Centre de Recherches Sémiologiques
Travaux de logique
N° 16 – janvier 2005

LE LOGICISME CATÉGORIEL

Nadine Gessler
Pierre Joray
Cédric Degrange

CdRS

α η δ τ

Université de Neuchâtel

Cette publication est issue d'une recherche financée par le Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique (subside n° 101411-100748/1)

Partie *LaTeX* composée par C. Degrange

Centre de Recherches Sémiologiques
Université de Neuchâtel
Espace Louis-Agassiz 1
CH-2000 Neuchâtel (Switzerland)

Sommaire

Avant-propos

L'aventure d'une idée se transforme trop souvent en une sculpture abstraite posée sur le socle de l'immuable. Niant ainsi la force créative et critique de la pensée vivante, elle suspend le temps d'un temps l'éclosion de nouvelles curiosités.

Delvin Melhburn

Il y a plusieurs manières de concevoir, de faire usage et de développer la logique. Ainsi, certaines logiques ont un tribut à payer aux acteurs de leur genèse qui les ont portées sur les fonts baptismaux. D'autres sont habitées d'une forme et d'un style en fonction du ou des rôles qui leur ont été assignés et des complicités nécessaires qui leur ont permis de contribuer à réaliser la finalité de leur mise en œuvre. Ainsi, la logique formelle classique du premier ordre est ce qu'elle est pour au moins trois bonnes raisons: – Il y a la féroce volonté de fonder un critère d'engagement ontologique qui a conduit à édifier des systèmes dans lesquels la quantification et la notion d'existence sont indissociablement intriquées. – Il y a d'autre part la conquête de méta-propriétés de l'ordre de la complétude et de la décidabilité qui l'inscrit dans un équilibre parfois discutable entre l'aspect syntaxique et l'aspect sémantique. – Il y a enfin l'héritage whitheadorussellien qui la revêt des atours et des ambiguïtés (en partie voulues) propres à la théorie classique des ensembles.

Nul ne sera surpris par ces propos, bien entendu! Mais il n'en reste pas moins que l'on incruste parfois les conclusions de grandes histoires épistémologiques dans le carcan des formes symboliques et des théories structurelles dans lesquelles elles ont été révélées.

Au-delà des dogmes et des écoles, une attitude constructive et édificatrice d'interrogations et de pensées nouvelles consiste à se saisir d'une théorie logique qui a été développée non pas en fonction d'un objectif particulier, mais qui a été pensée avant toute chose pour être à même de parler de mondes possibles. Cela n'est pas nouveau, certes! Ce qui l'est, c'est la volonté de disposer d'un tel langage en privilégiant sa capacité à parler de mondes et de leurs organisations sans lui associer les difficultés propres à des théories étrangères à son propos, ni en le forgeant en fonction d'un objectif scientifique particulier. Un tel langage se doit notamment, d'être ontologiquement neutre, d'être à même de formuler un traitement extensionnel sans l'invention ni l'intervention de concepts abstraits tels ces commodités linguistiques que sont les classes à la Russell; il se doit de bannir toutes les ambiguïtés catégorielles, conceptuelles et prédicatives. Par rapport à une telle entreprise, il est donc aussi indispensable d'aborder de front le problème de l'enrichissement logiquement opératoire et descriptif qu'un tel langage doit impérativement porter et supporter.

L'Institut de logique de la Faculté des lettres et sciences humaines de l'Université de Neuchâtel s'est préoccupé depuis fort longtemps de disposer d'une telle logique pour développer, dans le cadre de ses recherches où les perspectives extensionnelle et bivalente prévalent, les réponses à ses interrogations. Sa quête a été comblée par les travaux de S. Leśniewski, et notamment sa protothétique et son ontologie. En effet, la protothétique – une logique des propositions quantifiée – et l'ontologie – un calcul des noms d'ordre supérieur – constituent des logiques extraordinaires. Elles sont ontologiquement neutres, universelles, libres et d'ordre supérieur. Elles contiennent notamment une règle d'inférence définitoire autorisant des définitions effectivement créatives. Elles sont donc développementales au sens de pouvoir ciseler progressivement les outils conceptuels nécessaires aux questionnements conduits. Conçus explicitement pour être un langage vivant au service d'une analyse, ces systèmes permettent de forger le mécanisme opératoire de tout mouvement déductif associé à quelque foncteur logique que ce soit associé à une quelconque catégorie issue des deux catégories primitives des noms et des propositions.

C'est avec cet outil zététique, interrogatif et prospectif que Mme N. Gessler et MM. P. Joray et C. Degrange ont revisité la construction logiciste, jouant avec beaucoup de subtilité avec les concepts fondateurs et fédérateurs que sont l'acte définitoire, les catégories et la prédicativité. Leur démonstration est convaincante et mérite qu'on s'y intéresse tant elle renouvelle cette perspective.

Denis Miéville

Directeur de l'Institut de logique
de l'Université de Neuchâtel

Introduction

Penser ensemble la logique et les mathématiques pour en montrer l'identité essentielle, telle est la thèse que l'histoire a rangée sous le terme de *logicisme.* Cette thèse fut celle de Frege et de Russell, ses représentants typiques. Elle fut systématisée dans les *Principia Mathematica* de Whitehead et Russell, synthèse culminante du mouvement logiciste qui allait orienter pour de nombreuses décennies la méthode et l'esprit des techniques de recherche sur la question des fondements des mathématiques. Résumant la philosophie logiciste dans deux propositions solidaires, Russell écrit:

> [...] all pure mathematics deals exclusively with concepts definable in terms of a very small number of fundamental logical concepts, and [...] all its propositions are deducible from a very small number of fundamental logical principles. (1903: xv).

C'est là une conviction philosophique fondamentale que Russell ne remettra jamais en question, en dépit des difficultés considérables que rencontra l'entreprise logiciste. Concernant la dimension conceptuelle de la première proposition, nombreuses de ces difficultés tournèrent autour de l'antinomie dite de Russell et – pour dire les choses rapidement – la présence obscure d'une logique d'ordre supérieur, troublée par les enjeux ontologiques de la quantification. Quant à la seconde affirmation, postulant la logicité pure des principes fondamentaux, elle se heurta à la nécessité de recourir, dans les *Principia Mathematica*, aux axiomes non logiques que sont les axiomes de l'infini, de réductibilité et multiplicatif.

La définition logiciste du nombre cardinal – défini comme une classe de classes équinumériques –, fit l'objet de nombreuses objections, en grande partie liées à deux difficultés majeures qu'il lui fallut surmonter. La première est celle portée par le concept paradoxal de «classe de toutes les classes», nécessitant, pour préserver la construction logiciste, de procéder à une répartition des classes en types. La seconde concerne le problème posé par le recours à la définition par abstraction, rouage de la réduction de l'arithmétique à la logique, mais soumise à une objection de créativité. Ces critiques, trouvant leurs propres arguments dans la possibilité de parvenir à une définition du nombre cardinal par d'autres voies et moyens, furent assorties d'une relativisation de la conception logiciste. Et, de manière générale, les développements ultérieurs de la logique et des mathématiques, marqués par diverses doctrines fondationnelles et un pluralisme logique, détournèrent l'intérêt de la communauté scientifique du projet logiciste.

Cependant ce constat ne ruine pas pour autant la conception logiciste ni ne la réduit au silence, comme un fait d'histoire! Au contraire, par-delà les limites internes au logicisme des *Principia Mathematica*, la philosophie russellienne continue encore et toujours à alimenter de nombreux débats. Quant au logicisme de Frege, il connaît un renouveau contemporain, avec les travaux de l'école néo-frégéenne dont G. Boolos, C. Wright et B. Hale sont les représentants les plus éminents. Mais ce n'est pas tout! Le logicisme ne se réduit pas seulement à ces deux héritages. On peut en effet répondre à la question d'une définition logique des nombres, ouverte avec Frege, dans le cadre d'un paradigme logique autre que celui de la tradition frégéo-russellienne.

Le paradigme adopté ici est celui de l'Ontologie, théorie logique développée au début du XXème siècle par le logicien polonais Stanisław Leśniewski. L'Ontologie, qui est un calcul des noms d'ordre supérieur, fut conçue dans le but de résoudre *strictu sensu* l'antinomie de Russell et de venir suppléer à la peu naturelle et peu élégante théorie des types des *Principia Mathematica*. L'Ontologie n'appartient pas au réseau marqué par la conception de la logique et de l'analyse des mathématiques frégéo-russellienne. Elle s'en distingue profondément, tant par ses conceptions logiques sous-jacentes que par les modes formels qui la gouvernent.

Nous montrons que l'Ontologie permet de construire l'arithmétique de Peano, en faisant appel à un axiome de l'infini comme seul axiome propre, et sans que cette construction soit entâchée des difficultés immanentes aux démarches logicistes ouvertes par Frege et Russell, ces difficultés s'y trouvant pleinement résolues. Nous nous attacherons à expliciter certains des éléments moteurs et à en élucider le rôle dans la réalisation d'un tel projet.

Sans doute convient-il de dire quelques mots de l'Ontologie. Logique universelle, libre et d'ordre supérieur, l'Ontologie est libérée du souci de l'imprédicativité. Elle intègre une théorie des catégories sémantiques à travers laquelle l'antinomie de Russell est écartée, sans amendement des principes logiques tirés de l'analyse du principe du cercle vicieux. C'est une logique purement extensionnelle, non chargée de toutes les difficultés rencontrées par les logicistes classiques pour assurer l'extensionnalité de la logique. Expression formelle de la position nominaliste première de son auteur – celle du rejet des entités abstraites –, l'Ontologie est une théorie logique libre de tout engagement ou implication ontologique. Là où il est question de catégories sémantiques, il n'est nullement question de catégories ontologiques. Dans ces conditions, l'Ontologie n'endosse pas les problèmes portés par la théorie des types, ou son parallèle frégéen de la distinction entre objets et fonctions de différents niveaux. En particulier, le projet logiciste échappe au poids du réalisme dogmatique de Frege et des difficultés du nominalisme instrumental des *Principia Mathematica* – où, pour sauver le programme universaliste, les classes et fonctions sont tournées en fictions logiques.

A la base de cette réussite, trois points essentiels configurant ce paradigme logique sont à relever. Tout d'abord, la quantification est ontologiquement neutre. Ensuite, l'interprétation de la structure de la proposition n'est pas corrélative du modèle mathématique et de la distinction entre fonction et argument. Aucune dichotomie radicale n'est instaurée entre sujet et prédicat. La proposition élémentaire de l'Ontologie, qui est de la forme «a est b», est composée de deux noms, reliés par la copule, celle-ci ayant statut de foncteur primitif. Dans ce cadre d'analyse, il n'est alors nullement question de classe – ou d'ensemble –, mais simplement d'extension attachée à un nom, celle-ci pouvant être vide, singulière ou plurielle. Enfin, le troisième point, trait saillant de l'Ontologie, est sa générativité, ou constructivité. Celle-ci est portée par une procédure inférentielle définitoire par laquelle les définitions sont insérées comme thèses dans le langage lui-même, et non pas traitées comme des conventions linguistiques. Partant des seuls foncteurs et catégories sémantiques primitives inscrites par les axiomes, cette procédure assure au langage une constructivité catégorielle potentiellement infinie, en contrôlant pas à pas la construction, et permettant de déployer la base axiomatique en diverses Ontologies. Notre construction de l'arithmétique est l'une de ces Ontologies possibles.

C'est dans ce cadre logique que nous avons donc remis en chantier le programme logiciste. Il convient de préciser que notre démarche n'est pas sans précédent. Leśniewski, le premier, s'était engagé dans le projet fondationnel de l'arithmétique sur la base de l'Ontologie. Sa démarche est réputée avoir été menée à bien, mais il est difficile aujourd'hui d'en mesurer la pertinence, ses recherches dans ce domaine ayant en effet pour la plupart disparues en 1944, dans l'incendie de Varsovie. Par la suite, d'autres travaux furent engagés dans cette même direction. Les résultats les plus remarquables sont dus à Canty et sont énoncés dans sa thèse de doctorat de 1967. Cependant, ces résultats souffrent d'un défaut qui les rend en partie inaptes à étayer pleinement la force et la pertinence du paradigme leśniewskien. S'ils attestent la possibilité d'une construction de l'arithmétique prenant appui sur l'axiomatique de l'Ontologie, en revanche leur construction s'élabore et se déroule en plagiant la démarche logiciste et le développement propre aux *Principia Mathematica*. C'est la raison pour laquelle ils manquent à cerner et à surprendre ce qu'il y a d'original et de significatif dans l'esprit méthodique et la «machine» à définir propre à la théorie des catégories sémantiques de l'Ontologie.

Aussi nos recherches ont-elles été commandées par l'objectif d'une construction effective de l'arithmétique, qui soit fidèle au cadre formel et à l'esprit catégoriel et constructif de la théorie leśniewskienne.

La construction effective de l'édifice arithmétique à laquelle nous sommes parvenus est présentée en fin d'ouvrage, accompagnée d'un court commentaire introductif visant à en faciliter la lecture et la consultation. Parmi les aspects originaux de cette construction, on retiendra les suivants. Les termes primitifs de Peano – zéro, nombre naturel, succcesseur – sont définis sans s'appuyer sur la notion de classe – ou d'ensemble –, même à titre de commodité linguistique. Les preuves des cinq propositions de Peano sont simplifiées et font intervenir un axiome de l'infini comme seul axiome propre, ce qui permet de clarifier la dépendance des propositions de Peano vis à vis de cet axiome. Quant à la version proposée de l'axiome de l'infini, elle présente l'avantage de ne contenir comme seules constantes logiques que les termes primitifs de l'Ontologie. Cela constitue, à notre connaissance, le seul exemple d'un tel axiome dépourvu de constante définie. L'importance de cette caractéristique est cruciale, dans la mesure où énoncer des axiomes à l'aide de termes définis peut conduire à une créativité cachée et illicite des définitions concernées.

Quant à la mise en perspective de ces résultats, elle s'est concentrée, ici, sur trois points centraux, à même d'éclairer les difficultés rencontrées dans le paradigme logiciste classique. Le premier est abordé par N. Gessler et a partie liée avec le problème de la production d'arithmétiques stratifiées, inhérent à la position logiciste classique. C'est à ce sujet que les *Principia Mathematica* recourent à la notion contreversée d'ambiguïté systématique, sur laquelle repose la théorie des types. C'est en effet l'ambiguïté typique de la théorie des types qui exige de distinguer entre termes, classes, classes de classes, etc. Ce faisant, on évite le paradoxe en respectant le principe du cercle vicieux. Dans l'Ontologie, ce problème de stratification est entièrement réglé par les modes formels du langage. Ceux-ci permettent en effet de reproduire l'Ontologie primitive, du premier niveau linguistique, aux niveaux supérieurs – ceci par la définition de copules d'ordre supérieur. Quant à l'analogie formelle de ces strates, elle est formellement contrôlée par les principes de formalisation attachés à la dimension développementale de l'Ontologie. Une conséquence majeure du principe de stratification est que les entités supérieures peuvent être traitées comme des noms, sans aucune réification. Sans doute n'est ce pas la moindre des réussites que de se libérer ainsi des conséquences fâcheuses de la doctrine frégéenne de la non saturation des fonctions, et qui prirent dans les *Principia Mathematica* la forme d'une réduction des fonctions à des fictions.

Le deuxième point, traité par P. Joray, est lié à la définition, force motrice de notre construction logiciste, et tombant sous une règle d'inférence permettant l'inscription de définitions explicites à titre de thèses. L'aspect discuté est celui de la créativité de certaines définitions, c'est-à-dire le fait que des définitions puissent s'avérer nécessaires à l'établissement de résultats exprimables, mais non prouvables sans ces définitions. Une réflexion montre que si les définitions abréviatives des *Principia Mathematica* sont effectivement et théoriquement éliminables et non créatives parce que officiellement externes au système, leur usage pratique, même à des niveaux élémentaires, est susceptible de receler une créativité non déclarée. Se tourner, comme nous le faisons vers des définitions réglées à l'interne du système, en leur donnant une position théorique forte, c'est faire le choix d'officialiser, de clarifier et surtout de régler formellement la créativité des définitions. Cette option a généralement été rejetée dans la communauté logicienne suite à la découverte par Łukasiewicz d'un exemple de créativité aux conséquences excessives. Nous montrons alors que cet exemple n'a aucune incidence sur les définitions leśniewskiennes dans la mesure où il constitue de manière voilée une définition non pas explicite, comme le sont les nôtres, mais une définition implicite.

Quant au dernier axe de réflexion, développé par C. Degrange, il se déploie autour de la notion d'imprédicativité, qui donna lieu au principe du cercle vicieux et fut à l'origine de l'éviction, dans les *Principia Mathematica*, de tout énoncé à caractère imprédicatif. Au contraire, l'analyse faite ici consiste à démontrer le caractère innoffensif de certains de ces énoncés imprédicatifs de manière à pouvoir admettre ceux-ci au sein du langage, malgré leur circularité. Cette analyse s'appuie sur le principe d'extensionnalité et débouche sur l'adoption d'une interprétation catégorielle des quantificateurs, ainsi que d'une sémantique dite combinatoire. Les théories extensionnelles leśniewskiennes permettent l'expression des conditions d'une telle solution et, à terme, d'en exhiber les enjeux.

Pour conclure, et retournant à la thèse logiciste rapportée dans les premières lignes, le logicisme que nous défendons ici connaît une forme modérée. La présence d'un axiome de l'infini s'avère incontournable, mais cette «concession» à la logicité pure, telle que l'avait rêvée Russell, ne saurait entamer la fécondité du paradigme catégoriel et développemental de l'Ontologie dans la perspective qui est la nôtre. Trait essentiel de ce logicisme catégoriel, l'arithmétique n'y est pas conçue comme littéralement *réductible* à la logique adoptée. Elle y est en revanche conçue – et c'est en cela que notre logicisme est modéré – comme une construction dont l'assise est logique et dont le développement est entièrement réglé par une logique qui en assure du coup la solidité structurelle et épistémique.

Nadine Gessler

La stratification catégorielle dans l'Ontologie

Nadine Gessler

Préambule

Les difficultés immanentes à la démarche logiciste classique sont-elles passibles d'une élucidation pleinement effective dans le cadre catégoriel et développemental de l'Ontologie? C'est la réponse à cette question – positive – que nous voulons instruire avec le présent article. Les difficultés dont nous traiterons ici prennent place parmi la problématique centrale que représente, pour le logicisme, l'élaboration d'une théorie générale des fonctions hiérarchisées en niveaux, au sein de laquelle la quantification trouve place, et contrainte dans ses déterminations par l'antinomie de Russell. Dans la perspective de cet article, notre effort a porté principalement sur la question des principes de stratification du langage logique et la portée des constructions réalisées, à la lumière d'un certain nombre de difficultés qui ont animé les théories logicistes inscrites avec les travaux de Frege, Whitehead et Russell.

Nous avons choisi d'ancrer notre réflexion dans la question de l'ambiguïté systématique ou typique qui habite le langage de la théorie des types des *Principia Mathematica*. De par les problèmes qu'elle recèle, cette question a en effet le mérite d'attirer l'attention de façon marquante sur la maîtrise formelle de l'Ontologie à rendre compte, dans l'unité d'un même symbolisme, des contenus et de leurs «ciments» logiques, à n'importe quel niveau hiérarchique du langage.

Deux difficultés liées à l'usage qui est fait de l'idée d'ambiguïté systématique dans les *Principia Mathematica* seront abordées et effectivement résolues: d'une part, celle portée par la transparence analogique à laquelle se trouve contraint le langage essentiellement ambigu de la théorie des types et, d'autre part, celle liée à la prolifération possible d'une hiérarchie infinie d'arithmétiques, une relative à chaque type. Nous montrerons alors que les principes de formalisation de l'Ontologie régulent la construction *step by step* de la hiérachie catégorielle et bannissent du langage investi par le mode développemental toute problématique liée à l'idée d'ambiguïté systématique.

Parallèlement à la mise en évidence de cette effectivité formelle, nous serons amené à constater que l'Ontologie nous libère du scandale de nommer les fonctions et que les difficultés liées au processus de nominalisation s'y trouvent déliées par un mode de représentation pseudo-nominale des entités supérieures.

Mais dans un premier temps, afin que le lecteur n'ayant pas connaissance du système logique qu'est l'Ontologie puisse accéder à une pleine compréhension de notre propos, nous en préciserons les modes formels liés à sa dimension développementale. Quant au lecteur averti, il peut, s'il le souhaite, faire l'économie de cette présentation et accéder directement à la partie 2, qui constitue le centre de l'article[1].

1. La formalisation contextuelle

1.1 Remarques sur la théorie des catégories sémantiques

Les expressions dans l'Ontologie appartiennent à des *catégories sémantiques* distinctes qui sont les analogues formels des types logiques. Renvoyant à une analyse du langage en «parties du discours», la théorie des catégories sémantiques donne un corps technique à l'idée philosophique de catégories grammaticales, – les «Bedeutungskategorien» de Husserl. De la même manière que l'on ne peut remplacer dans une phrase grammaticalement correcte un nom

[1] Pour une présentation générale de l'Ontologie et du système propositionnel sur lequelle elle est construite – la Protothétique – on se reportera à Miéville (2001-04).

par un verbe, on ne peut pas dans l'Ontologie substituer un terme d'une certaine catégorie sémantique à un terme d'une autre catégorie sémantique, ce qui signifie que l'on ne peut pas substituer un foncteur à son argument. La différence majeure avec la théorie des types, sur ce point, est que la théorie des catégories sémantiques n'exige aucun artifice et satisfait de manière interne les requisits liés à la sphère d'idée universaliste, tout en étant ontologiquement neutre.

Les catégories sémantiques de base sont au nombre de deux, celle des propositions et celles des noms, S et N. Toutes les autres catégories en sont dérivées. N'importe quelle catégorie sémantique dérivée des catégories S et N, aussi complexe soit-elle, est potentiellement atteignable dans le système, moyennant l'obéissance aux modes d'expansion régulière du langage, ancrés dans une procédure inférentielle de définition. Les définitions ne sont pas traitées commes des abréviations métalinguistiques mais, comme les axiomes, elles sont assertées dans le langage lui-même comme thèses, permettant ainsi d'enrichir son pouvoir expressif et déductif par l'introduction de nouvelles constantes, et ceci en fixant leur catégorie sémantique et leur signification[2]. Quant à la reconnaissance de l'appartenance catégorielle d'un terme ou d'une expression, elle relève d'une formalisation contextuelle qui va faire l'objet du point suivant.

Nous utiliserons la notation suivante pour représenter une catégorie sémantique complexe[3]: $C/C_1C_2...C_n$. Cette écriture exprime une catégorie fonctorielle, $C_1C_2...C_n$ étant les catégories respectives des arguments sur lesquels opère le foncteur, tandis que C est la catégorie sémantique résultante. Par exemple, S/S est la catégorie des foncteurs formateurs de proposition à un argument propositionnel, S/NN la catégorie des foncteurs formateurs de propositions à deux arguments nominaux, ou encore $(S/S)/SS$ la catégorie des foncteurs formateurs de foncteurs de catégorie S/S à deux arguments propositionnels.

[2] Cf. ici même l'article de P. Joray.

[3] Au sujet de la caractérisation de la grammaire catégorielle de la théorie, nous renvoyons le lecteur à Ajdukiewicz (1935); Bar-Hillel (1953); Joray & Godart-Wendling (2002); Joray (2001: chap. II).

Au sujet de la terminologie de catégorie sémantique, notons que nous pourrions lui préférer celle de catégorie syntaxico-sémantique, en faveur de laquelle certains auteurs inclinent (Miéville 2001-04). Cette terminologie a en effet le mérite de rendre manifeste la double dimension des catégories: sémantique dans l'intention et la signification qu'elles portent, et syntaxique du point de vue de la formalisation[4]. Cependant, il importe d'avoir à l'esprit que l'Ontologie est un système interprété: tout terme constant introduit dans le calcul acquiert sa signification des précédents, et ceci rétrospectivement jusqu'à la base axiomatique qui fixe les significations primitives. La sémantique est non seulement l'étape «intuitive» qui guide la construction du formalisme, mais ce dernier est avant tout l'expression de cette intuition.

1.2 L'axiome de l'Ontologie

Précisons tout d'abord que l'Ontologie s'ancre dans la Protothétique, un calcul propositionnel quantifié dans lequel on peut disposer de foncteurs de n'importe quelle catégorie construite à partir de la catégorie des propositions, et quantifier sur des variables de ces catégories. L'unique foncteur primitif de ce calcul est la biconditionnelle $\equiv$, de catégorie *S/SS*. C'est ce foncteur qui constitue la force motrice de la procédure développementale de définition, les définitions étant en effet insérées dans le calcul par leur formulation équivalentielle.

L'Ontologie ajoute à la base axiomatique de la Protothétique un seul axiome et, avec celui-ci, un foncteur primitif, l'epsilon ε, de catégorie *S/NN*, formalisant un certain usage de la copule dans les propositions de la forme «*a* est *b*»: une telle proposition est reconnue vraie si et seulement si le nom *a* désigne un objet singulier et si cet objet est bien ce que l'on dit qu'il est, c'est-à-dire un des objets désignés par le nom *b*. Quant à l'appareillage inférentiel, il se compose de directives de définition, de distribution des quantificateurs, de détachement, de substitution et d'extensionnalité. Nous

[4] Ajoutons qu'il est possible, comme le montre Joray (2005e), de proposer un calcul de la correction catégorielle simultanément syntaxique et sémantique.

n'évoquerons ici que les directives de définition, ainsi que celles de substitution et d'extensionnalité[5].

L'axiome de l'Ontologie est:

$$\lfloor ab \rfloor \lceil a\varepsilon b \equiv .\lfloor \exists c \rfloor \lceil c\varepsilon a \rceil \wedge \lfloor c \rfloor \lceil c\varepsilon a \supset c\varepsilon b \rceil \wedge \lfloor cd \rfloor \lceil c\varepsilon a \wedge d\varepsilon a \,.\supset c\varepsilon d \rceil \rceil$$ [6]

L'axiome est une généralisation de la forme $\lfloor \ldots \rfloor \lceil \ldots \rceil$, où les caractères $\lfloor , \rfloor \lceil , \rceil$ marquent la quantification. On le lit: quels que soient les noms *a* et *b*, *a* est *b* si et seulement si il y a au moins un *c* qui est *a* et pour tout *c*, si *c* est *a* alors *c* est *b* et, pour tout *c* et *d*, si *c* est *a* et *d* est *a*, alors *c* est *d*.

La proposition élémentaire de l'Ontologie est donc «*a* est *b*», formellement «*aεb*», où les termes *a* et *b* représentent des objets formels appartenant à la catégorie sémantique des noms. Mais, à la différence des théories standards où seuls les noms singuliers sont retenus parmi la catégorie logique des noms, les noms dans l'Ontologie peuvent être singuliers, vides ou pluriels. Quant à la proposition «*a* est *b*», selon les conditions de vérité édictées par l'axiomatique, elle est vraie si et seulement si trois clauses sont remplies: le nom *a* n'est pas un nom vide (*clause d'existence*), ce que désigne le nom *a* est également désigné par le nom *b* (*clause inclusive*) et le nom *a* est un nom singulier (*clause d'unicité*).

Soulignons que l'introduction des noms pluriels et l'effacement conjoint de l'asymétrie entre sujet et prédicat désamorce dans l'Ontologie le vieux problème de l'un et du multiple. Les noms pluriels permettent en effet de ne retenir des «classes distributives» que leur dimension multiple, de sorte que la question du rapport entre l'extension en tant que multiplicité et l'extension en tant qu'unité n'a tout simplement pas à être posée. Un nom pluriel n'est en effet pas le nom de son extension, au sens où l'extension d'un nom n'est pas

[5] Pour une présentation complète des directives, cf. Miéville (2001-04).

[6] Le quantificateur «existentiel», qu'il est préférable d'appeler «particulier» car il n'a aucune portée existentielle, est introduit sous forme abréviative: «$\sim\lfloor A \rfloor \lceil \sim\ldots \rceil$» s'écrivant «$\lfloor \exists A \rfloor \lceil \ldots \rceil$». L'axiome de l'Ontologie requiert donc, au total, que les opérateurs binaires usuels $\supset$, $\wedge$, de catégorie *S/SS*, et l'opérateur unaire de la négation ~, aient été préalablement définis.

associée à la classe des objets qu'il dénote[7]. On mesurera par la suite toute l'importance de cette analyse de la structure interne de la proposition qui rompt avec celle de tradition frégéenne, analysant la proposition en deux constituants irréductibles – fonction et argument – et renvoyant à des classes de termes mutuellement exclusives.

1.3 La procédure définitoire

Avant d'entrer dans le détail de la procédure de définition, esquissons tout d'abord les idées directrices de la formalisation dite contextuelle qui la gouverne. Les axiomes des systèmes contiennent des termes appartenant aux catégories primitives et de nouvelles catégories sont introduites en définissant des termes constants appartenant à ces catégories. Ces différentes catégories sont signalées par des parenthésages différents rangés sous le nom de contextes. Formellement, un contexte se caractérise par la forme de ses parenthèses et le nombre de ses arguments. Par exemple, (-), (--), {-}, {--}, ⟨-⟩, \----/ représentent des contextes distincts. Quant au mode d'écriture, c'est celui d'une écriture préfixée. Par conséquent, dans une expression, un contexte est toujours précédé d'un foncteur, celui-ci pouvant être un foncteur constant ou variable.

Si un foncteur appartenant à une catégorie déjà représentée dans le système est défini, alors il doit être associé au contexte déjà associé à cette catégorie. Par contre, s'il est destiné à être d'une catégorie nouvelle, alors un nouveau contexte doit être choisi.

Nul alphabet n'étant donné *a priori*, ni pour les constantes ni pour les variables, c'est la quantification qui opère la discrimination syntaxique entre les variables et les constantes: un terme a le statut de variable s'il est lié par un terme équiforme dans un quantificateur, sinon il a le statut de constante.

Les variables quantifiables sont celles des catégories déjà présentes dans le système en l'état actuel de son développement. Ainsi, dès qu'une définition introduit une constante d'une catégorie jusqu'alors non représentée dans le système, l'introduction de cette catégorie

[7] Cf. Joray (2005e).

autorise à quantifier sur des variables de cette catégorie. C'est ce principe quantificationnel qui, incorporé à la procédure définitoire, fonde l'expressivité catégorielle potentiellement infinie de l'Ontologie.

A la lumière de ces précisions syntaxiques, considérons dès lors la procédure définitoire. Celle-ci tombe dans l'Ontologie sous deux règles de définition: une règle de définition de type propositionnel héritée de la Protothétique et une règle de définition de type nominal, liée à l'ajout de la catégorie des noms. Les voici, sous la forme de représentations schématiques:

- **Définition de type propositionnel (Dfs)**

  $\lfloor v_1 \ldots v_n \rfloor \lceil \equiv (f\{v_1 \ldots\} \ldots [\ldots v_n]\ F_{v1 \ldots vn}) \rceil$

  écriture contextuelle

  $\lfloor v_1 \ldots v_n \rfloor \lceil f\{v_1 \ldots\} \ldots [\ldots v_n] \equiv F_{v1 \ldots vn} \rceil$

  écriture conventionnelle

- **Définition de type nominal (Dfn)**

  $\lfloor v_1 \ldots v_n\, a \rfloor \lceil \equiv (\varepsilon\{a\ g\{v_1 \ldots\} \ldots [\ldots v_n]\} \wedge (\varepsilon\{aa\} E_{v1 \ldots vn}) \rceil$[8]

  écriture contextuelle

  $\lfloor v_1 \ldots v_n\, a \rfloor \lceil a\ \varepsilon\ g\ \{v_1 \ldots\} \ldots [\ldots v_n] \equiv .\ a \varepsilon a \wedge E_{v1 \ldots vn} \rceil$

  écriture conventionnelle

f et *g* représentent les termes définis, $v_1\ v_2 \ldots v_n$ les arguments sur lesquels ils opèrent, s'il y en a. Ces arguments peuvent se répartir dans un ou plusieurs contextes. C'est ce que vise à représenter la forme générale $\{v_1 \ldots\} \ldots [\ldots v_n]$, où l'inscription en gras des parenthèses des contextes signalent qu'elles auront une certaine forme en fonction du nombre et de la catégorie des arguments sur lesquels opère le foncteur. On parlera de définition *régulière* lorsque le terme défini prend un seul contexte et de définition *paramétrée* lorsqu'il en prend plus d'un. Il peut également n'y avoir aucun argument dans le

[8] Le premier argument de la généralisation, «ε{a *definiendum*}», exprime que le terme sujet *a* est un nom individuel. C'est la raison pour laquelle le second argument a la forme conjonctive «a ε a ∧ $E_{v1\ v2 \ldots vn}$», «a ε a» traduisant l'unicité de l'objet dénoté par le nom *a*, et «$E_{v1\ v2 \ldots vn}$» étant le *definiens* à strictement parler.

definiendum, celui consistant alors en un seul terme constant. Dans ce cas, la définition sera dite *absolue*.

La reconnaissance des catégories des arguments sur lesquels opèrent le foncteur défini est donnée par le *definiens*, dont les constantes, catégories et contextes associés qui y apparaissent doivent être représentés dans le système en l'état présent de son développement. Quant aux autres conditions auxquelles doit satisfaire une expression pour être ajoutée au système comme thèse définitoire des foncteurs *f* et *g*, ce sont les suivantes: dans $f\{v_1 \ldots\} \ldots [\ldots\ v_n]$ et $g\{v_1 \ldots\} \ldots [\ldots\ v_n]$, *f* et *g* sont les seules constantes et elles n'y possèdent qu'une occurrence; aucune des variables $v_1 \ldots v_n$ n'y est répétée; ces variables sont les mêmes que celles (libres) que contiennent les *definiens* respectifs $F_{v1 \ldots vn}$ et $E_{v1 \ldots vn}$.

Le contexte (--), qui est associé à la biconditionnelle et, de fait, à tout foncteur de catégorie *S/NN* défini dans le système, est le contexte primitif posé par l'axiomatique de la Protothétique. Quant au contexte {--}, c'est le contexte primitif associé à la catégorie *S/NN*, celle du foncteur primitif de l'epsilon ε introduit avec l'axiome de l'Ontologie. Par conséquent, les arguments de tels contextes sont destinés à être respectivement de catégorie *S* et de catégorie *N*, tandis que les foncteurs associés sont destinés à être de catégorie *S/SS* et *S/NN*. Il en sera de même pour tout autre contexte associé à une catégorie nouvelle introduite par le biais d'une définition. Pour la version contextuelle de l'axiome de l'Ontologie, on a donc:

$$\lfloor ab \rfloor \lceil \equiv(\varepsilon\{ab\}$$
$$\wedge(\lfloor \exists c \rfloor \lceil \varepsilon\{ca\} \rceil \wedge(\lfloor c \rfloor \lceil \supset(\varepsilon\{ca\}\ \varepsilon\{cb\})) \rceil\ \lfloor cd \rfloor \lceil \supset(\wedge(\varepsilon\ \{ca\}\ \varepsilon\{da\})\ \varepsilon\{cd\})) \rceil) \rceil)) \rceil$$

Toute expansion définitoire du langage est confinée dans la sphère extensionnelle par les règles d'extensionnalité. Deux règles, rapportées pour l'une à la règle de définition de type propositionnel et pour l'autre à celle de type nominal, assurent au total l'extensionnalité de toutes les expressions de toute catégorie sémantique du langage. Dès qu'une constante d'une quelconque catégorie a été introduite, les règles d'extensionnalité permettent l'inscription d'une thèse garantissant le principe d'extensionnalité pour toutes les expressions de cette catégorie. Par exemple, si la catégorie *S/N* est introduite dans le système, on peut inscrire la thèse d'extensionnalité suivante:

$$\lfloor fg \rfloor \lceil \lfloor v \rfloor \lceil f(v) \equiv g(v) \rceil \equiv \lfloor \phi \rfloor \lceil \phi(f) \equiv \phi(g) \rceil \rceil$$

où *f* et *g* sont de catégorie *S/N* et ϕ est de catégorie *S/(S/N)*. Et si on introduit une catégorie nominale telle que, par exemple, *N/NN*, la thèse d'extensionnalité pour cette catégorie sera:

$$\lfloor fg \rfloor \lceil \lfloor av_1v_2 \rfloor \lceil a\ \varepsilon\ f(v_1v_2) \equiv a\ \varepsilon\ g(v_1v_2) \rceil \equiv \lfloor \phi \rfloor \lceil \phi(f) \equiv \phi(g) \rceil \rceil$$

où *f* et *g* sont cette fois de catégorie *N/NN* et ϕ est de catégorie *S/(N/NN)*[9].

Précisons aussi quelque peu les modalités de lecture et d'interprétation de la quantification. Ni objectuelle, ni substitutionnelle, la quantification peut être qualifiée de catégorielle[10]. Pour aller à l'essentiel, disons que les variables qui apparaissent dans une généralisation ne sont que l'inscription du caractère sémantique que partagent tous les éléments tombant sous la catégorie à laquelle elles appartiennent. Il faut lire les formes $\lfloor v \rfloor \lceil \ldots v \ldots \rceil$ et $\lfloor \exists v \rfloor \lceil \ldots v \ldots \rceil$ respectivement «quelle que soit la signification de l'expression v» et «pour quelque signification de l'expression v», compte tenu de la catégorie sémantique à laquelle appartient l'expression v. Du point de vue de la syntaxe, les variables ne sont que des lettres. Quant à leurs valeurs, elles sont extraites des domaines de quantification correspondant à la catégorie de la variable, selon qu'elle est une variable propositionnelle, nominale ou fonctorielle. A chaque catégorie est associée un domaine de quantification, c'est-à-dire l'ensemble des significations extensionnelles attachées à un quelconque élément de la catégorie en question.

[9] Notons que ne pouvant quantifier sur des variables d'une certaine catégorie que si cette catégorie est représentée dans le système via une constante, l'inscription d'une thèse d'extensionnalité pour une catégorie *C* exige que la catégorie *S/C* soit représentée dans le système.

[10] Au sujet de la quantification dans l'Ontologie et de son interprétation, on consultera Simons (1985), Miéville (1999), Joray (1999, 2005e).

1.4 Définitions et substitution

C'est la directive de substitution qui assure à la quantification son rôle d'expression de la généralité. Cette directive permet d'opérer sur des variables d'une généralisation, qu'elles soient propositionnelles, nominales ou fonctorielles, en leur substituant une autre variable, une constante ou une expression de la même catégorie sémantique, et ceci indépendamment de toute question de référence extralinguistique, existence ou unicité. Libre de tout apport existentiel, la quantification est en effet ontologiquement neutre. Les thèses de l'Ontologie ne débouchent sur aucun indice concernant «l'ameublement dernier de ce monde», pour reprendre une expression chère à Russell, ni l'existence d'une entité quelconque. Ainsi, derrière les catégories logiques, on ne saisit aucune entité ontologique[11].

Nous ajoutons encore, au sujet de la règle de substitution, qu'elle n'autorise pas à substituer sur des «expressions incomplètes», c'est-à-dire considérées comme des écritures ouvertes[12]. Pour obtenir, par exemple, $\lfloor xy \rfloor \lceil (x\equiv y)\equiv(x\equiv y)\rceil$ à partir de $\lfloor \alpha x \rfloor \lceil \alpha(x)\equiv\alpha(x)\rceil$, où x et y sont de catégorie S et α de catégorie S/S, on ne peut pas substituer «$(\ldots \equiv y)$» à α. L'opération de substitution peut avoir lieu, mais par le biais d'un foncteur paramétré. Pour ce faire, on inscrira, par exemple, la définition paramétrée suivante:

$$\lfloor xy \rfloor \lceil \lceil \equiv/y\backslash(x) \equiv (x\equiv y)\rceil$$

Le foncteur paramétré $\equiv/y\backslash$ appartient à la catégorie des foncteurs formateurs de proposition à un argument propositionnel, S/S. Puisqu'il est de la même catégorie sémantique que α dans la généralisation $\lfloor \alpha x \rfloor \lceil \alpha(x)\equiv\alpha(x)\rceil$, il peut lui être substitué. On obtient alors la formule désirée: $\lfloor xy \rfloor \lceil (x\equiv y)\equiv(x\equiv y)\rceil$.

