Publié dans Travaux du Centre de Recherches Sémiologiques 63, 113-134, 1995, source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

QUELQUES CONSÉQUENCES (CACHÉES?) DU PROBLÈME DES «CONSÉQUENCES CACHÉES»

James GASSER

1. Préambule

Personne ne devrait choisir un titre comme le mien sans accepter en même temps la responsabilité morale de l'expliquer immédiatement et sans délai. Voici donc de quoi il s'agit. Le problème est de savoir comment il nous est possible de comprendre un ensemble de prémisses tout en ignorant que cet ensemble de prémisses implique une proposition, lorsqu'il l'implique effectivement. Voilà ce qu'on peut convenir d'appeler le problème des «conséquences cachées»[1]. Comment se fait-il, en effet, que les conséquences de propositions que nous examinons et que nous avons le sentiment de comprendre ne soient pas toujours immédiatement reconnues comme telles? Pourquoi est-il nécessaire de faire des déductions qui peuvent être longues, complexes et ardues pour mettre en évidence des conséquences qui sont déjà en quelque sorte «contenues» dans les prémisses?

Ce problème résulte d'une certaine «tension»[2] entre la *validité* de l'inférence déductive et son utilité ou «*informativité*». Puisque les prémisses d'un argument *valide* «contiennent» toutes leurs conséquences, on peut naturellement se demander comment un tel argument peut *informer* le raisonneur en apportant des informations dans la conclusion que le raisonneur n'aurait pas reconnues dans les prémisses. Et comment la déduction de cette conséquence à partir des prémisses données peut-elle lui conduire à des connaissances nouvelles?

---

1 Avec Scarre (1984).

2 Je reprends ce terme de Dummett (1973, 297-300), qui l'utilise en rapport avec ce même problème.

Le problème dit des «conséquences cachées» se présente donc en termes de *validité* et d'«*informativité*». Certains auteurs qui s'expriment à ce sujet ne prennent pas la peine d'expliciter leurs conceptions de ces notions[3]. Pour ma part, je me propose d'en rappeler l'essentiel avant d'aller plus loin.

2. La validité

La classe des *arguments* constitue le champ d'application des propriétés *valide* et *non valide*. Si un argument est valide, on dit que la conclusion *s'ensuit logiquement* des prémisses ou que ces mêmes prémisses *impliquent logiquement* la conclusion. *Validité*, *conséquence logique* et *implication logique* sont trois expressions qui désignent le même rapport entre un ensemble de prémisses et une conclusion.

Il y a trois manières principales de caractériser la validité:

(1) selon la conception de *nécessité:*

Un argument est valide si et seulement s'il est logiquement *nécessaire* que la conclusion soit vraie à supposer que toutes les prémisses le soient.

(2) selon la conception d'*impossibilité:*

Un argument est valide si et seulement s'il est logiquement *impossible* que toutes les prémisses soient vraies et que la conclusion soit en même temps fausse.

(3) selon la conception d'*inclusion d'informations:*

Un argument est valide si et seulement si l'ensemble des prémisses *contient* toutes les informations de la conclusion.

---

3 C'est notamment le cas de Mill. On peut néanmoins présumer, sur la base de ses exemples, qu'il a la mauvaise idée d'identifier la relation qui existe entre un ensemble de prémisses et ses conséquences à celle réalisée entre une proposition générale et chacun de ses cas particuliers.

Ces trois définitions sont équivalentes. Il s'agit en effet dans chaque cas d'une condition nécessaire et suffisante pour la validité d'un argument. La conception de nécessité est à la base de la déduction directe. Celle d'impossibilité sous-tend la déduction indirecte, ou «par l'absurde». Enfin, la conception d'inclusion est suggérée par l'étymologie même de «déduction» et d'«implication», tant il est vrai que la déduction permet de «tirer dehors» les informations impliquées — ou «enveloppées» — dans un ensemble de prémisses.

3. L'«informativité»

Il est clair qu'un argument peut très bien être valide sans rien apporter de nouveau à quelque raisonneur que ce soit. En effet, on peut considérer la simple répétition d'une proposition comme un argument dans lequel l'unique prémisse et la conclusion sont identiques. Un tel argument est évidemment *valide* mais il n'est en aucun cas *informatif*. En quoi consiste donc cette notion d'«informativité»?

Il convient de reconnaître tout de suite que la validité est *nécessaire*, même si elle n'est pas *suffisante*, pour qu'un argument soit informatif. En effet, seul un argument valide permet d'informer un raisonneur plutôt que de le désinformer! Mais que faut-il en plus de la validité pour obtenir l'«informativité»?

Trois conditions semblent s'imposer. Premièrement, comme je l'ai déjà relevé, la conclusion d'un argument non seulement valide mais informatif ne doit pas être redondante, c'est-à-dire qu'elle ne doit pas être identique à l'une des prémisses. Deuxièmement, une telle conclusion ne doit pas non plus être tautologique; on ne saurait considérer comme *informatif* un argument qui conclut par une proposition qui ne contient *aucune information*. Troisièmement, la conclusion d'un argument valide et informatif ne doit pas être ce que j'appellerai une «conséquence affaiblie» de l'ensemble des prémisses. Une conséquence est dite *affaiblie* si, et seulement si, il existe une autre conséquence du même ensemble de prémisses qui l'implique sans être impliquée par lui. Par exemple, une conséquence de la forme $p \vee q$ est dite affaiblie lorsque *p* constitue déjà une conséquence du même ensemble de prémisses; de même pour une conséquence de la forme $q \supset p$. Il s'agit, en somme, d'écarter les conséquences dans lesquelles les informations se trouvent «diluées» par une sorte d'«addition» d'informations non pertinentes[4].

4. Un exemple

Ce qui vient d'être dit suffit pour montrer que le problème des «conséquences cachées» ne concerne pas les arguments *évidemment valides*. Un argument comme

Tarski est un logicien polonais.
? Tarski est un logicien[5].

est évidemment valide. En effet, dans un tel argument, la conséquence utilisée comme conclusion est évidemment «contenue» dans l'ensemble des prémisses; elle n'est pas du tout «cachée».

