UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
FACULTÉ DE DROIT ET DES SCIENCES ÉCONOMIQUES

# Les plans d'expériences factorielles minimaux connexes: caractérisation et classification

THÈSE
présentée à la Faculté de droit et des sciences économiques
pour l'obtention du grade de docteur ès sciences économiques

par

**Sylvie Gonano-Weber**

Imprimerie de l'Evole SA Neuchâtel
1994

Madame Sylvie Gonano-Weber est autorisée à imprimer sa thèse de doctorat ès sciences économiques intitulée "Les plans d'expériences factorielles minimaux connexes : caractérisation et classification".

Elle assume seule la responsabilité des opinions énoncées.

Neuchâtel, le 24 février 1994

Le doyen
de la Faculté de droit
et des sciences économiques

Daniel Haag

*A mes parents,*
*mon mari et mes*
*enfants Julien et Elsa*

# Préface

Les plans d'expériences factorielles minimaux connexes pourraient être considérés a priori comme appartenant uniquement au domaine théorique de la statistique. Cependant, les contraintes économiques ont pris une telle ampleur ces dernières années, qu'ils sont devenus actuels dans de nombreux domaines économiques.

Le but de cette thèse est d'énumérer tous les plans minimaux connexes $a \times b$ et $a \times b \times c$ et de chercher parmi ces plans en compétition ceux qui sont optimaux par rapport à certains critères d'optimalité statistiques.

Cette thèse n'a pas été écrite dans une optique de mathématique rigoureuse mais les nombreux exemples qui accompagnent toujours la théorie sont là pour clarifier les concepts et les rendre compréhensibles pour le néophyte.

Le chapitre 1 contient des définitions et des notations concernant les plans d'expériences ainsi qu'un historique des connaissances acquises à ce jour. Le chapitre 2 donne le nombre exact des plans minimaux connexes à classification double ainsi qu'un algorithme de construction de ces plans. La partie la plus importante de ce chapitre comprend la caractérisation et la classification des plans minimaux connexes à classification double par rapport aux critères d'optimalité $A$ et $E$. Le sujet du chapitre 3 est l'effet de l'addition d'une ou plusieurs observations dans un plan minimal connexe à classification double. On classe ces nouveaux plans selon le critère d'optimalité $A$ et on examine les conséquences d'observations supplémentaires en particulier sur les tests d'hypothèses et l'analyse de variance.

Le chapitre 4 correspond aux chapitres 2 et 3 mais pour les plans minimaux connexes à classification triple. Dans le chapitre 5, on va traiter les approches graphiques des plans minimaux connexes $a \times b$ et $a \times b \times c$.

Cette thèse s'achève par une brève conclusion ainsi que par les références des ouvrages les plus importants. Je ne vais pas terminer cette préface sans remercier Monsieur le Professeur Yadolah Dodge, directeur de thèse, qui a contribué, au travers de longues discussions et de cours très intéressants, à la naissance des idées originales de cette thèse. Par sa disponibilité et son intérêt, par ses conseils avisés et ses remarques pertinentes, il m'a aidé à mener à bien ce travail.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur le Professeur Dominique Collombier qui m'a fait le très grand plaisir de lire et relire les premières versions de mon doctorat et d'y apporter tous les commentaires nécessaires. Par une correspondance active, il m'a aidée à éclaircir certaines de ses remarques mathématiques.

Monsieur le Professeur Jacques Savoy a eu la gentillesse d'accepter d'être co-rapporteur de ma thèse de doctorat. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Je souhaite aussi exprimer ma reconnaissance à ma collègue et amie, Mademoiselle Nicole Rebetez, sans qui les programmes informatiques n'auraient jamais existé.

Finalement, je remercie toute ma famille qui m'a permis de poursuivre mes études, qui m'a toujours soutenue et encouragée et qui a supporté avec patience mes sautes d'humeur. J'espère que mes enfants et mon mari me pardonneront mes absences.

Sylvie Gonano-Weber

# TABLE DES MATIERES

# Chapitre 1

# Introduction

## 1.1 L'importance des plans d'expériences factorielles minimaux connexes et leurs champs d'applications

Pourquoi les expériences sont-elles nécessaires?

Parce que l'expérimentation est la base de l'approche scientifique de la connaissance. C'est en partie grâce à elle que nous découvrons des lois inconnues et que nous pouvons tester des hypothèses. Elle confirme ou contredit nos suppositions. C'est pourquoi elle s'avère être un outil important à toute recherche scientifique.

L'expérimentateur prépare un plan selon lequel il va faire des observations. Ces observations seront affectées non seulement par des facteurs contrôlables, mais aussi par des facteurs incontrôlables et des erreurs de mesure. Elles vont procurer à l'expérimentateur des données sur lesquelles il pourra baser son analyse. Or, dans la plupart des cas, le coût d'une expérience est considérable. C'est pourquoi l'expérimentateur a intérêt à réduire le plus possible le nombre d'observations nécessaires pour obtenir l'information désirée. Nous avons alors un plan dans lequel il manque quelques observations.

Des plans ainsi incomplets peuvent se présenter aussi par accident ou pour d'autres raisons. Par exemple, des récoltes sont détruites par les intempéries, des données sont perdues avant d'être enregistrées, un patient renonce à suivre tel traitement, un animal meurt en cours d'expérience, etc... Des données manquantes de ce type se présentent assez fréquemment.

Une solution possible à ce problème est de répéter l'expérience dans des conditions similaires et d'obtenir ainsi des valeurs pour les observations qui faisaient défaut dans l'expérience précédente. Cependant une telle solution, bien qu'idéale, peut ne pas être réalisable pour diverses raisons. Il est en effet envisageable que des restrictions d'ordre économique (manque de temps ou coût trop élevé) nous empêchent de renouveler l'expérience. Des raisons physiques sont aussi à prendre en considération: une fois la récolte ramassée, on ne peut pas immédiatement en avoir une deuxième; une seconde ingurgitation d'un tel médicament n'a pas le même effet sur un patient que la première, etc...

Il est donc important de pouvoir tirer des conclusions d'une expérience, même si le nombre d'observations prévues n'est pas atteint. Par ce moyen, nous économisons un temps précieux et évitons des coûts supplémentaires.

Il faut cependant éviter d'avoir trop d'observations manquantes sinon on ne peut pas obtenir l'information désirée. Par conséquent, il y a un nombre limite d'observations manquantes qu'il ne faut pas dépasser si l'on veut pouvoir estimer toutes les fonctions paramétriques. De tels plans sont appelés **plans minimaux connexes**.

Une fois que l'expérimentateur a choisi les facteurs et les différents niveaux de facteurs qu'il veut inclure dans le modèle d'une expérience projetée, il peut y avoir beaucoup de possibilités de combinaisons de traitement qui vont permettre d'estimer les paramètres voulus.

Il y a tout d'abord le plan d'expérience complet. Il est évident que dans ce cas tous les paramètres sont estimables, mais ce plan ne nous intéresse pas car, économiquement, il n'est pas rentable. Il y a ensuite des plans où il manque quelques observations. Là aussi, pour autant que le nombre d'observations manquantes ne soit pas supérieur au nombre limite fixé pour pouvoir estimer tous les paramètres et pour autant que ces observations soient placées au bon endroit, nous pouvons avoir toute l'information désirée. Parmi ces plans incomplets, seuls ceux qui sont minimaux connexes, c'est-à-dire ceux qui fournissent l'information désirée avec le nombre minimum d'observations, nous intéressent économiquement.

Supposons que l'expérimentateur désire obtenir des informations sur un ensemble donné de paramètres en utilisant un plan factoriel $D$. Il existe alors un ensemble de $d$ plans minimaux connexes $D_1$, $D_2, \ldots$, $D_d$, qui sont en compétition car ils donnent la même information sur l'estimabilité de l'ensemble des paramètres.

Le but de cette thèse est d'énumérer tous les plans minimaux connexes $a \times b$ et $a \times b \times c$ et de chercher parmi ces plans en compétition ceux qui sont optimaux par rapport à certains critères d'optimalité.

En ce qui concerne le champ d'application des plans d'expériences factorielles minimaux connexes, il est difficile ici d'énumérer tous les domaines pouvant avoir recours à cette méthode. Cependant, nous pouvons citer quelques exemples de domaines scientifiques en mesure d'utiliser ce procédé: agriculture, médecine, expérimentation animale, physique, chimie, technologie de l'alimentation, santé publique, technologie spatiale, etc... On emploie aussi ces plans d'expériences dans les applications industrielles pour identifier les facteurs actifs, c'est-à-dire pour déterminer quelles sont les variables qui affectent le plus la réponse et éliminer les autres.

## 1.2 Notation mathématique

Nous allons définir dans ce paragraphe la terminologie mathématique qui va être utilisée par la suite.

Une **expérience factorielle** est une expérience dans laquelle on étudie différents **facteurs**. Un facteur est une condition contrôlable et il peut prendre un nombre fini de valeurs ou types appelés les **niveaux** du facteur.

Un **traitement** est un choix particulier des niveaux pour chaque facteur. Un **plan** spécifie le nombre d'observations assignées au traitement $ij\ldots w$ et comment ces observations sont réparties. La notation $ij\ldots w$ indique que le premier facteur est au niveau $i$, le deuxième au niveau $j$, ..., et le dernier au niveau $w$. L'**espace factoriel** est l'ensemble de tous les traitements possibles. Par exemple, un espace factoriel $2^n$ est un espace factoriel de $n$ facteurs ayant chacun deux niveaux. Nous utilisons $n$ pour le nombre de facteurs et $N$ pour le nombre d'observations.

**Exemple 1.1** Prenons un exemple avec un plan $2^2$ pour illustrer la notion d'espace factoriel. Nous pouvons le représenter dans la table 1.1.

**Table 1.1:** Nombre d'observations d'un plan $2^2$

| | | Facteur $B$ | |
|---|---|---|---|
| | Niveau | 1 | 2 |
| Facteur $A$ | 1 | 1 | 0 |
| | 2 | 1 | 1 |

Nous avons deux facteurs (facteur $A$ et facteur $B$) à deux niveaux (niveau 1 et niveau 2). En marge sont précisés les niveaux de chaque facteur et l'intérieur du tableau indique le nombre d'observations pour chaque traitement (ici, il y a 4 traitements). Nous avons un total de $N = 3$ observations. Nous voyons que pour le traitement 11 (c'est-à-dire premier facteur au niveau 1, deuxième facteur au niveau 1) le nombre d'observations est égal à 1. Pour le traitement 12, il est égal à 0. Pour le traitement 21, il est égal à 1 et pour le traitement 22, il est égal à 1.

On note par $Y_{ij}$ l'observation faite lorsque le traitement $ij$ ($i$ème ligne et $j$ème colonne) est appliqué, ce qui donne la table 1.2 suivante:

**Table 1.2:** Observations d'un plan $2^2$

| | | Facteur $B$ | |
|---|---|---|---|
| | Niveau | 1 | 2 |
| Facteur $A$ | 1 | $Y_{11}$ | - |
| | 2 | $Y_{21}$ | $Y_{22}$ |

Nous venons de définir les notions d'expérience, de traitement, de plan et d'espace. Il nous faut maintenant les relier entre elles. Nous nous limitons ici aux **modèles linéaires**. Ainsi pour l'exemple 1.1 nous écrivons:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij},$$

$$cov(\epsilon_{ij}, \epsilon_{i'j'}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } i = i' \text{ et } j = j' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $i, j = 1, 2$.

$\mu$, $\alpha_i$ et $\beta_j$ sont des paramètres inconnus et $\epsilon_{ij}$ est le terme d'erreur. Les erreurs sont indépendantes et ont une moyenne de zéro et une variance inconnue $\sigma^2$.

Nous pouvons récrire ce modèle sous forme matricielle:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

où $\mathbf{Y}$ est le vecteur des observations, de dimension $3 \times 1$, $\mathbf{X}$ est une matrice de dimension $3 \times 5$, $\boldsymbol{\theta}$ est un vecteur de dimension $5 \times 1$ et $\boldsymbol{\epsilon}$ un vecteur de dimension $3 \times 1$.

Cela donne:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \\ Y_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{21} \\ \epsilon_{22} \end{bmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{X}$ est appelée **matrice du modèle** ou **matrice du plan**. Le vecteur $\boldsymbol{\theta}$ contient les paramètres inconnus du modèle linéaire et le vecteur $\boldsymbol{\epsilon}$ est le vecteur des erreurs. On peut associer à une expérience factorielle une matrice N appelée **matrice d'incidence**, qui contient le nombre d'observations effectuées pour chaque traitement. Pour l'exemple 1.1, nous avons:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

où la **cellule** $n_{11}$ est égale à 1, la cellule $n_{12}$ à 0, la cellule $n_{21}$ à 1 et la cellule $n_{22}$ à 1. On dit qu'une cellule $n_{ij\ldots w}$ est **occupée** si $n_{ij\ldots w} \neq 0$.

Afin de trouver les valeurs des paramètres inconnus, nous construisons les équations normales et obtenons:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

Comme la matrice du plan **X** a un rang égal à 3, cela signifie que nous ne pouvons estimer que 3 paramètres, les deux autres paramètres étant dépendants des 3 premiers. Nous avons donc plusieurs solutions pour $\boldsymbol{\theta}$. Il nous faut alors poser des contraintes que l'on appelle **contraintes usuelles** et qui sont:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \text{ ou} - \alpha_1 = \alpha_2$$

$$\beta_1 + \beta_2 = 0 \text{ ou} - \beta_1 = \beta_2$$

Nous pouvons alors récrire la matrice **X** et le vecteur $\boldsymbol{\theta}$ en remplaçant chaque $\alpha_2$ et $\beta_2$ par $-\alpha_1$ et $-\beta_1$ respectivement pour que la matrice **X** ait un rang plein:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \\ Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{21} \\ \epsilon_{22} \end{bmatrix}$$

Nous pouvons alors estimer $\mu$, $\alpha_1$ et $\beta_1$ et, par conséquent, vu que $\alpha_1 = -\alpha_2$ et $\beta_1 = -\beta_2$, on trouve $\alpha_2$ et $\beta_2$.

Nous pouvons formuler ces contraintes sous forme de matrices et écrire:

$$\boldsymbol{\Delta}'\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ce qui revient au même que $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ et $\beta_1 + \beta_2 = 0$.

Une expérience et le modèle **additif** linéaire associé peuvent être résumés sous forme matricielle de la façon suivante:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\epsilon} \text{ et } \boldsymbol{\Delta}'\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$$

où les dimensions de $\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\epsilon}$ et $\boldsymbol{\Delta}'$ sont respectivement $N \times 1$, $N \times p$, $p \times 1$, $N \times 1$ et $s \times p$, avec $N$ représentant le nombre d'observations, $p$ le nombre de paramètres inconnus et $s$ le nombre de contraintes.

On peut aussi spécifier une expérience et son modèle par:

$$E(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} \quad , \quad \boldsymbol{\Delta}'\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$$

où $E(\mathbf{Y})$ représente l'espérance matbématique de $\mathbf{Y}$. On arrive à ce résultat du fait que $E(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{0}$. On note par $R(X)$ **l'espace de l'espérance mathématique**, où $\mathbf{X}$ est la matrice du plan. La dimension de $R(X)$ est notée par $r(X)$ et représente le **rang** de la matrice du plan $\mathbf{X}$. $R(X)$ est un sous-ensemble de $R^N$ constitué des combinaisons linéaires des colonnes de $\mathbf{X}$.

Le vecteur des paramètres $\boldsymbol{\theta}$ appartient à **l'espace paramétrique** $\Theta$ qui est un sous-espace de $R^P$.

Dans l'exemple 1.1, avant de mettre les contraintes, nous avions $R(X) = R^3$ et $r(X) = 3$. Quant à $\Theta$, il était égal à $R^5$.

## 1.3 Historique des connaissances acquises à ce jour dans le domaine

Confronté à un plan incomplet on peut s'assigner deux objectifs différents.

**Estimation des données manquantes**

On peut se préoccuper de l'estimation de l'espérance mathématique de la réponse en toute cellule où cette réponse n'est pas observée. Par exemple pour les plans à classification double, on cherche à estimer $\mu + \alpha_i + \beta_j$ partout où $Y_{ijk}$ n'est pas observé. Il s'agit ici de ce qu'on appelle **l'estimation des données (ou observations) manquantes**.

Il semblerait que ce soit Allen et Wishart (1930) qui aient été les premiers à considérer le problème des observations manquantes. Ils trouvèrent une solution pour estimer la valeur d'une seule observation manquante dans le cas d'un plan à blocs "randomisé" et dans le cas des Carrés Latins. La valeur estimée de l'observation manquante est utilisée pour appliquer l'analyse de variance sur les données dorénavant complètes. Le nombre de degrés de liberté pour l'erreur est alors réduit de un.

Plus tard, Yates (1933) a étudié le problème d'un nombre d'observations manquantes supérieur à un. Il a montré qu'il fallait estimer les observations manquantes en minimisant la somme des carrés des erreurs.

En 1936, Yates (1936) adopta le même principe pour les plans carrés latins dans lesquels il manque soit une ligne, soit un traitement, soit une ligne et une colonne, soit une ligne et un traitement, soit une colonne et un traitement. Toujours selon le même principe, Yates et Hale (1939) étendent le cas à plusieurs lignes, colonnes ou traitements manquants.

Cornish (1940a, 1940b, 1941, 1944) a élargi le concept de Yates pour un grand nombre de plans d'expériences.

