4 que le mode TE_{021} utilisé dans la cavité coaxiale développée pour la fontaine continue possédait un gradient de phase non-nul au centre des trous de passage. A cela s'ajoute que la variation radiale de phase n'est pas symétrique autour du centre des ouvertures. Du fait que la densité transverse du jet sur la section des trous de passage n'est pas la même dans les deux zones d'interaction, et même s'il n'y a pas de déphasage global du champ entre ces deux zones, il va en résulter un déplacement de fréquence. Il est dû au mélange des trajectoires atomiques qui ne passent pas au même point de coordonnées, par rapport au centre des ouvertures, dans les deux zones.

On peut évaluer facilement une borne supérieure pour la valeur de ce déplacement en considérant le cas extrême d'un jet ponctuel, sans température transverse et monocinétique, qui passe à la même extrémité des trous de passage dans chaque zone d'interaction. En prenant une variation linéaire de la phase radiale avec un gradient de $\nabla_r\phi = 1.3 \mu\text{rad}/\text{mm}$ (valeur calculée dans la sous-section 4.2.4), la différence de phase subie par les atomes vaut $\Delta\phi = \nabla_r\phi d_c$, où $d_c = 2R_c = 9 \text{ mm}$ est le diamètre des trous de passage de la

cavité (cf. Fig. 3.3). A l'aide de la relation (7.69), on trouve une valeur de :

$$\left| \frac{\Delta\nu_{\nabla_r\phi}}{\nu_0} \right| \lesssim 4 \cdot 10^{-16} \quad (7.71)$$

Cette valeur est malgré tout encore très faible.

Afin d'estimer de manière plus réaliste l'ordre de grandeur du déplacement de fréquence résultant, nous avons effectué, en collaboration avec le Laboratoire de l'Horloge Atomique à Paris, quelques simulations Monte-Carlo des trajectoires atomiques et résolu les équations de Bloch pour calculer la position de la frange centrale et en déduire le déplacement de fréquence [VDF⁺99]. A cette fin, nous simulons le jet de la fontaine continue seulement dans deux dimensions : l'axe vertical z et l'axe horizontal x . Les conditions initiales dans la source sont les suivantes. La dimension de la source selon x a été fixée à 1 cm et nous supposons une distribution gaussienne de vitesse longitudinale du jet selon z de température longitudinale $T_l = 75 \mu\text{K}$ centrée autour de la vitesse longitudinale moyenne. Nous prenons également en compte une distribution gaussienne de vitesse transverse selon x de température transverse $T_t = 15 \mu\text{K}$. De ces conditions initiales, les trajectoires atomiques sont calculées. Seuls les atomes dont la trajectoire a traversé les trous de passage de la cavité ou le faisceau sonde de détection sont pris en considération. Ensuite, on calcule le signal de Ramsey produit par chacun de ces atomes, en fonction du désaccord de fréquence Ω_0 , en résolvant numériquement les équations de Bloch à l'aide de l'algorithme de Runge-Kutta. Pour cela, nous supposons que l'amplitude du champ magnétique RF dans les deux zones d'interaction est sinusoïdale et sa phase constante le long de l'axe z . Par contre, l'amplitude du champ est admise constante le long de l'axe x , mais sa phase est supposée varier linéairement dans cette direction avec un gradient constant de $1 \mu\text{rad/mm}$. Ce gradient de phase est symétrique par rapport à l'axe de la cavité. Les équations de Bloch à résoudre sont donc données par (E.1) dans lesquelles la fréquence de Rabi $\Omega_c(z(t))$ et la phase $\varphi(x(t))$ dépendent de la trajectoire horaire des atomes selon z , respectivement x . Pour finir, nous calculons le déplacement relatif de fréquence en déterminant la position du maximum du signal de Ramsey moyenné sur tous les atomes détectés.

Dans le cas où tous les atomes qui ont traversé la cavité sont détectés, la simulation a fourni une valeur du déplacement relatif de fréquence de :

$$\frac{\Delta\nu_{\nabla_r\phi}}{\nu_0} \simeq -4 \cdot 10^{-17} \quad (7.72)$$

Une valeur un ordre de grandeur inférieure à la borne supérieure estimée précédemment et qui est vraiment négligeable. En réalité, il se peut que la

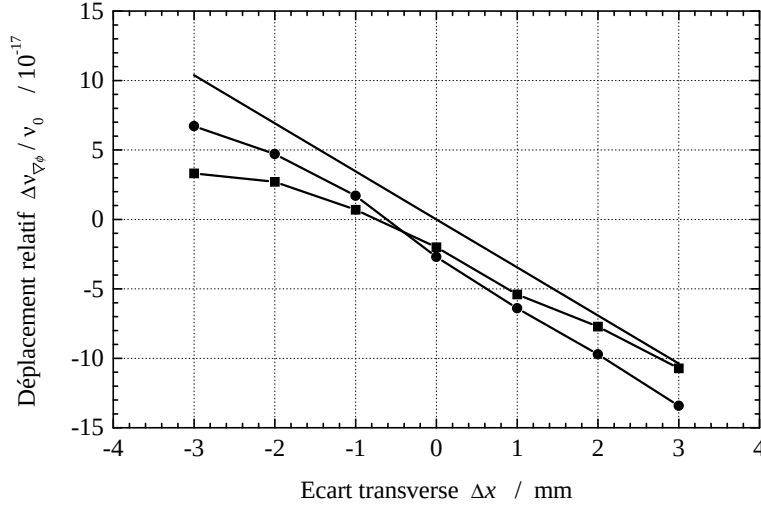


Fig. 7.42: Simulation du déplacement relatif de fréquence $\Delta\nu_{\nabla\phi}/\nu_0$, dû à un gradient de phase constant de $\nabla_x\phi = 1 \mu\text{rad/mm}$, en fonction de l'écart transverse Δx du faisceau sonde par rapport à sa position nominale. La droite correspond au cas idéal d'un jet ponctuel et monocinétique. Les deux autres courbes sont le résultats des simulations avec un diaphragme au niveau de la cavité ($\circ$), respectivement au niveau de la détection ($\square$).

valeur du gradient dans la cavité soit plus élevée que la valeur estimée dans le calcul simplifié de la sous-section 4.2.4, ce qui engendrerait un déplacement de fréquence plus grand. La question se pose alors d'être en mesure de détecter expérimentalement la présence d'un gradient de phase radial en travers des ouvertures de la cavité micro-onde. L'idée est de mesurer la dépendance du déplacement de fréquence en fonction de la position transverse du faisceau sonde de détection. De façon à tester la validité de cette méthode, nous avons calculé le déplacement relatif de fréquence en fonction de l'écart transverse Δx du faisceau sonde par rapport à sa position nominale pour différentes situations. Les résultats des simulations sont présentés dans la Fig. 7.42. La droite représente le cas idéal d'un jet ponctuel sans température transverse et monocinétique. Varier l'écart Δx revient en fait dans ce cas à varier la vitesse longitudinale moyenne de lancement du jet. Il en résulte que le déplacement relatif de fréquence est proportionnel au déplacement transverse Δx du jet dans la région de détection et est donné par :

$$\frac{\Delta\nu_{\nabla\phi}}{\nu_0} = -\frac{\nabla_x\phi \Delta x}{\pi Q_{\text{at}}} \simeq -3.5 \cdot 10^{-17} \Delta x [\text{mm}] \quad (7.73)$$

Les deux autres courbes sont les résultats des simulations. La courbe ($\circ$) correspond à la situation expérimentale idéale où un diaphragme de 2 mm de

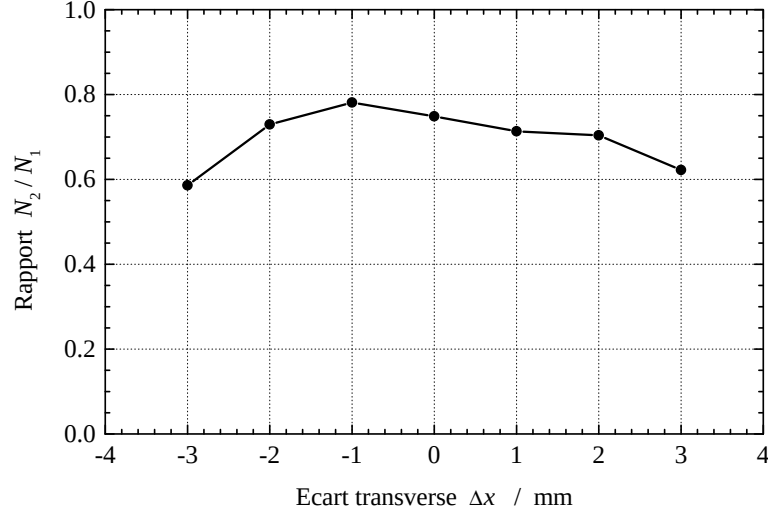


Fig. 7.43: Simulation du rapport N_2/N_1 en fonction de l'écart transverse Δx du faisceau sonde par rapport à sa position nominale. N_2 est le nombre d'atomes détectés par le faisceau sonde avec un diaphragme dans la cavité (situé à un Δx correspondant à celui du faisceau sonde) et N_1 le nombre d'atomes détectés sans ce diaphragme.

large est placé dans le plan médian de la seconde zone d'interaction et centré à la distance Δx de l'axe des trous de passage. La variation est presque linéaire avec Δx sur la section des ouvertures et sa pente est très proche de celle du cas idéal. Ceci indique que le gradient de phase dans la première zone d'interaction a une influence négligeable sur les résultats des simulations. L'autre courbe ($\square$) représente la situation expérimentale réellement réalisable où il n'y a qu'un diaphragme dans la région de détection qui symbolise le faisceau sonde. Le déplacement relatif de fréquence varie linéairement avec Δx sur une distance de environ 4 mm avec une pente légèrement plus faible que celle de la courbe ($\circ$). Cette légère différence, due au mélange des trajectoires atomiques, indique une bonne corrélation entre la tranche sélectionnée avec le faisceau sonde ($\square$) et la région correspondante sondée dans la seconde zone d'interaction ($\circ$).

Ceci est confirmé par une autre simulation où nous avons calculé le rapport N_2/N_1 en fonction de l'écart Δx dont le résultat est reporté dans la Fig. 7.43. N_2 est le nombre d'atomes détectés par le faisceau sonde avec un diaphragme dans la cavité (situé à un Δx correspondant à celui du faisceau sonde) et N_1 le nombre d'atomes détectés sans ce diaphragme. On voit que $\sim 30\%$ seulement des atomes qui ont traversé le faisceau sonde ont passé en dehors du diaphragme dans la cavité. Ce résultat indique que la méthode a une bonne sensibilité par rapport au déplacement transverse du faisceau

sonde. Ainsi, il est possible de détecter un gradient de phase à mieux que 30 % près si sa valeur est suffisamment élevée pour induire un déplacement de fréquence dépendant de la position du faisceau sonde qui soit mesurable.

7.6 Conclusion

Ce chapitre a été entièrement consacré à quelques aspects métrologiques spécifiques à la fontaine continue. Nous avons d'abord estimé le déplacement collisionnel de la fréquence de la transition d'horloge qui dépend de la densité moyenne du jet atomique utile entre les deux interactions micro-ondes. Avec la valeur de la densité moyenne du jet déterminée dans le chapitre 3, nous obtenons un déplacement relatif de fréquence de $\Delta\nu_C/\nu_0 \approx 10^{-17}$ qui est complètement négligeable. Même si le jet est refroidit à une température résiduelle (longitudinale et transverse) plus basse qu'actuellement, l'augmentation de la densité du jet qui en résulterait donnerait une valeur du déplacement relatif de fréquence environ un ordre de grandeur plus élevé. Une valeur qui serait toujours négligeable. Ainsi, l'exactitude de la fontaine continue n'est pas limitée par les collisions froides entre atomes de césium comme dans les fontaines pulsées, ce qui est un grand avantage.

Evidemment, il y a un prix à payer pour cet avantage. Le fonctionnement continu de la fontaine implique que les faisceaux lasers de refroidissement de la source d'atomes froids restent allumés en permanence. La conséquence en est un déplacement de la fréquence de la transition d'horloge des atomes de césium due à leur interaction avec la lumière de fluorescence de la source (déplacement radiatif). Nous avons mesuré ce déplacement de fréquence, il se monte à $\Delta\nu_{LS}/\nu_0 \approx 1.4 \cdot 10^{-12}$. Une valeur qui est inacceptable pour l'exactitude visée ($\approx 10^{-15}$) avec la fontaine continue. Pour supprimer ce déplacement de fréquence, nous avons développé une trappe à lumière rotative qui laisse passer le jet atomique mais qui empêche la lumière en provenance de la source de pénétrer dans le résonateur.

Cette trappe a l'aspect d'une petite turbine qui est composée de 18 pales en verre inclinées à 45° . L'épaisseur du verre est de 1 mm et permet d'atteindre des facteurs d'atténuation moyen de la lumière de fluorescence de l'ordre de $\bar{\gamma}_{at} \approx 10^6$, ce qui est largement suffisant. Nous avons mesuré la valeur du facteur d'atténuation sur un prototype en nous mettant dans les conditions les plus proches de celles de la fontaine continue. Nous avons incliné l'axe de la source de lumière par rapport à l'axe de rotation de la trappe pour reproduire l'effet de l'étendue spatiale de la source de lumière (mélasse optique). Nous observons une diminution de ce facteur jusqu'à une valeur de $\bar{\gamma}_{at} \approx 10^3$ pour des angles d'inclinaison de l'ordre de 8° . Ceci veut dire

qu'il est possible d'atteindre la valeur "limite" d'atténuation pour maintenir l'exactitude visée de la fontaine continue. Toutefois, ceci ne peut se produire que pour des rayons de lumière provenant des bords de la mélasse optique où l'intensité lumineuse est faible. Des mesures optiques ont été réalisées sur la fontaine continue avec la trappe à lumière implémentée. Elles ont montré que le niveau de lumière après la trappe était encore relativement élevé. Pour régler ce problème et ne prendre aucun risques, nous avons ajouté un tube en graphite à l'entrée de la trappe à lumière pour supprimer les rayons trop obliques.

La trappe a été dimensionnée pour que l'atténuation du jet atomique soit minimale. Nous avons estimé l'atténuation du flux atomique moyen qu'engendre la trappe pour un jet ponctuel et non-monocinétique. Nous obtenons une atténuation de $\approx 86\%$ pour les paramètres typiques du jet ($T_l = 75\ \mu\text{K}$). Nous avons aussi évalué la modulation de densité du jet après la trappe pour les mêmes hypothèses. Les "tranches de salami" découpées dans le jet se combinent rapidement avec la distribution de vitesse longitudinale. En effet, à peu près 20 cm au-dessus de la trappe, la densité du jet ne porte plus trace de ce "hachage". De plus, avec la dimension transverse finie du jet, on s'attend à ce que ce processus soit encore beaucoup plus rapide. Ainsi, il ne subsiste aucune modulation du jet au niveau de la cavité micro-onde.

La trappe à lumière rotative (turbine) est réalisée en titane pour des questions de coefficients de dilatation entre le titane et le verre, puisque ce dernier est collé sur le corps métallique. Ainsi, elle supporte sans dégâts l'étuvage de l'ensemble du résonateur à une température de $T \simeq 120^\circ$. Le problème principal que nous avons rencontré avec cette trappe à lumière est le fait qu'elle doit tourner à une fréquence de rotation optimale constante de $f_{\text{turb}}^{\text{opt}} \simeq 16.9\text{ Hz}$ pendant une durée minimale de l'ordre de 3 ans sans arrêts majeurs. En effet, au bout de cette durée, on peut estimer que le remplacement du moteur est acceptable par rapport au travail que cela exige (démontage du résonateur + remontage et étuvage).

Pour l'entraînement de la trappe rotative, nous utilisons un moteur pas-à-pas développé spécialement pour l'ultra-vide. Ce type de moteur est délicat, notamment les paliers qu'il convient de ménager si l'on veut que la durée de fonctionnement du moteur sous vide s'approche de 3 ans. A cette fin, nous avons tenté d'équilibrer sous vide l'ensemble rotor + turbine. Pour ce faire, nous avons placé de petites masses sur le corps métallique de la turbine et nous avons mesuré, sous vide, les vibrations au niveau des paliers du moteur, en fonctionnement continu à la fréquence de rotation optimale. Après divers tatonnements, nous avons réussi à réduire les vibrations au niveau des paliers à ce qu'elles sont lorsque le moteur tourne sous vide sans charge. De cette façon, nous espérons que la sollicitation des paliers corresponde à celle tolérée

pour ce type de moteur, qui est garanti 3 ans en fonctionnement continu sous ultra-vide. Des tests de rotation continue sous vide, de longue durée, ont été effectués avec une turbine prototype en aluminium. A la fin des tests, le moteur a tourné pendant 15 jours consécutifs, sans arrêts, avec une pression inférieure à $5 \cdot 10^{-9}$ mbar. Ce résultat est très satisfaisant⁴.

Un autre déplacement de fréquence que nous avons considéré dans ce chapitre est le déplacement Zeeman du 2^{ème} ordre. Ce déplacement de fréquence est engendré par le faible champ magnétique statique nécessaire pour séparer les sous-niveaux Zeeman de l'état fondamental de l'atome de césium et définir un axe de quantification. Idéalement, ce champ devrait être parfaitement homogène. Mais les imperfections des blindages magnétiques autour du résonateur produisent un champ de fuite qui génère des inhomogénéités du champ C. Ces inhomogénéités de champ se combinent avec la distribution des apogées des trajectoires atomiques, due à la distribution de vitesse longitudinale résiduelle, et ont principalement deux effets sur les franges de Ramsey des transitions dépendant linéairement du champ. Premièrement, déplacer la frange centrale par rapport à l'enveloppe des franges et ensuite réduire le contraste et la symétrie de l'enveloppe. Le premier effet rend difficile l'identification de la frange centrale et par suite l'évaluation correcte du déplacement Zeeman de la transition d'horloge ainsi que son incertitude.

Nous avons développé un modèle théorique pour estimer le champ résiduel le long de l'axe du résonateur à partir de la mesure expérimentale du contraste et de l'asymétrie de l'enveloppe des franges des transitions Zeeman. Après compensation minutieuse du champ magnétique autour de l'apogée des trajectoires atomiques dans la fontaine continue, notre estimation donne un champ résiduel à l'apogée moyen qui est $\lesssim 0.1$ nT et un gradient $\lesssim 2$ nT/m. Ce faible champ résiduel engendre encore un déplacement de ~ 3 Hz (~ 1.5 franges) entre la frange centrale et la frange dont le contraste est maximal sur la transition $m_F = -1$. Ceci correspond toutefois à une incertitude relative de l'ordre de $3 \cdot 10^{-16}$ sur le déplacement Zeeman du 2^{ème} ordre. Cette valeur n'est pas encore totalement négligeable dans le budget d'incertitude si l'on prend en considération que l'estimation du champ résiduel est entachée d'une certaine incertitude. Ceci veut dire qu'il faudra compenser encore plus minutieusement le champ magnétique autour de l'apogée des trajectoires atomiques pour rendre l'incertitude totalement négligeable.

⁴En fait, lorsque nous avons transféré la turbine équilibrée dans le résonateur de la fontaine, nous avons rencontré des problèmes de rotation assez sérieux. En effet, la fixation du moteur dans la cuve n'était pas identique à celle dans le banc de test, et nous avons eu des problèmes de masse avec l'alimentation électrique du moteur. Actuellement, nous avons changé de moteur (le premier avait un défaut semble-t-il) et le problème semble résolu.

Enfin, nous avons encore considéré le déplacement de la fréquence de la transition d'horloge sous l'effet d'un déphasage du champ RF entre les deux zones d'interaction. Nous avons estimé une borne supérieure pour ce déplacement de fréquence qui se monte en valeur relative à $5 \cdot 10^{-16}$. Bien que faible, il se peut que cette valeur soit plus élevée en réalité. C'est pourquoi, nous avons conçu un mécanisme qui permet le retournement manuel sous vide, de 180° , de la cavité autour de son axe de symétrie. De cette manière, nous sommes capable de mesurer précisément ce déplacement de fréquence, si toutefois il existe. La reproductibilité de la position angulaire de la cavité après un double retournement est telle, que même avec un gradient de phase spatial, la différence de phase qui pourrait en résulter est négligeable.

Le déplacement de fréquence dû à un gradient de phase spatial sur la section des trous de passage de la cavité a aussi été évalué. Une borne supérieure pour ce déplacement se monte, en valeur absolue, à $4 \cdot 10^{-16}$ ce qui est encore faible. Une simulation Monte-Carlo des trajectoires atomiques a été réalisée pour estimer de manière plus réaliste ce déplacement de fréquence. Avec un gradient de phase radial constant de $1 \mu\text{rad/mm}$, et dans le cas où tous les atomes qui ont traversé la cavité sont détectés, la simulation fournit un déplacement relatif de $-4 \cdot 10^{-17}$ qui est complètement négligeable. Nous avons également estimé s'il était possible de mesurer expérimentalement ce déplacement de fréquence en déplaçant le faisceau laser de détection selon x . Les simulations ont montrés qu'il était possible de détecter un gradient de phase à mieux que 30 % près si sa valeur est suffisamment élevée pour créer un déplacement de fréquence dépendant de la position du faisceau sonde qui soit mesurable.

Chapitre 8

Conclusion générale

Ce travail avait pour objectif d'effectuer une étude préliminaire de quelques aspects métrologiques particuliers à la fontaine continue développée à l'Observatoire cantonal de Neuchâtel. Principalement, il s'agissait de montrer que ce type d'étalon n'est pas limité en exactitude et en stabilité par les phénomènes connus dans les fontaines pulsées, et que le problème du déplacement radiatif dû à la lumière de fluorescence de la source est sous contrôle ainsi que l'estimation de l'incertitude sur le déplacement Zeeman du 2^{ème} ordre. Résumons les principaux résultats obtenus.

Jet continu

Nous avons étudié en détail la balistique du jet de la fontaine continue. La température longitudinale du jet avant implémentation du refroidissement transverse a été estimée à $T_l \simeq 75 \mu\text{K}$ par des mesures de temps de vol et sa température transverse, après montage du refroidissement transverse 2D, à $T_t \approx 6 \mu\text{K}$ d'après l'augmentation mesurée du signal de résonance. Cette dernière température est le paramètre qui influence le plus la variation du flux d'atomes à la détection. Le rapport du flux à la détection sur le flux initial diminue typiquement avec l'augmentation de cette température de $-3.5 \text{ \%}/\mu\text{K}$.

Si toutes les distributions initiales sont gaussiennes, la distribution effective de vitesse longitudinale du jet après la cavité reste aussi gaussienne, quelle que soit la température transverse du jet tant que la source est de dimension transverse finie. La température longitudinale effective du jet est inférieure à la température longitudinale après le refroidissement transverse 2D, et elle dépend de la température transverse. Pour une température longitudinale typique, après refroidissement transverse, de $T_l = 75 \mu\text{K}$, la température longitudinale effective se monte à $T_l \simeq 60 \mu\text{K}$ pour une température

transverse de $T_t = 5 \mu\text{K}$. On a ainsi mis en évidence un effet de filtrage de la cavité par rapport à la vitesse longitudinale.

A cette distribution de vitesse longitudinale effective gaussienne correspond des distributions de temps (temps de transit, d'interaction et de détection) qui sont également gaussiennes et dont la largeur peut être reliée simplement à celle de la distribution de vitesse effective.

Nous avons aussi estimé la densité moyenne du jet utile au-dessus de la cavité (durant le vol libre) en tenant compte des atomes qui traversent le jet, mais qui n'atteignent pas la détection. Le paramètre qui a le plus d'influence sur la densité moyenne est la température longitudinale. Pour les valeurs typiques du jet de la fontaine continue, la densité moyenne est légèrement supérieure à la moitié de la densité initiale du jet ($\bar{n} \simeq 0.65 n_0$). Si le jet est totalement refroidi (longitudinalement et transversalement) l'augmentation de la densité moyenne reste faible et se monte à ~ 9 fois la valeur de la densité initiale.

Interaction micro-onde

Nous avons développé une cavité micro-onde cylindrique coaxiale pour l'interrogation des atomes de césium dans la fontaine continue. Cette cavité utilise un mode TE_{021} dans lequel la composante z du champ magnétique a une amplitude qui varie sinusoïdalement. Son facteur de qualité chargé a été mesuré à $Q_L = 11\,500$. Le mode TM_{121} , qui est dégénéré avec le mode TE_{021} , est bien déplacé et atténué au moyen de filtres de modes. Avec ce type de cavité, il y a deux zones d'interaction distinctes contrairement aux cavités cylindriques utilisées dans les fontaines pulsées. Nous avons estimé la variation spatiale de la phase du champ magnétique qui pourrait en résulter sur la section des trous de passage. A l'aide d'un modèle simplifié, nous avons montré qu'il existe un gradient de phase radial sur l'axe des trous de passage, dans le plan médian de la cavité, qui a été évalué à $\nabla_r \phi_z \simeq -1.3 \mu\text{rad/mm}$.

Les mesures des franges de Ramsey réalisées sur la fontaine continue, avec le refroidissement transverse 2D, ont montré que la frange centrale avait une largeur à mi-hauteur inférieure à 1 Hz. Cette valeur est tout à fait comparable à celles obtenues avec des fontaines atomiques pulsées. Nous avons constaté une réduction d'environ 10 % du contraste de l'enveloppe des franges de la transition d'horloge. Nous avons montré que cette réduction du contraste provenait très probablement d'une perte de population de l'état $|F = 4\rangle$ durant l'interrogation micro-onde, due à un effet de pompage optique par la lumière de fluorescence de la source. La perte de population correspondante de l'état $|F = 4\rangle$ a été estimée à $\sim 20\%$. Le modèle développé pour prendre en compte l'effet du pompage optique a permis également de reproduire de

manière satisfaisante la modulation des oscillations de Rabi observée au sommet de la frange centrale. En incluant encore une distribution des fréquences de Rabi, différente pour chaque zone d'interaction, il a été possible de reproduire convenablement les oscillations de Rabi mesurées au bas de la frange centrale. Ceci pour autant que l'on ajuste la valeur des paramètres. Ces résultats confirment, une fois de plus, que l'effet de la lumière de fluorescence de la source est à la base des phénomènes observés. Ces derniers devraient disparaître avec l'implémentation de la trappe à lumière rotative.

L'ajustement théorique des franges de Ramsey, en particulier de la décroissance de l'enveloppe des franges, a permis d'estimer de manière plus précise la température longitudinale effective du jet. Nous avons obtenu une valeur de $T_l^{\text{eff}} = 75 \mu\text{K}$, ce qui correspond à une température longitudinale du jet à la source de $T_l = 100 \mu\text{K}$. Du fait de cette température relativement élevée, par rapport à une fontaine pulsée, on ne peut observer qu'un nombre limité de franges (environ une dizaine à partir de la frange centrale) avant qu'elles ne disparaissent.

Interrogation continue

Nous avons fait une étude générale de différents schémas de modulation-démodulation dans le cadre de l'interrogation continue utilisée dans la fontaine continue. Nous avons notamment déterminé les paramètres qui optimisent le signal d'erreur. Des trois types de modulation considérés, la modulation carrée de phase est la mieux adaptée à la fontaine continue et présente les performances les plus élevées lorsque la fréquence de modulation est égale à la largeur à mi-hauteur de la frange centrale ($f_M = \Delta\nu_{1/2}$).

Le seul inconvénient de ce type de modulation est qu'il produit de brefs transitoires dans le signal de sortie du résonateur. Nous avons étudié la forme de ces transitoires, pour une amplitude du champ magnétique constante ainsi que sinusoïdale, et déterminé la fréquence de modulation optimale qui minimise leur amplitude à résonance. Pour un jet monocinétique, cette fréquence est égale à $f_M = 1/2(T + \tau)$. Dans ce cas, l'amplitude minimale des transitoires vaut $I_{\text{tr}}^{\text{min}} = 0.25 I_0$ et leur durée $\Delta\tau = \tau$. Ces valeurs sont identiques, que l'amplitude du champ soit constante ou sinusoïdale. Notons que cette fréquence optimale est très légèrement plus élevée que la fréquence de modulation qui maximalise le signal d'erreur. Pour un jet non-monocinétique, correspondant à celui de la fontaine continue, les transitoires deviennent plus élevés (amplitude $\sim 0.4 I_0$) et leur durée s'accroît jusqu'à $\sim 10 \tau$ pour un champ à profil sinusoïdal. On observe que les transitoires sont un peu plus faibles pour un champ à profil constant.

Stabilité

Dans une première partie, nous avons entrepris une étude assez générale de l'effet Dick continu sur la stabilité de fréquence de la fontaine continue. Nous avons montré, pour un jet monocinétique et une cavité de Ramsey idéale, que la dégradation de stabilité engendrée par cet effet de repliement de spectre (effet d'intermodulation) pouvait être totalement supprimée lorsque la fréquence de modulation est égale à $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. Et ceci pour les trois types de modulation considérés. Cette suppression est due à l'effet de filtrage de la cavité de Ramsey, qui empêche toutes les composantes spectrales du bruit de phase de l'oscillateur local aux harmoniques de $2f_M$ d'être transférées dans le signal du résonateur, puis ensuite démodulées et réinjectées dans la boucle d'asservissement de l'oscillateur à quartz. Nous avons vérifié que la formule obtenue se réduisait bien à celle, bien connue, de l'effet Dick pour une fontaine pulsée.

Si on s'écarte de ce cas idéal, cette annulation ne se réalise plus totalement. Nous avons donc évalué l'effet de la température longitudinale d'un jet non-monocinétique sur la dégradation résiduelle de la stabilité. Pour les simulations, nous avons utilisé les spécifications techniques du bruit de phase d'un oscillateur à quartz du type BVA OCXO 8607 5MHz d'Oscilloquartz. Il s'avère que la modulation carrée de phase donne les meilleurs résultats à la fréquence de modulation $f_M = \Delta\nu_{1/2}$. Ceci est dû à ce que, dans ce cas, au filtrage de la cavité s'ajoute le fait que les coefficients de Fourier des harmoniques de la fréquence de modulation du processus de modulation - démodulation sont très petits (multiplication de deux carrés presque parfaits) et contribuent ainsi à diminuer l'effet d'intermodulation. A cette fréquence de modulation, cette situation favorable ne se réalise pas pour les deux autres types de modulation considérés. La limite posée à la stabilité de fréquence reste néanmoins toujours négligeable puisqu'elle se situe autour d'une variance de Allan de $\sigma_y(\tau) \simeq 2 \cdot 10^{-16} \tau^{-1/2}$. Les simulations ont également montré que, pour une modulation carrée de fréquence quasi-statique, la limite de stabilité imposée était de deux ordres de grandeur plus élevée, et plus encore pour la modulation sinusoïdale de fréquence. Le comportement de la dégradation de stabilité en fonction du déphasage entre modulation et démodulation montre que l'ajustement de la phase autour de la phase optimale n'est pas critique. Et ceci, quel que soit le type de modulation. Cependant, c'est pour la modulation carrée de phase que l'ajustement est le plus sensible, sans toutefois poser problème.