[11] Cf. Simons (1995).

[12] Remarquons que Łukasiewicz (1951), propose une règle permettant de substituer sur des «expressions incomplètes». Cette règle présente cependant un caractère *ad hoc*, dans la mesure où elle est spécifique à certaines catégories. Elle ne revêt donc pas la dimension générale de l'utilisation du paramétrage propre aux théories leśniewskiennes.

1.5 L'homonymie

Ces éléments préparatoires ayant été exposés, nous fermons ce chapitre avec quelques définitions. Elles mettent en évidence que la formalisation contextuelle permet l'usage de constantes homonymes, sans risque de confusion catégorielle. C'est ce point qui occupera une place centrale dans la seconde partie de notre travail.

D1: $\lfloor ABC \rfloor \lceil \equiv(\equiv(ABC) \equiv(A \equiv(BC))) \rceil$ *Dfs* (*régulière*); ≡; *S/SSS*; (---)

$\lfloor ABC \rfloor \lceil \equiv(ABC) \equiv (A \equiv (B \equiv C)) \rceil$ (*bicondionnelle ternaire*)

Cette définition, tombant sous la règle Dfs, introduit un foncteur de catégorie *S/SSS*, catégorie nouvelle pour laquelle nous avons choisi le contexte (---). Quant au choix d'un symbole équiforme à celui du foncteur primitif de la biconditionnelle pour ce nouveau foncteur, il ne soulève aucune difficulté puisque les contextes associés aux deux constantes homonymes, soient (--) et (---), permettent de les séparer l'une de l'autre. Bien au contraire, la similarité des formes présente l'avantage de rappeler la similarité sémantique des constantes. Voici deux autres définitions. Elles correspondent à deux manières de définir l'union logique, l'une nominale, l'autre prédicative.

D2: $\lfloor abc \rfloor \lceil \equiv(\varepsilon\{a \cup \lceil bc \rceil\} \wedge(\varepsilon\{aa\} \vee (\varepsilon\{ab\}\ \varepsilon\{ac\}))) \rceil$
Dfn (*régulière*); ∪; *N/NN*; $\lceil$--$\rceil$

$\lfloor abc \rfloor \lceil a\ \varepsilon \cup \lceil bc \rceil \equiv\!: a\varepsilon a \wedge .\ a\varepsilon b \vee a\varepsilon c \rceil$ (*union nominale*)

«$\cup \lceil bc \rceil$» est l'union des extensions des noms *b* et *c*.

D3: $\lfloor a\alpha\beta \rfloor \lceil \equiv(\cup\backslash\alpha\beta/\{a\} \vee(\alpha\{a\}\ \beta\{a\})) \rceil$ *Dfs* (*paramétrée*);∪;
(S/N)/((S/N)(S/N)); $\backslash$--$/$

$\lfloor a\alpha\beta \rfloor \lceil \cup\backslash\alpha\beta/\{a\} \equiv .\ \alpha\{a\} \vee \beta\{a\} \rceil$ (*union prédicative*)

«$\cup\backslash\alpha\beta/$» est l'union des prédicats α et β.

Comme précédemment, les contextes associés aux deux constantes homonymes, $\lceil$--$\rceil$ et $\backslash$--$/$, excluent toute ambiguïté catégorielle.

Ces quelques exemples suffisent à illustrer les ressources polysémiques de l'Ontologie. Il s'agit maintenant d'inscrire ce point à l'aune de l'analogie fonctionnelle de constantes s'inscrivant dans une hiérarchisation catégorielle. C'est ce que nous ferons dans la section suivante, après quelques remarques introductives liées à l'idée d'ambiguïté systématique dans les *Principia Mathematica.*

2. Le principe de stratification

2.1 L'ambiguïté systématique dans les *Principia Mathematica*

Le rôle de l'ambiguïté systématique dans la théorie des types des *Principia Mathematica*, où les indices de types n'apparaissent qu'à de rares exceptions, est tout à fait central. L'ambiguïté systématique est en effet le réceptacle de la dimension de généralité du discours logico-mathématique et elle fonde, corollairement, la voie d'accès à la lecture et à la résolution des paradoxes. Selon les auteurs, un paradoxe tient en effet à la présence, dans sa formulation, d'un symbole systématiquement ambigu: celui-ci a été utilisé sans spécification de type, ce qui a eu pour conséquence d'engendrer une «totalité illégitime»[13]. Pour que la contradiction – apparente – disparaisse, il suffit dès lors de spécifier l'ambiguïté du symbole, celle-ci exigeant un certain type pour être supprimée et donner lieu à une proposition (Whitehead & Russell 1927: 64).

Considérons à ce titre la définition de la classe, avec laquelle il faut parer au paradoxe dit de Russell de la classe de toutes les classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes, de la sorte que seules les formules atomiques de la forme $x \in W$ où x est d'un certain type n et W de type $n{+}1$ soient douées de sens. Pour tout type n différent de 0 (type des individus), la classe est ainsi définie comme étant la classe des objets de type $n{-}1$, ce qui correspond à la définition:

$$*20.03\text{: Cls} = \hat{\alpha}\,\{(\exists\phi).\alpha = \hat{z}\,(\phi\,!z)\}.$$

Cette définition possède une ambiguïté de type, relative au type de la variable apparente z. Le type de α est immédiatement supérieur au type de z, et celui de «Cls» immédiatement supérieur à celui de α. Il s'ensuit que l'expression «Cls $\in$ Cls», qui est une conséquence de la

[13] Cf. ici même l'article de C. Degrange.

définition précédente, requiert que «Cls» ait un sens différent pour chacune de ses occurrences. Pour traiter avec ce pseudo-énoncé, il faudra interpréter la seconde occurrence de «Cls» comme correspondant à la classe de toutes les classes de type n+1 et la première comme la classe de toutes les classes de type n.

Tout comme le symbole «Cls», les symboles de la classe nulle, la classe universelle, ainsi que ceux de 0, 1 et tous les autres nombres cardinaux sont ambigus, ainsi que les opérateurs arithmétiques. Par ailleurs, la notion de vérité étant elle-même typiquement ambiguë (ainsi que l'atteste le paradoxe du menteur), le symbole logique d'assertion est lui-même ambigu. Cela entraîne qu'il faut admettre une ambiguïté systématique des opérateurs logiques, leur signification variant en effet en fonction de l'ordre de la proposition assertée.

Examinons, par exemple, la définition du nombre 1 avec les commentaires qui l'accompagnent. Le nombre 1 est défini comme la classe de toutes les classes unités de la manière suivante:

*52.01. $1 = \hat{\alpha}\{(\exists x).\alpha = \iota\text{'}x\}$ Df[14]

> Like Λ and V, 1 is ambiguous as to type: it means "all unit classes of the type in question". The symbol "1(α)", where α is a type, will mean "all unit classes whose sole members belong to a type α". (1927: 347).

Puisque cette définition est systématiquement ambiguë, il s'ensuit que l'on peut définir autant de 1 qu'il y a de types. Le type de 1 étant relatif à la base au type de x, pour n'importe quel type t, ι'x sera de type t+1, α de type t+2, et 1 de type t+3. Quant à l'ensemble des entiers naturels, il sera de type t+4. Autrement dit, l'arithmétique est constructible relativement à n'importe quel type. Et, face à ce résultat, on ne peut guère mieux faire que de se référer à l'ambiguïté systématique elle-même en disant que si l'absence d'indices donne lieu à des symboles systématiquement ambigus, on peut toujours restaurer les indices de type de manière à être conforme à une construction

[14] Cf *51.11: $\vdash \iota\text{'}x = \hat{y}(y = x)$; la fonction descriptive ι'x signifiant «la classe dont le seul membre est x» (1927: 338).

respectant les conditions syntaxiques de formation des fonctions logiques. Néanmoins, si l'argument est correct, il ne change rien à la théorie elle-même. Celle-ci porte toujours en germe une prolifération infinie d'arithmétiques, tandis que le langage n'a toujours pas les compétences de dire «où on se trouve» dans la hiérarchie.

Terminons ces remarques en évoquant la notion d'analogie systématique qui vient se greffer sur celle d'ambiguïté systématique. Présentée par les auteurs comme le pendant de l'ambiguïté systématique, l'analogie systématique vise à répondre à la curieuse situation sur laquelle débouche inexorablement le recours à l'ambiguïté systématique. Car, si le langage logico-mathématique est essentiellement ambigu, il faut alors régler le problème de conjuguer les dimensions de généralité et de signification attachées à ses formes symboliques. La solution à cette situation – quelque peu paradoxale pour des logicistes qui furent parmi les premiers à proposer un langage logique formalisé – Whitehead et Russell la trouvent à travers le concept d'analogie systématique. Ils écrivent:

> [...] *the systematic ambiguity is the result of a systematic analogy.* That is to say, in almost all the reasonings which constitute mathematics and mathematical logic, we are using ideas which may receive any one of an infinite number of different typical determinations, any one of which leaves the reasoning valid. (1927: 65, nous soulignons).

C'est ainsi, en se réclamant de l'analogie systématique, qu'ils en viennent «naturellement» à parler de vérité permanente des théorèmes logiques (1927: xii) et à dire que nous *voyons* que tout ce qui peut être prouvé pour des types inférieurs peut l'être également pour n'importe quel autre type signifiant assumé, ceci par une transmission analogique de la preuve.

> [...] when we have proved a proposition for the lowest significant type, we "see" that it holds in any other assigned significant type. Hence every proposition which is proved without the mention of any type is to be regarded as proved for the lowest significant type, and extended by analogy to any other significant type. (1927: xi).

Au vu de cette analyse, les formules logiques s'apparentent donc à des formes générales, porteuses de significations susceptibles d'être activées par une détermination typique et dont l'inscription réitérée dans la hiérarchie est redevable d'une analogie systématique. Il va de soi alors que la définition typique d'un symbole ou d'une formule n'a aucune incidence sur son mode de représentation graphique. Celle-ci peut rester la même, puisque la solution prônée, extérieure au formalisme, ne porte que sur la seule interprétation des symboles et des formules.

Nous touchons là le véritable enjeu de notre discussion. Les types ont pour mission de séparer les différentes valeurs possibles, c'est-à-dire les domaines de signification. Mais le recours à l'ambiguïté systématique, réglé par le concept d'analogie systématique et porté par la terminologie du *voir,* les re-superpose dans le même mouvement. Et cet «applatissement» d'une hiérarchie destinée à se déplier sous l'égide d'une transparence analogique contribue d'avantage à obscurcir la théorie qu'à l'éclairer, dans la mesure où l'on ne se place jamais du point de vue de la syntaxe.

Examinons maintenant ce qu'il en est de cette question dans l'Ontologie. L'approche étant résolument celle d'une formalisation d'une rigueur extrême, l'analogie ne saurait en aucune façon se limiter à être vue. Elle y est gérée de manière intrinsèque, par les propres modes formels du langage logique, sans que jamais il n'y ait dissociation entre forme et contenu.

2.2 L' homonymie verticale

Pour commencer, on considèrera un certain nombre de définitions mettant en évidence que, sans ambiguïté, des constantes équiformes peuvent être utilisées comme homonymes pour exhiber et rendre compte d'analogies systématiques. Nous formulons ces définitions dans une écriture hybride, tout en gardant à l'esprit qu'elles sont implicitement contrôlées par leur pendant contextuel.

D4: $\lfloor a \rfloor \lceil !\{a\} \equiv \lfloor \exists b \rfloor \lceil b \varepsilon a \rceil \rceil$ *Dfs*;!; *S/N*; {-}

$!\{a\}$: a *est un nom qui dénote* (foncteur d'existence)

D5: $\lfloor ab \rfloor \lceil \subset\{ab\} \equiv \lfloor c \rfloor \lceil c \varepsilon a \supset c \varepsilon b \rceil \rceil$ *Dfs*; ⊂; *S/NN*; {--}

$\subset\{ab\}$: *le nom* a *est inclus dans le nom* b (inclusion forte)

D6: $\lfloor ab \rfloor \lceil \approx\{ab\} \equiv \lfloor c \rfloor \lceil c \varepsilon a \equiv c \varepsilon b\} \rceil$ *Dfs*; ≈; *S/NN*; {--}

$\approx\{ab\}$: a *et* b *ont la même extension* (identité extensionnelle)

Définissons les analogues de ces foncteurs pour des catégories supérieures. Soit:

D7: $\lfloor \alpha \rfloor \lceil ![\alpha] \equiv \lfloor \exists a \rfloor \lceil \alpha\{a\} \rceil \rceil$ *Dfs*; !; [-]; *S/(S/N)*

D8: $\lfloor \alpha\beta \rfloor \lceil \subset[\alpha\beta] \equiv \lfloor a \rfloor \lceil \alpha\{a\} \supset \beta\{a\} \rceil \rceil$ *Dfs*; ⊂; [--]; *S/((S/N)(S/N))*

D9: $\lfloor \alpha\beta \rfloor \lceil \approx[\alpha\beta] \equiv \lfloor a \rfloor \lceil \alpha\{a\} \equiv \beta\{a\} \rceil \rceil$ *Dfs*; ≈; [--]; *S/((S/N)(S/N))*

Nous avons là une homonymie verticale de constantes «embrassant chacune la même idée», pour reprendre les mots de Russell. On peut lire «$![\alpha]$»: *le prédicat* α *est vérifié d'au moins un nom*, dit autrement: α *est un prédicat qui dénote*; «$\subset[\alpha\beta]$»: *le prédicat* α *est inclus dans le prédicat* β; et «$\approx[\alpha\beta]$»: *les prédicats* α *et* β *ont la même extension.* Et, si on réitère l'opération, on inscrira les définitions suivantes:

D10: $\lfloor \alpha \rfloor \lceil ![\alpha] \equiv \lfloor \exists \beta \rfloor \lceil \alpha[\beta] \rceil \rceil$ *Dfs*; !; [-]; *S/(S/(S/N))*

D11: $\lfloor \alpha\beta \rfloor \lceil \subset[\alpha\beta] \equiv \lfloor \gamma \rfloor \lceil \alpha[\gamma] \supset \beta[\gamma] \rceil \rceil$ *Dfs*; ⊂; [-]; *S/(S/(S/N))*

D12: $\lfloor \alpha\beta \rfloor \lceil \approx[\alpha\beta] \equiv \lfloor \gamma \rfloor \lceil \alpha[\gamma] \equiv \beta[\gamma] \rceil \rceil$ *Dfs*; ≈; [--]; *S/((S/(S/N))(S/(S/N)))*

De la même manière que précédemment, on peut lire «$![\alpha]$»: le foncteur α, de catégorie *S/(S/N)*, est un foncteur qui dénote, c'est-à-dire: qui est vérifié d'au moins un foncteur de catégorie *S/N*. Et ainsi de suite.

Ainsi, grâce aux contextes, qui se présentent comme des indices de catégories, la représentation graphique de ces constantes peut rester la même et rendre compte de l'analogie fonctionnelle de ces constantes, sans qu'il soit nécessaire de spécifier une quelconque ambiguïté systématique ou typique.

Il est bien évident que les constantes supérieures sont introduites, en premier lieu, par des définitions qui contiennent des variables nominales dans leur *definiens*, ceux-ci étant en effet construits sur la base de l'epsilon primitif. De fait, si l'analogie est totale en ce qui concerne leur *definiendum* – à l'exception de la forme des parenthèses associées aux contextes –, elle n'est que partielle en ce qui concerne leur *definiens*. Par ailleurs, si on peut paraphraser les définitions primitives pour donner une lecture des foncteurs supérieurs en «parlant» ces derniers comme des noms, ceux-ci n'occupent pas le rôle d'un nom dans le langage logique.

Cependant, on peut atteindre une analogie parfaite et, ce faisant, «légitimer» la nominalisation des entités supérieures dans le langage lui-même. La pierre de voûte d'une telle construction relève de la capacité du langage à gérer l'inscription d'espilons supérieurs, qualifiés de la sorte pour être des foncteurs propositionnels structurellement analogues à l'epsilon primitif, mais dont les arguments appartiennent à d'autres catégories que celle des noms. La similarité entre l'espilon primitif et un epsilon supérieur est rendue explicite dès lors que la définition de cet espilon permet de dériver une thèse structurellement analogue à l'axiome de l'Ontologie, à l'exception de la forme des parenthèses du contexte associées à la constante définie. Cette thèse ne diffèrera donc de l'axiome primitif que par la catégorie des variables et celle de l'epsilon supérieur. Dès lors, on peut également disposer des thèses analogues aux thèses primitives – à la forme des parenthèses près – régies par la base axiomatique et les directives inférentielles, que ce soient les définitions ou tout autre thèse. C'est ce résultat que nous nous proposons maintenant d'établir. Nous l'établirons pour un epsilon de catégorie $S/(S/N)(S/N)$, défini à travers le relateur de l'identité extensionnelle nominale $\approx$ introduit précédemment avec la définition D6[15].

[15] Pour d'autres démonstrations, voir Canty (1967, 1969a), Hiż (1977), Miéville (1984).

2.3 Le principe de stratification supérieure

Définition d'un epsilon supérieur

La définition est inscrite *via* la règle de définition de type propositionnel Dfs. C'est la suivante:

D13(Dfε): $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\varepsilon[\alpha\beta] \equiv .\lfloor\exists a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\wedge\beta\{a\}\rceil\wedge\lfloor ab\rfloor\lceil\alpha\{a\}\wedge\alpha\{b\}.\supset\approx\{ab\}\rceil\rceil$

> On peut lire cette définition: pour tout foncteur α et β de catégorie *S/N*, α est β si et seulement si pour quelque nom a, α et β sont vérifiés de a et, pour tout nom a et b, si α est vérifié de a et de b, alors a et b ont la même extension.

Relevons que nous aurions pu préférer comme définition de notre epsilon l'une des deux thèses définitions suivantes. Chacune d'entre elles est en effet inférentiellement équivalente à la première.

Dfε': $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\varepsilon[\alpha\beta] \equiv.$
$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\rceil\wedge\lfloor a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\supset\beta\{a\}\rceil\wedge\lfloor ab\rfloor\lceil\alpha\{a\}\wedge\alpha\{b\}.\supset\approx\{ab\}\rceil\rceil$

Dfε'': $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\varepsilon[\alpha\beta] \equiv \lfloor\exists a\rfloor\lceil\lfloor b\rfloor\lceil\alpha\{b\}\equiv a\approx b\rceil \wedge \beta\{a\}\rceil\rceil$

Elévation de l'axiome de l'Ontologie

Il s'agit de dériver la thèse suivante, structurellement identique à l'axiome, dans laquelle des variables de foncteurs formateurs de noms remplacent les variables nominales et l'epsilon supérieur de catégorie *S/(S/N)(S/N)* remplace l'espilon primitif de catégorie *S/NN*.

Ax(ε₋): $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\varepsilon[\alpha\beta] \equiv.$
$\lfloor\exists\gamma\rfloor\lceil\varepsilon[\gamma\alpha]\rceil \wedge \lfloor\gamma\rfloor\lceil\varepsilon[\gamma\alpha] \supset \varepsilon[\gamma\beta]\rceil \wedge\lfloor\gamma\delta\rfloor\lceil\varepsilon[\gamma\alpha] \wedge \varepsilon[\delta\alpha].\supset\varepsilon[\gamma\delta]\rceil\rceil$

Un certain nombre de thèses relatives au foncteur $\approx$ sont nécessaires pour la démonstration. Voici tout d'abord quatre thèses, qui découlent de la définition du foncteur $\approx$:

T1:	$\lfloor ab\rfloor\lceil a \approx b \equiv \lfloor\phi\rfloor\lceil\phi\{a\}\equiv \phi\{b\}\rceil\rceil$	*Extensionnalité de* $\approx$
T2:	$\lfloor a\rfloor\lceil a \approx a\rceil$	*Réflexivité de* $\approx$
T3:	$\lfloor ab\rfloor\lceil a \approx b \equiv b \approx a\rceil$	*Symétrie de* $\approx$

T4: $\lfloor abc \rfloor \lceil a \approx b \wedge b \approx c \,.\!\supset b \approx c \rceil$ *Transitivité de* $\approx$

Ensuite, on a une définition paramétrée du foncteur $\approx$:

D14: $\lfloor ab \rfloor \lceil \approx\langle a\rangle\{b\} \equiv a \approx b \rceil$ *Dfs*; $\approx$; $\langle\text{-}\rangle$; *S/(S/N)*

$\approx\langle a\rangle$, de catégorie *S/N*, est suivi du contexte associé à cette catégorie, $\{\text{-}\}$; $\approx$, suivi d'un contexte nouveau $\langle\text{-}\rangle$, est de catégorie *S/(S/N)*. On lira $\approx\langle a\rangle\{b\}$: *les* b *forment l'extension des* a; et $\approx\langle a\rangle$: *l'extension des* a, ceci étant une façon de parler puisque, catégoriellement, $\approx\langle a\rangle$ doit être compris au sens de *former (être) l'extension des* a. Sur la base de cette définition, on obtient les thèses suivantes:

T5: $\lfloor abc \rfloor \lceil \approx\langle a\rangle\{b\} \wedge \approx\langle a\rangle\{c\} \,.\!\supset b \approx c \rceil$ *par T2, T3, D14*

T6: $\lfloor a \rfloor \lceil \approx\langle a\rangle\{a\} \rceil$ *par T2, D14*

T7: $\lfloor a\alpha \rfloor \lceil \alpha\{a\} \supset \approx\langle a\rangle \,\varepsilon\, \alpha \rceil$

Démonstration:

$\lfloor a\alpha \rfloor$

1. $\varphi\{a\}.\!\supset$ *hyp*
2. $\approx\langle a\rangle\{a\}$ *T6*
3. $\lfloor \exists b \rfloor \lceil \approx\langle a\rangle\{b\} \wedge \varphi\{b\} \rceil$ *1, 2*
4. $\lfloor bc \rfloor \lceil \approx\langle a\rangle\{b\} \wedge \approx\langle a\rangle\{c\} \,.\!\supset b \approx c \rceil$ *T5*
5. $\approx\langle a\rangle \,\varepsilon\, \varphi$ *3, 4, Dfε*

Thèse

Ces thèses préliminaires posées, on démontre aisément les suivantes:

T8: $\lfloor \alpha\beta \rfloor \lceil \alpha\varepsilon\beta \supset \alpha\varepsilon\alpha \rceil$ *par Dfε*

T9: $\lfloor \alpha\beta \rfloor \lceil \alpha\varepsilon\beta \supset \lfloor \exists\gamma \rfloor \lceil \gamma\varepsilon\alpha \rceil \rceil$ *par T8*

T10: $\lfloor \alpha\beta \rfloor \lceil \alpha\varepsilon\beta \supset \lfloor \gamma \rfloor \lceil \gamma\varepsilon\alpha \supset \gamma\varepsilon\beta \rceil \rceil$

Démonstration:

$\lfloor \alpha\beta \rfloor$

1.	$\alpha\varepsilon\beta \supset$	*hyp*
2.	$\lfloor \gamma \rfloor \quad \gamma\varepsilon\alpha \supset$	*hyp*
3.	$\lfloor \exists a \rfloor \quad \gamma\{a\}$	*2, Dfε*
4.	$\alpha\{a\}$	*2, Dfε*
5.	$\lfloor \exists b \rfloor \quad \alpha\{b\}$	*1, Dfε*
6.	$\beta\{b\}$	*1, Dfε*
7.	$a \approx b$	*1, 4, 5, Dfε*
8.	$\gamma\{b\}$	*3, 7, T1*
9.	$\lfloor \exists b \rfloor \lceil \gamma\{b\} \wedge \beta\{b\} \rceil$	*6, 8*
10.	$\lfloor ab \rfloor \lceil \gamma\{a\} \wedge \gamma\{b\} \,.\!\supset a \approx b \rceil$	*2, Dfε*
11.	$\gamma\varepsilon\beta$	*9, 10, Dfε*
12.	$\lfloor \gamma \rfloor \lceil \gamma\varepsilon\alpha \supset \gamma\varepsilon\beta \rceil \rceil$	*2-11*

Thèse

T11: $\lfloor \alpha\beta \rfloor \lceil \alpha\varepsilon\beta \supset \lfloor \gamma\delta \rfloor \lceil \gamma\varepsilon\alpha \wedge \delta\varepsilon\alpha \,.\!\supset \gamma\varepsilon\delta \rceil \rceil$

Démonstration:

$\lfloor \alpha\beta \rfloor$

1.	$\alpha\varepsilon\beta .\!\supset$	*hyp*
2.	$\lfloor \gamma\delta \rfloor \quad \gamma\varepsilon\alpha$	*hyp*
3.	$\delta\varepsilon\alpha .\!\supset$	*hyp*
4.	$\lfloor \exists a \rfloor \quad \gamma\{a\}$	*2, Dfε*
5.	$\alpha\{a\} \rceil$	*2, Dfε*
6.	$\lfloor \exists b \rfloor \quad \delta\{b\}$	*3, Dfε*
7.	$\alpha\{b\}$	*3, Dfε*
8.	$a \approx b$	*1, 5, 7, Dfε*
9.	$\delta\{a\}$	*6, 8, T1*
10.	$\lfloor \exists a \rfloor \lceil \gamma\{a\} \wedge \delta\{a\} \rceil$	*4, 9*
11.	$\lfloor ab \rfloor \lceil \gamma\{a\} \wedge \gamma\{b\} \,.\!\supset a \approx b \rceil$	*2, Dfε*
12.	$\gamma\varepsilon\delta$	*10, 11, Dfε*
13.	$\lfloor \gamma\delta \rfloor \lceil \gamma\varepsilon\alpha \wedge \delta\varepsilon\alpha \,.\!\supset \gamma\varepsilon\delta \rceil$	*2/3-12*

Thèse

T12: $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\varepsilon[\alpha\beta]\supset.$
$\lfloor\exists\gamma\rfloor\lceil\varepsilon[\gamma\alpha]\rceil \wedge\lfloor\gamma\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha\supset\gamma\varepsilon\beta\rceil \wedge\lfloor\gamma\delta\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha \wedge \delta\varepsilon\alpha.\supset\gamma\varepsilon\delta\rceil\rceil$
par T9, T10, T11

T13: $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\lfloor\exists\gamma\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha\rceil \wedge\lfloor\gamma\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha\supset\gamma\varepsilon\beta\rceil \wedge\lfloor\gamma\delta\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha \wedge \delta\varepsilon\alpha.\supset\gamma\varepsilon\delta\rceil .\supset \alpha\varepsilon\beta\rceil\rceil$

Démonstration:

$\lfloor\alpha\beta\rfloor$

1.	$\lfloor\exists\gamma\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha\rceil$	*hyp*
2.	$\lfloor\gamma\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha\supset\gamma\varepsilon\beta\rceil$	*hyp*
3.	$\lfloor\gamma\delta\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha \wedge \delta\varepsilon\alpha .\supset\gamma\varepsilon\delta\rceil .\supset$	*hyp*
4.	$\lfloor\exists\gamma\rfloor$ $\gamma\varepsilon\alpha$	*1*
5.	$\gamma\varepsilon\beta$	*1, 2*
7.	$\lfloor\exists a\rfloor$ $\gamma\{a\}$	*4, Dfε*
8.	$\alpha\{a\}$	*4, Dfε*
9.	$\lfloor\exists b\rfloor$ $\gamma\{b\}$	*5, Dfε*
10.	$\beta\{b\}$	*5, Dfε*
11.	$a\approx b$	*4, 7, 9, Dfε*
12.	$\beta\{a\}$	*10, 11, T1*
13.	$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\wedge\beta\{a\}\rceil$	*8, 12*
14.	$\lfloor ab\rfloor$ $\alpha\{a\}$	*hyp*
15.	$\alpha\{b\} .\supset$	*hyp*
16	$\approx\langle a\rangle\ \varepsilon\ \alpha$	*14, T7*
17.	$\approx\langle b\rangle\ \varepsilon\ \alpha$	*15, T7*
18.	$\approx\langle a\rangle\ \varepsilon \approx\langle b\rangle$	*3, 16, 17*
19.	$\lfloor\exists c\rfloor\lceil\approx\langle a\rangle\{c\} \wedge \approx\langle b\rangle\{c\}\rceil$	*18, Dfε*
20.	$a\approx c$	*19, D20*
21	$b\approx c$	*19, D20*
22.	$a\approx b$	*20, 21, T3, T4*
23.	$\lfloor ab\rfloor\lceil\varphi\{a\}\wedge\varphi\{b\}.\supset a\approx b\rceil$	*14, 15-22*
24.	$\alpha\varepsilon\beta$	*13, 23, Dfε*

Thèse

T14: $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\alpha\varepsilon\beta \equiv .$
$\lfloor\exists\gamma\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha\rceil \wedge \lfloor\gamma\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha \supset \gamma\varepsilon\beta\rceil \wedge \lfloor\gamma\delta\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha \wedge \delta\varepsilon\alpha . \supset \gamma\varepsilon\delta\rceil\rceil$ *T12, T13*

Cette thèse est bien l'analogue formel de l'axiome de l'Ontologie pour l'epsilon défini ε de catégorie *S/(S/N)(S/N)*. Ayant ainsi établi, par la démonstration de la thèse T15, la similarité de cet epsilon avec l'espilon primitif, on pourra disposer des thèses formellement analogues aux thèses de l'Ontologie primitive. Si l'on revient aux définitions précédentes, D7-D9, cela nous donne:

T15: $\lfloor\alpha\rfloor\lceil !\lbrack\alpha\rbrack \equiv \lfloor\exists\beta\rfloor\lceil\beta\varepsilon\alpha\rceil\rceil$

T16: $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\subset\lbrack\alpha\beta\rbrack \equiv \lfloor\gamma\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha \supset \gamma\varepsilon\beta\rceil\rceil$

T17: $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\approx\lbrack\alpha\beta\rbrack \equiv \lfloor\gamma\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha \equiv \gamma\varepsilon\beta\rceil\rceil$

L'analogie est cette fois parfaite et les thèses vont de pair: le second membre de ces biconditionnelles est structurellement identique aux *definiens* respectifs des définitions D4-D6 de l'Ontologie primitive. A titre d'illustration, nous démontrons la thèse:

T15: $\lfloor\alpha\rfloor\lceil !\lbrack\alpha\rbrack \equiv \lfloor\exists\beta\rfloor\lceil\beta\varepsilon\alpha\rceil\rceil$

<u>Démonstration</u>:

$\lfloor\alpha\rfloor$

1.	$!\lbrack\alpha\rbrack \supset$	*hyp*
2.	$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\rceil$	*1, D7*
3.	$\approx\langle a\rangle\varepsilon\alpha$	*2, T7*
4.	$\lfloor\exists\beta\rfloor\lceil\alpha\varepsilon\alpha\rceil$	*3*
5.	$!\lbrack\alpha\rbrack \supset \lfloor\exists\gamma\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha\rceil$	*1-4*
6.	$\lfloor\exists\beta\rfloor\lceil\beta\varepsilon\alpha\rceil\supset$	*hyp*
7.	$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\rceil$	*4, Dfε*
8.	$!\lbrack\alpha\rbrack$	*7, D7*
9.	$\lfloor\exists\beta\rfloor\lceil\beta\varepsilon\alpha\rceil \supset\ !\lbrack\alpha\rbrack$	*6-8*
10.	$!\lbrack\alpha\rbrack \equiv \lfloor\exists\beta\rfloor\lceil\beta\ \varepsilon\ \alpha\rceil$	*5, 9*

Thèse

On peut réitérer le processus en élevant la définition de l'epsilon de catégorie *S(S/N)(S/N)* à un epsilon de catégorie *S/((S/(S/N)/(S/(S/N))*. Cela donne pour cette définition:

$$\lfloor xy \rfloor \lceil \varepsilon[xy] \equiv \lfloor \exists z \rfloor \lceil x[z] \wedge y[z] \rceil \wedge \lfloor zw \rfloor \lceil x[z] \wedge x[w] \,.\!\supset \approx[zw] \rceil$$

où les variables *x* et *y* sont de catégorie *S/(S/N)*.

Ensuite, on procède de la même manière que précédemment pour dériver l'équivalent structurel de l'axiome de l'Ontologie pour ce nouvel epsilon et les thèses corollaires. Ce qui nous donne, comme thèse analogue à l'axiome:

$$\lfloor xy \rfloor \lceil \varepsilon[xy] \equiv. \\ \lfloor \exists z \rfloor \lceil \varepsilon[zx] \rceil \wedge \lfloor z \rfloor \lceil \varepsilon[zx] \supset \varepsilon[zy] \rceil \wedge \lfloor zw \rfloor \lceil \varepsilon[zx] \wedge \varepsilon[wx] \,.\!\supset \varepsilon[zw] \rceil \rceil$$

Dans ce cas, les variables nominales sont remplacées par des variables de catégorie *S/(S/N)* et les foncteurs formateurs de propositions à arguments nominaux par des foncteurs formateurs de propositions à arguments de la catégorie *S/(S/N)*. Et ainsi de suite. Ce résultat peut se résumer ainsi:

> Si on dispose de l'analogue de l'axiome pour un epsilon de catégorie *S/CC*, alors la définition suivante peut être utilisée pour produire un epsilon de catégorie *S/(S/C)(S/C)*, analogue à l'epsilon primitif (dans cette définition les variables *z* et *w* sont de catégorie *C* et $\approx$ est le foncteur de l'identité extensionnelle entre éléments de cette catégorie):
>
> Dfε: $\lfloor xy \rfloor \lceil x\varepsilon y \equiv. \lfloor \exists z \rfloor \lceil x\{z\} \wedge y\{z\} \rceil \wedge \lfloor zw \rfloor \lceil x\{z\} \wedge x\{w\} \,.\!\supset \approx\{zw\} \rceil$

La stratification définitoire

Sur la base de l'epsilon supérieur défini, nous nous proposons maintenant d'établir le résultat suivant:

> Pour toute thèse se présentant comme une définition de type propositionnel d'un foncteur, on peut disposer d'une thèse qui corresponde à une définition ontologique de ce foncteur.

Ce résultat peut être présenté sous la forme générale suivante:

$$\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\ \lfloor a x_1\ldots x_n\rfloor\lceil\alpha/x_1\ldots x_n\backslash\{a\} \equiv \beta\{x_1\ldots x_n\}[\approx\langle a\rangle]\rceil \supset$$
$$\lfloor\gamma x_1\ldots x_n\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha/x_1\ldots x_n\backslash \equiv.\ \gamma\varepsilon\gamma \wedge \beta\{x_1\ldots x_n\}[\gamma]\rceil\ \rceil$$

Les variables x_1 ... x_n sont de catégorie S/N; α est de catégorie $(S/N)/(S/N)\ldots(S/N)$; β est de catégorie $(S/(S/N))/(S/N)\ldots(S/N)$. La démarche qui suit constitue une démonstration de ce résultat:

T18: $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\alpha\varepsilon\beta \supset.\ \lfloor a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\supset\beta\{a\}\rceil\wedge\alpha\varepsilon\alpha\rceil$

Démonstration:

$\lfloor\alpha\beta\rfloor$

1.	$\alpha\varepsilon\beta\supset$	*hyp*
2.	$\lfloor\exists b\rfloor\ \ \alpha\{b\}$	*1, Dfε*
3.	$\beta\{b\}$	*1, Dfε*
4.	$\lfloor a\rfloor\ \ \alpha\{a\}\supset$	*hyp*
5.	$a\approx b$	*1, 2, 3, Dfε*
6.	$\beta\{a\}$	*4, 5, T1*
7	$\lfloor a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\supset\beta\{a\}\rceil$	*4-6*
8.	$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\rceil$	*1, Dfε*
9.	$\lfloor ab\rfloor\lceil\alpha\{a\}\wedge\alpha\{b\}\ .\supset a\approx b\rceil$	*1, Dfε*
10.	$\alpha\varepsilon\alpha$	*1, 8, 9, Dfε*
11.	$\lfloor a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\supset\beta\{a\}\rceil\wedge\alpha\varepsilon\alpha$	*7,10*

Thèse

T19: $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\lfloor a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\supset\beta\{a\}\rceil\wedge\alpha\varepsilon\alpha\ .\supset\alpha\varepsilon\beta\rceil$

Démonstration:

$\lfloor\alpha\beta\rfloor$

1.	$\lfloor a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\supset\beta\{a\}\rceil$	*hyp*
2.	$\alpha\varepsilon\alpha.\supset$	*hyp*
3.	$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\rceil$	*2, Dfε*
4.	$\alpha\varepsilon\beta$	*1, 2, 3, Dfε*

Thèse

T20: $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\alpha\varepsilon\beta \equiv \lfloor a\rfloor\lceil\alpha\{a\} \supset \beta\{a\}\rceil\wedge\alpha\varepsilon\alpha\rceil$ *par T18, T19*

T21: $\lfloor\alpha\beta\gamma a x_1\ldots x_n\rfloor\lceil\alpha\langle x_1\ldots x_n\rangle\{a\} \equiv \beta\{x_1\ldots x_n\}[\approx\langle a\rangle)] \wedge \gamma\varepsilon\alpha\langle x_1\ldots x_n\rangle .\supset \beta\{x_1\ldots x_n\}[\gamma]\rceil$

Démonstration:

$\lfloor\alpha\beta\gamma a\ a x_1\ldots x_n\rfloor$

1.	$\alpha\langle x_1\ldots x_n\rangle\{a\}\equiv \beta\{x_1\ldots x_n\}[\approx\langle a\rangle]$	*hyp*
2.	$\gamma\varepsilon\alpha\langle x_1\ldots x_n\rangle \supset$	*hyp*
3.	$\lfloor\exists a\rfloor\ \gamma\{a\}$	*2, Dfε*
4.	$\alpha\langle x_1\ldots x_n\rangle\{a\}$	*2, Dfε*
5.	$\lfloor b\rfloor\lceil\gamma\{b\} \supset a\approx b\rceil$	*2, 4, Dfε*
6.	$\lfloor b\rfloor\lceil a\approx b \supset \gamma\{b\}\rceil$	*3, T1*
7.	$\lfloor b\rfloor\lceil\gamma\{b\} \equiv a\approx b\rceil$	*5, 6*
8.	$\lfloor b\rfloor\lceil\gamma\{b\} \equiv \approx\langle a\rangle\{b\}\rceil$	*7, D14*
9.	$\beta\{x_1\ldots x_n\}[\gamma] \equiv \beta\{x_1\ldots x_n\}[\approx\langle a\rangle]$	*8, Extensionnalité*
10.	$\beta\{x_1\ldots x_n\}[\gamma]$	*1, 4, 9*

Thèse

T22: $\lfloor\alpha\beta\gamma a x_1\ldots x_n\rfloor\lceil\alpha\langle x_1\ldots x_n\rangle\{a\} \equiv \beta\{x_1\ldots x_n\}[\approx\langle a\rangle] \wedge \beta\{x_1\ldots x_n\}\wedge\gamma\varepsilon\gamma .\supset \gamma\varepsilon\alpha\langle x_1\ldots x_n\rangle\rceil$

Démonstration:

$\lfloor\alpha\beta\gamma a x_1\ldots x_n\rfloor$

1.	$\alpha\langle x_1\ldots x_n\rangle\{a\} \equiv \beta\{x_1\ldots x_n\}[\approx\langle a\rangle]$	*hyp*
2.	$\beta\{x_1\ldots x_n\}[\gamma]$	*hyp*
3.	$\gamma\varepsilon\gamma\ \ \supset$	*hyp*
4.	$\lfloor a\rfloor\ \ \gamma\{a\} \supset$	*hyp*
5.	$\beta\{x_1\ldots x_n\}[\gamma] \equiv \beta\{x_1\ldots x_n\}[\approx\langle a\rangle]$	*idem T21 (4-9)*
6.	$\alpha\langle x_1\ldots x_n\rangle\{a\}$	*1, 2, 5*
7.	$\lfloor a\rfloor\lceil\gamma\{a\} \supset \alpha\langle x_1\ldots x_n\rangle\{a\}\rceil$	*4-6*
8.	$\lfloor\exists b\rfloor\lceil\gamma\{b\}\rceil$	*3, Dfε*
9.	$\lfloor\exists b\rfloor\lceil\gamma\{b\}\wedge\alpha\langle x_1\ldots x_n\rangle\{b\}\rceil$	*7, 8*
10.	$\gamma\varepsilon\alpha\langle x_1\ldots x_n\rangle$	*3, 9, Dfε*

Thèse

T*23: $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\lfloor a x_1\ldots x_n\rfloor\lceil\alpha\backslash x_1\ldots x_n/\{a\} \equiv \beta\{x_1\ldots x_n\}[\approx\langle a\rangle]\rceil\supset$
$\lfloor\gamma x_1\ldots x_n\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha\backslash x_1\ldots x_n/ \equiv .\ \gamma\varepsilon\gamma\wedge\beta\{x_1\ldots x_n\}[\gamma]\rceil\rceil$ *par T21,T22*

Ce résultat nous assure donc que l'on retrouve toujours, dans une strate supérieure de l'Ontologie régie par un epsilon supérieur, l'équivalent structurel des définitions inscrites dans l'Ontologie primitive. A titre d'illustration, nous proposons un exemple relativement simple qui concerne la négation de prédicat. En premier lieu, considérons la définition de la négation nominale. Soit:

D15: $\lfloor ab\rfloor\lceil a\varepsilon{\sim}(b)\equiv .\ a\varepsilon a \wedge {\sim}(a\varepsilon b)\rceil$

La thèse que l'on veut dès lors atteindre est:

$\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\alpha\varepsilon{\sim}\backslash\beta/ \equiv .\ \alpha\varepsilon\alpha \wedge {\sim}(\alpha\varepsilon\beta)\rceil$

La négation apparaissant dans le premier membre de la biconditionnelle est une négation de prédicat, de catégorie *(S/N)/(S/N)*, tandis que celle apparaissant dans le second membre est la négation propositionnelle, de catégorie *S/S*. Posons la définition protothétique suivante:

D16: $\lfloor a\beta\rfloor\lceil{\sim}\backslash\beta/\{a\} \equiv {\sim}(\approx\langle a\rangle\varepsilon\beta)\rceil$

ainsi que la définition auxiliaire:

D17: $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil{\sim}\{\beta\}[\alpha] \equiv {\sim}(\alpha\varepsilon\beta)\rceil$

de laquelle s'ensuit, par substitution de $\approx\langle a\rangle$ à α:

T24: $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil{\sim}\{\beta\}[\approx\langle a\rangle] \equiv {\sim}(\approx\langle a\rangle\varepsilon\beta)\rceil$

On obtient donc la thèse:

T25: $\lfloor\alpha\beta a\rfloor\lceil{\sim}\backslash\beta/\{a\} \equiv {\sim}\{\beta\}[\approx\langle a\rangle]\rceil$

De là, avec ${\sim}\backslash\beta/\{a\}$ pour $\alpha\backslash x_1\ldots x_n/\{a\}$ et ${\sim}\{\beta\}[\approx\langle a\rangle]$ pour $\beta\{x_1\ldots x_n\}[\approx\langle a\rangle]$ dans T*23, on obtient la thèse:

T26: $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\alpha\varepsilon{\sim}\backslash\beta/ \equiv \alpha\varepsilon\alpha \wedge {\sim}(\alpha\varepsilon\beta)\rceil$

Ainsi, les thèses-définitions peuvent être étendues d'un niveau à l'autre, pas à pas, conformément aux directives inférentielles initiales, simplement en définissant de nouvelles constantes homonymes, équiformes et similaires dans l'usage aux anciennes, mais de catégorie sémantique et signification propre différentes. Quant à l'axiome de l'Ontologie, il peut être élevé sans ambiguïté, simplement en définissant tout d'abord des epsilons supérieurs homonymes, analogues au foncteur primitif de la prédication singulière, aussi paraphrasables par «est», et permettant ensuite de dériver les thèses corollaires à l'axiome. Les constantes basiques, les thèses et déductions du système «suggèrent» donc des hiérarchies infinies d'analogues, exactement de la même forme excepté en ce qui concerne les formes des parenthèses, celles-ci se présentant comme des indices contextuels de catégorie. Mais, à la différence des *Principia Mathematica*, la «suggestion» n'est pas redevable de la transparence analogique qui résulte du caractère de généralité du langage logique. L'analogie est effective, en ce sens qu'elle est portée et gérée par les propres modes de formalisation du langage.