Healy et Westmacott (1956) ont proposé une méthode itérative pour l'estimation des observations manquantes. Il faut introduire des valeurs présumées à la place des observations manquantes. On fait l'analyse puis on soustrait, pour chaque cellule vide, le résidu obtenu des valeurs présumées. On fait alors l'analyse complète avec les valeurs insérées et on réduit les degrés de liberté pour l'erreur du nombre d'observations manquantes. Cette méthode a été exprimée en termes mathématiques par Jaech (1966), Preece (1971) et Sclove (1972).

Hartley (1956) a donné une technique différente quand il y a une seule observation manquante. Il propose une procédure itérative quand il y a plus d'une observation manquante.

Bartlett (1937) a introduit une procédure non-itérative pour traiter les observations manquantes. Il fait une analyse de covariance sur des pseudo-variables correspondant au nombre de valeurs manquantes.

D'autres approches ont été faites par De Lury (1946), Wilkinson (1958a, 1958b, 1960), Rubin (1972), Haseman et Gaylor (1973) et Jarrett (1978).

La différence principale entre ces méthodes qui donne une estimation des observations manquantes par les moindres carrés réside dans la manière d'obtenir ces valeurs estimées. Bien qu'elles soient mathématiquement correctes, ces procédures peuvent induire en erreur dans le sens que, s'il y a trop d'observations manquantes, toutes les fonctions paramétriques ne sont pas estimables.

Il existe un autre problème avec ces méthodes: il n'est pas si facile d'obtenir les degrés de liberté corrects pour chaque effet étant donné que la matrice du plan n'est pas de rang plein. Les méthodes données par Haseman et Gaylor (1973) et Rubin (1972) sont correctes puisque le processus s'arrête lorsque la matrice rencontrée est singulière.

**Etude de la connexité**

Plutôt que ou avant d'estimer les données manquantes on peut se poser la question de savoir si - sous contrainte d'identification $\boldsymbol{\Delta}'\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ - tous les éléments de $\boldsymbol{\theta}$ sont estimables. On s'intéresse alors à la **connexité du plan.** (Un plan est dit **connexe** si les éléments de $\boldsymbol{\theta}$ sont tous estimables.)

Si le plan n'est pas connexe on peut aussi rechercher une base de fonctions paramétriques (c'est-à-dire de combinaisons linéaires des composantes de $\boldsymbol{\theta}$) estimables, ou bien vérifier si certaines fonctions paramétriques qui présentent un intérêt pour l'analyse sont estimables.

Le terme connexité d'un plan a été introduit par Bose (1949) pour le modèle additif à classification double. Ici la recherche des plans connexes s'effectue par examen de la matrice d'incidence **N** plutôt que par celui de la matrice du plan **X**.

Par la suite, Weeks et Williams (1964) ainsi que Srivastava et Anderson (1970) se sont intéressés au modèle additif à $n$ classifications. Plus récemment, Birkes, Dodge et Seely (1976) ont présenté des résultats complets concernant l'estimabilité dans un modèle additif à classification double. Ils ont introduit un algorithme, le processus $R$, facilement utilisable sur ordinateur, qui détermine quelles fonctions paramétriques sont estimables. Ils ont aussi présenté une méthode qui donne une base pour les fonctions estimables impliquant seulement un effet. Finalement, ils ont traité l'estimabilité dans un modèle additif à classification triple. On peut aussi consulter Dodge (1974), Eccleston et Russel (1975), Raghavarao et Federer (1975) et Shah et Dodge (1977). Wynn (1976) a aussi donné des résultats pour un modèle sans contraintes. L'ouvrage de Butz (1982) et les travaux de Collombier (1984) traitent aussi du même sujet.

Lorsque le plan n'est pas connexe une difficulté intervient dans l'analyse des observations de la réponse. Même si l'on tient compte des contraintes d'identification, la matrice des coefficients des équations normales est singulière. On doit donc avoir recours aux inverses généralisés pour trouver une solution aux équations normales. Dodge et Majumbar (1979) ont présenté un algorithme pour trouver un inverse généralisé appliqué aux moindres carrés. Ils utilisent la matrice d'incidence et la matrice du plan simultanément. Il existe d'autres procédures pour trouver un inverse généralisé, notamment dans le chapitre 11 de Rao et Mitra (1971). On peut aussi consulter les ouvrages de Boullion et Odell (1971), Bjerhammer (1973) et Ben-Israel et Greville (1974). Une liste complète des références sur le sujet a été commentée d'une manière remarquable par Nashed et Rall (1976).

Dodge (1985) a continué les investigations dans ce domaine et a complété les résultats déjà acquis pour les modèles à classification double et les modèles à classification triple par des programmes utilisables sur ordinateur. Il a également écrit un programme qui trouve l'inverse généralisé sans erreurs d'arrondi. Il s'est aussi penché sur les plans d'expériences factorielles $2^n$ et a fourni des tables contenant des plans minimaux connexes $2^n$ pour $n \leq 9$ et des plans minimaux connexes $a \times b$ choisis arbitrairement.

# Chapitre 2

# Caractérisation et classification des plans minimaux connexes à classification double

## 2.1 Nombre de plans minimaux connexes à classification double

Un plan minimal connexe est un plan où toutes les fonctions paramétriques sont estimables et qui contient un nombre minimum d'observations. Ce nombre minimum d'observations pour un plan minimal connexe à classification double $a \times b$ est $a + b - 1$.

$a + b - 1$ correspond au rang de la matrice du plan $\mathbf{X}$ pour un plan complet $a \times b$.

Le nombre de plans minimaux connexes $a \times b$, noté $Z(a, b)$ est donné par la formule suivante:

$$Z(a, b) = a^{b-1} b^{a-1}$$

La démonstration de cette formule se trouve dans Birkes et Dodge (1986).

Ainsi, par exemple, il existe $Z(2, 3) = 2^{3-1} 3^{2-1} = 12$ plans minimaux connexes $2 \times 3$ ayant chacun un nombre d'observations égal à $a + b - 1 = 4$.

## 2.2 Construction des plans minimaux connexes à classification double

Dans cette section, nous donnerons d'abord un algorithme de construction des plans minimaux connexes $a \times (b + 1)$ dans sa forme générale. Puis nous appliquerons cet algorithme pour construire les plans minimaux connexes $2 \times 3$.

### 2.2.1 Algorithme de construction des plans minimaux connexes $a \times (b + 1)$

Nous prenons un plan minimal connexe $a \times b$, avec $a \leq b$. Soit $(i, j)$, $i = 1, 2, \ldots, a$ et $j = 1, 2, \ldots, b$, les cellules de ce plan minimal connexe $a \times b$.

Pour construire un plan minimal connexe $a \times (b + 1)$, nous commençons par générer les $a \times (b + 1)$ cellules de ce plan. Soit $(k, l)$, $k = 1, 2, \ldots, a$ et $l = 1, 2, \ldots, b, b+1$, ces $a \times (b+1)$ cellules générées. Puis pour chaque observation $(k, l)$, nous procédons de la sorte:

1. nous prenons en considération les observations $(i, j)$ du plan minimal connexe $a \times b$ et l'observation $(k, l)$;
2. pour obtenir le plan minimal connexe $a \times (b + 1)$ correspondant, nous posons $j = j + 1$ si $j \geq l$, pour toutes les observations $(i, j)$ et gardons telle quelle l'observation générée $(k, l)$.

Le nombre de plans minimaux connexes $a \times (b+1)$ est égal à

$$Z(a, b+1) = a^b(b+1)^{a-1}$$

Pour obtenir ces $a^b(b+1)^{a-1}$ plans minimaux connexes, nous devons appliquer ce même algorithme pour tous les plans minimaux connexes $a \times b$, qui sont au nombre de $a^{b-1}b^{a-1}$ et éliminer ceux que nous trouvons plusieurs fois.

### 2.2.2 Construction des plans minimaux connexes $2 \times 3$

Nous prenons un plan minimal connexe $2 \times 2$:

| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 1 | |

Ce plan contient les observations $(1,1)$, $(1,2)$ et $(2,1)$. Pour construire un plan minimal connexe $2 \times 3$, nous commençons par générer les 6 cellules de ce plan:

$$(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)$$

Ensuite nous prenons l'observation générée $(1,1)$ avec les 3 observations du plan minimal connexe $2 \times 2$: $(1,1)$, $(1,2)$ et $(2,1)$.

Pour obtenir le plan minimal connexe $2 \times 3$ correspondant, nous effectuons les changements d'indices nécessaires. Pour la première observation du plan minimal connexe $2 \times 2$, à savoir $(1,1)$, $j = 1$; $j$ est donc supérieur ou égal à $l$, par conséquent $j = j + 1 = 2$. L'observation devient donc $(1,2)$.

Pour la deuxième observation du plan minimal connexe $2 \times 2$, à savoir $(1,2)$, $j = 2$; $j$ est donc supérieur ou égal à $l$, par conséquent $j = j + 1 = 3$. L'observation devient donc $(1,3)$.

Pour la troisième observation du plan minimal connexe $2 \times 2$, à savoir $(2,1)$, $j = 1$; $j$ est donc supérieur ou égal à $l$, par conséquent $j = j + 1 = 2$. L'observation devient donc $(2,2)$.

Le plan minimal connexe $2 \times 3$ obtenu est donc le suivant:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| | 1 | |

qui contient les observations $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$ et $(2,2)$.

Nous procédons de la même manière pour les 6 observations générées et obtenons ainsi 6 plans minimaux connexes $2 \times 3$.

Pour obtenir les 12 plans minimaux connexes $2 \times 3$, nous appliquons cet algorithme aux 4 plans minimaux connexes $2 \times 2$ et éliminons les plans que l'on rencontre plusieurs fois.

## 2.3 Caractérisation et classification des plans minimaux connexes à classification double par rapport aux critères d'optimalité $A$ et $E$

Le but de cette section est de déterminer les "meilleurs" plans à l'intérieur d'une classe donnée et ceci par rapport aux deux critères d'optimalité $A$ et $E$.

Nous allons dans un premier temps classer tous les plans minimaux connexes $2 \times 2$, $2 \times 3$, $2 \times 4$ et $3 \times 3$ selon les critères d'optimalité suivants:

1. critère d'optimalité $A$: min [trace $\mathbf{V}$]
2. critère d'optimalité $E$: min [plus grande valeur propre de $\mathbf{V}$]

La matrice $\mathbf{V}$ sera définie un peu plus loin.

Dans un deuxième temps, nous donnerons pour chaque critère des généralités concernant les plans minimaux connexes $a \times b$.

### 2.3.1 Notations et définitions de base

Soit $Y_{ij}$ un ensemble de $n$ variables aléatoires indépendantes. Nous pouvons alors écrire le modèle linéaire pour un plan d'expérience factorielle $a \times b$:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij}$$

où $i = 1, \ldots, a$ et $j = 1, \ldots, b$. Nous pouvons récrire ce modèle sous la forme de son espérance mathématique:

$$E(Y_{ij}) = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

ou sous forme matricielle

$$E(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}$$

où $\mathbf{Y}$ est le vecteur des observations, $\mathbf{X}$ est la matrice du plan et $\boldsymbol{\theta}$ est le vecteur des paramètres inconnus.

Un plan d'expérience factorielle $a \times b$ est connexe si tous les contrastes élémentaires sont estimables, c'est-à-dire si $\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_1 - \alpha_3, \ldots$, $\alpha_1 - \alpha_a$, $\alpha_2 - \alpha_3$, $\alpha_2 - \alpha_4, \ldots$, $\alpha_2 - \alpha_a, \ldots$, $\alpha_{a-1} - \alpha_a$ et $\beta_1 - \beta_2$, $\beta_1 - \beta_3, \ldots$, $\beta_1 - \beta_b$, $\beta_2 - \beta_3$, $\beta_2 - \beta_4, \ldots$, $\beta_2 - \beta_b$, $\ldots$, $\beta_{b-1} - \beta_b$ sont estimables.

Le nombre minimal d'observations nécessaires pour qu'un plan $a \times b$ soit connexe est $a + b - 1$ qui correspond au rang de la matrice du plan $\mathbf{X}$. Nous ne pouvons donc estimer que $a + b - 1$ paramètres; les autres sont dépendants des $a + b - 1$ premiers. Il faut donc poser des contraintes qui sont:

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$$

où **H** est la matrice des contraintes.

Cette condition est équivalente à:

$$\mathbf{H'H}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$$

Si on prémultiplie $\mathbf{X}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{Y}$ par **X'**, on obtient:

$$\mathbf{X'X}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{X'Y}$$

Vu que $\mathbf{H'H}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$, on peut écrire

$$(\mathbf{X'X} + \mathbf{H'H})\boldsymbol{\theta} = \mathbf{X'Y}$$

d'où on tire

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{X'X} + \mathbf{H'H})^{-1}\mathbf{X'Y}$$

(la matrice $\mathbf{X'X} + \mathbf{H'H}$ est régulière, cf annexe 1).

Il faut maintenant tenir compte des contrastes, en rappelant qu'un contraste est défini comme une fonction paramétrique où la somme des coefficients est nulle:

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}$$

où **A** est la matrice des contrastes. Nous avons alors:

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{A}(\mathbf{X'X} + \mathbf{H'H})^{-1}\mathbf{X'Y}.$$

La matrice de covariance pour l'estimateur $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$ est égale à:

$$\begin{aligned}
Cov(\hat{\Phi}) &= Cov(\mathbf{Y})\ \mathbf{A}(\mathbf{X'X}+\mathbf{H'H})^{-1}\mathbf{X'X}(\mathbf{X'X}+\mathbf{H'H})^{-1}\mathbf{A'} \\
&= \sigma^2\mathbf{I}\ \mathbf{A}(\mathbf{X'X}+\mathbf{H'H})^{-1}\mathbf{X'X}(\mathbf{X'X}+\mathbf{H'H})^{-1}\mathbf{A'} \\
&= \sigma^2\mathbf{V}
\end{aligned}$$

avec $\mathbf{V} = \mathbf{A}(\mathbf{X'X}+\mathbf{H'H})^{-1}\mathbf{X'X}(\mathbf{X'X}+\mathbf{H'H})^{-1}\mathbf{A'}$. C'est sur la matrice **V** que l'on va appliquer nos différents critères d'optimalité.

On a choisi les critères d'optimalité $A$ et $E$ car on cherche à minimiser la variance de l'estimateur $\hat{\Phi}$.

L'expression de la matrice de covariance Cov($\hat{\Phi}$) peut se simplifier. Plus précisément on a:

$$Cov(\hat{\Phi}) = \mathbf{A}(\mathbf{X'X}+\mathbf{H'H})^{-1}\mathbf{A'}$$

Le lecteur intéressé pourra consulter l'explication de la simplification dans l'annexe 1.

### 2.3.2 Classification des plans minimaux connexes 2 × 2

Le critère d'optimalité $A$ se définit comme suit:

$$\min\ [\text{trace } \mathbf{V}]$$

Nous rappelons que $\mathbf{V} = \mathbf{A}(\mathbf{X'X}+\mathbf{H'H})^{-1}\mathbf{A'}$. Dans le cas des plans $2 \times 2$, la matrice des contraintes **H** est égale à:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et la matrice des contrastes **A** est égale à:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Une fois $\mathbf{V}$ calculée pour chaque plan, nous en prenons la trace et classons les plans par ordre croissant de la trace de $\mathbf{V}$. Nous savons qu'il y a 4 plans minimaux connexes $2 \times 2$. La valeur de la trace de $\mathbf{V}$ est identique pour les 4 plans et elle vaut 4. Ces plans se trouvent dans la table 2.1.

**Table 2.1:** Plans minimaux connexes $2 \times 2$ avec une trace de $\mathbf{V} = 4$

| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| | 1 |

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 1 | 1 |

| | |
|---|---|
| | 1 |
| 1 | 1 |

Nous pouvons aussi représenter les plans sous forme d'indices où la première colonne correspond aux niveaux du facteur $A$ et où la deuxième colonne correspond aux niveaux du facteur $B$. Ainsi une ligne équivaut à une observation. Les 4 plans ci-dessus deviennent avec cette notation:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

Ces quatre plans coïcident par permutation des niveaux de l'un et/ou l'autre des facteurs. Ils forment ce qu'on appelle une **classe d'équivalence**.

La trace de $\mathbf{V}$ pour un plan $2 \times 2$ complet est égale à 2.

Le critère d'optimalité $E$ se définit comme suit:

$$\min\ [\max \text{ valeur propre } \mathbf{V}]$$

Nous classons les plans par ordre croissant de la plus grande valeur propre de $\mathbf{V}$. Là aussi la valeur propre de $\mathbf{V}$ est identique pour les 4 plans. Elle est égale à 3. Le plan $2 \times 2$ complet a une valeur propre de 1.

### 2.3.3 Classification des plans minimaux connexes $2 \times 3$

Dans le cas des plans $2 \times 3$ la matrice des contraintes $\mathbf{H}$ est la suivante:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et la matrice des contrastes $\mathbf{A}$ est égale à:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Nous savons qu'il y a 12 plans minimaux connexes $2 \times 3$. La classification selon la trace de $\mathbf{V}$ nous donne deux groupes.

**Groupe 1** Ce groupe comprend 6 plans avec une trace de 8. Ces plans se trouvent dans la table 2.2. Ils forment une classe d'équivalence.

**Table 2.2:** Plans minimaux connexes $2 \times 3$ avec une trace $= 8$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 |

**Groupe 2** Ce groupe comprend 6 plans avec une trace de 10. Ces plans se trouvent dans la table 2.3.Ils forment une classe d'équivalence.

**Table 2.3:** Plans minimaux connexes $2 \times 3$ avec une trace = 10

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 1 |
| 1 | 2 | | 1 | 3 | | 1 | 3 | | 1 | 3 |
| 2 | 1 | | 2 | 1 | | 2 | 1 | | 2 | 1 |
| 2 | 3 | | 2 | 3 | | 2 | 2 | | 2 | 2 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | 1 | 1 |
| 1 | 2 | | 1 | 3 |
| 2 | 2 | | 2 | 2 |
| 2 | 3 | | 2 | 3 |

La trace de $\mathbf{V}$ pour un plan $2 \times 3$ complet vaut 3.67.