Dans une deuxième partie, nous avons établi théoriquement la relation entre les caractéristiques du résonateur atomique et la stabilité de fréquence ultime à court terme de la fontaine continue. Il s'avère que des trois types de

modulation, la modulation carrée de phase donne la stabilité la plus élevée à la fréquence de modulation qui minimise l'effet Dick continu ($f_M = \Delta\nu_{1/2}$) et ceci que le jet soit monocinétique ou non. L'ajustement de la phase de démodulation à la valeur optimale est important dans le cas de la modulation carrée de phase, car sinon la dégradation de la stabilité augmente assez rapidement, particulièrement dans le cas d'une démodulation large bande.

Nous avons estimé théoriquement la stabilité de fréquence de la fontaine continue d'après la mesure expérimentale du rapport signal-sur-bruit. Le flux d'atomes détectés est ainsi évalué à $\Phi_{\text{dl}}^{\text{mes}} \simeq 180\,000$ at/s, ce qui conduit à une variance de Allan de la stabilité théorique de $\sigma_y(\tau) \simeq 1.2 \cdot 10^{-13} \tau^{-1/2}$. La valeur mesurée expérimentalement atteint $\sigma_y(\tau) \simeq 2.5 \cdot 10^{-13} \tau^{-1/2}$. Bien que encore mal compris, ce résultat semble indiquer que la stabilité de fréquence de la fontaine continue est actuellement limitée par une autre source de bruit que le bruit intrinsèque du jet atomique.

Exactitude

Nous avons évalué le déplacement de fréquence dû aux collisions entre atomes froids de césium dans le jet à partir de la densité moyenne du jet utile que nous avons estimée dans le chapitre 3. Pour les paramètres typiques du jet de la fontaine continue, nous obtenons un déplacement relatif de fréquence de l'ordre de $\Delta\nu_C/\nu_0 \approx 10^{-17}$ qui est complètement négligeable. Même si le jet est totalement refroidi longitudinalement et transversalement, ce déplacement de fréquence devrait rester négligeable.

Par contre, le déplacement de fréquence engendré par la lumière de fluorescence de la source (déplacement radiatif) est important. Il a été mesuré à $\Delta\nu_{\text{LS}}/\nu_0 \approx 1.4 \cdot 10^{-12}$, ce qui est une valeur inacceptable par rapport à l'exactitude visée de la fontaine continue. Pour le supprimer, ou le garder à un niveau négligeable, nous avons développé une trappe à lumière rotative qui laisse passer les atomes du jet, mais qui empêche la lumière en provenance de la source de pénétrer dans le résonateur. Cette trappe à lumière a été testée optiquement, le facteur d'atténuation moyen de la lumière de fluorescence se monte typiquement à $\bar{\gamma}_{\text{at}} \approx 10^6$ au centre des pales de la turbine. Comme la source de lumière (mélasse optique) a une certaine extension spatiale, des rayons peuvent parvenir obliquement sur la trappe. Dans ce cas, le facteur d'atténuation diminue, mais ne devrait pas être inférieure à $\bar{\gamma}_{\text{at}} \approx 10^4$ ce qui garantit que le déplacement radiatif se situe à un niveau négligeable.

L'atténuation du flux atomique par la trappe a été estimée à $\sim 86\%$ pour un jet ponctuel avec une température longitudinale de $T_l = 75\,\mu\text{K}$. Le "hachage" du jet après la traversée de la trappe disparaît totalement avant que le jet n'atteigne la première zone d'interaction.

La trappe à lumière est entraînée à une fréquence de rotation constante de $f_{\text{turb}}^{\text{opt}} \simeq 16.9 \text{ Hz}$ par un moteur pas-à-pas spécialement développé pour l’ultra-vide. L’ensemble rotor + trappe à lumière a été équilibré sous vide pour minimiser la sollicitation mécanique des paliers du moteur, et augmenter ainsi sa durée de vie en rotation continue sous ultra-vide. Les tests de rotation sous vide ont permis d’atteindre une pression inférieure à $5 \cdot 10^{-9} \text{ mbar}$ en fonctionnement continu, ce qui est suffisant pour un bon fonctionnement de la source d’atomes froids.

Nous avons aussi considéré le déplacement Zeeman du 2^{ème} ordre de la fréquence de transition d’horloge. Les inhomogénéités du champ magnétique statique dues aux imperfections des blindages se combinent avec la distribution de vitesse longitudinale du jet pour déplacer et déformer les franges de Ramsey des transitions dépendant linéairement du champ. Ceci rend difficile l’identification de la frange centrale, et par suite, l’évaluation correcte du déplacement Zeeman ainsi que de son incertitude. Un modèle théorique a été développé qui permet d’estimer le champ résiduel à l’apogée moyen à partir de la mesure du contraste et de l’asymétrie des franges Zeeman. Pour les franges Zeeman mesurées sur la fontaine continue, après compensation minutieuse du champ à l’apogée, il a fourni une valeur du champ résiduel $\lesssim 0.1 \text{ nT}$ et un gradient $\lesssim 2 \text{ nT/m}$. Ce faible champ résiduel à l’apogée moyen engendre encore un déplacement de ~ 1.5 franges entre la frange centrale et la frange dont le contraste est maximal sur la transition $m_F = -1$. Ceci correspond toutefois à une incertitude relative de l’ordre de $3 \cdot 10^{-16}$ sur le déplacement Zeeman du 2^{ème} ordre, ce qui est tolérable pour l’instant mais devrait être diminué dans le futur.

Le dernier déplacement de fréquence que nous avons considéré dans ce travail est celui qui est engendré par un déphasage du champ RF entre les deux zones d’interaction. Nous avons estimé que ce déplacement devait être $< 5 \cdot 10^{-16}$. Pour être capable de le mesurer expérimentalement sur la fontaine continue, un mécanisme qui permet le retournement manuel sous vide, de 180° , de la cavité autour de son axe de symétrie a été conçu. La reproductibilité de la position de la cavité est suffisante pour rendre toute différence de phase négligeable.

Le déplacement de fréquence dû à un gradient de phase radial sur la section des trous de passage de la cavité a aussi été considéré. Pour un gradient de phase radial de $1 \mu\text{rad/mm}$, et dans le cas le pire, il a été estimé inférieur en valeur absolue à $4 \cdot 10^{-16}$. Une évaluation plus réaliste, par simulation des trajectoires atomiques, a fourni une valeur de $-4 \cdot 10^{-17}$, ce qui est complètement négligeable. Une autre simulation a également montré qu’il était possible de détecter un gradient de phase à mieux que 30 % près en déplaçant le faisceau sonde selon x , pour autant que ce déplacement soit mesurable.

<i>Déplacement</i>	<i>Valeur</i>	<i>Incertitude</i>
Zeeman 2 ^{ème} ordre (* * *)	$2.44 \cdot 10^{-14}$	$3 \cdot 10^{-16}$
Radiatif sans trappe (*)	$1.4 \cdot 10^{-12}$	-
Radiatif avec trappe (* * *)	$< 10^{-15}$	$< 10^{-16}$
Collisions (* * *)	$0.7 \cdot 10^{-17}$	$< 10^{-16}$
Phase globale du champ RF (**)	$< 5 \cdot 10^{-16}$	$< 10^{-15}$
Phase distribuée du champ RF (**)	$4 \cdot 10^{-17}$	$< 10^{-15}$
Alimentation de la cavité (*)	-	$< 10^{-14}$

Tab. 8.1: Budget d'incertitude préliminaire de la fontaine continue évalué à ce jour. (*) signifie que les valeurs sont déduites des mesures, (**) que les valeurs sont estimées théoriquement et (* * *) que les valeurs sont estimées théoriquement à partir des mesures.

Pour terminer ce travail, et comme la fontaine continue sera un étalon primaire de fréquence, nous présentons dans le Tab. 8.1 le budget d'incertitude préliminaire estimé à l'heure actuelle.

Etat actuel de la fontaine continue et perspectives

La trappe à lumière a été montée dans la fontaine continue, et après quelques problèmes liés à sa rotation au début, elle tourne maintenant sous vide de manière satisfaisante. La fontaine continue est donc actuellement prête pour une première évaluation métrologique sans l'effet perturbatif de la lumière de fluorescence de la source.

Récemment, elle a rejoint ses locaux définitifs à l'Office fédéral de métrologie et d'accréditation à Wabern, où commencera réellement cette évaluation métrologique. A l'Observatoire cantonal de Neuchâtel, le développement du concept de la fontaine continue... continue. En effet, l'Observatoire a reçu un second mandat de l'Office fédéral de métrologie et d'accréditation pour donner une petite soeur à la fontaine continue qui bénéficiera des derniers résultats concernant le refroidissement transverse 2D ainsi que longitudinal du jet actuellement à l'étude à l'Observatoire.

Annexe A

L'atome de césium 133

Nous reportons dans cette annexe quelques propriétés physiques de l'atome de césium 133 qui est à la base des étalons atomiques primaires de fréquence. Le césium est le 55^{ème} élément du tableau périodique des éléments, son symbole est Cs. C'est un métal alcalin qui possède un seul électron de valence et appartient donc à la première colonne du tableau périodique des éléments. Le césium comprend plusieurs isotopes, mais seul l'isotope Cs¹³³, de nombre de masse $A = 133$, est stable et se trouve naturellement dans la croûte terrestre. Le Tab. A.1 donne quelques propriétés physiques usuelles de l'atome de césium 133.

A.1 Structure des niveaux d'énergie

Nous décrivons brièvement les niveaux d'énergie de l'atome de césium 133 mis en jeu dans les étalons primaires de fréquence. La Fig. A.1 montre les niveaux d'énergie dans l'état fondamental et dans le premier état excité.

<i>Grandeur</i>	<i>Notation</i>	<i>Valeur</i>
Numéro atomique	Z	55
Nombre de masse	A	133
Masse atomique	m_{Cs}	$220.8 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Température de fusion	T_{fus}	301.6 K
Température de vaporisation	T_{vap}	951.6 K

Tab. A.1: Propriétés physiques usuelles de l'atome de césium 133.

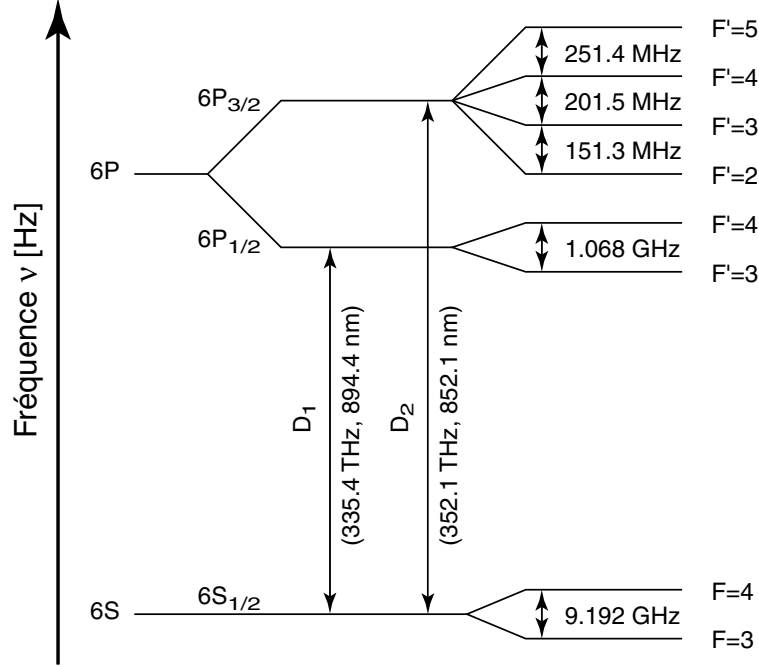


Fig. A.1: Structure des niveaux d'énergie de l'atome de césium 133 dans l'état fondamental et dans le premier état excité.

A.1.1 Structure de base

L'atome de césium possède un électron célibataire dans sa dernière couche électronique de nombre quantique principal $n = 6$. Les valeurs que prennent son moment cinétique orbital $\hbar \vec{L}$, où $\hbar$ est la constante de Planck réduite, définissent les premiers niveaux d'énergie de l'atome. A un moment cinétique orbital nul (nombre quantique $\ell = 0$) correspond l'état d'énergie minimum de l'atome, qui est l'*état fondamental* noté 6S. Au premier moment cinétique orbital non-nul ($\ell = 1$) correspond le premier *état excité* noté 6P. La différence d'énergie typique entre l'état fondamental et le premier état excité est de l'ordre de quelques électron-volts. Ainsi, la transition entre le niveau fondamental et le premier niveau excité correspond à une radiation électromagnétique dont la longueur d'onde appartient au domaine de l'optique.

A.1.2 Structure fine

L'électron périphérique possède un moment cinétique de spin $\hbar \vec{S}$ (nombre quantique $S = 1/2$). Le moment cinétique de spin d'un atome alcalin est égal à celui de l'électron célibataire. Ainsi, le moment cinétique électronique total

$\hbar\vec{J} = \hbar\vec{L} + \hbar\vec{S}$ de l'atome résulte alors du couplage du moment cinétique orbital de l'électron périphérique avec son moment cinétique de spin. Le nombre quantique J , qui lui est associé, ne peut prendre que la valeur $J = 1/2$ pour l'état fondamental $6S$ que l'on note maintenant $6^2S_{1/2}$ et qui garde ainsi le même niveau d'énergie. Le premier niveau excité $6P$ admet deux valeurs distinctes de J , à savoir $J = 1/2$ et $J = 3/2$, ce qui conduit à une séparation de ce niveau en deux sous-niveaux d'énergies légèrement différentes. Ce sont des niveaux dits de *structure fine* qui sont notés $6^2P_{1/2}$ et $6^2P_{3/2}$.

Le niveau excité $6^2P_{3/2}$ intervient notamment dans le refroidissement laser des atomes de césium. Aux transitions entre les niveaux $6^2S_{1/2}$ et $6^2P_{1/2}$ d'une part, $6^2S_{1/2}$ et $6^2P_{3/2}$ d'autre part, correspondent deux raies rapprochées dans le spectre d'émission ou d'absorption de l'atome de césium 133, notées D_1 ($\lambda_1 = 894.3 \text{ nm}$) et D_2 ($\lambda_2 = 852.1 \text{ nm}$) respectivement.

A.1.3 Structure hyperfine

Le proton et le neutron possèdent également un moment cinétique de spin égal à $1/2$. Le moment cinétique nucléaire $\hbar\vec{I}$ résulte de la composition des moments cinétiques des nucléons. La valeur du nombre quantique associé vaut $I = 7/2$ pour l'atome de césium 133. Le moment cinétique total $\hbar\vec{F} = \hbar\vec{J} + \hbar\vec{I}$ de l'atome résulte du couplage entre le moment cinétique électronique total et le moment cinétique nucléaire. Le nombre quantique F , qui lui est associé, ne peut prendre que deux valeurs distinctes $F = 3$ et $F = 4$ dans l'état fondamental $6^2S_{1/2}$ ainsi que dans l'état excité $6^2P_{1/2}$. Ceci conduit à nouveau à une séparation de chacun de ces deux niveaux en deux sous-niveaux d'énergies légèrement différentes qui forment la *structure hyperfine*. Les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental sont désignés par $|F = 3\rangle$ et $|F = 4\rangle$ et ceux de l'état excité $6^2P_{1/2}$ par $|F' = 3\rangle$ et $|F' = 4\rangle$. Quant à l'état excité $6^2P_{3/2}$, il admet quatre valeurs distinctes de F , à savoir $F = 2, 3, 4$ et 5 , ce qui implique que ce niveau se scinde en quatre sous-niveaux hyperfins désignés par $|F' = i\rangle$ avec $i = 2, 3, 4$ et 5 .

A.1.4 Structure Zeeman

Voyons comment varient les niveaux d'énergie de l'atome lorsqu'il est soumis à un champ magnétique extérieur.

<i>Etat</i>	g_J	g_I
$6^2S_{1/2}$	2.0025	$4 \cdot 10^{-4}$

Tab. A.2: Valeurs des facteurs de Landé électronique g_J et nucléaire g_I de l'état fondamental $6^2S_{1/2}$ de l'atome de césium 133.

Variation des niveaux d'énergie avec le champ magnétique

Aux spins du noyau et de l'électron sont associés des moments magnétiques. Celui du noyau est égal à :

$$\vec{\mu}_I = g_I \mu_B \vec{I} \quad (\text{A.1})$$

où μ_B est le magnéton de Bohr et g_I le facteur de Landé nucléaire. Le moment magnétique de l'électron célibataire est donné par :

$$\vec{\mu}_J = g_J \mu_B \vec{S} \quad (\text{A.2})$$

où g_J est le facteur de Landé de l'électron lié à l'atome. Le Tab. A.2 donne les valeurs de g_J et g_I pour l'état fondamental de l'atome de césium 133 [VA89]. On voit que la valeur de g_J est très voisine de 2 et celle de g_I est 1000 fois plus petite en ordre de grandeur.

Ces moments magnétiques possèdent une énergie magnétique mutuelle. En champ magnétique nul, l'interaction magnétique est responsable de la structure hyperfine des niveaux d'énergie. En champ non-nul, un champ magnétique statique $\vec{B}_0$ définit un axe de quantification. La projection sur cet axe du moment cinétique $\hbar \vec{F}$ ne peut prendre que des valeurs discrètes, égales à $\hbar m_F$. Le nombre entier m_F est le *nombre quantique magnétique* associé à F . Ses $(2F + 1)$ valeurs possibles sont égales à $-F, -F + 1, \dots, 0, \dots, F - 1, F$. Il en résulte qu'un champ magnétique statique sépare les niveaux hyperfins en $(2F + 1)$ *sous-niveaux hyperfins*. Ceci constitue l'*effet Zeeman*, c'est pourquoi on appelle aussi ces sous-niveaux, *sous-niveaux Zeeman*. La variation de l'énergie $E(F, m_F)$ de chacun de ces sous-niveaux, en fonction de B_0 , se calcule exactement dans le cas des atomes alcalins dans l'état fondamental. Elle est donnée par la formule de Breit-Rabi qui s'exprime, dans le cas de l'état fondamental de l'atome de césium 133, par [VA89] :

$$E(F, m_F) = -\frac{1}{16} E_0 - g_I \mu_B B_0 m_F \pm \frac{1}{2} E_0 \left(1 + \frac{1}{2} m_F x + x^2 \right)^{1/2} \quad (\text{A.3})$$

avec

$$x = (g_J + g_I) \frac{\mu_B B_0}{E_0} \quad (\text{A.4})$$

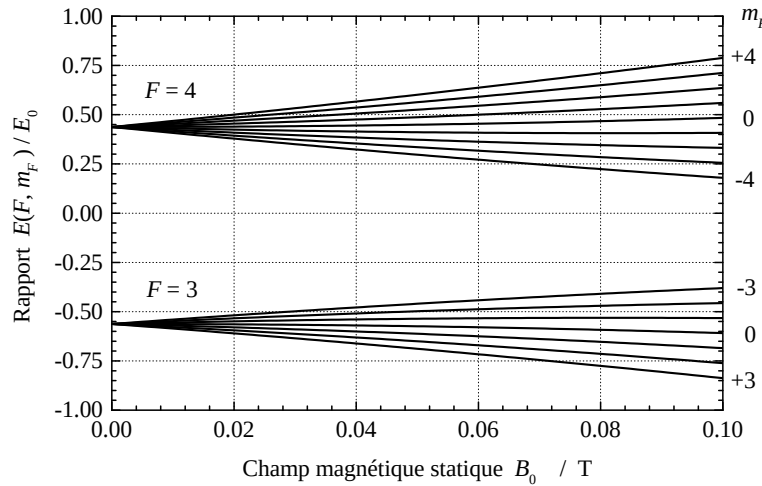


Fig. A.2: Variation de l'énergie des sous-niveaux de structure hyperfine de l'atome de césium 133 dans l'état fondamental en fonction du champ magnétique statique B_0 . Nous avons représenté cette variation en champ faible seulement ($x \ll 1$).

où E_0 est l'énergie d'interaction hyperfine en champ nul dans l'état fondamental. On a le signe $-$ pour $F = 3$ et le signe $+$ pour $F = 4$.

Niveaux d'énergie en champ faible

La Fig. A.2 représente la variation de ces sous-niveaux d'énergie en fonction du champ magnétique statique B_0 pour un champ faible ($x \ll 1$).

L'énergie des sous-niveaux $m_F = 0$ varie très peu lorsque le champ magnétique est faible. Afin de profiter de cette faible sensibilité au champ magnétique, c'est la transition $|F = 3, m_F = 0\rangle \leftrightarrow |F = 4, m_F = 0\rangle$ qui est utilisée dans les étalons primaires de fréquence, et qui sert à la définition de la seconde :

La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux états hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

(13^e Conférence Générale des Poids et Mesures (1967), Résolution 1, [uni91])

C'est pourquoi, elle est souvent appelée *transition d'horloge*. Ainsi, la fréquence de cette transition vaut, par définition, exactement $\nu_{00} = 9\,192\,631\,770$ Hz en champ magnétique nul.

Fréquence de la transition d'horloge :

Pour un champ B_0 faible, la fréquence de la transition d'horloge ν_0 varie quadratiquement avec B_0 selon :

$$\nu_0 \simeq \nu_{00} + K_0 B_0^2 \quad (\text{A.5})$$

K_0 est la constante Zeeman du 2^{ème} ordre qui est donnée par :

$$K_0 = \frac{(g_J + g_I)^2 \mu_B^2}{2h^2 \nu_{00}} = 42.745 \text{ GHz/T}^2 \quad (\text{A.6})$$

Fréquence des transitions dépendant du champ :

L'énergie des sous-niveaux pour lesquels $m_F \neq 0$ varie soit linéairement, soit quasi-linéairement pour les faibles valeurs de B_0 . La fréquence ν_{m_F} des transitions dépendant du champ, pour lesquelles $|F = 3, m_F \neq 0\rangle \Leftrightarrow |F = 4, m_F \neq 0\rangle$ avec $\Delta m_F = 0$, varie linéairement avec B_0 d'après la relation :

$$\nu_{m_F} \simeq \nu_{00} + m_F \nu_Z \quad (\text{A.7})$$

où

$$\nu_Z = K_Z B_0 \quad (\text{A.8})$$

est la fréquence Zeeman de la transition. K_Z est la constante Zeeman du 1^{er} ordre qui vaut :

$$K_Z = \frac{(g_J + g_I) \mu_B}{4h} = 7.0084 \text{ GHz/T} \quad (\text{A.9})$$

La mesure de la fréquence de ces transitions permet donc de connaître la valeur du champ magnétique et, par conséquent, d'en déduire la valeur du déplacement de fréquence Zeeman du 2^{ème} ordre $\Delta \nu_Z = \nu_0 - \nu_{00}$ de la transition d'horloge.

Transitions dipolaires magnétiques :

Toutes les transitions dont nous venons de parler sont des transitions dipolaires magnétiques. Elles peuvent donc être excitées par un champ magnétique hyperfréquence. Pour que une de ces transitions se produise, les deux conditions suivantes doivent être réalisées :

- Conservation de l'énergie :
Ceci implique que la fréquence du champ magnétique doit être égale à la fréquence de la transition considérée.

- Conservation du moment cinétique :
Ceci impose au rayonnement électromagnétique une polarisation déterminée. Pour les transitions considérées ici, la direction du champ magnétique hyperfréquence doit être parallèle au champ magnétique statique $\vec{B}_0$.

A.2 Transitions de la raie D_2

Le refroidissement des atomes de césium au moyen de faisceaux laser utilise les transitions de la raie D_2 . Ce sont donc des transitions dipolaires électriques.

A.2.1 Transitions dipolaires électriques

Elles peuvent être excitées par un champ électrique optique (faisceau laser). Pour que ces transitions se produisent, les deux conditions générales énoncées précédemment doivent aussi être réalisées. La conservation de l'énergie implique que la longueur d'onde du rayonnement laser doit être égale à $\lambda_2 = 852.1 \text{ nm}$. Ensuite, parmi les transitions permises pour lesquelles $\Delta F = F - F'$ avec $\Delta m_{F'} = m_F - m_{F'}$, la conservation du moment cinétique impose les conditions suivantes sur la polarisation du champ électrique :

- Transitions du type $\Delta F = \pm 1$ avec $\Delta m_{F'} = 0$ et $\Delta F = 0$ avec $\Delta m_{F'} = 0, m_F \neq 0$:
Elles sont excitées lorsque le champ électrique est polarisé linéairement (transitions π).
- Transitions du type $\Delta F = 0, \pm 1$ avec $\Delta m_{F'} = \pm 1$:
Elles sont excitées lorsque le champ électrique est polarisé circulairement (transitions $\sigma_{\pm}$).

A.2.2 Probabilités de transition

La Fig. A.3 donne les probabilités relatives des transitions optiques entre deux sous-niveaux Zeeman, l'un fondamental et l'autre excité [VA89]. La normalisation est effectuée par rapport à la transition $|F = 4, m_F = 4\rangle \leftrightarrow |F' = 5, m_{F'} = 5\rangle$. Ces probabilités sont calculées par les carrés des coefficients de Clebsch-Gordan $(cg_{m_F}^{\Delta m_{F'}})^2$ de l'opérateur moment dipolaire élec-

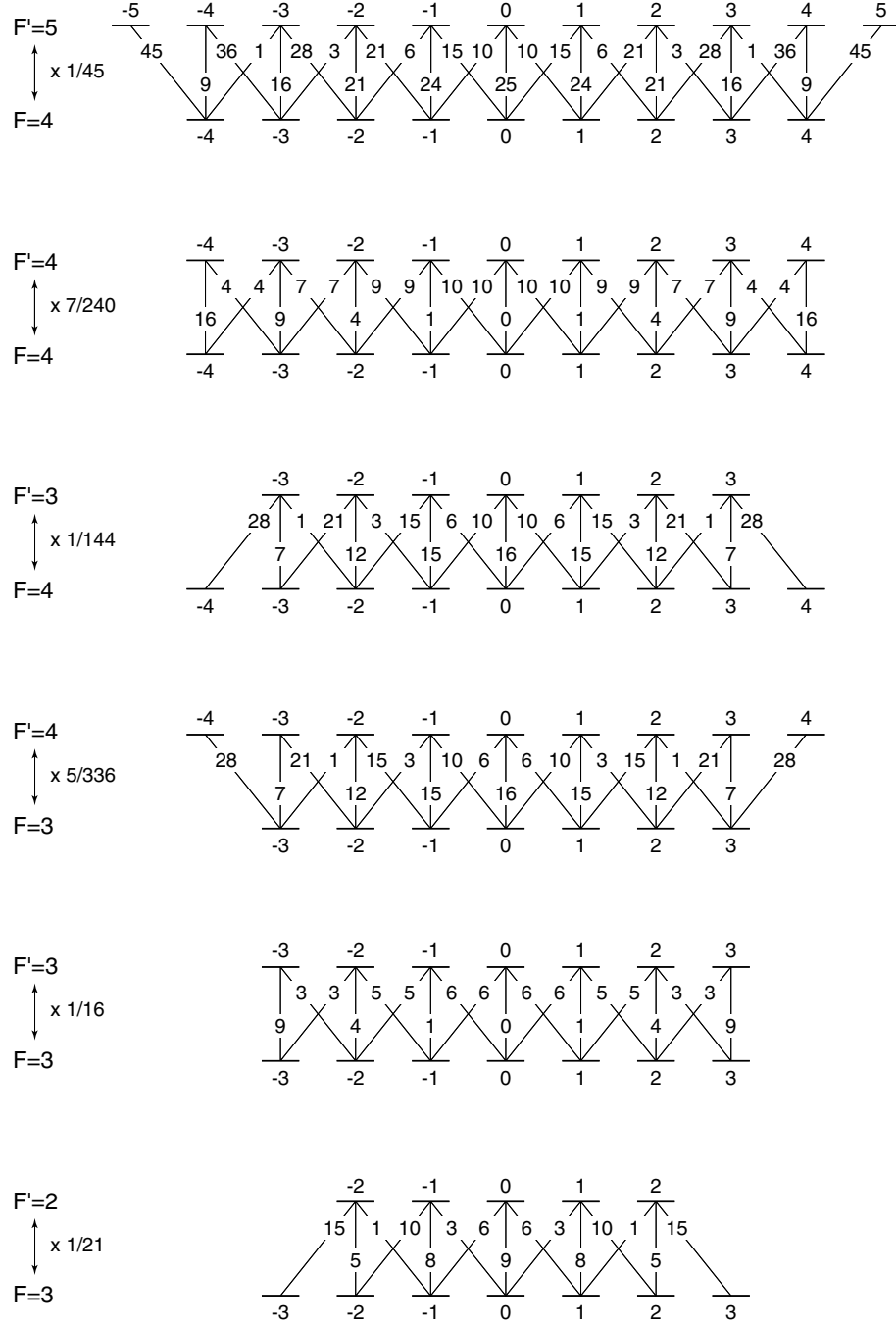


Fig. A.3: Probabilités relatives $(cg_{m_F}^{\Delta m_{F'}})^2$ des transitions optiques entre sous-niveaux Zeeman pour la raie D_2 de l'atome de césium 133.

$w_{ge'} = w_{e'g}$	$F' = 2$	$F' = 3$	$F' = 4$	$F' = 5$
F=3	5/21	1/4	5/28	0
F=4	0	7/108	7/36	11/27

Tab. A.3: Rapport de branchement en absorption $w_{ge'}$ et en émission stimulée $w_{e'g}$ entre un état fondamental g et un état excité e' pour l'atome de césium 133.

$a_{e'g}$	$F' = 2$	$F' = 3$	$F' = 4$	$F' = 5$
F=3	1	3/4	5/12	0
F=4	0	1/4	7/12	1

Tab. A.4: Rapport de branchement en émission spontanée $a_{e'g}$ entre un état excité e' et un état fondamental g pour l'atome de césium 133.

trique entre sous-niveaux Zeeman. m_F désigne le sous-niveau fondamental et $\Delta m_{F'} = 0, \pm 1$ le type de transition dipolaire électrique (transitions π ou $\sigma_{\pm}$).