Nous le disions dans l'introduction, l'Ontologie nous libère de l'impossibilité de nommer les fonctions et d'en faire des sujets logiques d'assertion, impossiblité découlant de la doctrine des symboles fonctionnels comme symboles incomplets. La théorie permet aux fonctions d'être nommées de la même manière que n'importe quelle entité, sans qu'il y ait réification, ni qu'elles soient renvoyées à un statut de fictions logiques. Chaque strate du langage gérée par un epsilon supérieur mimant, pour ainsi dire, la strate nominale gérée par l'espilon primitif, le processus de nominalisation des entités supérieures est ainsi «validé» par leur représentation pseudo-nominale. On peut dès lors s'autoriser à projeter, au niveau du parler, toute strate supérieure sur la strate nominale.

3. En guise de conclusion

Ayant montré que le formalisme permet de déployer et développer toutes les thèses enveloppées dans l'Ontologie primitive dans toute strate supérieure, il convient de conclure en revenant à notre projet logiciste. La réflexion que nous avons conduite peut être menée, de manière strictement similaire, dans le cadre de la construction catégorielle de l'arithmétique. Simplement, l'epsilon supérieur défini fera intervenir dans sa définition non pas l'identité extensionnelle, mais l'équinuméricité. Quant aux nombres, ils pourront être traités comme des objets, sans qu'il y ait réification nécessaire. Chaque niveau supérieur conserve les axiomes de Peano tandis que l'axiome de l'infini est dérivable dans le système pour n'importe quelle catégorie supérieure. En conclusion, s'il est possible, comme dans la théorie des types, de construire une hiérarchie infinie d'arithmétiques, c'est en contrôlant toujours, formellement, le niveau où on se trouve, tandis que ce dernier peut être projeté sur le parler de la strate nominale, géré par l'epsilon primitif. Loin de toute prolifération ontologique d'entités, entre le platonisme généreux de Frege et le nominalisme instrumental des *Principia Mathematica*, la pensée logiciste peut alors trouver le repos.

Logicisme et définition explicite

Pierre Joray

Préambule

Présentant l'arithmétique comme une expansion définitoire d'un langage logique, le logicisme classique des *Principia Mathematica* fait curieusement peu de cas des définitions. Dès 1903, Russell écrivait:

> It is a curious paradox, puzzling to the symbolic mind, that definitions, theoretically, are nothing but statements of symbolic abbreviations, irrelevant to the reasoning and inserted only for practical convenience, while yet, in the development of a subject, they always require a very large amount of thought, and often embody some of the greatest achievements of analysis. (Russell 1903: 63).

Si elle ne reprend pas le mot de «paradoxe», l'introduction des *Principia* n'en avertit pas moins le lecteur quant au statut spécial des définitions:

> Theoretically, it is unnecessery ever to give a definition: we might always use the *definiens* instead, and thus wholly dispense with the *definiendum*. Thus although we employ definitions and do not define "definition", yet "definition" does not appear among our primitive ideas, because the definitions are no part of our subject, but are, stricly speaking, mere typographical conveniences. (Whitehead & Russell 1927: 11).

Plus sensibles au rôle et à la nature des définitions intervenant dans leurs constructions, les courants logicistes contemporains accordent généralement plus de place à une réflexion développée sur celles-ci. Pourtant si l'attrait pour des modes définitoires autres que la classique définition abréviative des *Principia* s'est trouvé au centre des réflexions – définitions implicites, inductives, par abstraction, par règles de Gentzen, ... – on ne trouve que peu de réflexions sur les possibilités effectivement offertes par les définitions explicites.

En dépit de l'existence d'une forte tradition issue de l'Ecole de Varsovie, consacrée aux définitions explicites, il est encore aujourd'hui très largement considéré que celles-ci se réduisent au mode abréviatif et conventionnel qui fut défendu par les auteurs des *Principia*. Souvent négligées, voire inconnues, d'autres formes explicites de la définition existent pourtant, dont la force d'accroissement expressif dépasse largement celle de la conception stérilisante de Whitehead et Russell.

Le but que nous poursuivons dans ces pages est de présenter l'une de ces formes renforcées de la définition explicite, celle qui fut développée dans les années mil neuf cent vingt par S. Leśniewski et A. Tarski. Et si, comme dans le cas des définitions implicites, nous verrons qu'elle permet un enrichissement effectif du formalisme où elle se trouve utilisée, nous justifierons son intérêt, en regard des définitions implicites, par l'avantage considérable qui est le sien: celui de garantir la consistance des expansions définitoires. Enfin, l'article se terminera par une réflexion sur le rôle d'un tel outil dans notre projet de logicisme catégoriel et sur la signification ainsi confèrée à la construction obtenue de l'arithmétique de Peano[1].

1. La définition dans les systèmes formels

Dans le cadre d'un système formel, on peut distinguer deux manières d'introduire un terme constant qui confèrent à celui-ci une position déterminée au sein de l'appareil déductif. La première est d'un usage incontournable puisque c'est par elle que sont inscrits les termes dits primitifs. Il s'agit de la caractérisation axiomatique. Le second mode d'introduction passe par l'ajout d'une définition. Cependant, une telle distinction est à bien des égards artificielle. D'un côté en effet il n'est

[1] Construction dont le lecteur trouvera le détail en fin du présent volume.

pas dénué de sens de considérer que la caractérisation axiomatique des termes primitifs constitue une *définition* de ceux-ci (qualifiée traditionnellement de *définition par postulats*). D'autre part, il est de nombreuses définitions dont on peut se demander si elles ne constituent pas, selon le mot de Łukasiewicz (1928b), des «axiomes masqués».

Dans ce domaine, comme dans bien d'autres, il convient de faire le départ entre les aspects objectifs du problème et ce qui, dans notre regard, revient à l'influence de la tradition et au poids de l'habitude. Il est ainsi usuel de ne parler de définition au sujet d'une expression que lorsque celle-ci introduit un terme unique et que ce terme apparaît comme nouveau ou supplémentaire par rapport à un langage donné ne contenant que des termes primitifs ou des termes préalablement définis. L'idée est alors que l'expression en question doit être à même de caractériser de façon univoque la signification du terme nouveau et ceci sur la base des possibilités expressives du langage où la définition se trouve inscrite.

Il apparaît alors que deux sortes de définitions sont susceptibles d'être acceptées comme telles. Il y a tout d'abord la définition *explicite*, celle que l'on qualifie volontiers de définition au sens propre du terme. C'est celle que l'on reconnaît comme posant qu'un certain *definiendum*, contenant le terme nouveau, signifie la même chose qu'une expression bien formée ne contenant que les anciens termes, le *definiens*. On dit aussi souvent qu'il s'agit des définitions par lesquelles le terme nouveau se trouve caractérisé sans qu'on ait besoin pour cela d'utiliser ce terme. Enfin, il y a aussi les définitions *implicites* et s'il n'est pas généralement possible d'y distinguer un *definiendum* et un *definiens*, cela est dû au fait qu'elles font usage du terme à définir pour le caractériser. Le qualificatif d'implicite revêt sans conteste une certaine connotation péjorative et il n'est pas inutile de rappeler qu'une immense majorité de logiciens adhèrent au principe méthodologique suivant:

> **Principe d'explicitation:** chaque fois que l'introduction d'un terme peut se faire par la voie d'une définition *explicite*, il convient de renoncer à la voie de la définition *implicite*.

Nous adoptons pleinement cette position, mais il nous faut aussi relever que, dans le cadre des langages formalisés, chacun des types de définition possède des avantages et des inconvénients propres. La définition implicite est réputée pouvoir donner lieu à des conséquences cachées, voire contradictoires, et sa véritable position au sein d'une construction formelle est considérée, à juste titre, comme celle d'un axiome additionnel. Ainsi l'ajout d'une définition implicite doit-il s'accompagner de toutes les précautions valant pour l'ajout d'axiomes. Malgré ces aspects «négatifs», la définition implicite est pourtant vue positivement comme un moyen puissant d'expansion des systèmes. A l'inverse, la définition explicite est jugée comme un moyen sûr et transparent d'introduction de termes nouveaux – on sait par exemple que, moyennant quelques précautions, elle ne peut avoir aucune conséquence contradictoire – néanmoins elle est souvent dépréciée comme un outil faible, purement conventionnel et dénué d'intérêt théorique propre.

Cette vue courante, comme nous allons le voir, est partiellement erronée et cela tient à la pauvreté de la conception standard de la définition explicite. Mais avant d'entrer dans la justification de cette affirmation, précisons ce que nous entendons par définition explicite.

> **Définition explicite.** Une définition est dite *explicite* losqu'elle pose dans une relation d'équivalence deux expressions distinctes (le *definiendum* et le *definiens*) et répond aux conditions suivantes:
>
> 1. Le *definiendum* contient une expression de la forme $\alpha(v_1, \ldots, v_n)$, où α est l'unique symbole à être défini et $v_1, \ldots, v_n$ sont des variables indiquant ses places d'arguments (s'il y en a).
>
> 2. Ni α, ni les variables $v_1, \ldots, v_n$ n'apparaissent dans le *definiendum* à plus d'une seule occurrence.
>
> 3. Le *definiens* est une expression bien formée du langage dans lequel la définition est posée; il contient uniquement des symboles préalablement introduits (en particulier, il ne contient pas α).
>
> 4. Toute variable (libre) apparaissant dans le *definiens* apparaît aussi dans le *definiendum*.

1.1 L'exemple de la négation

A titre d'exemple, considérons le système suivant, qui constitue une axiomatisation de la logique propositionnelle classique:

Système *L*

Alphabet:	$\{\supset, \sim, (,), p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$	
Formules:	(a)	Tout p_i est une formule.
	(b)	Si α et β sont des formules, $\sim\alpha$ et $(\alpha \supset \beta)$ aussi.
	Rien n'est formule sinon par les clauses précédentes.	
Axiomes:	(A1)	$p_1 \supset (p_2 \supset p_1)$
	(A2)	$(p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_1 \supset p_3))$
	(A3)	$(\sim p_1 \supset \sim p_2) \supset ((\sim p_1 \supset p_2) \supset p_1))$
Règles:	*Det* (détachement), *Sub* (substitution)	

Un tel système étant fondé et complet (en ce sens que l'ensemble des théorèmes coïncide avec celui des tautologies contenant $\supset$ et $\sim$), la théorie des ensembles adéquats de connecteurs, nous garantit que tout connecteur vérifonctionnel (unaire ou binaire) peut y être introduit par le biais d'une définition explicite abréviative. Par exemple, on pourra introduire conjonction et disjonction en posant:

$$P \wedge Q =_{\text{df}} \sim (P \supset \sim Q)$$

$$P \vee Q =_{\text{df}} \sim P \supset Q$$

Cela dit, relevons que la base axiomatique présente la particularité que la négation n'y apparaît que dans l'axiome A3. Celle-ci en effet est absente des deux premiers axiomes ainsi que des règles. Ce constat nous amène à remarquer qu'il est possible de considérer le système sous deux points de vue. D'un côté, on peut le considérer tel qu'il est présenté ci-dessus; on dira alors qu'il contient deux termes primitifs: la conditionnelle et la négation. D'un autre côté, cependant, il est aussi possible de considérer que l'on a affaire à une base plus faible qui ne contient que la conditionnelle comme connecteur primitif:

Système L^{abs}

Axiomes: (A1) $p_1 \supset (p_2 \supset p_1)$

(A2) $(p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_1 \supset p_3))$

Règles: *Det* (détachement), *Sub* (substitution)

Ce qui était l'axiome A3 dans L devient alors une *définition implicite* de la négation dans L^{abs}:

(Déf$_{\sim}$) $(\sim p_1 \supset \sim p_2) \supset ((\sim p_1 \supset p_2) \supset p_1))$

La situation est cependant trompeuse. Affirmer que A3 peut jouer le rôle d'une définition implicite de la négation dans le système L^{abs}, c'est considérer que l'expression en question constitue une caractérisation de la négation basée sur la conditionnelle. Or tel n'est pas le cas, car sans la dite définition le système L^{abs} ne constitue pas une axiomatique complète de la logique classique de la conditionnelle. Il est connu que certaines tautologies conditionnelles ne sont pas théorèmes dans L^{abs}. Parmi celles-ci figurent en particulier les suivantes, la première étant la fameuse «loi de Peirce»:

(T1) $((p_1 \supset p_2) \supset p_1) \supset p_1$

(T2) $((p_1 \supset p_2) \supset p_2) \supset ((p_2 \supset p_1) \supset p_1)$

Ceci montre que, dans L, l'axiome A3 n'a pas pour *seul* rôle d'introduire la négation. Il constitue également une pièce maîtresse dans la caractérisation de la conditionnelle.

Le projet de faire de A3 une définition implicite de la négation n'est peut-être pas pour autant tout à fait inadéquat. Pour sauver l'idée, il convient seulement de remarquer que si l'on s'appuie non pas sur le système incomplet L^{abs}, mais sur un système complet de la conditionnelle, alors il devient possible de définir implicitement la négation. En ajoutant à L^{abs} la «loi de Peirce» à titre d'axiome, il est connu qu'on dispose d'un système conditionnel complet:

Système $L^{pos} = L^{abs}$ + T1

Axiomes: (A1) $p_1 \supset (p_2 \supset p_1)$

(A2) $(p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_1 \supset p_3))$

(T1) $((p_1 \supset p_2) \supset p_1) \supset p_1$

Règles: *Det* (détachement), *Sub* (substitution)

Dans L^{pos} il est désormais possible de poser l'ancien axiome A3 comme une définition implicite de la négation, dont on peut affirmer qu'elle caractérise la négation sur la base de la conditionnelle[2].

1.2 L'explicitation de Lejewski

A ce stade de la réflexion, il convient de savoir qu'au lieu de s'appuyer sur A3 comme définition *implicite* de la négation, il est également possible, dans le système complet L^{pos} d'en donner une définition *explicite*, que le principe d'explicitation nous engage à préférer.

Le fait est peu connu et fut démontré par C. Lejewski (1958). La solution s'appuie sur une forme non élémentaire de définition explicite; une forme qui répond cependant point par point aux conditions spécifiques de la définition explicite. La définition de Lejewski peut être posée de différentes manières[3]. A fin de simplicité, celle que nous proposons ici s'inscrit par le biais d'un ajout au système des deux conditionnelles (tautologiques) suivantes:

(D1a) $(\sim p_1 \supset p_2) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset p_2)$

(D1b) $((p_1 \supset p_2) \supset p_2)) \supset (\sim p_1 \supset p_2)$

Remarquons qu'ajouter D1a et D1b à titre de thèses dans un système complet de la conditionnelle, comme L^{pos}, revient à poser les expressions suivantes dans une relation d'équivalence déductive:

(*definiendum*) $\sim p_1 \supset p_2$

(*definiens*) $(p_1 \supset p_2) \supset p_2$

[2] Plutôt que A3, il est d'ailleurs possible de poser à titre de définition implicite de la négation l'expression plus faible: $(p_1 \supset \sim p_2) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset \sim p_1))$.

[3] Pour les autres formes, cf. *infra*, section 2.

La déduction suivante montre qu'on dispose bien avec D1a et D1b d'une caractérisation adéquate de la négation classique:

1.	$\sim p_1 \supset \sim p_2$	*Prémisse*
2.	$\sim p_1 \supset p_2$	*Prémisse*
3.	$(\sim p_1 \supset p_2) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset p_2)$	D1a
4.	$(p_1 \supset p_2) \supset p_2$	2, 3, *Det*
5.	$(p_2 \supset p_1) \supset p_1$	T2, 4, *Det*
6.	$(\sim p_1 \supset \sim p_2) \supset ((p_1 \supset \sim p_2) \supset \sim p_2)$	D1a, *Sub*
7.	$(p_1 \supset \sim p_2) \supset \sim p_2$	2, 6, *Det*
8.	$(\sim p_2 \supset p_1) \supset p_1$	T2 (*Sub*), 7, *Det*
9.	$((p_2 \supset p_1) \supset p_1) \supset (\sim p_2 \supset p_1)$	D1b, *Sub*
10.	$\sim p_2 \supset p_1$	5, 9, *Det*
11.	p_1	8, 10, *Det*

On obtient alors en effet l'ancien axiome A3, en appliquant deux fois le métathéorème de la déduction (disponible dans L^{pos}):

$$\sim p_1 \supset \sim p_2 \,,\, \sim p_1 \supset p_2 \vdash p_1$$

$$\sim p_1 \supset \sim p_2 \vdash (\sim p_1 \supset p_2) \supset p_1$$

$$\vdash (\sim p_1 \supset \sim p_2) \supset ((\sim p_1 \supset p_2) \supset p_1)$$

1.3 Un bilan

Méconnu, le résultat de Lejewski est pourtant instructif à plus d'un titre. Tout d'abord, et nous avons insisté sur ce point dans Joray (2005a), la notion standard d'*ensemble adéquat de connecteurs* s'avère largement dépendante de la conception usuelle de la définition. En s'autorisant à exprimer l'équivalence que doivent poser les définitions explicites par le biais des formules du système – ici en usant d'une double conditionnelle – Lejewski montre qu'il y a un sens en lequel l'ensemble $\{\supset\}$ est *adéquat*[4].

[4] Rappelons que dans la conception standard $\{|\}$ (barre de Sheffer) et $\{\downarrow\}$ (son dual) sont les seuls ensembles à connecteur unique qui soient adéquats.

Enfin, le résultat de Lejewski montre qu'en s'émancipant du cadre étroit fixé par Whitehead et Russell, il est possible de faire reculer significativement les limitations expressives usuelles de la définition explicite. L'exemple frappant de la négation, nous indique que, là où seule une définition implicite se trouvait envisagée pour l'introduction d'un terme, la voie d'une définition explicite reste parfois ouverte. L'étude de ces possibilités nécessite cependant de s'ouvrir à des modes non standard de définition explicite, tels celui de Lejewski et celui, plus élémentaire, que nous allons maintenant présenter.

2. La définition explicite comme thèse

Insatisfait de la faiblesse et du caractère non réglé des définitions qu'il rencontre dans les *Principia Mathematica*, Leśniewski envisage d'énoncer les définitions explicites en se passant du relateur non déclaré et métalinguistique «$=_{df}$». Avec l'aide de celui qui est alors son élève, A. Tarski, il développe une conception de la définition dans laquelle la relation d'équivalence posée entre le *definiendum* et le *definiens* se trouve exprimée à l'aide des seuls outils disponibles dans la base axiomatique utilisée: les termes primitifs. L'idée est simple: dès lors qu'une base axiomatique est suffisament forte pour exprimer le «si et seulement si» des définitions informelles, il devient possible de stipuler une équivalence entre un *definiendum* (D_{um}) et un *definiens* (D_{iens}) par le biais d'une (ou plusieurs) thèse(s) ajoutée(s).

En fonction du choix de tel ou tel ensemble de primitifs, diverses solutions peuvent être envisagées. L'idée d'utiliser à cette fin la biconditionnelle $\equiv$ est certainement la plus naturelle; les thèses définitoires à ajouter se coulent alors dans le shéma suivant:

$$\vdash \; D_{um} \equiv D_{iens}$$

Cependant, d'autres choix sont également possibles, s'appuyant par exemple sur la conditionnelle et la négation, la conditionnelle seule ou encore la barre de Sheffer. Les thèses définitoires prennent alors l'une des formes suivantes:

$\vdash\ \sim((D_{um} \supset D_{iens}) \supset \sim(D_{iens} \supset D_{um}))$ (avec $\sim$ et $\supset$ primitifs)

$\vdash\ D_{um} \supset D_{iens}$ et $\vdash\ D_{iens} \supset D_{um}$ (avec $\supset$ primitif)

$\vdash\ ((D_{um} \supset D_{iens}) \supset ((D_{iens} \supset D_{um}) \supset p_i) \supset p_i$ (avec $\supset$ primitif)[5]

$\vdash\ (D_{um} \mid D_{iens}) \mid ((D_{um} \mid D_{um}) \mid (D_{iens} \mid D_{iens}))$ (avec $\mid$ primitif)

Notons que la troisième de ces formes est particulièrement intéressante puisqu'elle montre qu'il est possible de poser les définitions par le biais de thèses *uniques*, en s'appuyant exclusivement sur la conditionnelle. La seconde forme, qui procède par l'ajout de *couples* de thèses, est cependant plus aisée en pratique, même si elle enveloppe une conjonction implicite.

2.1 La créativité des définitions

L'une des particularités essentielles de la définition comme thèse est qu'elle se présente comme une procédure *interne* au système formel. Non seulement, il est désormais possible de poser les définitions en se passant du symbole métalinguistique *ad hoc* «$=_{df}$», mais, ce qui est plus remarquable, la façon d'inscrire les expressions à titre de thèses définitoires peut être entièrement réglée par une directive énoncée dans la base axiomatique. Ce faisant, les symboles définis ne constituent plus, comme dans les *Principia*, de simples convenances typographiques métalinguistiques, mais viennent enrichir officiellement le langage objet. Il y a dans l'usage des définitions comme thèses une dimension dynamique, puisqu'à l'inscription de toute nouvelle définition, l'ensemble des formules ainsi que celui des théorèmes se trouve élargi[6].

Cette caractéristique présente d'emblée un double avantage. Tout d'abord elle permet d'atteindre une formalisation plus complète de la démarche scientifique dans la mesure où la définition y joue souvent un rôle essentiel. D'autre part, elle répond à la conception intuitive que les définitions, dans le cadre scientifique, servent non seulement à

[5] Où p_i est une variable propositionnelle qui n'apparaît ni dans D_{um} ni dans D_{iens}.

[6] Cf. ci-après, section 2.4, notre exemple de système L^{def}.

abréger le discours, mais aussi à enrichir les possibilités expresssives du système linguistique utilisé.

Pourtant de nombreux logiciens ont préféré en rester, dans ce domaine, à la conception purement abréviative et externe de la définition. Outre la force de l'habitude, il y a plusieurs raisons qui permettent à notre sens d'expliquer un tel conservatisme. Tout d'abord, le fait que les définitions internes sont incompatibles avec la notion standard de système formel. Posé une fois pour toutes comme une entité close, entièrement déterminée par sa grammaire et sa base axiomatique, un système formel au sens usuel ne peut contenir de règle permettant un accroissement pas à pas des formules de son langage. L'adoption d'une conception interne de la définition nécessite en effet une refonte profonde – jugée parfois trop lourde – des notions de langage et de sytème formels[7]. Enfin, l'attachement à une conception statique des systèmes formels se double d'une méfiance traditionnelle vis-à-vis des possiblités déductives nouvelles que pourraient induire les définitions. La conception abréviative des définitions reste immanquablement liée à l'idée que les définitions ne doivent servir qu'à souligner ou rendre explicite ce que le système formel contient déjà et qu'elles ne doivent en aucune manière modifier sa force, c'est-à-dire ouvrir des voies déductives jusque là impraticables.

Une définition permettant des développements de ce genre dans le contexte formel de son inscription est dite *créative* et cette propriété peut être précisée de la manière suivante:

> Une définition D introduisant un symbole d dans un système S est dite **créative dans S** si et seulement s'il y a au moins une formule α de S ne contenant pas d, telle que α n'est prouvable dans S qu'avec l'aide de D (ou d'une autre définition).

L'introduction d'une définition dans un système est ainsi *créative* lorsqu'une formule indémontrable de l'«ancien» langage devient démontrable une fois la définition inscrite.

[7] On se référera sur ce point à la présentation très claire qu'en donne Miéville (2001-04), ainsi qu'à l'exemple de système avec règle de définition L^{def} que nous donnons ci-après, section 2.4.

2.2 Un exemple informel de créativité

Les auteurs des *Principia* l'affirment sans ambage, les définitions abréviatives externes ne modifient en rien le système où elles sont inscrites, elles n'ont donc, à strictement parler, aucune importance théorique. Sur la base d'une définition, il est en effet toujours possible de remplacer toute expression contenant le terme défini – expression forcément inofficielle – par une expression équivalente et officielle ne le contenant pas. On dit dans ce cas que les définitions garantissent l'*éliminabilité* des termes définis et l'idée est alors que s'appuyer dans la pratique sur un langage incluant ces termes à titre d'abréviations ne présente aucune espèce de problème: à celui qui contestera tel ou tel usage abréviatif, pense-t-on, on pourra toujours exhiber la formule officielle déployée ne contenant plus que des termes primitifs.

Ce dont Whitehead et Russell – et à leur suite nombre de logiciens – ne se sont pas aperçus, c'est que l'éliminabilité des termes définis n'est pas une condition suffisante pour garantir un usage «inoffensif» et sans conséquence des abréviations: même éliminable de toutes expressions un terme défini peut en effet avoir un effet *créatif* sur la conduite des preuves. Certes, comme nous l'avons montré dans Joray (2005c) aucun effet de ce genre ne peut avoir lieu dans les systèmes de logique propositionnelle usuels, mais le phénomène peut apparaître dès qu'un système formel possède une certaine complexité.

Pour le montrer, considérons le système propositionnel L^* ci-dessous. Il s'agit d'une expansion du système classique L (présenté plus haut dans notre section 1.1), obtenu, sans axiome supplémentaire, par l'ajout de variables de connecteurs binaires f_i ainsi que du quantificateur universel $\forall$ (qui sera utilisé uniquement pour lier les variables f_i). Plus précisément nous avons:

Système $L^* = L + \ldots$

Symboles ajoutés: $\{\forall, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$

Clauses additionnelles pour les formules:

(c) Si α et β sont des formules, $(\alpha f_i \beta)$ aussi.

(d) Si α est une formule, $(\forall f_i)\alpha$ aussi.

Règles additionnelles:

$\forall$i Si une formule de la forme $\alpha \supset \beta$ est une thèse, alors $\alpha \supset (\forall f_i)\beta$ est également une thèse, pour autant qu'il n'y ait aucune occurrence libre de f_i dans α.

$\forall$e Si une formule de la forme $\alpha \supset (\forall f_i)\beta$ est une thèse, alors $\alpha \supset \beta(f_i / \tau)$ est également une thèse, où τ est soit une constante de connecteur binaire soit une variable f_j libre pour f_i dans β et où $\beta(f_i / \tau)$ est le résultat de la substitution dans β de toutes les occurrences libres de f_i par τ.

Par construction, toute thèse de L demeure une thèse dans le système étendu L^*, par exemple les trois tautologies suivantes:

(T3) $p_1 \supset p_1$

(T4) $(p_1 \supset p_2) \supset ((p_1 \supset {\sim}p_2) \supset {\sim}p_1))$

(T5) ${\sim}{\sim}(p_1 \supset p_1)$

Les thèses spécifiques de L^* ne sont, par contre, pas même des formules de L. En voici un exemple, accompagné de sa preuve:

(T6) ${\sim}(\forall f_1){\sim}(p_1 f_1 p_1)$

1. $(\forall f_1){\sim}(p_1 f_1 p_1) \supset (\forall f_1){\sim}(p_1 f_1 p_1)$ [T3, *Sub*]
2. $(\forall f_1){\sim}(p_1 f_1 p_1) \supset {\sim}(p_1 \supset p_1)$ [1, $\forall$e, $f_1 / \supset$]
3. $(p_1 \supset p_1) \supset ((\forall f_1){\sim}(p_1 f_1 p_1) \supset (p_1 \supset p_1))$ [A1, *Sub*]
4. $(\forall f_1){\sim}(p_1 f_1 p_1) \supset (p_1 \supset p_1)$ [T3, 3, *Det*]
5. $((\forall f_1){\sim}(p_1 f_1 p_1) \supset (p_1 \supset p_1)) \supset (((\forall f_1){\sim}(p_1 f_1 p_1) \supset {\sim}(p_1 \supset p_1)) \supset {\sim}(\forall f_1){\sim}(p_1 f_1 p_1))$ [T4, *Sub*]
6. $((\forall f_1){\sim}(p_1 f_1 p_1) \supset {\sim}(p_1 \supset p_1)) \supset {\sim}(\forall f_1){\sim}(p_1 f_1 p_1)$ [4, 5, *Det*]
7. ${\sim}(\forall f_1){\sim}(p_1 f_1 p_1)$ [2, 6, *Det*]

Posons maintenant, à la manière des *Principia*, la définition abréviative suivante d'un nouveau connecteur binaire #:

$$(Def_{\#})\ \ P \# Q \ =_{df} \sim (P \supset Q)$$

En s'appuyant sur cette abréviation, on peut alors proposer la dérivation qui suit de la formule T7:

$$(\text{T7}) \quad \sim (\forall f_l)\,(p_l\, f_l\, p_l)$$

1.	$\sim (p_l \# p_l)$	[T5, *Def*$_{\#}$]
2.	$(\forall f_l)\,(p_l\, f_l\, p_l) \supset (\forall f_l)\,(p_l\, f_l\, p_l)$	[T3, *Sub*]
3.	$(\forall f_l)\,(p_l\, f_l\, p_l) \supset (p_l \# p_l)$	[2, $\forall$e, f_l / #]
4.	$\sim (p_l \# p_l) \supset ((\forall f_l)\,(p_l\, f_l\, p_l) \supset \sim (p_l \# p_l))$	[A1, *Sub*]
5.	$(\forall f_l)\,(p_l\, f_l\, p_l) \supset \sim (p_l \# p_l)$	[1, 4, *Det*]
6.	$((\forall f_l)\,(p_l\, f_l\, p_l) \supset (p_l \# p_l)) \supset (((\forall f_l)\,(p_l\, f_l\, p_l) \supset \sim (p_l \# p_l)) \supset \sim (\forall f_l)\,(p_l\, f_l\, p_l))$	[T4, *Sub*]
7.	$((\forall f_l)\,(p_l\, f_l\, p_l) \supset \sim (p_l \# p_l)) \supset \sim (\forall f_l)\,(p_l\, f_l\, p_l)$	[3, 6, *Det*]
8.	$\sim (\forall f_l)\,(p_l\, f_l\, p_l)$	[5, 7, *Det*]

Cette dérivation semble parfaitement acceptable mais, contrairement à la dérivation précédente de T6, il ne s'agit pas d'une *preuve formelle* de T7, car les expressions contenant # ne sont pas des formules de L^*, mais seulement des abréviations de formules officielles plus longues. En de telles circonstances, on ajoute généralement qu'il suffit à chaque ligne concernée de remplacer l'expression incriminée par la formule officielle qu'elle abrège. Ceci se fait ici sans difficulté, pourtant la suite de formules ainsi obtenue ne constitue toujours pas une preuve. En effet, après l'élimination du terme défini #, la ligne 3 ne peut plus être justifiée comme le résultat de l'application de la règle $\forall$e à partir de la ligne 2:

2.	$(\forall f_l)\,(p_l\, f_l\, p_l) \supset (\forall f_l)\,(p_l\, f_l\, p_l)$	[T3, *Sub*]	
3.	$(\forall f_l)\,(p_l\, f_l\, p_l) \supset \sim(p_l \supset p_l)$	[2, $\forall$e, f_l / ?]	impossible!

Dans Joray (2005f), nous avons montré, par projection de L^* sur L, qu'il n'existe en fait aucune preuve de T7 dans L^*.

Cet exemple montre que, même dans un système relativement simple comme L^*, un usage informel et non réglé de définitions abréviatives externes peut conduire à un renforcement des possibilités déductives du système – i.e. à un effet *créatif* de la définition puisque T7 ne contient pas # – et ceci bien que les termes définis soient parfaitement éliminables. On ne peut donc continuer à soutenir, avec les auteurs des *Principia*, que les définitions sont de pures commodités linguistiques.

De fait, deux réactions sont ici possibles. La première est une attitude de prudence: elle consiste à se restreindre systématiquement, dans la construction des preuves, à l'usage des termes primitifs. On peut cependant envisager la difficulté que représenterait la vérification que toutes les dérivations sont effectivement des preuves formelles dans une construction comme celle des *Principia Mathematica* ou par exemple dans une version formalisée de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel. Dans les deux cas (et dans bien d'autres que le lecteur n'aura pas de peine à trouver), le remplacement systématique des expressions abréviatives par des formules officielles ne contenant que des termes primitifs s'avèrerait très fastidieux puisqu'une majorité des preuves – et même certains axiomes – y sont exprimés à l'aide de termes définis.

Reste la seconde des réactions possibles. Plus audacieuse que la première elle consiste à «officialiser» le pouvoir créatif des définitions explicites en intégrant la procédure définitoire aux côtés des règles d'inférence usuelles de la base axiomatique. La chose ne va pas sans difficultés, mais elle fut examinée d'une manière méticuleuse par Leśniewski (1931). Il en résultat une conception non classique – dite *ouverte* ou *développementale* – des systèmes formels, dans laquelle un usage des définitions explicites, non contradictoire et entièrement réglé par la base axiomatique, permet un enrichissement pas à pas du langage formel et de certaines de ses possibilités déductives. C'est sur un système formel de ce genre que nous nous sommes appuyés pour notre construction logiciste et nous en donnons ci-après (section 2.4) un exemple propositionnel élémentaire. Mais avant d'y venir, il nous reste à examiner un fameux exemple de définition créative donné par

Łukasiewicz. Bien que fautif, comme nous allons le montrer, cet exemple reste important par l'influence qu'il exerça sur la méfiance qu'adoptèrent de nombreux logiciens à l'égard des définitions comme thèses.

2.3 Une erreur de Łukasiewicz

Comme on peut le constater dans (1928a) et (1928b), Łukasiewicz fut dès le début hostile à la conception des définitions que développèrent ses collègues Leśniewski et Tarski dans les années mil neuf cent vingt[8]. S'appuyant sur l'idée que tout mode définitoire donnant lieu à des possibilités créatives menait à l'adjonction d'«axiomes masqués», Łukasiewicz pensa être en mesure de donner un coup fatal à la conception leśniewskienne avec l'exemple de définition comme thèse qu'il publia dans son article sur la calcul équivalentiel (Łukasiewicz 1939). Dans cet article, une section se trouve en effet consacrée à la définition comme thèse, posée selon la méthode de Leśniewski, c'est-à-dire par l'ajout d'une thèse de la forme[9]:

$$\vdash \mathrm{E}D_{um}D_{iens}$$

Le contexte de l'exemple est le système biconditionnel assez étrange qui suit, basé sur une tautologie comme unique axiome et les trois règles: *détachement* (de la biconditionnelle E), *substitution* et une *procédure de définition*:

Système $\boldsymbol{Łuk^{Def}}$

Axiome: $\mathrm{EE}s\mathrm{E}pp\mathrm{EE}s\mathrm{E}pp\mathrm{EE}pq\mathrm{EE}rq\mathrm{E}pr$

Règles: *Det, Sub, Def*

Łukasiewicz montra alors que, si on s'interdit l'usage de la règle de définition *Def*, les seules thèses que l'on parvient à prouver sont des instances de substitution de l'axiome. En effet, la forme particulière

[8] Sur la polémique qui marqua les réflexions sur la définition dans l'Ecole de Varsovie, on se reportera à notre article Joray (2005d), qui contient une traduction française des comptes rendus de conférence de Łukasiewicz (1928a) et (1928b).

[9] Nous reprennons ici l'écriture préfixée de Łukasiewicz, où la lettre E désigne la biconditionnelle.

de celui-ci exclut de fait toute application de la règle *Det*. Puisque de nombreuses tautologies biconditionnelles ne sont pas des instances de substitution de l'axiome en question, il est clair que $Łuk^{def}$ amputé de *Def* serait un système *incomplet* du calcul biconditionnel classique. En particulier, il est aisé de constater que les deux tautologies suivantes n'y seraient pas prouvables:

(*) E*pp*

(**) EE*pq*EE*rq*E*pr*

Notons que Łukasiewicz a montré au préalable que la tautologie (**) est suffisante, à titre d'axiome unique, et associée à *Det* et *Sub*, pour obtenir un calcul biconditionnel complet.

