Publié dans Travaux de logique 11, 15-55, 1997,
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

LES LOGIQUES MODALES

Pierre Joray

> Ainsi pourrait-on définir simplement le sens du possible comme la faculté de penser tout ce qui pourrait être "aussi bien", et de ne pas accorder plus d'importance à ce qui est qu'à ce qui n'est pas. On voit que les conséquences de cette disposition créatrice peuvent être remarquables; malheureusement, il n'est pas rare qu'elles fassent apparaître faux ce que les hommes admirent et licite ce qu'ils interdisent, ou indifférents l'un et l'autre...
>
> R. Musil, *L'homme sans qualités.*

Introduction

Les raisons des modifications que l'on peut apporter à la logique classique sont de plusieurs ordres. Si les motivations liées aux développements de logiques rivales sont généralement associées au rejet de tel ou tel principe fondateur de la logique classique, le projet de construire une logique des modalités s'appuie sur un constat plus ordinaire: la logique classique reste inadaptée pour rendre compte de certaines inférences du raisonnement non formel, inférences qui portent cependant une validité qui nous apparaît intuitivement incontestable.

On admet généralement que, parmi la diversité de ces raisonnements, certains possèdent un caractère privilégié au regard de la logique conçue comme science de l'inférence. Autrement dit, certains s'avèrent s'articuler sur des notions dont une telle science ne peut envisager de se passer. Ainsi, au-delà de la volonté générale de couvrir le domaine le plus large des inférences jugées valides, le projet d'intégrer les modalités dans la logique relève de visées plus spécifiques. Il s'agit principalement de tenter de donner à l'idée de *nécessité logique* un contour formel précis.

Sans vouloir entrer dans la problématique du sens qu'il faut attribuer à l'énoncé d'un locuteur affirmant qu'un objet possède une propriété de manière *nécessaire* ou seulement *contingente*, on constate simplement que certaines entités de la logique semblent intimement liées aux modalités dites *classiques*[1]. Il s'agit principalement du cas des tautologies, dont on dit non seulement qu'elles sont vraies, mais qu'elles possèdent ce caractère de vérité d'une manière nécessaire. Parallèlement, les propositions inconsistantes relèvent de l'impossibilité.

En outre, plusieurs des concepts centraux de la logique comme science de la déduction ne peuvent se définir sans un appel explicite à des notions modales: je pense en particulier au concept de *validité* associé aux arguments. On dit qu'un argument est valide si et seulement si il est *logiquement impossible* que toutes ses prémisses soient vraies et sa conclusion fausse. Je relève encore la notion d'*inconsistance* d'un ensemble de propositions, qu'on définit comme l'*impossibilité logique* que la conjonction de toutes les propositions de cet ensemble soit vraie.

Nécessité et *impossibilité* apparaissent ici, dans le cadre classique, comme des notions clairement métalinguistiques; on est en présence de deux niveaux distincts car ce que disent ces modalités se rapporte à des éléments d'un langage dont elles ne font pas partie – en l'occurrence les propositions.

Cependant, le besoin peut se faire sentir d'amener ces notions hors du domaine exclusif de la pratique intuitive et d'en fixer l'usage en y associant des règles formelles précises. Et bien que parler de propositions modales semble relever d'une confusion de niveaux linguistiques, la construction d'une logique modale passe précisément par l'idée de ramener les modalités dans le langage objet de la logique, faisant de ces modificateurs de propositions de véritables opérateurs. L'idée est d'aug-

1 Ces modalités, que l'on nomme aussi *aléthiques* ou parfois même *ontiques*, sont principalement la nécessité, la possibilité, la contingence.

menter le vocabulaire de la logique classique en y adjoignant, à côté de la négation ~, de nouveaux symboles d'opérateurs unaires: L et M, respectivement les symboles de la nécessité et de la possibilité logiques.

Cela dit, la construction d'un langage logique à partir d'un vocabulaire élargi relève d'une liberté presque totale. Mais si le but poursuivi par une telle entreprise est de circonscrire formellement la perception intuitive des modalités qui ont été évoquées, il paraît raisonnable de fixer certaines conditions élémentaires:

1. Une logique modale sera une *expansion conservative* de la logique classique C. Elle devra, autrement dit, contenir C mais ne pas ajouter à celle-ci des théorèmes dans lesquels ne figureraient aucun des nouveaux symboles.

2. Elle devra disposer d'une correspondance entre les deux nouveaux opérateurs, telle que l'un puisse s'exprimer à l'aide de l'autre. Dans la pratique, on ajoutera au vocabulaire un seul des symboles – généralement L –, le second étant défini ensuite de la manière suivante:

$$MP =df \sim L \sim P$$

3. L'expression suivante y sera une thèse:

$$\vdash \; LP \supset P$$

4. Une logique modale devra satisfaire au *principe de nécessitation* suivant: toute thèse du système – et en particulier, selon la condition 1, toute thèse du calcul classique – sera encore une thèse lorsqu'elle est précédée du symbole L de nécessité, offrant ainsi la garantie que toute tautologie sera nécessaire.

$$\textit{Si} \;\; \vdash \; P \;\; \textit{alors} \;\; \vdash \; LP$$

Ces conditions générales laissent cependant encore la voie ouverte à de nombreuses réalisations axiomatiques ou des systèmes de règles d'inférences forts différents. Je me contenterai dans les pages qui suivent d'en présenter un petit nombre parmi les plus significatifs, en particulier les systèmes connus sous les étiquettes de T, S4 et S5.

D'un point de vue historique cependant, le cheminement parcouru jusqu'à l'élaboration de ceux-ci est passablement différent de celui que j'ai rapidement esquissé ici. Si, comme je l'évoquerai dans la suite, on rencontre dès les premières systématisations de la logique dans l'Antiquité des tentatives de traitement des modalités, c'est principalement à C. I. Lewis que l'on doit leur entrée dans le champ de la logique moderne. L'idée développée par Lewis fut de proposer comme alternative à l'implication matérielle des *Principia Mathematica* de Whitehead et Russell un concept d'implication dit *implication stricte*, qui inclut explicitement une notion modale et dont le but était d'éviter ce qu'on a nommé les «paradoxes de l'implication matérielle».

Certes les développements les plus récents, attachés principalement à une approche sémantique des modalités, ont pratiquement rendu à la logique modale son autonomie par rapport à cette problématique de l'implication[2]. Il m'a cependant paru opportun de lui donner dans mon propos la place qui lui revient lorsqu'on privilégie, comme je le ferai ici, une approche à dominante syntaxique.

Par ailleurs, on ne saurait parler de logique modale sans mentionner la grande famille des logiques dites intensionnelles. Leur apparentement aux logiques modales se fonde sur une manière analogue de traiter d'autres opérateurs de type modal. On trouve ainsi des logiques déontiques, des logiques épistémiques, des logiques temporelles ou encore des logiques de la causalité. Toutes ces tentatives de formalisation constituent des outils importants tant dans le domaine de la logique philosophique que pour l'étude des arguments du discours ordinaire[3]. Je ne ferai cependant ici que les nommer, la présentation qui suit étant exclusivement consacrée aux modalités classiques.

Bien entendu, de par sa brièveté, le présent travail ne peut prétendre proposer une vue large sur une discipline qui reste aujourd'hui en plein essor. Il s'agit ici plus modestement de mettre l'accent sur certains aspects fondamentaux propres à éclairer les problèmes syntaxiques ainsi que la démarche

2 Les principaux développements issus spécifiquement de la problématique de Lewis sont connus sous le nom de logique de la pertinence (ou *relevant logic*). Cf. Read 1988.

3 Cf. Van Benthem 1988, Zalta 1988 et Gardies 1979.

sémantique, désormais dominante. Pour le reste, je me contenterai de renvoyer aux traités que l'on trouve dans une abondante littérature[4].

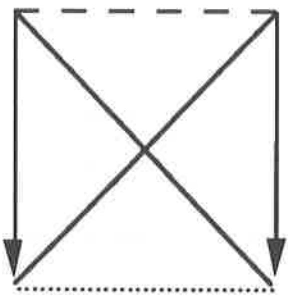
1. Les modalités dans la logique traditionnelle

Comme souvent en logique, le poids de la tradition aristotélicienne paraît tout à fait déterminant. Non seulement les travaux d'Aristote constituent la première attestation d'une logique des modalités[5], mais on peut faire remonter au Stagirite la prédominance accordée aux modalités dites classiques, ainsi que dans une large mesure l'usage dominant des termes *nécessaire*, *impossible*, *possible* et *contingent*; c'est ce dernier point que j'aborderai principalement ici.

L'hésitation d'Aristote entre plusieurs façons d'organiser les modalités est bien connue. Mais la concurrence d'acceptions différentes pour certaines modalités semble être une conséquence de sa philosophie essentialiste. La distinction entre deux sortes de *puissance* entraîne en effet deux interprétations des notions de *possibilité* et de *contingence*. D'une part, lorsqu'il s'agit de la *puissance* rapportée aux êtres éternels, loin de s'opposer au caractère constamment nécessaire des propriétés essentielles, la possibilité y est impliquée par la nécessité. Elle est ainsi comprise comme la négation contradictoire de l'impossibilité. Cette première acception, dite *unilatérale*, conduit Aristote à une organisation des modalités que l'on représente par un carré des oppositions tout à fait analogue à celui des propositions catégoriques:

4 On retiendra particulièrement Konyndyk 1986, Chellas 1980, ainsi que l'excellent Hughes & Cresswell 1996.

5 La théorie des propositions modales est développée dans le *De Interpretatione* et les *Premiers Analytiques*, ce dernier incluant une théorie des syllogismes modaux.