Pour rendre compte des probabilités relatives de transition entre deux niveaux hyperfins, l'un fondamental g et l'autre excité e' , il faut moyenner les probabilités $(cg_{m_F}^{\Delta m_{F'}})^2$ sur tous les sous-niveaux Zeeman impliqués. Ces probabilités moyennes sont les *rapports de branchement en absorption* $w_{ge'}$, *en émission stimulée* $w_{e'g}$ et *en émission spontanée* $a_{e'g}$:

$$w_{ge'} = \frac{1}{2F+1} \sum_{\substack{m_F \\ \Delta m_{F'}=0}} (cg_{m_F}^{\Delta m_{F'}})^2 \quad (\text{A.10a})$$

$$w_{e'g} = w_{ge'} \quad (\text{A.10b})$$

$$a_{e'g} = \frac{1}{2F'+1} \sum_{\substack{m_F \\ \Delta m_{F'}=0, \pm 1}} (cg_{m_F}^{\Delta m_{F'}})^2 \quad (\text{A.10c})$$

Dans (A.10a) la somme porte sur les $(cg_{m_F}^{\Delta m_{F'}})^2$ de l'une des trois transitions π ou $\sigma_{\pm}$. Par contre dans (A.10c), la somme est effectuée sur les trois transitions π et $\sigma_{\pm}$. Les Tab. A.3 et A.4 donnent les valeurs numériques des rapports de branchement en absorption, en émission stimulée et en émission spontanée.

Annexe B

Modèle de la densité surfacique

Dans cette annexe, nous exposons dans une première partie le modèle développé pour calculer l'évolution libre de la densité surfacique du jet sous les conditions initiales spécifiées dans la sous-section 3.3.1. Dans une seconde partie, nous prenons en compte l'effet du tronquage du jet, engendré par les diaphragmes le long de la trajectoire, sur l'évolution de la densité surfacique.

B.1 Nuage gaussien isotrope sans bord

Nous nous intéressons de manière générale dans cette section au problème suivant. Nous considérons au temps $t = t_0$ une distribution initiale de particules dans un plan horizontal Oxy et une distribution initiale de vitesse transverse dans ce même plan. Nous désirons alors calculer l'évolution de cette distribution de particules, sous l'action de la distribution de vitesse transverse, pour des temps ultérieurs ($t > t_0$). Après avoir établi l'équation d'évolution de la distribution, nous l'appliquons au cas du jet de la fontaine continue considéré dans la section 3.3.1.

B.1.1 Pulse de densité surfacique initiale

La distribution de particules au temps¹ t est caractérisée de manière générale par une densité surfacique $n_s(\vec{r}, t)$ où $\vec{r}$ est un point du plan Oxy . Considérons tout d'abord le cas d'un pulse de densité surfacique initiale centré au point $\vec{r} = \vec{r}_0$. La densité surfacique initiale peut donc s'écrire :

$$n_s(\vec{r}, t_0) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (\text{B.1})$$

¹Nous rappelons qu'il s'agit ici du temps de vol des atomes du jet.

où $\delta(x)$ est la fonction δ de Dirac. Sous l'action d'une distribution initiale de vitesse transverse $\rho_0(\vec{v}_t)$ normalisée :

$$\int \rho_0(\vec{v}_t) d^2v_t = 1 \quad (\text{B.2})$$

le pulse va évoluer avec le temps en s'élargissant. La densité surfacique de particules, au point $\vec{r}$ et au temps t , dont la vitesse transverse est comprise entre $\vec{v}_t$ et $\vec{v}_t + d\vec{v}_t$ est donnée par :

$$dn_s(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{v}_t) \delta(\vec{r} - \vec{v}_t(t - t_0) - \vec{r}_0) d^2v_t \quad (\text{B.3})$$

d'où l'on peut exprimer la densité surfacique au temps t en intégrant sur la distribution de vitesse :

$$n_s(\vec{r}, t) = \int \rho_0(\vec{v}_t) \delta(\vec{r} - \vec{v}_t(t - t_0) - \vec{r}_0) d^2v_t \quad (\text{B.4a})$$

$$= \frac{1}{(t - t_0)^2} \rho_0\left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0}\right) \quad t \geq t_0 \quad (\text{B.4b})$$

B.1.2 Densité surfacique initiale quelconque

Passons maintenant au cas d'une distribution initiale quelconque $n_s(\vec{r}, t_0)$ de particules dans le plan Oxy , centrée à l'origine des coordonnées ($\vec{r}_0 = \vec{0}$). On peut la développer sur la base des fonctions de Dirac :

$$n_s(\vec{r}, t_0) = \int n_s(\vec{r}', t_0) \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^2r' \quad (\text{B.5})$$

et en remplaçant $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ dans (B.4a) par (B.5), nous obtenons :

$$n_s(\vec{r}, t) = \iint \rho_0(\vec{v}_t) n_s(\vec{r}', t_0) \delta(\vec{r} - \vec{r}' - \vec{v}_t(t - t_0)) d^2v_t d^2r' \quad (\text{B.6})$$

On peut intégrer cette dernière équation soit dans l'espace des vitesses, soit dans l'espace des positions, ceci conduisant aux deux équations d'évolution équivalentes de la densité surfacique :

$$n_s(\vec{r}, t) = \frac{1}{(t - t_0)^2} \int \rho_0\left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{t - t_0}\right) n_s(\vec{r}', t_0) d^2r' \quad t \geq t_0 \quad (\text{B.7a})$$

ou

$$n_s(\vec{r}, t) = \int \rho_0(\vec{v}_t) n_s(\vec{r} - \vec{v}_t(t - t_0), t_0) d^2v_t \quad t \geq t_0 \quad (\text{B.7b})$$

Le cas du jet de la fontaine continue

Appliquons les équations d'évolution développées précédemment au calcul de la densité surfacique du jet dans le cas des conditions initiales du jet de la fontaine continue admises dans la sous-section 3.3.1. Elles sont les suivantes :

1. *Densité surfacique :*

La densité surfacique initiale du jet est supposée isotrope et gaussienne de rayon quadratique moyen initial $R(t_0)$. Elle s'écrit :

$$n_s(r, t_0) = n_{s_0} e^{-r^2/R^2(t_0)} \quad (\text{B.8})$$

2. *Distribution de vitesse transverse :*

La distribution de vitesse transverse initiale est supposée isotrope et gaussienne en tout point du plan Oxy , de vitesse moyenne nulle et de vitesse quadratique moyenne $v_{t_0\text{rms}}$. Sa densité de probabilité est donnée par :

$$\rho_0(\vec{v}_t) = \frac{1}{\pi v_{t_0\text{rms}}^2} e^{-\vec{v}_t^2/v_{t_0\text{rms}}^2} \quad (\text{B.9})$$

En introduisant (B.8) et (B.9) dans (B.7a), il vient :

$$\begin{aligned} n_s(r, t) &= \frac{n_{s_0}}{\pi v_{t_0\text{rms}}^2 (t - t_0)^2} \int e^{-(\vec{r}-\vec{r}')^2/v_{t_0\text{rms}}^2} (t-t_0)^2 e^{-r'^2/R^2(t_0)} d^2r' \\ &= n_{s_0} \frac{\alpha_0(t)}{\pi} e^{-\alpha_0(t) r^2} \int_0^{+\infty} e^{-\beta_0(t) r'^2} \int_0^{2\pi} e^{2\alpha_0(t) r r' \cos \varphi'} d\varphi' r' dr' \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

où nous avons introduit les coordonnées polaires (r, φ) et posé :

$$\alpha_0(t) = \frac{1}{v_{t_0\text{rms}}^2 (t - t_0)^2} \quad (\text{B.11a})$$

$$\beta_0(t) = \frac{R^2(t)}{R^2(t_0)} \alpha_0(t) \quad (\text{B.11b})$$

$$R^2(t) = R^2(t_0) + v_{t_0\text{rms}}^2 (t - t_0)^2 \quad (\text{B.11c})$$

Nous voyons déjà que la densité surfacique reste isotrope puisqu'elle ne dépend que du module de $\vec{r}$. L'intégrale angulaire dans (B.10) vaut [AS72] :

$$\int_0^{2\pi} e^{2\alpha_0(t) r r' \cos \varphi'} d\varphi' = 2\pi I_0(2\alpha_0(t) r r') \quad (\text{B.12})$$

où $I_0(x)$ est la fonction de Bessel modifiée de 1^{ère} espèce d'ordre 0. Il vient :

$$n_s(r, t) = n_{s0} 2\alpha_0(t) e^{-\alpha_0(t) r^2} \int_0^{+\infty} e^{-\beta_0(t) r'^2} I_0(2\alpha_0(t) r r') r' dr' \quad (\text{B.13})$$

En intégrant par partie cette dernière équation, nous obtenons :

$$n_s(r, t) = n_{s0} \frac{\alpha_0(t)}{\beta_0(t)} e^{-\alpha_0(t) r^2} \left(1 + 2\alpha_0(t) r \int_0^{+\infty} e^{-\beta_0(t) r'^2} I_1(2\alpha_0(t) r r') dr' \right) \quad (\text{B.14})$$

avec $I_1(x)$ la fonction de Bessel modifiée de 1^{ère} espèce d'ordre 1. Cette dernière intégrale est donnée par [AS72] :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta_0(t) r'^2} I_1(2\alpha_0(t) r r') dr' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_0(t)}} e^{\alpha_0^2(t) r^2 / 2\beta_0(t)} I_{1/2} \left(\frac{\alpha_0^2(t) r^2}{2\beta_0(t)} \right) \quad (\text{B.15})$$

où $I_{1/2}(x)$ se déduit de la fonction de Bessel sphérique modifiée de 1^{ère} espèce et vaut :

$$I_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \cdot \frac{\sinh x}{x} \quad (\text{B.16})$$

En insérant (B.16) et (B.15) dans (B.14), on peut enfin mettre $n_s(r, t)$ sous la forme finale :

$$n_s(r, t) = n_{s0} \frac{R^2(t_0)}{R^2(t)} e^{-r^2/R^2(t)} \quad (\text{B.17})$$

où $R(t)$ est le rayon quadratique moyen de la distribution de densité surfacique au temps t donné par (B.11c).

La densité surfacique au temps t est donc isotrope mais également encore de forme gaussienne². C'est cette expression que nous utilisons pour calculer l'évolution libre de la densité surfacique du jet dans la sous-section 3.3.1. Le profil au temps $t_4 = 0.638$ s de la densité surfacique après une évolution libre, calculé à partir de l'équation (B.17), est représenté dans la Fig. B.1 pour trois températures transverses : $T_t = 10$ nK, $1 \mu\text{K}$ et $5 \mu\text{K}$.

²Ceci n'est pas étonnant car on aurait pu le déduire directement des équations d'évolution (B.7). En effet, ces équations ont la forme d'un produit de convolution entre la distribution de position et la distribution de vitesse transverse. Or pour des distributions de forme gaussienne on sait que la distribution résultante est aussi de forme gaussienne. Le résultat (B.17) aurait donc pu être obtenu directement sans calculs. Nous les avons détaillés car nous retrouverons des calculs semblables par la suite.

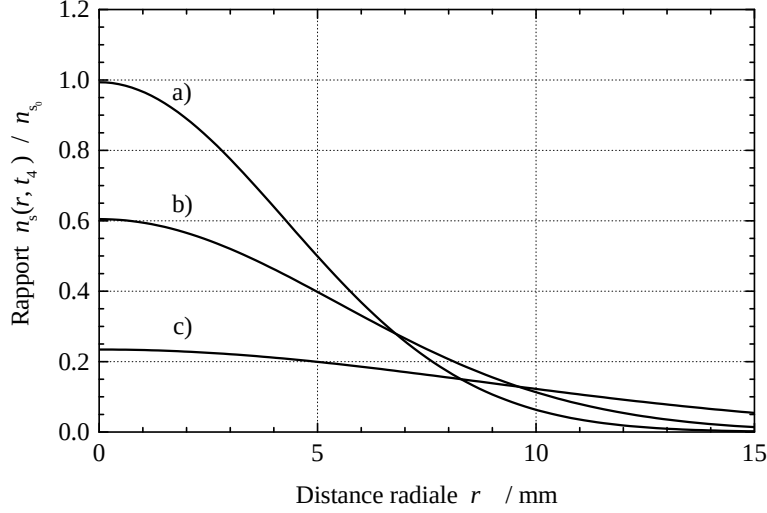


Fig. B.1: Exemples de profil de la densité surfacique au temps $t_4 = 0.638$ s après une évolution libre. Le rapport $n_s(r, t_4)/n_{s_0}$ de l'équation (B.17) est représenté en fonction de r pour trois températures transverses : a) $T_t = 10$ nK ; b) $T_t = 1$ μ K et c) $T_t = 5$ μ K. Le rayon quadratique moyen initial vaut $R(t_0) = 6$ mm.

B.2 Nuage gaussien isotrope avec bord

Après avoir déterminé dans la section précédente l'évolution libre d'un nuage isotrope sans bord, nous nous intéressons maintenant à l'évolution d'un nuage isotrope tronqué transversalement, c.-à-d. avec bord.

B.2.1 Nuage gaussien tronqué une fois

Considérons une densité surfacique initiale isotrope dans le plan Oxy qui évolue librement sous l'action d'une distribution initiale de vitesse transverse dans ce même plan. Son évolution est régie, pour des temps $t > t_0$, par l'équation (B.7a) ou (B.7b). On suppose qu'au temps $t = t_2 > t_0$, cette distribution est tronquée par une ouverture circulaire de rayon R_2 (c'est ce qui se passe lorsque le jet rencontre un diaphragme sur sa trajectoire³). Quelle est alors l'évolution ultérieure de la densité surfacique ?

Pour calculer son évolution pour des temps $t > t_2$, il faut connaître la densité surfacique au temps $t = t_2$ sur la section de l'ouverture ainsi que la distribution des vitesses transverses au même instant (qui elle aussi aura évolué). Connaissant ces deux paramètres, on peut ensuite calculer l'évolution

³Nous utilisons la chronologie des temps de vol et la numérotation des rayons qui correspondent effectivement aux diaphragmes considérés dans la section 3.3.

ultérieure de la densité surfacique à l'aide de l'équation (B.7a) en intégrant sur la surface de l'ouverture circulaire.

Evolution de la distribution de vitesse transverse

Calculons, dans un premier temps, la distribution de vitesse transverse pour des temps $t > t_0$. Pour cela, écrivons que la densité surfacique $n_s(\vec{r}, t)$ au temps t est égale à l'évolution de la densité surfacique initiale sous l'action de la distribution initiale de vitesse transverse pendant l'intervalle de temps $t - t_0$ (équation (B.7b)) ; mais elle est aussi égale à l'évolution de la densité surfacique à un temps t' ($t_0 < t' < t$) sous l'action de la distribution de vitesse transverse à ce même instant pendant l'intervalle de temps $t - t'$ (d'après l'équation (B.6)). On a donc :

$$\begin{aligned} n_s(r, t) &= \int \rho_0(\vec{v}_t) n_s(\vec{r} - \vec{v}_t(t - t_0), t_0) d^2v_t \\ &= \iint \rho(\vec{v}_t, \vec{r}', t') n_s(\vec{r}', t') \delta(\vec{r} - \vec{r}' - \vec{v}_t(t - t')) d^2r' d^2v_t \quad (\text{B.18}) \end{aligned}$$

où $\rho(\vec{v}_t, \vec{r}', t')$ est la distribution de vitesse transverse au point $\vec{r}'$ au temps t' . Par identification de (B.18), on obtient la relation :

$$\rho_0(\vec{v}_t) n_s(\vec{r} - \vec{v}_t(t - t_0), t_0) = \int \rho(\vec{v}_t, \vec{r}', t') n_s(\vec{r}', t') \delta(\vec{r} - \vec{r}' - \vec{v}_t(t - t')) d^2r' \quad (\text{B.19})$$

Posons $t' = t$ pour connaître la distribution de vitesse au temps t . Il vient :

$$\begin{aligned} \rho_0(\vec{v}_t) n_s(\vec{r} - \vec{v}_t(t - t_0), t_0) &= \int \rho(\vec{v}_t, \vec{r}', t) n_s(\vec{r}', t) \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^2r' \quad (\text{B.20}) \\ &= \rho(\vec{v}_t, \vec{r}, t) n_s(\vec{r}, t) \quad (\text{B.21}) \end{aligned}$$

De cette dernière relation, on trouve finalement pour la densité de probabilité de la distribution de vitesse transverse au point $\vec{r}$ et au temps t l'expression suivante :

$$\rho(\vec{v}_t, \vec{r}, t) = \rho_0(\vec{v}_t) \frac{n_s(\vec{r} - \vec{v}_t(t - t_0), t_0)}{n_s(\vec{r}, t)} \quad t \geq t_0 \quad (\text{B.22})$$

On voit déjà que si la distribution initiale est isotrope, elle ne le reste pas pour $t > t_0$ sauf au centre du jet ($\vec{r} = \vec{0}$).

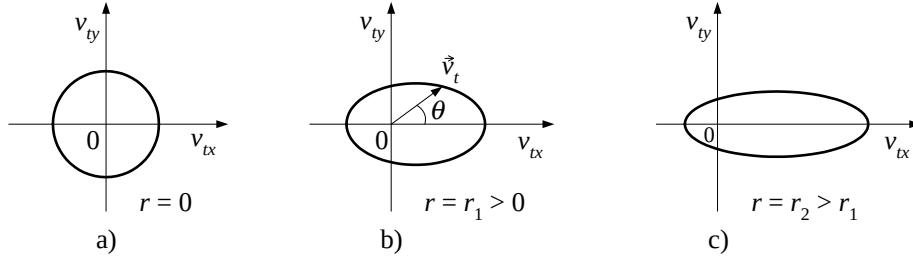


Fig. B.2: Représentation schématique de l'allure des courbes d'isodensité de probabilité de la distribution de vitesse transverse à un temps $t > t_0$ pour différentes distances r du centre du jet. a) $r = 0$, la distribution est isotrope; b) $r = r_1 > 0$, la distribution devient anisotrope; c) $r = r_2 > r_1$ l'anisotropie de la distribution augmente.

Le cas du jet de la fontaine continue :

Appliquons l'équation (B.22) au cas du jet de la fontaine continue. Pour ce faire, introduisons (B.8) et (B.17) dans (B.22). On trouve :

$$\rho(v_t, \theta, r, t) = \frac{1}{\pi v_{t0\text{rms}}^2} \cdot \frac{R^2(t)}{R^2(t_0)} e^{-v_{t0\text{rms}}^2 (t-t_0)^2 r^2 / R^2(t) R^2(t_0)} e^{-R^2(t) v_t^2 / R^2(t_0) v_{t0\text{rms}}^2} \times e^{2rv_t(t-t_0) \cos \theta / R^2(t_0)} \quad t \geq t_0 \quad (\text{B.23})$$

où nous avons introduit les coordonnées polaires (v_t, θ) pour décrire la vitesse transverse $\vec{v}_t$. La Fig. B.2 montre l'allure des courbes d'isodensité de probabilité de la distribution de vitesse transverse après un temps $t > t_0$ pour différentes distances r du centre du jet. La distribution de vitesse reste effectivement isotrope au centre du jet ($r = 0$) au cours du temps et quelle que soit la vitesse transverse, mais elle devient anisotrope pour $r > 0$. L'anisotropie augmente avec la distance r , le module de la vitesse transverse v_t et le temps t , l'axe d'anisotropie maximum étant radial. On constate donc que plus on s'éloigne du centre du jet, plus les atomes ont tendance à s'en éloigner rapidement, la situation se rapprochant du cas d'une source ponctuelle.

Evolution de la densité surfacique

Calculons maintenant l'évolution de la densité surfacique après le tronçage par l'ouverture circulaire de rayon R_2 au temps $t = t_2$. La densité surfacique pour des temps $t > t_2$ est donnée par l'équation (B.7a) dans laquelle on remplace les conditions initiales au temps $t = t_0$ par celles au temps $t = t_2$, et en n'intégrant plus sur le plan Oxy tout entier mais sur la surface S_2 de l'ouverture circulaire. Les conditions initiales au temps $t = t_2$ sont

$n_s(\vec{r}, t_2)$ pour la densité surfacique et $\rho(\vec{v}_t, \vec{r}, t_2)$ pour la densité de probabilité de la distribution de vitesse transverse. En supposant que le centre de l'ouverture circulaire coïncide avec celui du jet, nous pouvons écrire :

$$n_s(\vec{r}, t) = \frac{1}{(t - t_2)^2} \int_{S_2} \rho\left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{t - t_2}, \vec{r}', t_2\right) n_s(\vec{r}', t_2) d^2r' \quad t \geq t_2 \quad (\text{B.24})$$

où nous avons exprimé la vitesse transverse $\vec{v}_t$ en fonction des variables $\vec{r}$, $\vec{r}'$ et t . En introduisant (B.22) dans cette équation, nous pouvons exprimer la densité surfacique au temps $t > t_2$ en fonction des conditions initiales au temps $t = t_0$. On obtient finalement l'équation d'évolution suivante de la densité surfacique :

$$n_s(\vec{r}, t) = \frac{1}{(t - t_2)^2} \int_{S_2} \rho_0\left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{t - t_2}\right) n_s\left(\frac{t - t_0}{t - t_2} \vec{r}' - \frac{t_2 - t_0}{t - t_2} \vec{r}, t_0\right) d^2r' \quad t \geq t_2 \quad (\text{B.25})$$

Le cas du jet de la fontaine continue :

Appliquons l'équation (B.25) au cas des conditions initiales (B.8) et (B.9) du jet. Il vient en intégrant sur l'ouverture circulaire de rayon R_2 :

$$\begin{aligned} n_s(r, t) &= \frac{n_{s0}}{\pi v_{t0\text{rms}}^2 (t - t_2)^2} \int_{S_2} e^{-(\vec{r} - \vec{r}')^2 / v_{t0\text{rms}}^2 (t - t_2)^2} e^{-\left(\frac{t - t_0}{t - t_2} \vec{r}' - \frac{t_2 - t_0}{t - t_2} \vec{r}\right)^2 / R^2(t_0)} d^2r' \\ &= n_{s0} \frac{c_2(t)}{\pi} e^{-\alpha_2(t) r^2} \int_0^{R_2} e^{-\beta_2(t) r'^2} \int_0^{2\pi} e^{2\gamma_2(t) r r' \cos \varphi'} d\varphi' r' dr' \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

où les coefficients $c_2(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_2(t)$ et $\gamma_2(t)$ sont donnés par :

$$c_2(t) = \frac{1}{v_{t0\text{rms}}^2 (t - t_2)^2} \quad (\text{B.27a})$$

$$\alpha_2(t) = \frac{R^2(t_0) + v_{t0\text{rms}}^2 (t_2 - t_0)^2}{R^2(t_0)} c_2(t) \quad (\text{B.27b})$$

$$\beta_2(t) = \frac{R^2(t)}{R^2(t_0)} c_2(t) \quad (\text{B.27c})$$

$$\gamma_2(t) = \frac{R^2(t_0) + v_{t0\text{rms}}^2 (t_2 - t_0)(t - t_0)}{R^2(t_0)} c_2(t) \quad (\text{B.27d})$$

En introduisant l'intégrale angulaire (B.12), on est conduit à :

$$n_s(r, t) = n_{s0} 2c_2(t) e^{-\alpha_2(t) r^2} \int_0^{R_2} e^{-\beta_2(t) r'^2} I_0(2\gamma_2(t) r r') r' dr' \quad (\text{B.28})$$

Cette intégrale peut être calculée à l'aide du développement en série de $I_0(x)$, [AS72] :

$$I_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x/2)^{2n}}{(n!)^2} \quad (\text{B.29})$$

On peut alors écrire la densité surfacique du jet au temps t , après tronquage par une ouverture circulaire de rayon R_2 au temps t_2 , sous la forme :

$$n_s(r, t) = n_{s0} \frac{R^2(t_0)}{R^2(t)} e^{-\alpha_2(t) r^2} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t) r^{2n} \quad t \geq t_2 \quad (\text{B.30})$$

avec le coefficient :

$$A_n(t) = \frac{\gamma_2^{2n}(t) \gamma(n+1, \beta_2(t) R_2^2)}{\beta_2^n(t) (n!)^2} \quad (\text{B.31})$$

où $\gamma(n, x)$ est la fonction gamma incomplète [AS72].

La Fig. B.3 montre le profil de la densité surfacique au temps $t_4 = 0.638$ s, calculé avec l'équation (B.30), pour trois températures transverses : $T_t = 10$ nK, $1 \mu\text{K}$ et $5 \mu\text{K}$. On voit déjà que pour des températures $T_t \gtrsim 1 \mu\text{K}$ le profil transverse de la densité surfacique se rapproche d'une gaussienne, le tronquage dû à l'ouverture n'est déjà plus visible.

B.2.2 Nuage gaussien tronqué deux fois

Nous nous intéressons maintenant au cas où le jet est tronqué deux fois consécutivement à des temps différents au cours de son évolution. C'est cette situation que nous prenons en compte dans le calcul simplifié de l'évolution du jet de la fontaine continue dans la sous-section 3.3.1.

Nous considérons la même situation initiale que dans le paragraphe précédent avec un jet tronqué au bout d'un temps $t = t_2$ par une ouverture circulaire de rayon R_2 . Le jet évolue depuis cette ouverture d'après l'équation d'évolution (B.25) et subit un second tronquage au temps $t = t_3$ par une ouverture circulaire de rayon R_3 . L'évolution de la densité surfacique pour des temps $t > t_3$ est donnée par l'équation (B.24) dans laquelle il faut remplacer

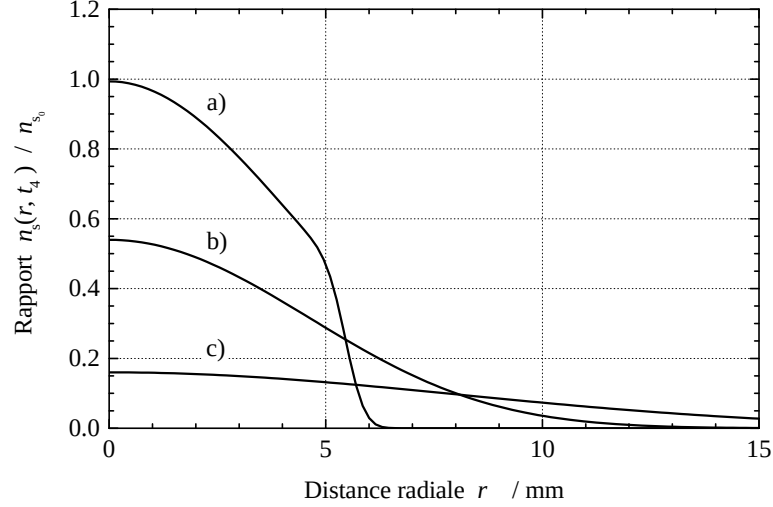


Fig. B.3: Exemples de profil de la densité surfacique au temps $t_4 = 0.638$ s après tronquage par une ouverture circulaire de rayon $R_2 = 5.5$ mm au temps $t_2 = 38$ ms. Le rapport $n_s(r, t_4)/n_{s_0}$ de l'équation (B.30) est représenté en fonction de r pour trois températures transverses : a) $T_t = 10$ nK ; b) $T_t = 1$ μ K et c) $T_t = 5$ μ K. Le rayon quadratique moyen initial vaut $R(t_0) = 6$ mm.

les conditions initiales au temps $t = t_2$ par celles au temps $t = t_3$. A cette fin, déterminons la distribution de vitesse transverse pour des temps $t > t_2$, soit après le tronquage par l'ouverture de rayon R_2 .

Evolution de la distribution de vitesse transverse

Pour cela, procédons de la même manière que dans la sous-section précédente. On peut écrire que la densité surfacique $n_s(\vec{r}, t)$ au temps $t > t_2$ est égale à l'évolution de la densité au temps $t = t_2$ sous l'action de la distribution de vitesse transverse à ce même instant pendant l'intervalle de temps $t - t_2$ (équation (B.6) en intégrant uniquement sur la surface S_2) ; mais elle est aussi égale à l'évolution de la densité à un temps t' ($t_2 < t' < t$) sous l'action de la distribution de vitesse transverse à ce même instant pendant l'intervalle de temps $t - t'$. On a donc :

$$\begin{aligned}
 n_s(\vec{r}, t) &= \iint_{S_2} \rho(\vec{v}_t, \vec{r}', t_2) n_s(\vec{r}', t_2) \delta(\vec{r} - \vec{r}' - \vec{v}_t(t - t_2)) d^2r' d^2v_t \\
 &= \iint_{S_2} \rho_0(\vec{v}_t) n_s(\vec{r}' - \vec{v}_t(t_2 - t_0), t_0) \delta(\vec{r} - \vec{r}' - \vec{v}_t(t - t_2)) d^2r' d^2v_t \\
 &= \iint \rho(\vec{v}_t, \vec{r}', t') n_s(\vec{r}', t') \delta(\vec{r} - \vec{r}' - \vec{v}_t(t - t')) d^2r' d^2v_t \quad (\text{B.32})
 \end{aligned}$$

où nous avons introduit (B.22) dans la deuxième ligne pour exprimer la distribution de vitesse transverse en fonction de la distribution initiale. $\rho(\vec{v}_t, \vec{r}', t')$ est la distribution de vitesse transverse au point $\vec{r}'$ et au temps t' . Par identification de la dernière égalité, on obtient la relation :

$$\begin{aligned} & \int_{S_2} \rho_0(\vec{v}_t) n_s(\vec{r}' - \vec{v}_t(t_2 - t_0), t_0) \delta(\vec{r} - \vec{r}' - \vec{v}_t(t - t_2)) d^2 r' \\ &= \int \rho(\vec{v}_t, \vec{r}', t') n_s(\vec{r}', t') \delta(\vec{r} - \vec{r}' - \vec{v}_t(t - t')) d^2 r' \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Posons $t' = t$ pour connaître la distribution de vitesse au temps t . Il vient :

$$\begin{aligned} & \int_{S_2} \rho_0(\vec{v}_t) n_s(\vec{r}' - \vec{v}_t(t_2 - t_0), t_0) \delta(\vec{r} - \vec{r}' - \vec{v}_t(t - t_2)) d^2 r' \\ &= \int \rho(\vec{v}_t, \vec{r}', t) n_s(\vec{r}', t) \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^2 r' \\ &= \rho(\vec{v}_t, \vec{r}, t) n_s(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

De cette dernière relation, on déduit la densité de probabilité de la distribution de vitesse transverse au point $\vec{r}$ et au temps t :

$$\rho(\vec{v}_t, \vec{r}, t) = \frac{1}{n_s(\vec{r}, t)} \int_{S_2} \rho_0(\vec{v}_t) n_s(\vec{r}' - \vec{v}_t(t_2 - t_0), t_0) \delta(\vec{r} - \vec{r}' - \vec{v}_t(t - t_2)) d^2 r' \quad (\text{B.35})$$

ce qui donne finalement pour une ouverture circulaire de rayon R_2 :

$$\rho(\vec{v}_t, \vec{r}, t) = \rho_0(\vec{v}_t) \frac{n_s(\vec{r} - \vec{v}_t(t - t_0), t_0)}{n_s(\vec{r}, t)} \quad t \geq t_2 \quad (\text{B.36})$$

avec la condition :

$$|\vec{r} - \vec{v}_t(t - t_2)| \leq R_2 \quad t \geq t_2 \quad (\text{B.37})$$

On voit immédiatement que cette condition implique, entre autres, que le module de la vitesse transverse maximale en un point quelconque du plan Oxy est borné. Il y a une troncature dans la distribution de vitesse transverse induite par le tronquage de la densité surfacique au passage de l'ouverture circulaire de rayon R_2 .