S'autorisant désormais à faire usage de *Def* dans $Łuk^{def}$, Łukasiewicz propose alors d'introduire la constante unaire V (le *verum*) par l'inscription de la thèse définitoire suivante:

(D) EV*p*E*pp*

Il montre alors, par la preuve qui suit, que (**) qui n'était pas prouvable sans *Def*, le devient à la suite de la définition D:

1.	EEV*p*E*pp*EEV*p*E*pp*EE*pq*EE*rq*E*pr*	[Ax. *Sub* (*s* / V*p*)]
2.	EEV*p*E*pp*EE*pq*EE*rq*E*pr*	[D, 1, *Det*]
3.	EE*pq*EE*rq*E*pr*	[D, 2, *Det*]

D'incomplet qu'il était sans usage de *Def*, le système $Łuk^{def}$ devient donc complet par le pouvoir créatif de la définition D. Dans cette situation, soutient Łukasiewicz, la définition D constitue un axiome caché puisqu'elle vient modifier profondément les propriétés du connecteur primitif E. Clairement, D ne fait pas que caractériser le nouveau connecteur V, mais joue un rôle clef dans la caractérisation de E.

Łukasiewicz a parfaitement raison de soutenir qu'une telle force créative doit revenir à un axiome et ne peut pas rester le fait d'une simple définition. Cependant, il se trompe sur un point crucial qui aurait rendu D inacceptable aux yeux de Leśniewski: la définition D n'est pas une définition *explicite*, mais une définition *implicite*. La raison en est très simple: dans le contexte où D se trouve inscrite à titre de première définition, la tautologie (*) n'est pas dérivable. Il s'ensuit qu'en inscrivant D, la relation qui est posée entre le D_{um} et le D_{iens} n'est pas même *réflexive*, ce qui est une condition nécessaire à la relation d'équivalence exigée pour les définitions explicites.

D étant implicite, il n'y a donc rien de surprenant à devoir lui donner le statut d'axiome, mais rien ne dit avec cet exemple qu'il doit en aller de même des définitions posées comme thèses, lorsqu'elles sont véritablement explicites, comme le demandait Leśniewski.

2.4 Une logique avec directive de définition

Dans cette section, nous présentons un exemple simple de système développemental incluant une règle permettant de poser des définitions explicites par le biais de couples de thèses conditionnelles de la forme[10]:

$$\vdash \mathrm{C}D_{um}D_{iens} \quad \text{et} \quad \vdash \mathrm{C}D_{iens}D_{um}$$

Un tel système développemental a pour spécificité d'être construit pas à pas, par une inscription ordonnée de thèses. Les premières thèses de L^{def} sont constituées par ses trois axiomes[11]:

(α_1) $\mathrm{C}p\mathrm{C}qp$

(α_2) $\mathrm{CC}p\mathrm{C}qm\mathrm{CC}pq\mathrm{C}pm$

(α_3) $\mathrm{CCN}p\mathrm{N}q\mathrm{CCN}pqp$

Quant aux autres thèses, elles sont inscrites successivement par le moyen d'une des trois règles d'inférence de L^{def}: *substitution*, *détachement* et *définition*. Le système étant développé pas à pas, il convient que ses règles soient énoncées d'une manière qui prenne en compte l'*état* dans lequel celui-ci se trouve au moment de leur application. Un *état* du système se caractérise par l'ensemble ordonné fini des thèses déjà inscrites et il y sera fait référence par le biais de la

[10] Nous reprennons pour ce faire un mode de présentation utilisé dans Lejewski (1958).

[11] Ceux-ci sont similaires à ceux du système L présenté en section 1.1, mais exprimé ici dans l'écriture préfixée de Łukasiewicz, où C et N sont respectivement la conditionnelle et la négation.

dernière thèse inscrite. Par exemple l'état initial de L^{def} est la suite α_1, α_2, α_3, la dernière thèse inscrite étant alors α_3.

Afin de pouvoir énoncer les règles plus aisément, il est utile de se donner les conventions terminologiques suivantes:

- On nommera **constante** tout symbole consistant en une *lettre latine majuscule*, si besoin, indicée (dans l'interprétation visée, il s'agira d'une constante de connecteur).
- On nommera **variable** tout symbole consistant en une *lettre latine minuscule*, si besoin, indicée (dans l'interprétation visée, il s'agira d'une variable de proposition atomique).
- Les *lettres grecques* seront utilisées à titre de métavariables.
- Soit τ_i la dernière thèse inscrite d'un état de L^{def}. On qualifiera de **formule relative à τ_i** toute expression ε satisfaisant l'une des deux conditions suivantes: (1) ε est une variable; (2) ε est une expression de la forme $\Psi\omega_1\omega_2\ldots\omega_n$, où Ψ est une constante apparaissant dans au moins une des thèses de l'état concerné et $\omega_1\omega_2\ldots\omega_n$ sont n formules relatives à τ_i, n étant égal à 2 si Ψ est C, égal à 1 si Ψ est N et égal au nombre de variables différentes apparaissant dans la thèse où Ψ apparaît pour la première fois, si Ψ est une constante différente de C et N.

Sur la base de ces conventions métalinguistiques, on peut désormais expliciter les règles d'inférence comme suit:

Règle *Det*. Soit τ_i la dernière thèse inscrite d'un état de L^{def}. S'il y a parmi la liste des thèses inscrites dans cet état une thèse τ_j et une thèse de la forme $C\tau_j\varepsilon$, alors ε peut être inscrite comme nouvelle thèse à la suite immédiate de τ_i.

Règle *Sub*. Soit τ_i la dernière thèse inscrite d'un état de L^{def}. Soient enfin τ_j une des thèses inscrites de cet état et γ une formule relative à τ_i. Une expression ε peut être inscrite comme nouvelle thèse à la suite immédiate de τ_i si ε est obtenue en substituant γ dans τ_j à toutes les occurrences d'une certaine variable apparaissant dans τ_j.

Règle *Def*. Soit τ_i la dernière thèse inscrite d'un état de L^{def}. Un couple d'expressions ε_1, ε_2 respectivement des formes C$\Psi\ \omega_1\omega_2...\omega_n\beta$ C$\beta\Psi\omega_1\omega_2...\omega_n$ peut être inscrit à la suite immédiate de τ_i, pour autant que les conditions suivantes soient respectées:

(1) Ψ est constante différente de toutes celles qui apparaissent dans les thèses inscrites de l'état en question.

(2) $\omega_1\omega_2...\omega_n$ ($n \geq 1$) sont n variables différentes les unes des autres.

(3) β est une formule relativement à τ_i.

(4) aucune autre variable que $\omega_1\omega_2...\omega_n$n'apparaît dans β.

A titre d'illustration, considérons maintenant un exemple d'état de L^{def} construit conformément aux axiomes et aux règles posées:

(τ_1)	CC*p*CC*ppm*CC*p*C*pp*C*pm*	[α_2, *Sub*]
(τ_2)	CC*p*CC*ppp*CC*p*C*pp*C*pp*	[τ_1, *Sub*]
(τ_3)	C*p*CC*ppp*	[α_1, *Sub*]
(τ_4)	CC*p*C*pp*C*pp*	[τ_2, τ_3, *Det*]
(τ_5)	C*p*C*pp*	[α_1, *Sub*]
(τ_6)	C*pp*	[τ_4, τ_5, *Det*]
(τ_7)	CN*p*N*p*	[τ_6, *Sub*]
(τ_8)	CA*pq*CN*pq*	[*Def* (1^e thèse)]
(τ_9)	CCN*pq*A*pq*	[*Def* (2^e thèse)]
(τ_{10})	CCN*p*N*p*A*p*N*p*	[τ_9, *Sub*]
(τ_{11})	A*p*N*p*	[τ_7, τ_{10}, *Det*]

Notons, au sujet de cette illustration, que la présence de τ_6 dans une situation qui n'est précédée d'aucune définition (et, en fait, la possibilité d'obtenir, dans une telle situation, toutes les tautologies contenant C et N) montre que l'erreur commise par Łukasiewicz est ici évitée: la règle *Def* conduit bien à poser des définitions *explicites*, exprimant une *équivalence* entre D_{um} et D_{iens}. On remarquera aussi que les thèses τ_8 et τ_9 définissent la constante A comme la disjonction. Enfin, le développement jusqu'à τ_{11} montre qu'il est possible de *construire* un état de L^{def} où l'expression usuelle du tiers exclu figure à titre de thèse.

3. Conclusion: une construction réglée de l'arithmétique

Plus simple à bien des égard que l'Ontologie – le système que nous avons utilisé pour notre logicisme catégoriel – le système L^{def} suffit pourtant à faire voir ce qui fait, dans notre perspective logiciste, la spécificité d'une logique développementale[12].

Tout d'abord, on notera que, contrairement aux systèmes formels standard, un système développemental ne s'appuie pas sur une caractérisation préalable de ses formules. L'ensemble des formules reste en effet constamment ouvert. La correction syntaxique des thèses inscrites au fur et à mesure du développement du système est à chaque étape assurée sur la base des thèses déjà inscrites – dans l'état initial, les trois axiomes – par les règles d'inférence qui jouent en fait également le rôle de règles de formation syntaxique. Le caractère contextuel qu'acquiert ainsi la syntaxe a pour conséquence qu'il est dénué de sens de demander, avant même avoir produit tel ou tel développement spécifique, si une certaine suite de caractères est ou n'est pas une formule ou une thèse de L^{def}. Une telle question ne peut avoir de sens que si elle se trouve relativisée à un état du système, état essentiellement caractérisé par les différentes définitions inscrites.

Ainsi, dans le cas du logicisme, il est dénué de sens de demander si telle ou telle représentation symbolique des propositions de Peano sont des thèses du système adopté comme point de départ. Le développement que nous appellons «logicisme catégoriel» est à comprendre comme une construction dont les modalités de progression sont entièrement gouvernées par les axiomes et les règles et qui montre qu'il existe un état effectif du système dans lequel des thèses correspondent aux propositions de Peano. La suite des définitions qui caractérise cet état et le travail du logicien qui consiste à les trouver

12 Sur les règles de définitions explicites de l'Ontologie, cf. ici même l'article de N. Gessler, section 1.3.

sont ici cruciaux, même au plan théorique. Le logicisme doit ainsi être compris non pas comme une *réduction* de l'arithmétique à la logique, mais comme une *construction* dont l'assise est logique et le développement entièrement réglé par la logique.

Enfin, il convient de relever la présence possible dans la construction de définitions créatives. Le lecteur qui se penchera sur la construction que nous présentons en fin d'ouvrage remarquera qu'à de nombreuses étapes, il est fait usage de définitions qualifiées d'«auxiliaires», en ce sens qu'elles ne sont introduites que dans le but de débloquer – ou à tout le moins de faciliter – la preuve de thèses qui ne contiennent pas les termes introduits par ces définitions. Sans doute, l'inscription de telles définitions s'apparente-t-elle à une sorte d'extension du système. Quoi qu'il en soit pourtant, l'inscription d'une définition explicite, même créative, se distingue de l'ajout d'un axiome ou d'une définition implicite sur deux points essentiels: étant explicite, la définition ne peut introduire de constante non logique; enfin, si elle est conforme aux règles de l'Ontologie, la définition explicite ne peut conduire à aucune inconsistance. Il a en effet été montré que l'Ontologie est un système consistant, en ce sens que ni sa base, ni aucun des développements qu'elle autorise, si riche soit-il en définitions, créatives ou non, ne peut envelopper d'inconsistance[13].

En regard des positions logicistes qui, comme par exemple le néo-frégéanisme, s'appuient sur une définition implicite comme le Principe de Hume, notre construction possède l'avantage que son existence à titre d'état de l'Ontologie constitue une preuve de consistance de l'arithmétique de Peano relative uniquement à celle de la logique utilisée[14]. Sans être réductionniste, notre construction donne bien ainsi lieu à un fondement de l'arithmétique qui peut être qualifié de logicisme.

[13] Sur la consistance des systèmes de Leśniewski, cf. Lejewski (1969).

[14] La construction néo-frégéenne en revanche n'assure pas *par elle-même* la consistance de l'arithmétique puisque, comme l'a montré Boolos (1987), la consistance de la logique du deuxième ordre augmentée du Principe de Hume n'est garantie que relativement à celle de l'arithmétique. Ceci montre que le logicisme néo-frégéen n'est pas indépendant d'autres approches fondationnelles et fait écrire à Hale et Wright que le Principe de Hume peut seulement «reasonably be regarded as consistent» (2001: 118).

Les cercles, les cercles vicieux et leur principe

Cédric Degrange

Introduction

A la suite de la publication des *Principia Mathematica*, le principe du cercle vicieux (pcv) est devenu le test classique pour déterminer la nature prédicative ou imprédicative d'une définition. Ce principe règle le rapport entre une collection et les éléments de celle-ci: «Whatever involves *all* of a collection must not be one of the collection» (Whitehead & Russell 1927: 37). Si une définition enfreint ce principe, elle est imprédicative et par là, considérée comme pouvant entraîner l'émergence d'une antinomie. Cependant, ce genre de définitions sont seulement *susceptibles* de produire une contradiction et n'entraînent pas systématiquement un tel résultat. Cette relativisation du caractère antinomique des définitions imprédicatives trouve un certain écho chez les auteurs même du pcv. Dans la première introduction des *Principia*, au chapitre consacré à la théorie des types logiques, Whithead et Russell notent:

> Arguments which are condemned by the vicious-circle principle will be called “vicious-circle fallacies”. Such arguments, in certain circumstances, may lead to contradictions, but it often happens that the conclusions to which they lead are in fact true, though the arguments are fallacious. (1927: 37-38).

Bien qu'ils constatent que le pcv puisse être un principe trop fort, Whithead et Russell l'admettent tel quel – faute de mieux, dira-t-on. Cependant, sur ce passage, il convient de faire deux remarques qui permettent d'éclairer en quoi les arguments de forme circulaire (*the vicious-circle fallacies*) sont seulement *susceptibles* d'être problématiques. Premièrement, pour que ces arguments mènent à une contradiction, il faut que «certaines conditions» soient réunies. Autrement dit, de tels énoncés ne sont pas problématiques en eux-mêmes. Il ne suffit pas qu'une théorie contienne un argument circulaire pour qu'il y ait apparition automatique d'une contradiction. Celle-ci doit encore être construite. Ainsi la présence de la loi V rend la théorie des *Grundgesetze* de Frege inconsistante. Cependant, le caractère inconsistant de la théorie est apparue seulement lorsque Russell a montré qu'il était possible de construire une antinomie à l'intérieur de celle-ci. Il y a contradiction, si l'énoncé circulaire est utilisé dans certaines conditions. Par conséquent, une solution pour éviter les contradictions serait non d'écarter les énoncés circulaires, mais les conditions dangereuses dans lesquelles ils peuvent être utilisés. C'est dans une telle approche, de valeur pragmatique, que ce sont notamment engagées les logiques paraconsistantes[1].

Le second point est que ce passage des *Principia* relève l'existence d'un autre genre d'énoncés circulaires. A la différence des premiers, ceux-ci ne mènent à aucune contradiction, et cela quelles que soient les circonstances. En d'autres termes, bien que marqués du défaut de circularité, ces arguments n'entraînent pas d'inconsistance – en ce sens, leurs conclusions sont «vraies». Néanmoins, suivant les *Principia*, puisque ces énoncés transgressent le pcv, ils sont considérés comme imprédicatifs.

Le constat est donc le suivant: d'un côté, il y a des énoncés circulaires qui peuvent engendrer l'inconsistance de la théorie; de l'autre, il y a des énoncés qui, même s'ils sont circulaires, n'engendrent pas d'inconsistance. Suivant la théorie des *Principia*, il suffit qu'un énoncé transgresse le pcv pour être considéré comme imprédicatif et

[1] Cf. par exemple Volken (1997: 257-271).

donc comme devant être éliminé de la théorie. Le but de cette présentation est de montrer qu'un énoncé peut être à la fois circulaire et non problématique. Ce faisant, nous montrerons qu'il est possible d'intégrer de tels énoncés imprédicatifs au sein d'une construction logiciste comme celle qui est discutée dans le présent volume.

1. Un exemple propositionnel

Whitehead et Russell proposent un exemple d'énoncé qui, malgré son caractère circulaire, semble bien être non contradictoire.

> Take, for example, the law of excluded middle, in the form «all propositions are true or false». If from this law we argue that, because the law of excluded middle is a proposition, therefore the law of excluded middle is true or false, we incur a vicious-circle fallacy. (1927: 38).

De prime abord, bien qu'il y ait cercle, il semble que cette formulation de la loi du tiers exclu doive plutôt être vraie. Le problème est la présence du cercle.

Précisons que la difficulté ici n'est pas liée à la loi du tiers exclu mais à une formulation possible de celle-ci. C'est la formulation ou l'expression de cette loi qui, du fait qu'elle enfreint le pcv, est problématique.

Une manière de résoudre la difficulté serait de faire appel à la distinction entre langage et métalangage. Dans ce cadre, une certaine proposition peut très bien porter sur l'ensemble des propositions d'un langage, sans appartenir à ce langage. Ainsi, lorsqu'il est affirmé que «Toutes les propositions sont vraies ou fausses», les propositions dont il est question appartiennent à un premier langage L. Par contre, l'expression, elle, appartient à un autre langage, $L + 1$, qui porte sur L. En d'autres termes, $L + 1$ est un métalangage. La formulation de la loi du tiers exclu se comprend alors comme signifiant: «Toutes les propositions du langage L sont vraies ou fausses» et cette formulation appartient au métalangage $L + 1$. Formellement, cela donne «$\square \vee \neg \square$», où $\square$ est une métavariable à laquelle peut être substituée n'importe quelle proposition appartenant à L. Quant à la vérité de cette formule

– ou, le cas échéant, sa fausseté – elle est affirmée au niveau du métalangage. C'est là la position généralement adoptée après les travaux de Tarski (1936).

Cependant, la conception de la logique adoptée ici n'autorise pas une telle solution. En effet, dans un paradigme comme celui des *Principia*, la logique est conçue comme un langage universel, de sorte que, fondamentalement, il n'y a qu'un seul langage, celui de la logique. Il n'est donc pas possible de distinguer un langage qui porterait sur la logique car cela signifierait que ce langage est plus fondamental que celui de la logique. Tout doit se faire à l'intérieur de cette dernière. La difficulté que représente la formulation de la loi du tiers exclu doit ainsi être résolue à l'intérieur du langage de la logique.

Dans ce paradigme, pour exprimer l'idée que toutes les propositions sont concernées, il nous faut faire usage d'une quantification qui porte sur les propositions. Ainsi, nous obtenons l'expression suivante:

(1) $(\forall p)\ (p \vee \neg p)$

Si on considère que l'expression (1) est une proposition – ce qui semble bien être le cas, bien que son ordre ne soit pas déterminé –, elle doit être comptée parmi cette totalité. Dès lors, pour évaluer la proposition (1), il est nécessaire de connaître l'évaluation de la proposition suivante:

(2) $[(\forall p)\ (p \vee \neg p)] \vee \neg[(\forall p)\ (p \vee \neg p)]$

Cette nouvelle proposition est obtenue par la substitution de la proposition (1) à la variable p. Ici, nous nous fondons sur une conception intuitive de la substitution.

Si nous cherchons à évaluer cette dernière proposition, une difficulté apparaît. Nous nous trouvons en effet dans une situation telle que l'évaluation de la proposition (2) requiert l'évaluation de la proposition (1) qui elle-même requiert l'évaluation de (2). Il y a donc cercle.

2. La solution des *Principia Mathematica*

La solution des *Principia* consiste à diminuer la portée de l'expression «toutes les propositions»: «"All propositions" must be in some way limited before it becomes a legitimate totality [...]» (1927: 38) Cela signifie limiter la totalité sur laquelle porte le quantificateur et donc restreindre le domaine de quantification selon certaines conditions. Suivant la théorie des types formulée dans les *Principia*, ces conditions sont notamment définies relativement au type et et à l'ordre de la proposition dans laquelle apparaît la quantification.

Cela ne va évidemment pas sans conséquence. Ainsi, il suit que *la formulation* de la loi du tiers exclu ne peut être interprétée comme une généralisation illimitée. La formulation doit être comprise non plus comme s'appliquant à la totalité des propositions, mais seulement à une totalité de propositions de type et d'ordre déterminés. Cela signifie qu'elle ne peut être traduite par l'expression (1). Dans les *Principia*, cette dernière ne peut être considérée comme une expression du langage logique et donc être considérée comme une proposition[2].

Dans la perspective des *Principia*, l'expression «toutes les propositions» ne signifie dès lors plus «la totalité des propositions» mais seulement «la totalité d'une partie des propositions». La lecture de la formulation de la loi du tiers exclu s'en trouve altérée ainsi qu'une compréhension intuitive de celle-ci.

La raison de limiter la portée de l'expression «toutes les propositions» est d'obtenir «une totalité légitime». On peut se demander si c'est là le seul moyen d'atteindre ce but. Il n'est peut-être pas nécessaire de procéder à une limitation du domaine de quantification. On peut aussi se demander en quoi consiste une totalité légitime, plus précisément ce qui fait la légitimité d'une telle totalité.

Suivant la théorie des types des *Principia*, le langage est hiérarchisé de telle manière que les énoncés d'un certain ordre et d'un certain type ne portent que sur des énoncés d'ordre et de type inférieurs. Dans le cadre propositionnel, c'est surtout l'ordre de la

[2] Dans les *Principia*, de telles expressions sont considérées comme dénuées de signification.

proposition qui importe. La hiérarchisation des propositions dérive de celle des fonctions dans laquelle l'ordre et le type doivent être pris en considération. Cependant, les propositions sont obtenues par la généralisation de toutes les variables libres présentes dans les fonctions, de sorte que la distinction de type n'est plus pertinente[3]. Ainsi, une proposition d'ordre *n* doit contenir au moins une variable liée d'ordre $n - 1$. Ce qu'il importe de remarquer, c'est que chaque niveau de langage ainsi obtenu, et donc de domaine de quantification, est homogène du point de vue des propositions qu'il peut contenir – celles-ci ne peuvent dépasser l'ordre de la proposition quantifiée. Il suit qu'une expression ne peut appartenir à un domaine de valeur d'ordre et de type inférieurs aux siens. Suivant les *conditions posées*, le domaine de valeur s'avère ainsi homogène.

Le caractère légitime d'une totalité est assuré par l'homogénéité du domaine de quantification. Cependant, nous ne sommes pas tenus d'imposer des conditions d'homogénéité sur l'ordre et le type des expressions. De même, nous ne sommes pas non plus tenus de restreindre le domaine de quantification. Ainsi, nous pouvons adopter d'autres conditions d'homogénéité. Le choix de ces conditions dépend des buts à atteindre – si ce qui importe est l'élimination de toutes les formes circulaires, la théorie des types est, somme toute, bien adaptée. Ici, nous voulons notamment pouvoir admettre certains énoncés circulaires. En outre, une solution qui ne remette pas en question la portée générale de l'expression «toutes les propositions» est souhaitable.

Suivant notre alternative, nous ne chercherons pas à restreindre le domaine de quantification. De même, plutôt que de considérer la forme syntaxique des termes susceptibles d'être quantifiés, nous

[3] A partir d'une *matrice* d'ordre 2 – $f(\phi!z, x)$ – toutes les fonctions d'ordre 2 engendrées par généralisation sont soit de type 1 – $(\phi)f(\phi!z, x)$, une fonction d'individu – soit de type 2 – $(x)f(\phi!z, x)$, une fonction de fonction d'individu. Les propositions d'ordre 2 sont obtenues à partir des fonctions du même ordre par généralisation de toutes les variables libres. La hiérarchie des types perdure dans le cas des propositions. Puisque les propositions dérivent des fonctions, elles respectent de manière atavique cette hiérarchie mise en place dans le cadre des fonctions. Cependant, cela n'empêche pas que la distinction de type perde de sa pertinence dans le cadre propositionnel, ex: $(x)(\phi)f(\phi!z, x)$ et $(\phi)(x)f(\phi!z, x)$.
Pour une présentation de la théorie voir: Vernant (1993), de Rouilhan (1996), Linsky (1999). Pour un exposé plus technique: Hatcher (1982).

privilégierons la signification de ces termes. De cette manière, comme nous le verrons, il est possible d'obtenir un domaine de quantification homogène tout en préservant le caractère général de la formulation de la loi du tiers exclu.

3. Vers une alternative catégorielle

Nous quittons désormais le cadre des *Principia* mais conservons une conception de la logique comme langage universel. De plus, nous considérons les expressions (1) et (2) comme des propositions. En fait, cette alternative[4] requiert de les considérer comme telles – ce qui ne me semble pas une requête par trop singulière.

Nous l'avons déjà vu, l'évaluation de la proposition (2) impose l'évaluation de la proposition (1). Si nous considérons cette dernière du point de vue de ses significations possibles, elle est soit vraie, soit fausse. En affirmant cela, nous supposons que nous nous trouvons dans un cadre bivalent et que les propositions ne désignent pas des états de choses. Dès lors, quelle que soit la valeur attribuée à la proposition (1), l'évaluation de la proposition (2) donne le vrai. Formellement, cela se présente comme suit:

$$(3) \quad \begin{pmatrix} V \\ F \end{pmatrix} \vee \neg \begin{pmatrix} V \\ F \end{pmatrix}$$

Ici, la forme syntaxique de la proposition (1) n'est pas pertinente. Seule importe qu'elle soit de la catégorie des propositions et que les significations liées à cette catégorie soit le vrai ou le faux.

Dans le cas de la proposition (1), la difficulté supplémentaire pour l'évaluer provient de la présence d'une quantification. Nous pouvons cependant étendre notre stratégie en adoptant une nouvelle lecture de

[4] Cette alternative s'appuie en grande partie sur les travaux liés à l'interprétation de l'Ontologie de Leśniewski, produits par Simons (1985), Miéville (1999) et Joray (1999, 2001, 2005e).

la quantification[5]. Dans cette perspective, la proposition se lit comme suit:

> Quelle que soit la signification qui peut être associée à une expression de la catégorie des propositions, si cette signification est attribuée à la variable p, alors l'expression «$p \vee \neg p$» est vraie / fausse.

Ici, le domaine de quantification est celui des significations attachées à la catégorie de la variable. Autrement dit, selon cette lecture, lorsque la quantification lie une variable, son domaine est l'ensemble des significations susceptibles d'être associées à un quelconque élément de la catégorie à laquelle appartient cette variable.

On procède de la manière suivante. Tout d'abord, il s'agit de déterminer la catégorie C à laquelle appartient la variable liée par le quantificateur (dans notre exemple, p est de la catégorie S des propositions). Le domaine de quantification lié à cette catégorie, Dom(C), consiste en les valeurs associées à cette catégorie. Si, par exemple, nous choisissons d'associer à la catégorie des propositions comme significations les valeurs du vrai ou du faux, le domaine de quantification s'exprimera:

$$\mathrm{Dom}(S) = \{V, F\}$$

Il est ensuite possible d'évaluer la proposition suivant les différentes combinaisons des valeurs possibles de S et suivant les clauses d'évaluations associées aux constantes de l'expression. Plus simplement, une fois spécifié le domaine de quantification, l'évaluation de (1) se présente sous la forme d'une table de vérité:

(4) $\mathrm{Dom}(S) = \{V, F\}$

$$\begin{pmatrix} V \\ F \end{pmatrix} \vee \neg \begin{pmatrix} V \\ F \end{pmatrix}$$

Rapidement, il apparaît que l'évaluation donne toujours le vrai. Formellement, la différence entre les expressions (3) et (4) – respectivement les interprétations de (1) et (2) – réside dans la

[5] Nous reprenons ici ce que Joray (2001: 220-230; 2005e) nomme l'interprétation *catégorielle* de la quantification.

présence pour (4) de la description du domaine de quantification. Notons que cette seule description marque la présence d'une quantification.

Bien que la formulation de la loi du tiers exclu transgresse le pcv – et demeure ainsi circulaire – par rapport à l'interprétation des *Principia*, elle possède une évaluation déterminée. Ainsi, nous admettons qu'il y a des énoncés circulaires qui ont une signification déterminée de sorte qu'ils peuvent être intégrés dans notre langage.

4. Extensionnalité

La solution présentée repose sur une interprétation particulière de la quantification. Celle-ci possède pour domaine l'ensemble des significations associées à la catégorie de la variable de sorte que nous obtenons une totalité homogène. Cette homogénéité du domaine de quantification est, comme nous l'avons remarqué plus avant, l'un des points requis pour éviter les *vicious-circle fallacies*.

En choisissant de concevoir le domaine de quantification comme l'ensemble des significations associées à la catégorie de la variable, implicitement, nous avons choisi une conception extensionnelle. Par là, il faut entendre que nous avons pris le parti de concevoir la notion de catégorie comme s'appliquant à un ensemble d'expressions individuelles. Ce choix a pour conséquence que des expressions telles que $p \supset q$, $p \wedge q$, $p \vee q$ ou $(p \wedge q) \supset m$ sont de catégories S, de même que les symboles de propositions atomiques p, q, m. Quant aux opérateurs, $\supset$, $\wedge$, $\vee$, ils sont de catégories S/SS (formateurs de proposition – de catégorie S – à partir de deux arguments de catégorie S).

Si nous admettons ce cadre extensionnel, il est ensuite possible d'associer à chaque catégorie une manière de signifier. Cela se fait selon le principe suivant:

> Deux expressions peuvent avoir la même signification *ssi* elles sont de la même catégorie.

Par exemple, à la catégorie S, nous pouvons choisir d'associer – comme nous l'avons fait précédemment – l'ensemble de significations

$\{V, F\}$. Nous dirons que la manière de signifier d'une expression de la catégorie S est de prendre pour signification une des valeurs V ou F. Ainsi, une expression de la catégorie S peut être vraie ou fausse. Suivant le principe adopté, cet ensemble est spécifique à cette catégorie. L'ensemble spécifique de significations associé à la catégorie S/SS est plus complexe. Il contient seize valeurs:

$$\{(V, V, V, V)^1, (V, V, V, F)^2, (V, V, F, V)^3, \ldots, (F, F, F, V)^{15}, (F, F, F, F)^{16}\}$$

Ces valeurs correspondent aux seize signatures possibles pour un opérateur binaire. Un foncteur de la catégorie S/SS prendra ainsi pour signification l'une de ces seize valeurs.

Cette correspondance univoque entre une catégorie et l'ensemble de significations qui lui est associé assure une homogénéité du domaine de quantification. Il suffit de connaître la catégorie de la variable pour connaître l'ensemble de significations qui est le domaine de quantification. Cette homogénéité est assurée même dans le cas d'un domaine de quantification infini. Considérons le cas d'une logique multivalente dans laquelle est associée à la catégorie de base S un ensemble composé d'une infinité de valeurs.

$$\mathrm{Dom}(S) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots v_{n-1}, v_n, v_{n+1}, \ldots\}$$

Une expression de catégorie S pourra prendre pour signification une des valeurs v_i appartenant à cet ensemble infini. Dans le cas d'une expression de catégorie S/SS, on représentera l'ensemble d'attributions possibles de la manière suivante:

$$\mathrm{Dom}(S/SS) = \{\varphi \mid \varphi : \mathrm{Dom}(S) \times \mathrm{Dom}(S) \rightarrow \mathrm{Dom}(S)\}$$

Il s'agit de l'ensemble des applications possibles φ, telle que φ a pour domaine $\mathrm{Dom}(S) \times \mathrm{Dom}(S)$ et pour codomaine $\mathrm{Dom}(S)$. A la catégorie S/SS est ainsi associée de manière univoque un ensemble d'attributions de valeurs. Le domaine de quantification d'une expression d'une quelconque catégorie peut bien être infini, il n'en demeure pas moins qu'il est propre, ce qui nous assure de l'homogénéité du domaine.

Un point à préciser est celui de la substitution. Suivant notre approche de la quantification, celle-ci porte sur les significations associées à la catégorie de la variable présente dans le quantificateur. Pour que la substitution soit possible, la quantification doit porter sur les mêmes significations associés, ce qui entraîne que p, de catégorie S, ne peut être substitué que par une expression de catégorie S. Ce faisant, le domaine de quantification est assuré de conserver son homogénéité.

Les conditions d'extensionnalité et de substitution doivent pouvoir nous assurer de toujours avoir des totalités homogènes, c'est-à-dire légitimes. Ainsi, alors que la théorie des *Principia* fait peser des conditions d'homogénéité par le biais des notions d'ordre et de type, dans notre perspective celles-ci sont réglées par les notions de significations et de catégorie[6].

5. Cercles et cercles vicieux

Il nous faut encore éclairer un point qui concerne la distinction entre cercle et cercle vicieux. Nous avons vu que suivant notre solution, il est possible d'admettre au sein du langage formel des énoncés qui transgressent le pcv. Ainsi, bien qu'ils soient circulaires, ils ne s'avèrent pas être vicieusement circulaires – au sens où, les énoncés qui transgressent le pcv sont vicieusement circulaires pour la théorie des *Principia.*

La situation est similaire à celle de l'exemple de F. P. Ramsey: «l'homme le plus grand du groupe» (1925: 41). Cette description est circulaire et enfreint le pcv. Cependant, le cercle formé réside au niveau de l'expression et ne concerne pas les individus du groupe. Il s'agit d'une description possible d'un individu déjà donné. Le cercle serait vicieux, si cette description signifiait la création d'un nouvel individu, ce qui raisonnablement n'est pas le cas ici.

Dans le cas de la formulation de la loi du tiers exclu, l'aspect circulaire concerne l'expression de celle-ci. Par contre, la signification de l'expression n'est pas affectée. Il n'y a pas création d'une nouvelle

[6] L'opposition doit être nuancée du fait que l'usage de la notion de catégorie donne lieu à une hiérarchie des énoncés telle que celle issue de la théorie des types *simple.* La notion de catégorie correspond en ce sens à celle de type. Sur les rapports entre catégories et types, cf. ici même l'article de N. Gessler.

signification mais seulement la description circulaire d'une signification déjà déterminée.

Ce faisant deux niveaux sont au moins à distinguer. Le premier concerne l'expression de cette loi comme, par exemple, l'énoncé (1). Il s'agit de ce que nous appellerons le niveau syntaxique. Le deuxième niveau est celui sémantique et concerne la signification de l'énoncé (1). Plus précisément, il concerne les différentes combinaisons de valeurs qui sont la signature (sémantique) de l'expression et qui, dans notre exemple, est le vrai pour les deux combinaisons possibles. Le niveau sémantique ne doit pas être confondu avec celui auquel appartient, par exemple, l'énoncé (4) qui est *l'expression de la signification*[7] de l'énoncé (1).

Le caractère circulaire de la formulation du tiers exclu se situe ainsi au niveau syntaxique. Cependant, le caractère vicieux est désamorcé du fait qu'il ne concerne pas le niveau sémantique où notre interprétation de la quantification situe le domaine de valeur des variables. A ce niveau-ci, il n'y a pas de collusion entre l'ensemble des significations d'une catégorie et une quelconque de ces significations. En fait, au niveau sémantique le rapport entre les membres d'une totalité et cette totalité respecte le pcv. Autrement dit, si le pcv ne s'avère pas pertinent au niveau syntaxique, il le reste au niveau sémantique, là où se situe notre quantification et donc la où se règle le rapport entre une totalité et un quelconque de ses membres.

Conclusion

La solution présentée repose principalement, comme nous venons de le voir, sur une interprétation particulière de la quantification. Une telle interprétation est présente dans les systèmes de Leśniewski, même si elle ne leur est pas spécifique. Cette lecture catégorielle de la quantification peut se faire dans un système classique pour autant qu'il soit conçu dans un cadre extensionnel. Le choix de l'extensionnalité apparaît être la clef de cette solution aux énoncés circulaires.

[7] Nous parlerons d'une syntaxe de la sémantique.

L'un des aspects de cette solution est qu'elle éclaire l'intérêt de la distinction syntaxe / sémantique dans un paradigme logiciste. En mettant en évidence, ces différents niveaux de langue au sein d'un langage, nous avons vu qu'il est possible de s'en servir pour gérer le cas d'énoncés circulaires en les intégrant au langage. Ce dernier peut ainsi être enrichi et sa portée affinée. Notons qu'il n'est pas question de nier le caractère circulaire de ces énoncés. Au contraire de la solution des *Principia* qui évacue toute circularité, notre interprétation supporte sans difficulté les cercles en jouant de ces différents niveaux de langues.

Une construction de l'arithmétique de Peano

Préambule

La liste ordonnée de définitions et de thèses qui suit constitue une construction de l'arithmétique de Peano sur la base de l'Ontologie de S. Leśniewski, augmentée d'un axiome de l'infini. Bien que nous ayons choisi de présenter les preuves dans le style aisé de la déduction naturelle de Fitch, il est attendu du lecteur une connaissance élémentaire de la logique de Leśniewski[1]. La présentation commence par un court récapitulatif des définitions et thèses générales, connues de la littérature et nécessaires à la construction. Viennent ensuite six sections allant de la définition et l'examen de la relation d'équinuméricité à la preuve des cinq propositions de Peano. Nous avons jugé inutile de reprendre les définitions explicites des opérations arithmétiques élémentaires puisque leur inscription, à la suite des propositions de Peano, se serait présentée de manière identique à celle que l'on trouve dans la thèse de doctorat de J. T. Canty (1967: 129-147)[2].

Afin de guider le lecteur indiquons que le cœur du développement se situe dans la définition *D2.2* de *nombre cardinal*. Celle-ci s'appuie sur une version paramétrée (*D2.1*) de la relation d'équinuméricité entre noms, dont dérive un analogue leśniewskien du célèbre *Principe de Hume* (HP, *T2.1*). Figurant à titre de thèse, HP n'a pas ici l'importance qu'il a dans les travaux des néo-frégéens[3] et il convient de

[1] On se reportera à la présentation détaillée de Miéville (2001-04), ou alors à celle succincte de l'Ontologie dans Joray (2001: chap. III).

[2] On trouve en outre une présentation de la méthode d'explicitation des définitions récursives d'opérations arithmétiques s'appuyant sur l'exemple de l'addition dans Joray (2002: 15-17).

[3] Voir, dans la bibliographie, les références relatives à Boolos, Wright et Hale.

remarquer qu'il ne constitue pas un principe d'abstraction au sens de Frege car l'identité du membre gauche de la biconditionnelle n'est pas une identité objectuelle comme chez Frege, mais une identité extensionnelle entre prédicats *s/n* (au sens de la définition *D0.11*). Cette spécificité explique pourquoi la présence de HP ne suffit pas, comme chez les néo-frégéens, à exclure les modèles finis. Les nombres cardinaux ne sont pas ici des objets à compter comme éléments de l'univers et cela nous conduit à recourir à un axiome de l'infini[4].

En adoptant une définition de *nombres naturels* comme *cardinaux inductifs* (*D5.4*), ainsi qu'une définition de *successeur* (*D5.2*) ne faisant pas appel à l'addition, nous avons simplifié de manière significative la preuve des propositions de Peano. De plus, la dépendance de ces propositions vis-à-vis de l'axiome de l'infini s'en trouve clarifiée. Dans les *Principia Mathematica*, en effet, seule la proposition III (*des nombres ayant même successeur sont identiques*) tombe sous cette dépendance. Nous avons montré (Joray 2002: 14-15) que la proposition II (*le successeur d'un nombre est un nombre*) doit tomber aussi sous la dépendance de l'axiome de l'infini si l'on veut éviter la signification hautement artificielle qu'elle endosse chez Whitehead et Russell: *pour chaque nombre, il existe potentiellement un type dans lequel un successeur de ce nombre peut être trouvé.*

Pour terminer, indiquons encore nos conventions typographiques: définitions et thèses sont respectivement notées par les lettres *T* et *D* suivies d'un numéro indiquant leurs section et ordre d'inscription (par exemple *D3.9*: section 3, 9e définition); les thèses dont le numéro se termine par un chiffre précédé d'un tiret sont des lemmes (par exemple *T1.12-2*: deuxième lemme en vue de la preuve de *T1.12*). La présence d'un astérisque (**T6.3*) indique que la thèse en question est dépendante de l'axiome de l'infini. Enfin la mention «*aux*» associée à une définition signifie que la définition en question est *auxilliaire* en ce sens qu'elle n'est inscrite que dans le but de permettre ou de simplifier la preuve de la thèse, ou des thèses qui suivent.

