Publié dans Travaux de logique 7, 1-9, 1992,
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

GÖDEL: UN PASSE, UN PRESENT, UN AVENIR

Denis Miéville

> [La] limitation fondamentale [que Gödel a mise en évidence] est de ne pouvoir parler adéquatement de la transcendance dans le langage de l'effectuable, c'est-à-dire, du fini.
> (Ladrière)

Gödel, un logicien hors du commun

Le samedi 14 janvier 1978, K. Gödel décède de «malnutrition et inanition» à l'hôpital de Princeton (Pennsylvanie, USA). Il s'éteint à l'âge de 71 ans. Natif de Moravie, formé à l'Université de Vienne en physique et mathématique, Gödel va marquer de son empreinte l'histoire de la logique. Sa mort absurde contraste fortement avec la liste des honneurs qui l'ont couronné. Bénéficiaire du premier prix Einstein (1950), il obtint le titre de docteur en Littérature *honoris causa* de l'Université de Yale, puis de docteur en Sciences *honoris causa* de l'Université de Harvard. Membre permanent de l'Institute for Advanced Studies de Princeton depuis 1938, il reçoit du président Ford la Médaille Nationale de la Science en 1975. Cet être surprenant à plus d'un titre aimait à ce qu'on l'appelle «le découvreur de la vérité la plus importante de son siècle». D'aucuns même n'ont pas craint de le comparer à Aristote.

Pour mieux comprendre son influence, pour mieux saisir la subtilité de son génie, il n'est pas inutile de préciser le climat intellectuel qui prévalait à l'aube de ce siècle dans la communauté des logiciens et de certains mathématiciens.

Pendant plus de deux mille ans, la logique reste intimement liée au discours. Que l'on pense à Aristote et ses syllogismes, que l'on songe à l'enseignement de la logique dans les écoles médiévales: il s'agissait alors, comme l'a écrit Kotarbinski, d'un programme de spéculation verbale. Puis la logique trouve enfin son identité formelle avec Gottlob Frege (1848-1925). Avec lui, c'est la logique mathématique qui prend naissance. On attribue même une année de naissance à cette logique: celle de la parution de l'ouvrage de Frege, la *Begriffsschrift*, 1879. Le projet de Frege est double. D'une part, mathématicien, il veut expliciter ce qui, dans le discours des démonstrations mathématiques, est exprimé dans une langue naturelle et règle les preuves. Il s'agit donc d'aller en deçà des structures mathématiques et d'extraire la substance logique même qui gère le raisonnement mathématique. Il réalise son projet en construisant un système hypothético-déductif pour la logique, système qui permet de fonder les raisonnements de la démonstration mathématique. D'autre part, Frege est persuadé que la logique est le fondement même de l'arithmétique, que les propositions arithmétiques peuvent être réduites à celles de la logique, que l'arithmétique, donc, est dépendante de la logique.

La réalisation de Frege est caractéristique d'un esprit fécond qui a su offrir les assises d'une science nouvelle, libérant la logique de la tutelle des discours tenus dans une langue naturelle, réalisant ainsi une partie du pari de Leibniz. De plus, Frege a su échapper à l'omniprésence du modèle mathématique pour mieux en saisir les fondements.

Frege possède un lecteur attentif de ses oeuvres, il s'agit de Bertrand Russell (1872-1970). En 1902, ce dernier lui fait part de son admiration, mais également lui communique une propriété pour le moins gênante que son système possède: celui-ci est contradictoire. Cette découverte ébranle fortement l'édifice mathématique. En effet, la contradiction semble régner dans les bases mêmes de cette science.

L'antinomie que révèle Russell oblige les mathématiciens et les logiciens à prendre conscience de la fragilité des règles de raisonnement, et davantage encore, que l'arithmétique, la «reine des sciences», repose sur des fondements fragiles. Le problème de sa non-contradiction se pose alors avec une grande acuité. En effet, il s'agit de s'assurer avant de développer une théorie mathématique, que ses principes fondateurs sont exempts de toute contradiction et que les règles de déduction ne peuvent en produire une. C'est à ce problème difficile et important que va s'atteler David Hilbert (1862-1943). La solution proposée est la marque d'un esprit subtil.