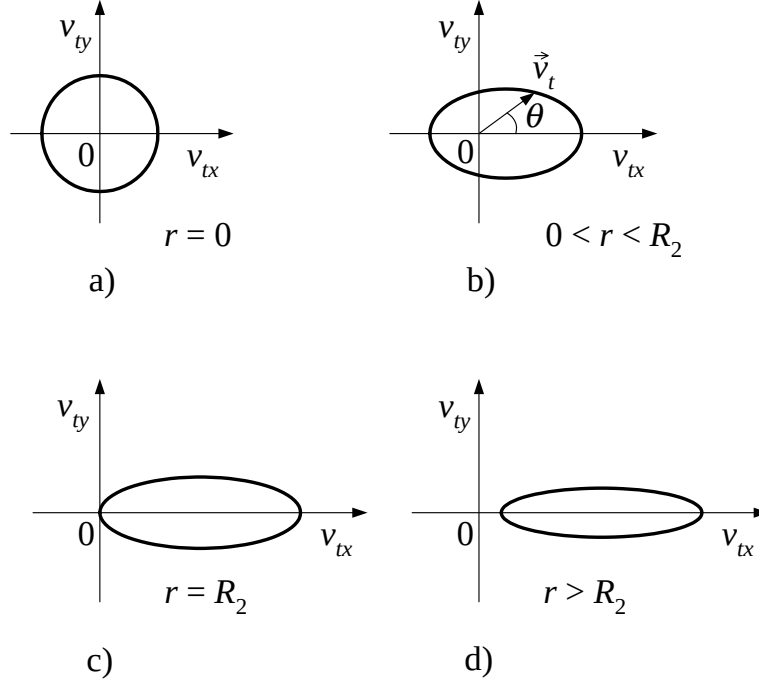


Fig. B.4: Représentation schématique de l'allure des courbes d'isodensité de probabilité de la distribution de vitesse transverse (B.36) à un temps $t > t_2$ pour différentes distances r du centre du jet. a) $r = 0$, la distribution est isotrope ; b) $0 < r < R_2$, la distribution devient anisotrope ; c) $r = R_2$ l'anisotropie de la distribution augmente ; d) $r > R_2$ l'anisotropie s'accroît encore et la vitesse est bornée inférieurement.

Le cas du jet de la fontaine continue :

L'expression explicite, dans le cas du jet de la fontaine continue, de la densité de probabilité de la distribution de vitesse transverse (B.36) est donnée par :

$$\rho(v_t, \theta, r, t) = \frac{1}{\pi v_{t0\text{rms}}^2} \cdot \frac{R^2(t)}{R^2(t_0)} \cdot \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t) r^{2n}} e^{-\alpha_2(t) v_{t0\text{rms}}^2 (t-t_0)^2 r^2 / R^2(t_0)} \\ \times e^{-v_t^2 / \alpha_2(t) R^2(t_0) v_{t0\text{rms}}^2} e^{2rv_t(t-t_0) \cos \theta / R^2(t_0)} \quad t \geq t_2 \quad (\text{B.38})$$

avec la condition (B.37) en plus. La Fig. B.4 représente schématiquement l'allure des courbes d'isodensité de probabilité de la distribution de vitesse transverse après un temps $t > t_2$ pour différentes distances r du centre du jet. On peut notamment faire les remarques suivantes :

- Au centre du jet ($r = 0$), la distribution de vitesse reste toujours isotrope mais le module de la vitesse transverse maximale au temps $t > t_2$

est cette fois limité à une valeur finie :

$$v_{t_{\max}}(t)|_{r=0} = \frac{R_2}{t - t_2} \quad (\text{B.39})$$

- Pour $0 < r < R_2$, la distribution devient anisotrope et le module de la vitesse transverse maximale est limité à :

$$v_{t_{\max}}(t)|_{r < R_2} = \frac{r + R_2}{t - t_2} \quad (\text{B.40})$$

- Pour $r = R_2$, on a un cas particulier. La distribution angulaire n'est plus comprise entre $-\pi < \theta \leq \pi$ mais seulement entre $-\pi/2 < \theta \leq \pi/2$. Cela veut dire que la vitesse transverse est toujours dirigée à l'extérieur d'un cercle de rayon R_2 . L'anisotropie de la distribution s'accroît et le module de la vitesse transverse maximale vaut :

$$v_{t_{\max}}(t)|_{r=R_2} = \frac{2R_2}{t - t_2} \quad (\text{B.41})$$

- Pour $r > R_2$, l'anisotropie augmente encore et la distribution angulaire se rétrécit davantage. On a $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ et le module de la vitesse transverse est maintenant borné inférieurement, il est compris entre :

$$v_{t_{\min}}(t)|_{r > R_2} = \frac{r - R_2}{t - t_2} \quad \text{et} \quad v_{t_{\max}}(t)|_{r > R_2} = \frac{r + R_2}{t - t_2} \quad (\text{B.42})$$

- Lorsque $r \gg R_2$, la distribution devient pratiquement radiale et monocinétique de vitesse moyenne :

$$\bar{v}_t(t)|_{r \gg R_2} \simeq \frac{r}{t - t_2} \quad (\text{B.43})$$

Evolution de la densité surfacique

Calculons maintenant l'évolution de la densité surfacique après le tronçage par l'ouverture circulaire de rayon R_3 au temps t_3 . La densité surfacique pour des temps $t > t_3$ est donnée par l'équation (B.24) dans laquelle on remplace les conditions initiales au temps $t = t_2$ par celles au temps $t = t_3$, et on n'intègre plus sur la surface S_2 mais sur la surface S_3 . Les conditions initiales au temps $t = t_3$ sont $n_s(\vec{r}, t_3)$ pour la densité surfacique et $\rho(\vec{v}_t, \vec{r}, t_3)$ pour la densité de probabilité de la distribution de vitesse transverse donnée par l'équation (B.36) avec la condition (B.37). En supposant que le centre de l'ouverture circulaire coïncide avec celui du jet, nous pouvons écrire :

$$n_s(\vec{r}, t) = \frac{1}{(t - t_3)^2} \int_{S_3} \rho\left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{t - t_3}, \vec{r}', t_3\right) n_s(\vec{r}', t_3) d^2r' \quad t \geq t_3 \quad (\text{B.44})$$

En introduisant (B.36) dans (B.44), nous pouvons exprimer la densité surfacique au temps $t > t_3$ en fonction des conditions initiales au temps $t = t_0$. On obtient alors l'équation d'évolution suivante :

$$n_s(\vec{r}, t) = \frac{1}{(t - t_3)^2} \int_{S_3} \rho_0 \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{t - t_3} \right) n_s \left(\frac{t - t_0}{t - t_3} \vec{r}' - \frac{t_3 - t_0}{t - t_3} \vec{r}, t_0 \right) d^2 r' \quad t \geq t_3 \quad (\text{B.45})$$

avec la condition :

$$\cos(\varphi'(r')) \geq \frac{r'^2(t - t_2)^2 + r^2(t_3 - t_2)^2 - R_2^2(t - t_3)^2}{2rr'(t - t_2)(t_3 - t_2)} \quad (\text{B.46})$$

qui est obtenue en introduisant la vitesse transverse $\vec{v}_t = (\vec{r} - \vec{r}')/(t - t_3)$ dans (B.37), où l'on a posé $t = t_3$, et où φ' est l'angle entre $\vec{r}$ et $\vec{r}'$.

Pour $t > t_3$, on va voir que cette condition revient à intégrer en partie sur une surface inférieure au cercle de rayon R_3 . En coordonnées polaires, l'équation (B.45) avec la condition additionnelle (B.46) s'écrit :

$$n_s(\vec{r}, t) = \frac{1}{(t - t_3)^2} \iint_{S_3 \cap S(r, t)} \rho_0 \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{t - t_3} \right) n_s \left(\frac{t - t_0}{t - t_3} \vec{r}' - \frac{t_3 - t_0}{t - t_3} \vec{r}, t_0 \right) d\varphi' r' dr' \quad (\text{B.47})$$

Le domaine d'intégration $S_3 \cap S(r, t)$ est l'intersection entre la surface S_3 (ouverture circulaire de rayon R_3) et la surface $S(r, t)$, qui dépend des valeurs de r et t , définie par la condition (B.46).

La détermination générale des limites d'intégration de l'équation (B.47) pour tout temps $t > t_3$ et pour des rayons R_2 et R_3 quelconques est relativement compliquée. Nous ne l'effectuerons que dans le cas du jet de la fontaine continue qui nous importe ici. Remarquons, cependant, qu'après la seconde ouverture ($t > t_3$), la densité surfacique ne s'étend plus à l'infini mais est limitée à une valeur finie de r . En effet, la vitesse transverse maximale d'une particule qui traverse la 1^{ère} ouverture de rayon R_2 au temps t_2 et la 2^{ème} de rayon R_3 au temps t_3 est donnée par :

$$v_{t_{\max}} = \frac{R_2 + R_3}{t_3 - t_2} \quad (\text{B.48})$$

La particule qui s'éloignera le plus loin du centre de la densité surfacique pour $t > t_3$ est celle qui passe sur le bord de la 2^{ème} ouverture au temps $t = t_3$ avec une vitesse radiale de module $v_{t_{\max}}$. On en déduit ainsi la valeur du rayon maximal de l'étendue de la densité surfacique dans le plan Oxy au temps t :

$$R_{\max}(t) = R_3 + v_{t_{\max}}(t - t_3) \quad t \geq t_3 \quad (\text{B.49})$$

Le cas du jet de la fontaine continue :

Nous allons déterminer approximativement les limites d'intégration de l'équation (B.47) dans le cas du jet de la fontaine continue. Les deux diaphragmes pris en considération le long de la trajectoire du jet sont, d'une part, l'ouverture circulaire d'entrée dans la trappe à lumière de rayon $R_2 = 5.5$ mm et, d'autre part, le premier passage à travers la cavité. Ce dernier est modélisé par une ouverture circulaire de rayon $R_3 = R_{ca}$, le rayon apparent du trou de passage de la cavité, déterminé dans la sous-section 3.3.1 et qui vaut $R_{ca} \simeq 3.5$ mm. On a donc $R_2 > R_3$. La topologie du domaine d'intégration $S_3 \cap S(r, t_4)$ dépend du temps t . En particulier, elle change pour un temps caractéristique $t^* = \frac{R_2 t_3 - R_3 t_2}{R_2 - R_3}$ qui est égal à 0.463 s dans notre cas. Nous donnons ci-après les limites du domaine d'intégration $S_3 \cap S(r, t_4)$ déterminé à partir de la condition (B.46) pour $R_2 > R_3$ et $t > t^*$. Nous obtenons :

Pour $0 \leq r \leq R'(t)$:

$$(r', \varphi') \in \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r' \leq R_3 \\ -\pi \leq \varphi' \leq +\pi \end{array} \right\} \quad (\text{B.50a})$$

Pour $R'(t) \leq r \leq R''(t)$:

$$\begin{aligned} (r', \varphi') \in & \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r' \leq R_{\text{lim}_1}(r, t) \\ -\pi \leq \varphi' \leq +\pi \end{array} \right\} \\ \cup & \left\{ \begin{array}{l} R_{\text{lim}_1}(r, t) \leq r' \leq R_3 \\ -\varphi_{\text{max}}(r, r', t) \leq \varphi' \leq +\varphi_{\text{max}}(r, r', t) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.50b})$$

Pour $R''(t) \leq r \leq R_{\text{max}}(t)$:

$$(r', \varphi') \in \left\{ \begin{array}{l} R_{\text{lim}_2}(r, t) \leq r' \leq R_3 \\ -\varphi_{\text{max}}(r, r', t) \leq \varphi' \leq +\varphi_{\text{max}}(r, r', t) \end{array} \right\} \quad (\text{B.50c})$$

où nous avons posé :

$$R'(t) = \frac{R_2(t - t_3) - R_3(t - t_2)}{t_3 - t_2} \quad (\text{B.51a})$$

$$R''(t) = R_2 \frac{t - t_3}{t_3 - t_2} \quad (\text{B.51b})$$

$$R_{\max}(t) = \frac{R_3(t - t_2) + R_2(t - t_3)}{t_3 - t_2} \quad (\text{B.51c})$$

$$R_{\lim_1}(r, t) = \frac{R_2(t - t_3) - r(t_3 - t_2)}{t - t_2} \quad (\text{B.51d})$$

$$R_{\lim_2}(r, t) = \frac{r(t_3 - t_2) - R_2(t - t_3)}{t - t_2} \quad (\text{B.51e})$$

et $\varphi_{\max}(r, r', t)$ est défini par la relation :

$$\cos(\varphi_{\max}(r, r', t)) = \frac{r'^2(t - t_2)^2 + r^2(t_3 - t_2)^2 - R_2^2(t - t_3)^2}{2rr'(t - t_2)(t_3 - t_2)} \quad (\text{B.52})$$

Nous représentons dans la Fig. B.5 la surface d'intégration définie par (B.50) pour différentes distances r du centre du jet. En fait, la surface à considérer pour l'intégration (représentée par la zone hachurée sur la figure) correspond au cercle de rayon R_3 pour $0 \leq r \leq R'(t)$ et à l'intersection entre le cercle de rayon R_3 et un cercle de rayon :

$$R'_2(t) = R_2 \frac{t - t_3}{t - t_2} > R_3 \quad (\text{B.53})$$

translaté d'une distance proportionnelle à r pour $R'(t) < r < R_{\max}(t)$. Intégrer l'équation (B.47) sur cette surface est relativement difficile. Pour simplifier le calcul, nous allons l'approximer par une surface circulaire équivalente. Afin de pouvoir calculer également la densité surfacique pour des temps $t < t^*$, dont nous aurons besoin dans l'estimation de la densité moyenne du jet (cf. section 3.5) et pour ne pas compliquer inutilement les calculs, nous admettons que $R'_2(t_4) = R_3$. En fait, c'est approximativement le cas, puisqu'avec les temps de vol donnés dans la sous-section 3.2.2, nous obtenons une valeur de $R'_2 \simeq 4.4 \text{ mm}$ relativement proche de $R_{\text{ca}}^{\text{fit}} \simeq 3.6 \text{ mm}$. Nous pouvons donc paramétrer le rayon $R'_2(t)$ pour $t_3 \leq t \leq t_4$ de la manière suivante :

$$R'_2(t) = \lambda(t)R_3 \quad (\text{B.54})$$

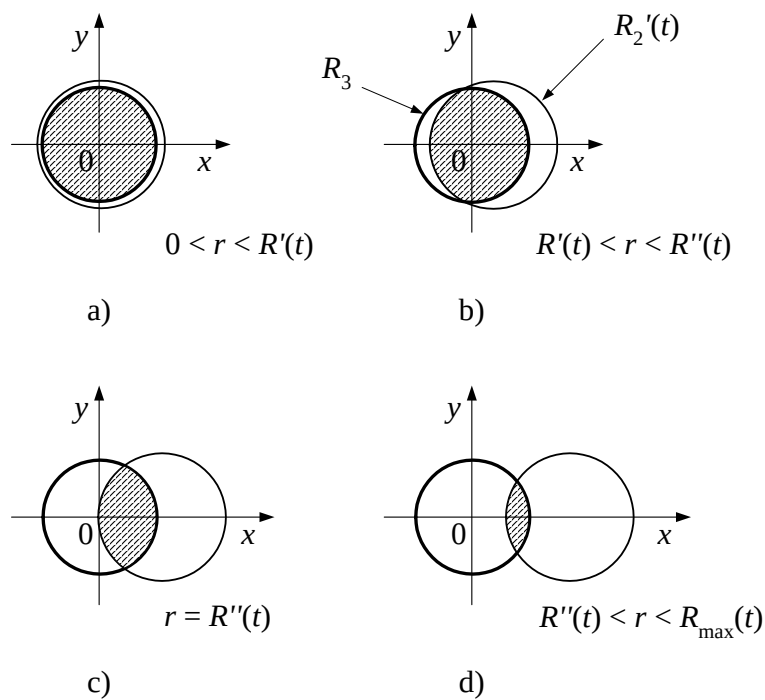


Fig. B.5: Représentation schématique de la surface d'intégration définie par (B.50) pour $t > t^*$ et pour différentes distances r du centre du jet. a) $0 \leq r \leq R'(t)$, la surface correspond au cercle de rayon R_3 ; b), c) et d) la surface pour $r > R'(t)$ correspond à l'intersection entre le cercle de rayon R_3 et un cercle de rayon $R_2'(t)$ translaté selon x d'une distance proportionnelle à r .

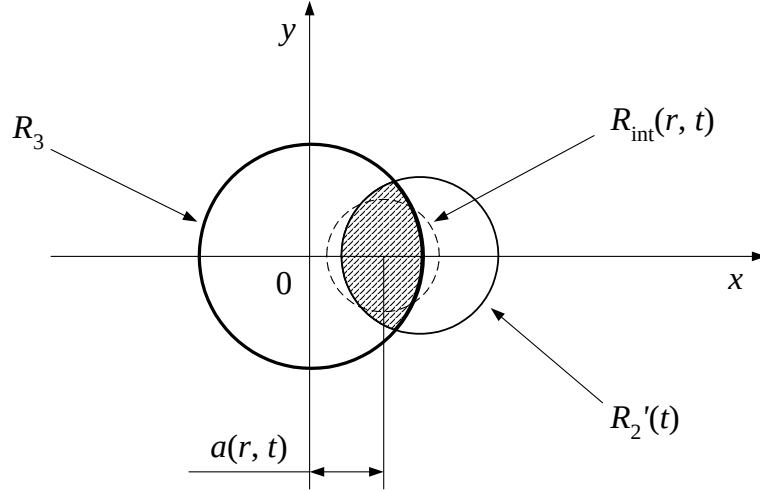


Fig. B.6: Surface circulaire équivalente d'intégration pour $t_3 < t < t_4$. Elle est représentée sur la figure par le cercle en traitillé de rayon $R_{\text{int}}(r, t)$ centré au milieu de l'intersection des deux cercles de rayons R_3 et $R_2'(t)$, soit à la distance $a(r, t)$ du centre du jet.

avec

$$\lambda(t) = \frac{t_4 - t_2}{t - t_2} \cdot \frac{t - t_3}{t_4 - t_3} \quad (\text{B.55})$$

Comme le montre la Fig. B.6, on approxime la surface d'intégration par un cercle de surface environ égale à la zone hachurée et centré à mi-distance entre le rayon minimal et le rayon maximal délimitant cette surface, soit à la distance a du centre du cercle de rayon R_3 . On voit également sur la Fig. B.5 que la surface d'intégration est constante pour des r petits, puis elle diminue lorsque r augmente⁴. Cette décroissance de la surface d'intégration avec r peut être approchée en paramétrisant la surface équivalente d'intégration avec une dépendance quadratique en r . Si on choisit de faire coïncider les deux surfaces lorsque le centre de la surface équivalente se situe à $a = R_3/2$, le rayon $R_{\text{int}}(r, t)$ de la surface équivalente d'intégration s'écrit alors :

$$R_{\text{int}}(r, t) = R_2'(t) \sqrt{1 - \eta(t) r^2 + \xi(t) r^4} \quad (\text{B.56})$$

⁴Ceci est aussi vrai pour $t < t^*$.

avec les coefficients :

$$\eta(t) = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6\pi} \cdot \frac{\lambda'^2(t)}{R_3^2} \quad (\text{B.57a})$$

$$\xi(t) = \left[(1 + \lambda(t))^2 \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6\pi} - 1 \right] \frac{\lambda'^2(t)}{R_3^4 (1 + \lambda(t))^4} \quad (\text{B.57b})$$

$$\lambda'(t) = \frac{t_3 - t_2}{t - t_2} \quad (\text{B.57c})$$

Quand à la distance $a(r, t)$ du centre de la surface équivalente, elle est paramétrisée par l'expression suivante :

$$a(r, t) = \lambda_a(t) r \left(1 - \zeta(t) r + \chi(t) r^2 \right) \quad (\text{B.58})$$

avec les coefficients :

$$\lambda_a(t) = \lambda'(t) \left(1 - \frac{1}{2} \lambda(t) \right) \quad (\text{B.59a})$$

$$\zeta(t) = \frac{\lambda'(t)}{(1 + \lambda(t))^2} \left(\lambda^3(t) + 3\lambda^2(t) + 3\lambda(t) - 1 \right) \frac{1}{2R_3} \quad (\text{B.59b})$$

$$\chi(t) = \frac{\lambda'^2(t)}{(1 + \lambda(t))^2} \left(\lambda^2(t) + 2\lambda(t) - 1 \right) \frac{1}{2R_3^2} \quad (\text{B.59c})$$

Nous sommes maintenant en mesure d'effectuer l'intégration de l'équation (B.47). En introduisant la densité surfacique initiale (B.8) et la distribution de vitesse transverse initiale (B.9) dans (B.47), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} n_s(r, t) &= \frac{1}{(t - t_3)^2} \iint_{S_3 \cap S(r, t)} \rho_0 \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{t - t_3} \right) n_s \left(\frac{t - t_0}{t - t_3} \vec{r}' - \frac{t_3 - t_0}{t - t_3} \vec{r}, t_0 \right) d\varphi' r' dr' \\ &= n_{s_0} \frac{c(t)}{\pi} e^{-\alpha'(t) r^2} \iint_{S_3 \cap S(r, t)} e^{-\beta'(t) r'^2} e^{2\gamma'(t) r r' \cos \varphi'} d\varphi' r' dr' \quad (\text{B.60}) \end{aligned}$$

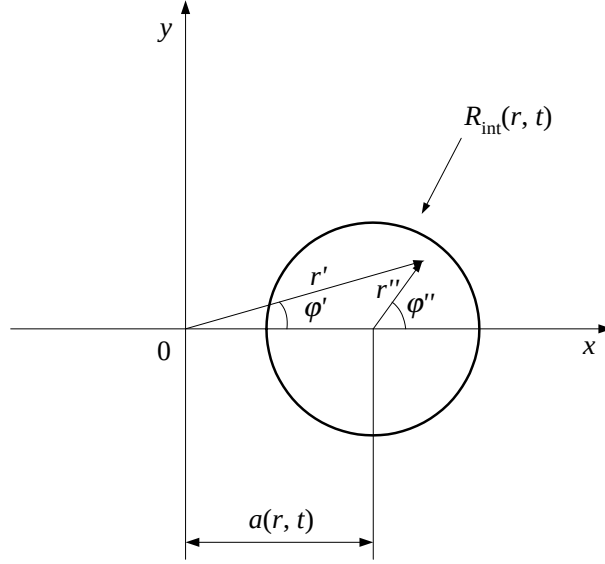


Fig. B.7: Changement de variables d'intégration effectué dans l'équation (B.60).

où nous avons posé :

$$c(t) = \frac{1}{v_{t_{0,\text{rms}}}^2 (t - t_3)^2} \quad (\text{B.61a})$$

$$\alpha'(t) = \frac{R^2(t_3)}{R^2(t_0)} c(t) \quad (\text{B.61b})$$

$$\beta'(t) = \frac{R^2(t)}{R^2(t_0)} c(t) \quad (\text{B.61c})$$

$$\gamma'(t) = \frac{R^2(t_0) + v_{t_{0,\text{rms}}}^2 (t_3 - t_0)(t - t_0)}{R^2(t_0)} c(t) \quad (\text{B.61d})$$

Afin d'intégrer plus aisément l'équation (B.60) sur la surface équivalente d'intégration, procédons au changement de variables d'intégration indiqué dans la Fig. B.7. Nous obtenons avec les nouvelles variables d'intégration :

$$\begin{aligned} n_s(r, t) &= n_{s_0} \frac{c(t)}{\pi} e^{-\alpha(r, t) r^2} \int_0^{R_{\text{int}}(r, t)} e^{-\beta(t) r'^2} \int_0^{2\pi} e^{2\gamma(r, t) r r'' \cos \varphi''} d\varphi'' r'' dr'' \\ &= n_{s_0} 2 c(t) e^{-\alpha(r, t) r^2} \int_0^{R_{\text{int}}(r, t)} e^{-\beta(t) r'^2} I_0(2\gamma(r, t) r r'') r'' dr'' \quad (\text{B.62}) \end{aligned}$$

avec les coefficients suivants :

$$\alpha(r, t) = \alpha'(t) r^2 - \left(2\gamma'(t) r - \beta'(t) a(r, t) \right) a(r, t) \quad (\text{B.63a})$$

$$\beta(t) = \beta'(t) \quad (\text{B.63b})$$

$$\gamma(r, t) = \gamma'(t) r - \beta'(t) a(r, t) \quad (\text{B.63c})$$

où $a(r, t)$ est donné par (B.58). En intégrant (B.62) de la même manière que l'équation (B.28), nous trouvons :

$$n_s(r, t) = n_{s0} \frac{R^2(t_0)}{R^2(t)} e^{-\alpha(r, t)} \sum_{n=0}^{+\infty} A'_n(r, t) \gamma^{2n}(r, t) \quad 0 \leq r \leq R_{\max}(t), \quad t \geq t_3 \quad (\text{B.64})$$

avec :

$$A'_n(r, t) = \frac{\gamma(n+1, \beta(t) R_{\text{int}}^2(r, t))}{\beta^n(t) (n!)^2} \quad (\text{B.65})$$

Le profil de la densité surfacique au temps $t_4 = 0.638 \text{ s}$ dans le cas du jet de la fontaine continue, calculé avec l'équation (B.64) pour trois températures transverses : $T_t = 10 \text{ nK}$, $1 \mu\text{K}$ et $5 \mu\text{K}$, est représenté dans la Fig. B.8.

Formule approchée pour le calcul du flux

Nous nous intéressons dans cette étude à des vitesses quadratiques moyennes de la distribution de vitesse transverse du jet qui sont faibles, typiquement quelques cm/s, ou même inférieure au cm/s si on arrive à refroidir le jet transversalement efficacement. Ces vitesses correspondent à des températures transverses de quelques μK , voir sub- μK . Dans le calcul du flux d'atomes à la détection, effectué dans la sous-section 3.3.1, nous aurons besoin d'intégrer la densité surfacique (B.64) sur la section équivalente de la seconde ouverture de la cavité micro-onde. Pour diminuer le temps de calcul et parce qu'il suffit de connaître la densité surfacique sur la section équivalente, c.-à-d. pour des valeurs de r relativement petites, nous nous limiterons aux 1^{ers} termes de la somme (B.64). Or, si l'on fait tendre la température transverse vers zéro dans l'équation (B.64) de la densité surfacique et que l'on tronque la somme à un nombre fini de termes, on obtient une fonction δ de Dirac centrée en $r = 0$. Afin d'obtenir une formule valable dans la limite des températures transverses proches de zéro et pour des valeurs de r petites, nous pouvons considérer la densité surfacique du jet au temps t comme étant la densité

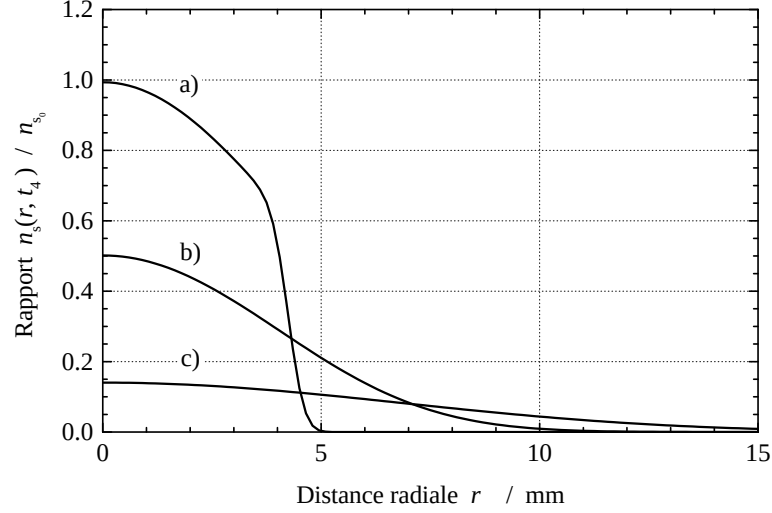


Fig. B.8: Exemples de profil de la densité surfacique au temps $t_4 = 0.638$ s après tronquage par les ouvertures circulaires de rayon $R_2 = 5.5$ mm au temps $t_2 = 38$ ms et $R_3 = 3.6$ mm au temps $t_3 = 0.16$ s. Le rapport $n_s(r, t_4)/n_{s_0}$ de l'équation (B.64) est représenté en fonction de r pour trois températures transverses : a) $T_t = 10$ nK ; b) $T_t = 1$ μ K et c) $T_t = 5$ μ K. Le rayon quadratique moyen initial vaut $R(t_0) = 6$ mm.

surfacique du jet libre (non tronqué au temps $t = t_3$) à laquelle on soustrait l'évolution de son complémentaire par rapport à la surface équivalente d'intégration. En termes mathématiques, cela revient simplement à intégrer l'équation (B.60) dans tout le plan Oxy (évolution libre) et à soustraire son complémentaire par rapport à la surface équivalente d'intégration de rayon $R_{\text{int}}(r, t)$. Nous pouvons alors réécrire l'équation (B.60) sous la forme :

$$n_s(r, t) = n_{s_0} 2 c(t) e^{-\alpha(r, t) r^2} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta(t) r''^2} I_0(2\gamma(r, t) r r'') r'' dr'' - \int_{R_{\text{int}}(r, t)}^{+\infty} e^{-\beta(t) r''^2} I_0(2\gamma(r, t) r r'') r'' dr'' \right) \quad (\text{B.66})$$

ce qui donne, après intégration, pour $0 \leq r \leq R_{\text{max}}(t)$:

$$n_s(r, t) = n_{s_0} \frac{R^2(t_0)}{R^2(t)} \left(e^{-r^2/R^2(t)} - e^{-\alpha(r, t)} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(r, t) \gamma^{2n}(r, t) \right) \quad (\text{B.67})$$

avec :

$$A_n(r, t) = \frac{\Gamma(n+1, \beta(t) R_{\text{int}}^2(r, t))}{\beta^n(t) (n!)^2} \quad (\text{B.68})$$

où $\Gamma(n, x) = \Gamma(n) - \gamma(n, x)$. Remarquons que l'on retrouve bien dans le 1^{er} terme de (B.67) l'équation d'évolution libre de la densité surfacique.