[4] Que, dans la perspective néo-frégéenne, la présence de HP suffise à exclure les modèles finis constitue à notre sens un défaut dans la mesure ou son expression présente un caractère hybride: à la fois définition implicite de *nombre cardinal* et axiome de l'infini.

0. Ontologie générale

Axiome de l'Ontologie (Ax_o) :
$\lfloor ab \rfloor \lceil a \varepsilon b \equiv . \lfloor \exists c \rfloor \lceil c \varepsilon a \rceil \wedge \lfloor dc \rfloor \lceil d \varepsilon a \;\wedge\; c \varepsilon a. \supset d \varepsilon c \rceil \wedge \lfloor d \rfloor \lceil d \varepsilon a \supset d \varepsilon b \rceil \rceil$

$T0.1$: $\lfloor a \rfloor \lceil \lfloor \exists b \rfloor \lceil a \varepsilon b \supset a \varepsilon a \rceil \rceil$

$T0.2$: $\lfloor ab \rfloor \lceil a \varepsilon b \supset a \varepsilon a \rceil$

$T0.3$: $\lfloor abc \rfloor \lceil a \varepsilon b \;\wedge\; b \varepsilon c. \supset a \varepsilon c \rceil$

$T0.4$: $\lfloor abc \rfloor \lceil a \varepsilon b \;\wedge\; b \varepsilon c. \supset b \varepsilon a \rceil$

$D0.1$: $\lfloor ab \rfloor \lceil \{a \subset b\} \equiv \lfloor c \rfloor \lceil c \varepsilon a \supset c \varepsilon b \rceil \rceil$ Dfs [s/nn]
Inclusion entre noms

$D0.2$: $\lfloor R \rfloor \lceil Refl(R) \equiv \lfloor a \rfloor \lceil \lfloor \exists b \rfloor \lceil R\{ab\} \vee R\{ba\} \rceil \supset R\{aa\} \rceil \rceil$
Dfs[s/(s/nn)]

$D0.3$: $\lfloor R \rfloor \lceil Sym(R) \equiv \lfloor ab \rfloor \lceil R\{ab\} \supset R\{ba\} \rceil \rceil$ Dfs[s/(s/nn)]

$D0.4$: $\lfloor R \rfloor \lceil Trans(R) \equiv \lfloor abc \rfloor \lceil R\{ab\} \;\wedge\; R\{bc\}. \supset R\{ac\} \rceil \rceil$
Dfs[s/(s/nn)]

$T0.5$: $Trans(\varepsilon)$

$D0.5$: $\lfloor R \rfloor \lceil Equi(R) \equiv .Refl(R) \;\wedge\; Sym(R) \;\wedge\; Trans(R) \rceil$
Dfs[s/(s/nn)]

$D0.6$: $\lfloor ab \rfloor \lceil \{a \approx b\} \equiv . \lfloor c \rfloor \lceil c \varepsilon a \equiv c \varepsilon b \rceil \rceil$ Dfs[s/nn]
Identité extensionnelle

$T0.6$: $Equi(\approx)$

$D0.7$: $\lfloor ab \rfloor \lceil \{a = b\} \equiv . a \varepsilon b \;\wedge\; b \varepsilon a \rceil$ Dfs[s/nn]
Identité singulière entre noms

$T0.7$: $Equi(=)$

$D0.8$: $\lfloor a \rfloor \lceil !\{a\} \equiv \lfloor \exists b \rfloor \lceil b \varepsilon a \rceil \rceil$ Dfs[s/n]
Etre un nom qui dénote

$D0.9 : \lfloor a \rfloor \lceil Sin\{a\} \equiv a \,\varepsilon\, a \rceil$ Dfs[s/n]
Etre un nom singulier

$T0.8 : \lfloor ab \rfloor \lceil a \,\varepsilon\, b \supset Sin\{a\} \rceil$

$D0.10 : \lfloor a \rfloor \lceil Emp\{a\} \equiv\sim \lfloor \exists b \rfloor \lceil b \,\varepsilon\, a \rceil \rceil$ Dfs[s/n]
Etre un nom vide

$T0.9 : \lfloor ab \rfloor \lceil Emp\{a\} \;\wedge\; Emp\{b\}. \supset a \approx b \rceil$

1	ab	$Emp\{a\} \;\wedge\; Emp\{b\}$	hyp
2		$c \,\varepsilon\, a$	hyp
3		$\lfloor \exists c \rfloor \lceil c \,\varepsilon\, a \rceil$	2,∃i
4		$Emp\{a\}$	1,∧e,reit
5		$\sim \lfloor \exists c \rfloor \lceil c \,\varepsilon\, a \rceil$	4,D0.10
6		$c \,\varepsilon\, b$	4,5,∼e
7		$c \,\varepsilon\, a \supset c \,\varepsilon\, b$	2-6,⊃i
8		$c \,\varepsilon\, b \supset c \,\varepsilon\, a$	*idem* 2-6,⊃i
9		$a \approx b$	7,8,≡i, D0.6
	Th.		1-9,⊃i,⌊⌋i

$D0.11 : \lfloor \varphi\psi \rfloor \lceil [\varphi \approx \psi] \equiv \lfloor a \rfloor \lceil \varphi\{a\} \equiv \psi\{a\} \rceil \rceil$ Dfs[s/(s/n)(s/n)]
Identité extensionnelle entre prédicats de catégorie s/n

$D0.12 : \lfloor \varphi \rfloor \lceil ![\varphi] \equiv \lfloor \exists a \rfloor \lceil \varphi\{a\} \rceil \rceil$ Dfs[s/(s/n)]
Être une propriété non vide

$D0.13 : \lfloor R \rfloor \lceil Obj(R) \equiv \lfloor ab \rfloor \lceil R\{ab\} \supset .Sin\{a\} \;\wedge\; Sin\{b\} \rceil \rceil$
Dfs[s/(s/nn)]
Etre une relation nominale objectuelle

$T0.10 : Obj(=)$

1	ab	$a = b$	hyp
2		$a \,\varepsilon\, b \;\wedge\; b \,\varepsilon\, a$	1,D0.7
3		$a \,\varepsilon\, a$	2,∧e,T0.2
4		$b \,\varepsilon\, b$	2,∧e,T0.2
5		$Sin\{a\} \wedge Sin\{b\}$	3,4,D0.9,∧i
	Th.		1-5,⊃i,⌊⌋i,D0.13

$D0.14 : \lfloor a \rfloor \lceil a\,\varepsilon\wedge \equiv . a\,\varepsilon\, a \wedge\ \sim (a\varepsilon\, a) \rceil$ Dfn[n]
Nom vide

$T0.11 : Emp\{\wedge\}$

1		$\lfloor \exists b \rfloor \lceil b\,\varepsilon \wedge \rceil$	hyp
2	b	$b\,\varepsilon \wedge$	hyp.
3		$b\,\varepsilon\, b\ \wedge\ \sim (b\,\varepsilon\, b)$	2,D0.14
4		$\sim \lfloor \exists b \rfloor \lceil b\,\varepsilon \wedge \rceil$	3,$\sim$e
5		$\sim \lfloor \exists b \rfloor \lceil b\,\varepsilon \wedge \rceil$	1,2-4, $\exists$e
		Th.	1,1,5,$\sim$i,D0.10

$T0.12 : \lfloor a \rfloor \lceil \sim (a\,\varepsilon \wedge) \rceil$

1	a	$a\,\varepsilon \wedge$	hyp
2		$a\,\varepsilon\, a$	1,D0.14
3		$\sim (a\,\varepsilon\, a)$	1,D0.14
4		$\sim (a\,\varepsilon \wedge)$	1,2,3,$\sim$i
		Th.	1-4,$\lfloor\rfloor$i

$D0.15 : \lfloor a \rfloor \lceil a\,\varepsilon \vee \equiv\ a\,\varepsilon a \rceil$ Dfn[n]
Nom universel

$D0.16 : \lfloor abc \rfloor \lceil a\,\varepsilon \{b \cup c\} \equiv : a\,\varepsilon\, a\ \wedge\ . a\,\varepsilon\, b \vee a\,\varepsilon\, c \rceil$ Dfn[n/nn]
Union nominale

$T0.13 : \lfloor a \rfloor \lceil a \approx \{a \cup \wedge\} \rceil$

1	$a \quad c \quad c\,\varepsilon\, a$	hyp
2	$c\,\varepsilon\, c$	1,T0.2
3	$c\varepsilon \wedge . \vee . c\,\varepsilon\, a$	1,$\vee$i
4	$c\varepsilon \{\wedge \cup a\}$	2,3,D0.16
5	$c\varepsilon \{\wedge \cup a\}$	hyp
6	$c\varepsilon \wedge . \vee . c\,\varepsilon\, a$	5,D0.16
7	$\sim (c\,\varepsilon \wedge)$	T0.12
8	$c\,\varepsilon\, a$	6,7,$\vee$e
9	$c\,\varepsilon\, a \equiv c\varepsilon \{\wedge \cup a\}$	1-4,5-8,$\equiv$i
10	$\lfloor c \rfloor \lceil c\,\varepsilon\, a \equiv c\varepsilon \{\wedge \cup a\} \rceil$	1-9,$\lfloor\rfloor$i
11	$a \approx \{\wedge \cup a\}$	10,D0.6
	Th.	1-11,$\lfloor\rfloor$i

$D0.17 : \lfloor abc \rfloor \lceil a\,\varepsilon \{b \cap c\} \equiv . a\,\varepsilon\, a \;\wedge\; a\,\varepsilon\, b \;\wedge\; a\,\varepsilon\, c \rceil$ Dfn[n/nn]
Intersection nominale

$D0.18 : \lfloor abc \rfloor \lceil a\,\varepsilon \{b - c\} \equiv . a\,\varepsilon\, a \;\wedge\; a\,\varepsilon\, b \;\wedge\; \sim (a\,\varepsilon\, c) \rceil$ Dfn[n/nn]
Complément nominal

1. Equinuméricité

$D1.1 : \lfloor R \rfloor \lceil OneOne(R) \equiv \lfloor abc \rfloor \lceil R\{ac\} \wedge R\{bc\}. \vee .R\{ca\} \wedge R\{cb\} : \supset a \,\varepsilon\, b \rceil \rceil$ Dfs[s/(s/nn)]

Etre une relation bi-univoque entre noms singuliers

$T1.1 : \lfloor R \rfloor \lceil OneOne\{R\} \supset Obj(R) \rceil$

1	$R \mid OneOne(R)$	hyp
2	$\quad ab \mid R\{ab\}$	hyp
3	$\quad\quad R\{ab\} \wedge R\{ab\}. \vee .R\{ba\} \wedge R\{ba\} :$	
	$\quad\quad \supset a \,\varepsilon\, a$	1,D1.1,a/a,b/a,c/b
4	$\quad\quad a \,\varepsilon\, a$	2,3,⊃e
5	$\quad\quad Sin\{a\}$	4,D0.9
6	$\quad\quad R\{ba\} \wedge R\{ba\}. \vee .R\{ab\} \wedge R\{ab\} :$	
	$\quad\quad \supset b \,\varepsilon\, b$	1,D1.1,a/b,b/b,c/a
7	$\quad\quad b \,\varepsilon\, b$	2,6,⊃e
8	$\quad\quad Sin\{b\}$	7,D0.9
9	$\quad\quad Sin\{a\} \wedge Sin\{b\}$	5,8,∧i
10	$\quad \lfloor ab \rfloor \lceil R\{ab\} \supset .Sin\{a\} \wedge Sin\{b\} \rceil$	2,9,⌊⌋i
	$Th.$	1-10,⊃i,⌊⌋i

$T1.2 : OneOne(=)$

1	$abc \mid a = c \wedge b = c. \vee .c = a \wedge c = b$	hyp
2	$\quad\quad a = c \wedge b = c$	hyp
3	$\quad\quad a = b$	2, T0.7
4	$\quad\quad c = a \wedge c = b$	hyp
5	$\quad\quad a = b$	4, T0.7
6	$\quad a = b$	1,2-3,4-5,∨e
7	$\quad a \,\varepsilon\, b$	6,D0.7
	$Th.$	1-7,⊃i,⌊⌋i,D1.1

$D1.2 : \lfloor Ra \rfloor \lceil Dom(R)\{a\} \equiv \lfloor b \rfloor \lceil \lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{bc\} \rceil \equiv b \,\varepsilon\, a \rceil \rceil$ Dfs[(s/n)/(s/nn)]

Etre le domaine d'une relation de catégorie s/nn

$D1.3 : \lfloor Ra \rfloor \lceil Cdom\{a\}(R) \equiv \lfloor b \rfloor \lceil \lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{cb\} \rceil \equiv b\,\varepsilon\,a \rceil \rceil$
Dfs[(s/n)/(s/nn)]
Etre le co-domaine d'une relation de catégorie s/nn

$D1.4 : \lfloor ab \rfloor \lceil a \infty b \equiv \lfloor \exists R \rfloor \lceil OneOne(R) \wedge Dom(R)\{a\} \wedge Cdom(R)\{b\} \rceil \rceil$ Dfs[s/nn]
Etre dans une relation d'équinuméricité pour des noms

$D1.5(aux) : \lfloor abc \rfloor \lceil =\langle a \rangle\{bc\} \equiv .b\,\varepsilon\,a \ \wedge \ b = c \rceil$ Dfs [(s/nn)/n]

$T1.3-1 : \lfloor abc \rfloor \lceil =\langle a \rangle\{bc\} \supset b = c \rceil$ D1.5

$T1.3-2 : \lfloor a \rfloor \lceil OneOne(=\langle a \rangle) \rceil$

1	ab	$=\langle d \rangle\{ac\} \wedge \ =\langle d \rangle\{bc\}. \vee . =\langle d \rangle\{ca\} \wedge \ =\langle d \rangle\{cb\}$	hyp
2	cd	$a = c \ \wedge \ b = c. \vee .c = a \ \wedge \ c = b$	1,T1.3-1
3		$a\,\varepsilon\,b$	2,T1.2
	$Th.$		1-3,D1.1

$T1.3-3 : \lfloor a \rfloor \lceil Dom(=\langle a \rangle)\{a\} \rceil$

1	a	b		$\lfloor \exists c \rfloor \lceil =\langle a \rangle\{bc\} \rceil$	hyp
2			c	$=\langle a \rangle\{bc\}$	hyp
3				$b\,\varepsilon\,a \ \wedge \ b = c$	2,D1.5
4				$b\,\varepsilon\,a$	3,$\wedge$e
5				$b\,\varepsilon\,a$	1,2-4,$\exists$e
6				$b\,\varepsilon\,a$	hyp
7				$b\,\varepsilon\,b$	6,T0.2
8				$b = b$	7,D0.7
9				$b\,\varepsilon\,a \ \wedge \ b = b$	6,8,$\wedge$i
10				$=\langle a \rangle\{bb\}$	9,D1.5
11				$\lfloor \exists c \rfloor \lceil =\langle a \rangle\{bc\} \rceil$	10,$\exists$i,b/c
12				$\lfloor \exists c \rfloor \lceil =\langle a \rangle\{bc\} \rceil \equiv b\,\varepsilon\,a$	1-5,6-11,$\equiv$i
13				$\lfloor b \rfloor \lceil \lfloor \exists c \rfloor \lceil =\langle a \rangle\{bc\} \rceil \equiv b\,\varepsilon\,a \rceil$	1-12,$\lfloor\rfloor$i
	$Th.$				1-13,$\lfloor\rfloor$i,D1.2

$T1.3-4 : \lfloor a \rfloor \lceil Cdom(=\langle a \rangle)\{a\} \rceil$

1	$a \mid b \mid \lfloor \exists c \rfloor \lceil =\langle a \rangle \{cb\} \rceil$	hyp
2	$c \mid =\langle a \rangle \{cb\}$	hyp
3	$c \,\varepsilon\, a \ \wedge \ c = b$	2,D0.7
4	$b \,\varepsilon\, c$	3,D0.7
5	$b \,\varepsilon\, a$	3,4,T0.3
6	$b \,\varepsilon\, a$	1,2-5,∃e
7	$b \,\varepsilon\, a$	hyp
8	$b \,\varepsilon\, b$	T0.2
9	$b = b$	7,D0.7
10	$b \,\varepsilon\, a \ \wedge \ b = b$	7,9,∧i
11	$=\langle a \rangle \{bb\}$	10,D1.5
12	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil =\langle a \rangle \{bc\} \rceil$	11,∃i b/c
13	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil =\langle a \rangle \{bc\} \rceil \equiv b \,\varepsilon\, a$	1-6,7-12,≡i
14	$\lfloor b \rfloor \lceil \lfloor \exists c \rfloor \lceil =\langle a \rangle \{bc\} \rceil \equiv b \,\varepsilon\, a \rceil$	1-13,⌊⌋i
	Th.	1-14,⌊⌋i,D1.2

$T1.3 : \lfloor a \rfloor \lceil a \infty a \rceil$

1	$a \mid OneOne(=\langle a \rangle)$	T1.3-2
2	$Dom(=\langle a \rangle)\{a\}$	T1.3-3
3	$Cdom(=\langle a \rangle)\{a\}$	T1.3-4
4	$\lfloor \exists R \rfloor \lceil OneOne(R) \ \wedge \ Dom(R)\{a\} \ \wedge$	
	$CDom(R)\{b\} \rceil \rceil$	1,2,3,∧i,∃i =⟨ a⟩/R
5	$a \infty a$	4,D1.4
	Th.	1-5,⌊⌋i

$D1.6 : \lfloor Rab \rfloor \lceil Rec\langle R \rangle \{ab\} \equiv R\{ba\}) \rceil$ Dfs[(s/nn)/(s/nn)]

$T1.4 - 1 : \lfloor R \rfloor \lceil OneOne(R) \supset OneOne(Rec\langle R \rangle) \rceil$

1	R | $\lfloor abc \rfloor \lceil OneOne(R) \rceil$	hyp
2	$\lfloor abc \rfloor \lceil R\{ac\} \wedge R\{bc\}. \vee .R\{ca\} \wedge R\{cb\} :\supset a \varepsilon b \rceil$	1,D1.1
3	$Rec\langle R \rangle\{ac\} \wedge Rec\langle R \rangle\{bc\}. \vee .$	
	$Rec\langle R \rangle\{ca\} \wedge Rec\langle R \rangle\{cb\}$	hyp
4	$Rec\langle R \rangle\{ac\} \wedge Rec\langle R \rangle\{bc\}$	hyp
5	$R\{ca\} \wedge R\{cb\}$	4,D1.6
6	$R\{ac\} \wedge R\{bc\}. \vee .R\{ca\} \wedge R\{cb\}$	5,∨i
7	$a \varepsilon b$	2,6,⊃e
8	$Rec\langle R \rangle\{ca\} \wedge Rec\langle R \rangle\{cb\}$	hyp
9	$Rec\{ac\} \wedge R\{bc\}$	8,D1.6
10	$R\{ac\} \wedge R\{bc\}. \vee .R\{ca\} \wedge R\{cb\}$	9,∨i
11	$a \varepsilon b$	2,10,⊃e
12	$a \varepsilon b$	2,4-7,8-11,∨e
13	$\lfloor abc \rfloor \lceil Rec\langle R \rangle\{ac\} \wedge Rec\langle R \rangle\{bc\}. \vee .$	
	$Rec\langle R \rangle\{ca\} \wedge Rec\langle R \rangle\{cb\} :\supset a \varepsilon b \rceil$	3-12,⊃i,⌊⌋i
15	$OneOne(Rec\langle R \rangle)$	13,D1.1
	$Th.$	1-14,⊃i,⌊⌋i

$T1.4-2 : \lfloor Ra \rfloor \lceil Dom(R)\{a\} \supset Cdom(Rec\langle R \rangle)\{a\} \rceil$

1	$Ra \mid Dom(R)\{a\}$	hyp
2	$\lfloor a \rfloor \lceil \lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{bc\} \rceil \equiv b\,\varepsilon\,a \rceil$	1,D1.2
3	$b \mid \lfloor \exists c \rfloor \lceil Rec\langle R \rangle\{cb\} \rceil$	hyp
4	$c \mid Rec\langle R \rangle\{cb\}$	hyp
5	$R\{bc\}$	4,D1.6
6	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{bc\} \rceil$	5,∃i
7	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{bc\} \rceil$	3,4-6,∃e
8	$b\,\varepsilon\,a$	2,7,≡e
9	$b\,\varepsilon\,a$	hyp
10	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{bc\} \rceil$	2,9,≡e
11	$c \mid R\{bc\}$	hyp
12	$Rec\langle R \rangle\{cb\}$	11,D1.6
13	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil Rec\langle R \rangle\{cb\} \rceil$	12,∃i
14	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil Rec\langle R \rangle\{cb\} \rceil$	10,11-13,∃e
15	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil Rec\langle R \rangle\{cb\} \rceil \equiv b\,\varepsilon\,a$	3-8,9-14,≡i
16	$\lfloor b \rfloor \lceil \lfloor \exists c \rfloor \lceil Rec\langle R \rangle\{cb\} \rceil \equiv b\,\varepsilon\,a \rceil$	3-15,⌊⌋i
17	$Cdom(Rec\langle R \rangle)\{a\}$	16,D1.3
	$Th.$	1-17,⊃i,⌊⌋i

$T1.4-3 : \lfloor Ra \rfloor \lceil Cdom(R)\{a\} \supset Dom(Rec\langle R \rangle)\{a\} \rceil$ *idem* $T1.4$-2

$T1.4 : Sym(\infty)$

1	$ab \mid a\infty b$	hyp
2	$\lfloor \exists R \rfloor \lceil OneOne(R) \wedge Dom(R)\{a\} \wedge Cdom(R)\{b\} \rceil$	1,D1.4
3	$R \mid OneOne(R) \wedge Dom(R)\{a\} \wedge Cdom(R)\{b\}$	hyp
4	$OneOne(Rec\langle R \rangle)$	3,∧e,T1.4-1
5	$Cdom(Rec\langle R \rangle)\{a\}$	3,∧e,T1.4-2
6	$Dom(Rec\langle R \rangle\{b\}$	3,∧e,T1.4-3
7	$OneOne(Rec\langle R \rangle) \wedge Cdom(Rec\langle R \rangle\{a\}$ $\wedge Dom(Rec\langle R \rangle\{b\}$	4,5,6,∧i
8	$\lfloor \exists R \rfloor \lceil OneOne(R) \wedge Dom(R)\{b\}$ $\wedge Cdom(R)\{a\} \rceil$	7,∃i,Rec⟨R⟩/R
9	$b\infty a$	8,D1.4
10	$b\infty a$	2,3-9,∃e
11	$\lfloor ab \rfloor \lceil a\infty b \supset b\infty a \rceil$	1-10,⊃i,⌊⌋i
	$Th.$	10,D0.3

$D1.7 : \lfloor RSab \rfloor \lceil Com\langle RS \rangle\{ab\} \equiv \lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{ac\} \wedge S\{cb\} \rceil \rceil$
Defs[(s/nn)/(s/nn)(s/nn)]

$T1.5 - 1 : \lfloor RS \rfloor \lceil OneOne(R) \ \wedge \ OneOne(S). \supset OneOne(Com\langle RS \rangle)\rceil$

1	RS $OneOne(R) \ \wedge \ OneOne(S)$	hyp
2	abc $Com\langle RS\rangle\{ac\} \ \wedge \ Com\langle RS\rangle\{bc\}. \vee .$	
	$Com\langle RS\rangle\{ca\} \ \wedge \ Com\langle RS\rangle\{cb\}$	hyp
3	$Com\langle RS\rangle\{ac\} \ \wedge \ Com\langle RS\rangle\{bc\}$	hyp
4	$\lfloor \exists d \rfloor \lceil R\{ad\} \ \wedge \ S\{dc\}\rceil$	3,$\wedge$e, D1.7
5	$\lfloor \exists e \rfloor \lceil R\{be\} \ \wedge \ S\{ec\}\rceil$	3,$\wedge$e, D1.7
6	de $R\{ad\} \ \wedge \ S\{dc\} \ \wedge \ R\{be\} \ \wedge \ S\{ec\}$	hyp
7	$S\{dc\} \ \wedge \ S\{ec\}$	6,$\wedge$2
8	$OneOne(S)$	1,$\wedge$e,reit
9	$d \,\varepsilon\, e$	7,8,D1.1
10	$e \,\varepsilon\, d$	7,8,D1.1
11	$e = d$	9,10,D0.7
12	$R\{ad\} \ \wedge \ R\{be\}$	6,$\wedge$e
13	$OneOne(R)$	1,$\wedge$e,reit
14	$a \,\varepsilon\, b$	11,12,13,D1.1
15	$a \,\varepsilon\, b$	4,5,6-15,$\exists$e
16	$Com\langle RS\rangle\{ca\} \ \wedge \ Com\langle RS\rangle\{cb\}$	hyp
17	$a \,\varepsilon\, b$	*idem* 3-16
18	$a \,\varepsilon\, b$	2,3-16,15-16,$\vee$e
19	$\lfloor abc \rfloor \lceil Com\langle RS\rangle\{ac\} \ \wedge \ Com\langle RS\rangle\{bc\}. \vee .$	
	$Com\langle RS\rangle\{ca\} \ \wedge \ Com\langle RS\rangle\{cb\} :\supset a \,\varepsilon\, b\rceil$	2-18,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
20	$OneOne(Com\langle RS\rangle)$	19,D1.1
	Th.	1-19,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$T1.5-2 : \lfloor RS \rfloor \lceil Cdom(R) \approx Dom(S) \supset Dom(Com\langle RS \rangle) \approx Dom(R) \rceil$

$T1.5-3 : \lfloor RS \rfloor \lceil Cdom(R) \approx Dom(S) \supset Cdom(Com\langle RS \rangle) \approx Cdom(S) \rceil$
Idem $T1.5$-2

$T1-5 : Trans(\infty)$

1	abc	$a\infty b \wedge b\infty c$	hyp
2		$\lfloor \exists R \rfloor \lceil OneOne(R) \wedge Dom(R)\{a\} \wedge Cdom(R)\{b\} \rceil$	1,∧e,D1.4
3		$\lfloor \exists S \rfloor \lceil OneOne(S) \wedge Dom(S)\{b\} \wedge Cdom(S)\{c\} \rceil$	1,∧e,D1.4
4	RS	$OneOne(R) \wedge Dom(R)\{a\} \wedge Cdom(R)\{b\}$	hyp
5		$OneOne(S) \wedge Dom(S)\{b\} \wedge Cdom(S)\{c\}$	hyp
6		$OneOne(R) \wedge OneOne(S)$	4,5,∧e,∧i
7		$OneOne(Com\langle RS \rangle)$	6,T1.5-1
8		$Cdom(R)\{b\}$	4,∧e
9		$Dom(S)\{b\}$	5,∧e
10		$Cdom(R) \approx Dom(S)$	8,9,D1.2,D1.3,D0.11
11		$Dom(Com\langle RS \rangle) \approx Dom(R)$	10,T1.5-2
12		$Dom(R)\{a\}$	4,∧e
13		$Dom(Com\langle RS \rangle)\{a\}$	11,12,D011
14		$Dom(Com\langle RS \rangle) \approx Cdom(S)$	10,T1.5-3
15		$Cdom(S)\{c\}$	5,∧e
16		$Cdom(Com\langle RS \rangle)\{c\}$	14,15,D0.11
17		$OneOne(Com\langle RS \rangle) \wedge Dom(Com\langle RS \rangle)\{a\}$	
		$\wedge\ Cdom(Com\langle RS \rangle)\{c\}$	7,13,16,∧i
18		$\lfloor \exists R \rfloor \lceil OneOne(R) \wedge Dom(R)\{a\}$	
		$\wedge\ Cdom(R)\{c\} \rceil$	17,∃i,Com⟨ RS⟩/R
19		$a\infty c$	18,D1.4
20		$a\infty c$	2/3,4-19,∃e
21		$\lfloor abc \rfloor \lceil a\infty b \wedge b\infty c. \supset a\infty c \rceil$	1-20,⊃i,⌊⌋i
		Th.	21,D0.4

$T1.6 : \lfloor ab \rfloor \lceil a \approx b \supset a\infty b \rceil$

$$
\begin{array}{r|l|ll}
1 & ab & \underline{a \approx b} & \text{hyp} \\
2 & & a\infty a & \text{T1.3} \\
3 & & a\infty b & \text{1,2,Ext} \\
 & Th. & & \text{1-3,}\supset\text{i,}\lfloor\rfloor\text{i}
\end{array}
$$

$T1.7 : \lfloor ab \rfloor \lceil Emp\{a\} \wedge Emp\{b\}. \supset a\infty b \rceil$

$$
\begin{array}{r|l|ll}
1 & ab & \underline{Emp\{a\} \wedge Emp\{b\}} & \text{hyp} \\
2 & & a \approx b & \text{1,T0.9} \\
3 & & a\infty b & \text{2,T1.6} \\
 & Th. & & \text{1-3,}\supset\text{i,}\lfloor\rfloor\text{i}
\end{array}
$$

$T1.8 : \lfloor ab \rfloor \lceil a \infty b \supset .\ !\{a\} \equiv !\{b\} \rceil$

1	$ab \mid a \infty b$	hyp
2	$!\{a\}$	hyp
3	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil c \, \varepsilon \, a \rceil$	2,D0.8
4	$c \mid c \, \varepsilon \, a$	hyp
5	$a \infty b$	1,reit
6	$\lfloor \exists R \rfloor \lceil OneOne(R) \ \wedge \ Dom(R)\{a\}$ $\wedge \ Cdom(R)\{b\} \rceil$	5,D1.4
7	$R \mid Dom(R)\{a\}$	hyp
8	$Cdom(R)\{a\}$	hyp
9	$c \, \varepsilon \, a$	4,reit
10	$\lfloor \exists d \rfloor \lceil R\{cd\} \rceil$	7,9,D1.2
11	$d \, \varepsilon \, b$	8,10,D1.3
12	$\lfloor \exists d \rfloor \lceil d \, \varepsilon \, b \rceil$	11,∃i
13	$!\{b\}$	12,D0.8
14	$!\{b\}$	6,7-13,∃e
15	$!\{b\}$	3,4-14,∃e
16	$!\{a\} \supset !\{b\}$	2-15,⊃i
17	$!\{b\} \supset !\{a\}$	idem 2-15
18	$!\{a\} \equiv !\{b\}$	16,17,≡i
	Th.	1-18,⊃i,⌊⌋i

$T1.9 : \lfloor ab\rfloor\lceil Emp\{a\} \;\wedge\; a\infty b. \supset Emp\{b\}\rceil$

1	ab	$Emp\{a\} \;\wedge\; a\infty b$	hyp
2		$\lfloor\exists d\rfloor\lceil d\,\varepsilon\, b\rceil$	hyp
3	d	$d\,\varepsilon\, b$	hyp
4		$a\infty b$	1,∧e,reit
5		$\lfloor\exists R\rfloor\lceil OneOne(R) \;\wedge\; Dom(R)\{a\} \;\wedge\; Cdom(R)\{b\}\rceil$	4,D1.4
6	R	$OneOne(R) \;\wedge\; Dom(R)\{a\} \;\wedge\; Cdom(R)\{b\}$	hyp
7		$d\,\varepsilon\, b$	3,reit
8		$Cdom(R)\{b\}$	6,∧e
9		$\lfloor\exists c\rfloor\lceil R\{cd\} \equiv d\,\varepsilon\, b\rceil$	8,D1.3,⌊⌋e
10		$\lfloor\exists c\rfloor\lceil R\{cd\}\rceil$	7,9,≡e
11	c	$R\{cd\}$	hyp
12		$\lfloor\exists e\rfloor\lceil R\{ce\}$	11,∃i,d/e
13		$Dom(R)\{a\}$	6,∧e,reit
14		$\lfloor\exists e\rfloor\lceil R\{ce\} \equiv c\,\varepsilon\, a\rceil$	13,D1.2,⌊⌋e
15		$c\,\varepsilon\, a$	12,14,≡e
16		$\lfloor\exists c\rfloor\lceil c\,\varepsilon\, a\rceil$	15,∃i
17		$Emp\{a\}$	1,∧e,reit
18		$\sim \lfloor\exists c\rfloor\lceil c\,\varepsilon\, a\rceil$	17,D0.10
19		$\sim (a\infty b)$	16,18,∼e
20		$\sim (a\infty b)$	10,11-19,∃e
21		$\sim (a\infty b)$	5,6-20,∃e
22		$\sim \lfloor\exists d\rfloor\lceil d\,\varepsilon\, b\rceil$	4,21,∼e
23		$\sim \lfloor\exists d\rfloor\lceil d\,\varepsilon\, b\rceil$	2,3-22,∃e
24		$\lfloor\exists d\rfloor\lceil d\,\varepsilon\, b\rceil$	2,rep
25		$\sim \lfloor\exists d\rfloor\lceil d\,\varepsilon\, b\rceil$	2,23,24,∼i
26		$Emp\{b\}$	25,D0.10
	$Th.$		1-26,⊃i,⌊⌋i

$D1.8(aux.) : \lfloor Rabcd\rfloor\lceil\star[Rab]\{cd\} \equiv .\sim (c\,\varepsilon\, a) \wedge \sim (d\,\varepsilon\, b) \;\wedge$
$(R\{cd\} \vee (R\{cb\} \;\wedge\; R\{ad\}))\rceil$

$T1.10-1 : \lfloor Rbd \rfloor \lceil OneOne(R) \supset OneOne(\star[Rbd] \rceil$

1	R $OneOne(R)$	hyp
2	xyz $\star[Rbd]\{xz\} \wedge \star[Rbd]\{yz\}. \vee . \star[Rbd]\{zx\}$ $\wedge \star[Rbd]\{zy\}$	hyp
3	$\star[Rbd]\{xz\} \wedge \star[Rbd]\{yz\}$	hyp
4	$\sim(x \varepsilon b) \wedge \sim(z \varepsilon d)$	3,D1.8
5	$\sim(y \varepsilon b) \wedge \sim(z \varepsilon d)$	3,D1.8
6	$R\{xz\} \vee .R\{xd\} \wedge R\{bz\}$	3,D1.8
7	$R\{yz\} \vee .R\{yd\} \wedge R\{bz\}$	3,D1.8
8	$R\{xz\} \wedge R\{yz\}$	hyp
9	$x \varepsilon y$	1,8,D1.1
10	$R\{xz\} \wedge R\{yd\} \wedge R\{bz\}$	hyp
11	$x \varepsilon b$	1,10,D1.1
12	$\sim(x \varepsilon b)$	4,∧e,reit
13	$x \varepsilon y$	11,12,∼e
14	$R\{yz\} \wedge R\{xd\} \wedge R\{bz\}$	hyp
15	$y \varepsilon b$	1,14,D1.1
16	$\sim(y \varepsilon b)$	5,∧e,reit
17	$x \varepsilon y$	15,16,∼e
18	$R\{yd\} \wedge R\{bz\} \wedge R\{xd\} \wedge R\{bz\}$	hyp
19	$x \varepsilon y$	1,18,D1.1
20	$x \varepsilon y$	6,7,8-19,∨e
21	$\star[Rbd]\{zx\} \wedge \star[Rbd]\{zy\}$	hyp
22	$\sim(z \varepsilon b) \wedge \sim(x \varepsilon d)$	21,D1.8
23	$\sim(z \varepsilon b) \wedge \sim(y \varepsilon d)$	21,D1.8
24	$R\{zx\} \vee .R\{zd\} \wedge R\{bx\}$	21,D1.8
25	$R\{zy\} \vee .R\{zd\} \wedge R\{by\}$	21,D1.8
26	$R\{zx\} \wedge R\{zy\}$	hyp
27	$x \varepsilon y$	1,26,D1.1
28	$R\{zx\} \wedge R\{zd\} \wedge R\{by\}$	hyp
29	$x \varepsilon d$	1,28,D1.1
30	$\sim(x \varepsilon d)$	22,∧e
31	$x \varepsilon y$	29,30,∼e

32	$R\{zy\} \wedge R\{zd\} \wedge R\{bx\}$	hyp
33	$y \,\varepsilon\, d$	1,32,D1.1
34	$\sim (y \,\varepsilon\, d)$	23,$\wedge$e
35	$x \,\varepsilon\, y$	33,34,$\wedge$e
36	$R\{zd\} \wedge R\{bx\} \wedge R\{zd\} \wedge R\{by\}$	hyp
37	$x \,\varepsilon\, y$	1,36,D1.1
38	$x \,\varepsilon\, y$	24,25,26-37,$\vee$e
39	$x \,\varepsilon\, y$	2,3-38,$\vee$e
40	$OneOne(\star[Rbd])$	2-39,$\supset$i,D1.1
	$Th.$	1-40,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$T1.10-2 : \lfloor Rabcd \rfloor \lceil OneOne(R) \ \wedge \ Dom(R)\{a \cup b\} \ \wedge \ Cdom(R)\{c \cup d\} \ \wedge$
$b \,\varepsilon\, b \ \wedge \ d \,\varepsilon\, d \wedge \ \sim (b \,\varepsilon\, a) \wedge \ \sim (d \,\varepsilon\, c). \supset Dom(\star[Rbd]\{a\}\rceil$

1	Rabcd	$OneOne(R)$	hyp
2		$Dom(R)\{a \cup b\}$	hyp
3		$Cdom(R)\{c \cup d\}$	hyp
4		$b \,\varepsilon\, b \ \wedge \ \sim (b \,\varepsilon\, a)$	hyp
5		$d \,\varepsilon\, d \ \wedge \ \sim (d \,\varepsilon\, c)$	hyp
6	x	$\lfloor \exists y \rfloor \lceil \star[Rbd]\{xy\} \rceil$	hyp
7	y	$\star[Rbd]\{xy\}$	hyp
8		$\sim (x \,\varepsilon\, b) \wedge \ \sim (y \,\varepsilon\, d)$	7,D1.8,∧e
9		$R\{xy\} \vee .R\{xd\} \ \wedge \ R\{by\}$	7,D1.8,∧e
10		$R\{xy\}$	hyp
11		$x\varepsilon\{a \cup b\}$	2,10,D1.2
12		$\sim (x \,\varepsilon\, b)$	8,∧e,reit
13		$x \,\varepsilon\, a$	11,12,∪e
14		$R\{xd\} \ \wedge \ R\{by\}$	hyp
15		$x \,\varepsilon\, \{a \cup b\}$	2,14,D1.2
16		$\sim (x \,\varepsilon\, b)$	8,∧e,reit
17		$x \,\varepsilon\, a$	15,16,∪e
18		$x \,\varepsilon\, a$	9,10-13,14-17,∨e
19		$x \,\varepsilon\, a$	6,7-18,∃e
20		$\lfloor \exists y \rfloor \lceil \star[Rbd]\{xy\} \supset x \,\varepsilon\, a \rceil$	6-19,⊃i
21		$x \,\varepsilon\, a$	hyp
22		$\sim (x \,\varepsilon\, b)$	4,21
23		$x \,\varepsilon\{ a \cup b\}$	21,∪e
24		$\lfloor \exists y \rfloor \lceil R\{xy\} \rceil$	2,23,D1.2
25	y	$R\{xy\}$	hyp
26		$R\{xy\} \vee . R\{xd\} \ \wedge \ R\{by\}$	25,∨i
27		$R\{bd\} \vee \sim R\{bd\}$	tiers exclu
28		$R\{bd\}$	hyp
29		$\sim (x \,\varepsilon\, b)$	22,reit
30		$\sim R\{xd\}$	1,28,29
31		$R\{xy\}$	25,reit
32		$\sim (y \,\varepsilon\, d)$	5,30,31
33		$\sim (x \,\varepsilon\, b) \wedge \ \sim (y \,\varepsilon\, d) \ \wedge \ R\{xy\} \ \vee (R\{xd\} \ \wedge \ R\{by\})$	26,29,32,∧i