Le problème des «conséquences cachées» concerne donc les arguments qui sont valides sans l'être évidemment. Le problème consiste en fait à expliquer la possibilité même de tels arguments.

Prenons par exemple l'argument suivant:

Tout le monde aime quelqu'un qui aime[6].
Roméo aime Juliette.
? Eltsine aime Routskoï.

---

4 A ce titre, on pourrait également écarter une conséquence de la forme $p \wedge p$ lorsque p constitue déjà une conséquence.

5 Dans ce travail, un point d'interrogation précèdera et désignera la conclusion de chaque argument.

6 Il s'agit ici, bien évidemment, de «quelqu'un» au sens de «n'importe qui» et non pas au sens de «quelqu'un en particulier». On affirme donc que «Si x est quelqu'un qui aime (sous-entendu, Si x est quelqu'un qui aime *quelqu'un*), alors tout le monde aime x — et cela *quel que soit* x», c'est-à-dire que «Pour tout x, s'il y a un z que x aime, alors tout le monde aime x» (univers: l'humanité): $\forall x \forall y(\exists z(Axz) \supset Ayx)$.

Cet argument est valide, mais sa validité est loin d'être évidente. Les deux termes de la conclusion, «Eltsine» et «Routskoï», ne sont même pas mentionnés explicitement dans les prémisses. Et personne n'oserait affirmer que la proposition «Eltsine aime Routskoï» n'apporte rien de nouveau! Cet argument (appelons-le «argument initial») est évidemment *informatif*; afin de montrer qu'il est en même temps *valide*, il suffira de montrer, au moyen d'un raisonnement, que la conclusion est déductible à partir des prémisses données.

Il s'ensuit directement de la deuxième prémisse, «Roméo aime Juliette», que «Roméo est quelqu'un qui aime». L'argument

Roméo aime Juliette.
? Roméo est quelqu'un qui aime.

est non seulement valide, mais il l'est *évidemment*.

Profitant de cette «conclusion intermédiaire» — «Roméo est quelqu'un qui aime» — on peut enchaîner avec un nouvel argument évidemment valide:

Tout le monde aime quelqu'un qui aime.
Roméo est quelqu'un qui aime.
? Tout le monde aime Roméo.

En enchaînant des arguments évidemment valides, on établit d'autres conclusions intermédiaires et de proche en proche on parvient à la conclusion de l'argument initial, «Eltsine aime Routskoï»:

Tout le monde aime Roméo.
? Routskoï aime Roméo.

Routskoï aime Roméo.
? Routskoï est quelqu'un qui aime.

Tout le monde aime quelqu'un qui aime.
Routskoï est quelqu'un qui aime.

? Tout le monde aime Routskoï.

Tout le monde aime Routskoï.
? Eltsine aime Routskoï.

L'argument initial est valide tel qu'il est donné. Un enchaînement d'arguments supplémentaire est nécessaire pour rendre la validité de l'argument évidente — pour *montrer* cette validité — et non pour rendre l'argument valide.

Je demande au lecteur de bien vouloir me pardonner s'il n'y a rien de nouveau dans ce que j'expose ici. Je reconnais qu'il s'agit d'un exemple simple et élémentaire, que l'on pourrait utiliser dès la première leçon d'un cours d'introduction à la logique. Si je me permets de le présenter ici, c'est dans un tout autre but. En effet, j'ose présenter cet exemple afin d'illustrer quelques problèmes associés à l'acquisition de la connaissance par des moyens déductifs.

La simplicité même de cet exemple (et de *tout* exemple analysé convenablement) constitue un premier problème. Comment explique-t-on le fait qu'une déduction peut être longue et complexe, alors que chaque argument qui en fait partie est très simple voire banale? Dans le cas de sciences déductives comme l'arithmétique ou la géométrie, il est nécessaire de consacrer beaucoup de temps et d'efforts à la déduction de conséquences à partir des premières propositions. Comment expliquer le fait que le développement des sciences déductives peut être si complexe et ardu, étant donné l'extrême simplicité de chaque étape utilisée dans un raisonnement déductif?

Un deuxième problème, dont le commentateur le plus éloquent était sans doute Mill, est celui du progrès épistémique réalisé par le raisonnement déductif:

> La question est de savoir comment, étant ainsi contenue et impliquée [dans les prémisses], [la conclusion] pouvait constituer une nouvelle vérité, et comment les théorèmes de la géométrie pouvaient être

> contenus dans les définitions et axiomes qui sont si différents en apparence[7] (Mill 1873: 180).

Voilà ce que Mill qualifiait de «grand paradoxe de la découverte de nouvelles vérités au moyen du raisonnement général» (*ibid.*)[8]. On conviendra que le cas de «Eltsine aime Routskoï» semble tout aussi paradoxal.

Un autre problème, également soulevé par Mill (1843, livre II, ch. iii, § 2), est la possibilité qu'on commette toujours une pétition de principe en raisonnant déductivement. On pourrait reprocher à notre exemple que la première prémisse, «Tout le monde aime quelqu'un qui aime», présuppose déjà dans un certain sens la conclusion, «Eltsine aime Routskoï». Ainsi, on pourrait estimer qu'il est impossible de supposer la vérité de la prémisse sans supposer en même temps celle de la conclusion.

Le problème dont il est question dans mon titre est celui des conséquences qui restent «cachées» dans un ensemble de prémisses, à savoir qu'elles ne sont pas explicitement reconnues par un raisonneur qui, pourtant, comprend bien les prémisses. Il s'agit de déterminer pourquoi nous ne saisissons pas tout de suite toutes les conséquences des propositions que nous comprenons par ailleurs. Comment la proposition «Eltsine aime Routskoï», par exemple, aurait-elle pu nous échapper, étant donné qu'elle fait partie de la signification collective des prémisses «Tout le monde aime quelqu'un qui aime» et «Roméo aime Juliette»?