Comme mentionné précédemment, nous aurons à intégrer $n_s(r, t)$ sur la section équivalente du deuxième passage de la cavité micro-onde pour calculer le flux d'atomes à la détection. Puisque le rayon de cette section est petit et que la température transverse du jet est faible, nous pouvons négliger la dépendance avec r de $A_n(r, t)$ et $\gamma(r, t)$ dans (B.67) et prendre leur valeur à $r = 0$. La densité surfacique s'écrit dans ce cas :

$$n_s(r, t) = n_{s0} \frac{R^2(t_0)}{R^2(t)} \left(e^{-r^2/R^2(t)} - e^{-\alpha(t)r^2} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t) r^{2n} \right) \quad 0 \leq r \leq R_{\max}(t) \quad (\text{B.69})$$

avec :

$$\alpha(t) = \alpha'(t) - \lambda_a(t) \left(2\gamma'(t) - \lambda_a(t) \beta'(t) \right) \quad (\text{B.70a})$$

$$A_n(t) = \frac{\gamma^{2n}(t) \Gamma(n+1, \beta(t) R_2'^2(t))}{\beta^n(t) (n!)^2} \quad (\text{B.70b})$$

$$\gamma(t) = \gamma'(t) - \lambda_a(t) \beta'(t) \quad (\text{B.70c})$$

Nous avons vu dans la Fig. B.8 que pour des températures transverses $T_t \geq 1 \mu\text{K}$ la densité surfacique avait un profil qui se rapprochait d'une gaussienne. Afin de simplifier encore les calculs, et comme le rayon initial à e^{-2} du jet après le refroidissement transverse est de l'ordre de grandeur des rayons des ouvertures considérées sur la trajectoire du jet, nous pouvons décrire le profil de la densité surfacique au temps t par une gaussienne de rayon quadratique moyen déterminé à partir de l'équation (B.69).

Nous arrivons ainsi, enfin, à la forme finale de l'expression de la densité surfacique pour $t_3 \leq t \leq t_4$:

$$n_s(r, t) = n_s(t) e^{-r^2/R^{*2}(t)} \quad (\text{B.71})$$

où :

$$n_s(t) = n_{s0} \frac{R^2(t_0)}{R^2(t)} \left(1 - A_0(t) \right) \quad (\text{B.72})$$

et le rayon quadratique moyen effectif $R^*(t)$ au temps t est donné par :

$$R^{*2}(t) = \frac{R^4(t) - \alpha^{-2}(t) \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)! A_n(t) \alpha^{-n}(t)}{R^2(t) - \alpha^{-1}(t) \sum_{n=0}^{+\infty} n! A_n(t) \alpha^{-n}(t)} \quad (\text{B.73})$$

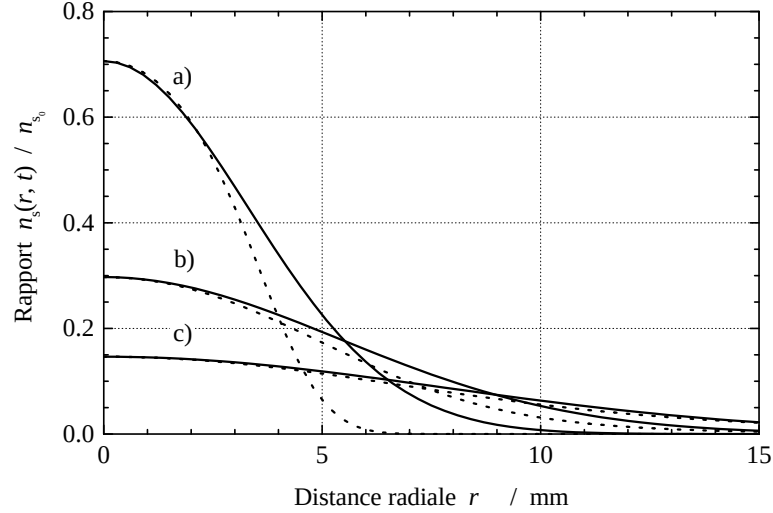


Fig. B.9: Comparaison de l'évolution du profil de la densité surfacique après tronquage par les ouvertures circulaires de rayon $R_2 = 5.5$ mm au temps $t_2 = 38$ ms et $R_3 = 3.6$ mm au temps $t_3 = 0.16$ s. Le rapport $n_s(r, t)/n_{s_0}$ est représenté en fonction de r pour trois temps : a) $t = 0.2$ s; b) $t = 0.4$ s et c) $t = 0.6$ s. Les courbes en traitillé correspondent à l'équation (B.64) et celles en trait continu à l'équation simplifiée (B.71). Les autres paramètres sont : $T_t = 5$ μ K et $R(t_0) = 6$ mm.

C'est cette expression (B.71) que nous utilisons pour le calcul du flux d'atomes à la détection (sous-section 3.3.1) et l'estimation de la densité moyenne du jet (section 3.5).

Nous comparons dans la Fig. B.9 l'évolution du profil de la densité surfacique au cours du temps obtenue avec la formule simplifiée (B.71) avec celle calculée avec la formule "exacte" (B.64). Le rapport $n_s(r, t)/n_{s_0}$ est représenté en fonction de la distance r pour $t = 0.2$ s, 0.4 s et 0.6 s et pour une température transverse de $T_t = 5$ μ K. Les courbes en traitillé sont calculées avec la formule "exacte" et celles en trait continu avec la formule simplifiée. On constate que l'approximation du profil de la densité surfacique par une gaussienne devient moins bon lorsque t est proche de $t = t_3$, puisque le profil initial de la densité (à $t = t_3$) est tronqué. Par contre, pour des temps $t \gtrsim 2 t_3$ cette approximation est très bonne.

Dans la Fig. B.10 nous faisons la même comparaison de profil que dans la Fig. B.9, mais cette fois pour une densité surfacique au temps $t_4 = 0.638$ s, c.-à-d. à l'endroit du deuxième passage de la cavité, et pour trois températures transverses : $T_t = 10$ nK, 1 μ K et 5 μ K. On remarque que pour des températures transverses très proches de zéro et des distances $r > R_3$, l'ap-

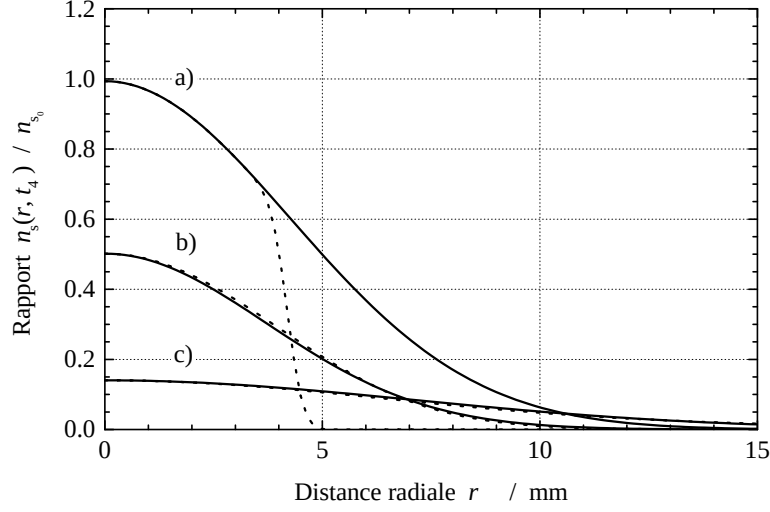


Fig. B.10: Comparaison de profil de la densité surfacique au temps $t_4 = 0.638$ s après tronquage par les ouvertures circulaires de rayon $R_2 = 5.5$ mm au temps $t_2 = 38$ ms et $R_3 = 3.6$ mm au temps $t_3 = 0.16$ s. Le rapport $n_s(r, t_4)/n_{s_0}$ est représenté en fonction de r pour trois températures transverses : a) $T_t = 10$ nK ; b) $T_t = 1$ μ K et c) $T_t = 5$ μ K. Les courbes en traitillé correspondent à l'équation (B.64) et celles en trait continu à l'équation simplifiée (B.71). Le rayon quadratique moyen initial vaut $R(t_0) = 6$ mm.

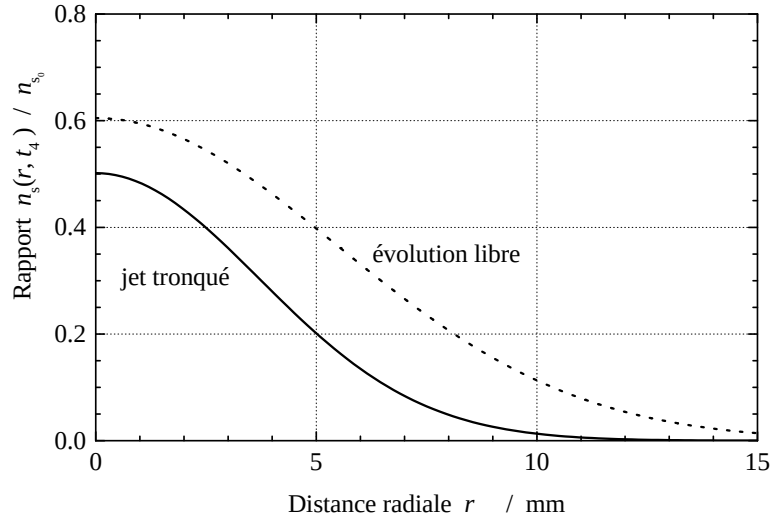


Fig. B.11: Comparaison de profil de la densité surfacique au temps $t_4 = 0.638$ s pour une température transverse de $T_t = 1$ μ K. La courbe en traitillé est calculée avec l'équation (B.17) pour une évolution libre du jet et la courbe en trait continu correspond à l'équation simplifiée (B.71). Le rayon quadratique moyen initial vaut $R(t_0) = 6$ mm.

proximation par une gaussienne est moins bonne comme on pouvait s'y attendre puisque le profil de densité est très similaire au profil initial qui est tronqué. Dans tous les autres cas elle est très bonne.

Pour terminer, nous comparons encore dans la Fig. B.11 le profil de la densité surfacique, au temps $t = t_4$, correspondant à une évolution libre du jet (équation (B.17), courbe en traitillé) à celui obtenu avec la formule simplifiée (courbe en trait continu). Les courbes sont calculées pour une température transverse de $T_t = 1 \mu\text{K}$ et un rayon quadratique moyen de $R(t_0) = 6 \text{ mm}$. On remarque que la prise en compte du tronquage du jet par les ouvertures circulaires au temps $t = t_2$ et $t = t_3$ modifie déjà passablement la densité surfacique, bien que la température transverse soit très faible et le rayon quadratique initial proche du rayon des ouvertures. Ceci, aussi bien en ce qui concerne sa valeur au centre du jet que son étendue transverse.

Dans le cas du jet de la fontaine continue, nous voyons que la formule simplifiée (B.71) est amplement suffisante pour rendre compte de l'effet des diaphragmes dans le calcul de la densité surfacique du jet au-dessus de la cavité. Ceci d'autant plus que nous désirons connaître la densité surfacique seulement sur la section des diaphragmes, soit relativement proche du centre du jet.

Annexe C

Distribution des positions transverses

Cette annexe est consacrée au calcul approché de la distribution des positions transverses des trajectoires atomiques dans les zones d'interaction d'après le modèle de la densité surfacique développé dans l'annexe précédente. Nous en déduisons notamment une expression simplifiée de la densité de probabilité de cette distribution que nous utilisons dans les calculs du chapitre 4.

C.1 Distribution approchée

Nous allons déterminer la distribution des positions transverses des trajectoires atomiques dans les zones d'interaction dans le plan médian de la cavité micro-onde. Pour cela, nous nous basons sur les résultats obtenus avec le modèle de la densité surfacique développé dans l'annexe B. La densité de probabilité $\kappa(\vec{r}_3, \vec{r}_4)$ que la position transverse (cf. schéma de la Fig. C.1) de la trajectoire d'un atome passe dans la première zone d'interaction en $\vec{r} = \vec{r}_3$ et dans la deuxième en $\vec{r} = \vec{r}_4$ est donnée, d'après les résultats de l'annexe B et en supposant que le jet est centré sur les ouvertures de la cavité, par :

$$\kappa(\vec{r}_3, \vec{r}_4) = n_s(\vec{r}_3, t_3) \frac{1}{(t_4 - t_3)^2} \rho\left(\frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_3}{t_4 - t_3}, \vec{r}_3, t_3\right) \quad (\text{C.1})$$

avec la condition :

$$\left| \vec{r}_3 - \frac{t_3 - t_2}{t_4 - t_3} (\vec{r}_4 - \vec{r}_3) \right| \leq R_2 \quad (\text{C.2})$$

où $n_s(\vec{r}, t_3)$ et $\rho(\vec{v}_t, \vec{r}, t_3)$ sont respectivement la densité surfacique et la distribution de vitesse transverse du jet dans le plan médian de la première zone

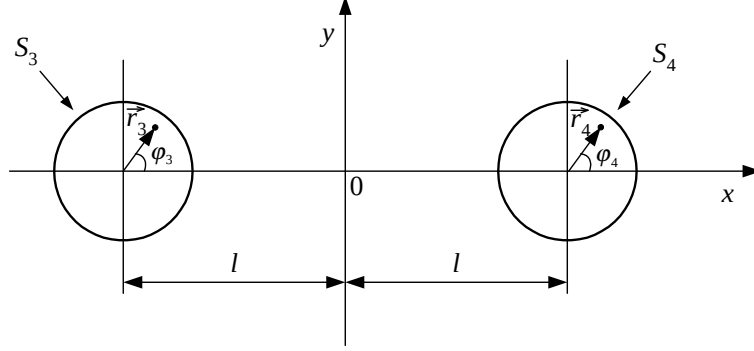


Fig. C.1: Schéma des coordonnées de la position transverse des trajectoires atomiques dans le plan médian de la cavité micro-onde. (r_3, φ_3) sont les coordonnées dans la première zone d'interaction et (r_4, φ_4) celles dans la deuxième. S_3 et S_4 sont les sections apparentes des ouvertures de la cavité.

d'interaction. R_2 est le rayon de l'ouverture circulaire à la sortie du piège à lumière. $\kappa(\vec{r}_3, \vec{r}_4)$ peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} \kappa(\vec{r}_3, \vec{r}_4) &= \frac{1}{(t_4 - t_3)^2} \rho_0 \left(\frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_3}{t_4 - t_3} \right) n_s \left(\frac{t_4 - t_1}{t_4 - t_3} \vec{r}_3 - \frac{t_3 - t_1}{t_4 - t_3} \vec{r}_4, t_1 \right) \\ &= n_{s0} \frac{c(t_4)}{\pi} e^{-\alpha'(t_4) r_4^2} e^{-\beta'(t_4) r_3^2} e^{2\gamma'(t_4) r_4 r_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_4)} \end{aligned} \quad (C.3)$$

Il faut maintenant normaliser cette densité de probabilité sur la section apparente des deux ouvertures de la cavité S_3 et S_4 . Pour simplifier le calcul, nous négligeons la condition (C.2). Dans ce cas, la densité de probabilité normalisée $\kappa_N(\vec{r}_3, \vec{r}_4)$ est définie par la condition :

$$\int_{S_3} \int_{S_4} \kappa_N(\vec{r}_3, \vec{r}_4) d^2 r_3 d^2 r_4 = 1 \quad (C.4)$$

En effectuant le calcul des intégrales de la même manière que dans l'annexe B, nous obtenons finalement l'expression suivante pour la densité de probabilité normalisée $\kappa_N(\vec{r}_3, \vec{r}_4)$ de la distribution des positions transverses des trajectoires atomiques dans les zones d'interaction :

$$\kappa_N(\vec{r}_3, \vec{r}_4) \simeq N_\kappa e^{-\alpha'(t_4) r_4^2} e^{-\beta'(t_4) r_3^2} e^{2\gamma'(t_4) r_4 r_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_4)} \quad (C.5)$$

avec

$$N_\kappa^{-1} = \frac{\pi^2}{c^2(t_4)} \cdot \frac{R^4(t_1)}{R^2(t_3)R^2(t_4)} \sum_{n=0}^{+\infty} A'_n \gamma(n+1, \alpha'(t_4) R_{ca}^2) \gamma(n+1, \beta'(t_4) R_{ca}^2) \quad (C.6)$$

et

$$A'_n = \frac{1}{(n!)^2} \cdot \frac{\gamma'^{2n}(t_4)}{\alpha'^n(t_4) \beta'^n(t_4)} \quad (\text{C.7})$$

Les autres grandeurs sont définies dans l'annexe B.

C.2 Distribution simplifiée utilisée dans les calculs

Pour ne pas compliquer inutilement les calculs du chapitre 4, où intervient cette distribution, nous allons simplifier davantage l'expression (C.5) obtenue. Nous avons déduit dans le chapitre 3 que le jet continu a probablement une température transverse résiduelle, après refroidissement transverse 2D, de l'ordre de $T_t \simeq 6 \mu\text{K}$. Pour une telle température, et après un intervalle de temps de vol de $\Delta T_v = t_4 - t_1 \simeq 0.6 \text{ s}$, le jet qui arrive dans la deuxième zone d'interaction est très étendu transversalement. Sa densité surfacique à cet endroit ne va donc pas varier de manière importante sur la section apparente de l'ouverture de la cavité. Par conséquent, on peut négliger le dernier terme de (C.5). Ceci revient en fait à considérer que les trajectoires atomiques sont complètement "mélangées" entre la première zone d'interaction et la deuxième. La densité de probabilité normalisée $\kappa_N^*(\vec{r}_3, \vec{r}_4)$ de la distribution des positions transverses simplifiée devient ainsi :

$$\kappa_N^*(\vec{r}_3, \vec{r}_4) \simeq N_3 e^{-\beta'(t_4) r_3^2} N_4 e^{-\alpha'(t_4) r_4^2} \quad (\text{C.8})$$

avec

$$N_3 = \frac{\beta'(t_4)}{\pi} \left(1 - e^{-\beta'(t_4) R_{\text{ca}}^2} \right)^{-1} \quad (\text{C.9})$$

et où la constante N_4 se déduit de N_3 en remplaçant $\beta'(t_4)$ par $\alpha'(t_4)$. Remarquons que la simplification que nous venons de faire n'est évidemment pas valable pour un jet dont la température transverse serait nettement inférieure à $T_t \simeq 6 \mu\text{K}$, comme il est prévu d'en obtenir dans le futur au moyen de schémas de refroidissement transverse plus efficaces.

Annexe D

Coefficients de Fourier

Nous reportons dans cette annexe la détermination des coefficients du développement en série de Fourier de la partie déterministe du signal d'erreur $a(t, T)$. Ces coefficients sont utilisés dans les calculs relatifs aux schémas de modulation-démodulation examinés dans le chapitre 5, ainsi que dans le chapitre 6 lors de l'étude de l'effet Dick continu.

D.1 Développement général

Nous commençons par déterminer le développement en série de Fourier de la fonction $a(t, T)$ dans le cas général, sans se référer à un type de modulation particulier. Pour le calcul des coefficients de Fourier, nous considérons dans ce travail uniquement le cas d'une forme d'onde de démodulation $d(t)$ carrée et nous prenons en compte un éventuel déphasage φ entre la fonction de modulation $\phi_{\text{mod}}(t)$ et $d(t)$.

Des propriétés de symétrie (5.10) supposées de $\phi_{\text{mod}}(t)$, on en déduit que la fonction $c(t, T)$ est périodique, de période T_{M} , et de moyenne nulle. De plus, son spectre ne contient que des harmoniques impaires. Il en va donc de même pour $\sin(2\phi_{\text{m}} c(t, T))$. On peut ainsi écrire son développement en série de Fourier sous la forme :

$$\sin(2\phi_{\text{m}} c(t, T)) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left\{ a_{2p+1}(T) \cos((2p+1) 2\pi f_{\text{M}} t) + b_{2p+1}(T) \sin((2p+1) 2\pi f_{\text{M}} t) \right\} \quad (\text{D.1})$$

où les coefficients $a_{2p+1}(T)$ et $b_{2p+1}(T)$ dépendent du type de modulation et f_{M} est la fréquence de modulation. La forme d'onde de démodulation $d(t)$

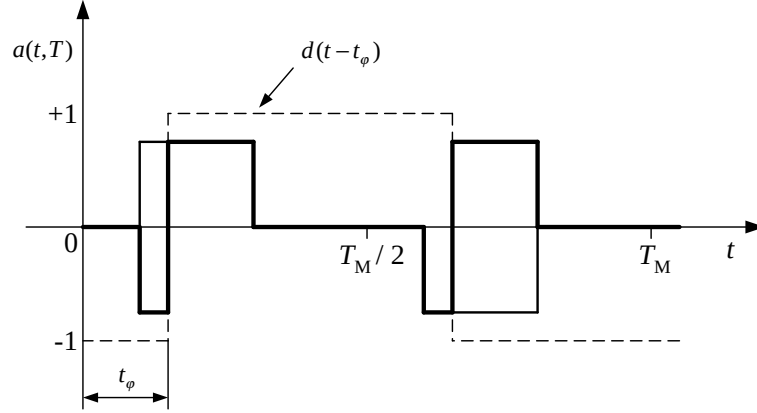


Fig. D.1: Schéma de la multiplication de la fonction $\sin(2\phi_m c(t, T))$ (trait continu fin) par la fonction de démodulation $d(t - t_\varphi)$ (traitillé). La fonction résultante (trait continu épais) est $a(t, T)$. T_M est la période de modulation et t_φ le retard introduit par le déphasage φ .

est supposée être une fonction carrée parfaite, de période T_M , définie par :

$$d(t) = \begin{cases} +1 & 0 < t < T_M/2 \\ -1 & T_M/2 < t < T_M \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

La fonction $a(t, T)$ qui résulte de la multiplication de $\sin(2\phi_m c(t, T))$ par $d(t)$ est maintenant, comme l'illustre la Fig. D.1, une fonction périodique de période $T_M/2$. Nous prenons en compte un déphasage φ entre la fonction de modulation $\phi_{\text{mod}}(t)$ et la fonction de démodulation $d(t)$ en introduisant un retard t_φ comme indiqué dans la Fig. D.1. Calculons les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction $a(t, T)$.

La valeur moyenne $c_0(T)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} c_0(T) &= \frac{2}{T_M} \int_0^{T_M/2} a(t, T) dt \\ &= \frac{2}{T_M} \left\{ - \int_0^{t_\varphi} \sin(2\phi_m c(t, T)) dt + \int_{t_\varphi}^{T_M/2} \sin(2\phi_m c(t, T)) dt \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

En introduisant le déphasage φ , on obtient :

$$\begin{aligned} c_0(T) &= \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \left\{ a_{2p+1}(T) \sin((2p+1)\varphi) \right. \\ &\quad \left. + b_{2p+1}(T) \cos((2p+1)\varphi) \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Les autres coefficients $a_{2k}(T)$ et $b_{2k}(T)$ sont définis par :

$$a_{2k}(T) = \frac{4}{T_M} \int_0^{T_M/2} a(t, T) \cos(4k\pi f_M t) dt \quad (D.5a)$$

$$b_{2k}(T) = \frac{4}{T_M} \int_0^{T_M/2} a(t, T) \sin(4k\pi f_M t) dt \quad (D.5b)$$

En les calculant de la même manière que $c_0(T)$, il vient :

$$\begin{aligned} a_{2k}(T) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2 - (2k)^2} \left\{ a_{2p+1}(T) \left[(2p+1) \sin((2p+1)\varphi) \right. \right. \\ \times \cos(2k\varphi) - 2k \cos((2p+1)\varphi) \sin(2k\varphi) \Big] + b_{2p+1}(T) \left[(2p+1) \right. \\ \times \cos((2p+1)\varphi) \cos(2k\varphi) + 2k \sin((2p+1)\varphi) \sin(2k\varphi) \Big] \Big\} \quad (D.6) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_{2k}(T) = -\frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2 - (2k)^2} \left\{ a_{2p+1}(T) \left[(2p+1) \sin((2p+1)\varphi) \right. \right. \\ \times \sin(2k\varphi) + 2k \cos((2p+1)\varphi) \cos(2k\varphi) \Big] + b_{2p+1}(T) \left[(2p+1) \right. \\ \times \cos((2p+1)\varphi) \sin(2k\varphi) - 2k \sin((2p+1)\varphi) \cos(2k\varphi) \Big] \Big\} \quad (D.7) \end{aligned}$$

Voyons maintenant quelle est l'expression des coefficients $a_{2p+1}(T)$ et $b_{2p+1}(T)$ pour les trois types de modulation considérés.

D.2 Cas des trois types de modulation

D.2.1 Modulation carrée de phase

La fonction de modulation $\phi_{\text{mod}}(t)$ pour une modulation carrée de phase est représentée dans la Fig. D.2. Elle est définie par :

$$\phi_{\text{mod}}(t) = \phi_m h(t) \quad (D.8)$$

où ϕ_m est l'amplitude de modulation et $h(t)$ la fonction suivante :

$$h(t) = \begin{cases} +1 & 0 < t < T_M/2 \\ -1 & T_M/2 < t < T_M \end{cases} \quad (D.9)$$

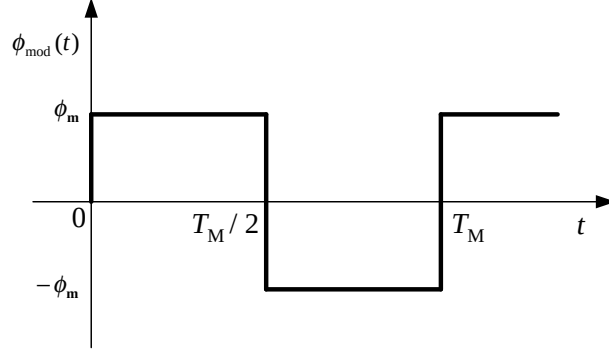


Fig. D.2: Représentation de la fonction de modulation $\phi_{\text{mod}}(t)$ dans le cas de la modulation carrée de phase. T_M est la période de modulation et ϕ_m l'amplitude de modulation.

Le développement en série de Fourier de $h(t)$ est donné par :

$$h(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \sin((2p+1)2\pi f_M t) \quad (\text{D.10})$$

La différence de phase apparente $\phi_{\text{mod}}(t, T)$ définie par (5.7) se déduit facilement avec (D.10). De l'équation (5.11), on en tire la fonction $c(t, T)$ qui vaut :

$$c(t, T) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \sin((2p+1)\pi f_M T^*) \times \cos((2p+1)2\pi f_M (t - T_{\text{dl}}^* - T^*/2)) \quad (\text{D.11})$$

Comme cette fonction ne prend que trois valeurs ($-1, 0$ et $+1$), la fonction $\sin(2\phi_m c(t, T))$ peut être exprimée sous la forme :

$$\sin(2\phi_m c(t, T)) = \sin(2\phi_m) c(t, T) \quad (\text{D.12})$$

Par comparaison de l'équation (D.1) avec (D.12) et (D.11), on en déduit la valeur des coefficients $a_{2p+1}(f_M, T)$ et $b_{2p+1}(f_M, T)$:

$$a_{2p+1}(f_M, T) = \frac{4}{\pi} \sin(2\phi_m) \frac{1}{2p+1} \sin((2p+1)\pi f_M T^*) \times \cos((2p+1)\pi f_M (2T_{\text{dl}}^* + T^*)) \quad (\text{D.13a})$$

$$b_{2p+1}(f_M, T) = \frac{4}{\pi} \sin(2\phi_m) \frac{1}{2p+1} \sin((2p+1)\pi f_M T^*) \times \sin((2p+1)\pi f_M (2T_{\text{dl}}^* + T^*)) \quad (\text{D.13b})$$

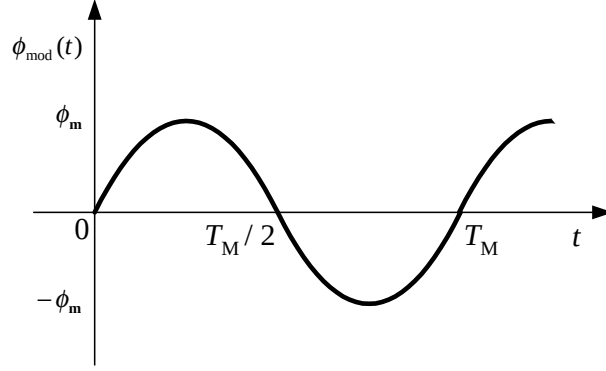


Fig. D.3: Représentation de la fonction de modulation $\phi_{\text{mod}}(t)$ dans le cas de la modulation sinusoïdale de fréquence. T_M est la période de modulation et ϕ_m l'amplitude de modulation.

D.2.2 Modulation sinusoïdale de fréquence

La fonction de modulation $\phi_{\text{mod}}(t)$ pour une modulation sinusoïdale de fréquence ou sinusoïdale de phase est représentée dans la Fig. D.3. Elle est définie par :

$$\phi_{\text{mod}}(t) = \phi_m \sin(2\pi f_M t) \quad (\text{D.14})$$

La différence de phase apparente $\phi_{\text{mod}}(t, T)$ se calcule facilement à partir de (D.14) et, par suite, la fonction $c(t, T)$:

$$c(t, T) = \sin(\pi f_M T^*) \cos(2\pi f_M (t - T_{\text{dl}}^* - T^*/2)) \quad (\text{D.15})$$

On peut développer en série de Fourier la fonction $\sin(2\phi_m c(t, T))$ avec $c(t, T)$ donné par (D.15) d'après la relation [VA89] :

$$\sin(z \cos t) = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p J_{2p+1}(z) \cos((2p+1)t) \quad (\text{D.16})$$

où $J_n(z)$ est la fonction de Bessel de 1^{ère} espèce d'ordre n . Il vient alors :

$$\begin{aligned} \sin(2\phi_m c(t, T)) &= 2 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p J_{2p+1}(2\phi_m \sin(\pi f_M T^*)) \\ &\quad \times \cos((2p+1) 2\pi f_M (t - T_{\text{dl}}^* - T^*/2)) \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

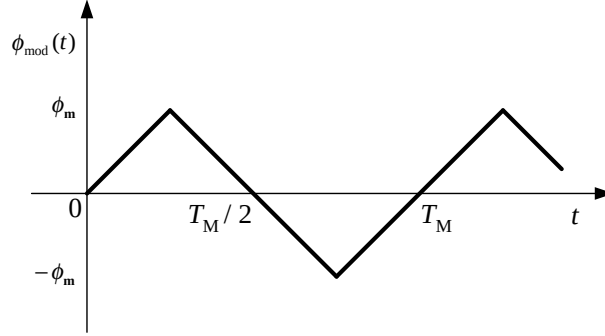


Fig. D.4: Représentation de la fonction de modulation $\phi_{\text{mod}}(t)$ dans le cas de la modulation carrée de fréquence ou triangulaire de phase. T_M est la période de modulation et ϕ_m l'amplitude de modulation.