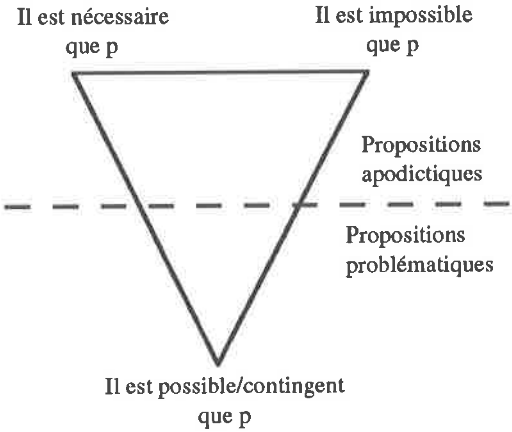
Jouant sur les deux manières d'appliquer la négation aux propositions modales – soit sur la modalité elle-même, soit sur son *dictum* –, Aristote montre que toutes les modalités peuvent y être définies sur la base d'une seule, par exemple la nécessité[6]. Bien que cette figure reprenne toutes les oppositions du traditionnel carré et présente une grande cohérence, on y remarque un certain manque d'équilibre dû à un usage constamment concurrent de la possibilité et de la contingence[7]. Et surtout, il manque encore à Aristote un terme simple pour exprimer la négation contradictoire de la nécessité.

Cependant Aristote accorde dans sa syllogistique une grande importance à une autre sorte de *puissance* que l'on trouve dans sa métaphysique. Il s'agit de la *puissance* que l'on rapporte aux êtres qui connaissent des propriétés accidentelles et pour lesquels la possibilité ou la contingence s'opposent d'un bloc au caractère nécessaire de la présence ou de l'absence de propriétés essentielles. L'opposition centrale entre des propositions *apodictiques* (nécessaires ou impossibles) et des propositions *problématiques* (possibles/contingentes) amène Aristote à proposer dans son étude des syllogismes modaux une organisation

6 On y trouve en particulier les fameuses équivalences:
Il est possible que p $\leftrightarrow$ Il n'est pas nécessaire que non p
Il est impossible que p $\leftrightarrow$ Il est nécessaire que non p.

7 Quelle qu'en soit l'interprétation, Aristote semble pratiquement toujours utiliser possibilité et contingence comme des synonymes.

concurrente des modalités qui, cette fois, peut être présentée sous la figure d'un triangle dont les sommets sont des contraires pris deux à deux:

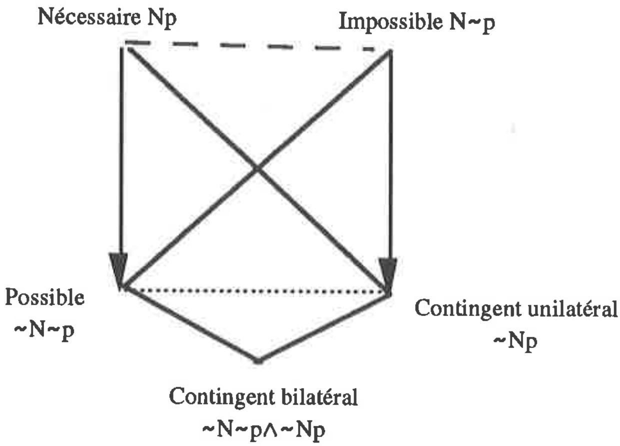


Mais, choisissant d'opposer le possible aux deux autres modalités, Aristote fait *de facto* reposer l'ensemble sur des bases qui manquent d'homogénéité; ce que le jeu de la négation va une fois de plus mettre en évidence. La modalité caractéristique des propositions problématiques – nommée possible ou contingent *bilatéral* – s'avère en effet être une modalité composée. Comme le remarquera Aristote lui-même, nier le *dictum* d'une proposition problématique c'est revenir à cette même proposition[8], alors que la négation de la modalité conduit fâcheusement à une disjonction. La négation du possible/contingent c'est ce qui est nécessaire *ou* impossible. Le possible/contingent est bien une conjonction de modalités: ce qui à la fois n'est pas nécessaire *et* n'est pas impossible.

Bien qu'en un sens la figure triangulaire soit plus conforme à la distinction entre propriétés essentielles et accidentelles, ses conséquences logiques négatives, en particulier l'absence de la relation fondamentale de contradiction, ont permis à la conception bilatérale de prendre historiquement le dessus. Aujourd'hui encore, c'est cette version d'un possible impliqué par le néces-

8 En effet, il est contingent que p *ssi* il est contingent que non p.

saire qui prévaut. Seul persiste un flottement dans l'usage du terme contingent. Tantôt il désigne la simple négation du nécessaire, tantôt la modalité bilatérale d'Aristote. Si bien que l'organisation qui nous est restée de la tradition peut être représentée par un schéma reprenant toutes les modalités mises en évidence par Aristote:



Cette organisation traditionnelle des modalités, et en particulier la considération des propositions apodictiques et problématiques, reste cependant le produit direct du système aristotélicien. Or le projet même d'une syllogistique modale, comme le relèvent Kneale et Kneale, semble manquer de légitimité. Car il tombe dans un dilemme relatif aux deux manières d'attribuer la modalité: la manière externe ou *de dicto*, que l'on trouve dans la version du carré et la manière interne ou *de re*, plus conforme à la philosophie essentialiste, et qui prévaut dans l'organisation triangulaire des *Premiers analytiques*. Le dilemme se pose en ces termes:

> If modal words modify predicates [interprétation *de re*], there is no need for a special theory of *modal* syllogisms. For these are only ordinary assertoric syllogisms of which the premisses have peculiar predicates. On the other hand, if modal words modify the whole statements to which they are attached [interprétation *de dicto*], there is no need for a special modal *syllogistic*, since the rules determining the logical

> relations between modal statements are independant of the character of the propositions governed by the modal words (Kneale and Kneale 1962: 91).

Le reproche fait ainsi aux modalités *de re* relève de leur caractère éminemment intensionnel, peu conforme au projet d'une syllogistique formelle, dont un des buts est précisément de faire abstraction des contenus. Les modalités *de dicto* semblent, elles, entachées d'une confusion entre le niveau de l'assertion modale et celui du *dictum*, objet de cette assertion. Selon Kneale et Kneale, ce qui manque au projet d'Aristote pour échapper à ce problème, c'est précisément la base sur laquelle les mégaro-stoïciens vont construire leur logique modale: une logique des propositions inanalysées.

Comme on le sait, les mégariques et les stoïciens rejetaient très clairement l'essentialisme d'Aristote. Ils ne pouvaient ainsi s'accommoder de modalités fondées sur une distinction qu'ils refusaient entre des propriétés essentielles et des propriétés accidentelles. La plus grande originalité dans leur tentative d'intégrer les notions modales à leur logique est sans doute d'en avoir donné une interprétation temporelle[9].

Diodore Cronos donnait ainsi les définitions suivantes, qui sont restées parmi les plus célèbres:

> Le *possible* est ce qui est vrai ou sera vrai,
> l'*impossible* ce qui étant faux ne sera pas vrai,
> le *nécessaire* ce qui étant vrai ne sera pas faux, et
> le *non nécessaire* ce qui est faux ou sera faux.

Il ressort de ces définitions que les modalités ne portent pas sur les états de choses décrits par les énoncés, mais sur les énoncés eux-mêmes. On ne saurait cependant dire s'il s'agit de véritables propositions du fait de la présence d'indices temporels[10]. Il faut ici se souvenir que Diodore admettait dans sa logique que les énoncés puissent changer de valeur de vérité. Le fameux «Il fait jour» est vrai à tel instant, alors qu'il est faux quelques

9 On trouvera une description des sources, ainsi qu'un certain nombre de textes en traduction anglaise dans Mates 1961.

10 Sur les manières de représenter les indices temporels des propositions des stoïciens, Cf. Mignucci 1978: 336-337.

heures plus tard. Les modalités apparaissent ainsi comme des sortes de quantifications portant sur les indices temporels, le nécessaire et le possible jouant alors le rôle respectivement d'universelle et de particulière temporelles. Et, de même qu'ils peuvent changer de valeur de vérité, les énoncés peuvent aussi changer de modalités, ce qui montre que Diodore entend par nécessité ou possibilité non pas des termes absolus mais des termes relatifs à un instant. En outre, les changements de modalités ne se font pas sans règles: les énoncés possibles ou non nécessaires pourront passer à toute autre modalité, mais une fois devenu nécessaire ou impossible aucun énoncé ne pourra plus changer, ni sa modalité, ni même sa valeur de vérité.

Une telle réduction des modalités au temporel comporte inévitablement certains défauts. En bien des points c'est notre intuition des modalités qui est mise à mal. Par exemple, comment accepter que tout ce qui est possible est ou sera vrai au moins une fois. Ne doit on pas admettre qu'il est possible que je sois un assassin, même dans le cas où jamais je ne tuerai personne, et qu'il nous faut pour exprimer cela une modalité spécifique? Mais il ne faudrait pas pour autant négliger les qualités de l'entreprise, qui ne vont pas, pour certaines, sans se rapprocher de préoccupations modernes. Et comme le relève J.-L. Gardies:

> L'originalité de l'analyse mégaro-stoïcienne des modalités ontiques tient à ce qu'elle réussit à dépouiller les représentations ordinaires de ces modalités de ce qu'elles pouvaient apparemment comporter de rigoureusement intensionnel. Dans une telle transcription, la modalité s'analyse, au même titre que la simple universalité, en strictes valeurs de vérité et de fausseté (1979: 39).

En effet, pour montrer par exemple qu'une proposition comme «Il est possible que je sois à Corinthe» est vraie, les mégaro-stoïciens disposent d'une méthode «quasi extensionnelle»: exhiber un moment de la chaîne du temps où la proposition «Je suis à Corinthe» est vraie. D'une telle possibilité, qui ne va pas sans rappeler les évaluations des sémantiques modernes, la logique aristotélicienne n'en dispose pas; elle doit, dans un cas comme celui-ci, inévitablement passer par une analyse du contenu de la proposition[11]. Mais voyons maintenant par quel biais la logique moderne est revenue à la question des modalités.