Tous les problèmes que je viens de mentionner, ainsi que d'autres, ont à voir avec l'acquisition de la connaissance par des moyens déductifs. Cependant, mon propos à moi ne concerne que le problème des «conséquences cachées». Voyons donc de plus près maintenant de quoi il s'agit.

7 «[...] the conclusion is actually contained and implied in the premises. How, being so contained and implied, it could be new truth, and how the theorems of geometry, so different in appearance from the definitions and axioms, could be all contained in these, was a difficulty which no one, I thought, had sufficiently felt, and which, at all events, no one had succeeded in clearing up.»

8 «[...] the great paradox of the discovery of new truths by general reasoning.»

5. Raisonnement déductif et progrès épistémique

Les arguments *informatifs*, au sens expliqué, sont ceux qui non seulement apportent des informations mais présentent un intérêt réel. Il s'agit en somme d'arguments qui conduisent à de nouvelles connaissances. Dès l'Antiquité, et aujourd'hui encore, on cherche à expliquer comment il est possible qu'un argument soit à la fois valide et informatif. S'il est valide, on admet que toutes les informations de la conclusion sont déjà en quelque sorte «contenues» dans les prémisses; auquel cas on imagine mal que la conclusion d'un argument *valide* puisse apporter une nouvelle information. Si, en revanche, l'argument est informatif, sa conclusion apporte «du nouveau» et on voit mal comment il pourrait être valide. A première vue tout au moins, selon une critique devenue classique, tout argument est soit valide soit informatif, mais pas les deux en même temps.

Si certains auteurs sont d'avis que ces deux propriétés sont mutuellement exclusives[9], d'autres reconnaissent que, dans l'ensemble, les inférences effectivement utilisées dans le raisonnement déductif sont à la fois valides et informatives. Pour les uns, le problème principal est celui «de la *possibilité* même de l'argumentation déductive», pour reprendre la caractérisation de Dummett (1973: 297)[10]; pour les autres, le problème central et prioritaire est celui de la *nécessité* de la déduction. Ces derniers cherchent non pas à déterminer *si* le raisonnement obtenu à partir d'arguments valides peut apporter des informations nou-

9 Cf. p.ex. le point de vue de Descartes exposé dans la dixième des *Règles pour la direction de l'esprit* (1628: 97): «[...] pour qu'il apparaisse encore avec plus d'évidence que cette méthode de raisonnement n'est d'aucune utilité pour la connaissance de la vérité, il faut remarquer que les Dialecticiens ne peuvent former aucun syllogisme en règle qui aboutisse à une conclusion vraie, s'ils n'en ont pas eu d'abord la matière, c'est-à-dire s'ils n'ont pas auparavant connu la vérité même qu'ils déduisent dans leur syllogisme. D'où il ressort qu'eux-mêmes n'apprennent rien de nouveau d'une telle forme; que, par suite, la Dialectique ordinaire est tout à fait inutile pour ceux qui veulent chercher la vérité, et ne peut servir qu'à pouvoir quelquefois exposer plus facilement à d'autres des raisons déjà connues; et que par conséquent il faut la faire passer de la Philosophie dans la Rhétorique». Pour Poincaré (1894: 371-372), «La possibilité même de la science mathématique semble une contradiction insoluble. Si cette science n'est déductive qu'en apparence, d'où vient cette parfaite rigueur que personne ne songe à mettre en doute? Si, au contraire, toutes les propositions qu'elle énonce peuvent se tirer les unes des autres par les règles de la logique formelle, comment la mathématique ne se réduit-elle pas à une immense tautologie? Le syllogisme ne peut rien nous apprendre d'essentiellement nouveau [...]».

10 C'est moi qui souligne.

velles, mais à expliquer *comment* la chose est possible. Mill, par exemple, qui affirme explicitement que le raisonnement déductif conduit à de nouvelles connaissances[11], se propose d'expliquer ce qu'il considère comme indéniable mais problématique. Pour lui, «les sciences mathématiques dans leur ensemble» constituent la meilleure preuve de la fonction épistémique du raisonnement déductif (Mill 1828: 33)[12].

L'idée même d'une science déductive repose en effet sur le fait que toute proposition «contient» implicitement d'autres; il suffit de penser aux axiomes de la géométrie élémentaire qui «contiennent» le théorème de Pythagore pour reconnaître que la déduction systématique de conséquences conduit le raisonneur à de nouvelles connaissances. Dummett (1973: 297) déclare que lorsqu'il considère une science déductive comme l'arithmétique ou la géométrie, et qu'il observe la complexité et la richesse des résultats obtenus à partir de bases apparemment très simples, il est surtout frappé par deux choses. Premièrement, l'extrême difficulté d'établir les théorèmes. Et, deuxièmement, les surprises que certains théorèmes nous réservent[13].

Le raisonnement à partir des prémisses «Tout le monde aime quelqu'un qui aime» et «Roméo aime Juliette» a révélé des conséquences difficilement imaginables à première vue. C'est en tirant des conséquences que l'on se rend compte de la généralité et de la puissance (comme de la fausseté!) de la proposition «Tout le monde aime quelqu'un qui aime». Au départ, en effet, cette proposition ne choque pas. Et pourtant, bien que l'on comprenne la signification de chacun des mots utilisés dans

---

11 «As to the fact, there could be no doubt» (Mill 1873: 180).

12 «Of this fact [that many truths, virtually involved in propositions which we have already assented to, might practically, unless elicited by a process of reasoning, have remained for ever as completely unknown, as if they did not result from the knowledge we previously possessed], the whole science of mathematics is a perpetual proof».

13 «[...] when we contemplate the wealth and complexity of number-theoretic theorems which, by chains of such inferences, can be proved from the apparently simple set of Peano axioms, we are struck by the difficulty of establishing them and the surprises that they yield.» Cf. aussi C.S. Peirce (C.P. 3.363): «Depuis longtemps, on essaie de comprendre comment il est possible que, d'une part, les mathématiques soient de nature purement déductives et tirent leurs conclusions de manière apodictique alors que, d'autre part, elles présentent une suite de découvertes surprenantes aussi riche et apparemment sans fin que n'importe quelle science empirique.» («It has long been a puzzle how it could be that, on the one hand, mathematics is purely deductive in its nature, and draws its conclusions apodictically, while on the other hand, it presents as rich and apparently unending a series of surprising discoveries as any observational science.»)

l'expression de la proposition, on ignore sa portée. On comprend la proposition, mais on ignore ce qu'elle implique; le raisonnement nous a réservé une surprise.