Par identification de cette équation avec (D.1), on obtient les coefficients suivants :

$$a_{2p+1}(\omega_m, f_M, T) = (-1)^p 2J_{2p+1} \left(\omega_m T^* \frac{\sin(\pi f_M T^*)}{\pi f_M T^*} \right) \times \cos((2p+1)\pi f_M(2T_{\text{dl}}^* + T^*)) \quad (\text{D.18a})$$

$$b_{2p+1}(\omega_m, f_M, T) = (-1)^p 2J_{2p+1} \left(\omega_m T^* \frac{\sin(\pi f_M T^*)}{\pi f_M T^*} \right) \times \sin((2p+1)\pi f_M(2T_{\text{dl}}^* + T^*)) \quad (\text{D.18b})$$

où nous avons introduit l'amplitude de modulation normalisée $\omega_m T^*$ en utilisant la relation $\omega_m = \phi_m 2\pi f_M$.

D.2.3 Modulation carrée de fréquence

Abordons pour finir le cas de la modulation carrée de fréquence ou triangulaire de phase. La modulation temporelle de la phase $\phi_{\text{mod}}(t)$ est schématisée dans la Fig. D.4. Elle est définie par :

$$\phi_{\text{mod}}(t) = \begin{cases} \omega_m t & 0 < t < T_M/4 \\ \omega_m (T_M/2 - t) & T_M/4 < t < 3T_M/4 \\ \omega_m (t - T_M) & 3T_M/4 < t < T_M \end{cases} \quad (\text{D.19})$$

où ω_m est l'amplitude de modulation en fréquence. Le développement en série de Fourier de $\phi_{\text{mod}}(t)$ est donné par :

$$\phi_{\text{mod}}(t) = \frac{2}{\pi^2} \omega_m T_M \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \sin((2p+1)2\pi f_M t) \quad (\text{D.20})$$

La différence de phase apparente $\phi_{\text{mod}}(t, T)$ définie par (5.7) se déduit de (D.20). On a la relation suivante entre ϕ_{m} et ω_{m} pour la modulation carrée de fréquence :

$$\phi_{\text{m}} = \omega_{\text{m}} T_{\text{M}} / 4 \quad (\text{D.21})$$

Avec cette relation, on obtient pour la fonction $c(t, T)$:

$$\begin{aligned} c(t, T) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \sin((2p+1)\pi f_{\text{M}} T^*) \\ \times \cos((2p+1)2\pi f_{\text{M}}(t - T_{\text{d1}}^* - T^*/2)) \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

La fonction $\sin(2\phi_{\text{m}} c(t, T))$ ne peut pas, dans ce cas, s'exprimer simplement sous la forme d'une série. Les coefficients de son développement en série de Fourier se calculent alors par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a_{2p+1}(\omega_{\text{m}}, f_{\text{M}}, T) = \\ = \frac{4}{T_{\text{M}}} \int_0^{T_{\text{M}}/2} \sin\left(\omega_{\text{m}} \frac{T_{\text{M}}}{2} c(t, T)\right) \cos((2p+1)2\pi f_{\text{M}} t) dt \end{aligned} \quad (\text{D.23a})$$

$$\begin{aligned} b_{2p+1}(\omega_{\text{m}}, f_{\text{M}}, T) = \\ = \frac{4}{T_{\text{M}}} \int_0^{T_{\text{M}}/2} \sin\left(\omega_{\text{m}} \frac{T_{\text{M}}}{2} c(t, T)\right) \sin((2p+1)2\pi f_{\text{M}} t) dt \end{aligned} \quad (\text{D.23b})$$

avec $c(t, T)$ donné par (D.22).

D.3 Expression des coefficients de Fourier de $a(t, T)$ en fonction de ceux de la fonction de démodulation $d(t)$

Nous donnons encore ci-dessous l'expression des coefficients de Fourier de la fonction $a(t, T)$ intervenant dans la formule de l'effet Dick continu (6.23) en fonction des coefficients de Fourier d_{2k+1} de la fonction de démodulation $d(t)$. La connaissance de ces relations peut être utile pour une éventuelle évaluation ultérieure de l'effet d'une forme d'onde de démodulation imparfaite sur la dégradation de la stabilité de fréquence due à l'effet Dick continu. Dans le cas d'un jet monocinétique et pour une démodulation en phase, les relations

sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 c_0^2(T) &= \sum_{p=0}^{+\infty} d_{2p+1}^2 \left(a_{2p+1}^2(T) + b_{2p+1}^2(T) \right) \\
 |c_{2k}(T)|^2 &= 2 \sum_{p=0}^{+\infty} d_{2p+1}^2 \left(a_{2(k+p)+1}^2(T) + b_{2(k+p)+1}^2(T) \right) \\
 &\quad + \sum_{p=0}^{k-1} d_{2p+1}^2 \left(a_{2(k-p)-1}^2(T) + b_{2(k-p)-1}^2(T) \right) \quad (\text{D.24a})
 \end{aligned}$$

Annexe E

Equations de Bloch

Nous reportons dans cette annexe les équations de Bloch magnétiques qui gouvernent l'interaction entre un atome considéré comme un système à deux niveaux et un champ magnétique radiofréquence. Nous donnons en particulier l'expression des matrices de rotation qui sont utilisées dans le calcul des transitoires de la modulation carrée de phase dans le chapitre 5.

E.1 Equations de Bloch et spin fictif

Les équations de Bloch ont été dérivées en premier dans le cadre de la résonance magnétique. Dans leur forme initiale, elles permettent de décrire la dynamique des degrés de liberté internes d'un atome sous l'action d'un champ magnétique radiofréquence. La dérivation de ces équations est présentée par de nombreux auteurs (cf. par ex. [VA89, LM95]), ainsi nous nous contentons de les rappeler ici dans le cadre des étalons de fréquence au césium. Dans le cas d'une interaction dipolaire magnétique, dans un jet atomique, entre les deux sous-niveaux hyperfins $|F = 3, m_F = 0\rangle$ et $|F = 4, m_F = 0\rangle$ de l'état fondamental de l'atome de césium 133 (transition d'horloge), les équations de Bloch s'écrivent de manière générale sous la forme :

$$\frac{d\vec{b}(t)}{dt} = \mathbf{A}(\Omega_c, \phi, \Omega_0, t) \cdot \vec{b}(t) \quad (\text{E.1})$$

avec la matrice :

$$\mathbf{A}(\Omega_c, \phi, \Omega_0, t) = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_0 & -\Omega_c g(t) \sin \phi \\ -\Omega_0 & 0 & \Omega_c g(t) \cos \phi \\ \Omega_c g(t) \sin \phi & -\Omega_c g(t) \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.2})$$

où t est le temps d'interaction et $\vec{b} = (u, v, w)$ le vecteur de Bloch qui décrit les degrés de liberté internes de l'atome. Ses composantes sont inhomogènes

(elles n'ont pas les mêmes unités), mais ont une signification physique bien précise. u et v sont les composantes du dipôle magnétique de l'atome oscillant en phase, respectivement en quadrature avance, avec le champ magnétique radiofréquence $\vec{B}_{\text{RF}}$ appliqué. La dernière composante w est la demi-différence de population relative des deux niveaux, soit :

$$w = \frac{1}{2} (p_4 - p_3) \quad (\text{E.3})$$

avec p_3 et p_4 les populations relatives des niveaux $|F = 3\rangle$ et $|F = 4\rangle$ respectivement. $\Omega_0 = \omega_{\text{RF}} - \omega_0$ est le désaccord entre la pulsation ω_{RF} du champ RF et la pulsation ω_0 de la transition d'horloge de l'atome de césium 133. Ω_c est la fréquence de Rabi de la transition d'horloge définie par l'équation (4.69), $g(t)$ sont éventuelle dépendance temporelle et ϕ la phase du champ RF.

L'équation (E.1) peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{d\vec{b}(t)}{dt} = \vec{\Omega}^*(t) \wedge \vec{b}(t) \quad (\text{E.4})$$

avec $\vec{\Omega}^*(t)$ le vecteur donné par :

$$\vec{\Omega}^*(t) = \begin{pmatrix} \Omega_c g(t) \cos \phi \\ \Omega_c g(t) \sin \phi \\ \Omega_0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.5})$$

L'équation (E.4) montre que l'évolution temporelle du vecteur de Bloch $\vec{b}(t)$ peut être interprétée comme une rotation instantanée autour du vecteur $\vec{\Omega}^*(t)$ dans l'espace $Ouvw$. Comme le montre les équations (E.1) ou (E.4), le module du vecteur de Bloch $|\vec{b}(t)| = 1/2$ est conservé durant le mouvement. Il s'ensuit que l'extrémité du vecteur de Bloch se déplace sur une sphère de rayon $1/2$ (sphère de Bloch) dans l'espace $Ouvw$. En fait, cette interprétation est très générale. En effet, on peut montrer que tout système quantique à deux niveaux peut être ramené à l'interaction d'un spin $1/2$ fictif avec un champ magnétique fictif, soit une precession du spin fictif autour du champ magnétique fictif. Dans notre cas, le spin fictif correspond au vecteur de Bloch $\vec{b}(t)$ et le champ magnétique fictif au vecteur $\vec{\Omega}^*(t)/\gamma$ où γ est le rapport gyromagnétique. On a donc précession du vecteur de Bloch autour du vecteur instantané $\vec{\Omega}^*(t)$ à la fréquence angulaire instantanée :

$$\Omega^*(t) = \sqrt{\Omega_c^2 g^2(t) + \Omega_0^2} \quad (\text{E.6})$$

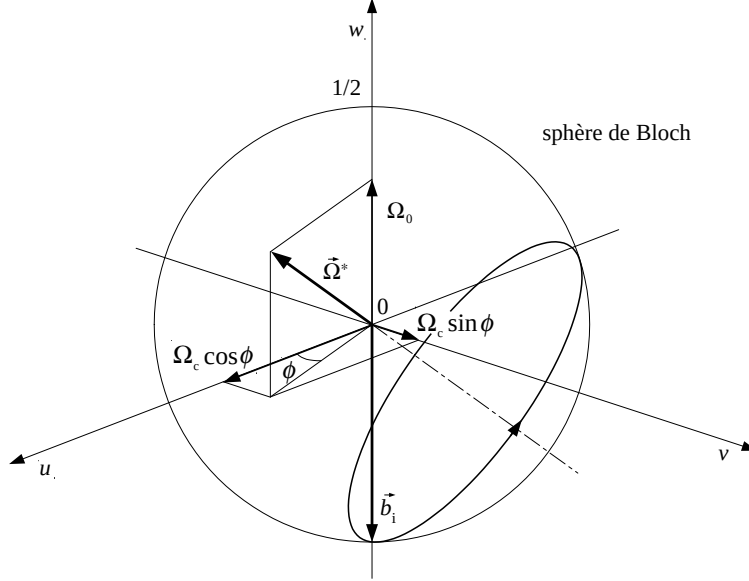


Fig. E.1: Schéma de la sphère de Bloch dans le référentiel tournant à la fréquence angulaire ω_{RF} autour de l'axe Ow par rapport au référentiel du laboratoire. Le vecteur de Bloch initial $\vec{b}_i$ précesse autour du vecteur $\vec{\Omega}^*$ à la fréquence angulaire Ω^* . La condition initiale $\vec{b}_i = (0, 0, -1/2)$, que nous avons représentée, correspond au cas d'un atome sans cohérences micro-ondes et qui se trouve dans l'état $|F = 3, m_F = 0\rangle$.

E.1.1 Cas d'un champ magnétique constant

Dans le cas d'un champ magnétique constant ($g(t) = 1$), la précession du vecteur de Bloch correspond à une rotation à la fréquence angulaire constante $\Omega^* = \sqrt{\Omega_c^2 + \Omega_0^2}$ autour d'un axe fixe déterminé par $\vec{\Omega}^*$ comme le montre le schéma de la Fig. E.1. Dans ce cas, la solution des équations (E.1) ou (E.4) peut être effectuée analytiquement et s'écrit pour un vecteur de Bloch initial $\vec{b}_i$:

$$\vec{b}(t) = \mathbf{R}(\Omega_c, \phi, \Omega_0, \alpha(t)) \cdot \vec{b}_i \quad (\text{E.7})$$

où $\mathbf{R}(\Omega_c, \phi, \Omega_0, \alpha(t))$ est la matrice de rotation du vecteur $\vec{b}_i$ d'un angle $\alpha(t) = \Omega^* t$ autour du vecteur $\vec{\Omega}^*$. Elle peut s'exprimer à partir de la matrice $\mathbf{A}(\Omega_c, \phi, \Omega_0)$ (équ. (E.2) avec $g(t) = 1$) sous la forme :

$$\mathbf{R}(\Omega_c, \phi, \Omega_0, \alpha(t)) = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{A}(\Omega_c, \phi, \Omega_0)}{\Omega^*} \sin \alpha(t) + \frac{\mathbf{A}^2(\Omega_c, \phi, \Omega_0)}{\Omega^{*2}} (1 - \cos \alpha(t)) \quad (\text{E.8})$$

Nous donnons ci-dessous ses éléments de matrice :

$$\mathbf{R}_{11}(\Omega_c, \phi, \Omega_0, \alpha(t)) = \frac{\Omega_c^2}{\Omega^{*2}} \cos^2 \phi (1 - \cos \alpha(t)) + \cos \alpha(t) \quad (\text{E.9a})$$

$$\mathbf{R}_{12}(\Omega_c, \phi, \Omega_0, \alpha(t)) = -\frac{\Omega_c^2}{\Omega^{*2}} \sin \phi \cos \phi (1 - \cos \alpha(t)) - \frac{\Omega_0}{\Omega^*} \sin \alpha(t) \quad (\text{E.9b})$$

$$\mathbf{R}_{13}(\Omega_c, \phi, \Omega_0, \alpha(t)) = \frac{\Omega_c}{\Omega^*} \left(\frac{\Omega_0}{\Omega^*} \cos \phi (1 - \cos \alpha(t)) - \sin \phi \sin \alpha(t) \right) \quad (\text{E.9c})$$

$$\mathbf{R}_{21}(\Omega_c, \phi, \Omega_0, \alpha(t)) = -\frac{\Omega_c^2}{\Omega^{*2}} \sin \phi \cos \phi (1 - \cos \alpha(t)) + \frac{\Omega_0}{\Omega^*} \sin \alpha(t) \quad (\text{E.9d})$$

$$\mathbf{R}_{22}(\Omega_c, \phi, \Omega_0, \alpha(t)) = \frac{\Omega_c^2}{\Omega^{*2}} \sin^2 \phi (1 - \cos \alpha(t)) + \cos \alpha(t) \quad (\text{E.9e})$$

$$\mathbf{R}_{23}(\Omega_c, \phi, \Omega_0, \alpha(t)) = -\frac{\Omega_c}{\Omega^*} \left(\frac{\Omega_0}{\Omega^*} \sin \phi (1 - \cos \alpha(t)) + \cos \phi \sin \alpha(t) \right) \quad (\text{E.9f})$$

$$\mathbf{R}_{31}(\Omega_c, \phi, \Omega_0, \alpha(t)) = \frac{\Omega_c}{\Omega^*} \left(\frac{\Omega_0}{\Omega^*} \cos \phi (1 - \cos \alpha(t)) + \sin \phi \sin \alpha(t) \right) \quad (\text{E.9g})$$

$$\mathbf{R}_{32}(\Omega_c, \phi, \Omega_0, \alpha(t)) = \frac{\Omega_c}{\Omega^*} \left(\cos \phi \sin \alpha(t) - \frac{\Omega_0}{\Omega^*} \sin \phi (1 - \cos \alpha(t)) \right) \quad (\text{E.9h})$$

$$\mathbf{R}_{33}(\Omega_c, \phi, \Omega_0, \alpha(t)) = \frac{\Omega_0^2}{\Omega^{*2}} (1 - \cos \alpha(t)) + \cos \alpha(t) \quad (\text{E.9i})$$

Dans les calculs présentés dans la section 5.3 concernant les transitoires du signal du résonateur, dûs à la modulation carrée de phase, nous négligeons l'effet du désaccord Ω_0 ($\Omega_0/\Omega_c \ll 1$) dans les zones d'interaction. Nous prenons ainsi les éléments de matrice $\mathbf{R}_{ij}(\Omega_c, \phi, \Omega_0, \alpha(t))$ pour $\Omega_0 = 0$ dans ces zones. Dans ce cas, ils se simplifient et valent :

$$\mathbf{R}_{11}(\Omega_c, \phi, 0, \alpha(t)) = \cos^2 \phi (1 - \cos \alpha(t)) + \cos \alpha(t) \quad (\text{E.10a})$$

$$\mathbf{R}_{12}(\Omega_c, \phi, 0, \alpha(t)) = -\sin \phi \cos \phi (1 - \cos \alpha(t)) \quad (\text{E.10b})$$

$$\mathbf{R}_{13}(\Omega_c, \phi, 0, \alpha(t)) = -\sin \phi \sin \alpha(t) \quad (\text{E.10c})$$

$$\mathbf{R}_{21}(\Omega_c, \phi, 0, \alpha(t)) = -\sin \phi \cos \phi (1 - \cos \alpha(t)) \quad (\text{E.10d})$$

$$\mathbf{R}_{22}(\Omega_c, \phi, 0, \alpha(t)) = \sin^2 \phi (1 - \cos \alpha(t)) + \cos \alpha(t) \quad (\text{E.11a})$$

$$\mathbf{R}_{23}(\Omega_c, \phi, 0, \alpha(t)) = -\cos \phi \sin \alpha(t) \quad (\text{E.11b})$$

$$\mathbf{R}_{31}(\Omega_c, \phi, 0, \alpha(t)) = \sin \phi \sin \alpha(t) \quad (\text{E.11c})$$

$$\mathbf{R}_{32}(\Omega_c, \phi, 0, \alpha(t)) = \cos \phi \sin \alpha(t) \quad (\text{E.11d})$$

$$\mathbf{R}_{33}(\Omega_c, \phi, 0, \alpha(t)) = \cos \alpha(t) \quad (\text{E.11e})$$

Notons que ces dernières expressions sont également valables pour un champ magnétique dont le profil dépend du temps, en particulier dans le cas d'un profil sinusoïdal (cette dépendance se manifeste dans la dépendance temporelle de l'angle $\alpha(t)$).

E.2 Probabilité de transition

Dans le cas d'un atome dont les cohérences micro-ondes sont initialement nulles ($u_i = v_i = 0$), et dont l'état final après interaction est décrit par le vecteur de Bloch $\vec{b}_f$, la probabilité de transition est alors donnée par :

$$P = \frac{1}{2} + w_f \quad (\text{E.12})$$

où w_f est la troisième composante de $\vec{b}_f$.

Annexe F

Symboles et constantes physiques

Dans cette annexe, nous avons reporté la valeur des constantes physiques dans le Tab. F.1 ainsi que la liste des principaux symboles utilisés dans ce mémoire. Les Tab. F.2 à F.11 regroupent la liste des symboles romans, les Tab. F.12 à F.15 celle des symboles grecs et les Tab. F.16 et F.17 celle des autres symboles.

<i>Grandeur</i>	<i>Symbole</i>	<i>Valeur</i>	
Vitesse de la lumière dans le vide	c_0	299 792 458	m/s
Constante électrique du vide	ε_0	$8.854 \cdot 10^{-12}$	As/Vm
Constante magnétique du vide	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs/Am
Impédance du vide	Z_0	376.6	Ω
Constante de Planck	h	$6.626 \cdot 10^{-34}$	J/Hz
Constante de Planck réduite	$\hbar$	$1.055 \cdot 10^{-34}$	J/Hz
Constante de Boltzman	k_B	$1.381 \cdot 10^{-23}$	J/K
Magnéton de Bohr	μ_B	$9.274 \cdot 10^{-24}$	J/T
Masse de l'atome de césium	m_{Cs}	$220.8 \cdot 10^{-27}$	kg
Charge de l'électron	e	$1.602 \cdot 10^{-19}$	C

Tab. F.1: Valeur des constantes physiques.

<i>Symbole</i>	<i>Description</i>	<i>Page</i>
a	Ecart centre jet - centre ouvert. apparente à $t = t_4$	59
$\bar{a}$	Ecart a pour $\bar{v}_l \neq v_{l_0}$	64
a_1	Coefficient de proportionnalité entre v_l et a	63
a_4	Ecart quadratique moyen de a à $t = t_4$	61
$a_{e'g}$	Rapport de branchement en émission spontanée	411
a'	Pente initiale du signal d'erreur	210
a'_1	Pente initiale du signal d'erreur (1 ^{ère} harmonique)	215
a'_{LB}	Pente initiale du signal d'erreur (large bande)	215
a_1^{r0}	Pente init. du signal d'erreur (1 ^{ère} harm., jet mono.)	212
a_{LB}^{r0}	Pente init. du signal d'erreur (large bande, jet mono.)	212
$a_{\max}^R$	Accélération centripète (rotor + turbine)	365
$a_{\max}^T$	Accélération centrip. (rotor + turbine + bras art.)	365
$a_{\text{pulsé}}(t)$	Fonction $a(t, T)$ pour un jet pulsé	265
$a_{2k}(T)$	Partie réelle du coefficient complexe $c_{2k}(T)$	257
$a(t, T)$	Fonction (partie déterministe du signal d'erreur)	210
A	Nombre de masse atomique	403
$\tilde{A}$	Opérateur anti-Hermitien	168
A_{04}	Coefficient calcul de la densité surfacique au temps $t = t_4$	56
$A_{r_{mn}}$	Coefficient général de la partie radiale du champ $\vec{H}$	142
$\underline{A}_{r_{02}}$	Coefficient complexe, partie radiale du champ $\vec{H}$	155
$A'_{r_{02}}$	Partie réelle de $\underline{A}_{r_{02}}$	155
$A''_{r_{02}}$	Partie imaginaire de $\underline{A}_{r_{02}}$	155
$\mathbf{A}(\cdot, t)$	Matrice équations de Bloch (champ RF quelconque)	451
$\mathbf{A}(\cdot, \Omega_0)$	Matrice équations de Bloch (champ RF constant)	453
b	Hauteur de la cavité micro-onde	42
b_c	Hauteur de coupure du mode TE_{021}	143
b_p	Distance extrémité pale - centre ouverture trappe	320
$b_{2k}(T)$	Partie imaginaire du coefficient complexe $c_{2k}(T)$	257
$\vec{b}$	Vecteur de Bloch	451
$\vec{b}_i$	Vecteur de Bloch initial	233
$\vec{b}_f(t)$	Vecteur de Bloch final en fonction du temps	233
B_c	Amplitude du champ $\vec{B}_{RF}$ (centre zone d'inter.)	146
$B_{\bar{z}}$	Champ résiduel à l'apogée moyen	373
B_0	Champ magnétique constant dans le résonateur	373
$B(z)$	Champ magnétique dans le résonateur	373
$B_{\text{res}}(z)$	Champ magnétique résiduel dans le résonateur	373
$\vec{B}_{RF}$	Champ d'induction magnétique radio-fréquence	165
$c_0(T)$	Coefficient (valeur moyenne de la fonction $a(t, T)$)	210

Tab. F.2: Liste des symboles romans (1/10).

<i>Symbole</i>	<i>Description</i>	<i>Page</i>
$c_{2k}(T)$	Coefficients de Fourier complexes du dév. de $a(t, T)$	257
$c(t, T)$	Fonction de modulation périodique	209
C_0	Coefficient (valeur moyenne de $c_0(T)$)	211
$C_{2k}(f_M)$	Coefficients (formule effet Dick continu non-mono.)	273
d_{2k+1}	Coefficients de Fourier complexes du dévelop. de $d(t)$	294
$d(t)$	Fonction de démodulation	443
D_1	Raie spectrale D_1 de l'atome de césium 133	405
D_2	Raie spectrale D_2 de l'atome de césium 133	405
e_p	Epaisseur des pales de la turbine	320
$e(\Omega_0)$	Signal d'erreur de l'asservissement	210
E_0	Energie d'interaction hyperfine en champ nul	407
$E(F, m_F)$	Energie des sous-niveaux Zeeman (état fondamental)	406
$\vec{E}$	Champ électrique (cavité micro-onde)	139
f_c	Fréquence des cycles d'interrogation (fontaine pulsée)	266
f_{coup}	Fréquence de coupure du système physique	267
f_{turb}	Fréquence de rotation de la turbine	325
$f_{\text{turb}}^{\text{opt}}$	Fréquence de rotation optimale de la turbine	325
f_F	Fréquence de coupure d'un filtre passe-bas idéal	257
f_{mnp}^{TE}	Fréquences propres de la cavité (mode TE_{mnp})	141
F	Nombre quantique hyperfin (état fondamental)	405
F'	Nombre quantique hyperfin (état excité)	405
$F(f)$	Gain en boucle ouverte de l'asservissement	258
$F(x)$	Fonction de distribution de la variable aléatoire X	66
g	Accélération terrestre	37
g_I	Facteur de Landé nucléaire	406
g_J	Facteur de Landé électronique	406
$g(t)$	Dépendance temporelle de la fréquence de Rabi Ω_c	452
$G(f)$	Gain en boucle fermée de l'asservissement	259
h_0	Hauteur apogée du jet - centre de la cavité	39
h_2	Hauteur diaphragme 2 - centre de la source	41
h_n	Hauteur diaphragme n - centre de la source	69
h_{cf}	Hauteur interne de la cavité pour le flux	57
h_{cut}	Hauteur des cutoffs de la cavité	57
h_d	Hauteur de la découpe dans le jet par les pales	321
h_{d_k}	Hauteur de la découpe dans le jet à l'altitude z_k	331
h_{di}	Hauteur centre de la source - détection i	39
h_t	Hauteur refroidissement transverse - centre source	37
$h(t)$	Fonction carrée normalisée	445

Tab. F.3: Liste des symboles romans (2/10).

<i>Symbole</i>	<i>Description</i>	<i>Page</i>
$h_-(t)$	Dépendance temporelle de Ω_{c-} (variation due à B_{RF})	192
$h_+(t)$	Dépendance temporelle de Ω_{c+} (variation due à B_{RF})	192
H_0	Hamiltonien libre de l'atome	165
H_I	Hamiltonien d'interaction (représ. d'interaction)	167
$H_{I, \text{RWA}}$	Hamiltonien d'interac. (approx. du champ tournant)	168
$\tilde{H}(x)$	Hamiltonien d'interaction final	168
$H(t)$	Hamiltonien d'interaction atome - champ RF	166
$\mathcal{H}(t)$	Hamiltonien semi-classique de l'atome	165
$\overline{H}_{\text{ap}}$	Hauteur de l'apogée moyen du jet	125
H_c	Hauteur centre de la cavité - centre de la source	38
H_{ct}	Hauteur centre de la cavité - refroid. transverse	38
H_{cyl}	Hauteur limite du jet au-dessus de la source	83
H_p	Hauteur milieu des pales - refroidissement transverse	324
H_{tot}	Hauteur totale d'une trajectoire atomique	99
H_0^{tot}	Hauteur totale de la trajectoire atomique nominale	40
$\vec{H}$	Champ magnétique dans la cavité micro-onde	139
$\vec{H}_s$	Champ magnétique (surface des parois de la cavité)	147
$H(f, T)$	Fonction de transfert de $h(t - T_{\text{ad1}}, T)$	256
$H_i(f, T)$	Partie imaginaire de $H(f, T)/T^*$	274
$H_r(f, T)$	Partie réelle de $H(f, T)/T^*$	274
I	Nombre quantique nucléaire	405
I_0	Signal du résonateur à résonance (sans modulation)	208
I_-	Intensité du faisceau laser avant la trappe à lumière	338
$\bar{I}_+$	Intensité moyenne du faisceau après trappe à lumière	338
I_b	Niveau constant du signal à résonance (avec mod.)	245
I_{tr}	Amplitude des transitoires (mod. carrée de phase)	239
$I_{\text{tr}}^{\text{min}}$	Amplitude minimale des transitoires	240
$I_{\text{tr}}^{\text{max}}$	Amplitude maximale des transitoires	240
$I(t)$	Signal temporel du résonateur	209
$I_{\text{pulsé}}(t)$	Intensité du jet pulsé	265
$I_{T_M(v_l)}(t)$	Signal du résonateur pour une forme de transitoires	242
$I(t, T)$	Signal temporel du résonateur (jet monocinétique)	208
$I_m(x)$	Fonction de Bessel modifiée de 1 ^{ère} espèce d'ordre m	416
$I_{1/2}(x)$	Fonction de Bessel modif. de 1 ^{ère} espèce d'ordre 1/2	416
$I_{m_F}(\Omega)$	Signal du résonateur de la transition Zeeman m_F	375
$I_{m_F}^e(\Omega)$	Equation de l'enveloppe des franges Zeeman m_F	376
$I_{m_F}^{e+}(\Omega_{\text{max}})$	Valeur max. de l'enveloppe sup. des franges Zeeman	377
$I_{m_F}^{e-}(\Omega_{\text{max}})$	Valeur min. de l'enveloppe inf. des franges Zeeman	377

Tab. F.4: Liste des symboles romans (3/10).