2. C. I. Lewis et le problème de l'implication

Si la logique peut être conçue comme un langage capable de mettre en évidence l'ensemble des tautologies ou des formules valides d'un calcul vérifonctionnel, elle peut aussi l'être d'une manière plus large comme science de l'inférence. Pris en ce second sens, l'objet central de son étude est la notion de validité des arguments, et plus précisément elle a pour but la mise en évidence des conditions sous lesquelles il est possible d'inférer une conclusion à partir d'une prémisse ou d'un ensemble de prémisses. La relation qui existe alors entre la (les) prémisse(s) et la conclusion est la relation que l'on nomme *relation d'implication*. Cette relation, à partir de laquelle on définit une relation d'équivalence propositionnelle, joue un rôle tout à fait central dans tout système d'inférence, car elle permet d'organiser l'ensemble de ses expressions selon des classes d'équivalence ordonnées[12]. Dans la logique classique, on définit comme suit la relation $\rightarrow$ dite d'*implication vérifonctionnelle*, à partir de l'opérateur $\supset$ de conditionnelle:

$$P \rightarrow Q =\mathrm{df} \vdash P \supset Q$$

Autrement dit, P *implique vérifonctionnellement* Q si et seulement si $P \supset Q$ est une *tautologie* ou, ce qui revient ici au même, un *théorème* du système.

Le problème soulevé par Lewis consiste à se demander si une telle relation est adéquate pour recouvrir l'usage ordinaire de l'implication dans la pratique déductive[13]. Apporter une réponse à cette question relève inévitablement de la gageure dans la

11 Sur les modalités chez Aristote, Kneale & Kneale, 1962: 81-96, Blanché 1970: 67-77, Gardies 1979: 11-28 et pour une étude plus précise, Patterson 1995. Concernant les stoïciens, cf. Mates 1961, Mignucci 1978, Kneale & Kneale 1962: 117-128.

12 Cf. Grize 1971: 13-18.

13 La présentation qui suit s'éloigne passablement de celle de Lewis, le but poursuivi étant de rendre plus explicite la distinction des différents niveaux linguistiques. On trouvera un exposé de Lewis lui-même dans Lewis & Langford 1959, en particulier, chap. VIII.

mesure où une définition générale de la notion d'implication fait défaut. Cependant, on peut reconnaître pour toute relation d'implication certaines conditions minimales.

D'un point de vue sémantique, une telle relation doit préserver la vérité dans le passage des prémisses à la conclusion. Elle doit ainsi empêcher tout passage du vrai au faux. Cette condition découle tout naturellement de la définition de la validité des arguments[14]. De part sa définition, $\rightarrow$ satisfait à cette condition. On peut aisément le vérifier à l'aide de la table de vérité de la conditionnelle; exiger que $P \supset Q$ soit une tautologie, c'est précisément exclure le cas où P est vraie et Q fausse:

P	Q	$P \supset Q$
1	1	1
$\cancel{1}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
0	1	1
0	0	1

D'un point de vue syntaxique, si P implique Q, il faut que Q soit *déductible* de P. Cette condition est elle aussi satisfaite par $\rightarrow$. Car (si on prend le cas de la déduction naturelle), montrer que $P \supset Q$ est un théorème consiste justement, comme l'exige la règle d'introduction de la conditionnelle, à exhiber une sous-déduction dans laquelle Q est déduite de P.

m		$\underline{P}$	
.		.	
.		.	
.		.	
n		Q	
	$P \supset Q$		m-n, $\supset$ intro

Cela dit, ces conditions restent minimales. Notons que la relation d'implication vérifonctionnelle $\rightarrow$ s'appuie sur la notion de *tautologie*. Cela signifie que ne sont pas prises en compte les valeurs effectives des propositions en jeu, mais seulement l'ensemble des valeurs qu'elles sont susceptibles de prendre. Dans la pratique déductive cependant, cette généralité

14 Voir ici même, p. 16.

est rarement visée. La relation d'implication intervient le plus souvent entre des énoncés auxquels, à tord ou à raison, on attribue des valeurs de vérité déterminées. On rencontre en effet des exemples comme:

> Jean est un homme *implique* Jean a un coeur.
> Il fait jour *implique* Il fait clair.
> Il pleut *implique* Un parapluie est utile.

Comme la relation $\rightarrow$ ne porte jamais entre des propositions atomiques, elle ne peut convenir à aucun de ces exemples. Désignons les propositions atomiques en jeu par les symboles p et q. Soutenir les implications qui précèdent revient en fait, non pas à admettre que $\vdash p \supset q$ (ce qui n'est jamais le cas avec p et q atomiques), mais simplement que val $(p \supset q)$ = vrai.

On définit ainsi une relation plus faible qui ne fait pas appel à la notion de tautologie, et que l'on nommera, pour la distinguer de $\rightarrow$, la relation d'*implication de fait*:

$$PIQ =_{df} \text{val}(P \supset Q) = \text{vrai}$$

Celle-ci semble en effet plus adéquate pour représenter les relations présentes dans les exemples ci-dessus. Cependant, comme le fait remarquer Lewis, il ne faut pas entendre par une telle relation plus que ce qu'elle signifie effectivement et que la table de vérité de la conditionnelle peut nous montrer: PIQ signifie uniquement que le cas où val (P) = vrai et val (Q) = faux est exclu. La relation d'implication de fait revêt ainsi un caractère peu intuitif qui est pourtant une conséquence immédiate des propriétés de la conditionnelle.

On trouve en effet dans la logique classique certains théorèmes liés à la conditionnelle qui peuvent, une fois interprétés, être ressentis comme peu en accord avec l'idée intuitive d'implication:

$$(1) \vdash P \supset . Q \supset P$$
$$(2) \vdash \sim P \supset . P \supset Q$$

Lewis illustre ces expressions, connues sous le nom de «paradoxes de l'implication matérielle», par un exemple devenu fameux. Prenons une paire de propositions atomiques (indépendantes) p et q, telles que:

p =df «Le vinaigre est acide»,
q =df «Il y a des hommes barbus».

On sait, de par notre expérience des faits, qu'il s'agit de deux propositions vraies. Ainsi, bien que $p \supset q$ n'exprime pas une tautologie, val ($p \supset q$) = vrai. On dispose donc d'une implication de fait pIq. Autrement dit, «Le vinaigre est acide» implique (de fait) «Il y a des hommes barbus». Le caractère paradoxal d'un tel exemple tient clairement au fait que les deux propositions n'entretiennent aucun lien sémantique.

Comme l'expriment (1) et (2), il suffit pour qu'une conditionnelle soit vraie que son conséquent le soit, ou encore que son antécédent soit faux. La relation I peut porter entre des propositions qui n'entretiennent aucun lien de pertinence. En particulier, assumer une relation comme PIQ ne signifie aucunement être en mesure, d'une manière générale, de déduire Q de P.

Comme le relève Lewis, la différence entre les deux relations $\rightarrow$ et I tient au fait que, là où $P \rightarrow Q$ signifie que Q est déductible de P, PIQ signifie seulement que la vérité de Q peut être déduite de la vérité supposée de P. Ce n'est pas une vérité abstraite et nécessaire que l'on puisse déduire *Jean a un coeur* de *Jean est un homme*, mais il y a un univers qui nous est familier - le nôtre - dans lequel cette implication exprime une relation effective. On peut dire formellement la chose de la manière suivante:

(3) [val (P) = vrai et PIQ] $\rightarrow$ val (Q) = vrai

Selon Lewis, l'obscurité qui entoure les notions de déductibilité et d'implication est due à une confusion entre les deux sortes de relations:

> Inability to distinguish between (1) "If p is true and $p \supset q$ holds, then q is true" and (2) "When $p \supset q$ holds, q is deducible from p" is responsible for most of the confusion about material implication and deducibility (Lewis and Langford 1959: 246).

La distinction entre les deux types d'implication reste cependant difficile car la discussion porte sans cesse sur des niveaux linguistiques différents. Si la conditionnelle est bien un élément du langage objet, tout ce que nous pouvons dire à l'aide de $\vdash$, $\rightarrow$ et I demeure métalinguistique.

Le projet de Lewis consiste précisément à ramener tous les éléments du problème au niveau de la langue objet, en construisant un langage logique capable de représenter les différents types de liens que nous avons rencontrés.

S'interrogeant sur la relation $\rightarrow$, Lewis constate qu'elle échappe pratiquement au caractère paradoxal de I. La tautologie apporte effectivement la garantie d'un lien de pertinence minimal. Car, lorsqu'on a $\vdash P \supset Q$, l'une au moins des trois conditions suivantes est satisfaite:

i. P est inconsistante
ii. Q est tautologique
iii. P et Q possèdent au moins une proposition atomique en commun[15].

Si un certain caractère paradoxal demeure avec les conditions i. et ii., cela ne peut être que dans une moindre mesure. Quoi de surprenant dans le fait qu'une proposition inconsistante implique toute proposition puisqu'elle enferme une contradiction, de même que dans celui que la tautologie, qui ne peut pas être fausse, soit déduite de n'importe quel ensemble de prémisses? Quant à la condition iii., elle garantit justement le lien de pertinence qui manquait parfois à l'implication de fait.

15 Pour i et ii la chose étant triviale, il reste à se convaincre que si aucune de ces deux conditions n'est satisfaite P et Q possèdent au moins une proposition atomique en commun (par exemple: $\vdash p \supset. p \vee q$). La démonstration consiste à voir que sous l'hypothèse qu'aucune des trois conditions n'est satisfaite, il est impossible que $\vdash P \supset Q$.
Par hypothèse, P n'est pas inconsistante; parmi les 2^m familles d'interprétations possibles des m propositions atomiques de P, l'une au moins I est telle que $val_I(P)=1$. Comme P et Q ne possèdent aucune proposition atomique en commun, les 2^n familles d'interprétations possibles des n propositions atomiques de Q sont indépendantes des familles associées à P. Calculer les valeurs possibles de $P \supset Q$ consiste ainsi à examiner, pour *chacune* des valeurs possibles de P, *toutes* les valeurs possibles de Q. Or, parmi ces 2^n familles d'interprétations associées à Q, une au moins J est telle que $val_J(Q) = 0$, car Q, par hypothèse, n'est pas tautologique. Par conséquent, il existe au moins une famille d'interprétation K des m+n propositions atomiques de $P \supset Q$ (K étant une sous-famille à la fois de I et de J) telle que $val_K(P) = 1$ et $val_K(Q) = 0$. Donc $P \supset Q$ n'est pas une tautologie et on a pas $\vdash P \supset Q$.