On n'insiste pas suffisamment, à mon sens, sur les surprises que nous réservent fréquemment la déduction[14]. Il me paraît tout de même étonnant qu'à partir de prémisses que le raisonneur comprend, et qu'il peut de surcroît reconnaître comme vraies, il lui reste possible d'ignorer telle ou telle conséquence. Ou, tout au moins, de ne pas en avoir un semblant d'intuition pour éviter de s'exposer à une surprise qui pourrait être désagréable. A ce propos, on pense tout naturellement à Frege. Personne n'imagine qu'il manquait d'intelligence. Néanmoins, dans ses *Grundgesetze*, Frege cherchait à fonder l'arithmétique avec des prémisses qui (comme il l'a découvert trop tard) impliquent que 0 = 1! Il y a quelque chose de presque surnaturel dans le phénomène, quelque chose de plus grand que la vie et qui semble nous dépasser. Il arrive parfois que la logique semble «prendre le pouvoir»[15].

6. Les «conséquences cachées»

> Voici donc ce que nous apporte la déduction logique: elle nous donne conscience de tout ce que nous avons affirmé [...] implicitement seulement et sans nous en rendre compte, lorsque nous émettions tout un système de phrases (Hahn 1935: 27).

14 Wittgenstein pouvait-il vraiment être sérieux en affirmant qu'«il ne peut *jamais* y avoir de surprise en logique» (1921: 6.1251)?

15 Frege a reconnu par la suite qu'«Il est complètement déraisonnable de supposer que toute contradiction soit immédiatement reconnaissable; une contradiction se trouve parfois bien dissimulée et ne sera découverte qu'au moyen d'un long enchaînement d'inférences» («Es ist ganz verkehrt anzunehmen, jeder Widerspruch sei sofort erkennbar; manchmal liegt ein Widerspruch sehr versteckt und wird erst durch eine längere Schlusskette entdeckt») (1906: 194). On peut ajouter, dans le même esprit, qu'il n'est pas moins déraisonnable de supposer que les *surprises*, les inférences *évidentes* ou *reconnues* valides, ainsi que d'autres formulations qui se réfèrent tacitement à un raisonneur, relèvent d'une certaine «psychologie» et non de la logique. Il suffit en effet de consulter un manuel récent de logique mathématique moderne pour constater à quel point cette idée est fausse [cf. p.ex. Barwise & Etchemendy 1992: 25-26]. Si, malgré tout, mon lecteur persiste à croire qu'une surprise ressentie par un raisonneur ne concerne jamais la logique, même lorsque la logique elle-même est à l'origine de la surprise, qu'il considère le cas de *surprises générales* telles que la découverte de géométries non euclidiennes consistantes ou du paradoxe de Russell. Dans ces cas, la surprise est bien en rapport avec la logique, mais elle n'a strictement rien de subjectif puisqu'elle ne dépend absolument pas de l'individu.

Ces quelques paroles au sujet de la déduction sont celles de Hans Hahn, le maître de Kurt Gödel. De son point de vue, le rôle de la déduction — ce qu'elle «nous apporte» — c'est de nous «donner conscience» à nous, les raisonneurs, de conséquences que nous prenons en charge «implicitement seulement et sans nous en rendre compte» en acceptant telle ou telle prémisse. Le rôle de la déduction, en somme, c'est de montrer ce qui est «contenu», sans l'être évidemment ou visiblement, dans les propositions que nous affirmons. Son rôle consiste donc à «révéler» ce qui est en quelque sorte «caché».

Il ressort de ce bref passage de Hahn que l'un des aspects du problème des «conséquences cachées» qui ne fait *pas* problème est celui de la localisation des conséquences dites «cachées». Où sont-elles? La réponse est simple: elles se trouvent toutes dans des prémisses reconnues explicitement. (Tout le problème des «conséquences cachées» part du fait que les prémisses, elles, sont explicites, déclarées, acceptées et parfaitement comprises par le raisonneur en question qui, pourtant, ignore la plupart des conséquences en quelque sorte contenues dans ces mêmes prémisses.) Les «conséquences cachées», donc, se trouvent, toutes, dans des prémisses qui n'ont, elles, rien de caché.

On admet généralement qu'une simple compréhension des prémisses peut s'avérer insuffisante pour reconnaître une relation de conséquence, mais reste à savoir *pourquoi*. Et c'est bien le *pourquoi* qui est estimé problématique. Lorsqu'on *comprend* une proposition ou un ensemble de propositions, ne devrait-on pas «automatiquement» reconnaître son contenu — donc aussi ses conséquences? Comment se fait-il que l'élaboration d'une géométrie demande du temps et de l'effort alors qu'elle est entièrement contenue dans les axiomes et définitions[16]?

On pourrait affirmer qu'il n'est jamais question de comprendre totalement une proposition, étant donné que cela impliquerait une connaissance de toutes ses conséquences et que celles-ci sont en nombre infini; c'est la position de Peirce, par

16 Cette question est à mettre en rapport avec le fait que la distinction traditionnelle entre inférences *médiates* et *immédiates* est difficile à établir.

exemple[17]. Mais tout l'intérêt de la question repose sur le fait qu'il est sûrement possible d'affirmer, à juste titre, que l'on *comprend* les postulats de Peano, par exemple, tout en étant obligé d'admettre que l'on n'a reconnu jusqu'à présent que quelques-unes de leurs conséquences (cf. Scarre 1984: 21). S'il y a quelque chose d'incongru dans la possibilité de comprendre une proposition tout en ignorant la plupart de ses conséquences, c'est sûrement parce que l'idée même de comprendre une proposition semble exclure toute obscurité résiduelle dans l'énoncé en question. Si vraiment nous comprenions une proposition, alors rien ne devrait nous échapper; nous aurions alors le sentiment que nous saisissons la proposition de fond en comble. Ce sentiment est-il une illusion?