La classification selon la valeur propre nous donne les deux mêmes groupes. Le premier groupe contient les plans dont la valeur propre vaut 4 et le deuxième groupe ceux dont la valeur propre vaut 7.16.

La valeur propre de $\mathbf{V}$ pour un plan $2 \times 3$ complet est égale à 1.5.

Pour tout plan comportant au moins un facteur à 3 niveaux ou plus, la matrice $\mathbf{A}$, donnée ci-dessus, ne peut être -par construction- de rang égal au nombre de ses lignes. Par conséquent $\mathbf{V}$ est nécessairement singulière et le critère du déterminant est sans intérêt.

### 2.3.4 Classification des plans minimaux connexes $2 \times 4$

Dans le cas des plans $2 \times 4$ la matrice des contraintes $\mathbf{H}$ et la matrice des contrastes $\mathbf{A}$ sont:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Il y a 32 plans minimaux connexes $2 \times 4$. La classification par le critère de la trace nous donne deux groupes.

**Groupe 1** Ce groupe comprend 8 plans avec une trace de $\mathbf{V}$ égale à 14. Ces plans se trouvent dans la table 2.4. Ils forment une classe d'équivalence.

**Table 2.4:** Plans minimaux connexes $2 \times 4$ avec une trace $= 14$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 |
| | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 |
| 2 | 4 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 |

**Groupe 2** Ce groupe comprend 24 plans avec une trace de 18. Ces plans se trouvent dans la table 2.5. Ils forment trois classes d'équivalence.

**Table 2.5:** Plans minimaux connexes $2 \times 4$ avec une trace $= 18$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 4 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 4 |
| 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 4 | 1 | 4 |
| 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 3 |
| 1 | 4 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 4 | 2 | 3 | 2 | 4 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 4 |
| 2 | 1 | 1 | 4 | 1 | 4 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 3 | 2 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 4 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 4 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 4 |

La trace de $\mathbf{V}$ pour un plan $2 \times 4$ complet vaut 6.5.

La classification selon la valeur propre nous donne exactement les deux mêmes groupes, le premier ayant une valeur propre de 5 et le deuxième une valeur propre de 10.72.

La valeur propre d'un plan $2 \times 4$ complet est égale à 2.

### 2.3.5 Classification des plans minimaux connexes $3 \times 3$

Dans le cas des plans $3 \times 3$ la matrice des contraintes $\mathbf{H}$ et la matrice des contrastes $\mathbf{A}$ sont les suivantes:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Il y a 81 plans minimaux connexes $3 \times 3$.

La classification selon le critère de la trace de $\mathbf{V}$ nous donne trois groupes.

**Groupe 1** Ce groupe contient 9 plans et la trace de $\mathbf{V}$ vaut 12. Ces plans sont représentés dans la table 2.6. Ils forment une classe d'équivalence.

**Table 2.6:** Plans minimaux connexes $3 \times 3$ avec une trace = 12

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 3 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 1 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 1 |

**Groupe 2** Ce groupe contient 36 plans et la trace de $\mathbf{V}$ vaut 14. Ces plans sont représentés dans la table 2.7. Ils forment quatre classes d'équivalence.

**Table 2.7:** Plans minimaux connexes $3 \times 3$ avec une trace = 14

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | | | | | | | |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 2 |

**Groupe 3** Ce groupe contient 36 plans et la trace de **V** vaut 16. Ces plans sont représentés dans la table 2.8. Ils forment quatre classes d'équivalence.

**Table 2.8:** Plans minimaux connexes $3 \times 3$ avec une trace $= 16$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| | | | | | | | |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |

La trace de $\mathbf{V}$ pour un plan $3 \times 3$ complet vaut 4.

La classification selon le critère de la valeur propre de $\mathbf{V}$ nous donne exactement les trois mêmes groupes avec une valeur propre de 5, 7.85 et 10.58 respectivement. La valeur propre d'un plan complet $3 \times 3$ est égale à 1.

### 2.3.6 Quelques généralités sur la classification des plans minimaux connexes $a \times b$

Nous pouvons faire une première remarque: nous obtenons la même classification pour le critère $A$ que pour le critère $E$. C'est-à-dire que nous obtenons les mêmes groupes selon que nous étudions la trace de $\mathbf{V}$ ou la valeur propre de $\mathbf{V}$.

La classification est la même pour les plans minimaux connexes $a \times b$ que pour les plans minimaux connexes $b \times a$.

**Théorème 2.1** *Un plan minimal connexe $a \times b$ est classé $A$-optimal ou $E$-optimal si tous les contrastes élémentaires sont* **directement** *estimables. On dit qu'un plan $D$ est $A$-optimal ou $E$-optimal quand la trace respectivement la valeur propre de $\mathbf{V}(D)$ est minimum dans sa catégorie.*

On retrouve ce théorème dans le chapitre 5 (théorème 5.1).

**Exemple 2.1** Considérons le plan minimal connexe $3 \times 3$ suivant:

| | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ |
|---|---|---|---|
| $\alpha_1$ | | | 1 |
| $\alpha_2$ | | | 1 |
| $\alpha_3$ | 1 | 1 | 1 |

ou sous forme d'indices:

| | |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 3 |
| 3 | 1 |
| 3 | 2 |
| 3 | 3 |

Les contrastes élémentaires sont $\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_1 - \alpha_3$, $\alpha_2 - \alpha_3$, $\beta_1 - \beta_2$, $\beta_1 - \beta_3$ et $\beta_2 - \beta_3$. Ils sont tous directement estimables. En effet, $\alpha_1 - \alpha_2$ peut être estimé par la soustraction de l'observation (23) à l'observation (13). La différence $\alpha_1 - \alpha_3$ peut être estimée par (13) - (33). La différence $\alpha_2 - \alpha_3$ peut être estimée par (23) - (33).

Quant aux contrastes du deuxième facteur, nous pouvons estimer $\beta_1 - \beta_2$ par (31) - (32), $\beta_1 - \beta_3$ par (31) - (33) et $\beta_2 - \beta_3$ par (32) - (33).

La valeur de la trace de **V** est égale à 12 et c'est la valeur minimum parmi tous les plans minimaux connexes $3 \times 3$.

Les plans pour lesquels **un** contraste élémentaire n'est pas directement estimable viennent ensuite dans la classification.

Encore plus loin on trouve les plans pour lesquels il manque **deux** contrastes élémentaires et ainsi de suite jusqu'à deux contrastes seulement directement estimables.

**Exemple 2.2** Considérons le plan minimal connexe $3 \times 3$ suivant:

| | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ |
|---|---|---|---|
| $\alpha_1$ | | | 1 |
| $\alpha_2$ | | 1 | |
| $\alpha_3$ | 1 | 1 | 1 |

ou sous forme d'indices:

| | |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 2 |
| 3 | 1 |
| 3 | 2 |
| 3 | 3 |

La différence $\alpha_1 - \alpha_2$ n'est pas directement estimable. Toutes les autres différences sont directement estimables. Ce plan est donc classé dans le deuxième groupe des plans minimaux connexes $3 \times 3$. Sa trace vaut 14.

**Exemple 2.3** Considérons le plan minimal connexe $2 \times 4$ suivant:

| | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha_1$ | 1 | | 1 | 1 |
| $\alpha_2$ | 1 | 1 | | |

ou sous forme d'indices:

| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 1 | 3 |
| 1 | 4 |
| 2 | 1 |
| 2 | 2 |

Les différences $\beta_2 - \beta_3$ et $\beta_2 - \beta_4$ ne sont pas directement estimables. Toutes les autres différences sont directement estimables. Ce plan est classé dans le deuxième groupe des plans minimaux connexes $2 \times 4$. En effet, dans cette catégorie, il n'existe pas de plans pour lesquels un seul contraste n'est pas directement estimable. Sa trace vaut 18.

**Exemple 2.4** Considérons le plan minimal connexe $3 \times 3$ suivant:

| | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ |
|---|---|---|---|
| $\alpha_1$ | | | 1 |
| $\alpha_2$ | 1 | 1 | |
| $\alpha_3$ | | 1 | 1 |

ou sous forme d'indices:

| | |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 2 |
| 3 | 3 |

Les différences $\alpha_1 - \alpha_2$ et $\beta_1 - \beta_3$ ne sont pas directement estimables. Toutes les autres différences le sont. Ce plan est donc classé dans le troisième groupe des plans minimaux connexes $3 \times 3$. Sa trace vaut 16.

## 2.4 Programme informatique pour la construction des plans minimaux connexes à classification double

Le programme AXB donne tous les plans minimaux connexes de la catégorie $a \times b$ choisie par l'utilisateur. Il indique aussi le nombre de plans minimaux connexes qui existent.

Comme le nombre de plans minimaux connexes à classification double augmente rapidement quand $a$ et $b$ deviennent grands, le choix de la catégorie $a \times b$ a été volontairement limité. Le programme offre donc à l'utilisateur les possibilités suivantes:

- plans minimaux connexes $2 \times 2$
- plans minimaux connexes $2 \times 3$
- plans minimaux connexes $2 \times 4$
- plans minimaux connexes $2 \times 5$
- plans minimaux connexes $3 \times 3$
- plans minimaux connexes $3 \times 4$

Pour exécuter le programme, l'utilisateur doit entrer son nom, c'est-à-dire AXB. Il se trouvera alors devant une liste de choix possibles. Il entrera le chiffre correspondant à la catégorie désirée. Les plans construits et leur nombre seront imprimés dans un fichier portant le nom de la catégorie choisie suivi de l'extension ".RES". La forme de représentation des plans est celle des indices.

Le programme AXB ainsi qu'un exemple d'impression figurent en Annexe 2.

# Chapitre 3

# L'effet de l'addition d'une ou plusieurs observations dans un plan minimal connexe à classification double

## 3.1 Addition d'une ou plusieurs observations dans un plan minimal connexe à classification double

Dans ce chapitre, nous allons examiner l'effet de l'addition d'une ou plusieurs observations sur les valeurs de la trace de V et nous établirons une classification complète de ces plans selon le critère d'optimalité $A$. Les plans que nous considérons ici sont sans répétition. Par conséquent, les observations que nous ajoutons sont faites dans des cellules anciennement vides.

Finalement nous regarderons l'effet de l'addition de nouvelles observations sur les tests d'hypothèses et l'analyse de variance.

## 3.2 Nombre de plans connexes à classification double

Un plan connexe est un plan dans lequel toutes les fonctions paramétriques sont estimables et qui ne possède pas le nombre minimum d'observations. Un plan minimal connexe auquel on ajoute une ou plusieurs observations devient donc un plan connexe.

On va donner ci-dessous le nombre de plans connexes $2 \times 2$, $2 \times 3$, $2 \times 4$ et $3 \times 3$ avec différents nombres d'observations.

Pour un plan minimal connexe $2 \times 2$, il faut $2 + 2 - 1 = 3$ observations. Si l'on ajoute une observation, on obtient un plan $2 \times 2$ complet.

Pour un plan minimal connexe $2 \times 3$, il faut $2 + 3 - 1 = 4$ observations. Si nous ajoutons une observation, nous obtenons un plan avec 5 observations. Il existe 6 plans connexes $2 \times 3$ avec 5 observations. Ils sont représentés dans la table 3.1.

**Table 3.1:** Les 6 plans connexes $2 \times 3$ avec 5 observations

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 |

Si l'on ajoute deux observations, on obtient un plan $2 \times 3$ complet.

Pour un plan minimal connexe $2 \times 4$, il faut $2 + 4 - 1 = 5$ observations. Si nous ajoutons une observation, nous obtenons un plan avec 6 observations. Il existe 24 plans connexes $2 \times 4$ avec 6 observations. Ils sont représentés dans la table 3.2.

**Table 3.2:** Les 24 plans connexes $2 \times 4$ avec 6 observations

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 4 | 1 | 4 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 2 | 2 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 2 | 4 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 4 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 4 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 3 | 2 | 4 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 2 | 4 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 4 |

Si l'on ajoute deux observations, on obtient un plan $2 \times 4$ avec 7 observations. Il existe 8 plans connexes $2 \times 4$ avec 7 observations. Ils sont représentés dans la table 3.3.

**Table 3.3:** Les 8 plans connexes $2 \times 4$ avec 7 observations

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 |

Si l'on ajoute trois observations, on obtient un plan $2 \times 4$ complet.

Pour un plan minimal connexe $3 \times 3$, il faut $3 + 3 - 1 = 5$ observations. Si nous ajoutons une observation, nous obtenons un plan connexe $3 \times 3$ avec 6 observations. Il existe 78 plans de ce type. Ils se trouvent dans la table 3.4.

**Table 3.4:** Les 78 plans connexes $3 \times 3$ avec 6 observations

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 |
| | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 1 |
| 3 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 3 |

Si l'on ajoute deux observations, on obtient un plan connexe $3 \times 3$ avec 7 observations. On compte 36 plans de ce genre. Ils sont représentés dans la table 3.5.

**Table 3.5:** Les 36 plans connexes $3 \times 3$ avec 7 observations

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

Si l'on ajoute trois observations, on obtient un plan connexe $3 \times 3$ avec 8 observations. Il existe 9 plans de ce type. Ils se trouvent dans la table 3.6.

**Table 3.6:** Les 9 plans connexes $3 \times 3$ avec 8 observations

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

Si l'on ajoute quatre observations, on obtient un plan $3 \times 3$ complet.

## 3.3 Caractérisation et classification des plans connexes à classification double par rapport au critère d'optimalité $A$

Nous allons dans un premier temps classer tous les plans connexes $2 \times 2$, $2 \times 3$, $2 \times 4$ et $3 \times 3$ selon le critère d'optimalité $A$.

Dans un deuxième temps, nous donnerons quelques généralités concernant la classification des plans connexes $a \times b$ par rapport au critère d'optimalité $A$.

Nous rappelons que le critère d'optimalité $A$ est défini comme suit:

$$\min\,[\text{trace } \mathbf{V}]$$

avec $\mathbf{V} = \mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X} + \mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{A}'$.

### 3.3.1 Classification des plans connexes $2 \times 2$

Nous avons vu dans la section 3.2 que si l'on ajoute une observation à un plan minimal connexe $2 \times 2$, on obtient un plan complet $2 \times 2$. Nous avons donc deux valeurs pour la trace de $\mathbf{V}$:

1. trace de $\mathbf{V}$ pour un plan minimal connexe $2 \times 2 = 4$
2. trace de $\mathbf{V}$ pour un plan complet $2 \times 2 = 2$.

### 3.3.2 Classification des plans connexes $2 \times 3$

Nous avons vu qu'il existe 6 plans connexes $2 \times 3$ avec 5 observations. Pour ces 6 plans, la trace de $\mathbf{V}$ vaut 5.5. Ces plans se trouvent dans la table 3.1.

Si l'on ajoute une 6ème observation, on obtient un plan complet $2 \times 3$. Nous avons donc trois valeurs pour la trace de $\mathbf{V}$, compte tenu que l'on ne considère que la trace de $\mathbf{V}$ pour les plans minimaux connexes $A$-optimaux (pour la définition d'un plan $A$-optimal, voir la sous-section 2.3.6):

1. trace de $\mathbf{V}$ pour un plan minimal connexe $2 \times 3$ $A$-optimal $= 8$
2. trace de $\mathbf{V}$ pour un plan connexe $2 \times 3$ avec 5 observations $= 5.5$
3. trace de $\mathbf{V}$ pour un plan complet $2 \times 3 = 3.67$.

### 3.3.3 Classification des plans connexes $2 \times 4$

Nous savons qu'il existe 24 plans connexes $2 \times 4$ avec 6 observations. La classification selon le critère de la trace nous donne deux groupes de 12 plans.

**Groupe 1** Ce groupe comprend les plans dont tous les contrastes élémentaires sont **directement** estimables. La trace de **V** est égale à 11. On trouve ces plans dans la table 3.7.

**Table 3.7:** Plans connexes $2 \times 4$ avec 6 observations: trace = 11

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 |
| | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 4 | 1 | 4 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 2 | 4 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 4 |

**Groupe 2** Ce groupe contient les plans dont **une** différence n'est pas directement estimable. La trace de **V** vaut 12 et on trouve ces plans dans la table 3.8.

**Table 3.8:** Plans connexes $2 \times 4$ avec 6 observations: trace = 12

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 4 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 3 | 2 | 4 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 2 | 4 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 4 |

Si nous ajoutons une observation à ces plans, nous obtenons 8 plans connexes $2 \times 4$ avec 7 observations. Ils ont tous une trace de $\mathbf{V}$ égale à 8.67. Ils sont représentés dans la table 3.3.

Si l'on ajoute une 8ème observation, on obtient un plan complet $2 \times 4$. Nous avons alors les quatre valeurs de trace suivantes:

1. trace de $\mathbf{V}$ pour un plan minimal connexe $2 \times 4$ $A$-optimal = 14
2. trace de $\mathbf{V}$ pour un plan connexe $2 \times 4$ $A$-optimal avec 6 observations = 11
3. trace de $\mathbf{V}$ pour un plan connexe $2 \times 4$ avec 7 observations = 8.67
4. trace de $\mathbf{V}$ pour un plan complet $2 \times 4 = 6.5$.

### 3.3.4 Classification des plans connexes $3 \times 3$

Nous avons vu qu'il existe 78 plans connexes $3 \times 3$ avec 6 observations. La classification selon le critère d'optimalité $A$ nous donne trois groupes.