<i>Symbole</i>	<i>Description</i>	<i>Page</i>
$\vec{j}_s$	Densité de courant surfacique	147
J	Nombre quantique électronique	405
$J_m(x)$	Fonction de Bessel de 1 ^{ère} espèce d'ordre m	141
$J'_m(x)$	Dérivée de la fonction de Bessel $J_m(x)$	141
k_0	Nombre d'onde nominal	148
k_r	Nombre d'onde transverse	139
$\underline{k}_{r02}$	Nombre d'onde transverse complexe (mode TE ₀₂₁)	154
k'_{r02}	Partie réelle de $\underline{k}_{r02}$	154
k''_{r02}	Partie imaginaire de $\underline{k}_{r02}$	154
k_z	Nombre d'onde longitudinal	139
k_{di0}	Coefficient de variation de T_{di} avec T	44
$k_{\tau 0}$	Coefficient de variation de τ avec T	44
$k_{\max}$	Nombre entier	331
K_e	Constante de l'oscillateur local	258
K_0	Constante Zeeman du 1 ^{er} ordre	408
K_Z	Constante Zeeman du 2 ^{ème} ordre	408
ℓ	Nombre quantique de moment cinétique orbital	404
l	Demi-distance entre les ouvertures de la cavité	38
l_k	$k^{\text{ème}}$ échantillonnage d'un nombre dans $[0, 1]$	67
l_{ld}	Distance lentille - diaphragme	339
l_p	Largeur d'une pale	320
L	Distance centre de la source - axe de la cavité	38
L_d	Distance axe de la cavité - axe de la détection	39
$\overline{m}$	Masse moyenne d'une pale	351
m_{rond}	Masse d'une rondelle d'équilibrage de la turbine	362
m_{vis}	Masse d'une vis d'équilibrage de la turbine	362
m_{Cs}	Masse de l'atome de césium 133	403
m_F	Nombre quantique magnétique (état fondamental)	406
$m_{F'}$	Nombre quantique magnétique (état excité)	409
M_R	Masse de l'ensemble rotor + turbine	365
M_T	Masse totale oscillant (rotor + turbine + bras art.)	365
n	Nombre quantique principal	404
$\vec{n}$	Vecteur normal à la surface	147
$\bar{n}$	Densité moyenne du jet atomique effectif	48
n_0	Densité initiale du jet atomique à la source	131
n_1	Indice de refraction de l'air	336
n_2	Indice de refraction du verre des pales	336
$n_{\max}$	Densité maximale du jet atomique à l'apogée moyen	125

Tab. F.5: Liste des symboles romans (4/10).

<i>Symbole</i>	<i>Description</i>	<i>Page</i>
n_p	Densité du jet atomique (plan médian de la turbine)	330
n_{s0}	Densité surfacique initiale au centre du jet	53
n_{z0}	Densité linéïque initiale du jet atomique (source)	120
n_{z1}	Densité linéïque du jet atomique (refroid. trans.)	120
$n(\vec{r}, t)$	Densité du jet atomique	48
$n(x, z)$	Densité du jet atomique à l'abscisse x et altitude z	120
$\bar{n}(x)$	Densité moyenne à l'abscisse x (jet atomique effectif)	126
$n_s(r, 0)$	Densité surfacique initiale isotrope du jet	53
$n_s(\vec{r}, t)$	Densité surfacique du jet atomique	49
$n_z(t)$	Densité linéïque du jet atomique	49
$n_z(z, v_l)$	Densité linéïque à l'altitude z pour une vitesse v_l	120
$n_+(z)$	Densité selon z du jet atomique après la trappe	332
$n_+^{\max}(H_c)$	Densité max. du jet atomique (centre zone interact.)	334
$n_+^{\min}(H_c)$	Densité min. du jet atomique (centre zone interact.)	334
$n_+(H_p, t)$	Densité temporelle du jet atomique après la trappe	330
N_3	Facteur de normalisation de la distribution $\kappa_N^*(\vec{r}_3, \vec{r}_4)$	441
N_4	Facteur de normalisation de la distribution $\kappa_N^*(\vec{r}_3, \vec{r}_4)$	441
N_κ	Facteur de normalisation de la distribution $\kappa_N(\vec{r}_3, \vec{r}_4)$	440
N_ρ	Facteur de normalisation de la distribution $\rho_{\text{eff}}^N(v_l)$	105
N_p	Nombre de pales composant la turbine	321
N_{tot}	Nombre total de tirages des simulations Monte-Carlo	71
N_j	Nombre de tirages par sous-intervalle	71
$\mathcal{N}$	Nombre relatif de particules dans un plan horizontal	49
$\mathcal{N}_4$	Nombre relatif d'atomes dans un plan horiz. à $t = t_4$	61
$N_m(x)$	Fonction de Bessel de 2 ^{ème} espèce d'ordre m	141
$N'_m(x)$	Dérivée de la fonction de Bessel $N_m(x)$	141
p_3	Population relative de l'état $ F = 3, m_F = 0\rangle$	452
p_4	Population relative de l'état $ F = 4, m_F = 0\rangle$	452
$p_3(\tau)$	Population p_3 à la fin de la première interaction	181
$p_4(\tau)$	Population p_4 à la fin de la première interaction	181
P_w	Puissance dissipée dans les parois de la cavité	151
$P(\Omega_0)$	Probabilité de transition	174
$P_{\text{opt}}(\Omega_0)$	Probabilité de transition pour 1 ^{ère} puissance optimale	176
$P_{\text{opt}}^T(\Omega_0)$	Prob. transition 1 ^{ère} puissance opt. (sans distr. de τ)	176
$P_{\text{Rabi}}(\Omega_0)$	Prob. transition piédestal de Rabi 1 ^{ère} puissance opt.	176
$P_{\xi_0}(\Omega_0)$	Probabilité de transition (pompage optique)	183
$P_{\xi_0}^{\text{opt}}(\Omega_0)$	Probabilité de transition optimale (pompage optique)	185
$P(t, T)$	Probabilité de transition temporelle	208
$P\{Z \leq z\}$	Probabilité pour que la variable aléatoire Z soit $\leq z$	66

Tab. F.6: Liste des symboles romans (5/10).

<i>Symbole</i>	<i>Description</i>	<i>Page</i>
q_k	$k^{\text{ème}}$ échantillonnage d'un nombre dans $[0, 1]$	68
Q_0	Facteur de qualité non-chargé de la cavité	151
Q_{at}	Facteur de qualité de la résonance atomique	9
Q_e	Facteur de qualité de couplage de la cavité	163
Q_L	Facteur de qualité chargé de la cavité	162
r_0	Module de la position initiale (source du jet)	67
r_{0k}	$k^{\text{ème}}$ réalisation de l'échantillonnage du rayon r_0	67
r_-	Distance radiale d'une traject. (première interaction)	193
r_+	Distance radiale d'une traject. (deuxième interaction)	193
$r_-(t)$	Déplacement radial d'une traject. (première interac.)	193
$r_+(t)$	Déplacement radial d'une traject. (deuxième interac.)	193
$\vec{r}_0$	Position initiale d'un pulse de densité surfacique	413
$\vec{r}_-$	Position trajectoire atomique (première interaction)	193
$\vec{r}_+$	Position trajectoire atomique (deuxième interaction)	193
$\vec{r}_{n_k}$	Positions de la $k^{\text{ème}}$ trajectoire dans le plan $z_n = h_n$	69
$\vec{r}_{k+}$	Position init. de la $k^{\text{ème}}$ trajectoire (après refr. trans.)	68
R'	Rayon de la 1 ^{ère} annulation du champ $H_z(r, z)$	156
R''	Rayon de la 2 ^{ème} annulation du champ $H_z(r, z)$	428
R_0	Rayon quadr. moyen de la densité surfacique initiale	53
R_1	Rayon quadr. moyen de la densité surf. refr. trans.	54
R_2	Rayon de l'ouverture de la trappe à lumière	420
R_4	Rayon quadr. moyen de la densité surf. sortie cavité	56
R_4^*	Rayon quadr. moyen eff. densité surf. sortie cavité	56
R_{ca}	Rayon apparent des trous de passage pour $v_L = v_{L_0}$	59
$R_{\text{ca}}^{\text{fit}}$	Rayon apparent (ajustement simulations MC)	85
$R_{\text{ca}}(v_L)$	Rayon apparent en fonction de v_L	59
R_{co}	Rayon ouverture trappe lumière - axe rotat. turbine	320
R_e	Rayon de la paroi cylindrique extérieure de la cavité	141
R_i	Rayon de la paroi cylindrique intérieure de la cavité	141
R_{ie}	Rayon de l'extrémum du champ $H_z(r, z)$	143
R_{in}	Rayon du point d'inflexion du champ $H_r(r, z)$	144
R_{jet}	Rayon initial du jet à e^{-2}	53
$\bar{R}_p$	Rayon moyen des pales de la turbine	350
R_s	Résistance de surface des parois de la cavité	151
$R(t)$	Rayon quadratique moyen de la densité surfacique	416
$R^*(t)$	Rayon quadr. moyen effectif au temps t (dens. surf.)	435
$R_-^*(x)$	Rayon quadr. moyen eff. (abscisse x jet montant)	119
$R_+^*(x)$	Rayon quadr. moyen eff. (abscisse x jet descendant)	119
$R_2'(t)$	Rayon de la définition de la surface d'intégration	428

Tab. F.7: Liste des symboles romans (6/10).

<i>Symbole</i>	<i>Description</i>	<i>Page</i>
$\mathcal{R}_m(r)$	Partie radiale du champ $H_z(r, \varphi)$	141
$R_x(\tau)$	Fonction d'autocorrélation de la variable x	256
$R_{\text{int}}(r, t)$	Rayon de la surface équivalente d'intégration	430
$\mathbf{R}_{\text{tot}}(t)$	Matrice de rot. totale temporelle du vecteur de Bloch	233
$\mathbf{R}_{\text{tot}_{33}}(t)$	3 ^{ème} élément diagonal de la matrice de rotation totale	234
$\mathbf{R}(\Omega_c, \dots)$	Matrice de rotation du vecteur de Bloch	453
$\bar{s}$	Signal de sortie du détecteur synchrone	210
s_k	$k^{\text{ème}}$ échantillonnage d'un nombre dans $[0, 1]$	67
s_d	Distance entre deux découpes successives dans le jet	321
$s_{d_{\text{rms}}}$	Ecart quadratique moyen de la distance s_d	347
$s(t)$	Signal de sortie du résonateur après démodulation	210
S	Nombre quantique de spin	404
$\vec{S}$	Vecteur de Poynting	160
S_c	Surface des parois de la cavité	151
S_n	Surface du diaphragme n le long du jet	70
$S_{\text{acc}}^{\text{R}}$	Signal accéléromètre (rotor + turbine)	365
$S_{\text{acc}}^{\text{T}}$	Signal accéléromètre (rotor + turbine + bras art.)	365
$S'_x(f)$	Densité spectrale de puiss. bilatérale de la variable x	256
$S_y^{\text{LO}}(f)$	Densité spectrale du bruit de l'oscillateur local libre	253
$S_y^{\text{LLO}}(f)$	Densité spectrale du bruit de l'oscillateur local asservi	259
$S_{y,\text{D}}^{\text{LLO}}(f)$	Densité spectrale du bruit dû à l'effet Dick	266
$S_{y,\text{Dc}}^{\text{LLO}}(f)$	Densité spectrale du bruit dû à l'effet Dick continu	260
$S_y^{\text{ref}}(f)$	Densité spectrale du bruit de la référence (jet atom.)	308
$S(r, t)$	Surface d'intégration partielle (densité surfacique)	426
t^*	Temps caractéristique (évolution densité surfacique)	427
t_0	Temps correspondant à la distribution initiale du jet	413
t_1	Temps de vol nominal source - refr. transverse	40
t_2	Temps de vol nominal source - 1 ^{er} diaphragme	40
t_3	Temps de vol nominal source - première zone d'inter.	41
t_4	Temps de vol nominal source - deuxième zone d'inter.	41
t_{51}	Temps de vol nominal source - détection 1	41
t_{52}	Temps de vol nominal source - détection 2	41
t_{n_k}	Temps de vol refroidissement trans. - plan $z_n = h_n$	69
t_d	Intervalle de temps de la tranche de jet découpée	330
t_k	Temps (centre tranche de jet dans le plan médian)	330
t_φ	Retard dû à un déphasage φ de la démodulation	444
$t_-(x)$	Temps de vol moyen source - abscisse x (jet montant)	119
$t_+(x)$	Temps de vol moy. source - abscisse x (jet descendant)	119
$t_-(z)$	Temps de vol nom. refr. trans. - altitude z (montée)	40

Tab. F.8: Liste des symboles romans (7/10).

<i>Symbole</i>	<i>Description</i>	<i>Page</i>
$t_+(z)$	Temps de vol nom. refr. trans. - altitude z (descente)	40
T_0	Temps de transit nominal	42
$\bar{T}$	Temps de transit moyen	112
T^*	Temps de transit effectif pour la 1 ^{ère} puissance opt.	171
$\bar{T}^*$	Temps de transit effectif moyen	175
T_n^*	Temps de transit effectif pour la $n^{\text{ème}}$ puissance opt.	170
$T^*(\Omega_e)$	Temps de transit effectif pour une puissance Ω_e	170
T_{rms}	Temps de transit quadratique moyen	112
$\tilde{T}_{\text{rms}}$	Temps de transit quadratique moyen effectif	175
T'_0	Coefficient de variation de T_0 avec la vitesse v_l	43
T_{ad1}	Temps de vol apogée - détection 1	256
T_b	Temps mort par période de modulation	287
T_c	Temps de cycle	265
T_d	Période de modulation du jet atomique	330
T_{di_0}	Temps de détection nominal i ($i = 1, 2$)	42
$\bar{T}_{di}$	Temps de détection moyen i ($i = 1, 2$)	115
$T_{di,\text{rms}}$	Temps de détection quadratique moyen i ($i = 1, 2$)	115
T_{d1}^*	Temps de détection 1 (zones d'interaction équiv.)	207
T'_{di_0}	Coefficient de variation de T_{di} avec la vitesse v_l	44
T_{fus}	Température de fusion de l'atome de césium 133	403
T_g	Température de transformation du verre des pales	335
T_l	Température longitudinale du jet après refr. trans.	55
T_{l_0}	Température longitudinale initiale du jet	73
T_l^{eff}	Température longitudinale effective du jet	109
$T_{l_0}^{\text{fit}}$	Température longitudinale initiale du jet (ajustement)	78
T_t	Température transverse du jet après refr. transverse	55
T_{t_0}	Température transverse initiale du jet	53
$\bar{T}_v$	Temps de vol moyen (jet "vertical")	77
$T_{v,\text{rms}}$	Temps de vol quadratique moyen	78
$\bar{T}_{v\Delta t}$	Temps de vol moyen pour un pulse Δt	78
$\bar{T}_{v\Delta t}^{\text{fit}}$	Temps de vol moyen pour un pulse Δt (ajustement)	78
$T_v(v_L)$	Temps de vol (jet "vertical")	77
$\bar{T}'_v$	Coefficient de variation de $\bar{T}_v$ avec la vitesse v_L	77
T_{vap}	Température de vaporisation de l'atome de césium 133	403
T_I	Constante de temps de l'intégrateur	255
$\mathcal{T}$	Constante de temps de la boucle d'asservissement	308
u	Composante en phase du dipôle atomique	452
u_i	Composante u initiale du dipôle atomique	455

Tab. F.9: Liste des symboles romans (8/10).

<i>Symbole</i>	<i>Description</i>	<i>Page</i>
$u(t)$	Peigne de Dirac	265
$U(t, t_0)$	Opérateur d'évolution unitaire (fonction d'onde $\psi(t)$)	166
$\tilde{U}(x, x_i)$	Opérateur d'évolution unitaire final	168
v	Composante en quadrature avance du dipôle atomique	452
$\vec{v}$	Vitesse initiale du jet après le refroidissement trans.	68
$\vec{v}_k$	$k^{\text{ème}}$ réalisation de l'échantillonnage de la vitesse $\vec{v}$	68
v_{ij}	Vitesse longitudinale de transition (entre type i et j)	242
$v_{a_{\min}}$	Vitesse long. minimale (forme transitoires type a)	242
$v_{f_{\max}}$	Vitesse long. maximale (forme transitoires type f)	242
v_c^p	Vitesse circonférentielle d'une pale (à un rayon R_{co})	320
$v_{c_1}^p$	Vitesse circonférentielle opt. d'une pale (jet mono.)	323
v_i	Composante v initiale du dipôle atomique	455
$\bar{v}_l$	Vitesse longitudinale moyenne après refr. transverse	55
$\bar{v}_{l_x}$	Vitesse moyenne du jet selon x après refr. transverse	193
v_l	Vitesse longitudinale après refroidissement transverse	37
v_{l_k}	$k^{\text{ème}}$ réalisation de l'échantillonnage de la vitesse v_l	68
v_{l_0}	Vitesse longitudinale nominale après refr. transverse	38
$v_{l_0}^c$	Vitesse longitudinale nominale au niveau de la cavité	39
$v_{l_0}^{di}$	Vitesse long. nominale à la détection i ($i = 1, 2$)	39
$v_{l_{\min}}$	Vitesse longitudinale minimale du jet	127
$v_{l_{\max}}$	Vitesse longitudinale maximale du jet	127
$v_{l_{\text{rms}}}$	Vitesse quadratique moyenne long. après refr. trans.	55
$v_{l_{\text{rms}}}^{\text{eff}}$	Vitesse quadratique moyenne longitudinale effective	109
v_L	Vitesse de lancement du jet	22
v_{L_0}	Vitesse de lancement nominale du jet	38
$\bar{v}_L$	Vitesse de lancement moyenne du jet	82
$\bar{v}_L^{\text{fit}}$	Vitesse de lancement moyenne du jet (ajustement)	78
$\bar{v}_L^{\text{opt}}$	Vitesse de lancement moyenne optimale du jet	83
$v_{L_{\text{rms}}}$	Vitesse de lancement quadratique moyenne du jet	73
v_{L_z}	Composante z de la vitesse de lancement du jet	83
$v_{L_z}^{\text{max}}$	Composante z max. de la vitesse de lancement du jet	83
$\bar{v}_{\text{MM}}^{\text{th}}$	Vitesse d'entraînement théorique moy. (mélasse mouv.)	22
$\vec{v}_{t_0}$	Vitesse transverse initiale (source du jet)	67
$v_{t_0_k}$	$k^{\text{ème}}$ réalisation de l'échantillonnage de la vitesse v_{t_0}	67
v_{t_k}	$k^{\text{ème}}$ réalisation de l'échantillonnage de la vitesse v_t	68
$v_{t_{\max}}$	Vitesse transverse maximale du jet atomique	425
$v_{t_0_{\text{rms}}}$	Vitesse quadratique moyenne transverse à la source	53
$v_{t_{\text{rms}}}$	Vitesse quadratique moyenne trans. après refr. trans.	55
$v_{t_{\max}}(t)$	Vitesse transverse maximale au temps $t > t_2$	426

Tab. F.10: Liste des symboles romans (9/10).

<i>Symbole</i>	<i>Description</i>	<i>Page</i>
$v_{t_{\min}}(t)$	Vitesse transverse minimale au temps $t > t_2$	425
$\bar{v}_t(t)$	Vitesse transverse moyenne au temps $t > t_2$ ($r \gg R_2$)	425
v_{x_k}	Composante x de la $k^{\text{ème}}$ réalisation de la vitesse $\vec{v}$	68
v_{y_k}	Composante y de la $k^{\text{ème}}$ réalisation de la vitesse $\vec{v}$	68
v_{z_k}	Composante z de la $k^{\text{ème}}$ réalisation de la vitesse $\vec{v}$	68
v_z^{p}	Vitesse verticale d'une pale (à un rayon R_{co})	320
$\bar{v}_z^{\text{p}}$	Vitesse verticale moyenne du jet (centre des pales)	323
$\bar{v}_z(z)$	Vitesse verticale moyenne du jet (à l'altitude z)	331
V_c	Volume de la cavité	151
$\bar{w}$	Densité moyenne d'énergie électromagnétique	151
w	Demi-différence de popul. rel. des niveaux hyperfins	452
w_f	Demi-différence de population relative finale	455
$w_{e'g}$	Rapport de branchement en émission stimulée	411
$w_{ge'}$	Rapport de branchement en absorption	411
$\bar{W}$	Energie totale moyenne du mode TE_{021}	151
$W_{45'}$	Taux d'absorption de la transition $ 4, 0\rangle \leftrightarrow 5', \pm 1\rangle$	181
x^*	Abscisse de l'apogée du jet atomique	123
x_0	Abscisse nominale de l'apogée du jet atomique	123
x_{k-}	Coordonnée x de la $k^{\text{ème}}$ trajectoire (avant refr. trans.)	67
x_{n_k}	Coordonnées x de la $k^{\text{ème}}$ trajectoire (plan $z_n = h_n$)	69
x_p	Rapport des vitesses $v_c^{\text{p}}/v_z^{\text{p}}$ de la turbine	321
x_{pmin}	Rapport x_p pour la vitesse minimale (jet mono.)	323
x_{pmax}	Rapport x_p pour la vitesse maximale (jet mono.)	324
x_{p1}	Rapport x_p pour la vitesse optimale (jet mono.)	323
x_{p2}	Rapport x_p de la "courbure" des extrémités des pales	323
$x_{\text{max}}^{\text{R}}$	Amplitude maximale des oscillations (rotor + turbine)	365
$x_{\text{max}}^{\text{T}}$	Ampl. max. des oscillations (rotor + turbine + bras)	365
X	Variable aléatoire	66
y_{k-}	Coordonnée y de la $k^{\text{ème}}$ trajectoire (avant refr. trans.)	67
y_{n_k}	Coordonnées y de la $k^{\text{ème}}$ trajectoire (plan $z_n = h_n$)	69
z_0	Composante selon z de la trajectoire nominale	38
z_k	Altitude d'une tranche de jet au temps t_k	331
$\bar{z}$	Altitude de l'apogée moyen du jet	373
$z_{\text{max}}(T^*)$	Altitude de l'apogée des trajectoires atomiques	373
$z(x, v_l)$	Equation des trajectoires du jet (près de l'apogée)	126
Z	Numéro atomique	403
$\underline{Z}_s$	Impédance de surface des parois de la cavité	154

Tab. F.11: Liste des symboles romans (10/10).

<i>Symbole</i>	<i>Description</i>	<i>Page</i>
α_{abs}	Coefficient d'absorption du verre des pales	336
$\bar{\alpha}_{\text{abs}}$	Coefficient d'absorption moyen du verre des pales	337
α_{c}	Facteur d'atténuation des cutoffs de la cavité	161
α_{verre}	Coefficient de dilatation thermique du verre des pales	335
α_z	Constante d'atténuation longitudinale de la cavité	158
α_{Al}	Coefficient de dilatation thermique de l'aluminium	350
α_{Ti}	Coefficient de dilatation thermique du titane	350
α_1^ξ	Coefficient variation de β_1^* au 1 ^{er} ordre avec f_M	298
α_{LB}^ξ	Coefficient variation de β_{LB}^* au 1 ^{er} ordre avec f_M	298
α_1^φ	Coefficient variation de β_1^* au 1 ^{er} ordre avec φ	300
$\alpha_{\text{LB}}^\varphi$	Coefficient variation de β_{LB}^* au 1 ^{er} ordre avec φ	300
$\alpha_i(t)$	Angle de rot. temporel du vecteur de Bloch (séq. i)	233
$\alpha_i^{B_{\text{RF}}^{\text{const}}}(t)$	Angle de rot. temporel (séq. i , champ RF constant)	235
$\alpha_i^{B_{\text{RF}}^{\text{sinus}}}(t)$	Angle de rot. temporel (séq. i , champ RF sinus.)	235
β_0	Fraction population restante état $ F = 4, m_F = 0\rangle$	182
β^*	Facteur numérique général (stabilité de fréquence)	296
β_1^*	Facteur numérique (démodulation 1 ^{ère} harmonique)	297
β_{LB}^*	Facteur numérique (démodulation large bande)	297
γ	Rapport gyromagnétique	452
γ_{at}	Facteur d'atténuation de la trappe à lumière	336
$\bar{\gamma}_{\text{at}}$	Facteur d'atténuation moyen de la trappe	337
γ_{rel}	Taux de relaxation des cohérences micro-onde	181
γ_z	Paramètre de décroissance du champ résiduel	373
$\underline{\gamma}_z$	Constante de propagation longitudinale complexe	158
γ'_z	Partie réelle de la constante de propagation $\underline{\gamma}_z$	158
γ''_z	Partie imaginaire de la constante de propagation $\underline{\gamma}_z$	158
$\gamma(n, x)$	Fonction gamma incomplète	60
Γ	Largeur naturelle de la transition $ F = 4\rangle \rightleftharpoons F' = 5\rangle$	30
$\underline{\Gamma}_{\text{H}}$	Coefficient de réflexion du champ magnétique $\vec{H}$	158
$\Gamma(x)$	Fonction gamma	123
$\Gamma(n, x)$	Fonction gamma incomplète de seconde espèce	435
δ	Epaisseur de peau des parois de la cavité	151
$\delta(f)$	Fonction delta de Dirac en fréquence	257
$\delta(x)$	Fonction delta de Dirac en position	414
ε_3	Paramètre de perturbation (franges Zeeman)	375
ε_s	Paramètre de perturbation (cavité micro-onde)	154
η^*	Facteur numérique (stabilité de fréquence)	295
η_i	Coeff. de l'ordre i du dévelop. de la phase ($i = 0 \text{ à } 3$)	374
η_{m_F}	Asymétrie de l'enveloppe des franges Zeeman $m_F \neq 0$	378

Tab. F.12: Liste des symboles grecs (1/4).

<i>Symbole</i>	<i>Description</i>	<i>Page</i>
$\eta_{\delta t}(T_v)$	Distribution de temps de vol pour un pulse δt	77
$\eta_{\Delta t}(T_v)$	Distribution de temps de vol pour un pulse Δt	78
$\bar{\theta}$	Angle moyen du faisceau défléchi par les pales	347
θ	Angle d'inclinaison de la trajectoire (refr. trans.)	36
θ_0	Angle d'inclinaison de la trajectoire nominale	38
θ_0^c	Angle d'inclinaison de la traj. nominale (centre cavité)	39
θ_1	Angle d'incidence de la lumière sur les pales	336
θ_2	Angle de réfraction de la lumière sur les pales	336
θ_{th}	Angle de déflexion théorique du faisceau par les pales	348
κ_i	Coefficients du développement de la phase ($i = 0 \text{ à } 3$)	374
$\kappa(\vec{r}_3, \vec{r}_4)$	Distribution des positions transverses	439
$\kappa_N(\vec{r}_3, \vec{r}_4)$	Distribution normalisée des positions transverses	440
$\kappa_N^*(\vec{r}_3, \vec{r}_4)$	Distribution norm. simplifiée des positions transverses	441
λ_0	Longueur d'onde dans le vide, radiation de fréq. ν_0	143
λ_1	Longueur d'onde de la raie D ₁ du césium	405
λ_2	Longueur d'onde de la raie D ₂ du césium	405
μ_B	Magnéton de Bohr	406
$\vec{\mu}_I$	Moment magnétique du noyau atomique	406
$\vec{\mu}_J$	Moment magnétique électronique	406
ν_{00}	Fréquence de la transition d'horloge (définition)	407
ν_0	Fréquence de la transition d'horloge en champ faible	408
ν_{m_F}	Fréquence des transitions dépendant du champ	408
ν_Z	Fréquence Zeeman des trans. dépendant du champ	408
ξ^*	Facteur numérique (stabilité de fréquence)	295
$\bar{\xi}$	Indice de modulation moyen du jet	334
ξ_0	Contraste des franges de Ramsey (trans. d'horloge)	377
$\xi_{m_F}^N$	Contraste normalisé des franges Zeeman $m_F \neq 0$	377
$\zeta_{\max}$	Valeur maximale du paramètre ζ	70
$\zeta_{\min}$	Valeur minimale du paramètre ζ	70
$\vartheta_{\max}$	Valeur maximale du paramètre ϑ	71
$\vartheta_{\min}$	Valeur minimale du paramètre ϑ	71
ρ	Densité de charge électrique	139
ρ_1	Coefficient de réflexion sur le 1 ^{er} interface air -verre	336
ρ_i	Coefficient de réflexion du verre des pales	335
ρ_{tot}	Coefficient de réflexion total du verre des pales	336
$\bar{\rho}_{\text{tot}}$	Coefficient de réflexion total moyen du verre des pales	337
ρ_{verre}	Masse volumique du verre des pales	335
ρ_{Al}	Masse volumique de l'aluminium	350
ρ_{Ti}	Masse volumique du titane	350
$\rho(T)$	Distribution de temps de transit	112

Tab. F.13: Liste des symboles grecs (2/4).

<i>Symbole</i>	<i>Description</i>	<i>Page</i>
$\rho(T_{di})$	Distribution de temps de détection	115
$\rho(\tau)$	Distribution de temps d'interaction	114
$\rho_0(v_t)$	Distribution initiale de vitesse transverse	53
$\rho(\vec{v}_t, \vec{r}, t)$	Distr. de vitesse transverse au point $\vec{r}$ et au temps t	418
$\rho_{\text{eff}}(v_l)$	Distribution effective de vitesse longitudinale	105
$\rho_{\text{eff}}^N(v_l)$	Distribution effective normalisée de vitesse long.	105
$\vec{\rho}_\Phi(\vec{r}, t)$	Densité de flux du jet atomique	49
σ	Conductivité électrique des parois de la cavité	138
σ_x	1 ^{ère} matrice de Pauli	166
σ_y	2 ^{ème} matrice de Pauli	168
σ_z	3 ^{ème} matrice de Pauli	166
$\sigma_y(\tau)$	Variance de Allan à deux échantillons	267
$\sigma_{y, \text{Dc}}^{\text{lim}}(\tau)$	Variance de Allan limite due à l'effet Dick continu	268
$\bar{\tau}$	Temps d'interaction moyen	114
τ_0	Temps d'interaction nominal	42
τ'_0	Coefficient de variation de τ_0 avec v_l	43
τ_{rms}	Temps d'interaction quadratique moyen	114
$\tau_i(t)$	Temps d'interaction temporel de la séquence i	235
τ_i	Coefficient de transmission interne du verre des pales	336
τ_{tot}	Coefficient de transmission total du verre des pales	336
ϕ_0	Angle de la vitesse transverse initiale (source du jet)	67
ϕ_k	$k^{\text{ème}}$ réalisation de l'échantillonnage de l'angle de $\vec{v}_{t_k}$	68
ϕ_1	Phase constante du champ RF (1 ^{ère} zone d'inter.)	208
ϕ_2	Phase constante du champ RF (2 ^{ème} zone d'inter.)	208
ϕ_z	Phase spatiale du champ H_z perturbé	156
ϕ_z^0	Phase spatiale du champ H_z non-perturbé	155
ϕ_z^1	Correction au 1 ^{er} ordre de la phase spatiale du H_z	156
ϕ_m	Amplitude de modulation	209
$\phi(t)$	Phase instantanée du champ RF	207
$\phi_i(t)$	Phase temporelle du champ RF dans la séquence i	233
$\phi_{\text{mod}}(t)$	Phase instantanée due à la modulation	207
$\phi(t, T)$	Différence de phase apparente du champ RF	208
$\phi_{\text{mod}}(t, T)$	Différence de phase apparente due à la modulation	208
φ	Déphasage entre modulation et démodulation	211
φ_0	Angle de la position initiale $\vec{r}_0$ (source du jet)	67
φ'	Angle entre les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{r}'$	426
φ'_{m_F}	Phase additionnelle (signal trans. Zeeman)	376
φ''_{m_F}	Phase additionnelle du signal des trans. Zeeman	376
φ_{opt}	Phase de démodulation optimale	213
φ_p	Angle entre deux pales successives	320

Tab. F.14: Liste des symboles grecs (3/4).