Hilbert tire une leçon de l'histoire des sciences, celle qui met en évidence la faiblesse, la non-certitude de nos sens, de nos jugements lorsqu'ils tentent de cerner un contenu conceptuel en un processus rationnel. Il est persuadé que la mathématique doit être libre de tout préjugé et que, pour cela, il faut en aborder les fondements d'une manière uniquement formelle.

Hilbert s'engage dans une réflexion sur la théorie de la démonstration en privilégiant la dimension syntaxique, théorie dans laquelle il n'est pas question de considérer une organisation mathématique chargée de sens. Une de ses idées est d'avoir formulé la distinction précise entre le langage utilisé pour une théorie mathématique et le langage qui sert à en parler. Il sépare ainsi nettement mathématique et métamathématique. Celle-ci se présente comme un système axiomatique qui s'organise sur la base de matériaux symboliques et qui contient des règles formelles de formation et de transformation, règles purement opératoires. Une telle structure doit être contrôlable. Il faut donc exiger des conditions d'effectivité, et n'admettre que des procédures finitaires. Dans cette perspective, le problème de la non-contradiction se pose en d'autres termes. Il s'agit de démontrer qu'en appliquant les règles formelles aux propositions de base, il est impossible d'obtenir à la fois une formule du système et sa négation. On veut davantage encore. Si l'on admet que la mathématique contient tous les modes de raisonnement rationnel, elle contient donc ceux qui s'appliquent à la métamathématique. La métamathématique possèderait donc, de manière réfléchissante, les moyens de montrer sa propre non-contradiction. Ce rêve s'éteint lorsque Kurt Gödel démontre en 1931 l'impossibilité de prouver la non-contradiction de toute théorie contenant l'arithmétique si les démonstrations utilisées consistent en ces procédés finis, voulus par Hilbert. Dans cette perspective, la mathématique est essentiellement incomplète, et davantage encore, elle ne saurait être complétée: la méthode axiomatique possède certaines limites internes qui excluent la possibilité d'axiomatiser dans sa totalité l'arithmétique, et donc la mathématique classique. Il n'y a pas de système axiomatique de type hilbertien capable d'envisager la totalité des problèmes de la pensée mathématique, ainsi que la possibilité d'en proposer toutes les réponses.

Mais les théorèmes critiques de Gödel ne marquent cependant pas le crépuscule d'un temps et d'une manière de vivre la pensée mathématique.

1991: Gödel, quelque soixante ans plus tard

En 1979, l'oeuvre de Gödel est tombée, si je puis m'exprimer ainsi, dans le domaine public. Cette année-là, Hofstadter publie son ouvrage à succès: *Gödel, Escher, Bach*. L'auteur exploite de manière talentueuse et fascinante, une certaine idée de la circularité qui apparaît dans la démarche démonstrative que Gödel a mise en évidence. Cette association généreuse qui a imprégné de poésie les théorèmes de limitation, a conduit à certaines conséquences navrantes. Gödel est apparu à l'image d'un magicien, d'un représentant de l'ésotérisme logique, «qui a réussi à maîtriser le dire sur les choses dans les choses elles-mêmes», a-t-on pu lire. Une certaine gödélite s'est alors propagée, pour emprunter le terme à Girard (1989). L'engouement que cet ouvrage a suscité s'explique certes par le talent de son auteur, mais également par le fait que les présentations des démonstrations des théorèmes de limitation qui se veulent accessibles, invitent, par leur sobriété, l'imagination à se mouvoir dans le mystérieux, l'incompris. On n'y révèle jamais les mécanismes démonstratifs, on ne fait que les suggérer: pour le théorème d'incomplétude, Dubarle consacre deux pages, Nagel et Newman, six pages. Il faut admettre que Gödel lui-même n'a pas été très généreux, puisque sa démonstration occupe l'espace de quelque vingt-cinq pages! Il n'en demeure pas moins que la responsabilité de l'auteur de *Gödel,* *Escher, Bach* est grande dans ce qui a pu être dit des résultats gödeliens. Et même s'il a réussi à faire rêver sur le thème logique - en soi il s'agit d'un exploit -, il a ouvert la porte à des suggestions épistémologiques douteuses. La réflexion s'est effacée devant des slogans. En voici quelques uns:

- Il est impossible de démontrer la non-contradiction de l'arithmétique (on oublie un peu vite Gentzen, et surtout le cadre dans lequel les théorèmes de Gödel prennent sens).
- On mentionne la ruine de l'école de Hilbert, et sa fameuse colère lorsqu'il prend connaissance du théorème d'incomplétude.
- Le Figaro parle même d'une bombe mathématique, il n'en fut rien!
- Albert Ducrocq affirme, comme si cela était évident, que le théorème de Gödel introduit une notion de relativité mentale.
- On apprend qu'il y a davantage de vérités que de preuves, on le chante de différentes manières: il y a au plan de l'évidence des propositions vraies qu'au plan de la certitude nul ne parviendra à saisir.
- On parle également de l'inadéquation de la formalisation pour capter l'intuition.
- On apprend que Gödel a prouvé que nous ne sommes pas des machines.
- On nous dit que le théorème de Gödel se réduit simplement à la compréhension du théorème du point fixe.

Il est indispensable d'aborder ces aphorismes avec un esprit critique, mais il est surtout nécessaire de les confronter au test de la réalité, de celle que constitue la démonstration des théorèmes d'incomplétude de Gödel. C'est la raison pour laquelle Marie-Jeanne Borel et Henri Volken (Université de Lausanne), et Denis Miéville (Université de Neuchâtel) ont organisé l'an passé un IIIème cycle de formation post-grade qui voulait offrir un parcours complet des démonstrations relatives aux théorèmes de limitation. C'était aussi une manière de mettre en évidence une certaine beauté que possèdent ces démonstrations, une beauté que leur confère le génie humain qui les a inventé. En effet, la manière de s'inspirer du paradoxe, tout en se donnant les moyens de l'éviter, est déjà surprenante, mais que dire de la démarche qui inscrit la complétude pour la logique des prédicats, et qui utilise des procédés de construction inattendus, qui d'expansions en extensions, réalisent conceptuellement des systèmes catégoriques, qui découpent dans la syntaxe des modèles internes? Mais, il y avait davantage dans notre volonté de présenter l'oeuvre de Gödel que son autorité marquée dans l'histoire de la pensée.

Un Gödel revisité

Comment Gödel a-t-il réagi après avoir démontré son théorème d'incomplétude? Gödel a-t-il vraiment dit quelque chose sur ce qu'il a fait qui montrerait qu'il n'a pas compris la portée de ce qu'il a fait, comme l'a prétendu Wittgenstein? Et qu'elle était la philosophie de Gödel? Etait-ce par goût du formalisme qu'il s'est plongé dans ces démonstrations? Est-il formaliste? Certes non! On a écrit que le point de vue de Gödel s'oppose aussi bien au formalisme qu'à l'intuitionnisme et à l'empirisme. On pourrait penser que, homme de Vienne, Gödel ait quelque affection pour le positivisme logique et la philosophie analytique. Il tenait dit-on en piètre estime cette forme de pensée. Dans quel champ conceptuel se situait-il donc? Le théorème de Gödel a-t-il eu des conséquences sur la philosophie de l'esprit? L'intérêt que l'on porte aujourd'hui aux choses de l'intelligence artificielle offre-t-il une nouvelle lecture des théorèmes critiques de Gödel?

Les résultats critiques de Gödel constituent l'un des thèmes centraux d'une réflexion épistémologique sans cesse renouvelée. Il est reconnu, et de manière incontestable, que Gödel a jeté sur l'ensemble des mathématiques une lumière nouvelle, qu'il a fourni à sa discipline un corpus de concepts, des méthodes et des résultats dont elle tire à ce jour une bonne part de sa substance. Il a très largement contribué à former, à côté des mathématiciens appliqués, et des mathématiciens purs, une troisième race de mathématiciens - pour reprendre l'expression de Demazure -, ceux qui sont imprégnés de logique et d'informatique. Il a contribué à constituer la logique en art d'inventer des mathématiques, comme l'a écrit Mme Sinaceur dans son ouvrage *Corps et Modèles* (1991: 380). Mais comment dire et comment lire Gödel? Pour clore notre cycle de formation postgrade, il nous a semblé indispensable de réunir un groupe de savants et d'experts pour saisir davantage l'importance du message gödelien, et ceci à la lumière d'une réflexion qui a su prendre distance avec l'événement lui-même. C'est une ouverture sur une aventure intellectuelle nouvelle que nous voulions offrir, de celle qu'anticipait déjà le Révérend Père Dubarle à la fin des années cinquante, lui qui écrivait cette très belle page:

> «Les formalismes logico-mathématiques que nous sommes capables de mettre sur pied sont du genre des herbiers. Ils nous font voir distinctement un état de la pensée mathématique. Ils ne nous montrent pas directement ces virtualités antérieures aux états mêmes, ces virtualités préscientifiques que la pensée mathématique vivante et en instance d'évolution emporte avec elle comme son plus précieux capital d'avenir. Leur fonction est précisément *de ne pas* les représenter, de les faire perdre au clair concept de la science afin de mieux faire sentir, comme par un choc en retour, l'originalité et le prix de ce qui est absent de ce clair concept. Que ce quelque chose existe comme une source indéfinie de renouvellement, ils l'attestent d'une façon indirecte. Les théorèmes critiques de Gödel, Church, Löwenheim-Skolem sont des théorèmes qui forcent à comprendre la non-autarchie de ces formalismes, l'impossibilité qu'ils ont de se clore de façon suffisante sur eux-mêmes. Les formalismes manifestent alors, pour ainsi dire, l'adhérence du résultat qu'ils sont à un indéfini qui n'est *pour eux* que néant et obscurité, mais d'où montera leur renouvellement essentiel. *Pour l'esprit du mathématicien* qui vit sa pensée, l'indéfini en question n'est en effet nullement néant et obscurité, mais faculté indéfinie et encore inexplorée des clartés ultérieures. Le bienfait des formalismes à cet égard est d'apprendre où il faut désormais regarder pour entrer dans le radicalement nouveau, dans le véritable imprévu qui seul fait les grandes conquêtes.
>
> La logique de la pensée mathématique paraît ainsi s'être conquise à la fois en vertu d'une espérance naïve de la rationalité mathématique et comme en vue de démontrer à l'esprit le succès bien relatif de cette es-

> pérance, c'est-à-dire au fond sa catastrophe. Mais les résultats de cette conquête ne sont pourtant pas aussi négatifs qu'il peut le paraître au terme de cette démonstration (...). Un certain départ se fait. Ce qui passe des mathématiques et de leur logique dans les formalismes c'en est précisément le passé, si riche soit-il encore d'avenues à parcourir et incomplètement parcourues. Mais la nette conscience de ce passé, une fois bien vu qu'il ne saurait être tout, permet d'aborder le tout avec des yeux renouvelés, formés à l'exploration de l'avenir, aussi bien ouverts à la création mathématique la plus essentielle que préparés à la logique, inédite encore, de ces créations qui viendront». (1957: 84-85)

Dans cette perspective, Madame Hourya Sinaceur (Université de Paris I) et Messieurs Evandro Agazzi (Université de Fribourg), Carlo Celluci (Universita degli studi di Roma «la Sapienza»), John Corcoran (State University of New York, at Buffalo), Jean-Paul Delahaye (Université de Lille), Jacques Paul Dubucs (Université de Paris I), Henri Lauener (Université de Berne), Richard Vesley (State University of New York, at Buffalo), ont présenté un Gödel revisité, pensé aujourd'hui, d'une rare qualité. A travers ces pages, j'invite le lecteur à suivre à son tour cette visite que les conférenciers à ce colloque nous ont offerte, et qui en ont fait un événement.

Séminaire de logique
Faculté des lettres
Espace Louis-Agassiz 1
CH - 2000 Neuchâtel

Références bibliographiques

DUBARLE, R. (1957). *Initiation à la logique*. Paris: Vrin.
FREGE, G. (1879). *Begriffsschrift*. Halle: Nebert.
GIRARD, J.-Y. (1989). In: E. Nagel *et al*. (eds) 1989.
HOFSTADTER, D. (1979). *Gödel, Escher, Bach*. Hassocks: The Harvester Press.
KOTARBINSKI, T. (1964). Leçons sur l'histoire de la logique. Paris: PUF.
NAGEL, E., NEWMAN, J.R., GÖDEL, K., GIRARD, J.-Y. (1989). *Le théorème de Gödel*. Paris: Seuil.
SINACEUR, H. (1991). *Corps et Modèles*. Paris: Vrin.