Peirce n'hésite pas à l'affirmer[18]. Pour Boole, la connaissance des prémisses n'est que *potentiellement* la connaissance de

17 C.P. 4.480n: «[...] Comment se fait-il que la conclusion est applicable chaque fois que la prémisse l'est? Je suppose que l'on répondra que tout ce qu'elle signifie n'est qu'une partie de ce que signifie la prémisse. La «signification» d'une proposition est ce qu'elle est destinée à faire connaître. Mais lorsqu'un mathématicien pose telle prémisse de la théorie des nombres, on ne saura affirmer que par là il entend faire connaître toutes les propositions de la théorie, dont la grande majorité lui feront une grande surprise lorsqu'il en prendra connaissance [...].» («[...] How comes it that the conclusion is applicable whenever the premiss is applicable? I suppose the answer will be that its only meaning is a part of what the premiss means. The "meaning" of a proposition is what it is intended to convey. But when a mathematician lays down the premisses of the theory of numbers, it cannot be said that he then intends to convey all the propositions of that theory, of which the great majority will occasion him much surprise when he comes to learn them [...].»)

18 C.P. 1.232: «La meilleure traduction de *episteme* est 'compréhension'. Il s'agit de l'aptitude à définir une chose de telle manière que toutes ses propriétés seront des corollaires issus de la définition. [...] peut-être [...] que cela s'avérera toujours impossible comme il est certainement impossible de définir la notion de nombre de telle sorte que les théorèmes de Fermat et de Wilson soient de simples corollaires de la définition.» («The best translation of *episteme* is 'comprehension'. It is the ability to define a thing in such a manner that all its properties shall be corollaries from its definition. [...] it may [...] turn out that it forever remains impossible as it certainly is to define number in such a way that Fermat's and Wilson's theorems should be simple corollaries from the definition».)
Cf. également C.P. 4.53: «[...] La proposition affirmant que ce qui est *contenu implicitement* dans ce qui est pensé, est *pensé effectivement*, quoique plus ou moins inconsciemment, est déjà suffisamment absurde [...]. Si cela est vrai, alors personne ne peut déterminer par l'introspection la plus attentive ce qu'il pense. En effet, on ne maintiendra pas que la considération attentive des prémisses simples et peu nombreuses de la théorie des nombres — c'est-à-dire la simple contemplation de ces propositions si minutieuse qu'elle soit — permettrait à quelqu'un de découvrir la vérité des théorèmes de Fermat.» («[...] The proposition that that is *actually thought*, though somewhat unconsciously, which is *implicitly contained* in what is thought, is absurd enough [...]. If that be true, nobody can tell by the most attentive introspection, what he thinks. For it will not be maintained that by carefully considering the few and simple premises of the theory of numbers — by just contemplating these propositions ever so nicely — one could even discover the truth of Fermat's theorems.»)

toutes les conséquences que l'on peut en dériver (1847: 143). Haack, de son côté, insiste sur le fait que la compréhension peut très bien s'acquérir *progressivement* (1982: 227). Un raisonneur peut très bien comprendre une proposition suffisamment bien pour croire qu'elle est vraie, sans pour autant avoir la compréhension totale et absolue qui exigerait qu'il reconnaisse toutes les conséquences logiques sans exception.

Haack (1982) va encore plus loin, en affirmant que le problème des «conséquences cachées» n'en est pas un. Il ne s'agirait ni d'un problème, ni d'un paradoxe, ni d'une quelconque difficulté. Elle qualifie ce phénomène de simple «illusion» (1982: 226). Pour cet auteur, il n'y a aucune «tension» entre la validité et l'«informativité». Il est parfaitement possible que tel *argument* soit *valide* et que la *déduction*, par un raisonneur, de sa conclusion à partir des prémisses soit en même temps *informative*.

La distinction entre *implication* (ou *conséquence*) et *déduction* sous-tend les commentaires de Haack. On distingue en effet le simple fait qu'un ensemble de prémisses implique telle proposition comme conclusion, et la déduction que nous faisons pour *montrer*, étape par étape, que les prémisses impliquent bien cette proposition. L'aspect le plus important d'une déduction est épistémique. En effet, il ne suffit pas que la conclusion s'ensuive de son ensemble de prémisses; encore faut-il le *montrer*. A titre de comparaison, pour les élèves d'une classe de mathématiques, il ne suffit pas que le théorème à démontrer s'ensuive réellement des prémisses données; on les oblige à le *montrer*, ce qui exige souvent des efforts considérables.

Ces différents auteurs sont d'accord sur le fait que la métaphore de l'inclusion des conséquences dans un ensemble de prémisses ne doit pas être comprise trop littéralement. Si problème il y a, il semble lié à cette conception particulière de la validité. Dans quel sens dit-on donc qu'un ensemble de prémisses «contient» ses conséquences? Une chose semble claire: c'est que l'inclusion au sens logique n'est pas vraiment analogue à l'inclusion au sens physique. Selon Scarre, un ensemble de prémisses ne contient pas ses conséquences comme une boîte contient des allumettes[19]:

> Il est parfaitement vrai que je peux connaître l'extérieur [...] d'une boîte tout en ignorant son contenu. Mais raisonner déductivement n'est guère comme [...] ouvrir une boîte pour regarder dedans. D'une part, [...] une boîte ne contient pas un nombre infini d'objets, mais pour chaque proposition il existe une infinité de conséquences. D'autre part, même dans le cas où nous n'avons déduit que peu de conséquences — voire aucune — d'un ensemble de prémisses, il arrive souvent que nous puissions raisonnablement estimer que nous *comprenons* ces prémisses. Dans ce cas, la situation ne semble pas analogue à celle qui consiste à se mettre devant une boîte *non ouverte* [...]. (Elle ressemble plutôt à celle qui consiste à ouvrir la boîte sans pour autant en apercevoir le contenu. (Scarre 1984: 21-22).