**Groupe 1** Ce groupe comprend 6 plans dont toutes les différences sont **directement** estimables et qui sont équilibrés (2 observations pour chaque niveau de facteurs). La trace de **V** pour ces 6 plans est égale à 8. Ils sont représentés dans la table 3.9.

**Table 3.9:** Plans connexes $3 \times 3$ avec 6 observations: trace = 8

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 |

**Groupe 2** Ce groupe contient 36 plans dont toutes les différences sont **directement** estimables mais qui ne sont pas équilibrés. La trace de **V** pour ces 36 plans vaut 9. La table 3.10 les regroupe.

**Table 3.10:** Plans connexes $3 \times 3$ avec 6 observations: trace = 9

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

**Groupe 3** Ce groupe contient 36 plans dont **une** différence n'est pas directement estimable. La trace de **V** pour ces 36 plans vaut 10.5. La table 3.11 les regroupe.

**Table 3.11:** Plans connexes $3 \times 3$ avec 6 observations: trace $= 10.5$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

Il existe 36 plans connexes $3 \times 3$ avec 7 observations. La classification selon le critère d'optimalité de la trace nous donne deux groupes.

**Groupe 1** Ce groupe comprend 18 plans dont toutes les différences sont **directement** estimables et les cellules vides restantes ne se trouvent ni sur la même ligne ni sur la même colonne, c'est-à-dire qu'elles sont à des niveaux différents pour chaque facteur. La trace de $\mathbf{V}$ pour ces 18 plans est égale à 6.4. Ces plans se trouvent dans la table 3.12.

**Table 3.12:** Plans connexes $3 \times 3$ avec 7 observations: trace = 6.4

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 3 |

**Groupe 2** Ce groupe comprend 18 plans dont toutes les différences sont **directement** estimables mais où les cellules vides restantes se trouvent soit sur la même ligne soit sur la même colonne. La trace de **V** pour ces 18 plans est égale à 7. Ces plans se trouvent dans la table 3.13.

**Table 3.13:** Plans connexes $3 \times 3$ avec 7 observations: trace = 7

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 |
| 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 |
| 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | 1 | 1 |
| 1 | 2 | | 2 | 1 |
| 1 | 3 | | 2 | 2 |
| 2 | 2 | | 2 | 3 |
| 2 | 3 | | 3 | 1 |
| 3 | 2 | | 3 | 2 |
| 3 | 3 | | 3 | 3 |

Il existe 9 plans connexes $3 \times 3$ avec 8 observations. Ils ont tous une trace de $\mathbf{V}$ égale à 5. Ils sont représentés dans la table 3.6.

Si l'on ajoute une 9ème observation, on obtient un plan $3 \times 3$ complet. Nous avons alors les cinq valeurs de trace suivantes:

1. trace de $\mathbf{V}$ pour un plan minimal connexe $3 \times 3$ $A$-optimal $= 12$
2. trace de $\mathbf{V}$ pour un plan connexe $3 \times 3$ $A$-optimal avec 6 observations $= 8$
3. trace de $\mathbf{V}$ pour un plan connexe $3 \times 3$ $A$-optimal avec 7 observations $= 6.4$
4. trace de $\mathbf{V}$ pour un plan connexe $3 \times 3$ avec 8 observations $= 5$
5. trace de $\mathbf{V}$ pour un plan complet $3 \times 3 = 4$.

### 3.3.5 Quelques généralités sur la classification des plans $a \times b$ connexes

La classification est la même que pour les plans minimaux connexes $a \times b$. On peut donc énoncer le théorème suivant:

**Théorème 3.1** *Les plans les meilleurs sont ceux dans lesquels tous les contrastes élémentaires sont* directement *estimables. Puis viennent les plans dans lesquels* un *contraste élémentaire n'est pas directement estimable; encore après viennent ceux dans lesquels* deux *contrastes élémentaires ne sont pas directement estimables et ainsi de suite.*

Pour les plans $3 \times 3$ dans lesquels tous les contrastes élémentaires sont **directement** estimables, il faut encore distinguer ceux qui sont équilibrés de ceux qui ne le sont pas. Ainsi un plan $3 \times 3$ $A$-optimal est un plan équilibré dans lequel tous les contrastes élémentaires sont **directement** estimables.

En ce qui concerne les plans $a \times b$ avec $a + b$ observations, on peut énoncer le tbéorème suivant pour $a \neq 3$:

**Théorème 3.2** *Les plans $a \times b$ avec $a + b$ observations $A$-optimaux sont les plans pour lesquels tous les contrastes élémentaires sont* **directement** *estimables et les plans $4 \times 4$ qui contiennent des boucles de longueur 8.*

## 3.4 Conséquences de l'addition de ces observations

Nous savons qu'un plan est $A$-optimal quand la trace de la matrice des covariances $\mathbf{V}$ est minimale. Or il est clair que nous ne pouvons pas tout minimiser à la fois. Il faut faire un choix entre plus d'information et moins de coût. Et ce choix dépend du type d'expériences, des moyens engagés dans l'expérience, du temps à disposition, etc...

Nous avons en fait trois conséquences principales de l'addition d'observations à un plan minimal connexe.

La première conséquence est d'ordre mathématique. Nous remarquons dans la section 3.3 que plus l'on ajoute d'observations à un plan minimal connexe, plus la valeur de la trace de $\mathbf{V}$ diminue pour atteindre sa valeur minimale quand le plan est complet.

La deuxième conséquence est d'ordre économique. Il va de soi que des observations supplémentaires vont accroître les coûts de l'expérience. C'est là qu'intervient l'importance du genre d'expériences. Il existe des expériences où le coût du matériel engagé est quasi nul, d'autres où le dispositif mis en place coûte une fortune. Dans le premier cas, des observations supplémentaires ne vont pas accroître considérablement les coûts, tandis que dans le deuxième cas, même une seule observation supplémentaire peut être irréalisable. Et nous ne parlons pas des expériences très longues.

La troisième conséquence est d'ordre statistique. En effet, l'addition d'observations va rendre possible l'analyse de variance et le test de Fisher puisqu'il y aura alors des degrés de liberté pour le résidu.

C'est donc une analyse coût/bénéfice que nous devons faire. Il va falloir mettre en balance les trois conséquences ci-dessus et évaluer le résultat.

Nous ne pouvons malheureusement que donner des généralités puisque, comme nous l'avons déjà dit, le résultat de cette analyse coût/bénéfice va dépendre du type d'expériences, du temps et des moyens à disposition.

# Chapitre 4

# Plans minimaux connexes à classification triple

## 4.1 Construction des plans minimaux connexes à classification triple

Dans cette section, nous donnerons d'abord un algorithme de construction des plans minimaux connexes $a \times b \times (c+1)$ à partir des plans minimaux connexes $a \times b \times c$, dans sa forme générale. Puis nous appliquerons cet algorithme pour construire les plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 3$.

### 4.1.1 Algorithme de construction des plans minimaux connexes $a \times b \times (c+1)$

Nous prenons un plan minimal connexe $a \times b \times c$, avec $a \leq b \leq c$.

Soit $(i,j,k)$, $i = 1,2,\ldots,a$, $j = 1,2,\ldots,b$ et $k = 1,2,...,c$, les cellules de ce plan minimal connexe $a \times b \times c$.

Pour construire un plan minimal connexe $a \times b \times (c+1)$, nous générons les $a \times b \times (c+1)$ cellules de ce plan.

Soit $(s,t,u)$, $s = 1,2,...,a$, $t = 1,2,...,b$ et $u = 1,2,...,c,c{+}1$, ces $a \times b \times (c{+}1)$ cellules générées.

Puis pour chaque observation $(s,t,u)$, nous procédons de la sorte:

1. nous prenons en considération les observations $(i,j,k)$ du plan minimal connexe $a \times b \times c$ et l'observation $(s,t,u)$;

2. pour obtenir le plan minimal connexe $a \times b \times (c+1)$ correspondant, nous posons $k = k+1$ si $k \geq u$, pour toutes les observations $(i,j,k)$ et gardons telle quelle l'observation générée $(s,t,u)$.

Pour obtenir tous les plans minimaux connexes $a \times b \times (c+1)$, nous devons appliquer cet algorithme pour tous les plans minimaux connexes $a \times b \times c$ et éliminer ceux que nous obtenons plusieurs fois.

### 4.1.2 Construction des plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 3$

Nous prenons un plan minimal connexe $2 \times 2 \times 2$:

| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| 1 | |
| | |

Ce plan contient les observations $(1,1,1)$, $(1,2,1)$, $(2,1,1)$ et $(1,1,2)$. Pour construire un plan minimal connexe $2 \times 2 \times 3$, nous générons les 12 cellules de ce plan:

$(1,1,1)$, $(1,2,1)$, $(2,1,1)$, $(2,2,1)$, $(1,1,2)$, $(1,2,2)$, $(2,1,2)$, $(2,2,2)$, $(1,1,3)$, $(1,2,3)$, $(2,1,3)$, $(2,2,3)$.

Ensuite nous prenons l'observation générée $(1,1,1)$ avec les 4 observations du plan minimal connexe $2 \times 2 \times 2$: $(1,1,1)$, $(1,2,1)$, $(2,1,1)$ et $(1,1,2)$.

Pour obtenir le plan minimal connexe $2 \times 2 \times 3$ correspondant, nous effectuons les changements d'indice nécessaires.

Pour la première observation du plan minimal connexe $2 \times 2 \times 2$, à savoir $(1,1,1)$, $k = 1$; $k$ est donc supérieur ou égal à $u$, par conséquent $k = k+1 = 2$. L'observation devient donc $(1,1,2)$.

Pour la deuxième observation du plan minimal connexe $2 \times 2 \times 2$, à savoir $(1,2,1)$, $k = 1$; $k$ est donc supérieur ou égal à $u$, par conséquent $k = k+1 = 2$. L'observation devient donc $(1,2,2)$.

Pour la troisième observation du plan minimal connexe $2 \times 2 \times 2$, à savoir $(2,1,1)$, $k = 1$; $k$ est donc supérieur ou égal à $u$, par conséquent $k = k+1 = 2$. L'observation devient donc $(2,1,2)$.

Pour la quatrième observation du plan minimal connexe $2 \times 2 \times 2$, à savoir $(1,1,2)$, $k = 2$; $k$ est donc supérieur ou égal à $u$, par conséquent $k = k+1 = 3$. L'observation devient donc $(1,1,3)$.

Le plan minimal connexe $2 \times 2 \times 3$ obtenu est donc le suivant:

| | |
|---|---|
| 1 | |
| | |

| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| 1 | |
| | |

Il contient les observations $(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,2,2)$, $(2,1,2)$ et $(1,1,3)$.

Nous procédons de la même manière pour les 12 observations générées et obtenons ainsi 12 plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 3$.

Pour obtenir les 504 plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 3$, nous appliquons cet algorithme aux 58 plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 2$ et éliminons les plans que l'on rencontre plusieurs fois.

## 4.2 Caractérisation et classification des plans minimaux connexes à classification triple par rapport aux critères d'optimalité $A$ et $E$

Dans cette section, nous allons classer tous les plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 2$ et $2 \times 2 \times 3$ selon les critères d'optimalité suivants:

1. critère d'optimalité $A$: min[trace $V$]
2. critère d'optimalité $E$: min[plus grande valeur propre de $V$]

La matrice $V$, définie à la section 2.3.1, est égale à:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X} + \mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{A}'$$

où $\mathbf{A}$ est la matrice des contrastes, $\mathbf{X}$ la matrice du plan et $\mathbf{H}$ la matrice des contraintes. Puis nous donnerons pour chaque critère des généralités concernant les plans minimaux connexes $a \times b \times c$.

### 4.2.1 Classification des plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 2$

Nous allons tout d'abord classer les plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 2$ selon le critère d'optimalité $A$. Nous devons alors définir la matrice $\mathbf{V}$, en sachant que pour les plans $2 \times 2 \times 2$ la matrice des contrastes $\mathbf{A}$ est égale à:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et la matrice des contraintes $\mathbf{H}$ est égale à:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Une fois $\mathbf{V}$ calculée pour chaque plan, nous en prenons la trace et classons tous les plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 2$ par ordre croissant de la trace de $\mathbf{V}$.

Nous savons qu'il y a 58 plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 2$. Nous obtenons par cette classification 3 groupes différents.

**Groupe 1** Ce groupe comprend 2 plans symétriques avec une trace égale à 3. Ces plans se trouvent dans la table 4.1. Ils forment une classe d'équivalence.

**Table 4.1:** Plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 2$ avec une $trace = 3$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | | 2 | 2 | 2 |

**Groupe 2** Ce groupe comprend 32 plans avec une trace égale à 6. Ces plans se trouvent dans la table 4.2. Ils forment quatre classes d'équivalence.

**Table 4.2:** Plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 2$ avec une $trace = 6$

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 2 | | 1 | 2 | 1 | | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | | 1 | 2 | 2 | | 2 | 2 | 1 | | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | | 2 | 2 | 2 | | 2 | 2 | 2 | | 2 | 2 | 2 |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 | | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 2 | | 1 | 2 | 1 | | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | | 1 | 2 | 2 | | 2 | 1 | 1 | | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | | 2 | 1 | 2 | | 1 | 2 | 2 | | 2 | 2 | 2 |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | 2 | 1 | 1 | | 1 | 2 | 1 | | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | | 1 | 1 | 2 | | 2 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | | 2 | 1 | 2 | | 2 | 2 | 1 | | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | | 2 | 2 | 2 | | 1 | 2 | 2 | | 2 | 1 | 2 |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | 1 | 2 | 1 | | 1 | 1 | 1 | | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | | 1 | 2 | 2 | | 2 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | | 2 | 1 | 2 | | 2 | 2 | 1 | | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | | 2 | 2 | 2 | | 2 | 1 | 2 | | 2 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |

**Groupe 3** Ce groupe comprend 24 plans avec une trace égale à 8. Ces plans se trouvent dans la table 4.3. Ils forment trois classes d'équivalence.

**Table 4.3:** Plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 2$ avec une $trace = 8$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

Nous classons maintenant tous les plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 2$ selon le critère d'optimalité $E$. Nous obtenons ainsi 4 groupes différents.

**Groupe 1** Ce groupe comprend 2 plans symétriques avec une valeur propre égale à 1. Ces plans se trouvent dans la table 4.4. Ils forment une classe d'équivalence.

**Table 4.4:** Plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 2$ avec une *valeur propre* = 1

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |

**Groupe 2** Ce groupe comprend 24 plans avec une valeur propre égale à 3.41. Ces plans se trouvent dans la table 4.5. Ils forment trois classes d'équivalence.

**Table 4.5:** Plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 2$ avec une *valeur propre* = 3.41

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |

**Groupe 3** Ce groupe comprend 8 plans avec une valeur propre égale à 4. Ces plans se trouvent dans la table 4.6. Ils forment une classe d'équivalence.

**Table 4.6:** Plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 2$ avec une *valeur propre* $= 4$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |

**Groupe 4** Ce groupe comprend 24 plans avec une valeur propre égale à 6.37. Ces plans se trouvent dans la table 4.7. Ils forment trois classes d'équivalence.

**Table 4.7:** Plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 2$ avec une *valeur propre* = 6.37

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

### 4.2.2 Classification des plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 3$

Nous allons tout d'abord classer les plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 3$ selon le critère d'optimalité $A$. Puis nous les classerons selon le critère d'optimalité $E$.

Nous devons définir la matrice $\mathbf{V}$, en sachant que pour les plans $2 \times 2 \times 3$ la matrice des contrastes $\mathbf{A}$ est égale à:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et la matrice des contraintes $\mathbf{H}$ est égale à:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Etant donné qu'il y a 504 plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 3$, il serait fastidieux de les classer tous. C'est pourquoi nous allons représenter complètement uniquement le groupe qui a la plus petite trace. Pour les autres groupes, nous nous contenterons de donner un exemple, les généralités du paragraphe suivant nous permettant de trouver les autres plans.

Le critère de la trace nous donne 6 groupes différents.

**Groupe 1** Ce groupe comprend 24 plans avec une trace égale à 7. Ces plans se trouvent dans la table 4.8. Ils forment deux classes d'équivalence.

**Table 4.8:** Plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 3$ avec une *trace* $= 7$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 |
| | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 |
| | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 |
| | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 |
| | | | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 |
| | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 |

**Groupe 2** Ce groupe comprend 60 plans avec une trace égale à 10. Un

exemplaire est donné à la table 4.9.

**Table 4.9:** Exemplaire d'un plan minimal connexe $2 \times 2 \times 3$ avec une $trace = 10$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 3 |

**Groupe 3** Ce groupe comprend 168 plans avec une trace égale à 12. Un exemplaire est donné à la table 4.10.

**Table 4.10:** Exemplaire d'un plan minimal connexe $2 \times 2 \times 3$ avec une $trace = 12$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | 3 |

**Groupe 4** Ce groupe comprend 180 plans avec une trace égale à 14. Un exemplaire est donné à la table 4.11.

**Table 4.11:** Exemplaire d'un plan minimal connexe $2 \times 2 \times 3$ avec une $trace = 14$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | 3 |

**Groupe 5** Ce groupe comprend 24 plans avec une trace égale à 18. Un exemplaire est donné à la table 4.12.

**Table 4.12:** Exemplaire d'un plan minimal connexe $2 \times 2 \times 3$ avec une $trace = 18$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 3 |

**Groupe 6** Ce groupe comprend 48 plans avec une trace égale à 20. Un exemplaire est donné à la table 4.13.

**Table 4.13:** Exemplaire d'un plan minimal connexe $2 \times 2 \times 3$ avec une $trace = 20$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 3 |

Pour le critère de la valeur propre, nous obtenons 15 groupes différents. Nous procédons de la même manière que pour le critère de la trace.