34	$\lfloor \exists y \rfloor \lceil \sim (x \varepsilon b) \wedge \sim (y \varepsilon d) \wedge$	
	$(R\{xy\} \vee (R\{xd\} \wedge R\{by\}))\rceil$	33,∃i
35	$\sim R\{bd\}$	hyp
36	$\sim R\{xd\} \vee R\{xd\}$	tiers exclu
37	$\sim R\{xd\}$	hyp
38	$\sim (y \varepsilon d)$	1,5,25,37
39	$\sim (x \varepsilon b) \wedge \sim (y \varepsilon d) \wedge$	
	$(R\{xy\} \vee (R\{xd\} \wedge R\{by\}))$	22,26,38,∧i
40	$\lfloor \exists y \rfloor \lceil \sim (x \varepsilon b) \wedge \sim (y \varepsilon d) \wedge$	
	$(R\{xy\} \vee (R\{xd\} \wedge R\{by\}))\rceil$	39,∃i
41	$R\{xd\}$	hyp
42	$\lfloor \exists z \rfloor \lceil R\{bz\} \rceil$	2,4
43	z $R\{bz\}$	hyp
44	$\sim R\{bd\}$	35,reit
45	$\sim (z \varepsilon d)$	1,5,43,44
46	$R\{xd\} \wedge R\{bz\}$	41,43,∧i
47	$R\{xz\} \vee (R\{xd\} \wedge R\{bz\})$	46,∨i
48	$\sim (x \varepsilon b) \wedge \sim (z \varepsilon d) \wedge$	
	$(R\{xz\} \vee (R\{xd\} \wedge R\{bz\}))$	22,45,47,∧i
49	$\lfloor \exists y \rfloor \lceil \sim (x \varepsilon b) \wedge \sim (y \varepsilon d) \wedge$	
	$(R\{xz\} \vee (R\{xd\} \wedge R\{bz\}))\rceil$	48,∃i
50	$\lfloor \exists y \rfloor \lceil \sim (x \varepsilon b) \wedge \sim (y \varepsilon d) \wedge$	
	$(R\{xz\} \vee (R\{xd\} \wedge R\{bz\}))\rceil$	42,43-49,∃e
51	$\lfloor \exists y \rfloor \lceil \sim (x \varepsilon b) \wedge \sim (y \varepsilon d) \wedge$	
	$(R\{xz\} \vee (R\{xd\} \wedge R\{bz\}))\rceil$	36,37-40,41-50,∨e
52	$\lfloor \exists y \rfloor \lceil \sim (x \varepsilon b) \wedge \sim (y \varepsilon d) \wedge$	
	$(R\{xz\} \vee (R\{xd\} \wedge R\{bz\}))\rceil$	27,28-34,35-51,∨e
53	$\lfloor \exists y \rfloor \lceil \sim (x \varepsilon b) \wedge \sim (y \varepsilon d) \wedge$	
	$(R\{xz\} \vee (R\{xd\} \wedge R\{bz\}))\rceil$	24,25-52,∃e
54	$\lfloor \exists y \rfloor \lceil R[bd]\{xy\} \rceil$	53,D1.8
55	$x \varepsilon a \supset \lfloor \exists y \rfloor \lceil \star[Rbd]\{xy\} \rceil$	25-54,⊃i
56	$\lfloor \exists y \rfloor \lceil \star[Rbd]\{xy\} \equiv x \varepsilon a \rceil$	20,55,≡i
57	$\lfloor x \rfloor \lceil \lfloor \exists y \rfloor \lceil \star[Rbd]\{xy\} \rceil \equiv x \varepsilon a \rceil$	6-56,⌊⌋i
58	$Dom(\star[Rbd])\{a\}$	57,D1.2
	$Th.$	1-58.⊃i,⌊⌋i

$T1.10-3: \lfloor Rabcd \rfloor \lceil OneOne(R) \ \wedge \ Dom(R)\{a \cup b\} \ \wedge \ CDom(R)\{c \cup d\} \ \wedge$
$b \varepsilon b \ \wedge \ d \varepsilon d \wedge \ \sim (b \varepsilon a) \wedge \ \sim (d \varepsilon c). \supset Cdom(\star[Rbd]\{c\}\rceil$

Idem $T1.10$-2

$T1.10: \lfloor abcd \rfloor \lceil \{a \cup b\} \infty \{c \cup d\} \ \wedge \ b \varepsilon b \ \wedge \ d \varepsilon d \wedge \ \sim (b \varepsilon a) \wedge$
$\sim (d \varepsilon c). \supset a \infty c \rceil$

1	ab	$\{a \cup b\} \infty \{c \cup d\}$	hyp
2	cd	$b \varepsilon b \ \wedge \ d \varepsilon d \wedge \ \sim (b \varepsilon a) \wedge \ \sim (d \varepsilon c)$	hyp
3		$\lfloor \exists R \rfloor \lceil OneOne(R) \ \wedge \ Dom(R)\{a \cup \ b\}$ $\wedge \ Cdom(R)\{c \cup d\}\rceil$	1,D1.4
4	R	$OneOne(R)$	hyp
5		$Dom(R)\{a \cup b\}$	hyp
6		$Cdom(R)\{c \cup d\}$	hyp
7		$OneOne(\star[Rbd])$	4,T1.10-1
8		$Dom(\star[Rbd]\{a\})$	2,4,5,6,T1.10-2
9		$Cdom(\star[Rbd]\{c\})$	2,4,5,6,T1.10-3
10		$OneOne(\star[Rbd]) \ \wedge \ Dom(\star[Rbd]\{a\})$ $\wedge \ Cdom(\star[Rbd]\{c\})$	7,8,9,$\wedge$i
11		$\lfloor \exists R \rfloor \lceil OneOne(R) \ \wedge \ Dom(R)\{a\}$ $\wedge \ Cdom(R)\{c\}\rceil$	10,$\exists$i,$\star$[Rbd]/R
12		$a \infty c$	11,D1.1
13		$a \infty c$	3,4-12,$\exists$e
	Th.		1-13,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$D1.9(aux.): \lfloor Rabcd \rfloor \lceil *[Rbd]\{ac\} \equiv . \sim Dom(R)\{b\} \wedge \ \sim Cdom(R)\{d\} \wedge$
$(R\{ac\} \vee (b = a \ \wedge \ d = b))\rceil$

$T1.11-1: \lfloor Rbd \rfloor \lceil OneOne(R) \supset OneOne(*[Rbd]\rceil$

$T1.11-2: \lfloor Rabcd \rfloor \lceil OneOne(R) \ \wedge \ Dom(R)\{a\} \ \wedge \ Cdom(R)\{c\} \ \wedge \ b \varepsilon b \wedge$
$d \varepsilon d \wedge \ \sim (b \varepsilon a) \wedge \ \sim (d \varepsilon c). \supset Dom(*[Rbd])\{a \cup b\}\rceil$

$T1.11-3: \lfloor Rabcd \rfloor \lceil OneOne(R) \ \wedge \ Dom(R)\{a\} \ \wedge \ Dom(R)\{b\} \ \wedge \ b \varepsilon b \wedge$
$d \varepsilon d \wedge \ \sim (b \varepsilon a) \wedge \ \sim (d \varepsilon c). \supset Cdom(*[Rbd]\{c \cup d\}\rceil$

Nous omettons les démonstrations de ces thèses qui se font selon le même procédé que celui des thèses T1-10(1-3).

$T1.11 : \lfloor abcd \rfloor \lceil a \infty c \ \wedge \ b \varepsilon b \wedge \ \sim (b \varepsilon a) \ \wedge \ d \varepsilon d \wedge \ \sim (d \varepsilon c). \supset$
$\{a \cup b\} \infty \{c \cup d\} \rceil$

1	ab	$a \infty c$	hyp
2	bc	$b \varepsilon b \wedge \ \sim (b \varepsilon a)$	hyp
3		$d \varepsilon d \wedge \ \sim (d \varepsilon c)$	hyp
4		$\lfloor \exists R \rfloor \lceil OneOne(R) \ \wedge \ Dom(R)\{a\}$ $\wedge \ Cdom(R)\{c\} \rceil$	1,D1.4
5		R $OneOne(R)$	hyp
6		$Dom(R)\{a\}$	hyp
7		$Cdom(R)\{c\}$	hyp
8		$OneOne(*[Rbd])$	5,T1.11-1
9		$Dom(*[Rbd]\{a \cup b\}$	2,3,5,6,7,T1.11-2
10		$Cdom(*[Rbd]\{c \cup d\}$	2,3,5,6,7,T1.11-3
11		$OneOne(*[Rbd]) \ \wedge \ Dom(*[Rbd]\{a \cup b\}$ $\wedge \ Cdom(*[Rbd]\{c \cup d\}$	8,9,10,∧i
12		$\lfloor \exists S \rfloor \lceil OneOne(S) \ \wedge \ Dom(S)\{a \cup b\}$ $\wedge \ Cdom(S)\{c \cup d\} \rceil$	11,∃i,*[Rbd]/S
13		$\{a \cup b\} \infty \{c \cup d\}$	11,D1.1
14		$\{a \cup b\} \infty \{c \cup d\}$	4,5-13,∃e
		Th.	1-14,⊃i,⌊⌋i

$D1.10(aux.) : \lfloor abcd \rfloor \lceil = [ab]\{cd\} \equiv .a = c \wedge b = d \rceil$

$T1.12 - 1 : \lfloor ab \rfloor \lceil OneOne(=[ab]) \rceil$

1	$abc \mid = [xy]\{ac\} \wedge = [xy]\{bc\}. \vee . = [xy]\{ca\} \wedge = [xy]\{cb\}$	hyp
2	$= [xy]\{ac\}$	hyp
3	$= [xy]\{bc\}$	hyp
4	$x = a \wedge y = c$	2,D1.10
5	$x = b \wedge y = c$	3,D1.10
6	$a \,\varepsilon\, b$	4,5,∧e,D0.7
7	$= [xy]\{ca\}$	hyp
8	$= [xy]\{cb\}$	hyp
9	$x = c \wedge y = a$	7,D1.10
10	$x = c \wedge y = b$	8,D1.10
11	$a \,\varepsilon\, b$	9,10,∧e,D0.7
12	$a \,\varepsilon\, b$	1,2-6,7-11,∨e
13	$\lfloor abc \rfloor \lceil = [xy]\{ac\} \wedge = [xy]\{bc\}. \vee . = [xy]\{ca\} \wedge$	
	$= [xy]\{cb\} :\supset a \,\varepsilon\, b \rceil$	1-12,⊃i,⌊⌋i
	$Th.$	13,D1.1

$T1.12 - 2 : \lfloor ab \rfloor \lceil Sin\{a\} \wedge Sin\{b\}. \supset Dom(= [ab])\{a\} \rceil$

1	ab $Sin\{a\}$	hyp
2	$Sin\{b\}$	hyp
3	$a \,\varepsilon\, a$	1,D0.9
4	$b \,\varepsilon\, b$	2,D0.9
5	x $\lfloor \exists y \rfloor \lceil = [ab]\{xy\} \rceil$	hyp
6	$a = x$	5,D1.10
7	$x \,\varepsilon\, a$	6,D0.7
8	$x \,\varepsilon\, a$	hyp
9	$a \,\varepsilon\, a$	3,reit
10	$x = a$	8,9,T0.4,D0.7
11	$b \,\varepsilon\, b$	4,reit
12	$b = b$	11,D0.7
13	$\lfloor \exists y \rfloor \lceil a = x \wedge b = y \rceil$	10,12,∃i,b/y
14	$\lfloor \exists y \rfloor \lceil = [ab]\{xy\} \rceil$	13,D1.10
15	$\lfloor \exists y \rfloor \lceil = [ab]\{xy\} \rceil \equiv x \,\varepsilon\, a$	5-7,8-14,≡i
16	$\lfloor x \rfloor \lceil \lfloor \exists y \rfloor \lceil = [ab]\{xy\} \rceil \equiv x \,\varepsilon\, a \rceil$	5-15,⌊⌋i
17	$Dom(= [ab])\{a\}$	16,D1.2
	Th.	1-17,⊃i,⌊⌋i

$T1.12 - 3 : \lfloor ab \rfloor \lceil Sin\{a\} \wedge Sin\{b\}. \supset Cdom(= [ab])\{b\} \rceil$
La démonstration est similaire à celle de T.1.12-2

$T1.12 \lfloor ab \rfloor \lceil Sin\{a\} \wedge Sin\{b\}. \supset a \infty b \rceil$

1	ab $Sin\{a\} \wedge Sin\{b\}$	hyp
2	$OneOne(= [ab])$	T1.12-1
3	$Dom(= [ab])\{a\}$	1,T1.12-2,⊃e
4	$Cdom(= [ab]\{b\}$	1,T1.12-3,⊃e
5	$\lfloor R \rfloor \lceil OneOne(R) \wedge Dom(R)\{a\} \wedge Cdom(R)\{b\} \rceil$	3,4,5 ∧i,∃i,=[ab]/R
6	$a \infty b$	5,D1.4
	Th.	1-6,⊃i,⌊⌋i

2. Cardinalité

$D2.1$: $\lfloor ab \rfloor \lceil \infty\langle a\rangle\{b\} \equiv a\infty b \rceil$ Dfs[(s/n)/n]

$T2.1$: $\lfloor ab \rfloor \lceil \infty\langle a\rangle \approx \infty\langle b\rangle \equiv a\infty b \rceil$

Cette thèse correspond au Principe de Hume, ce qui montre que $\infty\langle a\rangle$ exprime le nombre cardinal de a. Pour «être un nombre cardinal», on pose :

$D2.2$: $\lfloor \varphi \rfloor \lceil Cn[\varphi] \equiv \lfloor \exists a \rfloor \lceil \infty\langle a\rangle \approx \varphi \rceil \rceil$ Dfs[s/(s/n)]

$T2.2$: $\lfloor a \rfloor \lceil \infty\langle a\rangle\{a\} \rceil$

1	a	$a\infty a$	T1.3
2		$\infty\langle a\rangle\{a\}$	1,D2.1
	Th.		1,2,$\lfloor\rfloor$i

$T2.3$: $\lfloor ab \rfloor \lceil \infty\langle a\rangle\{b\} \supset \infty\langle b\rangle\{a\} \rceil$

1	ab	$\infty\langle a\rangle\{b\}$	hyp
2		$a\infty b$	1,D2.1
3		$b\infty a$	2,T1.4
4		$\infty\langle b\rangle\{a\}$	2,D2.1
	Th.		1-4,$\lfloor\rfloor$i

$T2.4$: $\lfloor abc \rfloor \lceil \infty\langle a\rangle\{b\} \wedge \infty\langle b\rangle\{c\}. \supset \infty\langle a\rangle\{c\} \rceil$

1	abc	$\infty\langle a\rangle\{b\} \wedge \infty\langle b\rangle\{c\}$	hyp
2		$a\infty b$	1,D2.1
3		$b\infty c$	1,D2.1
4		$a\infty c$	2,3,T1.5
5		$\infty\langle a\rangle\{c\}$	4,D2.1
	Th.		1-5,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$D2.3$: $\lfloor \varphi \rfloor \lceil N[\varphi] \equiv \lfloor ab \rfloor \lceil \varphi\{a\} \wedge a\infty b. \supset \varphi\{b\} \rceil \rceil$ Dfs[s/(s/n)]
Etre une propriété numérique de noms

$D2.4$: $\lfloor \varphi \rfloor \lceil Q[\varphi] \equiv \lfloor ab \rfloor \lceil \varphi\{a\} \wedge \varphi\{b\}. \supset a\infty b \rceil \rceil$ Dfs[s/(s/n)]
Etre une propriété quantitative de noms

$T2.5 - 1 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil Cn[\varphi] \supset .![\varphi] \wedge N[\varphi] \wedge Q[\varphi]\rceil$

1	φ	$Cn[\varphi]$			hyp
2		$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\infty\langle a\rangle \approx \varphi\rceil$			1,D2.2
3		a	$\infty\langle a\rangle \approx \varphi$		hyp
4			$a\infty a$		T1.3
5			$\infty\langle a\rangle\{a\}$		4,D2.1
6			$\varphi\{a\}$		3,5,D0.11
7			$![\varphi]$		6,D0.12
8			bc	$\varphi\{b\} \wedge \varphi\{c\}$	hyp
9				$\infty\langle a\rangle\{b\} \wedge \infty\langle a\rangle\{c\}$	3,8,D0.11
10				$a\infty b$	9,D2.1
11				$a\infty c$	9,D2.1
12				$b\infty a$	10,T1.4
13				$b\infty c$	11,12,T1.5
14			$\lfloor bc\rfloor\lceil\varphi\{b\} \wedge \varphi\{c\}. \supset b\infty c\rceil$		8-13,⊃i,⌊⌋i
15			$Q[\varphi]$		14,D2.4
16			bc	$\varphi\{b\} \wedge b\infty c$	hyp
17				$b\infty c$	16,∧e
18				$\infty\langle a\rangle\{b\}$	3,16,D0.11
19				$a\infty b$	18,D2.1
20				$a\infty c$	17,19,T1.5
21				$\infty\langle a\rangle\{c\}$	20,D2.1
22				$\varphi\{c\}$	3,21,D0.11
23			$\lfloor bc\rfloor\lceil\varphi\{b\} \wedge a\infty b. \supset \varphi\{c\}\rceil$		16-22,⊃i,⌊⌋i
24			$N[\varphi]$		23,D2.3
25		$![\varphi] \wedge N[\varphi] \wedge Q[\varphi]$			7,15,24,∧i,2,3-24,∃e
	$Th.$				1-25,⊃i,⌊⌋i

$T2.5-2 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil ![\varphi] \wedge N[\varphi] \wedge Q[\varphi]. \supset Nn[\varphi]\rceil$

1	φ	$N[\varphi]$	hyp
2		$Q[\varphi]$	hyp
3		$![\varphi]$	hyp
4		$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\varphi\{a\}\rceil$	3,D0.12
5	a	$\varphi\{a\}$	hyp
6	d	$\infty\langle a\rangle\{d\}$	hyp
7		$\varphi\{a\}$	5,reit
8		$a\infty d$	6,D2.1
9		$\varphi\{a\} \wedge a\infty d. \supset \varphi\{d\}$	1,D2.3
10		$\varphi\{d\}$	7,8,9,⊃e
11	d	$\varphi\{d\}$	hyp
12		$\varphi\{a\}$	5,reit
13		$\varphi\{a\} \wedge \varphi\{d\}. \supset a\infty d$	2,D2.4
14		$a\infty d$	11,12,13,⊃e
15		$\infty\langle a\rangle\{d\}$	14,D2.1
16		$\lfloor d\rfloor\lceil\infty\langle a\rangle\{d\} \equiv \varphi\{d\}\rceil$	6-10,11-15,≡i,⌊⌋i
17		$\infty\langle a\rangle \approx \varphi$	16,D0.11
18		$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\infty\langle a\rangle \approx \varphi\rceil$	17,∃i
19		$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\infty\langle a\rangle \approx \varphi\rceil$	4,5-18,∃e
20		$Cn[\varphi]$	19,D2.2
		$Th.$	1-19,⊃i,⌊⌋i

$T2.5 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil Cn[\varphi] \equiv .![\varphi] \wedge N[\varphi] \wedge Q[\varphi]\rceil$ $\quad T2.5\text{-}1, T2.5\text{-}2,$≡i

$T2.6 : \lfloor\varphi a\rfloor\lceil\infty\langle a\rangle \approx \varphi \equiv .\varphi\{a\} \wedge N[\varphi] \wedge Q[\varphi]\rceil$ $\quad$ D2.2, $T2.5$

$T2.7 : \lfloor a\rfloor\lceil Cn[\infty\langle a\rangle]\rceil$

1	a	$a\infty a$	T1.3
2		$\infty\langle a\rangle \approx \infty\langle a\rangle$	T2.1
3		$\lfloor\exists b\rfloor\lceil\infty\langle b\rangle \approx \infty\langle a\rangle\rceil$	2,∃i
		$Th.$	3,D2.2

$T2.8: \ \lfloor a\rfloor\lceil ![\infty\langle a\rangle]\rceil \qquad T2.5, T2.7$

$T2.9: \ \lfloor a\rfloor\lceil N[\infty\langle a\rangle]\rceil \qquad T2.5, T2.7$

$T2.10: \lfloor a\rfloor\lceil Q[\infty\langle a\rangle\rceil \qquad T2.5, T2.7$

$T2.11: \lfloor a\rfloor\lceil\lfloor\exists\varphi\rfloor\lceil Cn[\varphi]\wedge\varphi\{a\}\rceil\rceil$

1	a	$\infty\langle a\rangle\{a\}$	T2.2
2		$Cn[\infty\langle a\rangle]$	T2.7
3		$Cn[\infty\langle a\rangle]\wedge\infty\langle a\rangle\{a\}$	1,2,$\wedge$i
4		$\lfloor\exists\varphi\rfloor\lceil Cn[\varphi]\wedge\varphi\{a\}\rceil$	3,$\exists$i, $\infty\langle a\rangle/\varphi$
	$Th.$		1-4,$\lfloor\rfloor$i

$T2.12: \lfloor a\varphi\psi\rfloor\lceil\varphi\{a\}\wedge\psi\{a\}\wedge Cn[\varphi]\wedge Cn[\psi].\supset\varphi\approx\psi\rceil$
Unicité de la cardinalité d'un nom

1	a $\varphi\psi$	$\varphi\{a\}\wedge\psi\{a\}\wedge Cn[\varphi]\wedge Cn[\psi]$		hyp
2		b	$\varphi/\psi\{b\}$	hyp
3			$\varphi/\psi\{a\}$	1,$\wedge$e
4			$Cn[\varphi/\psi]$	1,$\wedge$e
5			$Q[\varphi/\psi]$	1,$\wedge$e
6			$a\infty b$	2,3,5,D2.4
7			$\psi/\varphi\{a\}$	1,$\wedge$2
8			$Cn[\psi/\varphi]$	1,$\wedge$e
9			$N[\psi/\varphi]$	T2.7
10			$\psi/\varphi\{b\}$	6,7,9,D2.3
11		$\varphi/\psi\{b\}\supset\psi/\varphi\{b\}$		2-10,$\supset$i
12		$\varphi\{b\}\equiv\psi\{b\}$		11,$\equiv$i
13		$\lfloor b\rfloor\lceil\varphi\{b\}\equiv\psi\{b\}\rceil$		2-12,$\lfloor\rfloor$i
14		$\varphi\approx\psi$		13,D0.11
	$Th.$			1-14,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

3. Inductivité et finitude

$D3.1$: $\lfloor a\rfloor\lceil Ind\{a\} \equiv \lfloor\varphi\rfloor\lceil\varphi\{\wedge\} \wedge \lfloor bc\rfloor\lceil b\,\varepsilon\, a \wedge \varphi\{c\}\rceil. \supset \varphi\{c\cup b\}\rceil. \supset \varphi\{a\}\rceil\rceil$
Defs[s/n]
Inductivité : finitude au sens de Frege

$D3.2$: $\lfloor\varphi\rfloor\lceil Ind[\varphi] \equiv .\lfloor a\rfloor\lceil\varphi\{a\} \supset Ind\{a\}\rceil\rceil$ Dfs[s/(s/n)]
Etre une propriété de noms inductifs

$T3.1$: $Ind\{\wedge\}$
Le nom vide est inductif

1	φ	$\varphi\{\wedge\} \wedge \lfloor bc\rfloor\lceil b\varepsilon a \wedge \varphi\{c\}\rceil. \supset \varphi\{c\cup b\}$	hyp
2		$\varphi\{\wedge\}$	1,∧e
3	$\varphi\{\wedge\} \wedge \lfloor bc\rfloor\lceil b\varepsilon a \wedge \varphi\{c\}. \supset \varphi\{c\cup b\}\rceil. \supset \varphi\{\wedge\}$		1-2,⊃i
	$Th.$		1-3,D3.1

$T3.2$: $![Ind]$

1		$Ind\{\wedge\}$	T3.1
2		$\lfloor\exists a\rfloor\lceil Ind\{a\}\rceil$	1,∃i,∧/a
	$Th.$		2,D0.12

$T3.3 : \lfloor a \rfloor \lceil Sin\{a\} \supset Ind\{a\} \rceil$
Les noms singuliers sont inductifs

1	$a \mid Sin\{a\}$	hyp
2	$\varphi \mid \varphi\{\wedge\} \wedge \lfloor bc \rfloor \lceil b \varepsilon a \wedge \varphi\{c\} \rceil . \supset \varphi\{c \cup b\}$	hyp
3	$\varphi\{\wedge\}$	2,∧e
4	$a \varepsilon a$	1,D0.9
5	$a \varepsilon a \wedge \varphi\{\wedge\} . \supset \varphi\{\wedge \cup a\}$	2,∧e,⌊⌋e,b/a,c/∧
6	$\varphi\{\wedge \cup a\}$	3,4,5,⊃e
7	$a \approx \{\wedge \cup a\}$	T0.13
8	$\varphi\{a\}$	6,7,Ext.
9	$\lfloor \varphi \rfloor \lceil \varphi\{\wedge\} \wedge \lfloor bc \rfloor \lceil b \varepsilon a \wedge \varphi\{c\} .$	
	$\supset \varphi\{c \cup b\} \rceil . \supset \varphi\{a\} \rceil$	2-8,⊃i,⌊⌋i
10	$Ind\{a\}$	9,D3.1
	Th.	1-10,⊃i,⌊⌋i

$D3.3(aux) : \lfloor ab\varphi \rfloor \lceil \cup\langle \varphi a \rangle\{b\} \equiv \varphi\{a \cup b\} \rceil$ Dfs[(s/n)/((s/n)n)]

$T3.4 - 1 : \lfloor a\varphi \rfloor \lceil \varphi\{a\} \supset \cup\langle \varphi a \rangle\{\wedge\} \rceil$

1	$a\varphi \mid \varphi\{a\}$	hyp
2	$a \approx \{a \cup \wedge\}$	T0.13
3	$\varphi\{a \cup \wedge\}$	1,2,Ext
4	$\cup\langle \varphi a \rangle\{\wedge\}$	3,D3.3
	Th.	1-4,⊃i,⌊⌋i

$T3.4 : \lfloor ab \rfloor \lceil Ind\{a\} \wedge Ind\{b\}. \supset Ind\{a \cup b\} \rceil$
L'union des noms inductifs est un nom inductif

1	ab	$Ind\{a\}$	hyp
2		$Ind\{b\}$	hyp
3	φ	$\varphi\{\wedge\}$	hyp
4		$\lfloor cd \rfloor \lceil c\,\varepsilon\,\{a \cup b\} \wedge \varphi\{d\}. \supset \varphi\{d \cup c\} \rceil$	hyp
5	cd	$c\,\varepsilon\,a \wedge \varphi\{d\}$	hyp
6		$c\,\varepsilon\,c$	5,T0.2
7		$c\,\varepsilon\,a \vee c\,\varepsilon\,b$	5,∨i
8		$c\,\varepsilon\,\{a \cup b\}$	6,7,D0.16
9		$\varphi\{d \cup c\}$	4,5,8,⊃e
10		$\lfloor cd \rfloor \lceil c\,\varepsilon\,a \wedge \varphi\{d\}. \supset \varphi\{d \cup c\} \rceil$	5-9,⊃i,⌊⌋i
11		$\varphi\{a\}$	1,D3.1,3,10,⊃e
12		$\cup\langle \varphi a \rangle\{\wedge\}$	11,T3.4-1
13	cd	$c\varepsilon b$	hyp
14		$\cup\langle \varphi a \rangle\{d\}$	hyp
15		$c\,\varepsilon\,c$	13,T0.2
16		$c\,\varepsilon\,a \vee c\,\varepsilon\,b$	13,∨i
17		$c\,\varepsilon\,\{a \cup b\}$	15,16,D0.16
18		$\varphi\{a \cup d\}$	14,D3.3
19		$c\,\varepsilon\,\{a \cup b\} \wedge \varphi\{a \cup d\}. \supset \varphi\{a \cup d \cup c\}$	4,⌊⌋e,c/d,d/a∪d
20		$\varphi\{a \cup d \cup c\}$	17,18,19,⊃e
21		$\cup\langle \varphi a \rangle\{d \cup c\}$	20,D3.3
22		$\lfloor cd \rfloor \lceil c\,\varepsilon\,b \wedge \cup\langle \varphi a \rangle\{d\}. \supset \cup\langle \varphi a \rangle\{d \cup c\} \rceil$	13-21,⊃i,⌊⌋i
23		$\cup\langle \varphi a \rangle\{\wedge\} \wedge \lfloor cd \rfloor \lceil c\,\varepsilon\,b \wedge \cup\langle \varphi a \rangle\{d\}. \supset \cup\langle \varphi a \rangle\{d \cup c\} \rceil.$ $\supset \cup\langle \varphi a \rangle\{b\}$	2,D3.1, … ⌊⌋e,φ/∪⟨φa⟩
24		$\cup\langle \varphi a \rangle\{b\}$	12,22,23,⊃e
25		$\varphi\{a \cup b\}$	24,D3.3
26		$\lfloor \varphi \rfloor \lceil \varphi\{\wedge\} \wedge \lfloor cd \rfloor \lceil c\,\varepsilon\,\{a \cup b\} \wedge \varphi\{d\}. \supset \varphi\{d \cup c\} \rceil. \supset$ $\varphi\{a \cup b\} \rceil$	3-26,⊃i
27		$Ind\{a \cup b\}$	26,D3.1
	$Th.$		1-27,⊃i,⌊⌋i

$D3.4(aux) : \lfloor a \rfloor \lceil Ind_{\subset}\{a\} \equiv \lfloor b \rfloor \lceil b \subset a \supset Ind\{b\} \rceil \rceil$ Dfs[s/n]

$T3.5 - 1 : Ind_{\subset}\{\wedge\}$

1	b	$b \subset \wedge$	hyp
2		$\lfloor c \rfloor \lceil c\, \varepsilon\, b \supset c\, \varepsilon \wedge \rceil$	1,D0.1
3		$c\, \varepsilon \wedge$	hyp
4		$c\, \varepsilon\, c$	3,D0.14
5		$\sim (c\, \varepsilon\, c)$	3,D0.14
6		$c\, \varepsilon\, b$	4,5,∼e
7		$\lfloor c \rfloor \lceil c\, \varepsilon \wedge \supset c\, \varepsilon\, b \rceil$	3-6,⊃i,⌊⌋i
8		$\lfloor c \rfloor \lceil c\, \varepsilon\, b \equiv c\, \varepsilon \wedge \rceil$	2,7,≡i
9		$b \approx \wedge$	8,D0.6
10		$Ind\{\wedge\}$	T3.1
11		$Ind\{b\}$	9,10,Ext
12		$\lfloor b \rfloor \lceil b \subset \wedge \supset Ind\{b\} \rceil$	1-11,⊃i,⌊⌋i
		$Th.$	12,D3.4

$T3.5 - 2 : \lfloor bcd \rfloor \lceil b \subset \{d \cup c\} \wedge c\, \varepsilon\, b. \supset \{b - c\} \subset d \rceil$

1	bcd	$b \subset \{d \cup c\}$	hyp
2		$c\, \varepsilon\, b$	hyp
3	e	$e\, \varepsilon\, \{b - c\}$	hyp
4		$\sim (e\, \varepsilon\, c)$	3,D0.18
5		$e\, \varepsilon\, b$	3,D0.18
6		$e\, \varepsilon\, \{d \cup c\}$	1,5,D0.1
7		$e\, \varepsilon\, d \vee e\, \varepsilon\, c$	6,D0.16
8		$e\, \varepsilon\, d$	4,7,∨e
9		$\lfloor e \rfloor \lceil e\, \varepsilon\, \{b - c\} \supset e\, \varepsilon\, d \rceil$	3-8,⊃i,⌊⌋i
10		$\{b - c\} \subset d$	9,D0.1
		$Th.$	1-10,⊃i,⌊⌋i

$T3.5-3 : \lfloor bcd \rfloor \lceil b \subset \{d \cup c\} \wedge\ c \varepsilon c\ \wedge \sim (c \varepsilon b).\supset b \subset d \rceil$

1	$bcd \mid b \subset \{d \cup c\}$	hyp
2	$c \varepsilon c$	hyp
3	$\sim (c \varepsilon b)$	hyp
4	$e \mid e \varepsilon b$	hyp
5	$e \varepsilon \{d \cup c\}$	1,4,D0.1
6	$e \varepsilon d \vee e \varepsilon c$	5,D0.16
7	$e \varepsilon c$	hyp
8	$c \varepsilon c$	2,reit
9	$c \varepsilon e$	7,8,T0.4
10	$e \varepsilon b$	4,reit
11	$c \varepsilon b$	9,10,T0.3
12	$\sim (c \varepsilon b)$	3,reit
13	$\sim (e \varepsilon c)$	7,11,12,$\sim$i
14	$e \varepsilon d$	6,13,$\vee$e
15	$\lfloor e \rfloor \lceil e \varepsilon b \supset e \varepsilon d \rceil$	4-14,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
16	$b \subset d$	15,D0.1
	$Th.$	1-16,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$T3.5-4 : \lfloor bc \rfloor \lceil c\,\varepsilon\, b. \supset \{\{b-c\} \cup c\} \approx b \rceil$

1	bc | $c\,\varepsilon\, b$	hyp
2	a | $a\,\varepsilon\,\{\{b-c\} \cup c\}$	hyp
3	$a\,\varepsilon\,\{\{b-c\} \vee a\,\varepsilon\, c$	2,D0.16
4	$a\,\varepsilon\,\{b-c\}$	hyp
5	$a\,\varepsilon\, b$	4,D0.18
6	$a\,\varepsilon\, c$	hyp
7	$c\,\varepsilon\, b$	1,reit
8	$a\,\varepsilon\, b$	6,7,T0.3
9	$a\,\varepsilon\, b$	3,4-5,6-8,∨e
10	$a\,\varepsilon\, b$	hyp
11	$a\,\varepsilon\, c \vee \sim (a\,\varepsilon\, c)$	tiers exclu
12	$a\,\varepsilon\, c$	hyp
13	$a\,\varepsilon\,\{\{b-c\} \cup c\}$	12,∪i
14	$\sim (a\,\varepsilon\, c)$	hyp
15	$a\,\varepsilon\, b$	10,reit
16	$a\,\varepsilon\,\{b-c\}$	14,15,D0.18
17	$a\,\varepsilon\,\{\{b-c\} \cup c\}$	16,∪i
18	$a\,\varepsilon\,\{\{b-c\} \cup c\}$	11,12-13,14-17,∨e
19	$a\,\varepsilon\,\{\{b-c\} \cup c\} \equiv a\,\varepsilon\, b$	2-9,10-18,≡i
20	$\lfloor a \rfloor \lceil a\,\varepsilon\,\{\{b-c\} \cup c\} \equiv a\,\varepsilon\, b \rceil$	2-19,⌊⌋i
21	$\{\{b-c\} \cup c\} \approx b$	20,D0.16
	Th.	1-21,⊃i,⌊⌋i

$T3.5 : \lfloor ab \rfloor \lceil Ind\{a\} \wedge b \subset a. \supset Ind\{b\} \rceil$
Tout nom inclus dans un nom inductif est un nom inductif

1	ab	$Ind\{a\}$	hyp
2		$b \subset a$	hyp
3		$Ind_{\subset}\{\wedge\} \wedge \lfloor cd \rfloor \lceil c\,\varepsilon\, a \wedge Ind_{\subset}\{d\}. \supset Ind_{\subset}\{d \cup c\} \rceil. \supset$ $Ind_{\subset}\{a\}$	1,D3.1
4		$Ind_{\subset}\{\wedge\}$	T3.5-1
5	cd	$c\,\varepsilon\, a$	hyp
6		$Ind_{\subset}\{d\}$	hyp
7	b	$b \subset \{d \cup c\}$	hyp
8		$c\,\varepsilon\, b \vee \sim (c\,\varepsilon\, b)$	tiers exclu
9		$c\,\varepsilon\, b$	hyp
10		$b \subset \{d \cup c\}$	7,reit
11		$\{b - c\} \subset d$	9,10,T3.5-2
12		$Ind_{\subset}\{d\}$	6,reit
13		$Ind\{b - c\}$	11,12,D3.4,$\lfloor\rfloor$e,$\supset$e
14		$Sin\{c\}$	9,T0.8
15		$Ind\{c\}$	14,T3.3
16		$Ind\{\{b - c\} \cup c\}$	13,15,T3.4
17		$\{\{b - c\} \cup c\} \approx b$	9,T3.5-4
18		$Ind\{b\}$	16,17,Ext
19		$\sim (c\,\varepsilon\, b)$	hyp
20		$c\,\varepsilon\, c$	5,T0.2
21		$b \subset \{d \cup c\}$	7,reit
22		$b \subset d$	19,20,21,T3.5-3
23		$Ind_{\subset}\{d\}$	6,reit
24		$Ind\{b\}$	22,23,D3.4
25		$Ind\{b\}$	8,9-18,19-25,$\vee$e
26		$\lfloor b \rfloor \lceil b \subset \{d \cup c\} \supset Ind\{b\} \rceil$	7-25,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
27		$Ind_{\subset}\{a\}$	26,D3.4
28		$\lfloor cd \rfloor \lceil c\,\varepsilon\, a \wedge Ind_{\subset}\{d\}. \supset Ind_{\subset}\{d \cup c\} \rceil$	5-27,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
29		$Ind_{\subset}\{a\}$	3,4,28,$\supset$e
30		$\lfloor b \rfloor \lceil a \subset c \supset Ind\{b\} \rceil$	29,D3.4
31		$Ind\{b\}$	2,30,$\supset$e
	$Th.$		1-31,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$D3.5(aux) : \lfloor a \rfloor \lceil Ind_{\infty}\{a\} \equiv \lfloor b \rfloor \lceil a \infty b \supset Ind\{b\} \rceil \rceil$ Dfs [s/n]

$T3.6 - 1 : Ind_{\infty}\{\wedge\}$

1	b	$\wedge \infty b$	hyp
2		$Emp\{\wedge\}$	T0.11
3		$Emp\{b\}$	1,2,T1.9
4		$b \approx \wedge$	2,3,T0.9
5		$Ind\{\wedge\}$	T3.1
6		$Ind\{b\}$	4,5,Ext
7	$\lfloor b \rfloor \lceil \wedge \infty b \supset Ind\{b\} \rceil$		1-6,⊃i,⌊⌋i
	$Th.$		7,D3.5

$T3.6 - 2 : \lfloor bcd \rfloor \lceil \{\{d \cup c\} \infty b \wedge c \,\varepsilon\, d. \supset d \infty b \rceil$

1	bcd	$\{d \cup c\} \infty b$				hyp
2		$c \,\varepsilon\, d$				hyp
3		e		$e \,\varepsilon\, \{d \cup c\}$		hyp
4				$e \,\varepsilon\, d \vee e \,\varepsilon\, c$		3,D0.16
5					$e \,\varepsilon\, d$	hyp
6					$e \,\varepsilon\, d$	5,rep
7					$e \,\varepsilon\, c$	hyp
8					$c \,\varepsilon\, d$	2,reit
9					$e \,\varepsilon\, d$	7,8,T0.3
10				$e \,\varepsilon\, d$		4,5-6,7-9,∨e
11				$e \,\varepsilon\, d$		hyp
12				$e \,\varepsilon\, \{d \cup c\}$		11,∪i
13			$e \,\varepsilon\, d \equiv e \,\varepsilon\, \{d \cup c\}$			3-10,11-12,≡i
14		$\lfloor e \rfloor \lceil e \,\varepsilon\, d \equiv e \,\varepsilon\, \{d \cup c\} \rceil$				3-13,⌊⌋i
15		$d \approx \{d \cup c\}$				14,D0.6
16		$d \infty \{d \cup c\}$				15,T1.6
17		$d \infty b$				1,16,T1.5
	$Th.$					1-17,⊃i,⌊⌋i