La logique des propositions S (*the Survey system*) que Lewis va proposer se construit naturellement à partir de variables et d'opérateurs propositionnels. Mais l'idée de Lewis sera d'ajouter aux opérateurs vérifonctionnels classiques un opérateur susceptible de rendre compte de l'idée de *tautologie* et qui permette d'échapper au caractère paradoxal lié à la simple vérifonctionnalité des opérateurs classiques.

La tautologie, comme nous l'avons vu, est intimement associée à l'idée de *nécessité logique*. La démarche consistera ainsi à introduire dans S un opérateur modal L, que l'on interprétera de la manière suivante:

LP: «P est nécessaire», «P est tautologique».

L'utilisation métalinguistique de $P \rightarrow Q$ peut alors être remplacée par celle, dans S, de l'expression $L(P \supset Q)$. Sur cette base, Lewis va poser la définition d'un nouvel opérateur de conditionnelle dont les propriétés diffèrent passablement de celles de $\supset$. Il s'agit de l'*implication stricte*[16]:

$$P \strictif Q \ =_{df}\ L(P \supset Q)$$

Comme tous les systèmes qui suivront[17], ce premier système moderne de logique modale ne peut disposer de l'extensionnalité qui caractérise la logique classique. Car L et $\strictif$ ne sont pas des opérateurs vérifonctionnels; il est bien entendu impensable de les définir à l'aide des opérateurs classiques, qui couvrent toute la combinatoire des valeurs de vérité.

Avant de passer à une présentation plus systématique d'exemples de logiques modales, proposons encore pour terminer trois théorèmes caractéristiques du système S. Ils constituent en effet le pendant «stricte» de nos expressions (1), (2) et (3) et illustrent ainsi la manière dont les problèmes que nous avons évoqués peuvent désormais être formellement représentés.

$$(1')\ \vdash_S P \strictif . \ Q \supset P$$

16 Nous en conservons ici le nom attribué par Lewis bien que *conditionnelle stricte* serait plus adéquat puisqu'il s'agit d'un opérateur et non d'une relation.

17 Précisons pour la conformité historique que Lewis propose une série de systèmes. Le premier, S1, est construit à partir de l'ensemble d'opérateurs $\{\sim, \wedge, M\}$. On y définit les opérateurs que nous avons utilisés comme suit:
$LP =_{df} \sim M \sim P$ et $P \strictif Q =_{df} \sim M(\sim P \wedge Q)$. Cf. Lewis 1918.

(2') $\vdash_S \sim P \rightarrow\!. P \supset Q$
(3') $\vdash_S P \wedge (P \supset Q) . \rightarrow Q$

Il apparaît ainsi que, dans le langage de S, «what is tautological is distinguishable from what is merely true, whereas this difference does not ordinarily appear in the symbols of [classical] truth-value system» (Lewis and Langford 1959: 247)[18]. Il est temps désormais d'aborder la construction effective de quelques systèmes.

3. Quelques systèmes modaux

Comme je l'ai déjà indiqué, proposer un système de logique modale relève d'une grande liberté. En effet, même en se restreignant à une famille de systèmes dits *standard*, on peut encore concevoir de nombreuses logiques différentes. Ces systèmes sont ceux qui satisfont aux conditions que nous avons déjà rencontrées en introduction et que je rappelle ici:

Soit S, un système standard de logique modale,

1. S est une expansion conservative de C,
2. MP se définit dans S comme ~L~P,
3. S inclut le théorème $\vdash_S$ LP $\supset$ P,
4. *Si* $\vdash_S$ P *alors* $\vdash_S$ LP.

Non seulement, il existe plusieurs manières d'accéder aux systèmes, par des axiomatiques différentes ou des ensembles différents de règles, mais on rencontre bien entendu des systèmes qui déterminent des ensembles différents de théorèmes, et donc qui diffèrent par les inférences modales qu'ils valident.

Notons tout d'abord que les premiers S1 à S3 de Lewis, auxquels nous venons de faire allusion, ne sont pas standard au sens ci-dessus. Ils ne satisfont pas, en particulier, au principe de nécessitation de la condition 4. Le premier système que nous allons voir est dû à Feys (1937). Connu sous l'étiquette de T, ce système, qui est un peu plus fort que les systèmes S1 et S2 de

18 On trouvera une description axiomatique simple des premiers systèmes de Lewis dans Hughes & Cresswell 1996: 193-209.

Lewis, s'impose ici par son caractère intuitif et élémentaire comme une base minimale pour la construction des systèmes standard. On en trouvera dans ce qui suit une présentation par des règles de déduction naturelle. Pour des raisons de clarté, il sera aussi fait appel ponctuellement à des considérations qui relèvent de la présentation axiomatique[19].

Mais rappelons tout d'abord la situation de départ. Conformément à la première des conditions, T est une expansion de C, la logique classique des propositions. On y admettra ainsi comme base le vocabulaire ainsi que toutes les règles de C, auxquels on ajoutera pour commencer, l'unique symbole L – compris comme «il est nécessaire que...». On introduira aussi M – «il est possible que...» – mais ceci sans en faire un symbole primitif, grâce à la définition conventionnelle suivante:

M–déf.: MP =df ~L~P

Cette manière de procéder, au demeurant conforme à la condition 2, nous dispense de donner une caractérisation de chacune des modalités, puisqu'il suffit alors de donner des règles relatives à l'unique opérateur primitif nouveau: L[20].

La condition 3, associée à l'élimination de la conditionnelle, indique très clairement la forme que prendra la règle d'élimination de L. On pose simplement:

Règle Le	n	LP	
		P	n, Le

La règle d'introduction, quant à elle, s'appuie sur le principe de nécessitation de la condition 4. Sa conception demande cependant un certain détour. Selon le principe de nécessitation, si l'on dispose d'une preuve de P, on est en droit d'introduire une expression comme LP. Par exemple, pour montrer que L(P ⊃ P) est un théorème de T, il suffit de disposer d'une preuve de P ⊃ P, autrement dit de la déduction suivante:

19 La présentation qui suit n'est pas celle de Feys. La notation et les règles utilisées pour la logique C sont celles que l'on trouve dans Grize 1969.

20 Il n'est évidemment pas exclu en pratique de donner des règles pour M, mais celles-ci auront le statut de règles dérivées.

1.	$\mid\ \mid \underline{P}$	hyp.
2.	$\mid\ \mid P$	1, rep
3.	$\mid P \supset P$	1-2, $\supset$i

Afin de condenser cette démarche sous la forme d'un schéma de règle de déduction naturelle, l'idée consiste à présenter la preuve attendue sous la forme d'une sous-déduction assortie de deux conditions:

i. elle ne dépendra d'aucune hypothèse,
ii. toute réitération y sera interdite.

Ces conditions visent à assurer un caractère de preuve à la sous-déduction. On parle alors de sous-déduction *stricte* et notre exemple devient:

1.	$\mid\ \mid\ \mid \underline{P}$	hyp.
2.	$\mid\ \mid\ \mid P$	1, rep
3.	$\mid\ \mid P \supset P$	1-2, $\supset$i
4.	$\mid L(P \supset P)$	1-3, Li

Si la démarche semble satisfaisante, un schéma générale de règle conçu sur ce modèle s'avère cependant trop faible. Un système qui serait ainsi construit ne donnerait en effet accès qu'à des instances substitutionnelles de théorèmes de C, avec pour seule différence qu'on pourrait les faire précéder de symboles de nécessité. Par exemple l'expression suivante, dont la validité parait tout à fait intuitive, n'y serait pas démontrable:

$$L(P \supset Q) \supset (LP \supset LQ).$$

Pour accéder à de telles expressions, il faudrait encore se donner les moyens d'utiliser dans la sous-déduction stricte une partie au moins des informations qui peuvent la précéder dans la démarche déductive. Il s'agit en somme d'affaiblir l'interdiction de réitération. Bien que le caractère de preuve de la sous-déduction est alors compromis, ce ne peut être que dans une moindre mesure, car la réitération reste assortie d'une condition forte. On ne réitérera que des expressions dont le caractère de nécessité aura été, sinon démontré, du moins explicitement pris en charge.

Dans ce dernier cas, bien entendu, le résultat de la sous-déduction stricte restera conditionné par la supposition faite.