**Groupe 1** Ce groupe comprend 24 plans avec une valeur propre égale à 3.85. Ces plans se trouvent dans la table 4.14. Ils forment deux classes d'équivalence.

**Table 4.14:** Plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 3$ avec une $valeur\ propre =$ 3.85

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 |

**Groupe 2** Ce groupe comprend 24 plans avec une valeur propre égale à 4.17. Un exemplaire est donné à la table 4.15.

**Table 4.15:** Exemplaire d'un plan minimal connexes $2 \times 2 \times 3$ avec une *valeur propre* = 4.17

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 3 |

**Groupe 3** Ce groupe comprend 24 plans avec une valeur propre égale à 4.30. Un exemplaire est donné à la table 4.16.

**Table 4.16:** Exemplaire d'un plan minimal connexes $2 \times 2 \times 3$ avec une *valeur propre* = 4.30

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 3 |

**Groupe 4** Ce groupe comprend 12 plans avec une valeur propre égale à 5. Un exemplaire est donné à la table 4.17.

**Table 4.17:** Exemplaire d'un plan minimal connexes $2 \times 2 \times 3$ avec une *valeur propre* = 5

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 3 |

**Groupe 5** Ce groupe comprend 24 plans avec une valeur propre égale à 6.54. Un exemplaire est donné à la table 4.18.

**Table 4.18:** Exemplaire d'un plan minimal connexes $2 \times 2 \times 3$ avec une *valeur propre* = 6.54

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 3 |

**Groupe 6** Ce groupe comprend 48 plans avec une valeur propre égale à 7.09. Un exemplaire est donné à la table 4.19.

**Table 4.19:** Exemplaire d'un plan minimal connexes $2 \times 2 \times 3$ avec une *valeur propre* = 7.09

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | 3 |

**Groupe 7** Ce groupe comprend 48 plans avec une valeur propre égale à 7.39. Un exemplaire est donné à la table 4.20.

**Table 4.20:** Exemplaire d'un plan minimal connexes $2 \times 2 \times 3$ avec une *valeur propre* = 7.39

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 |

**Groupe 8** Ce groupe comprend 48 plans avec une valeur propre égale à 7.59. Un exemplaire est donné à la table 4.21.

**Table 4.21:** Exemplaire d'un plan minimal connexes $2 \times 2 \times 3$ avec une *valeur propre* = 7.59

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 |

**Groupe 9** Ce groupe comprend 24 plans avec une valeur propre égale à 8.41. Un exemplaire est donné à la table 4.22.

**Table 4.22:** Exemplaire d'un plan minimal connexes $2 \times 2 \times 3$ avec une *valeur propre* = 8.41

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 3 |

**Groupe 10** Ce groupe comprend 48 plans avec une valeur propre égale à 9.08. Un exemplaire est donné à la table 4.23.

**Table 4.23:** Exemplaire d'un plan minimal connexes $2 \times 2 \times 3$ avec une *valeur propre* = 9.08

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 3 |

**Groupe 11** Ce groupe comprend 12 plans avec une valeur propre égale à 9.47. Un exemplaire est donné à la table 4.24.

**Table 4.24:** Exemplaire d'un plan minimal connexes $2 \times 2 \times 3$ avec une *valeur propre* = 9.47

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 3 |

**Groupe 12** Ce groupe comprend 48 plans avec une valeur propre égale à 9.51. Un exemplaire est donné à la table 4.25.

**Table 4.25:** Exemplaire d'un plan minimal connexes $2 \times 2 \times 3$ avec une *valeur propre* = 9.51

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 3 |

**Groupe 13** Ce groupe comprend 48 plans avec une valeur propre égale à 10.07. Un exemplaire est donné à la table 4.26.

**Table 4.26:** Exemplaire d'un plan minimal connexes $2 \times 2 \times 3$ avec une *valeur propre* = 10.07

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | 3 |

**Groupe 14** Ce groupe comprend 24 plans avec une valeur propre égale à 14.68. Un exemplaire est donné à la table 4.27.

**Table 4.27:** Exemplaire d'un plan minimal connexes $2 \times 2 \times 3$ avec une *valeur propre* = 14.68

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 3 |

**Groupe 15** Ce groupe comprend 48 plans avec une valeur propre égale à 16.79. Un exemplaire est donné à la table 4.28.

**Table 4.28:** Exemplaire d'un plan minimal connexes $2 \times 2 \times 3$ avec une *valeur propre* = 16.79

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 3 |

### 4.2.3 Quelques généralités sur la classification des plans minimaux connexes $a \times b \times c$

Pour les plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 2$, on obtient pour les deux critères les 2 mêmes plans respectivement $A$-optimaux et $E$-optimaux. Il s'agit des 2 plans symétriques

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}$$

Les plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 3$ $A$- et $E$-optimaux sont des plans dans lesquels apparaît l'un ou l'autre des 2 plans symétriques $2 \times 2 \times 2$.

**Exemple 4.1** Voici un plan $2 \times 2 \times 3$ $A$- et $E$-optimal:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}$$

ou sous forme d'indices:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}$$

On remarque que si l'on supprime le deuxième niveau du troisième facteur, nous avons alors un des 2 plans symétriques $2 \times 2 \times 2$:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}$$

On peut aussi le faire à l'aide des indices: en supprimant le deuxième niveau du troisième facteur, l'observation 112 disparaît et les observations 123 et 213 deviennent respectivement 122 et 212. Ce qui nous donne:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}$$

Pour le critère de la trace, la classification se fait dans cet ordre:

1. les plans $A$-optimaux
2. les plans dans lesquels tous les contrastes élémentaires sont **directement** estimables

3. les plans dans lesquels tous les contrastes élémentaires **sauf un** sont directement estimables

4. les plans dans lesquels tous les contrastes élémentaires **sauf deux** sont directement estimables

5. ainsi de suite jusqu'à 2 contrastes élémentaires seulement directement estimables.

Pour le critère de la valeur propre, la classification se fait dans le même ordre que pour le critère de la trace mais à l'intérieur de chaque groupe, il y a une sous-classification déterminée par le nombre de participations d'une cellule à l'estimation des contrastes. Ainsi, plus une cellule participe à l'estimation des contrastes, plus grande est la valeur propre du plan.

**Exemple 4.2** Voici deux plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 2$ ayant la même trace (=6) mais une valeur propre différente:

1.

| | |
|---|---|
| 1 | |
| | |

| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| | 1 |

Dans ce plan tous les contrastes élémentaires sont directement estimables. Aucune cellule ne participe plus de deux fois à l'estimation des contrastes. La trace vaut 6 et la valeur propre vaut 3.41.

2.

| | |
|---|---|
| 1 | |
| | |

| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 1 | |

Dans ce plan tous les contrastes élémentaires sont directement estimables. La cellule 112 participe à trois estimations: $\alpha_1 - \alpha_2$, $\beta_1 - \beta_2$ et $\gamma_1 - \gamma_2$. La trace vaut aussi 6 mais la valeur propre vaut 4.

On peut faire une dernière remarque: la classification (selon les deux critères) est la même pour les plans minimaux connexes $a \times b \times c$ que pour les plans minimaux connexes $a \times c \times b$, $b \times a \times c$, $b \times c \times a$, $c \times a \times b$ et $c \times b \times a$.

## 4.3 L'effet de l'addition d'une ou plusieurs observations dans un plan minimal connexe à classification triple

Si on ajoute une ou plusieurs observations à un plan minimal connexe $a \times b \times c$ sans répétition, cela aura pour effet de diminuer les valeurs de la trace de la matrice $\mathbf{V}$.

La section 4.4 traite des caractéristiques des plans connexes à classification triple selon le critère d'optimalité $A$.

La question que l'on peut se poser est de savoir si le gain d'information suffit à compenser le coût qu'engendre une observation supplémentaire.

Il y a toutefois un cas où la question ne se pose pas, c'est lorsque l'on veut faire une analyse de variance. En effet, le nombre de degrés de liberté pour le résidu est nul lorsque le plan est minimal connexe. Dans ce cas, nous pouvons faire l'analyse du plan uniquement si nous connaissons a priori les carrés moyens des erreurs ($CM_E$). Si nous ne les connaissons pas, nous devons alors ajouter au moins une observation afin de pouvoir calculer les carrés moyens des erreurs et par la suite le ratio $F$.

## 4.4 Caractérisation et classification des plans connexes à classification triple par rapport au critère d'optimalité $A$

Nous allons commencer par donner une classification complète des plans connexes $2 \times 2 \times 2$ sans répétition selon le critère d'optimalité $A$.

Puis nous donnerons quelques généralités concernant la classification des plans connexes $a \times b \times c$ par rapport au critère d'optimalité $A$.

### 4.4.1 Classification des plans connexes $2 \times 2 \times 2$

Nous rappelons que le critère d'optimalité $A$ est défini comme suit:

$$\text{critère d'optimalité } A\text{: min [trace } V]$$

avec $\mathbf{V} = \mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X} + \mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{A}'$.

Pour un plan $2 \times 2 \times 2$ la matrice des contrastes $\mathbf{A}$ est égale à:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et la matrice des contraintes $\mathbf{H}$ est égale à:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

PLANS CONNEXES $2 \times 2 \times 2$ AVEC 5 OBSERVATIONS

Nous savons qu'un plan **minimal** connexe $2 \times 2 \times 2$ contient 4 observations et qu'il existe 58 plans minimaux connexes. Si nous ajoutons une observation, nous obtenons 56 plans ayant 5 observations. Ces plans sont tous connexes.

La classification selon le critère de la trace nous donne 3 groupes.

**Groupe 1** Ce groupe comprend 8 plans $A$-optimaux avec une trace égale à 2.625. Ce sont les plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 2$ symétriques auxquels on a ajouté une observation (n'importe où). Ces plans se trouvent dans la table 4.29.

**Table 4.29:** Plans connexes $A$-optimaux $2 \times 2 \times 2$ avec 5 observations et $trace = 2.625$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |

**Groupe 2** Ce groupe comprend 24 plans connexes avec une trace égale à 3.75. Ces plans ne contiennent pas les plans minimaux connexes symétriques $2 \times 2 \times 2$. Ils se trouvent dans la table 4.30.

**Table 4.30:** Plans connexes $2 \times 2 \times 2$ avec 5 observations et $trace = 3.75$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

**Groupe** 3 Ce groupe comprend 24 plans connexes avec une trace égale à 4.5. Ces plans *ne* contiennent pas les plans minimaux connexes symétriques $2 \times 2 \times 2$. Ils se trouvent dans la table 4.31.

**Table 4.31:** Plans connexes $2 \times 2 \times 2$ avec 5 observations et $trace = 4.5$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| | | | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

PLANS CONNEXES $2 \times 2 \times 2$ AVEC 6 OBSERVATIONS

Si nous ajoutons deux observations à un plan minimal connexe $2 \times 2 \times 2$, nous obtenons 28 plans connexes avec 6 observations.

La classification selon le critère de la trace nous donne trois groupes.

**Groupe 1** Ce groupe comprend 12 plans $A$-optimaux avec une trace égale à 2.25. Ce sont les plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 2$ symétriques auxquels on a ajouté deux observations (n'importe où). Ils se trouvent dans la table 4.32.

**Table 4.32:** Plans connexcs $A$-optimaux avec 6 observations et $trace = 2.25$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2. | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

**Groupe 2** Ce groupe comprend 12 plans connexes avec une trace égale à 2.6667. Ces plans ne contiennent pas les plans minimaux connexes symétriques $2 \times 2 \times 2$. Ils se trouvent dans la table 4.33.

**Table 4.33:** Plans connexes $2 \times 2 \times 2$ avec 6 observations et $trace = 2.6667$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

**Groupe 3** Ce groupe comprend 4 plans connexes avec une trace égale à 3. Ces plans ne contiennent pas les plans minimaux connexes symétriques $2 \times 2 \times 2$. Ils se trouvent dans la table 4.34.

**Table 4.34:** Plans connexes $2 \times 2 \times 2$ avec 6 observations et $trace = 3$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

PLANS CONNEXES $2 \times 2 \times 2$ AVEC 7 OBSERVATIONS

Si nous ajoutons trois observations à un plan minimal connexe $2 \times 2 \times 2$, nous obtenons 8 plans connexes avec 7 observations.

La classification selon le critère de la trace nous donne un groupe comprenant 8 plans connexes $A$-optimaux dont la trace vaut 1.875. Ce sont les plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 2$ symétriques auxquels on a ajouté trois observations (n'importe où). Ces plans se trouvent dans la table 4.35.

**Table 4.35:** Plans connexes $A$-optimaux avec 7 observations et $trace = 1.875$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

PLAN $2 \times 2 \times 2$ COMPLET

Si nous ajoutons quatre observations à un plan minimal connexe $2 \times 2 \times 2$, nous obtenons le plan $2 \times 2 \times 2$ complet. Sa trace vaut 1.5.

### 4.4.2 Quelques généralités sur la classification des plans $a \times b \times c$ connexes

Nous avons vu que pour les plans $2 \times 2 \times 2$, les plans $A$-optimaux sans répétition sont les plans minimaux connexes symétriques auxquels on a ajouté une ou plusieurs observations.

En ce qui concerne les catégories supérieures ($2 \times 2 \times 3, 2 \times 3 \times 3, \ldots$), les plans $A$-optimaux sont les plans dans lesquels on retrouve le plus grand nombre de plans minimaux connexes symétriques $2 \times 2 \times 2$. Lorsque le nombre d'observations ne permet pas d'avoir un nombre fini de plans symétriques, les plans $A$-optimaux sont ceux qui contiennent en plus des demi-plans symétriques. On ne retrouve naturellement pas les plans symétriques tels quels, il faut adapter les indices puisque le plan symétrique est un plan $2 \times 2 \times 2$. On va illustrer cette propriété par quelques exemples.

**Exemple 4.3** Dans la catégorie des plans $2 \times 2 \times 3$ avec 6 observations, le plan suivant est $A$-optimal:

| | |
|---|---|
| 1 | |
| | 1 |

| | |
|---|---|
| 1 | |
| | 1 |

| | |
|---|---|
| | 1 |
| 1 | |

ou sous forme d'indices:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}$$

En effet, si l'on ramène le plan à la catégorie $2 \times 2 \times 2$, les deux observations 123 et 213 deviennent 122 et 212. Il contient alors le plan minimal connexe symétrique

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}$$

et le demi-plan symétrique

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}$$

**Exemple 4.4** Dans la catégorie des plans $2 \times 2 \times 3$ avec 8 observations, le plan suivant est $A$-optimal:

| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 1 | 1 |

| | |
|---|---|
| 1 | |
| | 1 |

| | |
|---|---|
| | 1 |
| 1 | |

ou sous forme d'indices:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}$$

En effet, si l'on ramène le plan à la catégorie $2 \times 2 \times 2$, les deux observations 123 et 213 deviennent 122 et 212. Il contient alors les deux plans minimaux connexes symétriques

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}$$

**Exemple 4.5** Dans la catégorie des plans $2 \times 3 \times 3$ avec 7 observations, le plan suivant est $A$-optimal:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 1 | | |

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | |
| | 1 | |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | | 1 |
| | | 1 |

ou sous forme d'indices:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | 3 |
| 1 | 3 | 3 |
| 2 | 3 | 3 |

En effet, dans un premier temps, on ramène le plan à la catégorie $2 \times 2 \times 3$. Le plan devient:

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| | 1 |
| | 1 |

| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| | 1 |

ou sous forme d'indices:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | 3 |
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 3 |

Dans un deuxième temps, on le ramène à la catégorie $2 \times 2 \times 2$. Le plan devient:

| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 1 | 1 |

| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| | 1 |

ou sous forme d'indices:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 |

Il contient ainsi le plan minimal connexe symétrique

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 |

et le demi-plan symétrique

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 |

## 4.5 Programme informatique pour la construction des plans minimaux connexes à classification triple

Le programme AXBXC donne tous les plans minimaux connexes de la catégorie $a \times b \times c$ choisie par l'utilisateur. Il indique aussi le nombre de plans minimaux connexes qui existent.

Comme le nombre de plans minimaux connexes à classification triple augmente très rapidement quand $a$, $b$ ou $c$ deviennent grands, le choix de la catégorie $a \times b \times c$ a été volontairement limité. Le programme offre donc à l'utilisateur les possibilités suivantes:

- plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 2$

- plans minimaux connexes $2 \times 2 \times 3$

Pour exécuter le programme, l'utilisateur doit entrer son nom, c'est-à-dire AXBXC. Il se trouvera alors devant deux choix possibles. Il entrera le chiffre correspondant à la catégorie désirée. Les plans construits et leur nombre seront imprimés dans un fichier portant le nom de la catégorie choisie suivi de l'extension ".RES". La forme de représentation des plans est celle des indices.

Le programme AXBXC ainsi qu'un exemple d'impression figurent en Annexe 3.

# Chapitre 5

# Une approche graphique des plans minimaux connexes

Dans ce chapitre, nous allons commencer par donner les bases élémentaires des notations et définitions de la théorie des graphes. Puis nous appliquerons cette théorie aux plans d'expériences minimaux connexes à classification double et aux plans connexes $a \times b$ avec $a + b$ observations.

Finalement, nous présenterons certains résultats, dus à Butz (1982), qui permettent de savoir si un plan minimal à classification triple est connexe ou non. Nous commencerons par un cas particulier (c'est-à-dire répondant à certaines contraintes) puis nous traiterons le cas général.

## 5.1 La théorie des graphes

Cette section contient un bref résumé des notations et définitions de la théorie des graphes qui nous seront utiles pour la suite de ce chapitre.