$T3.6 - 3 : \lfloor bcde \rfloor \lceil \{d \cup c\} \infty b \wedge c \,\varepsilon\, c \wedge \sim (c \,\varepsilon\, d) \wedge e \,\varepsilon\, b. \supset d \infty \{b - e\} \rceil$
Cf. $T1.10$

$T3.6$: $\lfloor ab \rfloor \lceil Ind\{a\} \wedge a \infty b. \supset Ind\{b\} \rceil$
Les noms équinumériques sont inductifs ensemble

1	ab $Ind\{a\}$	hyp
2	$a \infty b$	hyp
3	$Ind_\infty\{\wedge\} \wedge \lfloor cd \rfloor \lceil c \varepsilon a \wedge Ind_\infty\{d\}. \supset Ind_\infty\{d \cup c\} \rceil.$ $\supset Ind_\infty\{a\}$	1,D3.1
4	$Ind_\infty\{\wedge\}$	T3.6-1
5	cd $c \varepsilon a$	hyp
6	$Ind_\infty\{d\}$	hyp
7	b $\{d \cup c\} \infty b$	hyp
8	$c \varepsilon d \vee \sim (c \varepsilon d)$	tiers exclu
9	$c \varepsilon d$	hyp
10	$d \infty b$	7,9,T3.6-2
11	$Ind_\infty\{d\}$	6,reit
12	$Ind\{b\}$	10,11,D3.5,$\lfloor\rfloor$e,$\supset$e
13	$\sim (c \varepsilon d)$	hyp
14	$c \varepsilon c$	5,T0.2
15	$c \varepsilon \{d \cup c\}$	14,$\cup$i
16	$\sim Emp\{d \cup c\}$	15,D0.10
17	$\sim Emp\{b\}$	7,16,$\sim$T1.8
18	$\lfloor \exists e \rfloor \lceil e \varepsilon b \rceil$	17,D0.10
19	e $e \varepsilon b$	hyp
20	$d \infty \{b - e\}$	7,13,14,19,T3.6-3
21	$Ind_\infty\{d\}$	6,reit
22	$Ind\{b - e\}$	20,21,D3.5,$\lfloor\rfloor$e,$\supset$e
23	$Sin\{e\}$	19,T0.8
24	$Ind\{e\}$	23,T3.3
25	$Ind\{\{b - e\} \cup e\}$	22,24,T3.4
26	$\{\{b - e\} \cup e\} \approx b$	19,T3.5-4
27	$Ind\{b\}$	25,26,Ext
28	$Ind\{b\}$	18,19-27,$\exists$e
29	$Ind\{b\}$	8,9-12,13-28,$\vee$e
30	$\lfloor b \rfloor \lceil \{d \cup c\} \infty b \supset Ind\{b\} \rceil$	7-29,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

31	$\quad\quad \mid Ind_{\infty}\{d \cup c\}$	30,D3.5
32	$\quad \lfloor cd \rfloor \lceil c \varepsilon a \wedge Ind_{\infty}\{d\}. \supset Ind_{\infty}\{d \cup c\} \rceil$	5-31,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
33	$\quad Ind_{\infty}\{a\}$	3,4,32,$\supset$e
34	$\quad \lfloor b \rfloor \lceil a \infty b \supset Ind\{b\} \rceil$	33,D3.5
35	$\quad Ind\{b\}$	2,34,$\supset$e
	$Th.$	1-35,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$T3.7 : N[Ind]$ T3.6, D2.3

$D3.6 : \lfloor a \rfloor \lceil Find\{a\} \equiv \lfloor b \rfloor \lceil b \subset a \wedge \sim (a \subset b). \supset \sim (a \infty b) \rceil \rceil$ Dfs[s/n]
Finitude au sens de Dedekind

$T3.8-1 : \lfloor ab \rfloor \lceil b \subset a \,.\supset \lfloor \exists c \rfloor \lceil \{c \cup b\} \approx a \wedge \sim \lfloor \exists d \rfloor \lceil d \varepsilon c \wedge d \varepsilon b \rceil \rceil \rceil$

1	ab	$b \subset a$	hyp
2	d	$d \varepsilon \{a-b\}$	hyp
3		$\sim (d \varepsilon b)$	2,D0.18
4		$\lfloor d \rfloor \lceil d \varepsilon \{a-b\} \supset \sim (d \varepsilon b) \rceil$	2-3,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
5		$\sim (\lfloor \exists d \rfloor \lceil d \varepsilon c \wedge d \varepsilon b \rceil$	4
6	e	$e \varepsilon \{\{a-b\} \cup b\}$	hyp
7		$e \varepsilon \{a-b\} \vee e \varepsilon b$	6,D0.16
8		$e \varepsilon \{a-b\}$	hyp
9		$e \varepsilon a$	8,D0.18
10		$e \varepsilon b$	hyp
11		$b \subset a$	1,reit
12		$e \varepsilon a$	10,11,D0.1
13		$e \varepsilon a$	7,8-9,10-12,$\vee$e
14		$e \varepsilon a$	hyp
15		$e \varepsilon b \vee \sim (e \varepsilon b)$	tiers exclu
16		$e \varepsilon b$	hyp
17		$e \varepsilon \{\{a-b\} \cup b\}$	16,$\cup$i
18		$\sim (e \varepsilon b)$	hyp
19		$e \varepsilon a$	14,reit
20		$e \varepsilon \{a-b\}$	18,19,$\wedge$i,D0.18
21		$e \varepsilon \{\{a-b\} \cup b$	20,$\cup$i,D0.16
22		$e \varepsilon \{\{a-b\} \cup b$	15,16-17,18-21,$\vee$e
23		$e \varepsilon \{a-b\} \cup b\} \equiv e \varepsilon a$	6-13,14-22,$\equiv$i
24		$\lfloor e \rfloor \lceil e \varepsilon \{a-b\} \cup b\} \equiv e \varepsilon a \rceil$	6-23,$\lfloor\rfloor$i
25		$\{a-b\} \cup b \approx a$	24,D0.6
26		$\lfloor \exists c \rfloor \lceil \{c \cup b\} \approx a \wedge \sim \lfloor \exists d \rfloor \lceil d \varepsilon c \wedge d \varepsilon b \rceil \rceil$	5,25,$\wedge$i,$\exists$i,c/a-b
	$Th.$		1-26,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$D3.7(aux) : \lfloor b \rfloor \lceil \diamond\{b\} \equiv \lfloor a \rfloor \lceil \{a \cup b\} \infty b \wedge \sim \lfloor \exists e \rfloor \lceil e \,\varepsilon\, b \wedge e \,\varepsilon\, a. \supset a \infty \wedge \rceil \rceil \rceil$

$T3.8 - 2 : \diamond\{\wedge\}$

$$
\begin{array}{l|l|ll}
1 & a & \{a \cup \wedge\} \infty \wedge & \text{hyp} \\
2 & & \sim \lfloor \exists e \rfloor \lceil e \,\varepsilon\, \wedge \,.\, \wedge \,. e \,\varepsilon\, a \rceil & \text{hyp} \\
\cline{3-3}
3 & & \{a \cup \wedge\} \approx a & \text{T0.13} \\
4 & & \{a \cup \wedge\} \infty a & \text{T1.6} \\
5 & & a \infty \wedge & \text{1,4,T1.4,T1.5} \\
 & Th. & & \text{1-5,}\supset\text{i,}\lfloor\rfloor\text{i}
\end{array}
$$

$T3.8-3 : \lfloor b\rfloor\lceil Ind\{b\} \supset \lfloor a\rfloor\lceil\{a\cup b\}\infty b \wedge \sim \lfloor\exists e\rfloor\lceil e\,\varepsilon\, b\wedge e\,\varepsilon\, a\rceil \supset a\infty\wedge\rceil\rceil$

1	b	$Ind\{b\}$	hyp
2		$\diamond\{\wedge\} \wedge \lfloor cd\rfloor\lceil c\,\varepsilon\, b \wedge \diamond\{d\}. \supset \diamond\{d\cup c\}\rceil. \supset \diamond\{b\}$	1,D3.1,$\varphi/\diamond$
3		$\diamond\{\wedge\}$	T3.8-2
4	cd	$c\,\varepsilon\, b\wedge\diamond\{d\}$	hyp
5		$\lfloor a\rfloor\lceil\{a\cup d\}\infty d\wedge\sim\lfloor\exists e\rfloor\lceil e\,\varepsilon\, d\wedge e\,\varepsilon\, a\rceil. \supset a\infty\wedge\rceil$	4,D3.7,∧e
6	a	$\{a\cup\{d\cup c\}\}\infty\{d\cup c\}\wedge$	
		$\sim\lfloor\exists e\rfloor\lceil e\,\varepsilon\,\{d\cup c\}\wedge e\,\varepsilon\, a\rceil$	hyp
7		$c\,\varepsilon\, c$	4,∧e,reit,T0.2
8		$c\,\varepsilon\,\{d\cup c\}$	9,∪i
9		$\sim(c\,\varepsilon\, a)$	6,8,e/c
10		$c\,\varepsilon\, d\vee\sim(c\,\varepsilon\, d)$	tiers exclu
11		$c\,\varepsilon\, d$	hyp
12		$\{d\cup c\}\approx d$	11,D0.6,D016
13		$\diamond\{d\}$	4,∧e,reit
14		$\diamond\{d\cup c\}$	12,13,Ext
15		$a\infty\wedge$	6,14, D3.7,⊃e
16		$\sim(c\,\varepsilon\, d)$	hyp
17		$\sim(c\,\varepsilon\, a)$	9,reit
18		$\sim(c\,\varepsilon\,\{a\cup d\})$	16,17,D0.16
19		$c\,\varepsilon\, c$	9,reit
20		$\{\{a\cup d\}\cup c\}\infty\{d\cup c\}$	6,∧e,reit
21		$\{a\cup d\}\infty d$	16,18,19,20,T1-10
22		$a\infty\wedge$	5,6,21,⊃e
23		$a\infty\wedge$	10,11-15,16-22,∨e
24		$\diamond\{d\cup c\}$	6-23,⊃i,⌊⌋i, D3.7
25		$\lfloor cd\rfloor\lceil c\,\varepsilon\, b\wedge\diamond\{d\}. \supset\diamond\{d\cup c\}\rceil$	4-24,⊃i,⌊⌋i
26		$\diamond\{b\}$	2,3,25,∧e
		Th.	1-26,⊃i,D3.7,⌊⌋i

$T3.8 : \lfloor a \rfloor \lceil Ind\{a\} \supset FinDed\{a\} \rceil$

1	a $Ind\{a\}$	hyp
2	b $b \subset a$	hyp
3	$\sim (a \subset b)$	hyp
4	$a \infty b$	hyp
5	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil \{c \cup b\} \approx a \wedge \sim \lfloor \exists d \rfloor \lceil d \,\varepsilon\, c \wedge d \,\varepsilon\, b \rceil \rceil$	2,T3.8-1
6	c $\{c \cup b\} \approx a$	hyp
7	$\sim \lfloor \exists d \rfloor \lceil d \,\varepsilon\, c \wedge d \,\varepsilon\, b \rceil$	hyp
8	$a \infty b$	4,reit
9	$\{c \cup b\} \infty b$	6,8,Ext
10	$Ind\{b\}$	1,2,T3.5
11	$\{c \cup b\} \infty b \ \wedge \sim \lfloor \exists d \rfloor \lceil d \,\varepsilon\, b \wedge d \,\varepsilon\, c \rceil$	
	$\supset c \infty \Lambda$	10,T3.8-3,⌊⌋e,a/c
12	$c \infty \Lambda$	7,9,⊃e
13	$c \approx \Lambda$	12,T1.8,D0.4
14	$\{c \cup b\} \approx b$	13,T0.14
15	$b \approx a$	6,14,Ext
16	$\lfloor d \rfloor \lceil d \,\varepsilon\, b \equiv d \,\varepsilon\, a \rceil$	15,D0.6
17	$\lfloor d \rfloor \lceil d \,\varepsilon\, b \supset d \,\varepsilon\, a \rceil$	16
18	$a \subset b$	17,D1.1
19	$a \subset b$	5,6-18,∃e
20	$\sim (a \subset b)$	3,reit
21	$\sim (a \infty b)$	4,19,20,∼i
22	$\lfloor b \rfloor \lceil b \subset a \wedge \sim (a \subset b). \supset \sim (a \infty b \rceil$	2-21,⊃i,⌊⌋i
23	$FinDed\{a\}$	22,D3.6
	$Th.$	1-23,⊃i,⌊⌋i

$D3.8 : \lfloor a \rfloor \lceil FinT\{a\} \equiv \lfloor b \rfloor \lceil b \,\varepsilon\, a \supset \sim (a \infty \{a - b\}) \rceil \rceil$ Dfs[s/n]
Finitude «Tout»

$T3.9 : \lfloor a\rfloor\lceil FinDed\{a\} \supset FinT\{a\}\rceil$

1	a	$FinDed\{a\}$	hyp
2		$\lfloor b\rfloor\lceil b \subset a \wedge \sim (a \subset b). \supset\sim (a\infty b)\rceil$	D3.6
3	b	$b\,\varepsilon\, a$	hyp
4		$\{a-b\} \subset a \wedge \sim (a \subset \{a-b\}). \supset \sim(a\infty\{a-b\})$	1,$\lfloor\rfloor$e,b/a-b
5	c	$c\varepsilon\, \{a-b\}$	hyp
6		$c\,\varepsilon\, a \wedge \sim (c\,\varepsilon\, b)$	5,D0.18
7		$c\,\varepsilon\, a$	6,$\wedge$e
8		$\lfloor c\rfloor\lceil c\,\varepsilon\{a-b\} \supset c\,\varepsilon\, a\rceil$	5-7,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
9		$\{a-b\} \subset a$	7,D0.1
10		$a \subset \{a-b\}$	hyp
11		$\lfloor c\rfloor\lceil c\,\varepsilon\, a \supset c\,\varepsilon\,\{a-b\}\rceil$	10,D0.1
12		$b\,\varepsilon\, a \supset b\,\varepsilon\,\{a-b\}$	11,$\lfloor\rfloor$e, c/b
13		$b\,\varepsilon\, a$	3,reit
14		$b\,\varepsilon\,\{a-b\}$	12,13,$\supset$e
15		$\sim (b\,\varepsilon\, b)$	14,D0.18,$\wedge$e
16		$b\,\varepsilon\, b$	14,T0.2
17		$\sim (a \subset \{a-b\})$	10,15,16,$\sim$i
18		$\sim (a\infty\{a-b\})$	4,9,17,$\supset$e
19		$\lfloor b\rfloor\lceil b\,\varepsilon\, a \supset\sim (a\infty\{a-b\})\rceil$	3-18-$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
20		$FinT\{a\}$	19,D3.8
		$Th.$	1-20,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$D3.9 : \lfloor a\rfloor\lceil FinQ\{a\} \equiv .Emp\{a\} \vee \lfloor\exists b\rfloor\lceil b\,\varepsilon\, a \wedge \sim (a\infty\{a-b\})\rceil\rceil$ Dfs[s/n]
Finitude «quelque»

$T3.10 : \lfloor a \rfloor \lceil FinT\{a\} \supset Fin\{a\} \rceil$

1	a	$FinT\{a\}$	hyp
2		$\sim Emp\{a\}$	hyp
3		$\lfloor \exists c \rfloor \lceil c \varepsilon a \rceil$	2,D0.10
4	c	$c \varepsilon a$	hyp
5		$\sim (a \infty \{a - c\})$	1,reit,4,D3.8
6		$\lfloor \exists b \rfloor \lceil b \varepsilon a \wedge \sim (a \infty \{a - b\}) \rceil$	4,5,$\wedge$i,$\exists$i,c/b
7		$\lfloor \exists b \rfloor \lceil b \varepsilon a \wedge \sim (a \infty \{a - b\}) \rceil$	2,4,6,$\exists$e
8		$Emp\{a\} \vee \lfloor \exists b \rfloor \lceil b \varepsilon a \wedge \sim (a \infty \{a - b\}) \rceil$	2-7,$\supset$i
9		$FinQ\{a\}$	8,D3.9
	$Th.$		1-9,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

4. Axiome de l'infini

$*AxInf : \lfloor \exists aR \rfloor \lceil a\,\varepsilon\, a \wedge \lfloor bcd \rfloor \lceil R\{bd\} \wedge R\{cd\}. \vee .R\{db\} \wedge R\{dc\} :\supset$
$b\,\varepsilon\, c\rceil \wedge \lfloor b \rfloor \lceil b\,\varepsilon\, b \supset .\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{bc\} \rceil \wedge \lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{cb\} \rceil \equiv\sim (b\,\varepsilon\, a)\rceil\rceil$

Il y a un individu a *et une relation bi-univoque* R *telle que son domaine contient tout individu et son co-domaine tout individu sauf* a.

$*T4.1 :\sim Emp\{\vee\}$

1	$\lfloor \exists a \rfloor \lceil a\,\varepsilon\, a \rceil$	*AxInf,∧e
2	a | $a\,\varepsilon\, a$	hyp
3	| $a\,\varepsilon \vee$	2,D0.15
4	| $\lfloor \exists b \rfloor \lceil b\,\varepsilon \vee \rceil$	3,∃i,a/b
5	$\lfloor \exists b \rfloor \lceil b\,\varepsilon \vee \rceil$	1,2-4,∃e
6	$Emp\{\vee\} \equiv\sim \lfloor \exists b \rfloor \lceil b\,\varepsilon \vee \rceil$	D0.10
	Th.	5,6,∼≡e

$*T4.2 : \lfloor \exists a \rfloor \lceil a\varepsilon \vee \wedge (\vee \infty \{\vee - a\} \rceil$

1	$AxInf$	*AxInf
2	$Ra \mid a\,\varepsilon\,a$	hyp
3	$\lfloor bcd \rfloor \lceil R\{bd\} \wedge R\{cd\}. \vee .R\{db\} \wedge R\{dc\} :\supset b\,\varepsilon\,c \rceil$	hyp
4	$\lfloor b \rfloor \lceil b\,\varepsilon\,b \supset: \lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{bc\} \rceil \wedge .$ $\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{cb\} \rceil \equiv\sim (b\,\varepsilon\,a) \rceil$	hyp
5	$a\,\varepsilon \vee$	2,D0.15
6	$OneOne(R)$	3,D1.1
7	$b \mid b\,\varepsilon \vee$	hyp
8	$b\,\varepsilon\,b$	7,D0.15
9	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{bc\} \rceil$	4,8,⊃e,∧e
10	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{bc\} \rceil$	hyp
11	$Obj(R)$	6,T1.1
12	$Sin\{b\}$	10,11,D0.13
13	$b\,\varepsilon\,b$	12,D0.9
14	$b\,\varepsilon \vee$	13,D0.15
15	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{bc\} \rceil \equiv b\,\varepsilon \vee$	7-9,10-14,≡i
16	$Dom(R)\{\vee\}$	7-15,⌊⌋i,D1.2
17	$b \mid b\,\varepsilon\,\{\vee - a\}$	hyp
18	$\sim (b\,\varepsilon\,a)$	17,D0.18,∧e
19	$b\,\varepsilon\,b$	17,T0.2
20	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{cb\} \rceil \equiv\sim (b\,\varepsilon\,a)$	4,19,⊃e,∧e
21	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{cb\} \rceil$	18,20,≡e
22	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{cb\} \rceil$	hyp
23	$Obj(R)$	6,T1.1
24	$Sin\{b\}$	22,23,D0.13
25	$b\,\varepsilon\,b$	24,D0.9
26	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{cb\} \rceil \equiv\sim (b\,\varepsilon\,a)$	4,25,⊃e,∧e
27	$\sim (b\varepsilon a)$	22,26,≡e
28	$b\,\varepsilon \vee$	25,D0.15
29	$b\,\varepsilon\,\{\vee - a\}$	27,28,D0.18
30	$\lfloor \exists c \rfloor \lceil R\{cb\} \rceil \equiv b\,\varepsilon\,\{\vee - a\}$	17-21,22-29,≡i
31	$Cdom(R)\{\vee - a\}$	17-30,⌊⌋i,D1.3
32	$\lfloor \exists R \rfloor \lceil OneOne(R) \wedge Dom(R)\{\vee\} \wedge Cdom(R)\{\vee - a\} \rceil$	6,16,31,∧i,∃i
33	$\vee \infty \{\vee - a\}$	32,D1.4
34	$\lfloor \exists a \rfloor \lceil a\varepsilon \vee . \wedge . \vee \infty \{\vee - a\} \rceil$	5,33,∧i,∃i
	$Th.$	1,2-34,∃e

$*T4.3 :\sim FinT\{\vee\}$

1		$\lfloor \exists a \rfloor \lceil a\,\varepsilon \vee . \wedge . \vee \infty\{\vee - a\}\rceil$	*T4.2
2	a	$a\,\varepsilon \vee . \wedge . \vee \infty\{\vee - a\}$	hyp
3		$\lfloor a \rfloor \lceil a\,\varepsilon \vee \supset \sim (\vee \infty\{\vee - a\})\rceil$	hyp
4		$a\,\varepsilon \vee$	2,reit,$\wedge$e
5		$\sim (\vee \infty\{\vee - a\})$	3,4,$\supset$e
6		$\vee \infty\{\vee - a\}$	2,reit,$\wedge$e
7		$\sim \lfloor a \rfloor \lceil a\,\varepsilon \vee \supset \sim (\vee \infty\{\vee - a\})\rceil$	3,5,6,$\sim$i
8		$\sim FinT\{\vee\}$	7,D3.4,$\sim\equiv$e
	$Th.$		1,2-8,$\exists$e

$*T4.4 :\sim FinDed\{\vee\}$ $\quad *T4.3, T3.8$,$\sim\supset$e

$*T4.5 :\sim Ind\{\vee\}$ $\quad *T4.4, T3.7$,$\sim\wedge$e

$*T4.6 : \lfloor a \rfloor \lceil FinT\{a\} \supset \lfloor \exists b \rfloor \lceil b\,\varepsilon\, b \wedge \sim (b\,\varepsilon\, a)\rceil\rceil$
Aucun nom fini-T ne dénote tous les individus

1	a	$FinT\{a\}$	hyp
2		$\sim \lfloor \exists b \rfloor \lceil b\,\varepsilon\, b \wedge \sim (b\,\varepsilon\, a)\rceil$	hyp
3		$\lfloor b \rfloor \lceil b\,\varepsilon\, b \supset b\,\varepsilon\, a\rceil$	2
4	b	$b\,\varepsilon\, a$	hyp
5		$b\,\varepsilon\, b$	4,T0.2
6		$b\,\varepsilon \vee$	5,D0.15
7		$b\,\varepsilon \vee$	hyp
8		$b\,\varepsilon\, b$	7,T0.2
9		$b\,\varepsilon\, a$	3,8,$\supset$e
10		$b\,\varepsilon \vee \equiv b\,\varepsilon\, a$	4-6,7-9,$\equiv$i
11		$\lfloor b \rfloor \lceil b\,\varepsilon \vee \equiv b\,\varepsilon\, a\rceil$	4-10,$\lfloor\rfloor$i
12		$\vee \approx a$	11,D0.6
13		$FinT\{\vee\}$	1,12,Ext
14		$\sim FinT\{\vee\}$	*T4.3
15		$\sim\sim \lfloor \exists b \rfloor \lceil b\,\varepsilon\, b \wedge \sim (b\,\varepsilon\, a)\rceil$	2,13,14,$\sim$i
16		$\lfloor \exists b \rfloor \lceil b\,\varepsilon\, b \wedge \sim (b\,\varepsilon\, a)\rceil$	15,$\sim\sim$e
	$Th.$		1-16,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$*T4.7 : \lfloor a \rfloor \lceil FinDed\{a\} \supset \lfloor \exists b \rfloor \lceil b \,\varepsilon\, b \wedge \sim (b \,\varepsilon\, a) \rceil \rceil$ *T4.6,T3.8
Aucun nom fini-Ded ne dénote tous les individus

$*T4.8 : \lfloor a \rfloor \lceil Ind\{a\} \supset \lfloor \exists b \rfloor \lceil b \,\varepsilon\, b \wedge \sim (b \,\varepsilon\, a \rceil \rceil$ *T4.7,T3.7
Aucun nom inductif ne dénote tous les individus

5. Termes primitifs de Peano

$D5.1 : \lfloor a \rfloor \lceil 0\{a\} \equiv a\infty\wedge \rceil$ Dfs[s/n]
Zéro

$T5.1 : 0 \approx Emp$

1	a	$Emp\{a\}$	hyp
2		$Emp\{\wedge\}$	T0.11
3		$a\infty\wedge$	1,2,T1.7
4		$0\{a\}$	3,D5.1
5		$0\{a\}$	hyp
6		$a\infty\wedge$	5,D5.1
7		$Emp\{\wedge\}$	T0.11
8		$Emp\{a\}$	6,7,T1.8
9		$0\{c\} \equiv Emp\{a\}$	1-4,5-8,≡i
	Th.		1-9,⌊⌋i,D0.11

$T5.2 : 0 \approx \infty\langle\wedge\rangle$

1	a	$0\{a\}$	hyp
2		$Emp\{a\}$	1,T5.1
3		$Emp\{\wedge\}$	T0.11
4		$\wedge\infty a$	2,3,T1.7
5		$\infty\langle\wedge\rangle\{a\}$	4,D2.1
6		$\infty\langle\wedge\rangle\{a\}$	hyp
7		$\wedge\infty a$	6,D2.1
8		$Emp\{\wedge\}$	T0.11
9		$Emp\{a\}$	7,8,T1.9
10		$0\{a\}$	9,T5.1
11		$0\{a\} \equiv \infty\langle\wedge\rangle\{a\}$	1-5,6-10,≡i
	Th.		1-11,⌊⌋i,D0.11

$T5.3 : Ind[0]$

1	a	$0\{a\}$	hyp
2		$a\infty\wedge$	1,D5.1
3		$\wedge\infty a$	2,T1.4
4		$Ind\{\wedge\}$	T3.1
5		$Ind\{a\}$	3,4,T3.6
6	$\lfloor a \rfloor \lceil 0\{a\} \supset Ind\{a\} \rceil$		1-5,⊃i,⌊⌋i
	$Th.$		6,D3.2

$T5.4 : Cn[0]$

1	$0 \approx \infty\langle\wedge\rangle$	T5.2
2	$\lfloor \exists a \rfloor \lceil 0 \approx \infty\langle a \rangle \rceil$	1,∃i
	$Th.$	2,D2.2

$T5.5 : ![0]$ T5.4,T2.5,≡e,∧e

$T5.6 : N[0]$ T5.4,T2.5,≡e,∧e

$T5.7 : Q[0]$ T5.4,T2.5,≡e,∧e

$D5.2 : \lfloor \varphi a \rfloor \lceil S\langle\varphi\rangle\{a\} \equiv \lfloor \exists b \rfloor \lceil b \,\varepsilon\, a \wedge \varphi\{a - b\} \rceil \rceil$ Dfs[(s/n)/(s/n)]
Successeur

$T5.8 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil ![S\langle\varphi\rangle] \supset ![\varphi]\rceil$

1	φ $![S\langle\varphi\rangle]$	hyp
2	$\lfloor\exists a\rfloor\lceil S\langle\varphi\rangle\{a\}\rceil$	1,D0.12
3	$S\langle\varphi\rangle\{a\}$	hyp
4	$\lfloor\exists a\rfloor\lceil b\,\varepsilon\, a \wedge \varphi\{a-b\}\rceil$	3,D5.2
5	b $b\,\varepsilon\, a$	hyp
6	$\varphi\{a-b\}$	hyp
7	$\lfloor\exists c\rfloor\lceil\varphi\{c\}\rceil$	6,∃i,c/a-b
8	$\lfloor\exists c\rfloor\lceil\varphi\{c\}\rceil$	4,5-7,∃e
9	$\lfloor\exists c\rfloor\lceil\varphi\{c\}\rceil$	2,3-8,∃e
10	$![\varphi]$	9,D0.12
	Th.	1-10,⊃i,⌊⌋i

$T5.9 - 1 : \lfloor a\rfloor\lceil\sim(a \approx \vee) \supset \lfloor\exists b\rfloor\lceil b\,\varepsilon\, b \wedge \sim(b\,\varepsilon\, a)\rceil\rceil$

1	a $\sim(a \approx \vee)$	hyp
2	$\sim\lceil\exists b\rfloor\lceil b\,\varepsilon\, b \wedge \sim(b\,\varepsilon\, a)\rceil$	hyp
3	$\lfloor b\rfloor\lceil b\,\varepsilon\, b \supset b\,\varepsilon\, a\rceil$	2
4	a $b\,\varepsilon\, a$	hyp
5	$b\,\varepsilon\, b$	4,T0.2
6	$b\,\varepsilon \vee$	5,D0.15
7	$b\,\varepsilon \vee$	hyp
8	$b\,\varepsilon\, b$	7,D0.15
9	$b\,\varepsilon\, a$	3,reit,8,⊃e
10	$b\,\varepsilon \vee \equiv b\,\varepsilon\, a$	4-6,7-9,≡i
11	$\lfloor a\rfloor\lceil b\,\varepsilon \vee \equiv b\,\varepsilon\, a\rceil$	4-10,⌊⌋i
12	$a \approx \vee$	11,D0.6
13	$\sim(a \approx \vee)$	1,reit
14	$\lfloor\exists b\rfloor\lceil b\,\varepsilon\, b \wedge \sim(b\,\varepsilon\, a)\rceil$	2,12,13,∼i,∼∼e
	Th.	1-14,⊃i,⌊⌋i

$*T5.9-2 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil ![\varphi] \wedge N[\varphi]. \supset \lfloor\exists a\rfloor\lceil\varphi\{a\}\wedge \sim(a \approx \vee)\rceil\rceil$

1	φ	$N[\varphi] \wedge ![\varphi]$	hyp
2		$\sim\varphi\{\vee\} \vee \varphi\{\vee\}$	tiers exclu
3		$\sim\varphi\{\vee\}$	hyp
4		$![\varphi]$	1,∧e,reit
5		$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\varphi\{a\}\rceil$	4,D0.12
6	a	$\varphi\{a\}$	hyp
7		$\sim\varphi\{\vee\}$	3,reit
8		$\sim(a \approx \vee\}$	6,7,Ext
9		$\varphi\{a\}\wedge\sim(a\approx\vee)$	6,8,∧i
10		$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\varphi\{a\}\wedge\sim(a\approx\vee)\rceil$	9,∃i
11		$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\varphi\{a\}\wedge\sim(a\approx\vee)\rceil$	5,6-10,∃e
12		$\varphi\{\vee\}$	hyp
13		$\sim FinDed\{\vee\}$	*T4.4
14		$\lfloor\exists a\rfloor\lceil a\subset\vee.\wedge.\sim(\vee\subset a)\wedge(\vee\infty a)\rceil$	13,D3.6
15	a	$a\subset\vee.\wedge.\sim(\vee\subset a)$	hyp
16		$\vee\infty a$	hyp
17		$\sim(a\approx\vee)$	15,D0.1,D0.6
18		$\varphi\{\vee\}$	12,reit
19		$N[\varphi]$	1,∧e,reit
20		$\varphi\{a\}$	16,18,∧i,19,D2.3
21		$\varphi\{a\}\wedge\sim(a\approx\vee)$	17,20,∧i
22		$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\varphi\{a\}\wedge\sim(a\approx\vee)\rceil$	21,∃i
23		$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\varphi\{a\}\wedge\sim(a\approx\vee)\rceil$	14,15-22,∃e
24		$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\varphi\{a\}\wedge\sim(a\approx\vee)\rceil$	2,3-11,12-23,∨e
		Th.	1-24,⊃i,⌊⌋i

$*T5.9 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil Cn[\varphi] \supset ![S\langle\varphi\rangle]\rceil$

1	φ	$Cn[\varphi]$	hyp
2		$![\varphi] \wedge N[\varphi]$	1,T2.5
3		$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\varphi\{a\}\wedge \sim (a \approx \vee)\rceil$	2,T5.9-2
4	a	$\varphi\{a\}$	hyp
5		$\sim (a \approx \vee)$	hyp
6		$\lfloor\exists b\rfloor\lceil b\,\varepsilon\, b \wedge \sim (b\,\varepsilon\, a)\rceil$	5,T5.9-1
7		$b\,\varepsilon\, b \wedge \sim (b\,\varepsilon\, a)$	hyp
8		$b\,\varepsilon\, b$	7,∧e
9		$b\,\varepsilon\,\{a \cup b\}$	8,∪i
10		$\sim (b\,\varepsilon\, a)$	7,∧e
11		$\{\{a \cup b\} - b\} \approx a$	8,10
12		$\varphi\{a\}$	4,reit
13		$\varphi\{\{a \cup b\} - b\}$	11,12,Ext
14		$b\,\varepsilon\,\{a \cup b\} \wedge \varphi\{\{a \cup b\} - b\}$	9,13,∧i
15		$\lfloor\exists c\rfloor\lceil c\,\varepsilon\,\{a \cup b\} \wedge \varphi\{\{a \cup b\} - c\}\rceil$	10,∃i,b/c
16		$S\langle\varphi\rangle\{a \cup b\}$	15,D5.2
17		$\lfloor\exists d\rfloor\lceil S\langle\varphi\rangle\{d\}\rceil$	16,∃i,a∪b/d
18		$![S\langle\varphi\rangle]$	17,D0.12
19		$![S\langle\varphi\rangle]$	6,7-18,∃e
20		$![S\langle\varphi\rangle]$	3,4-19,∃e
	Th.		1-20,⊃i,⌊⌋i

$T5.10 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil N[\varphi] \supset N[S\langle\varphi\rangle]\rceil$

1	φ $N[\varphi]$	hyp
2	ab $S\langle\varphi\rangle\{a\}$	hyp
3	$a\infty b$	hyp
4	$\lfloor\exists c\rfloor\lceil c\,\varepsilon\, a \wedge \varphi\{a-c\}\rceil$	2,D5.2
5	c $c\,\varepsilon\, a$	hyp
6	$\varphi\{a-c\}$	hyp
7	$a\infty b$	3,reit
8	$!\{a\}$	5,D0.8
9	$!\{b\}$	7,8,T1.8
10	$\lfloor\exists d\rfloor\lceil d\varepsilon b\rceil$	9,D0.8
11	d $d\,\varepsilon\, b$	hyp
12	$\{\{b-d\}\cup d\} \approx b$	11,T3.5-4
13	$c\,\varepsilon\, a$	5,reit
14	$\{\{a-c\}\cup c\} \approx a$	13,T3.5-4
}15	$\}\{b-d\}\cup d\} \infty \{\{a-c\}\cup c$	12,14,Ext
16	$d\,\varepsilon\, d$	11,T0.1
17	$c\,\varepsilon\, c$	13,T0.1
18	$\sim (d\,\varepsilon\,\{b-d\})$	D0.18
19	$\sim (c\,\varepsilon\,\{a-c\})$	D0.18
20	$\{b-d\}\infty\{a-c\}$	15,16,17,18,19,T1.10
21	$\varphi\{b-d\}$	1,6,20,D2.3
22	$\lfloor\exists d\rfloor\lceil d\,\varepsilon\, b \wedge \varphi\{b-d\}\rceil$	11,21,∧i,∃i
23	$S\langle\varphi\rangle\{b\}$	22,D5.2
24	$S\langle\varphi\rangle\{b\}$	11-23,∃e
25	$S\langle\varphi\rangle\{b\}$	5-24,∃e
26	$\lfloor ab\rfloor\lceil S\langle\varphi\rangle\{a\} \wedge a\infty b. \supset S\langle\varphi\rangle\{b\}\rceil$	2-25,⊃i,⌊⌋i
27	$N[S\langle\varphi\rangle]$	26,D2.3
	$Th.$	1-27,⌊⌋i

$T5.11 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil Q[\varphi] \supset Q[S\langle\varphi\rangle]\rceil$

1	φ	$Q[\varphi]$	hyp
2	ab	$S\langle\varphi\rangle\{a\}$	hyp
3		$S\langle\varphi\rangle\{b\}$	hyp
4		$\lfloor\exists c\rfloor\lceil c\,\varepsilon\, a \wedge \varphi\{a-c\}\rceil$	2,D5-2
5	c	$c\,\varepsilon\, a$	hyp
6		$\varphi\{a-c\}$	hyp
7		$\lfloor\exists d\rfloor\lceil d\,\varepsilon\, b \wedge \varphi\{b-d\}\rceil$	3,reit,D5.2
8	d	$d\,\varepsilon\, b$	hyp
9		$\varphi\{b-d\}$	hyp
10		$\{a-c\}\infty\{b-d\}$	1,6,8,9,D2.4
11		$\sim(c\,\varepsilon\,\{a-c\})$	D0.18
12		$\sim(d\,\varepsilon\,\{b-d\})$	D0.18
13		$c\,\varepsilon\, c$	5,T0.1
14		$d\,\varepsilon\, d$	8,T0.2
15		$\{\{a-c\}\cup c\}\infty\{\{b-d\}\cup d\}$	10,11,12,13,14,T1.10
16		$\{\{a-c\}\cup c\}\approx a$	5,T3.5-4
17		$\{\{b-d\}\cup d\}\approx b$	8,T3.5-4
18		$a\infty b$	15,16,17,Ext
19		$a\infty b$	7,8-18,∃e
20		$a\infty b$	4,5-19,∃e
21		$\lfloor ab\rfloor\lceil S\langle\varphi\rangle\{a\} \wedge S\langle\varphi\rangle\{b\}. \supset a\infty b\rceil$	2-20,⊃i,⌊⌋i
22		$Q[S\langle\varphi\rangle]$	21,D2.4
		Th.	1-22,⊃i,⌊⌋i

$*T5.12 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil Cn[\varphi] \supset Cn[S\langle\varphi\rangle]\rceil$ $\quad T5.9, T5.10, T5.11$

$T5.13 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil \varphi \approx \psi. \supset S\langle\varphi\rangle \approx S\langle\psi\rangle\rceil$ $\quad D5.2$,Ext

$D5.3 : \lfloor a\rfloor\lceil 1\{a\} \equiv S\langle 0\rangle\{a\}\rceil$ $\quad$ Dfs[s/n]
Un

$T5.14 : 1 \approx Sin$

1	a	$1\{a\}$	hyp
2		$S\langle 0\rangle\{a\}$	1,D5.3
3		$\lfloor\exists b\rfloor\lceil b\,\varepsilon\, a \wedge 0\{a-b\}\rceil$	2,D5.2
4	b	$b\,\varepsilon\, a$	hyp
5		$0\{a-b\}$	hyp
6		$\{a-b\} \approx \wedge$	5,D5.1
7		$a\,\varepsilon\, a$	4,6
8		$Sin\{a\}$	7,D0.9
9		$Sin\{a\}$	3,4-8,∃e
10	a	$Sin\{a\}$	hyp
11		$a\,\varepsilon\, a$	10,D0.9
12		$\{a-a\} \approx \wedge$	11,D0.6,D0.14,D0.18
13		$\{a-a\}\infty\wedge$	12,T1.6
14		$0\{a-a\}$	13,D5.1
15		$\lfloor\exists d\rfloor\lceil d\,\varepsilon\ \wedge 0\{a-d\}\rceil$	11,14,∃i,a/b
16		$S\langle 0\rangle\{a\}$	15,D5.2
17		$1\{a\}$	16,D5.3
18		$\lfloor a\rfloor\lceil Sin\{a\} \equiv 1\{a\}\rceil$	1-9,10-17,≡i,⌊⌋i
		Th.	18,D0.11

$T5.15 : Ind[1]$

1	a	$1\{a\}$	hyp
2		$Sin\{a\}$	1,T15.14,D0.11
3		$Ind\{a\}$	2,T3.3
4		$\lfloor a\rfloor\lceil 1\{a\} \supset Ind\{a\}\rceil$	1-3,⊃i,⌊⌋i
		Th.	4,D3.2