Mill, quant à lui, utilise une autre métaphore d'inclusion qui permet de tenir compte de la découverte progressive de conséquences. Selon cet auteur (1828: 33), pas plus que le propriétaire d'un terrain qui recouvre un gisement non découvert n'en détient le minerai, on ne «possède» aucune connaissance des conséquences d'un ensemble de prémisses donné jusqu'au moment où l'on commence à les déduire. Inférer déductivement, c'est miner des vérités contenues dans ce que nous connaissons déjà — des vérités qui peuvent rester cachées très longtemps et exiger des efforts considérables afin de les découvrir.

Il n'en reste pas moins que ce n'est pas *parce que* les déductions sont difficiles à construire que les conséquences sont dites «cachées», même si cette difficulté peut expliquer pourquoi les conséquences peuvent *rester* «cachées». Mais expliquer l'existence de conséquences «cachées» par la difficulté de construire les enchaînements d'arguments qui les révèlent reviendrait à expliquer la présence du minerai dans une mine par la difficulté de construire la mine (cf. Scarre 1984: 24).

Selon un postulat fondamental qui semble généralement admis, la logique se doit d'énoncer explicitement dans le langage tout ce qui est contenu implicitement dans la pensée. A ce titre,

19 Cf. Frege (1884: § 88), selon lequel les conséquences sont contenues dans les prémisses «comme une plante l'est dans la graine, non pas comme une poutre l'est dans la maison».

le problème des «conséquences cachées» représente une formulation spécifique de l'une des missions générales confiées à la logique. Il évoque en microcosme l'une des motivations principales de toute logique, en tout cas de toute logique moderne. Depuis Frege, en effet, on cherche à «*écrire* des concepts» et à utiliser des procédures dont le premier objectif est de fournir le critère le plus sûr de la validité d'un enchaînement d'arguments et notamment d'indiquer toute proposition qui y restait implicite et inaperçue (cf. Frege 1879: x).

7. La logique «va de soi»

Une vieille tradition distingue deux sortes de connaissances, logiques et non logiques. La forme — logique — du raisonnement permet de mettre en évidence différentes conséquences; elle se distingue de la matière — non logique — que l'on introduit, elle, dans les prémisses. Selon un point de vue fréquemment répandu, les erreurs concernent exclusivement la «matière» non logique des prémisses. Pour les auteurs de la *Logique* de Port-Royal, par exemple, «La plupart des erreurs des hommes [...] viennent [davantage du fait] qu'ils raisonnent sur de faux principes, que [du fait] qu'ils [raisonneraient] mal» (1662: 177; cf. 21). Pour Boole (1847: 59), «[...] une chose est d'arriver à des prémisses correctes, mais c'en est une autre de déduire des conclusions logiques; les affaires de la vie dépendent bien davantage de la première activité que de la seconde»[20]. Selon ce point de vue donc, chaque discipline présente ses propres difficultés qui peuvent provoquer des erreurs, mais la *logique*, quant à elle, eh bien, la *logique* «va de soi»[21]. Je dois cette formulation à Church, qui rapporte que «[...] la position implicite des mathématiciens [de la période antérieure à 1925] était que les théorèmes 'mathématiques' ont besoin de

20 «It is an important observation, which has more than once been made, that it is one thing to arrive at correct premises, and another thing to deduce logical conclusions, and that the business of life depends more upon the former than upon the latter.»

21 Cf. Haack (1976: 112): «On suppose souvent [...] que la *déduction* n'a pas besoin de justification, ou bien que l'on pourrait rapidement en fournir une.» («It is often taken for granted [...] that *deduction* either does not need, or can readily be provided with, justification.»)

preuves, mais que la logique va de soi» (cité par Corcoran 1973: 25)[22]. Ce point de vue, on le voit bien, s'oppose clairement à celui selon lequel la déduction conduit parfois à des surprises. Selon ce point de vue, si surprise il y a, elle n'est pas due à la logique. La logique «va de soi»[23].

Une autre manière d'insister sur la même idée consiste à ne prendre en considération que les procédés «mécaniques» qui, eux, sont considérés comme sûrs, au sens de ne jamais conduire à des surprises (à de mauvaises surprises notamment). Le raisonnement est dit «mécanique» lorsqu'il se déroule sans recours à l'intuition ni à la créativité; l'emploi d'une méthode mécanique permet pour ainsi dire de «donner congé» à l'imagination du raisonneur.

Selon une autre métaphore, le raisonnement mécanique est «aveugle», et cela dans deux sens différents. Premièrement, il fonctionne sans aucune intervention de la part du raisonneur, qui suit «aveuglement», ou comme une machine, des directives rigides. Leibniz compare le raisonnement «aveugle» en ce sens aux parapets placés des deux côtés d'un pont qui empêchent le raisonneur de s'écarter des indications prescrites (cf. Spruit & Tamburrini 1991: 7). Ainsi, on crée des conditions dans lesquelles, sans que le raisonneur ait besoin en quelque sorte de «voir», il est certain d'arriver au «bon endroit». On peut oser l'expression, la logique «va de soi». Deuxièmement, le raisonnement peut être «aveugle» au sens de ne tenir aucun compte d'un contenu sémantique; seules les propriétés physiques de symboles (leur forme et disposition) jouent un rôle. Ce deuxième sens est illustré par la métaphore de la «boîte noire». Entre les prémisses que l'on «introduit dans la boîte» et le résul-

22 «[...] the implicit position of mathematicians of the day [prior to 1925] was that 'mathematical' theorems require proof, but logic is to be taken for granted».