Un **graphe** est un schéma constitué d'un ensemble fini et non vide de **sommets** et d'un ensemble fini d'**arêtes**. L'ensemble des sommets du graphe est noté $V$ et chaque arête est désignée par une paire non orientée $\{v_1, v_2\}$ où $v_1$ et $v_2 \in V$. L'ensemble des arêtes du graphe est noté $E$ et on détermine ainsi un graphe par $G = [V, E]$.

Une **chaîne** $\tau$ allant de $v_1$ à $v_t$ dans un graphe $G = [V, E]$ est une suite de sommets appartenant à $V$ et d'arêtes appartenant à $E$, c'est-à-dire

$$\tau = [v_1, \mathrm{e}_1, v_2, \mathrm{e}_2, ..., \mathrm{e}_{t-1}, v_t]$$

où $\mathrm{e}_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ pour $i = 1, 2, ..., t-1$.

$v_1$ est appelé le **sommet initial** et $v_t$ le **sommet terminal** de la chaîne $\tau$.

Un **cycle** est une chaîne fermée, c'est-à-dire où le sommet initial et le sommet terminal sont les mêmes:

$$v_1 = v_t$$

Un cycle (ou un chemin) est dit **élémentaire** s'il ne contient strictement aucun cycle (ou chemin) ayant mêmes sommets extrémaux.

Un graphe $G = [V, E]$ est appelé un **graphe connexe** si pour toute paire $v$, $v^\star \in V$ de deux sommets distincts, il existe une chaîne $\mathrm{e} = \{v, v^\star\}$ qui les relie.

$G^\star = [V^\star, E^\star]$ est un **sous-graphe** de $G = [V, E]$ si $V^\star \subseteq V$ et $E^\star \subseteq E$; si $V^\star = V$ et $E^\star \neq E$, $G^\star = [V^\star, E^\star]$ est un **graphe partiel** de $G = [V, E]$.

Une **composante connexe** d'un graphe $G$ est un sous-graphe connexe de $G$ maximal, c'est-à-dire contenant tous les sommets liés entre eux. Le nombre de composantes connexes d'un graphe $G$ est noté par $c(G)$.

Un **arbre** est un graphe connexe qui ne contient pas de cycle.

$G = [V, E]$ est un **graphe biparti** si l'ensemble des sommets $V$ peut être divisé en deux sous-ensembles non vides $V_1$ et $V_2$ (c'est-à-dire $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), de sorte que chaque arête appartenant à $E$ relie un sommet de $V_1$ à un sommet de $V_2$.

Un **graphe orienté** $G = [V, E]$ consiste en un ensemble fini de sommets $V$ et en une famille finie de paires orientées $\{v_1, v_2\}$ avec $v_1$, $v_2 \in V$. Les éléments de $E$ sont appelés des **arcs**; $v_1$ est le sommet initial et $v_2$ le sommet terminal de l'arc $\mathrm{e} = \{v_1, v_2\}$. e est **orienté** de $v_1$ vers $v_2$.

Une **boucle** est un arc dont le sommet initial et le sommet terminal sont identiques.

Toutes les notions introduites pour les graphes (chaîne, cycle, connexité,...) sont aussi valables pour les graphes orientés.

Pour une chaîne $\tau = [v_1, \mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_{t-1}, v_t]$ dans un graphe orienté $G = [V, E]$, on note par

$$E(\tau^+)$$

la famille d'arcs qui apparaissent dans $\tau$ et qui sont orientés dans la direction de $\tau$ (c'est-à-dire les arcs $\mathrm{e}_s$ dans $\tau$ qui sont orientés de $v_s$ vers $v_{s+1}$, $1 \leq s < t$).

La famille des arcs qui apparaissent dans $\tau$ et qui ne sont pas orientés dans la direction de $\tau$ sont notés par

$$E(\tau^-)$$

(c'est-à-dire les arcs $\mathrm{e}_s$ dans $\tau$ avec $\mathrm{e}_s = \{v_{s+1}, v_s\}$, $1 \leq s < t$).

## 5.2 Plans minimaux connexes à classification double

On peut utiliser la théorie des graphes pour représenter la connexité des plans à classification double. Cette représentation a été utilisée par Bose (1947) pour introduire la notion de connexité de ces plans.

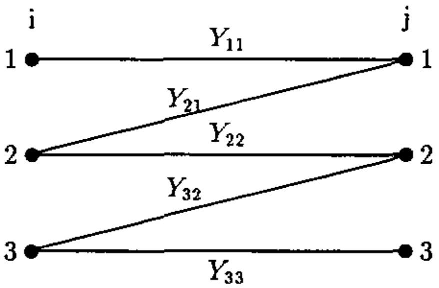
Soit un plan à deux facteurs, l'un à $a$ niveaux, l'autre à $b$ niveaux. Nous représentons ces niveaux par deux ensembles de sommets d'un graphe. Nous relions les sommets $i$ du premier ensemble et $j$ du deuxième ensemble si le traitement $(i, j)$ est appliqué. Les arêtes correspondantes sont nommées au moyen des variables aléatoires $Y_{ij}$. Le graphe est un graphe biparti car aucune arête ne relie les sommets du premier ensemble entre eux, ni les sommets du deuxième ensemble entre eux.

Pour tout plan minimal connexe, le graphe correspondant est un arbre. Ainsi les sommets $i_1$ et $i_2$ (ou $j_1$ et $j_2$) ne sont reliés que par un seul chemin élémentaire qui, de plus, est de longueur paire. L'estimateur de Gauss-Markov de $\alpha_{i_1} - \alpha_{i_2}$ (ou $\beta_{j_1} - \beta_{j_2}$) s'obtient en parcourant ce chemin, plus précisément on somme les variables aléatoires successives en faisant alterner les signes $+$ et $-$.

**Exemple 5.1** Soit le plan $3 \times 3$ suivant:

| | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ |
|---|---|---|---|
| $\alpha_1$ | 1 | | |
| $\alpha_2$ | 1 | 1 | |
| $\alpha_3$ | | 1 | 1 |

et le graphe correspondant:




Le graphe est un arbre. Par conséquent le plan est minimal connexe. Les différents estimateurs sont:

$$
\begin{aligned}
\hat{\alpha}_3 - \hat{\alpha}_1 &= Y_{32} - Y_{22} + Y_{21} - Y_{11} \\
\hat{\alpha}_3 - \hat{\alpha}_2 &= Y_{32} - Y_{22} \\
\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1 &= Y_{21} - Y_{11} \\
\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_1 &= Y_{33} - Y_{32} + Y_{22} - Y_{21} \\
\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_2 &= Y_{33} - Y_{32} \\
\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1 &= Y_{22} - Y_{21}
\end{aligned}
$$

Comme les variables aléatoires $Y_{ij}$ sont non corrélées et ont pour variance $\sigma^2$, l'estimateur de Gauss-Markov de $\alpha_{i_1} - \alpha_{i_2}$ a pour variance $\sigma^2 l_{i_1 i_2}$ où $l_{i_1 i_2}$ désigne la longueur du cbemin liant $i_1$ à $i_2$.

On trouve la trace de $\mathbf{V}$ en sommant les variances des différents estimateurs de Gauss-Markov. Ainsi dans l'exemple 5.1, on a 4 chemins de longueur 2 et 2 chemins de longueur 4. La trace est donc égale à:

$$
trace\, \sigma^2 \mathbf{V} = (4 \times 2 + 2 \times 4)\, \sigma^2 = 16\sigma^2
$$

Cette valeur est minimale lorsque tous les contrastes élémentaires sont directement estimables, c'est-à-dire quand les chemins sont tous de longueur 2. On peut donc donner le théorème suivant:

**Théorème 5.1** *Pour tout plan minimal connexe $a \times b$, on a comme valeur minimale pour la trace* $\sigma^2\mathbf{V}$: $2\sigma^2(C_a^2 + C_b^2)$ *où $C$ désigne le nombre de combinaisons possibles.*

## 5.3 Plans connexes $a \times b$ avec $a + b$ observations

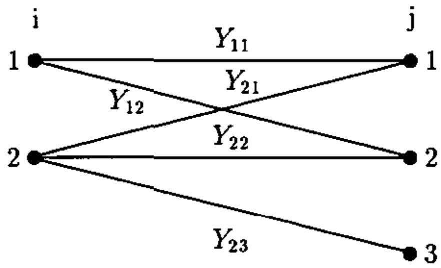
Pour les plans connexes $a \times b$ comprenant $a + b$ observations, le graphe biparti représentatif ne comporte qu'un cycle élémentaire. Deux sommets $i_1$ et $i_2$ (ou $j_1$ et $j_2$) ne sont liés que par deux chemins élémentaires au plus.

Supposons qu'il y ait deux chemins. L'estimateur de Gauss-Markov du contraste élémentaire $\alpha_{i_1} - \alpha_{i_2}$ (ou $\beta_{j_1} - \beta_{j_2}$) est dans ce cas combinaison linéaire des estimateurs associés à chacun de ces deux chemins. Il suffit de calculer les variances et la covariance de ces deux estimateurs pour en déduire l'estimateur $\alpha_{i_1} - \alpha_{i_2}$ (ou $\beta_{j_1} - \beta_{j_2}$).

**Exemple 5.2** Soit le plan $2 \times 3$ suivant:

| | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ |
|---|---|---|---|
| $\alpha_1$ | 1 | 1 | |
| $\alpha_2$ | 1 | 1 | 1 |

et le graphe correspondant:




Pour $\alpha_2 - \alpha_1$, on dispose de deux chemins élémentaires de longueur 2. Les deux estimateurs associés sont non corrélés puisque ces deux chemins n'ont pas d'arêtes en commun. On a donc pour estimateur:

$$\hat{\alpha_2} - \hat{\alpha_1} = \frac{1}{2}(Y_{21} - Y_{11}) + \frac{1}{2}(Y_{22} - Y_{12})$$

Pour $\beta_2 - \beta_1$, on dispose de deux chemins élémentaires de longueur 2. Les deux estimateurs associés sont non corrélés puisque ces deux chemins n'ont pas d'arêtes en commun. On a donc pour estimateur:

$$\hat{\beta_2} - \hat{\beta_1} = \frac{1}{2}(Y_{22} - Y_{21}) + \frac{1}{2}(Y_{12} - Y_{11})$$

Pour $\beta_3 - \beta_1$, deux chemins élémentaires lient les sommets $j_1 = 3$ et $j_2 = 1$. Ils ont pour estimateurs associés:

$$Y_{23} - Y_{21} \text{ et } Y_{23} - Y_{22} + Y_{12} - Y_{11}$$

Comme les deux chemins ont une arête en commun (la variable aléatoire $Y_{23}$ figure dans ces deux estimateurs), les estimateurs associés sont donc corrélés. Ils ont pour variances $2\sigma^2$ et $4\sigma^2$ respectivement et comme covariance $\sigma^2$.

Soit $Z = a(Y_{23} - Y_{21}) + b(Y_{23} - Y_{22} + Y_{12} - Y_{11})$. Calculons $a$ et $b$ pour que $Z$ soit l'estimateur de Gauss-Markov de $\beta_3 - \beta_1$.

Cet estimateur doit être sans biais; on a donc nécessairement $a + b = 1$. Sa variance

$$\begin{aligned} Var\,Z &= \sigma^2 \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ &= \sigma^2(2a^2 + 2ab + 4b^2) \end{aligned}$$

doit être minimale.

Déterminons donc $a$ et $b$ de sorte que Var Z soit minimale sous la contrainte $a + b = 1$. Pour ce faire, nous utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On doit alors résoudre le système:

$$\begin{aligned} 4a + 2b + \lambda &= 0 \\ 2a + 8b + \lambda &= 0 \\ a + b &= 1 \end{aligned}$$

Des deux premières équations on tire $2a - 6b = 0$, d'où $b = \frac{a}{3}$. En remplaçant dans la troisième équation, on trouve $a = \frac{3}{4}$ et $b = \frac{1}{4}$.

L'estimateur de Gauss-Markov de $\beta_3 - \beta_1$ est donc égal à:

$$\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_1 = \frac{3}{4}(Y_{23} - Y_{21}) + \frac{1}{4}(Y_{23} - Y_{22} + Y_{12} - Y_{11})$$

Pour $\beta_3 - \beta_2$, on dispose de deux chemins élémentaires qui lient les sommets $j_1 = 3$ et $j_2 = 2$. Ils ont pour estimateurs associés:

$$Y_{23} - Y_{22} \text{ et } Y_{23} - Y_{21} + Y_{11} - Y_{12}$$

Comme les deux chemins ont une arête en commun (la variable aléatoire $Y_{23}$ figure dans ces deux estimateurs), les estimateurs associés sont donc corrélés. Ils ont pour variances $2\sigma^2$ et $4\sigma^2$ respectivement et comme covariance $\sigma^2$.

On obtient les mêmes résultats pour $a$ et $b$ que pour l'estimateur $\beta_3 - \beta_1$. Par conséquent, l'estimateur de Gauss-Markov de $\beta_3 - \beta_2$ est égal à:

$$\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_2 = \frac{3}{4}(Y_{23} - Y_{22}) + \frac{1}{4}(Y_{23} - Y_{21} + Y_{11} - Y_{12})$$

Pour le calcul de la trace, nous avons besoin des différentes variances de ces estimateurs de Gauss-Markov.

Ainsi

$$\begin{aligned} Var[\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1) &= Var[\frac{1}{2}(Y_{21} - Y_{11}) + \frac{1}{2}(Y_{22} - Y_{12})] \\ &= Var[\frac{1}{2}(Y_{21} - Y_{11} + Y_{22} - Y_{12})] \\ &= \frac{1}{4} \cdot 4\sigma^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

La variance de $\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1$ est aussi égale à $\sigma^2$.

La variance de $\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_1$ est:

$$\begin{aligned} Var(\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_1) &= \sigma^2[2(\frac{3}{4})^2 + 2(\frac{3}{4})(\frac{1}{4}) + 4(\frac{1}{4})^2] \\ &= \sigma^2\frac{7}{4} \end{aligned}$$

La variance de $\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_2$ est aussi égale à $\sigma^2\frac{7}{4}$.

Nous avons donc pour la trace:

$$\begin{aligned} trace\, \sigma^2 \mathbf{V} &= \sigma^2(2 \times 1 + 2 \times \frac{7}{4}) \\ &= \frac{11}{2}\sigma^2 \end{aligned}$$

Pour le calcul de la trace de $\mathbf{V}$ des plans connexes $a \times b$ comportant $a + b$ observations, on doit distinguer trois cas:

1. un seul chemin élémentaire relie $i_1$ à $i_2$ (ou $j_1$ à $j_2$). La variance de l'estimateur de Gauss-Markov de la différence simple associée est égale à $\sigma^2 l$, où $l$ est la longueur du chemin

2. deux chemins élémentaires comportant des arêtes hors du cycle relient $i_1$ et $i_2$ (ou bien $j_1$ et $j_2$). Les estimateurs associés à ces deux chemins sont donc corrélés. Si $p$ est la longueur du premier chemin, $q$ celle du deuxième chemin et $n$ le nombre d'arêtes en commun, on a alors pour variance de l'estimateur de Gauss-Markov:

$$Var = \frac{pq - n^2}{p + q - 2n}\sigma^2$$

**Démonstration**

Les deux estimateurs associés ont pour variance $p$ et $q$ respectivement. Comme ils sont corrélés, leur covariance vaut $n\sigma^2$. L'estimateur de Gauss-Markov correspondant est une combinaison linéaire des estimateurs associés à chacun des deux chemins. Sa variance est:

$$Var Z = \sigma^2 \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & n \\ n & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

où $a$ et $b$ sont les coefficients de la combinaison linéaire. En développant, nous obtenons:

$$Var = \sigma^2(a^2 p + 2abn + b^2 q)$$

Cet estimateur étant sans biais, nous avons $a + b = 1$ et sa variance doit être minimale. Nous déterminons donc $a$ et $b$ pour satisfaire ces conditions. Pour ce faire, nous utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On doit alors résoudre le système:

$$\begin{aligned} 2ap + 2bn + \lambda &= 0 \\ 2an + 2bq + \lambda &= 0 \\ a + b &= 1 \end{aligned}$$

Des deux premières équations on tire $2ap - 2an + 2bn - 2bq = 0$, d'où $a = -\dfrac{b(n-q)}{p-n}$. En remplaçant dans la troisième équation, on trouve $a = \dfrac{q-n}{p+q-2n}$ et $b = \dfrac{p-n}{p+q-2n}$.