$T5.16 : N[1]$

1	ab	$1\{a\}$	hyp
2		$a\infty b$	hyp
3		$Sin\{a\}$	1,T5.14,D0.11
4		$Sin\{b\}$	2,3
5		$1\{b\}$	4,T5.14,D0.11
6	$\lfloor a \rfloor \lceil 1\{a\} \wedge a\infty b. \supset 1\{b\}\rceil$		1-5.⊃i,⌊⌋i
	$Th.$		6,D2.3

$T5.17 : Q[1]$

1	ab	$1\{a\}$	hyp
2		$1\{b\}$	hyp
3		$Sin\{a\}$	1,T5.12,D0.11
4		$Sin\{b\}$	2,T5.12,D0.11
5		$a\infty b$	3,4,T1.12
6	$\lfloor a \rfloor \lceil 1\{a\} \wedge 1\{b\}. \supset a\infty b\rceil$		1-5.⊃i,⌊⌋i
	$Th.$		6,D2.4

$*T5.18 :![1]$

1	$![0]$	T5.5
2	$![S\langle 0\rangle]$	1,T5.4,*T5.9
3	$\lfloor \exists a \rfloor \lceil S\langle 0\rangle\{a\}\rceil$	2,D0.12
4	$1\{a\}$	3,D5.3
5	$\lfloor \exists a \rfloor \lceil 1\{a\}\rceil$	4,∃i
	$Th.$	5,D0.12

$*T5.19 : Cn[1]$

1	$![1]$	*T5.18
2	$N[1]$	T5.14
3	$Q[1]$	T5.15
	$Th.$	1,2,3,∧i,T2.7

$T5.20 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil Ind[\varphi] \supset Ind[\langle\varphi\rangle]\rceil$

1	φ	$Ind[\varphi]$	hyp
2	a	$S\langle\varphi\rangle\{a\}$	hyp
3		$\lfloor\exists b\rfloor\lceil b\,\varepsilon\, a \wedge \varphi\{a-b\}\rceil$	2,D5.2
4	b	$b\,\varepsilon\, a$	hyp
5		$\varphi\{a-b\}$	hyp
6		$Ind\{a-b\}$	1,6,D3.2
7		$Sin\{b\}$	4,T0.8
8		$Ind\{b\}$	7,T3.3
9		$Ind\{\{a-b\}\cup b\}$	6,8,T3.4
10		$\{a-b\}\cup b\} \approx a$	4,T3.5-4
11		$Ind\{a\}$	9,10,Ext
12		$Ind\{a\}$	3,4-11,∃e
13		$\lfloor a\rfloor\lceil S\langle\varphi\rangle\{a\} \supset Ind\{a\}\rceil$	1-12,⊃i,⌊⌋i
14		$Ind[S\langle\varphi\rangle]$	13,D3.2
		$Th.$	1-14,⊃i,⌊⌋i

$D5.4 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil Nn[\varphi] \equiv . Cn[\varphi] \wedge Ind[\varphi]\rceil$
Nombre naturel

6. Propositions de Peano

$T6.1 : Nn[0]$
Peano I : *0 est un nombre naturel*

1	$Ind[0]$	T5.3
2	$Cn[0]$	T5.4
	$Th.$	1,2,$\wedge$i,D5.4

$*T6.2 : Nn[1]$
1 est un nombre naturel

1	$Ind[1]$	T5.15
2	$Cn[1]$	*T5.17
	$Th.$	1,2,$\wedge$i,D5.4

$*T6.3 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil Nn[\varphi] \supset Nn[S\langle\varphi\rangle]\rceil$
Peano II : *le successeur d'un nombre naturel est un nombre naturel*

1	φ	$Nn[\varphi]$	hyp
2		$Ind[\varphi]$	1,D5.4
3		$Cn[\varphi]$	1,D5.4
4		$Ind[S\langle\varphi\rangle]$	2,T5.20
5		$Cn[S\langle\varphi\rangle]$	3,*T5.12
6		$Sn[S\langle\varphi\rangle]$	4,5,$\wedge$i,D5.4
	$Th.$		1-7,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$T6.4 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil ![S\langle\varphi\rangle] \supset .Nn[\varphi] \supset Nn[S\langle\varphi\rangle]\rceil$
Peano II (affaibli, sans l'axiome de l'infini)

$*T6.5$: $\lfloor\varphi\psi\rfloor\lceil Nn[\varphi] \wedge Nn[\psi]. \supset .S\langle\varphi\rangle \approx S\langle\psi\rangle \supset \varphi \approx \psi\rceil$
Peano III : *deux nombres naturels différents ont des successeurs différents*

1	$\varphi\psi$	$Nn[\varphi]$	hyp
2		$Nn[\psi]$	hyp
3		$S\langle\varphi\rangle \approx S\langle\psi\rangle$	hyp
4	a	$\varphi\{a\}$	hyp
5		$Ind[\varphi]$	1,D5.4
6		$Ind\{a\}$	4,5,D3.2
7		$\lfloor\exists b\rfloor\lceil b\,\varepsilon\, b \wedge \sim (b\,\varepsilon\, a)\rceil$	6,*T4.8
8	b	$b\,\varepsilon\, b$	hyp
9		$\sim (b\,\varepsilon\, a)$	hyp
10		$\{\{a \cup b\} - b\} \approx a$	8,9
11		$\varphi\{\{a \cup b\} - b\}$	4,10,Ext
12		$b\,\varepsilon\, a \vee b\,\varepsilon\, b$	8,$\vee$i
13		$b\,\varepsilon\,\{a \cup b\}$	8,12,D0.16
14		$S\langle\varphi\rangle\{a \cup b\}$	11,13,D5.2
15		$S\langle\psi\rangle\{a \cup b\}$	3,14,Ext
16		$\lfloor\exists c\rfloor\lceil c\,\varepsilon\,\{a \cup b\} \wedge \psi\{\{a \cup b\} - c\}\rceil$	15,D5.2
17	c	$c\,\varepsilon\,\{a \cup b\}$	hyp
18		$\psi\{\{a \cup b\} - c\}$	hyp
19		$\{\{a \cup b\} - c\} \cup c\} \approx \{a \cup b\}$	17,T3.5-4
20		$\{\{a \cup b\} - c\} \cup c\}\infty\{a \cup b\}$	19,T1.6
21		$c\,\varepsilon\, c$	17,T0.2
22		$\sim (c\,\varepsilon\,\{\{a \cup b\} - c\})$	21
23		$\{\{a \cup b\} - c\}\infty a$	8,9,20,21,22,T1-10
24		$N[\psi]$	2,T2.5,D5.4
25		$\psi\{a\}$	18,23,24,D2.3
26		$\psi\{a\}$	16,17-25,$\exists$e
27		$\psi\{a\}$	7,8-26,$\exists$e
28		$\lfloor a\rfloor\lceil\varphi\{a\} \supset \psi\{a\}\rceil$	4-27,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
29		$\lfloor a\rfloor\lceil\psi\{a\} \supset \varphi\{a\}\rceil$	idem 4-27,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i
30		$\lfloor a\rfloor\lceil\varphi\{a\} \equiv \psi\{a\}\rceil$	28,29,$\equiv$i
31		$\varphi \approx \psi$	30,D0.11
32		$S\langle\varphi\rangle \approx S\langle\psi\rangle \supset \varphi \approx \psi$	3-31,$\supset$i
		$Th.$	1-32,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$*T6.6 : \lfloor\varphi\psi\rfloor\lceil Nn[\varphi] \wedge Nn[\psi]. \supset .\varphi \approx \psi \equiv S\langle\varphi\rangle \approx S\langle\psi\rangle \supset\rceil$ *T6.5,T5.13
Peano III (renforcé avec l'unicité du successeur)

$T6.7-1 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil\sim (S\langle\varphi\rangle \approx 0\rceil$

1	φ	$S\langle\varphi\rangle \approx 0$	hyp
2		$\wedge \approx \wedge$	T0.6
3		$0\{\wedge\}$	2,D5.1
4		$S\langle\varphi\rangle\{\wedge\}$	1,3,D0.11
5		$\lfloor\exists b\rfloor\lceil b\,\varepsilon \wedge . \wedge .\varphi\{\wedge - b\}\rceil$	4,D5.2
6		$\lfloor\exists b\rfloor\lceil b\,\varepsilon \wedge\rceil$	5,$\wedge$e
7		$\sim \lfloor\exists b\rfloor\lceil b\,\varepsilon \wedge\rceil$	T0.12
8		$\sim (S\langle\varphi\rangle \approx 0)$	1,6,7,$\sim$i
	$Th.$		1-8,$\lfloor\rfloor$i

$T6.7 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil Nn[\varphi] \supset\sim (S\langle\varphi\rangle \approx 0)\rceil$ T6.7-1
Peano IV : *0 n'est le sucesseur d'aucun nombre naturel*

$D6.1(aux) : \lfloor a\varphi\rfloor\lceil\bullet[\varphi]\{a\} \equiv \varphi[\infty\langle a\rangle]\rceil$

$T6.8-1 : \lfloor\varphi\rfloor\lceil\varphi[0] \supset \bullet[\varphi]\{\wedge\}\rceil$

1	φ	$\varphi[0]$	hyp
2		$0 \approx \infty\langle\wedge\rangle$	T5.2
3		$\varphi[0] \equiv \varphi[\infty\langle\wedge\rangle]$	2,Ext
4		$\varphi[\infty\langle\wedge\rangle]$	1,3,$\equiv$e
5		$\bullet[\varphi]\{\wedge\}$	4,D6.1
	$Th.$		1-5,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$T6.8-2 : \lfloor ab \rfloor \lceil b \,\varepsilon\, b :\supset \infty\langle c \cup b\rangle \approx \infty\langle c\rangle . \vee . \infty\langle c \cup b\rangle \approx S\langle \infty\langle c\rangle\rangle \rceil$

1	bc | $b \,\varepsilon\, b$	hyp
2	$b \,\varepsilon\, c \vee \sim (b \,\varepsilon\, c)$	tiers exclu
3	$b \,\varepsilon\, c$	hyp
4	x | $\infty\langle c \cup b\rangle\{x\}$	hyp
5	$\{c \cup b\}\infty x$	4,D2.1
6	$c \,\varepsilon\, x$	3,5,T3.6-2
7	$\infty\langle c\rangle\{x\}$	6,D2.1
8	$\infty\langle c\rangle\{x\}$	hyp
9	$c \,\varepsilon\, x$	8,D2.1
10	$\{c \cup b\}\infty x$	3,9
11	$\infty\langle c \cup b\rangle\{x\}$	10,D2.1
12	$\infty\langle c\rangle\{x\} \equiv \infty\langle c \cup b\rangle\{x\}$	4-7,8-11,≡i
13	$\lfloor x \rfloor \lceil \infty\langle c\rangle\{x\} \equiv \infty\langle c \cup b\rangle\{x\} \rceil$	4-12,⌊⌋i
14	$\infty\langle c \cup b\rangle \approx \infty\langle c\rangle$	13,D0.11
15	$\infty\langle c \cup b\rangle \approx \infty\langle c\rangle . \vee . \infty\langle c \cup b\rangle \approx S\langle \infty\langle c\rangle\rangle$	14,∨i
16	$\sim (b \,\varepsilon\, c)$	hyp
17	x | $\infty\langle c \cup b\rangle\{x\}$	hyp
18	$\{c \cup b\}\infty x$	18,D2.1
19	$\lfloor \exists d \rfloor \lceil d \,\varepsilon\, x \rceil$	1,18
20	d | $d \,\varepsilon\, x$	hyp
21	$c\infty\{x - d\}$	1,16,18,20,T3.6-3
22	$\infty\langle c\rangle\{x - d\}$	21,D2.1
23	$\lfloor \exists d \rfloor \lceil d \,\varepsilon\, x \wedge \infty\langle c\rangle\{x - d\} \rceil$	20,22,∧i
24	$S\langle \infty\langle c\rangle\rangle\{x\}$	23,D5.2
25	$S\langle \infty\langle c\rangle\rangle\{x\}$	19,20-24,∃e
26	$S\langle \infty\langle c\rangle\rangle\{x\}$	hyp
27	$\lfloor \exists d \rfloor \lceil d \,\varepsilon\, x \wedge \infty\langle c\rangle\{x - d\} \rceil$	26,D5.2
28	d | $d \,\varepsilon\, x$	hyp
29	$\infty\langle c\rangle\{x - d\}$	hyp
30	$c\infty\{x - d\}$	29,D2.1
31	$\{c \cup b\}\infty x$	1,16,28,30
32	$\infty\langle c \cup b\rangle\{x\}$	31,D2.1
33	$\infty\langle c \cup b\rangle\{x\}$	27,28-32,∃e
34	$\infty\langle c \cup b\rangle\{x\} \equiv S\langle \infty\langle c\rangle\rangle\{x\}$	17-25,26-33,≡i
35	$\lfloor x \rfloor \lceil \infty\langle c \cup b\rangle\{x\} \equiv S\langle \infty\langle c\rangle\rangle\{x\} \rceil$	17-34,⌊⌋i
36	$S\langle \infty\langle c\rangle\rangle \approx \infty\langle c \cup b\rangle$	35,D0.11
37	$\infty\langle c \cup b\rangle \approx \infty\langle c\rangle . \vee . \infty\langle c \cup b\rangle \approx S\langle \infty\langle c\rangle\rangle$	36,∨i
38	$\infty\langle c \cup b\rangle \approx \infty\langle c\rangle . \vee . \infty\langle c \cup b\rangle \approx S\langle \infty\langle c\rangle\rangle$	2,3-15,16-37
	Th.	1-37,⊃i,⌊⌋i

$T6.8-3: \lfloor \varphi P \rfloor \lceil Nn[\varphi] \wedge P[0] \wedge \lfloor \psi \rfloor \lceil P[\psi] \supset P[S\langle\psi\rangle] \rceil . \supset P[\varphi] \rceil$

1	φP	$Nn[\varphi]$	hyp
2		$P[0]$	hyp
3		$\lfloor \psi \rfloor \lceil P[\psi] \supset P[S\langle\psi\rangle] \rceil$	hyp
4		$Cn[\varphi]$	1,D5.4
5		$Ind[\varphi]$	1,D5.4
6		$\lfloor \exists a \rfloor \lceil \infty\langle a\rangle \approx \varphi \rceil$	4,D2.2
7		a $\quad \infty\langle a\rangle \approx \varphi$	hyp
8		$\varphi\{a\}$	7,T2.6
9		$Ind[\varphi]$	5,reit
10		$Ind\{a\}$	8,9,D3.2
11		$\bullet[P]\{\wedge\} \wedge \lfloor bc \rfloor \lceil b \,\varepsilon\, a \wedge \bullet[P]\{c\} . \supset \bullet[P]\{c \cup b\} \rceil . \supset$	
		$\bullet[P]\{a\}$	10,D3.1,$\varphi/\bullet$[P]
12		$P[0]$	2,reit
13		$\bullet[P]\{\wedge\}$	12,T6.8-1
14		bc $\quad b \,\varepsilon\, a$	hyp
15		$\bullet[P]\{c\}$	hyp
16		$P[\infty\langle c\rangle]$	15,D6.1
17		$P[S\langle\infty\langle c\rangle\rangle]$	3,16
18		$b \,\varepsilon\, b$	14,T0.2
19		$\infty\langle c \cup b\rangle \approx \infty\langle c\rangle . \vee . \infty\langle c \cup b\rangle \approx S\langle\infty\langle c\rangle\rangle$	18,T6.8-2
20		$\infty\langle c \cup b\rangle \approx \infty\langle c\rangle$	hyp
21		$P[\infty\langle c\rangle]$	16,reit
22		$P[\infty\langle c \cup b\rangle]$	20,21,Ext
23		$\bullet[P]\{c \cup b\}$	22,D6.1
24		$\infty\langle c \cup b\rangle \approx S\langle\infty\langle c\rangle\rangle$	hyp
25		$P[S\langle\infty\langle c\rangle\rangle]$	17,reit
26		$P[\infty\langle c \cup b\rangle]$	24,25,Ext
27		$\bullet[P]\{c \cup b\}$	26,D6.1
28		$\bullet[P]\{c \cup b\}]$	19,20-23,24-27,∨e
29		$\lfloor bc \rfloor \lceil b \,\varepsilon\, a \wedge \bullet[P]\{c\} . \supset \bullet[P]\{c \cup b\} \rceil$	14-28,⊃i
30		$\bullet[P]\{a\}$	11,29,⊃e

31	$P[\infty\langle a\rangle]$	30,D6.1
32	$P[\varphi]$	7,31,Ext
33	$P[\varphi]$	6,7-32,$\exists$e
	Th.	1/3-36,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

$D6.2(aux) : \lfloor\varphi\psi\phi\rfloor\lceil\cap\langle\varphi\psi\rangle[\phi] \equiv \varphi[\phi] \wedge \psi[\phi]\rceil$

$T6.8 : \lfloor\varphi\ P\rfloor\lceil Nn[\varphi] \wedge P[0] \wedge \lfloor\psi\rfloor\lceil Nn[\psi] \wedge P[\psi]. \supset P[S\langle\psi\rangle]\rceil. \supset P[\varphi]\rceil$
Peano V : *Le principe d'induction arithmétique*

1	φP	$Nn[\varphi]$	hyp
2		$P[0]$	hyp
3		$\lfloor\psi\rfloor\lceil Nn[\psi] \wedge P[\psi]. \supset P[S\langle\psi\rangle]\rceil$	hyp
4		$Nn[0]$	T6.1
5		$\cap\langle PNn\rangle[0]$	2,4,D6.2
6		$\cap\langle PNn\rangle[\psi]$	hyp
7		$P[\psi] \wedge Nn[\psi]$	6,D6.2
8		$P[S\langle\psi\rangle]$	3,7,$\supset$e
9		$Nn[\psi]$	7,$\wedge$e
10		$Nn[S\langle\psi\rangle]$	9,T6.3
11		$P[S\langle\psi\rangle] \wedge Nn[S\langle\psi\rangle]$	8,10,$\wedge$i
12		$\cap\langle PNn\rangle[S\langle\psi\rangle]$	11,D6.2
13		$\cap\langle PNn\rangle[\psi] \supset \cap\langle PNn\rangle[S\langle\psi\rangle]$	6-12,$\supset$i
14		$\cap\langle PNn\rangle[\varphi]$	1,5,13,T6.8-3
15		$P[\varphi]$	14,D6.2
	Th.		1-15,$\supset$i,$\lfloor\rfloor$i

Bibliographie

AJDUKIEWICZ K. (1935). Die syntaktische Konnexität. *Studia Philosophica* 1. 1-27. [Trad. angl. dans McCall S. *Polish Logic 1920-1939*. Oxford Univ. Press. 1967. 207-231].

BAR-HILLEL Y. (1953). A quasi-arithmetical notation for syntactic description. *Language* 29. 47-58.

BOOLOS G. (1987). The consistency of Frege's *Foundations of Arithmetic*. In Thomson J. (ed.). *On Being and Saying: Essays in Honnor of Richard Cartwright*. Cambridge Mass: MIT Press. 3-20.

BOOLOS G. (1998). *Logic, Logic and Logic*. Cambridge Mass: Harvard Univ. Press.

CANTY J. T. (1967). *Leśniewski's Ontology and Gödel Incompleteness Theorem*. PhD. Thesis. Univ. of Notre Dame. [Publiée partiellement dans (1969a) et 1969b)].

CANTY J. T. (1969a). The numerical epsilon. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 10.1. 47-63.

CANTY J. T. (1969b). Leśniewski's terminological explanations as recursive concepts. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 10.4. 337-369.

DEGRANGE C. (2005a). Esquisse d'une approche sémantique de la prédicativité chez F. P. Ramsey. *Noésis* (Nice). [A paraître].

DEGRANGE C. (2005b). Impredicativity, Syntax and Semantics. *Logika* (Univ. Wrocław) 24. [A paraître].

FREGE G. (1893). *Grundgesetze der Arithmetik*. Jena. [Réimpression Hildesheim: Olms].

GESSLER N. (2005a). *Introduction à l'œuvre logique de S. Leśniewski. III. La Méréologie*. *Travaux de logique du CdRS* (hors série). Université de Neuchâtel. [Fasc. déjà parus: I. *La Protothétique*, II. *L'Ontologie*, Miéville (2001-04)]. [A paraître].

GESSLER N. (2005b). Categorial Analysis of the Hierarchy of Types. *Logika* (Univ. Wrocław) 24. [A paraître].

HALE B., WRIGHT C. (2001). *The Reason's Proper Study. Essays towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics.* Oxford: Clarendon.

HATCHER W. S. (1982). *The Logical Foundations of Mathematics.* Oxford: Pergamon.

HIŻ H. (1977). Descriptions in Russell's Theory and in Ontology. *Studia Logica* 36.4. 271-283.

HUSSERL E. (1891). *Philosophie der Arithmetik.* Halle: CEM Pfeffer.

HUSSERL E. (1900). *Logische Untersuchungen.* Halle: M. Niemeyer.

JORAY P. (1999). Domaines de quantification et catégories syntaxico-sémantiques. *Rôle et enjeux de la notion de catégorie en logique. Travaux de logique du CdRS* 13. Université de Neuchâtel. 43-62.

JORAY P. (2001). *La Subordination logique: une étude du nom complexe dans l'Ontologie de S. Leśniewski.* Berne: Peter Lang.

JORAY P. (2002). Logicism in Leśniewski's Ontology. *Logica Trianguli* (Łódź, Nantes, Santiago de Compostella) 6. 3-20.

JORAY P. (2005a). A note on definitions in propositional calculi. In Béziau J.-Y., Costa-Leite A., Facchini A. (eds). *Trends on Universal Logic. Travaux de logique du CdRS* 17. Université de Neuchâtel. [A paraître].

JORAY P. (2005b). La *no-class theory* de Stanisław Leśniewski. Dans Heinzmann G., Rebuschi M. (éds). *Aperçus philosophiques en logique et en mathématiques. Philosophia Scientiae* (Nancy), cahier spécial 6.

JORAY P. (2005c). What is wrong with creative definitions? *Logika* (Univ. Wrocław) 23.

JORAY P. (2005d). La définition dans les systèmes logiques de Łukasiewicz, Leśniewski et Tarski. (Avec une trad. fr. par Błaszczyk M. de Łukasiewicz 1928 a et b) Dans Pouivet R., Rebuschi M. (éds). *La philosophie en Pologne 1918-1939.* Paris: Vrin. [A paraître].

JORAY P. (2005e). La quantification catégorielle. Dans Joray P. (éd.). *La quantification dans la logique moderne.* Paris: L'Harmattan. 233-260.

JORAY P. (2005f). Should definitions be internal? In Bilkova M., Behounek L. (eds). *The Logica Yearbook 2004*. Praha: Filosofia. [A paraître].

JORAY P., GODART-WENDLING B. (2002). De la théorie des catégories sémantiques de Leśniewski à l'analyse de la quantification dans la syntaxe d'Ajdukiewicz. *Langages* 148. 28-50.

LEJEWSKI C. (1958). On implicational definitions. *Studia Logica* 8. 189-205.

LEJEWSKI C. (1954). Logic and Existence. *British Journal for the Philosophy of Science* 5. 104-119.

LEJEWSKI C. (1969). Consistency of Leśniewski's Mereology. *The Journal of Symbolic Logic* 34.3. 321-328.

LEJEWSKI C. (1985). Accomodating the informal notion of class within the framework of Leśniewski's Ontology. *Dialectica* 39. 217-241.

LEŚNIEWSKI S. (1931). Über Definitionen in der sogenannte Theorie der Deduktion. *Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie* III.24. [Trad. angl. dans Leśniewski (1992: 629-648)].

LEŚNIEWSKI S. (1989). *Sur les fondements de la mathématique. Fragments (discussions préalables, méréologie, ontologie)*. Trad. de Kalinowski G., Préface de Miéville D., Paris: Hermès.

LEŚNIEWSKI S. (1992). *Collected Works* (2 vol.). Surma S. J., Srzednicki J. T., Barnett D. I. (eds). Warszawa: PWN / Dordrecht: Kluwer.

LINSKY B. (1999). *Russell's Metaphysical Logic*. Standford: CSLI.

ŁUKASIEWICZ J. (1928a). O definicyach w teoryi dedukcyi (Sur les définitions dans les systèmes déductifs). *Ruch Filozoficzny* 11. 177-178. [Trad. fr. dans Joray (2005d)].

ŁUKASIEWICZ J. (1928b). Rola definicyjn systemach dedukcyjnych (Le rôle des définitions dans les systèmes déductifs). *Ruch Filozoficzny* 11. 164. [Trad. fr. dans Joray (2005d)].

ŁUKASIEWICZ J. (1939). Der Äquivalenzenkalkül. *Collectanea Logica* I. [Trad. angl. dans Łukasiewicz (1970: 250-277)].

ŁUKASIEWICZ J. (1951). On variable functors of propositional arguments. *Proceedings of the Royal Irish Academy* A.54. 25-35. [Repris dans Łukasiewicz (1970: 311-324)].

ŁUKASIEWICZ J. (1970). *Selected Works*. Borkowski L. (ed.). Warszawa: PWN / Amsterdam: North Holland.

LUSCHEI E. C. (1962). *The Logical System of Leśniewski*. Amsterdam: North Holland.

MIÉVILLE D. (1984). *Un développement des systèmes logiques de Stanisław Leśniewski. Protothétique, Ontologie, Méréologie.* Berne: Peter Lang.

MIÉVILLE D. (1999). Expansion catégorielle et logique. *Rôle et enjeux de la notion de catégorie en logique. Travaux de logique du CdRS* 13. Université de Neuchâtel. 1-41.

MIÉVILLE D. (2001-04). *Introduction à l'œuvre logique de S. Leśniewski. I. La Protothétique, II. L'Ontologie. Travaux de logique du CdRS* (hors série). Neuchâtel: Université. [Fasc. III. *La Méréologie*, Gessler (2005a)].

RAMSEY F.P. (1925). The Foundations of Mathematics. In *The Foundations of Mathematics and other Essays*. London: Kegan Paul, Trench, Tuber & Co. 1931.

DE ROUILHAN P. (1996). *Russell et le cercle des paradoxes*. Paris: PUF.

RUSSELL B. (1903). *The Principles of Mathematics*. London: Allen & Unwin.

RUSSELL B. (1908). Mathematical Logic as Based on the Theory of Types. *American Journal of Mathematics* 30.

RUSSELL B. (1919). *Introduction to Mathematical Philosophy*. London: Allen & Unwin. [Trad. fr. par Rivenc F., Paris: Payot. 1991].

SIMONS P. M. (1985). A Semantic for Ontology. *Dialectica* 39.3. 193-216.

SIMONS P. M. (1995). Leśniewski and Ontological Commitment. Dans Miéville D., Vernant D. (éds). *Stanisław Leśniewski Aujourd'hui*. Grenoble: Univ. Mendès France / Neuchâtel: CdRS. 103-119.

SŁUPECKI J. (1955). S. Leśniewski's Calculus of Names. *Studia Logica* 3. 7-70.

SOBOCIŃSKI B. (1949). L'analyse de l'antinomie russellienne par Leśniewski. *Methodos* 1. 94-107, 220-228, 308-316 et *Methodos* 2 (1950). 237-257.

SRZEDNICKI J. T. J., RICKEY V. F. (eds). (1984). *Leśniewski's Systems: Ontology and Mereology*. Boston, The Hague: Nijhoff / Wrocław: Ossolineum.

SRZEDNICKI J. T. J., STACHNIAK Z. (eds). (1988). *Leśniewski's Systems: Protothetic*. Dordrecht: Kluwer.

TARSKI A. (1936). Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. *Studia Logica* 1. 261-405.

VERNANT D. (1993). *La Philosophie Mathématique de Bertrand Russell*. Paris: Vrin.

VOLKEN H. (1997). Le Statut logique de la contradiction: l'approche paraconsistante. *Introduction aux logiques non classiques. Travaux de logique du CdRS* 11. Université de Neuchâtel. 257-271.

WHITEHEAD A. N., RUSSELL B. (1927). *Principia Mathematica*. 2e édition. Cambridge University Press. [1ère édition, 1910].

WRIGHT C. (1983). *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Aberdeen Univ. Press.

Travaux de logique
Liste des numéros parus

1. Denis Miéville: Introduction à la théorie des systèmes formels. Première partie. Septembre 1985 (épuisé).
2. Denis Miéville: Introduction à la théorie des systèmes formels. Deuxième partie. Janvier 1987 (épuisé).
3. James Gasser: La syllogistique d'Aristote à nos jours. Juin 1987.
4. Denis Miéville: Introduction à la théorie des systèmes formels. Première partie. Avril 1991 (réédition du n° 1; épuisé).
5. Denis Miéville Introduction à la théorie des systèmes formels. Deuxième partie. Avril 1991 (réédition du n° 2; épuisé).
6. Denis Miéville: La négation, une étude logique. Mai 1991 (épuisé).
7. Denis Miéville (éd.): Kurt Gödel. Actes du colloque, Neuchâtel, 13 et 14 juin 1991. Septembre 1992.
8. James Gasser: Introduction à la logique des relations de C.S. Peirce. Novembre 1993.
9. D. Miéville, P. Joray, D. Stauffer, N. Gessler: Études logiques. Port-Royal: une logique des idées. L'avènement de la théorie sémantique de la vérité de Tarski. George Boole et l'algèbre de la logique. Décembre 1994.
10. D. Bourquin, P. Joray, N. Gessler, D. Miéville: Analyse catégorielle et logique. Octobre 1996.
11. D. Miéville (éd.): Introduction aux logiques non classiques. Octobre 1997.
12. F. Vuissoz: La conception sémantique de la vérité. Logique et philosophie chez Alfred Tarski. Décembre 1998.
13. D. Miéville, P. Joray, F. Nef, M. Bourdeau, D. Bourquin, A. Lecomte, J. Lambek, B. Godart-Wendling: Rôle et enjeux de la notion de catégorie en logique. Actes du colloque organisé à Neuchâtel, les 16 et 17 octobre 1998. Septembre 1999.
14. F. Nef, C. Hughes, P. Giaretta, A. Bottani, N. Gessler, F. Correia. P. Simons, A. Varzi: Méréologie et modalités. Aspects critiques et développements. Actes du colloque, Neuchâtel, 20-21 octobre 2000. Août 2001.

⌦ D. Miéville, Introduction à l'œuvre de S. Leśniewski. Fasc. I: La protothétique. Novembre 2001 (épuisé).

15. A. Facchini, «Maison Hilbert»: un très joli édifice sans toit ni sol. Analyse model-théorétique d'un échec. Octobre 2003.

⌦ D. Miéville, Introduction à l'œuvre de S. Leśniewski. Fasc. II: L'ontologie. Novembre 2004.

16. N. Gessler, P. Joray, C. Degrange, Le logicisme catégoriel. Janvier 2005.
17. J.-Y. Béziau, A. Costa Leite, A. Facchini (eds), Aspects of Universal Logic. Décembre 2004.

⌦ N. Gessler, Introduction à l'œuvre de S. Leśniewski. Fasc. III: La méréologie. 2005 (à paraître).

Ces publications peuvent être obtenues auprès du Centre de Recherches Sémiologiques au prix de **Fr.s. 15.-; Fr. 20.-** dès le n° 14 (TVA comprise).

Travaux du Centre de Recherches Sémiologiques
Liste des numéros parus

*1. G. Vignaux: La nouvelle rhétorique. Revue critique et perspectives d'application. 1969-70.
*2. G. Vignaux: L'argumentation antique: Aristote. Janvier 1970.
*3. M.-J. Borel: Pour définir l'argumentation. 1969-70.
*4. F. Bugniet: Remarques sur les notions d'assertion linguistiques et de proposition logique. Septembre 1970.
*5. M.-J. Borel, G. Vignaux: L'étude de l'argumentation. Séminaire 1969-70.
*6. G. Vignaux: L'argumentation: bibliographie sélective. Janvier 1971.
*7. J.-B. Grize: Logique de l'argumentation et discours argumentatif. Mai 1971.
*8. J.-L. Galay: La rhétorique du discours de philosophie systématique. Essais d'analyse. Mars 1971.
*9. C. Morier: Charles Sanders Peirce et la sémiotique. Mars 1971.
*10. G. Vignaux: L'argumentation et le résumé. Mars 1971.
*11. C. Gillièron, C. Bonnet: Peut-on définir l'argumentation? Avril 1971.
*12. J.-B. Grize: Notes sur l'ontologie et la méréologie de S. Lesniewski. Mars 1972.
*13. M. Hirsbrunner, P. Fiala: Les limites d'une théorie saussurienne du discours et leurs effets dans la recherche sur l'argumentation. Avril 1972.
*14. C. Gillièron, A.-M. Badonnel, J.-P. Iacazzi: Les recherches psychologiques et psycholinguistiques sur la négation et les relations d'opposition. Mai 1972.
*15. J.-L. Galay: Esquisse pour une théorie figurale du discours. Septembre 1972.
*16. Y. Oppel: Sémiotique littéraire, à propos de la coordination, répétition et opposition dans un texte littéraire. Mai 1973.
*17. P. Fiala, C. Ridoux: Essai de pratique sémiotique. Juin 1973.
*18. M. Hirsbrunner: Pour une critique de la sémiotique de Roland Barthes. Juillet 1973.
*19. Y. Oppel: Colloque sur l'analyse du discours «Divergences et convergences». Février 1974.
*20. (Collectif): Logique, argumentation, discours (LAD). Recherche. Septembre 1974.

*21. (Collectif): Logique, argumentation, discours (LAD). Recherche. Septembre 1974.
*22. A.-F. Schmid: Philosophie et sciences chez Henri Poincaré: lecture philosophique. Octobre 1974.
*23. M.-J. Borel: Schématisation discursive et énonciation. Arguments théoriques et approche descriptive (LAD I). Octobre 1975.
*24. A. Licitra: Les relations interpropositionnelles. Huit types d'après R. Longacre (LAD I). Octobre 1975.
*25. (Collectif): Discours et structures sociales. Janvier 1977.
*26. M. Ebel: Langage, histoire, action: les recherches de Jean Pierre Faye. Septembre 1975.
*27. M. Ebel, P. Fiala: Recherches sur les discours xénophobes I. Juillet 1977.
*28. M. Ebel, P. Fiala: Recherches sur les discours xénophobes II. Juillet 1977.
*29. J.-B. Grize: Matériaux pour une logique naturelle (LAD I). Mai 1976.
*30. D. Miéville, M.-J. Borel, A. Licitra: Discours et analogie (LAD II). Mai 1977.
*31. J. Moeschler: Contribution linguistique à une sémiotique du cinéma. Mai 1977.
*32. A. Lecomte: Paraphrase et thématisation. Essais d'analyse logique. Décembre 1978.
*33. (Collectif): Langue et discours I. Colloque Besançon-Neuchâtel, 2-4 octobre 1978. Mars 1978.
*34. (Collectif): Langue et discours II. Colloque Besançon-Neuchâtel, 2-4 octobre 1978. Mars 1978.
*35. P. Baldi, J. Moeschler: Comment contrôler le discours: interaction et réfutation dans le débat Giscard-Mitterrand (1974). Juillet 1979.
*36. (Collectif): Quelques réflexions sur l'explication. Février 1980.
37. M. Sanchez-Mazas: Traduction arithmétique des graphes et des relations binaires et applications logiques et informatiques. Juin 1981.
*38. (Collectif): Le discours explicatif I. Septembre 1981.
*39. (Collectif): Le discours explicatif II. Septembre 1981.
40. C. Wülser: Actes de langage explicatifs. Février 1982.
*41. (Collectif): Logique naturelle du raisonnement. Avril 1982.
*42. (Collectif): Linguistique et sémiologie I. Colloque Besançon-Neuchâtel, 5-6 octobre 1981. Juillet 1982.
43. (Collectif): Linguistique et sémiologie II. Colloque Besançon-Neuchâtel, 5-6 octobre 1981. Juillet 1982.
*44. (Collectif): Raisonnements et raisons. Avril 1983.
45. F. Albera: Problèmes de l'énonciation au cinéma. Février 1984.

46. (Collectif): Construction et transformations des objets du discours I. Colloque Besançon-Neuchâtel, 3-4 octobre 1983. Mars 1984.
47. (Collectif): Construction et transformations des objets du discours II. Colloque Besançon-Neuchâtel, 3-4 octobre 1983. Mars 1984.
*48. (Collectif): Analyse de texte assistée par ordinateur. Utilisation du logiciel DEREDEC. Janvier 1985.
*49. (Collectif): Problèmes et méthodes d'une analyse de texte articulant organisation cognitive, argumentation et représentations sociales. Juin 1985
50. (Collectif): Actes du colloque «Dialogisme et Polyphonie», 27/28 septembre 1985. Avril 1986.
*51. (Collectif): Le discours descriptif. Du texte aux objets de connaissance I. Juillet 1986.
*52. (Collectif): Le discours descriptif. Du texte aux objets de connaissance II. Juillet 1986.
*53. (Collectif): La référence. Points de vue linguistique et logique. Mars 1987.
54. D. Apothéloz, J.-B. Grize: Langage, processus cognitif et genèse de la communication. Septembre 1987.
*55. (Collectif): La schématisation descriptive. Types textuels, formes et fonctions discursives. Janvier 1988.
56. D. Miéville, R. Martin, A. Culioli, G.G. Granger, C. Gillièron, G. Seel, J. Molino, L. Frey, J.-B. Grize: La négation sous divers aspects. Actes du colloque, Neuchâtel 22-23 octobre 1987. Septembre 1988.
*57. D. Miéville, D. Apothéloz, P.-Y. Brandt, G. Quiroz, J.-B. Grize: La négation. Contre-argumentation et contradiction. Septembre 1989.
*58. M. Charolles: De l'art de nager et des différentes manières d'en parler. Septembre 1990.
*59. D. Miéville, M.-J. Borel, J.-P. Desclés, J. Gasser, P.-Y. Brandt; D. Apothéloz, J. Moeschler, J. Jayez, M.F. Blès: La négation. Le rôle de la négation dans l'argumentation et le raisonnement. Actes du colloque, Neuchâtel 11-12 octobre 1990. Septembre 1991.
60. D. Miéville, D. Apothéloz, P.-Y. Brandt: Les organisations raisonnées. Analyse de l'articulation de séquences discursives. Juin 1992.
61. D. Miéville, M. Chavaz, E. Gattico: Relations formelles et non formelles. Septembre 1993.
62. D. Miéville, C. Tiercelin, G. Heinzmann, G. Deledalle, J. Gasser, N. Everaert-Desmedt, J. Réthoré, M. Balat, J.-P. Kaminker: Charles Sanders Peirce. Apports récents et perspectives en épistémologie, sémiologie, logique. Actes du colloque, Neuchâtel, 16-17 avril 1993. Avril 1994.

63. D. Miéville, J.-P. Desclés, P. Engel, J.-L. Gardies, J.-C. Gardin, J. Gasser, J.-B. Grize, F. Nef: Raisonnement et calcul. Actes du colloque, Neuchâtel, 24-25 juin 1994. Septembre 1995.
64. D. Apothéloz, U. Bähler, M. Schulz (éds), Analyser le musée. Actes du colloque international organisé par l'Association Suisse de Sémiotique (ASS/SGS), Lausanne 21-22 avril 1995. Août 1996.
65. D. Miéville, J.-L. Gardies, J.-B. Grize, O. Houdé, J.-P. Bronckart: Temps, logique et langage. Actes du Symposium tenu lors du colloque international «Penser le temps», Neuchâtel, 8-10 septembre 1996. Avril 1997.

⌦ A. Roulet Juan: Benno Besson en mouvement. Notes sur une mise en scène de «Lapin Lapin», comédie de Coline Serreau. Numéro spécial septembre 1998.

66. C. Salavastru: Identité et altérité. Les avatars de la rhétorique contemporaine. Novembre 1998.
67. D. Miéville, P. Joray, N. Gessler, B. Godart-Wendling, A. Bottani: Essais sur le nom et la nominalisation. Novembre 2000.

Les titres précédés d'un astérisque sont épuisés.
Les publications disponibles peuvent être obtenues auprès du Centre de Recherches Sémiologiques au **Fr.s. 15.-** , dès le n° 67 **Fr.s. 20.-** (TVA comprise).