23 Selon un point de vue largement répandu, les axiomes propres à une théorie mathématique sont «payés par l'intuition (ou par postulation) tandis que les conséquences sont obtenues gratuitement» (Corcoran 1973: 26-27). C'est sans doute la raison pour laquelle les axiomatisations de théories mathématiques (par exemple celles que nous devons à des auteurs comme Euclide, Hilbert, Peano et Zermelo) n'ont, jusqu'à une époque récente, jamais explicité de *logique sous-jacente*: la logique était sensée «aller de soi» (cf. Corcoran 1974: 89-90). Selon Blanché (1973, 159), «si [de telles axiomatisations] se faisaient un devoir d'expliciter toutes les notions et toutes les propositions dont elles feraient usage, elles s'en étaient tenues pour cela aux notions et aux propositions propres à la théorie qu'elles axiomatisaient, en laissant implicites, *comme choses allant de soi*, les règles de logique qui commandaient leurs raisonnements» (c'est moi qui souligne).

tat qui en «sort» comme conclusion, on n'y «voit» rien. Bien que les manipulations qui ont lieu dans la «boîte» soient contrôlables, les expressions elles-mêmes n'en restent pas moins ininterprétables.

8. Deux orientations

Si les «conséquences cachées» — celles qu'on ne «voit» pas — et le raisonnement «aveugle» — celui du raisonneur qui n'a pas besoin de «voir» — ont quelques métaphores en commun, cela n'empêche pas que la différence d'orientation soit profonde. La reconnaissance de «conséquences cachées», comme celle de surprises, oblige la logique à se pencher sur elle-même et à s'interroger sur les origines de ces phénomènes. La logique devient alors principalement un outil pour évaluer des *moyens* de raisonnement. Ainsi, la priorité est donnée à l'étude de la *validité*. Cette orientation est dite *interne*.

En revanche, l'emploi de raisonnements «aveugles» — de «boîtes noires», de procédures algorithmiques, de calculs — indique une ouverture à d'autres connaissances. Partant de l'idée que les surprises proviennent toujours d'une matière non logique, donc que la logique elle-même «va de soi», on donne la priorité à l'acquisition d'*informations* et la logique devient principalement un outil pour générer des *résultats*. Cette orientation est dite *externe*.

Ces deux tendances sont bien connues. Kleene (1967: 78-79), par exemple, attribue deux «rôles» à la logique. Elle doit, d'une part, «*s'assurer* de la validité d'arguments déjà construits» et d'autre part, «découvrir des résultats démontrables et leurs démonstrations». Pour les médiévaux, la distinction était celle d'un *ars judicandi* et d'un *ars inveniendi* (cf. Spruit & Tamburrini 1991: 3). On oppose jugement et découverte, évaluation de moyens et génération de résultats, *comme on oppose validité et «informativité»*. (Ou encore, pour parler comme il se doit en cette fin du vingtième siècle, c'est-à-dire en termes du «marché» du savoir, on oppose «contrôle de qualité» et «mécanismes de production».)

Lorsqu'on cherche à déterminer si un argument est valide ou non, le champ d'analyse est clairement délimité. Il s'agit d'examiner des arguments *donnés* — des «arguments déjà construits», pour reprendre la formule de Kleene. On part donc de la donnée non seulement d'un ensemble de prémisses, mais aussi d'une conclusion. La question de validité est interne; elle est limitée au groupe clos composé des prémisses et de la conclusion, à l'exclusion de tout élément extérieur. (En «Eurojargon», on dirait qu'il est permis à cette orientation d'approfondir, mais non d'élargir.)

La mise en évidence de conséquences à partir d'un ensemble de prémisses donné, en revanche, est orientée vers l'extérieur. Seule la base, sous forme de prémisses, est donnée. A part cela, le champ est ouvert. Il n'y a ni frontière, ni borne, ni limite quelconque aux conséquences qu'il est en principe possible de découvrir à partir des prémisses données.

De nos jours, l'orientation interne a presque disparu de la recherche logique (à moins de considérer l'intérêt pour les procédures de décision comme un vestige de cette tendance). En revanche, l'orientation externe, elle, est plus vivante que jamais et domine la logique aujourd'hui — à tel point que l'on considère parfois des *axiomes* logiques (mais non les axiomes propres d'une science) comme des *règles* d'inférence zéro-aires (cf. Corcoran 1986: 67).

L'orientation interne de la logique provient de la reconnaissance de phénomènes comme celui des «conséquences cachées». Mais lorsque la logique devient un outil pour évaluer des moyens de raisonnement, elle le devient aussi pour le raisonnement «aveugle», instrument de l'orientation externe. Le raisonnement «aveugle» est utilisé pour générer des conséquences, donc aussi et surtout des conséquences qui étaient «cachées», phénomène à l'origine de l'orientation interne. Ainsi, une complémentarité existe entre ces deux orientations; on pourrait même affirmer que chacune est indispensable à l'autre. Même si l'orientation interne est mal représentée aujourd'hui, elle reste nécessaire pour légitimer les résultats de l'orientation externe. Un résultat n'est jamais utile s'il n'est pas fiable. Un argument n'est jamais informatif s'il n'est pas valide.

Reprenons maintenant, pour terminer, le problème des «conséquences cachées». Comprendre un ensemble de prémisses sans savoir que telle proposition en est une conséquence, c'est comme comprendre une colonne de chiffres sans savoir que tel nombre en est la somme (cf. Scarre 1984: 22n). On peut trouver la conséquence, respectivement la somme. Mais la question est de savoir pourquoi il est nécessaire de la chercher, que ce soit au moyen d'un raisonnement ou d'un calcul. Personne, jusqu'à présent, n'a pu expliquer le fait qu'une déduction peut conduire un raisonneur à de nouvelles connaissances même si celles-ci étaient «déjà contenues» dans les prémisses de la déduction, prémisses que le raisonneur en question comprend par ailleurs. A l'heure actuelle, nous avons encore besoin de mieux saisir la nature de la compréhension afin de caractériser le fonctionnement épistémique d'une déduction.