Cette manière de faire revient à admettre de manière implicite un principe très généralement associé à la nécessité logique: *ce qui s'ensuit logiquement de ce qui est nécessaire est également nécessaire*. Dans la pratique, on passera par une nouvelle règle de réitération, qui sera la seule autorisée dans une sous-déduction stricte[21].

```
Règle T-réit.      n  | LP
                      | L |
                      |   |
                      |   | P          n, T-réit.
                      |   |
```

On peut désormais proposer le schéma de règle suivant pour l'introduction de L, où l'indication L placée au départ de la sous-déduction en rappelle les conditions particulières:

```
Règle Li           m | L |             Sans hypothèse et
                     |   |             réitération unique-
                     |   |             ment avec T-réit.
                   n |   | P
                     | LP              m-n, Li
```

Voyons maintenant quelques exemples de preuves dans T:

1. $\vdash_T P \supset MP$

```
1 |  | P                 hyp.
2 |  |  | L~P            hyp.
3 |  |  | P              1, reit
4 |  |  | ~P             2, Le
5 |  | ~L~P              2, 3, 4, ~i
6 |  | MP                5, M-déf
7 | P ⊃ MP               1-6, ⊃i
```

21 La règle habituelle reste bien entendu valable dans toute autre sous-déduction.

2. $\vdash_T L(P \supset Q) \supset (LP \supset LQ)$

1	$L(P \supset Q)$	hyp.
2	LP	hyp.
3	L $P \supset Q$	1, T-réit
4	P	2, T-réit.
5	Q	3,4, $\supset$e
6	LQ	3-5, Li
7	$LP \supset LQ$	2-6, $\supset$i
8	$L(P \supset Q) \supset (LP \supset LQ)$	1-7, $\supset$i

3. $\vdash_T L(P \supset Q) \supset (MP \supset MQ)$

1	$L(P \supset Q)$	hyp.
2	MP	hyp.
3	$\sim L \sim P$	2, M-déf
4	$L \sim Q$	hyp.
5	L P	hyp.
6	$P \supset Q$	1, T-réit.
7	Q	5,6, $\supset$e
8	$\sim Q$	4, T-réit
9	$\sim P$	5, 7, 8, ~i
10	$L \sim P$	5-9, Li
11	$\sim L \sim P$	3, réit.
12	$\sim L \sim Q$	4, 10, 11, ~i
13	MQ	12, M-déf
14	$MP \supset MQ$	2-13, $\supset$i
15	$L(P \supset Q) \supset (MP \supset MQ)$	1-14, $\supset$i

4. $\vdash_T MLL(LP \supset P)$

1	$\mid L \mid L \mid \quad \mid \underline{LP}$	hyp.
2	$\mid \quad \mid \quad \mid \quad \mid P$	1, Le
3	$\mid \quad \mid \quad \mid LP \supset P$	1-2, $\supset$i
4	$\mid \quad \mid L(LP \supset P)$	1-3, Li
5	$\mid LL(LP \supset P)$	1-4, Li
6	$\mid LL(LP \supset P) \supset MLL(LP \supset P)$	Th.1, P/LL(LP$\supset$P)
7	$\mid MLL(LP \supset P)$	5, 6, $\supset$e

Ce dernier exemple montre de quelle manière, lorsqu'on part d'une expression qui est un théorème du système – ici $LP \supset P$ – on peut toujours la faire précéder d'un L dominant (grâce à la règle Li), ou alors d'un M dominant (grâce au schéma de théorème 1). Remarquons encore que rien ne nous empêche de faire ces introductions successivement, puisqu'à chaque étape le résultat est encore un théorème. Il n'y a ainsi aucun doute qu'une expression comme

$$LMMLMLMLL(LP \supset P)$$

est bien un théorème de T.

Ce phénomène, touchant les théorèmes de T, n'est en fait qu'une manifestation d'un problème plus général concernant l'interprétation que l'on peut donner des expressions du système. Si notre intuition des modalités peut nous guider tant qu'il s'agit de manipuler des formules contenant au plus des modalités simples – celles correspondant en fait à l'expression des modalités classiques: LP, MP, ~LP, ~MP –, elle n'est que d'un faible secours dès que les expressions comprennent des chaînes de modalités[22]. Si l'on peut encore concevoir une nuance entre LP et MLP, que pouvons nous dire de la distinction entre LMP et LLMP? L'approche «naïve» qui préside à l'élaboration d'un système comme T conduit à une richesse expressive qui dépasse très largement ce qui était visé.

Il paraît ainsi souhaitable d'examiner si les expressions contenant des chaînes de modalités ne sont pas susceptibles

22 On parle de *chaîne de modalités* dans une expression lorsqu'au moins un de ses opérateurs modaux porte sur une partie d'expression dont l'opérateur dominant est soit une modalité, soit une modalité précédée d'un ou plusieurs symboles de négation. On reconnaît par exemple une telle chaîne dans $p \supset L{\sim}Mq$, alors que $L(p \supset {\sim}Mq)$ n'en possède pas.

d'être réduites à des expressions équivalentes n'en comportant aucune. Si tel était le cas, elles ne constitueraient plus que des variantes notationnelles pour des significations modales identiques et le problème de leur lecture tomberait *ipso facto*.

Tout schéma d'équivalence permettant une telle réduction est connu sous le nom de *loi de réduction*, et l'on voit clairement qu'il serait utile de disposer des deux suivants:

R1: $LP \leftrightarrow LLP$

R2: $MP \leftrightarrow MMP$

Malheureusement, T ne possède aucune de ces deux lois, car si les expressions a et b suivantes y sont bien des théorèmes, ce n'est en revanche pas le cas de leurs converses a' et b':

a: $\vdash_T LLP \supset LP$ a': $\vdash_T LP \supset LLP$

b: $\vdash_T MP \supset MMP$ b': $\vdash_T MMP \supset MP$.

Il est donc impossible dans T de réduire les chaînes de L successifs ainsi que celles de M. En fait, T ne comporte aucune loi de réduction et si, en un sens large, on nomme modalité toute suite formée des symboles L, M et ~, on dira que T comporte une infinité de modalités irréductibles.

Pour mener à bien la formalisation des modalités, il serait pourtant intéressant de disposer d'un système dont le pouvoir expressif soit limité à un nombre fini de modalités différentes. C'est la principale motivation de la construction du système S4. L'enjeu consiste à renforcer T de manière à obtenir un système où l'expression a' soit un théorème. On se convaincra dans la suite que dans un tel système b' est aussi dérivable, ce qui garantit l'accès aux deux lois R1 et R2.

L'expression a' est connue généralement comme la formule caractéristique de S4 (désormais FC[S4]). Pour construire S4, on modifie T en y ajoutant FC[S4] comme un axiome, ce qu'on note:

S4 = T + FC[S4]

S4 étant une expansion de T, tous les théorèmes de T sont *a fortiori* des théorèmes de S4. En revanche, le nouvel axiome permet de déduire des expressions qui n'étaient pas théorèmes de T. On obtient un système parfaitement équivalent, mais par le biais de la déduction naturelle, en modifiant uniquement la règle spéciale de réitération T-réit pour en faire la règle suivante:

Règle S4-réit	n │ LP	
	│ L │	
	│ │ LP	n, S4-réit

Par cette règle, la seule réitération autorisée dans une sous-déduction stricte est celle de propositions nécessaires, mais cette fois sans modification, autrement dit sans ôter le symbole de nécessité[23]. Voyons maintenant quelques schémas de théorèmes spécifiques de S4 (certaines démonstrations étant laissées au lecteur):

5. (FC[S4]) $\vdash_{S4}$ LP $\supset$ LLP

6. $\vdash_{S4}$ MMP $\supset$ MP

1	│ │ MMP	hyp.
2	│ │ │ L~P	hyp.
3	│ │ │ MMP	1, reit
4	│ │ │ L │ │ MP	hyp.
5	│ │ │ │ │ ~L~P	4, M-déf
6	│ │ │ │ │ L~P	2, S4-réit
7	│ │ │ │ ~MP	4, 5, 6, ~i
8	│ │ │ L~MP	4-7, Li
9	│ │ │ ~L~MP	3, M-déf
10	│ │ ~L~P	2, 8, 9, ~i
11	│ │ MP	10, M-déf
12	│ MMP $\supset$ MP	1-11, $\supset$ i

7. $\vdash_{S4}$ LP $\supset$ LMLP (utiliser le th. 1)

23 Bien que restant valable, la règle T-réit est désormais superflue puisqu'elle est aisément dérivable de S4-réit et Le.

8. $\vdash_{S4}$ MLMP ⊃ MP

1	MLMP	hyp.
2	L~P	hyp.
3	MLMP	1, réit
4	L | LMP	hyp.
5	MP	4, Le
6	~L~P	5, M-déf
7	L~P	2, S4-réit
8	~LMP	4,6,7, ~i
9	L~LMP	4-8, Li
10	~L~LMP	3, M-déf
11	~L~P	2, 9, 10, ~i
12	MP	11, M-déf
13	MLMP ⊃ MP	1-12, ⊃i

9. $\vdash_{S4}$ LMLMP ⊃ LMP

Les deux lois R1 et R2 de S4 autorisent un grand nombre de réductions. Clairement, toute succession d'un même opérateur modal peut être réduite à une seule occurrence de cet opérateur. Mais plus encore, toute chaîne composée d'un mélange des deux opérateurs peut être réduite à une suite de trois, voire de deux, de ces opérateurs. Si bien que seules demeurent irréductibles les chaînes de trois et deux opérateurs sans répétition. Comme S4 ne contient aucune loi de réduction plus forte, on y dénombre les quatorze modalités irréductibles suivantes (l'absence d'opérateur modal étant comprise comme une modalité au sens large du terme)[24]:

24 Grâce aux équivalences que le jeu de la négation permet entre L et M, on peut se convaincre que toutes les chaînes se réduisent à une modalité irréductible négative lorsqu'elles comprennent un nombre impair de négation et à une modalité affirmative sinon.

Modalités irréductibles de S4:

Affirmatives	Négatives
P	~P
LP	~LP
MP	~MP
LMP	~LMP
MLP	~MLP
LMLP	~LMLP
MLMP	~MLMP

Si l'interprétation des expressions modales en chaîne reste intuitivement difficile, le système S4 offre une organisation fort intéressante, qui trouve par ailleurs des applications dans des domaines non modaux[25]. On peut représenter cette organisation par le diagramme relationnel suivant, où $\rightarrow$ représente la relation d'implication, les lignes passant par le centre c des relaions de contradiction et les lignes horizontales, soit des relations de contrariété, lorsqu'elles sont situées en dessus de c, soit de subcontrariété, lorsqu'elles sont en dessous:

25 Sur la possibilité d'interprétations temporelles de S4, cf. Prior 1967: 20-31, Hughes & Cresswell 1996: 127 ss., ainsi que 225-230 pour des versions probabilistes et algébiques