Par conséquent, la variance de l'estimateur de Gauss-Markov qui est égale à $\sigma^2(a^2p + 2abn + b^2q)$ devient:

$$\begin{aligned} Var &= \left(\frac{(q-n)^2}{(p+q-2n)^2} \cdot p + 2n \frac{q-n}{p+q-2n} \frac{p-n}{p+q-2n} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(p-n)^2}{(p+q-2n)^2} \cdot q\right)\sigma^2 \\ &= \frac{pq-n^2}{p+q-2n}\sigma^2 \qquad CQFD \end{aligned}$$

3. $i_1$ et $i_2$ (ou $j_1$ et $j_2$) appartiennent tous deux au cycle. Deux chemins disjoints les relient et les estimateurs associés sont non corrélés. Si $p$ est la longueur du premier chemin et $q$ celle du deuxième chemin, on a alors pour variance de l'estimateur de Gauss-Markov:

$$\begin{aligned} Var &= \left(\frac{q^2}{(p+q)^2} \cdot p + \frac{p^2}{(p+q)^2} \cdot q\right)\sigma^2 \\ &= \frac{pq}{p+q}\sigma^2 \end{aligned}$$

**Démonstration**

Les deux estimateurs associés ont pour variance $p$ et $q$ respectivement. Comme ils sont non corrélés, leur covariance est nulle. L'estimateur de

Gauss-Markov correspondant est une combinaison linéaire des estimateurs associés à chacun des deux chemins. Sa variance est:

$$Var Z = \sigma^2 \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

où $a$ et $b$ sont les coefficients de la combinaison linéaire. En développant, nous obtenons:

$$Var = \sigma^2(a^2p + b^2q)$$

Cet estimateur étant sans biais, nous avons $a + b = 1$ et sa variance doit être minimale. Nous déterminons donc $a$ et $b$ pour satisfaire ces conditions. Pour ce faire, nous utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On doit alors résoudre le système:

$$\begin{aligned} 2ap + \lambda &= 0 \\ 2bq + \lambda &= 0 \\ a + b &= 1 \end{aligned}$$

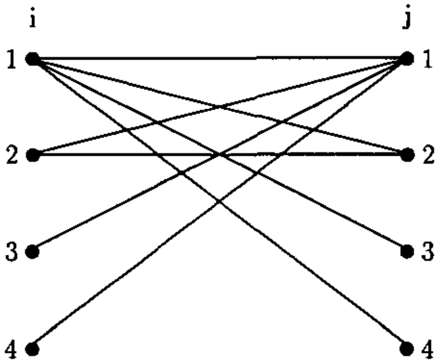
Des deux premières équations on tire $2ap - 2bq = 0$, d'où $a = \frac{bq}{p}$. En remplaçant dans la troisième équation, on trouve $a = \frac{q}{p+q}$ et $b = \frac{p}{p+q}$. Par conséquent, la variance de l'estimateur de Gauss-Markov qui est égale à $\sigma^2(a^2p + b^2q)$ devient:

$$\begin{aligned} Var &= \left(\frac{q^2}{(p+q)^2} \cdot p + \frac{p^2}{(p+q)^2} \cdot q\right)\sigma^2 \\ &= \frac{pq}{p+q}\sigma^2 \qquad CQFD \end{aligned}$$

**Exemple 5.3** Soit le plan $4 \times 4$ suivant:

| | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\alpha_2$ | 1 | 1 | | |
| $\alpha_3$ | 1 | | | |
| $\alpha_4$ | 1 | | | |

et le graphe correspondant:




Pour $\alpha_2 - \alpha_1$ et pour $\beta_2 - \beta_1$, on est dans le cas 3 ci-dessus. Deux chemins disjoints lient les sommets $i_2$ et $i_1$ ainsi que les sommets $j_2$ et $j_1$. Chaque chemin a une longueur égale à 2. On a donc:

$$\begin{aligned} Var(\hat{\alpha_2} - \hat{\alpha_1}) = Var(\hat{\beta_2} - \hat{\beta_1}) &= \frac{pq}{p+q}\sigma^2 \\ &= \frac{2 \cdot 2}{2+2}\sigma^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Pour $\alpha_4 - \alpha_3$ et pour $\beta_4 - \beta_3$, on est dans le cas 1 ci-dessus. Un seul chemin élémentaire relie $i_4$ à $i_3$ et $j_4$ à $j_3$. La variance de l'estimateur de Gauss-Markov est égale à $\sigma^2$ multiplié par la longueur du chemin.

Par conséquent,

$$Var(\hat{\alpha_4} - \hat{\alpha_3}) = Var(\hat{\beta_4} - \hat{\beta_3}) = 2\sigma^2$$

Pour les autres contrastes élémentaires, on est dans le cas 2 ci-dessus. Ici toutes les variances des estimateurs de Gauss-Markov sont égales à $\frac{7}{4}\sigma^2$.

Nous avons alors la trace de **V** suivante:

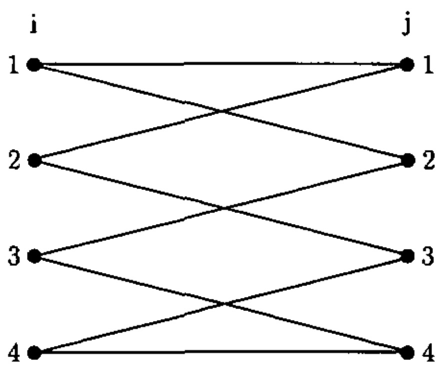
$$trace\, \sigma^2\mathbf{V} = \sigma^2(8 \cdot \frac{7}{4} + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2) = 20\sigma^2$$

Ce plan est $A$optimal car tous les contrastes élémentaires sont **directement** estimables (cf Théorème 3.1).

**Exemple 5.4** Soit le plan $4 \times 4$ suivant:

| | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha_1$ | 1 | 1 | | |
| $\alpha_2$ | 1 | | 1 | |
| $\alpha_3$ | | 1 | | 1 |
| $\alpha_4$ | | | 1 | 1 |

et le graphe correspondant:




Le graphe est un cycle de longueur 8. Pour tous les contrastes élémentaires, on est dans le cas 3.

Pour 8 contrastes, on a un chemin de longueur 2, l'autre de longueur 6.

Pour les 4 autres contrastes, les deux chemins sont de longueur 4.

Par conséquent,

$$trace\ \sigma^2\mathbf{V} = \frac{8 \cdot 12 + 4 \cdot 16}{8}\sigma^2 = \frac{96 + 64}{8}\sigma^2 = 20\sigma^2$$

Ce plan est $A$-optimal car le graphe correspondant est un cycle de longueur 8 (cf Théorème 3.2).

## 5.4 Plans minimaux connexes à classification triple

Cette section commence avec des plans minimaux connexes particuliers, répondant à certaines contraintes. Puis nous lèverons ces contraintes et traiterons des plans minimaux connexes généraux.

### 5.4.1 Cas particulier

Soient des plans $a \times b \times c$ donnés par leurs matrices d'incidence $\mathbf{N_k}$, $k = 1, ..., c$, de dimension $a \times b$. Nous considérons ici les plans qui respectent la contrainte

$$\sum_{k=1}^{c} n_{ijk} = 1$$

pour tout $i$ et tout $j$ ($i = 1, 2, \ldots, a$ et $j = 1, 2, \ldots, b$). On peut représenter de tels plans par une matrice $\mathbf{M}$ de dimension $a \times b$, où $m_{ij} \in \{1, 2, \ldots, c\}$, avec

$$m_{ij} = k \longleftrightarrow n_{ijk} = 1$$

On associe à chacun de ces plans un graphe orienté $G = [V, E]$, où

$$\begin{aligned} V &= \{1, 2, \ldots, c\} \text{ et} \\ E &= \{(m_{ij}, m_{i1})_j \mid 1 \leq i \leq a, 2 \leq j \leq b\} \end{aligned}$$

L'indice de colonne $j$ du sommet initial $m_{ij} = k$ définit l'étiquette de l'arc; cette étiquette est notée par l'indice $j$.

Maintenant nous allons associer un vecteur à chaque cycle $\sigma$ appartenant au graphe $G$. Pour ce faire nous définissons une fonction

$$f(\sigma) = \sum_{e_j \in E(\sigma^+)} u^j - \sum_{e_j \in E(\sigma^-)} u^j$$

où $u^j$ est le $j$-ème vecteur unité de $R^b$ et où $e_j$ est un arc possédant l'étiquette $j$.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour vérifier la connexité d'un plan $a \times b \times c$ avec la contrainte $\sum n_{ijk} = 1$.

**Théorème 5.2** *Considérons un plan à classification triple défini par une matrice* $\mathbf{M}$ *de dimension* $a \times b$ *avec* $m_{ij} \in \{1, 2, \ldots, c\}$. *Ce plan est connexe si et seulement si le graphe orienté associé* $G$ *est connexe et qu'il contient* $b - 1$ *cycles dont les vecteurs sont indépendants.*

Pour la démonstration, cf Butz (1982).

Nous pouvons dès lors appliquer ce théorème à des plans pour lesquels nous voulons vérifier s'ils sont minimaux connexes.

**Exemple 5.5** Soit le plan $2 \times 2 \times 2$ défini par ses matrices d'incidence $\mathbf{N_1}$ et $\mathbf{N_2}$:

$$\mathbf{N_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{N_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $\mathbf{M}$ est alors égale à:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Le graphe $G = [V, E]$, où

$$\begin{aligned} V &= \{1,2\} \text{ et} \\ E &= \{(2,1)_2, (1,2)_2\} \end{aligned}$$

est représenté par la figure 5.1. Les deux cycles que l'on peut former dans $G$

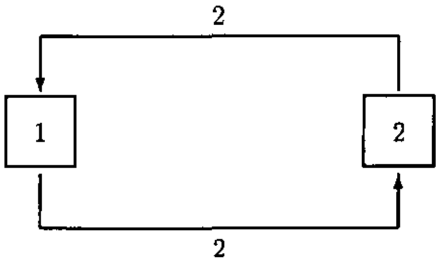



Figure 5.1: Graphe $G$ de l'exemple 5.5

sont:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= [1, (1,2)_2, 2, (2,1)_2, 1] \text{ et} \\ \sigma_2 &= [2, (2,1)_2, 1, (1,2)_2, 2] \end{aligned}$$

Les deux vecteurs associés à $\sigma_1$ et $\sigma_2$ sont définis de la façon suivante:

$$f(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$f(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs sont linéairement dépendants (puisque identiques). Le plan est donc connexe puisque le graphe $G$ est connexe et qu'il contient $2 - 1 = 1$ cycle. Il est en outre minimal connexe puisqu'il contient $a + b + c - 2 = 2 + 2 + 2 - 2 = 4$ observations.

### 5.4.2 Cas général

Nous pouvons maintenant considérer le cas des plans à classification triple pour lesquels la contrainte $\sum n_{ijk} = 1$ n'est plus posée. Ces plans sont donnés par leurs matrices d'incidence $\mathbf{N_k}$, $k = 1, 2, \ldots, c$, de dimension $a \times b$.

On peut représenter ces plans par une matrice $\mathbf{M}$ de dimension $a \times b$, où $m_{ij}$ est un ensemble d'éléments appartenant à $k = 1, 2, \ldots, c$:

$$m_{ij} = \{k \mid n_{ijk} = 1\},$$

pour tout $i$ et $j$ ($i = 1, 2, \ldots, a$ et $j = 1, 2, \ldots, b$).

On définit ensuite par $J$ l'ensemble de tous les indices $i$ pour lesquels $\sum_{k=1}^{c} n_{i1k} = 0$. On note par $s$ le nombre d'éléments contenus dans cet ensemble $J$ et on classe les indices $i$ par ordre croissant:

$$J = \{i_p \mid p = 1, 2, \ldots, s\}$$

où $i_1 < i_2 < \ldots < i_s$. A l'aide de ces quelques définitions, on construit la matrice $\mathbf{W}$ suivante:

$$w_{ij} = \begin{cases} min\{k \mid k \in m_{ij}\} & \text{si } m_{ij} \neq \emptyset \\ c + p & \text{si } m_{ij} = \emptyset, j = 1, i = i_p \in J \\ 0 & \text{si } m_{ij} = \emptyset, j > 1 \end{cases}$$

A chaque plan $a \times b \times c$, on associe alors le graphe orienté $G$ suivant:

$$\begin{aligned} G &= [V, E] \\ V &= \{1, 2, \ldots, c + s\} \\ E &= E_1 \cup E_2 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(k, k^\star)_0 \mid \exists i, j \textit{ avec } k^\star = w_{ij} < k \in m_{ij}\} \\ E_2 &= \{(k, k^\star)_j \mid \exists i \textit{ avec } k = w_{ij} > 0, k^\star = w_{i1}, j \geq 2\} \end{aligned}$$

Nous avons encore besoin d'un autre graphe pour vérifier la connexité d'un plan $a \times b \times c$. Il s'agit du graphe (non orienté) $G'$ défini de la façon suivante:

$$\begin{aligned} G' &= [V', E'] \\ V' &= \{1, 2, \ldots, b\} \\ E' &= \{\{j, j^\star\} \mid \exists i \; avec \; m_{ij} \neq \emptyset, j > j^\star = min\{l \mid m_{il} \neq \emptyset\}\} \end{aligned}$$

Nous rappelons ici que le nombre de composantes connexes d'un graphe $G$ se note par $c(G)$. Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour vérifier la connexité d'un plan $a \times b \times c$.

**Théorème 5.3** *Considérons un plan à classification triple et les deux graphes $G$ et $G'$. Ce plan est connexe si et seulement si le graphe orienté associé $G$ est connexe et qu'il contient $b - c(G')$ cycles dont les vecteurs sont indépendants.*

Pour la démonstration, cf Butz (1982).

Nous pouvons appliquer ce théorème à des plans pour lesquels nous voulons vérifier s'ils sont minimaux connexes.

**Exemple 5.6** Soit le plan $2 \times 2 \times 2$ donné par ses matrices d'incidence $\mathbf{N_1}$ et $\mathbf{N_2}$:

$$\mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{N_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $\mathbf{M}$ est alors égale à:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \{1,2\} \\ \emptyset & 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons $J = \{2\}$. Par conséquent, $p = s = 1$. Nous construisons la matrice $\mathbf{W}$ avec $w_{21} = c + p = 2 + 1 = 3$:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Le graphe $G = [V, E]$, où

$$\begin{aligned} V &= \{1, 2, 3\} \\ E &= E_1 \cup E_2 \\ E_1 &= \{(2,1)_0\} \\ E_2 &= \{(1,1)_2, (1,3)_2\} \end{aligned}$$

est représenté par la figure 5.2.

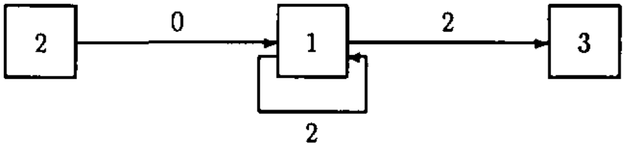



Figure 5.2: Graphe $G$ de l'exemple 5.6

Le graphe $G' = [V', E']$, où

$$\begin{aligned} V' &= \{1, 2\} \\ E' &= \{\{2, 1\}\} \end{aligned}$$

contient $c(G') = 1$ composante connexe.

Le seul cycle que l'on peut former dans $G$ est:

$$\sigma = [1, (1, 1)_2, 1]$$

et le vecteur associé à $\sigma$ est:

$$f(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le plan est donc connexe puisque le graphe orienté $G$ est connexe et qu'il contient $2 - 1 = 1$ cycle. Il est en outre minimal connexe puisqu'il contient $a + b + c - 2 = 2 + 2 + 2 - 2 = 4$ observations.

# CONCLUSION

Vu ma formation d'économiste, ce travail m'a permis d'acquérir de nombreuses connaissances dans un domaine bien particulier de la statistique: les plans d'expériences.

La théorie des plans d'expériences factorielles minimaux connexes, malgré sa spécificité, est très étendue et il est clair qu'à la fin de cette thèse, de nombreuses questions restent en suspens. On peut relever, par exemple, que les modèles mathématiques utilisés dans les différents chapitres sont des modèles sans interactions. Par conséquent, tous les plans d'expériences minimaux connexes avec interactions peuvent être l'objet d'une autre étude.

Dans un autre contexte maintenant, il pourrait être aussi intéressant d'étudier un cas pratique d'application économique des plans minimaux connexes.

On pourrait, de cette façon, élargir cette thèse dans de nombreuses directions. Toutefois, je laisse ces suggestions ouvertes car je fais mien le proverbe suivant qui sera le mot de la fin:

*"Qui trop embrasse mal étreint".*

## REFERENCES

Aeschlimann, J., Bonjour, C. et Stocker, E. (1986). Méthodologie et techniques de plans d'expériences (28ème Cours de perfectionnement de l'Association Vaudoise des Chercheurs en Physique).

Allan, F.E. et Wishart, J. (1930). A method of estimating the yield of a missing plot in field experimental work. J. Agric. Sci. **20**, part 3, 399-406.

Anderson, R.L. (1946). Missing-plot Techniques. Biometrics **2**, 41-47.

Bartlett, M.S. (1937). Some examples of statistical methods of research in agriculture and applied biology. J. Roy. Statist. Soc. Suppl. **4**, 137-183.

Ben-Israel, A. et Greville, T.N.E. (1974). Generalized Inverses: Theory and Applications. Wiley, New York.

Berge, C. (1973). Graphs and Hypergraphs. North Holland, Amsterdam.

Birkes, D., Dodge, Y. et Seely, J. (1976). Spanning sets for estimable contrasts in classification models. Ann. Statist. **4**, 86-107.

Birkes, D. et Dodge, Y. (1986). The number of minimally connected block designs. Comput. Statistics and Data Analysis **4**, 269-275.

Birkes, D. et Dodge, Y. (1991). Optimal $a \times b$ connected designs with $a + b$ observations. Journal of Statistical Planning and Inference **28**, 49-59.

Bjerhammer, A. (1973). Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses. Elsevier, New York.

Bose, R.C. (1947). The design of experiments. Proceedings of the 34th Indian Science Congress (1947), 1-25.

Bose, R.C. (1949). Least square aspects of analysis of variance. Inst. Statist., Mimeo Series 9, Chapel Hill, North Carolina.

Boullion, T.L. et Odell, P.L. (1971). Generalized Inverse Matrices. Wiley, New York.

Box, G.E.P. et Draper, N.R. (1987). Empirical Model-Building and Response Surfaces. John Wiley and Sons. New York.

Brown, L.D., Olkin, I., Sacks, J. et Wynn, H.P. (1985). Jack Carl Kiefer, Collected Papers III, Design of Experiments. Springer-Verlag, New York.

Butz, L. (1982). Connectivity in Multi-factor Designs: a combinatorial Approach. Heldermann Verlag Berlin.