> [...] je sais combien il y a de différence entre écrire un mot à l'aventure, sans y faire une réflexion plus longue et plus étendue, et apercevoir dans ce mot une suite admirable de conséquences [...]
> Blaise PASCAL, *De l'art de persuader*

Remerciements

Ce texte a été présenté sous une forme légèrement différente le 25 juin 1994 au colloque international sur «Raisonnement et calcul» organisé à l'Université de Neuchâtel. Étant donné qu'il ne constitue qu'un travail d'exploration, j'ai pris le risque lors de cette rencontre de m'*exposer* (ce qu'il ne faut en principe jamais faire dans un exposé public!), en faisant part, notamment, de ma perplexité face au phénomène des «conséquences cachées». Le risque était raisonnable — pour ne pas dire bien calculé — dans la mesure où la convivialité proverbiale des colloques de Neuchâtel s'est vue, une fois de plus, confirmée. Que tous les participants soient remerciés de leur courtoisie et de leur bonne volonté. Quant à ma perplexité, je n'en fais pas d'excuses; j'espère avoir montré qu'elle est parfaitement justifiée.

Je tiens tout particulièrement à remercier ma collègue Mme Muriel Gilbert de ses critiques fines et constructives à la relecture du manuscrit. Toute ma gratitude va également à M. Denis Miéville qui était responsable de l'organisation du colloque et qui a bien voulu m'inviter à y participer. Enfin, je dédie ce texte à mes étudiants de la Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation à Genève; leur enthousiasme pour les thèmes abordés ici m'aura motivé à entreprendre cette étude.

Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation
Université de Genève
et
Centre de Recherches Sémiologiques
Université de Neuchâtel
Espace Louis-Agassiz 1, CH-2000 Neuchâtel

Bibliographie des ouvrages cités

ARNAULD A. & NICOLE P. (1662). *La logique ou l'art de penser*. Édition critique par P. Clair et F. Girbal. Seconde édition revue (Paris: Vrin 1981).

BARWISE J. & ETCHEMENDY J. (1992). *The Language of First-order Logic*. Third edition, revised and expanded (Center for the Study of Language and Information, Stanford).

BLANCHÉ R. (1973). *Le raisonnement*. Paris: P.U.F.

BOOLE G. (1847). The mathematical analysis of logic. In: R. Rhees (ed.), *Studies in Logic and Probability*. La Salle: Open Court, 1952, Vol. I, 49-124 .

CORCORAN J. (1973). Gaps between logical theory and mathematical practice. In: M. Bunge (ed.), *The Methodological Unity of Science*. Dordrecht: Reidel, 23-50.

CORCORAN J. (1974). Aristotle's natural deduction system. In: J. Corcoran (ed.), *Ancient Logic and Its Modern Interpretations*. Dordrecht: Reidel, 85-131.

CORCORAN J. (1986). Correspondence without communication. Essay review of *The Boole-De Morgan Correspondence 1842-1864. History and Philosophy of Logic, vol. 7*, 65-75.

DESCARTES R. (1628). *Regulae ad directionem ingenii.* Texte revu et traduit par G. Le Roy (Paris: Boivin 1933).

DUMMETT M. (1973). The justification of deduction. *Proceedings of the British Academy, vol. 59*, 201-232; réimprimé in Dummett, *Truth and Other Enigmas* (Duckworth, London 1978).

FREGE G. (1879). *Begriffsschrift.* In: I. Angelelli (éd.) *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, Zweite Auflage. Hildesheim: Olms 1964.

FREGE G. (1884). *Les fondements de l'arithmétique. Recherche logico-mathématique sur le concept de nombre.* Traduction et introduction de Cl. Imbert. Paris: Seuil 1969.

FREGE G. (1906). Über Schoenflies: Die logischen Paradoxien der Mengenlehre. In: H. Hermes, F. Kambartel, F. Kaulbach (éds) *G. Frege: Nachgelassene Schriften.* Zweite, erweiterte Auflage. Hamburg: Meiner 1983.

HAACK S. (1976). The justification of deduction. *Mind, vol. 85*, 112-119.

HAACK S. (1982). Dummett's justification of deduction. *Mind, vol. 91*, 216-239.

HAHN H. (1935). *Logique, mathématiques et connaissance de la réalité.* Trad. du Gén. E. Vouillemin. Paris: Hermann.

HARTSHORNE C. & WEISS P. (eds) (1931). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, second printing. Cambridge Mass.: Belknap Press 1960.

KLEENE S.C. (1967). *Logique mathématique.* Traduction de J. Largeault. Paris: Gabay 1987.

MILL J.S. (1828). Whately's elements of logic. Réimprimé in: J.M. Robson (ed.), *J.S. Mill Collected Works,* vol. 11: *Essays on Philosophy and the Classics.* Toronto: University of Toronto Press 1978, 3-35.

MILL J.S. (1843). *A System of Logic Ratiocinative and Inductive. Being a Connected View of the Principles of Evidence and the Methods of Scientific Investigation* (London: Longmans 1970).

MILL J.S. (1866). *Système de logique déductive et inductive exposé des principes de la preuve et des méthodes de recherche scientifique*. Traduit sur la sixième édition anglaise par L. Peisse (Bruxelles: Mardaga 1988). (Trad. française de Mill 1843).

MILL J.S. (1873). *Autobiography*. Third edition (London: Longmans, Green, Reader and Dyer 1874).

PASCAL B. (1728) (posthume). *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*, in *Oeuvres complètes* (Bibliothèque de la Pléiade). Texte établi et annoté par J. Chevalier (Paris: Gallimard 1954).

PEIRCE C.S.: cité selon le volume et paragraphe des *Collected Papers* («C.P.») édités par C. Hartshorne & P. Weiss (*q.v.*).

POINCARÉ H. (1894). Sur la nature du raisonnement mathématique. *Revue de métaphysique et de morale*, *vol. 2*, 371-384.

SCARRE G. (1984). Proof and implication in Mill's philosophy of logic. *History and Philosophy of Logic*, *vol. 5*, 19-37.

SPRUIT L. & TAMBURRINI G. (1991). Reasoning and computation in Leibniz. *History and Philosophy of Logic*, *vol. 12*, 1-14.

WITTGENSTEIN L. (1921). *Tractatus logico-philosophicus*. Trad. de l'allemand par P. Klossowski (Paris: Gallimard 1961).