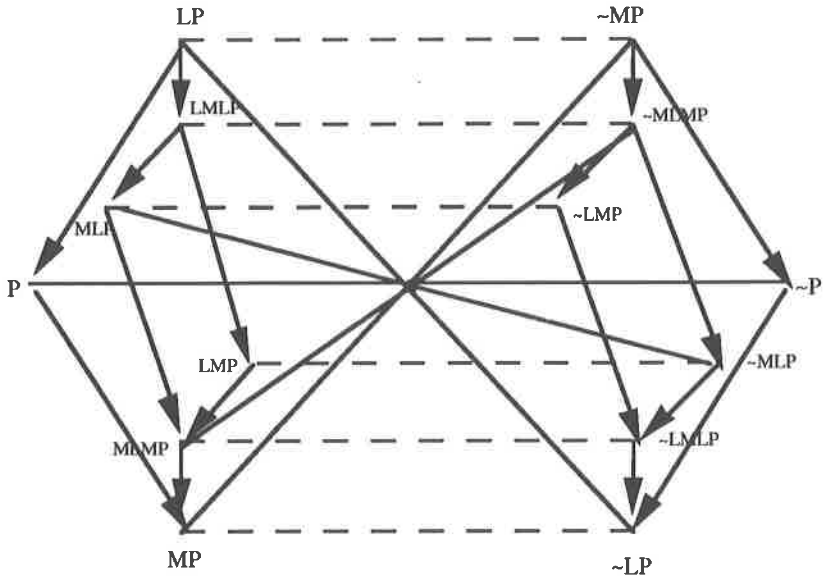


Diagramme A

Quatre chaînes de modalités ainsi que leurs négations demeurent cependant irréductibles. Le système S5, que nous allons aborder maintenant, est conçu pour permettre leur réduction à des modalités simples. Il devra, pour ce faire, disposer des deux lois de réduction suivantes:

R3: MP ↔ LMP

R4: LP ↔ MLP

Comme R1 et R2, ces deux lois ne sont pas indépendantes, et l'on se convaincra assez aisément qu'il suffit pour en disposer d'avoir comme théorème l'expression suivante, dite formule caractéristique de S5, formule qui reste indémontrable dans les systèmes précédents:

FC[S5]: MP ⊃ LMP

Un système muni des quatre lois de réduction R1-R4 permet de réduire toute chaîne de modalité à des modalités simples. D'une manière pratique, toute chaîne se réduira à son dernier opérateur, précédé ou non d'un symbole de négation. Par exemple:

$$\sim LMMLMP \leftrightarrow \sim MP$$

Comme S4, S5 est conçu comme une expansion du système précédent. Il est construit par l'ajout à S4, comme nouvel axiome, de la formule FC[S5][26]:

$$S5 = S4 + FC[S5]$$

Avec S5, on obtient un système où seules six modalités restent irréductibles (en fait, les modalités de la tradition). On peut représenter leur organisation par un diagramme, plus simple que celui de S4, où l'on retrouve les oppositions du carré traditionnel:

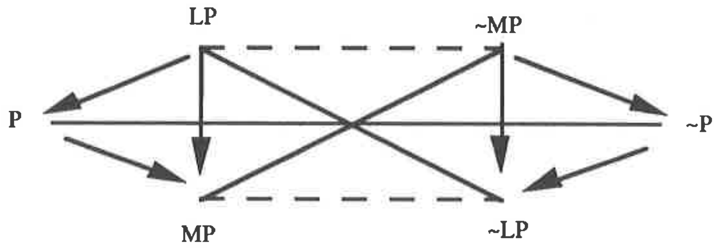


Diagramme B

Par le biais de la déduction naturelle, on obtient le même résultat en modifiant une fois encore les conditions de réitération dans les sous-déductions strictes. Dans S4, la formule caractéristique peut se lire: *si une proposition est nécessaire, alors sa nécessité est nécessaire*, et ceci s'est traduit en déduction naturelle par la règle S4-réit, autorisant la réitération de toute expression nécessaire, sans lui enlever son symbole de nécessité. Mais qu'en est-il de FC[5]? On peut la lire de la manière suivante: *si une proposition est possible, alors sa possibilité est nécessaire*. En somme, possibilité et nécessité dans S5 sont toujours elles-mêmes nécessaires. La nouvelle règle de

26 On obtient aussi S5 en ajoutant directement FC[S5] à T, FC[S4] étant alors dérivable.

réitération autorisera ainsi également la réitération de propositions possibles. En voici le schéma:

Règle S5-réit n | MP
| L |
| | MP   n, S5-réit

La règle S4-réit reste bien entendu valable, on est donc autorisé dans S5 à réitérer dans une sous-déduction stricte toute expression modalisée. Le lecteur pourra s'en convaincre en démontrant les deux règles dérivées suivantes, qui facilitent d'ailleurs grandement la déduction dans S5:

Règle S5-réit* n | ~LP
| L |
| | ~LP   n, S5-réit*

Règle S5-réit** n | ~MP
| L |
| | ~MP   n, S5-réit**

Mais voyons encore quelques exemples de schémas de théorèmes:

10. (FC[S5]) $\vdash_{S5}$ MP ⊃ LMP
11. $\vdash_{S5}$ L(MP ⊃ Q) ⊃ L(P ⊃ LQ)
12. $\vdash_{S5}$ MLP ⊃ LP

1	| | MLP	hyp.
2	| | | ~LP	hyp.
3	| | | MLP	1, réit
4	| | | L | ~LP	2, S5-réit*
5	| | | L~LP	4-4, Li
6	| | | ~L~LP	3, M-déf
7	| | ~~LP	2,5,6, ~i
8	| | LP	7,~~e
9	| MLP ⊃ LP	1-8, ⊃i

Le système S5 apparaît, du point de vue de l'expression des modalités, comme une limite. Toute addition d'un axiome supplémentaire qui donnerait accès à des lois de réduction plus fortes que R3 ou R4 rendrait le système inadéquat pour une formalisation des modalités. En effet, une expansion conçue de cette manière mènerait soit à un système inconsistant, soit à une logique n'exprimant rien d'autre que la logique des propositions classique. Pour se convaincre de ce fait, il suffit de partir du diagramme B des modalités irréductibles de S5. Toute nouvelle équivalence entre deux expression du diagramme qui sont en relation d'opposition (contraires, subcontraires ou contradictoires) mènerait évidemment à une contradiction. Reste donc la possibilité de nouvelles équivalences entre des expressions dont l'une implique l'autre. Une tentative de ce genre reviendrait à réduire toute modalité à l'une des deux expressions P et ~P.

On trouve un tel exemple, sous le nom de système Triv, dans Hughes et Cresswell (1996, 64-68). Ce système est obtenu par l'ajout à S5 d'un nouvel axiome:

$$\text{Triv} = \text{S5} + P \supset LP$$

Ce système est consistant et admet les deux lois de réduction suivantes:

R5: $P \leftrightarrow LP$

R6: $P \leftrightarrow MP$

Ces lois montrent que les deux opérateurs modaux, non seulement ne sont plus distincts, mais que leur nature modale est compromise. Ils peuvent désormais recevoir une interprétation vérifonctionnelle, la même en fait que celle de l'opérateur unaire connu sous le nom de Verum. Triv est donc une version redondante de la logique classique C; toute expression contenant des opérateurs modaux peut y être réduite à une expression équivalente construite par simple effacement de ces opérateurs.

Si ce système est assurément inapte à formaliser une quelconque intuition des modalités, il présente cependant un intérêt métathéorique. Triv constitue en effet une borne pour les systèmes standard, car tout autre système standard y est contenu.

C'est aussi un système maximal, en ce sens que, comme C, tout ajout d'un nouvel axiome indépendant le rendrait inconsistant[27]. Ainsi, dans la visée proposée ici, tout système de logique modale devra être contenu dans Triv, tout en étant plus faible que ce dernier.

4. Où il est question de sémantique

Nous avons esquissé jusqu'ici une série de systèmes dont chacun se construit sur la base des précédents et dont l'ensemble s'organise en une chaîne allant du système le plus faible au système le plus fort. Bien qu'il s'agisse de constructions au caractère purement syntaxique, il faut remarquer que les différents choix qui ont prévalu à leur développement n'ont pu se faire que sur la base de motivations sémantiques fortes. De la mise en évidence des conditions élémentaires des systèmes standard à la problématique de la réduction des modalités, le seul guide disponible dans le travail syntaxique est celui du sens que l'on envisage d'attribuer aux expressions modales. Pour Lewis, le but des systèmes modaux consistait à approcher au mieux le sens qu'il attendait pour sa conditionnelle stricte P —) Q: «Q est déductible de P». Le nôtre a été, dans les pages qui précèdent, de suivre notre intuition de la nécessité logique, en s'appuyant au départ sur la notion de tautologie.

Cette approche, que l'on peut qualifier de *présémantique*, est certainement indispensable à l'élaboration d'une syntaxe. Elle ne va pas cependant sans soulever certaines questions. Dès le début, avec Lewis, ce n'est pas un seul système qui est proposé mais une série de systèmes qui diffèrent par les théorèmes mis en évidence et donc par le sens des opérateurs qu'ils tentent de représenter. La question se pose ainsi de savoir comment préciser le sens visé et surtout comment déterminer lequel des systèmes peut être adéquat pour le capturer. Si une certaine lecture des opérateurs peut servir à soutenir l'intuition, elle se révèle

27 On parle généralement de *complétude syntaxique*, et on voit aisément qu'aucun des sytèmes plus faibles que Triv que nous avons vu ne peut posséder cette propriété. On peut en effet donner de chacun d'eux une expansion consistante par l'ajout d'un axiome indépendant.

souvent inadéquate par la suite. La lecture de L comme un opérateur de tautologie par exemple s'avère inadéquate dans T dès qu'on fait usage du principe de nécessitation. On peut bien comprendre l'expression LP $\supset$ P comme «si P est une tautologie, alors P est vraie». Cette interprétation mène cependant à l'incohérence avec une expression comme L(LP $\supset$ P), car le *dictum* du premier L ne peut être compris comme une tautologie.