<i>Symbole</i>	<i>Description</i>	<i>Page</i>
$\varphi_{m_F}(\Omega, T^*)$	Déphasage accumulé par les atomes (vol libre)	373
Φ	Flux total du jet	49
Φ_0	Flux du jet à la sortie de la source	51
Φ_{d1}	Flux d'atomes à la détection 1	51
Φ_{d1}^{mes}	Flux d'atomes mesuré à la détection 1	305
$\bar{\Phi}_+^0$	Flux moyen du jet après la turbine (jet mono.)	321
Φ_-^0	Flux du jet avant la turbine (jet mono.)	321
$\Phi_m(\varphi)$	Partie angulaire du champ $H_z(r, \varphi)$	141
$\Phi_{m_F}(\Omega)$	Phase du signal des transitions Zeeman	376
$\psi(t)$	Fonction d'onde	166
$\psi(r, \varphi)$	Solution générale de l'équation de Helmholtz	140
ω_0	Pulsation de résonance de la transition d'horloge	151
ω_0^T	Pulsation propre d'oscillation (moteur + turbine)	365
ω_{m1}^{opt}	Amplitude de modulation optimale (1 ^{ère} harm.)	220
$\omega_{\text{mLB}}^{\text{opt}}$	Amplitude de modulation optimale (large bande)	220
ω_{turb}	Pulsation nominale de rotation de la turbine	365
ω_{RF}	Pulsation du champ RF	452
Ω	Désaccord autour d'une transition $m_F \neq 0$	373
Ω_0	Désaccord micro-onde	168
Ω_c	Pulsation de Rabi magnétique (valeur maximale)	166
$\Omega_{c-}(t)$	Pulsation de Rabi magn. (première zone d'inter.)	192
$\Omega_{c+}(t)$	Pulsation de Rabi magn. (deuxième zone d'inter.)	192
Ω_e	Pulsation de Rabi magnétique équivalente	170
Ω_{e-}	Pulsation de Rabi équiv. moy. (1 ^{ère} zone d'inter.)	194
Ω_{e+}	Pulsation de Rabi équiv. moy. (2 ^{ème} zone d'inter.)	194
$\Omega_{e-}(t)$	Pulsation de Rabi équivalente (1 ^{ère} zone d'inter.)	193
$\Omega_{e+}(t)$	Pulsation de Rabi équivalente (2 ^{ème} zone d'inter.)	193
$\Omega_{e,1}$	1 ^{ère} pulsation de Rabi optimale (jet non-monocin.)	175
$\Omega_{e,1}^0$	1 ^{ère} pulsation de Rabi optimale (jet monocin.)	175
$\Omega_{e,1}^{\text{inp}}$	1 ^{ère} pulsation de Rabi optimale (jet non-ponct.)	188
$\Omega_{e,1}^{0,\text{inp}}$	1 ^{ère} puls. de Rabi opt. (jet non-mono et non-ponct.)	195
$\Omega_{e,n}$	$n^{\text{ème}}$ pulsation de Rabi optimale	170
Ω_{fc}	Pulsation de la frange centrale des trans. Zeeman	380
Ω_{max}	Désaccord du max. de l'env. des franges Zeeman	376
Ω_{Z_i}	Pulsation Zeeman due au champ magnétique B_i	373
$\Omega_{m_F}(z)$	Désaccord Zeeman des transitions $m_F \neq 0$	373
$\Omega^*(t)$	Fréquence de rotation instantanée du spin fictif	452
$\vec{\Omega}^*(t)$	Vecteur de rotation instantané du spin fictif	452
Ω^*	Fréquence de rotation constante du spin fictif	453
$\vec{\Omega}^*$	Vecteur de rotation fixe du spin fictif	453
Ω_{det}	Angle solide de la zone de détection	27

Tab. F.15: Liste des symboles grecs (4/4).

<i>Symbole</i>	<i>Description</i>	<i>Page</i>
*	Produit de convolution	256
c.c.	Complexe conjugué	257
!	Factorielle	60
!!	Double factorielle	61
$\cap$	Intersection de deux ensembles	426
$ $	Valeur absolue	215
$cg_{m_F}^{\Delta m_{F'}}$	Coefficient de Clebsh-Gordan	409
$d\vec{b}/dt$	Dérivée temporelle du vecteur de Bloch	451
$\text{erf}(x)$	Fonction d'erreur	68
$\hbar\vec{L}$	Moment cinétique orbital	404
$\hbar\vec{S}$	Moment cinétique de spin	404
$\hbar\vec{J}$	Moment cinétique électronique total	405
$\hbar\vec{I}$	Moment cinétique nucléaire	405
$\hbar\vec{F}$	Moment cinétique total de l'atome	405
mr	Balourd	365
$\text{rect}(\frac{L/2-x}{L})$	Fenêtre rectangulaire de largeur L centrée en $L/2$	77
$\text{rect}_{t_d}(t)$	Impulsion rectangulaire de durée t_d centrée en $t = 0$	330
$\text{sinc}(x)$	Fonction sinus cardinal	260
${}_1F_1(a; b; z)$	Fonction hypergéométrique confluyente de Kummer	123
S/N	Rapport signal-sur-bruit du résonateur	296
TE	Mode transverse électrique (cavité micro-onde)	140
TM	Mode transverse magnétique (cavité micro-onde)	140
TEM	Mode transverse électrique et magnétique (cavité)	140
$\delta e(t)$	Fluctuations du signal d'erreur	255
$\delta s(t)$	Fluctuations signal de sortie du détecteur synchrone	255
$\delta s_{\text{at}}(t)$	Fluct. signal de sortie détect. synchr. (jet atomique)	292
$\delta s_{\text{at}}^{\text{equ}}(t)$	Fluctuations équivalentes de $\delta s_{\text{at}}(t)$	293
δz	Tranche de jet d'épaisseur infinitésimale	76
$\delta I(t)$	Fluctuations du signal de sortie du résonateur	292
$\delta\zeta$	Sous-intervalle de valeur du paramètre ζ	70
$\delta\vartheta$	Sous-intervalle de valeur du paramètre ϑ	71
$\delta\phi(t, T)$	Fluctuations différence de phase apparente instant.	254
$\delta\phi_{\text{at}}^{\text{equ}}(t)$	Fluctuations phase équiv. de l'oscillateur local	293
$\delta\omega_{\text{LO}}(t)$	Fluctuations de fréquence de l'oscillateur local	254
$\delta\Omega_{\text{LLO}}(f)$	Spectre de fréquence de l'oscillateur local asservi	259
$\delta\Omega_{\text{LO}}(f)$	Spectre de fréquence de l'oscillateur local libre	259
$\delta(\Delta\nu_{\text{Z}})/\nu_0$	Incertitude relative déplacement Zeeman 2 ^{ème} ordre	383
$\langle\varphi_{m_F}\rangle$	Déphasage moyen accumulé par les atomes	380
$\omega_m T^*$	Amplitude de modulation normalisée	448
$\omega_{m_1}^{\text{opt}} T^*$	Amplitude de modulation opt. norm. (1 ^{ère} harm.)	220

Tab. F.16: Liste des autres symboles (1/2).

<i>Symbole</i>	<i>Description</i>	<i>Page</i>
$\omega_{\text{mLB}}^{\text{opt}} T^*$	Amplitude de modulation opt. norm. (large bande)	220
Δc	Distance bord trou de passage - bord cut-off incliné	58
Δl	Déplacement radial du jet (centre cavité - cut-off)	57
Δm_F	Variation du nombre quantique magnétique m_F	408
$\Delta m_{F'}$	Variation du nombre quantique magnétique $m_{F'}$	409
Δr	Distance centre du jet - bord du trou de passage	57
Δt	Durée de blocage du faisceau pousseur (TOF)	76
Δt_{AB}	Temps de vol entre les points A et B de la cavité	57
$\Delta \bar{v}_L$	Ecart de vitesse de lancement moyenne	79
Δx	Ecart transverse du faisceau sonde (pos. nominale)	389
Δx^*	Ecart des abscisses des apogées des trajectoires	123
Δx_-	Distance centre du jet - abscisse x (jet montant)	120
Δx_+	Distance centre du jet - abscisse x (jet descendant)	120
Δx_0	Ecart position trajectoire - centre source (refr. trans.)	99
Δx_0^{di}	Ecart selon x centre détection i - trajectoire nominale	39
$\Delta \bar{z}$	Epaisseur de la tranche de jet découpée (TOF)	76
Δz_{ap}	Dispersion moyenne du jet à l'apogée moyen	125
ΔF	Variation du nombre quantique total F	409
ΔT_{l_0}	Ecart de température longitudinale initiale	79
ΔT_v	Intervalle de temps de vol entre t_1 et t_4	441
$\Delta \zeta$	Intervalle de valeur du paramètre ζ	70
$\Delta \vartheta$	Intervalle de valeur du paramètre ϑ	71
$\Delta \nu_{1/2}$	Pleine largeur à mi-hauteur de la frange centrale	171
$\Delta \nu_{1/2\text{Rabi}}$	Pleine largeur à mi-hauteur du piédestal de Rabi	185
$\Delta \nu_{1/2}^{\text{TE}_{021}}$	Pleine largeur à mi-hauteur du mode TE_{021}	162
$\Delta \nu_{\text{fc-max}}$	Ecart frange centrale - contraste max. de l'enveloppe	380
$\Delta \nu_Z$	Déplacement Zeeman du 2 ^{ème} ordre	408
$\Delta \nu_{\Delta \phi} / \nu_0$	Déplacement de fréquence relatif (déphasage global)	387
$\Delta \nu_{\nabla_r \phi} / \nu_0$	Déplacement de fréquence relatif (gradient de phase)	388
$\Delta \tau$	Durée des transitoires (modulation carrée de phase)	244
$\Delta \phi$	Différence de phase constante du champ RF	208
$\Delta \Omega$	1/2-largeur à mi-hauteur (enveloppe Zeeman, $B=0$)	378
$\bar{\Phi}_+ / \Phi_-$	Rapport $\bar{\Phi}_+^0 / \Phi_-^0$ pour un jet non-monocinétique	327
$\langle \Omega_{e-} \rangle$	Moyenne de Ω_{e-} sur 1 ^{ère} ouverture de la cavité	194
$\langle \Omega_{e+} \rangle$	Moyenne de Ω_{e+} sur 2 ^{ème} ouverture de la cavité	194
$\varnothing_{e-2}$	Diamètre à e^{-2} des faisceaux laser	20
$\nabla_r \phi_z$	Gradient de phase radial	157
$\nabla_z \phi_z$	Gradient de phase longitudinal	159
$\nabla_z B_{\bar{z}}$	Gradient long. du champ résiduel à l'apogée moyen	379
$\partial f_{021}^{\text{TE}} / \partial z$	Coefficient de variation de la fréquence f_{021}^{TE} avec z	161
$\partial f_{021}^{\text{TE}} / \partial T$	Coefficient de variation de la fréquence f_{021}^{TE} avec T	161

Tab. F.17: Liste des autres symboles (2/2).

Publications

Les résultats concernant la fontaine continue, présentés en partie dans ce mémoire, font également l'objets des publications suivantes :

- [BJD⁺98] P. Berthoud, A. Joyet, G. Dudley, N. Sagna, and P. Thomann. A continuous beam of slow, cold cesium atoms magnetically extracted from a 2D magneto-optical trap. *Europhys. Lett.*, 41(2) : 141 – 146, 1998.
- [BFJ⁺98] P. Berthoud, E. Fretel, A. Joyet, G. Dudley, and P. Thomann. Towards a primary frequency standard based on a continuous fountain of laser-cooled cesium atoms. In *Proceedings of the Conference on Precision Electromagnetic Measurements, 6 – 10 July 1998, Washington, USA*, 128 – 129, 1998.
- [BFJ⁺99] P. Berthoud, E. Fretel, A. Joyet, G. Dudley, and P. Thomann. Towards a primary frequency standard based on a continuous fountain of laser-cooled cesium atoms. *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 48(2) : 516 – 519, 1999.
- [DJF⁺99] G. Dudley, A. Joyet, E. Fretel, P. Berthoud, and P. Thomann. An alternative cold cesium frequency standard : the continuous fountain. In *Proceedings of the 13th European Frequency and Time Forum and 1999 IEEE International Frequency Control Symposium, 12 – 16 April 1999, Besançon, France*, 1999.
- [VDF⁺99] C. Valentin, N. Dimarcq, E. Fretel, G. Dudley, A. Joyet, and P. Thomann. Numerical simulations of atomic behaviour for several configurations of cold cesium atomic clocks. In *Proceedings of the 13th European Frequency and Time Forum and 1999 IEEE International Frequency Control Symposium, 12 – 16 April 1999, Besançon, France*, 1999.

- [MJB⁺00] G. Mileti, A. Joyet, P. Berthoud, P. Thomann, and G. Duple. Development of the ON / OFMET continuous Cs fountain standard : a progress report. In *Proceedings of the 14th European Frequency and Time Forum, 15 – 18 March 2000, Torino, Italy*, 2000.
- [JMT⁺00] A. Joyet, G. Mileti, P. Thomann, and G. Duple. Theoretical study of the Dick effect in a continuously operated Ramsey resonator. In *Proceedings of the 14th European Frequency and Time Forum, 15 – 18 March 2000, Torino, Italy*, 2000.
- [DMJ⁺00] G. Duple, G. Mileti, A. Joyet, E. Fretel, P. Berthoud, and P. Thomann. An alternative cold cesium frequency standard : the continuous fountain. *IEEE Trans. UFFC.*, 47(2) : 438 – 442, 2000.
- [DJB⁺00] G. Duple, A. Joyet, P. Berthoud, G. Mileti, and P. Thomann. First results with a cold cesium continuous fountain resonator. *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 50 : 510 – 514, 2001. *Special Issue on the Conference on Precision Electromagnetic Measurements, Sydney, Australia, 14 – 19 May 2000.*
- [JBD⁺00] A. Joyet, P. Berthoud, G. Di Domenico, G. Mileti, G. Duple, and P. Thomann. A continuous fountain of cold Cs atoms in a primary frequency standard. In *Proceedings of the International Conference on Atomic Physics, 5 – 9 June 2000, Firenze, Italy*, 237 – 238, 2000.
- [JMD⁺01] A. Joyet, G. Mileti, G. Duple, and P. Thomann. Theoretical study of the Dick effect in a continuously operated Ramsey resonator. *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 50(1) : 150 – 156, 2001.
- [JDM⁺01] A. Joyet, G. Duple, G. Mileti, and P. Thomann. Recent developments on the ON / METAS Cs continuous fountain standard. In *Proceedings of the 15th European Frequency and Time Forum, 6 – 8 March 2001, Neuchâtel, Switzerland*, 2001.
- [MJD⁺01] G. Mileti, A. Joyet, G. Duple, and P. Thomann. Continuous fountain Cs standard : stability and accuracy issues. *Sixth Symposium on Frequency Standards and Metrology, 9 – 14 Sept. 2001, Fife, Scotland*, 2001.
- [DMJ⁺02] G. Duple, G. Mileti, A. Joyet, C. Mandache, T. Ascente, and P. Thomann. Preliminary evaluation of the ON / METAS continuous fountain standard. In *Proceedings of the 16th European Frequency and Time Forum, 12 – 14 March 2002, St Petersburg, Russia*, 2002.

Bibliographie

- [ACD91] C. Audoin, V. Candelier, and N. Dimarcq. A limit to the frequency stability of passive frequency standards due to an intermodulation effect. *IEEE Transaction on Instrumentation and Measurement*, 40 :121–125, 1991.
- [ACV86] C. Audoin, V. Candelier, and J. Vanier. Effect of the atom transit time on the frequency stability of cesium beam frequency standards. In *Proceedings of the 40th IEEE Frequency Control Symposium*, pages 432 – 440, 1986.
- [AG98] C. Audoin and B. Guinot. *Les fondements de la mesure du temps*. Masson, 1998.
- [AS72] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, 1972.
- [Ber00] P. Berthoud. *Développement d’une source continue d’atomes de césium refroidis par laser*. Thèse de doctorat, Université de Neuchâtel, 2000.
- [BFHS99] A. Bauch, B. Fischer, T. Heindorff, and R. Schröder. Some results and an estimate of the current uncertainty of the PTB’s reconstructed primary clock CS1. *IEEE Trans Instrumentation and Measurement*, 48(2) :508 – 511, 1999.
- [BFJ⁺99] P. Berthoud, E. Fretel, A. Joyet, G. Duddle, and P. Thomann. Toward a primary frequency standard based on a continuous fountain of laser-cooled cesium atoms. *Transaction on Instrumentation and Measurement*, 48(2) :516 – 519, 1999.
- [BFT99] P. Berthoud, E. Fretel, and P. Thomann. A bright, slow, and continuous beam of laser-cooled cesium atoms. *Physical Review A*, 60(6) :R4241–R4244, 1999.
- [BS92] E. Bava and A. G. Shahian. Interaction between atom and radiation with sinusoidally shaped amplitude : Applications to frequency standards. *Appl. Phys. B*, 54 :500 – 505, 1992.

- [CGS⁺96] A. Clairon, S. Ghezali, G. Santarelli, P. Laurent, E. Simon, S. Lea, M. Bouhara, S. Weyers, and K. Szymaniec. The LPTF preliminary accuracy evaluation of cesium fountain frequency standard. In *Proceedings of the 10th EFTF, 5–7 March 1996, Brighton, UK*, 1996. IEE Conference Publication 418.
- [Dic87] G. J. Dick. Local oscillator induced instabilities in trapped ion frequency standards. In *Proceedings of the 19th annual PTTI Meeting*, pages 133 – 147, 1987.
- [DMD⁺99] J. Q. Deng, G. Mileti, R. E. Drullinger, D. A. Jennings, and F. L. Walls. Noise considerations for locking to the centre of a Lorentzian line. *Physical Review A*, 59(1) :773–777, 1999.
- [DMJ⁺92] G. Duddle, G. Mileti, A. Joyet, P. Berthoud, and P. Thomann. Development of the ON/OFMET continuous Cs fountain frequency standard : A progress report. In *Proceedings of the 14th European Frequency and Time Forum, 14–16 March, 2000, Torino, Italy*, 1992.
- [DMJ⁺00] G. Duddle, G. Mileti, A. Joyet, E. Fretel, P. Berthoud, and P. Thomann. An alternative cold cesium frequency standard : The continuous fountain. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 47(2) :438–442, 2000.
- [Dom02] G. Di Domenico. Rapport interne ON, 2002.
- [DPGM90] G. J. Dick, J. D. Prestage, C. A. Greenhall, and L. Maleki. Local oscillator induced degradation of medium-term stability in passive atomic frequency standards. In *Proceedings of the 22nd annual PTTI Meeting*, pages 487 – 508, 1990.
- [DST⁺] G. Duddle, N. Sagna, P. Thomann, E. Aucouturier, P. Petit, and N. Dimarcq. Generation of a continuous beam of cold cesium atoms. In *Proceedings of the Fifth Symposium on Frequency Standards and Metrology, 15 – 19 October 1995, Woods Hole, MA, USA*, pages 121–126.
- [DT92] G. Duddle and P. Thomann. A compact and high-performance reference cell for laser frequency stabilization. In *Proceedings of the 6th European Frequency and Time Forum, 17–19 March, 1992, Noordwijk, The Netherlands*, 1992.
- [Dud96] G. Duddle. *Contribution au développement d’un étalon de fréquence primaire basé sur des atomes refroidis par faisceaux laser*. Thèse de doctorat, Université de Neuchâtel, 1996.

- [FG99] C. Fertig and K. Gibble. Laser-cooled Rb87 clock. *IEEE Transaction on Instrumentation and Measurement*, 48 :520 – 523, 1999.
- [FWS⁺98] P. D. Featonby, C. L. Webb, G. S. Summy, C. J. Foot, and K. Burnett. Observation of light-induced coherence loss in a caesium atomic fountain. *J. Phys. B*, 31 :375–381, 1998.
- [GLLC96] S. Ghezali, Ph. Laurent, S. N. Lea, and A. Clairon. An experimental study of the spin-exchange frequency shift in a laser-cooled cesium fountain frequency standard. *Europhys. Lett*, 36(1) :25–30, 1996.
- [Jac72] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1972.
- [JR87] W. B. Davenport Jr. and W. L. Root. *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise*. IEEE Press, Piscataway, 1987.
- [KM94] A. Khursheed and A. De Marchi. Spatial phase distributions within cavities for cesium fountain standards. In *Proceedings of the 8th EFTF, 9 – 11 March, 1994, Munich*, volume 1, March 1994.
- [Kra74] G. Kramer. Noise in passive frequency standards. In *Proceedings of the Conference on Precise Electromagnetic Measurements*, pages 157 – 159, 1974.
- [KVM95] A. Khursheed, G. Vecchi, and A. De Marchi. On the dependence of spatial phase variations with the RF source in cavities for Cesium fountain standards. In *Proceedings of the 9th EFTF, 8 – 10 March, 1995, Besançon*, March 1995.
- [KVM96] A. Khursheed, G. Vecchi, and A. De Marchi. Spatial variations of field polarization and phase in microwave cavities : Application to the Cesium fountain cavity. *IEEE Transaction on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 43(2) :201 – 210, 1996.
- [Lec98] S. Lecomte. *Conception et réalisation d’un laser semiconducteur en cavité étendue et boucle d’asservissement*. Travail de diplôme, Université de Neuchâtel, 1998.
- [LM95] E. Lippert and J. D. Macomber. *Dynamics During Spectroscopic Transitions*. Springer Verlag, 1995.
- [Mak99] A. Makdissi. *Traitement de signal appliqué aux étalons primaires de fréquence : amélioration de leur exactitude et de leur stabilité*. PhD thesis, Université de Paris-sud, Orsay, 1999.

- [MdCAC98] A. Makdissi, E. de Clercq, C. Audoin, and A. Clairon. Generalisation of the Dick effect to continuous beam frequency standards. In *Proceedings of the IEEE Frequency Control Symposium*, pages 263 – 269, 1998.
- [MJSP01] D. M. Meekhof, S. R. Jefferts, M. Stepanov'ic, and T.E. Parker. Accuracy evaluation of a cesium fountain primary frequency standard at NIST. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 50(2), 2001.
- [OKIN95] S. Ohshima, T. Kurosu, T. Ikegami, and Y. Nakadan. Multi-pulse operation of cesium atomic fountain. In James Bergquist, editor, *Proceedings of the Fifth Symposium on Frequency Standards and Metrology, 15 – 19 October 1995, Woods Hole, MA, USA*. World Scientific, Singapore, 1995.
- [PRM98] L. Lo Presti, D. Rovera, and A. De Marchi. A simple analysis of the Dick effect in terms of phase noise spectral densities. *IEEE Trans. on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 45(4) :899 – 905, 1998.
- [Ram49] N. F. Ramsey. *Phys. Rev.*, 76 :996, 1949.
- [Ram56] N. F. Ramsey. *Molecular Beams*. Oxford University Press, 1956.
- [RTL99] E. L. Rafac, C. E. Tanner, A. E. Livingston, and H. G. Berry. Fast-beam laser lifetime measurements of a cesium 6P₂(1/2,3/2) states. *Phys. Rev. A*, 60(5) :3648–3662, 1999.
- [Sag96] N. Sagna. *Refroidissement d'atomes de césium : étude expérimentale et théorique sur les caractéristiques du piégeage*. PhD thesis, Université de Neuchâtel, 1996.
- [SAM⁺98] G. Santarelli, C. Audoin, A. Makdissi, P. Laurent, G. J. Dick, and A. Clairon. Frequency stability degradation of an oscillator slaved to a periodically interrogated atomic resonator. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 45(4) :887 – 894, 1998.
- [San96] G. Santarelli. *Contribution à la réalisation d'une fontaine atomique*. Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1996.
- [SDT95] N. Sagna, G. Dudley, and P. Thomann. The capture process in spherical magneto-optical traps : experiment and 1D magnetic field models. *J. Phys. B*, 28 :3213 – 3224, 1995.
- [SMT92] N. Sagna, C. Mandache, and P. Thomann. Noise measurements in single-mode GaAlAs diode laser. In J. J. Hunt, editor, *Proceedings of the 6th European Frequency and Time Forum, 17–19 March, 1992, Noordwijk, The Netherlands*, pages 521–525,

- Noordwijk, The Netherland, March 1992. ESA Publication Division.
- [Tho90] P. Thomann. On the length of the drift region in the Ramsey cavity. In *Proceedings of the 22nd PTTI, Vienna, VA, USA*, pages 331–338, 1990.
- [uni91] *Le Système International d’Unités (SI)*. Bureau international des Poids et Mesures, Pavillon de Breteuil, F-92310 Sèvres, France, 6ème édition, 1991.
- [VA89] J. Vanier and C. Audoin. *The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards*. Adam Hilger, 1989.
- [VD93] G. Vecchi and A. De Marchi. Spatial phase variations in a TE_{011} microwave cavity for use in a cesium fountain primary frequency standard. *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 42 :434, 1993.
- [VDF⁺99] C. Valentin, N. Dimarcq, E. Fretel, G. Duddle, A. Joyet, and P. Thomann. Numerical simulations of atomic behaviour for several configurations of cold cesium atomic clocks. In *Proceedings of the Joint Meeting EFTF-IEEE IFCS, 13 – 16 April 1999, Besançon, France*, pages 100 – 103, 1999.
- [WSB01] S. Weyers, R. Schröder, and A. Bauch. Recent results from PTB’s caesium fountain CSF1. In *Proceedings of the 15th EFTF, 6 – 8 March 2000, Neuchâtel, Switzerland*, pages 62 – 66, 2001.

Remerciements

Le travail qui fait l'objet de ce mémoire a été entièrement réalisé dans le cadre des activités Temps/Fréquence de l'Observatoire cantonal de Neuchâtel. Il a été financé par le Fond national suisse pour la recherche scientifique ainsi que par l'Office fédéral de métrologie et d'accréditation. Les personnes qui m'ont aidé à réaliser ce travail et que je tiens à remercier sont nombreuses.

Giovanni Busca, directeur de l'Observatoire cantonal jusqu'en 2001, a eu l'amabilité de m'accepter au sein de son institut et de diriger ma thèse jusqu'à son départ. Je lui suis reconnaissant de m'avoir ainsi donné l'opportunité de réaliser ce travail.

Je remercie aussi Alain Maurissen, actuel directeur de l'Observatoire, de m'avoir permis de mener à terme ce travail.

J'exprime ma gratitude envers René Dändliker et Noël Dimarcq pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse ainsi que pour l'attention qu'ils ont portée à ce mémoire relativement volumineux.

Pierre Thoman, directeur scientifique, a suivi et dirigé ce travail sur toute sa durée. Son soutien dans les moments difficiles et sa disponibilité m'ont été précieux. Sa vision claire des phénomènes physiques essentiels et son grand enthousiasme pour la recherche m'ont beaucoup apporté. Je tiens à le remercier chaleureusement et je lui en suis très reconnaissant.

J'aimerais aussi remercier Cipriana Mandache, Constance Valentin, Emmanuel Fretel et Tomy Ascente pour la collaboration fructueuse que nous avons eue et les moments agréables passés ensemble, ainsi que les autres personnes qui ont également partagé mon bureau : Stefka Cartaleva, Christina Andreeva, Jean-François Léchenne, Dimitar Slavov et Steve Lecomte.

Je remercie également mes collègues actuels du groupe césium, Natascia Castagna et Gianni Di Domenico, pour les services qu'ils m'ont rendu.

Je ne saurais oublier les anciens membres du groupe césium : Gregor Dudle, qui m'a entre autres souvent dépanné avec des problèmes informatiques, et Gaetano Miletì qui m'ont tous deux fourni des résultats expérimentaux très intéressants ainsi que Patrick Berthoud qui m'a initié au début sur la partie optique. Qu'ils en soient ici remerciés.

J'ai également bénéficié de l'aide d'Alain Jornod et de ses connaissances dans divers domaines, en particulier en ce qui concerne la mesure des vibrations, ce dont je l'en remercie.

Un travail de cette ampleur n'aurait pas pu être accompli sans la participation des autres collaborateurs de l'Observatoire. En ce qui concerne la mécanique de précision, j'ai eu la chance de pouvoir compter, à côté de Jean-Claude Sapin et René Maurer, sur l'expérience et les compétences de Jean-François Léchenne qui a notamment contribué de manière importante à la réalisation de la trappe à lumière rotative.

Pour l'électronique, Monique Frosio, Marianne Toimil, Roland Gentsch, Marc Durrenberger, François Delaquis et Olivier Perrenoud m'ont souvent dépanné.

Les nommer tous serait trop long, c'est donc à l'ensemble du personnel que je désire exprimer ma gratitude pour m'avoir fait bénéficier de sa compétence et d'un grand nombre de services ainsi que pour son accueil chaleureux et les moments sympathiques que nous avons partagé ensemble.

Un merci particulier à Simone Wüthrich qui, outre le travail administratif effectué, fût une voisine agréable qui me fit profiter souvent de ses qualités culinaires.

Je salue également chaleureusement mes compagnons "thésards" de l'Observatoire qui se sont succédés durant toutes ces années : Claire Couplet, Natascia Castagna, Renaud Matthey, Patrick Berthoud, Max Frioud, Gianni Di Domenico et Gianni Martucci.

Enfin, je tiens à remercier ma famille, mes soeurs Claire-Lise et Odile et plus particulièrement mes parents Elise et Pierre qui m'ont donné la possibilité d'entreprendre des études dans des conditions favorables. Leurs encouragements et leur soutien moral n'a jamais cessé durant toutes ces longues années. J'adresse une pensée émue à mon père, décédé tragiquement durant ces années de labeur et à qui je serai éternellement reconnaissant. Il est certain que son souvenir m'a poussé à terminer ce travail qu'il n'aura jamais vu de son vivant. Puisse-t-il lui rendre hommage.