Ces exemples montrent pourquoi il s'est agi de dépasser le stade de l'intuition pour aller à la recherche d'une sémantique précise pour les systèmes modaux. Les premiers essais dans cette direction ont consisté à proposer pour chaque système une lecture différente du symbole de nécessité. C'est ainsi qu'a été élaboré par exemple, sur le modèle des tables de vérité, un calcul sémantique des propositions modales à quatre valeurs[28]. Malheureusement, les expressions validées par de telles sémantiques ne correspondent pas systématiquement aux théorèmes de la syntaxe. Si les tables à quatre valeurs constituent une bonne méthode pour montrer qu'une expression est indémontrable, elles ne sont malheureusement pas fiables pour la mise en évidence des théorèmes. En termes plus précis, on dit que les systèmes sont *fondés* sous une telle interprétation, car tout théorème de la syntaxe est valide dans la sémantique, mais qu'il leur manque encore la propriété de *complétude sémantique*. On n'est en effet pas assuré que toute expression valide de la sémantique soit bien un théorème de la syntaxe.

Pour disposer d'une sémantique parfaitement adéquate, rendant les systèmes fondés et complets, il faudra attendre la fin des années cinquante, avec principalement Kripke (1959 et 1963), et plusieurs preuves de complétude dont le point commun est de s'appuyer sur une sémantique dite *des mondes possibles*.

Il n'est pas question, dans une présentation comme celle-ci, d'exposer formellement une telle sémantique. Je me contenterai dans ce qui suit d'en décrire l'esprit. On reprend dans ce type de sémantique une idée qui remonte à Leibniz et qui consiste à définir les notions modales en termes de mondes possibles. Les

28 On trouve dans Purtill 1971: 243-251 un tel calcul dit des "*quasi truth tables*" pour les sytèmes S3, S4 et S5 de Lewis.

mondes possibles sont conçus comme des alternatives non réalisées du monde réel. On peut les décrire d'une manière relativement précise comme des états de faits concevables et complets. On dit d'un état de fait E qu'il est complet lorsque pour tout autre état de faits, soit il est inclus dans E, soit il est exclu par E. Les mondes possibles sont des entités parfaitement abstraites qui, d'une manière effective, apparaissent dans la sémantique comme des ensembles consistants de propositions décrivant des états de faits complets. Ces ensembles sont ainsi infinis; toute proposition envisageable soit y figurera, soit y sera explicitement niée.

Cependant, lorsqu'il s'agira d'évaluer des propositions modales, on ne considérera des états de faits que les parties concernant effectivement ces propositions. Ceci revêt une certaine importance pratique, car en travaillant ainsi il suffit de considérer des familles d'états de faits. Par ce biais, on se donne la possibilité d'envisager l'ensemble des états de faits à travers une combinatoire finie qui suffit à montrer la validité ou la non-validité d'une expression donnée.

Dans une telle sémantique, l'interprétation d'une expression E consiste en la donnée d'un certain nombre de mondes possibles dans lesquels on attribue des valeurs de vérité différentes aux propositions atomiques de E. Chacun des mondes de l'interprétation peut être relié ou non à d'autres mondes par une relation R que l'on nomme *relation d'accessibilité*[29]. On dira que l'expression E est valide dans une interprétation i si et seulement si E est vraie dans tous les mondes de i.

Pour déterminer, dans chaque monde, la valeur des propositions composées – celles des propositions atomiques étant données –, on agira comme dans la logique classique pour les opérateurs non modaux, et on appliquera les clauses suivantes pour L et M:

(a) LP est vraie dans le monde m, ssi P est vraie dans tous les mondes accessibles à m.
(b) MP est vraie dans le monde m, ssi P est vraie dans au moins un des mondes accessibles à m.

29 Cette relation binaire est au moins réflexive, tout monde est accessible à lui-même.

Le diagramme 1 représente une interprétation qui falsifie l'expression FC[S4] Lp ⊃ LLp. Chacun des trois mondes considérés y est représenté par un rectangle où figurent, à gauche, les propositions vraies, à droite, les fausses. Les flèches représentent les relations d'accessibilité.

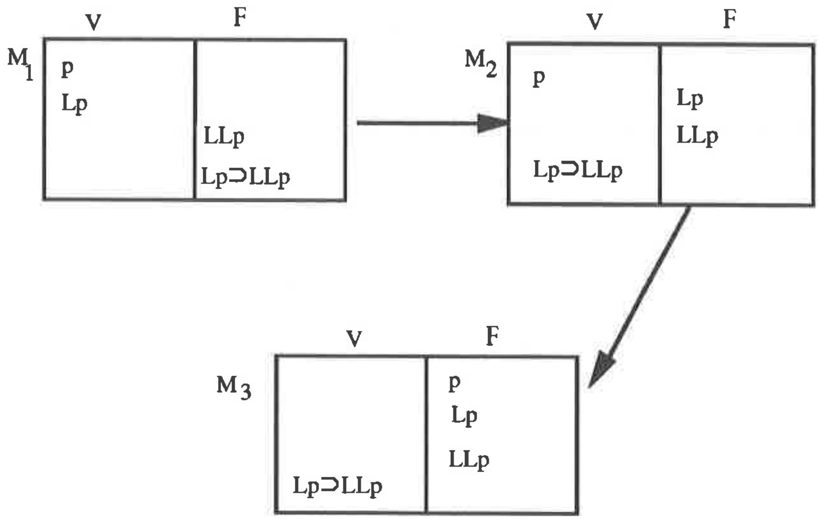


Diagramme 1

A la première ligne, figure dans chacun des mondes la valeur attribuée à p, la seule proposition atomique. Les lignes suivantes représentent respectivement les valeurs calculées – en particulier avec la clause (a) – des expressions Lp, LLp et Lp ⊃ LLp. Le fait de voir figurer dans un des mondes l'expression Lp ⊃ LLp dans la colonne des propositions fausses suffit à montrer que cette expression n'est pas valide dans cette interprétation.

Bien entendu, le résultat de l'évaluation dans les différents mondes dépend de la manière de distribuer la relation R entre ces mondes. On verra plus loin qu'en modifiant l'interprétation par l'ajout d'une troisième flèche allant de M_1 à M_3, l'expression considérée y est alors valide.

Remarquons simplement que, la plus grande généralité étant recherchée, une seule interprétation falsifiant une expression suffit à montrer qu'elle n'est pas *logiquement valide*. On pose en effet la définition suivante:

> L'expression E est *logiquement valide* ssi elle est valide dans toute interprétation.

Par l'exemple ci-dessus, nous avons donc montré que l'expression Lp ⊃ LLp n'est pas logiquement valide, et ceci n'est pas surprenant puisque la sémantique que nous avons décrite est une sémantique adéquate pour le système T. Pour obtenir des sémantiques de S4 et S5, il suffit en fait d'ajouter des conditions sur la relation R d'accessibilité. La seule condition pesant sur R dans T est la réflexivité; on obtient une sémantique pour S4 en ajoutant la transitivité et une sémantique pour S5 en ajoutant encore la symétrie. Mais examinons quelques exemples:

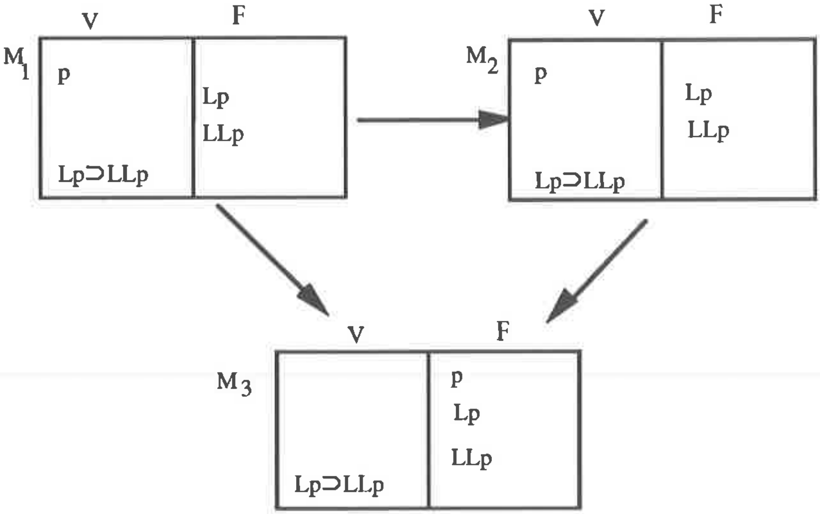


Diagramme 2

En modifiant le diagramme 1 par l'ajout de la condition de transitivité de la relation R, on obtient le diagramme 2. Cette interprétation est désormais adéquate pour S4 et la formule FC[S4] y est valide. L'exemple suivant représente une interprétation qui falsifie FC[S5], c'est-à-dire l'expression Mp ⊃ LMp:

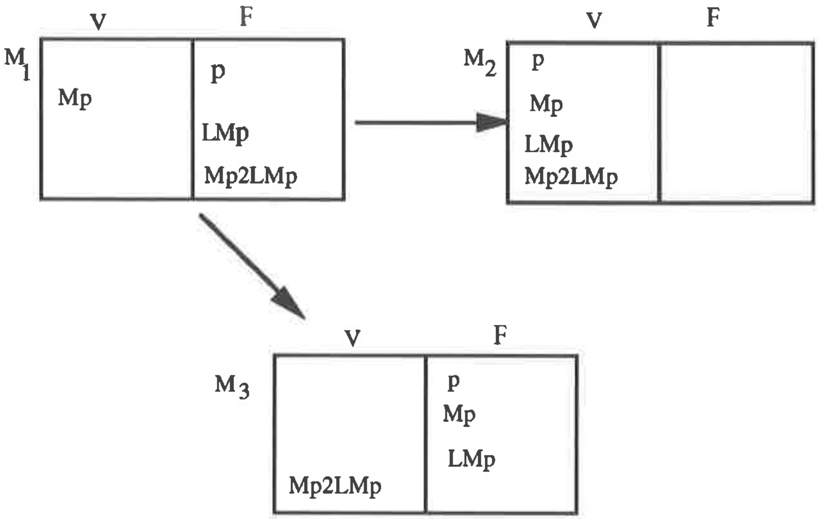


Diagramme 3

Lorsqu'on complète cette interprétation en vue d'une relation R, non seulement réflexive, mais aussi transitive et symétrique, on obtient une interprétation adéquate pour S5, qui valide FC[S5]:

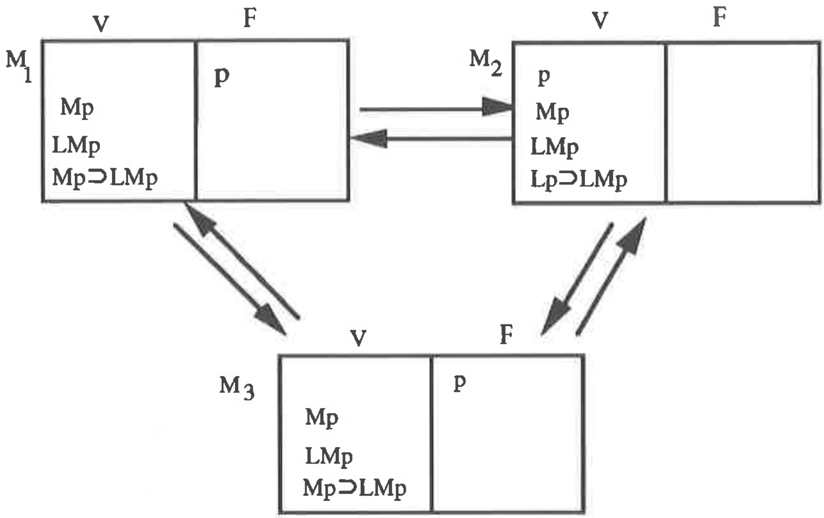


Diagramme 4

Les trois sémantiques auxquelles nous avons fait allusion constituent respectivement des sémantiques pour T, S4 et S5[30]. Celles-ci se distinguent par le type de liens que l'on peut établir entre les mondes d'une interprétation. D'un point de vue formel, il ne faut pas comprendre par ces liens autre chose qu'une relation binaire R qui détermine un certain nombre de couples à l'intérieur de l'ensemble des mondes d'une interprétation.

Il est cependant utile pour la compréhension de s'aider d'une image intuitive de R. On dira par exemple qu'à partir d'un état de faits, il est possible de «concevoir» ou «d'envisager» un certain nombre d'états de faits différents, de même que dans le monde réel, un sujet peut raisonner sur des situations décrivant le monde tel qu'il aurait pu être. Avec cette analogie, on dispose d'un moyen de comprendre intuitivement ce qui distingue les sytèmes. Les différentes conditions qui pèsent sur R peuvent ainsi être comprises comme relevant de capacités plus ou moins fortes de «concevoir», dans une certaine situation, des états de faits différents.

30 On trouvera des démonstrations du caractère fondé et sémantiquement complet des systèmes examinés, dans Hughes & Cresswell 1996: passim.

Avec S5, il n'y a aucune limite, c'est l'ensemble des autres situations qui est toujours accessible à partir de n'importe laquelle d'entre elles. Toute situation «concevable», dans ce système, l'est indépendamment d'un quelconque monde de référence. S5 représente au mieux la nécessité logique en son sens le plus large. Avec T et S4, on a affaire à des sens plus faibles de la nécessité car la validité y dépend des limites imposées par l'accessibilité entre mondes. Dans T, l'unique situation qui est toujours accessible est le monde de référence lui-même. Les autres peuvent l'être ou non. Dans S4 par contre, l'accessibilité est plus forte, dans la mesure où «concevoir» une situation c'est non seulement accéder à un autre monde, mais aussi à toutes les situations «concevables» à partir de cet autre monde. La logique modale apparaît comme un cas exemplaire d'investigation logique, dans la mesure où elle propose au philosophe un outil précis pour mesurer les écarts qui séparent les différents usages souvent entremêlés d'une même notion.

Pour conclure

Au terme d'une brève présentation comme celle-ci, on est bien loin de pouvoir conclure avec l'assurance d'avoir dit l'essentiel. Le domaine des logiques modales – certainement le plus classique parmi ceux des logiques non classiques – a pris aujourd'hui une telle ampleur qu'il serait impensable, même dans un vaste traité, de vouloir en dresser un tableau exhaustif. J'aimerais cependant pour terminer dire quelques mots sur un sujet que je n'ai pas abordé et qui mériterait pourtant un long développement: il s'agit des logiques modales des prédicats.

Le traitement logique des modalités ne s'arrête pas au niveau d'une logique des propositions. Sur la base de ce qui précède, on peut en effet construire, avec une relative facilité, un système modal des prédicats. Il suffit pour ce faire de procéder aux expansions modales, non pas à partir de la logique propositionnelle C, mais sur la base de la logique classique des prédicats C*. Ces expansions se font d'une manière tout à fait similaire à ce que nous avons vu pour T, S4 et S5. On obtient par exemple le système S5* des prédicats, en ajoutant l'ensemble suivant de règles à la logique C*:

S5* = C* + {Le, Li, S4-réit, S5-réit}.

Si la construction en est aisée, le système obtenu ne va pas sans poser un certain nombre de problèmes difficiles, dès qu'il s'agit d'en donner une interprétation. Je ne relèverai ici qu'un seul exemple parmi ces problèmes, peut-être le plus connu. Examinons deux expressions bien formées de S5*:

1. $L(\forall x)(ax \supset bx)$
2. $(\forall x)L(ax \supset bx)$.

Si dans la première le symbole de nécessité porte sur une proposition, on constate que dans la seconde il porte sur une fonction propositionnelle. Avec l'unique symbole L, on est donc en mesure dans S5* d'exprimer deux sortes de modalités différentes. Dans un cas, la nécessité qui est en cause est celle d'une proposition ou d'un *dictum*. Ce qui est qualifié de nécessaire, comme dans les sytèmes propositionnels, est la vérité de la proposition. On parle alors, en suivant en cela la tradition, de modalité *de dicto*. Dans l'autre cas, la modalité est forcément d'une nature différente puisqu'elle porte sur une entité qui n'a pas de valeur de vérité. Ce qui est qualifié de nécessaire dans l'expression 2, c'est le lien qu'entretiennent les prédicats a et b. On dira ici que la modalité est *de re*.

Ces deux modalités, comme l'ont abondamment montré les logiciens médiévaux, sont fort différentes. Et c'est une question difficile et débattue que de savoir si l'une peut être ramenée à l'autre.

Sans vouloir entrer dans plus de détails, relevons simplement que, par la considération de plusieurs sytèmes, on est capable de représenter, d'une manière précise, les différentes solutions qui peuvent être apportées à un tel problème, ainsi que les conséquences qui en découlent. La formalisation logique, une fois de plus, constitue dans le domaine des modalités un instrument privilégié. Et l'on peut même dire qu'avec les systèmes quantifiés, elle a permis d'élargir considérablement un des champs d'investigation les plus fructueux de la philosophie contemporaine[31].

Séminaire de logique
Faculté des lettres
Université de Neuchâtel
Espace Louis-Agassiz 1
CH 2000 NEUCHÂTEL

Bibliographie

ARISTOTE (1946). *De l'interprétation.* éd. Tricot. Paris: Vrin.

ARISTOTE (1947). *Les Premiers Analytiques.* éd. Tricot. Paris: Vrin.

BLANCHÉ R. (1970). *La logique et son histoire, d'Aristote à Russell.* Paris: Armand Colin (éd. augmentée par J. Dubucs, 1996).

CHELLAS B. F. (1980). *Modal Logic: An Introduction.* Cambridge: Cambridge University Press.

FEYS R. (1937). Les logiques nouvelles des modalités. *Revue Néoscholastique de Philosophie* 40, 517-553 et 41, 217-252.

FEYS R. (1965). *Modal Logics.* Louvain, Paris: Nauwelaerts, Gauthier-Villars.

GARDIES J.-L. (1979). *Essai sur la logique des modalités.* Paris: PUF.

GRIZE J.-B. (1969, 1971). *Logique moderne* I et II. La Haye, Paris: Mouton, Gauthier-Villars.

HUGHES G. E., CRESSWELL M. J. (1996). *A New Introduction to Modal Logic.* London: Routledge.

KNEALE W. & KNEALE M. (1962). *The Development of Logic.* Oxford: Clarendon Press.

KONYNDYK K. (1986). *Introductory Modal Logic.* Louvain: University of Notre-Dame Press.

---

31 Sur les logiques des prédicats, cf. en particulier Konyndyk 1986: 77 ss. et Hughes and Cresswell 1996: 235 ss. On trouve aussi une anthologie d'articles célèbres sur les aspects philosophiques des logiques modales des prédicats dans Linsky 1971.

KRIPKE S. A. (1959). A completeness theorem in modal logic. *Journal of Symbolic Logic* 24, 1-14.

KRIPKE S. A. (1963). Semantical considerations on modal logic. *Acta Philosophica Fennica* 16, 83-94.)Rééd. dans Linsky 1971).

LEWIS C. I. (1918). *A Survey of Symbolic Logic*. Berkeley: University of California Press.

LEWIS C. I. & LANGFORD C. H. (1932). *Symbolic Logic*. New York: Dover.

LINSKY L. (1971). *Reference and Modality*. Oxford: Oxford University Press.

MATES B. (1961). *Stoic Logic*. Berkeley: University of California Press.

MIGNUCCI M. (1978). Sur la logique modale des Stoïciens. In: Ouvrage collectif. *Les Stoïciens et leur logique*. Paris: Vrin, 317-346.

PATTERSON R. (1995). *Aristotle's Modal Logic. Essence and Entailment in the Organon*. Cambridge: Cambridge University Press.

PRIOR A. (1967). *Past, Present and Futur*. Oxford: Clarendon Press.

PURTILL R. L. (1971). *Logic for Philosophers*. New York: Harper & Row.

READ S. (1988). *Relevant Logic. A Philosophical Examination of Inference*. Oxford: Blackwell.

RUSSELL B., WHITEHEAD A. N. (1910-13). *Principia Mathematica*. Cambridge: Cambridge University Press.

VAN BENTHEM J. (1988). *A Manual of Intensional Logic*. Stanford: CSLI. (2e ed.).

ZALTA E. N. (1988). *Intensional Logic and the Metaphysics of Intensionality*. Cambridge, London: The MIT Press.