Cochran, W.G. et Cox, G.M. (1957). Experimental Designs. 2ème édition. John Wiley, New York.

Collombier, D. (1984). Error-free Computation in Design of Experiments. Proceedings in Computational Statistics, T. Havranek et al. (eds.). Physica Verlag, Wien.

Collombier, D. (1992). Generally optimal main-effect fractions of $U \times V$ designs with $U + V$ units. Comput. Statistics and Data Analysis **14**, 333-342.

Cornish, E.A. (1940a). The estimation of missing values in incomplete randomized block experiments. Ann. Eug. **10**, 112-118.

Cornish, E.A. (1940b). The estimation of missing values in quasi-factorial designs. Ann. Eug. **10**, 137-143.

Cornish, E.A. (1941). The analysis of quasi-factorial designs with incomplete data: lattice squares. J. Aust. Inst. Agric. Sci. **7**, 19-26.

Cornish, E.A. (1944). The recovery of inter-block information in quasi-factorial designs with incomplete data.2. Lattice squares. Aust. Coun. Sci. Ind. Res. Bull., 175.

De Lury, D.B. (1946). The analysis of latin squares when some observations are missing. J. Am. Statist. Assn. **41**, 370.

Dodge, Y. (1974). Estimability considerations of N-way classification experimental arrangements with missing observations. Ph. D. thesis, Oregon State University, Corvallis.

Dodge, Y. (1985). Analysis of Experiments with Missing Data. John Wiley, New York.

Dodge, Y. (1986). Classification of minimally connected $2^3$ factorial experiments. Comput. Statistics and Data Analysis **4**, 147-158.

Dodge, Y. et Afsarinejad, K. (1985). Minimal $2^n$ connected factorial experiments. Comput. Statistics and Data Analysis **3** (1985), 187-200, North Holland.

Dodge, Y. et Majumdar, D. (1979). An algorithm for finding least square generalized inverses for classification models with arbitrary patterns. J. Statist. Comp. Simul. **9**, 1-17.

Draper, N.R. et Smith, H. (1977). Applied regression analysis. John Wiley, New York.

Eccleston, J.A. et Hedayat, A.S. (1974). On the theory of connected designs: characterisation and optimality. Ann. Statist. **2**, 1238-1255.

Eccleston, J. et Russel, K. (1975). Connectedness and orthogonality in multifactor designs. Biometrika **62**, 341-345.

Federer, W.T., Hedayat, A. et Raktoe, B.L. (1981). Factorial designs. John Wiley, New York.

Fedorov, V.V. (1972). Theory of optimal Experiments. Academic Press, New York.

Hartley, H.O. (1956). A plan for programming analysis of variance for general purpose computers. Biometrics **12**, 110-122.

Hasemann, J.K. et Gaylor, D.W. (1973). An algorithm for non-iterative estimation of multiple missing values for crossed classifications. Technometrics **15**, 631-636.

Healy, M.J.R. et Westmacott, M. (1956). Missing values in experiments analized on automatic computers. Appl. Statist. **5**, 203-206.

Jaech, J.L. (1966). An alternative approach to missing value estimation. Am. Statist. **20** (5), 27-29.

Jarrett, R.G. (1978). The analysis of designed experiments with missing observations. Appl. Statist. **27**, 38-46.

John, P.W.M. (1971). Statistical Design and Analysis of Experiments. The Macmillan Company, New York.

Kiefer, J. (1980). Optimal Design Theory in Relation to Combinatorial Design. Annals of Discrete Mathematics, **6**, 225-241.

Nashed, M.Z. et Rall, L.B. (1976). Annotated bibliography on generalized inverses and applications. In Proceedings of an Advanced Seminar, M.Z. Nashed, Ed., p.771. Academic Press, New York.

Preece, D.A. (1971). Iterative procedures for missing values in experiments. Technometrics **13**, 743-753.

Raghavarao, D. et Federer, W.T. (1975). On connectedness in two-way elimination of heterogeneity designs. Ann. Statist. **3**, 730-735.

Rao, C.R. et Mitra, S.K. (1971). Generalized Inverse of Matrices and Applications. Wiley, New York.

Rubin, D.B. (1972). A non-iterative algorithm for least squares estimation of missing values in any analysis of variance design. Appl. Statist. **21**, 136-141.

Scheffé, H. (1970). The analysis of variance. John Wiley, New York.

Sclove, S.L. (1972). On missing value estimation in experimental design models. Am. Statist. **26** (2), 25-26.

Shah, K.R. et Dodge, Y. (1977). On connectedness of designs. Sankhya **39**, 284.

Shearer, P.R. (1973). Missing data in quantitative designs. Appl. Statist. **22**, 135-140.

Srivastava, J.N. et Anderson, D.A. (1970). Some basic properties of multidimensional partially balanced designs. Ann. Math. Statist. **41**, 1438-1445.

Tocher, K.D. (1952). The design and analysis of block experiments. J. Roy. Statist. Soc. B **14**, 45-100.

Weeks, D.L. et Williams, D.R. (1964). A note on the determination of connectedness in an $N$-way cross classification. Technometrics **6**, 319-324. Errata, Technometrics **7**, 281.

Wilkinson, G.N. (1958a). Estimation of missing values for the analysis of incomplete data. Biometrics **14**, 257-286.

Wilkinson, G.N. (1958b). The analysis of variance and derivation of standard errors for incomplete data. Biometrics **14**, 360-384.

Wilkinson, G.N. (1960). Comparison of missing value procedures. Aust. J. Statist. **2**, 53-65.

Wynn, H.P. (1976). A note on estimability in multi-way layouts. Unpublished manuscript.

Wynn, H.P. (1977). The combinatorial characterization of certain connected $2 \times J \times K$ three way layouts. Comm. Statist. Theor. Meth., A6, 945-953.

Yates, F. (1933). The principles of orthogonality and confounding in replicated experiments. J. Agric. Sci. **23**, part 1, 108-145.

Yates, F. (1933). The analysis of replicated experiments when the field results are incomplete. Emp. J. Exp. Agric. **1**, 129-142.

Yates, F. (1936). Balanced incomplete randomized blocks. Ann. Eug. **7**, part 2, 121-140.

Yates, F. (1936). Incomplete latin squares. J. Agric. Sci. **26**, part 2, 301-315.

Yates, F. (1936). The formation of latin squares for use in field experiments. Emp. J. Exp. Agric. **1**, 235-244.

Yates, F. et Hale, R.W. (1939). The analysis of latin squares when two or more rows, columns or treatments are missing. Suppl. J. Roy. Statist. Soc. **6**, 67-79.

# ANNEXE 1

Considérons un modèle linéaire où le vecteur $\mathbf{Y}$ des aléas observés vérifie

$$E(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} \quad et$$

$$Cov(\mathbf{Y}) = \sigma^2\mathbf{I}$$

avec $\mathbf{X}$ la matrice du plan de dimension $n \times p$ et $\boldsymbol{\theta}$ le vecteur des paramètres inconnus.

Si le modèle est surparamétré, c'est-à-dire si, quel que soit le plan utilisé, $\mathbf{X}$ a ses colonnes linéairement dépendantes par construction, on recourt fréquemment à des contraintes dites contraintes d'identification. Ces contraintes sont en général de la forme

$$\mathbf{H}\theta = \mathbf{0}$$

Considérons un plan connexe. Toute contrainte d'identification $\mathbf{H}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ vérifie $R^p = N(\mathbf{X}) \oplus N(\mathbf{H})$ où $p$ est le nombre de colonnes de $\mathbf{X}$, $N(\mathbf{X})$ désigne le noyau de $\mathbf{X}$ et $\oplus$ la somme directe. Plus précisément $\mathbf{H}$ doit être telle que

1. tout élément du vecteur paramétrique $\boldsymbol{\theta}$ est estimable sous contrainte
2. pour toute fonction paramétrique estimable dans le modèle initial (c'est-à-dire sans contrainte), les deux estimateurs de Gauss-Markov, obtenus dans le modèle initial puis sous contrainte, coïncident.

On a alors le résultat suivant pour tout réel $a \neq 0$:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X} + a\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}$$

est inverse généralisé de $\mathbf{X}'\mathbf{X}$.

**Démonstration**

Soient $\mathbf{X}$ de dimension $n \times p$ et $\mathbf{H}$ telles que $R^p = N(\mathbf{X}) \oplus N(\mathbf{H})$. Notons $\mathbf{M} = \mathbf{X}'\mathbf{X} + a\mathbf{H}'\mathbf{H}$ avec $a$ réel non nul et $\mathbf{D} = diag[\mathbf{X}'\mathbf{X}, a\mathbf{H}'\mathbf{H}]$ (c'est-à-dire matrice diagonale par blocs à blocs diagonaux $\mathbf{X'X}$ et $a\mathbf{H}'\mathbf{H}$).

1. On vérifie que $\mathbf{M}$ est régulière et que

$$\left( \mathbf{I} \,|\, \mathbf{I} \right) \mathbf{D} \left( \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{I}} \right) = \left( \mathbf{I} \,|\, \mathbf{I} \right) \mathbf{D} \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{M}^{-1} \\ \hline \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{M}^{-1} \end{array} \right] \mathbf{D} \left( \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{I}} \right)$$

   où $\mathbf{I}$ désigne la matrice d'identité d'ordre $p$.

2. On montre que

$$R(\mathbf{D}) \cap N(\mathbf{I} \,|\, \mathbf{I}) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{X}v_1 \\ \mathbf{X}'\mathbf{X}v_2 \end{pmatrix} \,|\, v_1, v_2 \in R^p : \mathbf{X}'\mathbf{X}v_1 = -\mathbf{H}'\mathbf{H}v_2 \right\} \quad ,$$

   puis que $R(\mathbf{D}) \cap N(\mathbf{I}|\mathbf{I}) = \mathbf{0}$.

3. On montre alors que

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{M}^{-1} \\ \hline \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{M}^{-1} \end{array} \right]$$

   est inverse généralisé de $\mathbf{D}$. On en déduit que $\mathbf{M}^{-1}$ est inverse généralisé de $\mathbf{X'X}$. □

Ainsi $\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X} + a\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}$ est un projecteur sur $R(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = R(\mathbf{X}')$, l'espace engendré par les lignes de $\mathbf{X}$.

Comme le plan est connexe, on a $R(\mathbf{A}') \subset R(\mathbf{X}')$. Par conséquent

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X} + a\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{A}' = \mathbf{A}'$$

L'expression de la matrice de covariance pour l'estimateur $\hat{\mathbf{\Phi}}$:

$$Cov(\hat{\Phi}) = \mathbf{A}(\mathbf{X'X} + \mathbf{H'H})^{-1}\mathbf{X'X}(\mathbf{X'X} + \mathbf{H'H})^{-1}\mathbf{A'}$$

se simplifie donc en:

$$Cov(\hat{\Phi}) = \mathbf{A}(\mathbf{X'X} + a\mathbf{H'H})^{-1}\mathbf{A'}$$

En posant $a = 1$, on obtient:

$$Cov(\hat{\Phi}) = \mathbf{A}(\mathbf{X'X} + \mathbf{H'H})^{-1}\mathbf{A'}$$

# ANNEXE 2

```
Program AXB(Input,Output);

Uses
    Dos,Crt,Printer;

Type
    T_Vecteur        = Array [1..7] Of Integer;
    T_Plan           = Record
                         V1 : T_Vecteur;
                         V2 : T_Vecteur;
                       End;
    T_Ens_Plans      = Array [1..1000] Of T_Plan;

Var
   P                 : T_Ens_Plans;
   El1,El2           : Array [1..12] Of Integer;
   Nb_Obs,
   Nb_Plans_Inf,
   Num_Plan          : Integer;
   i,j,l,
   Choix             : Integer;
   Comp_Ok,
   Choix_Ok          : Boolean;
   Fich              : Text;
   Categorie         : String[3];

Procedure Plans_2x2;
Begin
  P[1].V1[1]:=1;
  P[1].V2[1]:=1;
  P[1].V1[2]:=1;
  P[1].V2[2]:=2;
  P[1].V1[3]:=2;
  P[1].V2[3]:=1;
  P[2].V1[1]:=1;
  P[2].V2[1]:=1;
  P[2].V1[2]:=1;
  P[2].V2[2]:=2;
  P[2].V1[3]:=2;
  P[2].V2[3]:=2;
  P[3].V1[1]:=1;
  P[3].V2[1]:=1;
  P[3].V1[2]:=2;
  P[3].V2[2]:=1;
```

```
  P[3].V1[3]:=2;
  P[3].V2[3]:=2;
  P[4].V1[1]:=1;
  P[4].V2[1]:=2;
  P[4].V1[2]:=2;
  P[4].V2[2]:=1;
  P[4].V1[3]:=2;
  P[4].V2[3]:=2;
  Nb_Obe:= 3;
  Nb_Plene_Inf:= 0;
  Num_Plan:=4;
End;

Procedure Construction_Obs_Sup;
Begin
  E11[1]:=1;
  E12[1]:=1;
  E11[2]:=2;
  E12[2]:=1;
  E11[3]:=1;
  E12[3]:=2;
  E11[4]:=2;
  E12[4]:=2;
  E11[5]:=3;
  E12[5]:=1;
  E11[6]:=3;
  E12[6]:=2;
  E11[7]:=4;
  E12[7]:=1;
  E11[8]:=4;
  E12[B]:=2;
  E11[9]:=5;
  E12[9]:=1;
  E11[10]:=5;
  E12[10]:=2;
End;

Procedure Ajouter_Obs(L_C,e,j,No,E1,E2:Integer);
Var
   k,l,m: Integer;
   Sauve1,Sauve2: Integer;
Begin
  For k:= 1 To a Do Begin
    P[No].V1[k]:= P[j].V1[k];
    P[No].V2[k]:= P[j].V2[k];
```

```
  End;
  P[No].V1[a+1]:= E1;
  P[No].V2[a+1]:= E2;
  If L_C = 1 Then Begin
    For k:= 1 To a Do Begin
      If P[No].V1[k] >= E1 Then P[No].V1[k]:= P[No].V1[k] + 1;
    End;
  End
  Else Begin
    For k:= 1 To a Do Begin
      If P[No].V2[k] >= E2 Then P[No].V2[k]:= P[No].V2[k] + 1;
    End;
  End;
  k:=1;
  While k <= a Do Begin
    l:= k + 1;
    While l <= a+1 Do Begin
      If P[No].V1[l] < P[No].V1[k] Then Begin
        Sauve1:= P[No].V1[l];
        P[No].V1[l]:= P[No].V1[k];
        P[No].V1[k]:= Sauve1;
        Sauve2:= P[No].V2[l];
        P[No].V2[l]:= P[No].V2[k];
        P[No].V2[k]:= Sauve2;
      End
      Else If P[No].V1[l] = P[No].V1[k] Then Begin
        If P[No].V2[l] < P[No].V2[k] Then Begin
          Sauve2:= P[No].V2[l];
          P[No].V2[l]:= P[No].V2[k];
          P[No].V2[k]:= Sauve2;
        End;
      End;
      l:=l+1;
    End;
    k:=k+1;
  End;
End;

Procedure Comparer(a,b,No:Integer;Var Existe:Boolean);
Var
   k2,k,l : Integer;
   Id : Array [1..10] Of Boolean;
Begin
  For k:= 1 To 10 Do Id[k]:= True;
  Existe:= False;
```

```
  k := a;
  While (k < No) And Not Existe Do Begin
    For l:= 1 To b Do Begin
      If (P[k].V1[l] = P[No].V1[l]) And
         (P[k].V2[l] = P[No].V2[l]) Then Id[l]:=True
      Else Id[l]:= False;
    End;
    If Id[1] And Id[2] And Id[3] And Id[4] And Id[5]
    And Id[6] Then Exists:= True
    Else Existe:=False;
    k:= k+1;
  End;
End;

Procedure Imprimer_Plans(Plan_Debut,Plan_Fin,Nb_Lignes:Integer);
Var
   No_Plan,
   Plan,l : Integer;

Begin
  Writeln(Fich);
  No_Plan := Plan_Debut+1;
  Repeat
    For l:= 1 To Nb_Lignes Do Begin
      For Plan:= 0 To 3 Do Begin
        If (No_Plan+Plan) <= Num_Plan Then Begin
          Write(Fich,' ':5,P[No_Plan+Plan].V1[l],'  ',
          P[No_Plan+Plan].V2[l]);
        End;
      End;
      Writeln(Fich);
    End;
    Writeln(Fich);
    Inc(No_Plan,4);
  Until No_Plan > Plan_Fin;
End;

Procedure Plans_2x3;
Var
   i,j: Integer;
Begin
  Plans_2x2;
  Construction_Obs_Sup;
  Nb_Obs := 4;
  Nb_Plans_Inf:= 4;
```

```
  Num_Plan:=Nb_Plans_Inf;
  For j:= 1 To 4 Do Begin
    For i:= 1 To 6 Do Begin
      Num_Plan:=Num_Plan+1;
      Ajouter_Obs(1,3,j,Num_Plan,El1[i],El2[i]);
      Comparer(5,4,Num_Plan,Comp_Ok);
      If Comp_Ok Then Num_Plan:=Num_Plan-1;
    End;
  End;
End;

Procedure Plans_2x4;
Var
   i,j:Integer;
Begin
  Plans_2x3;
  Nb_Obs := 5;
  Nb_Plans_Inf:= 16;
  Num_Plan:=Nb_Plans_Inf;
  For j:= 5 To 16 Do Begin
    For i:= 1 To 8 Do Begin
      Num_Plan:=Num_Plan+1;
      Ajouter_Obs(1,4,j,Num_Plan,El1[i],El2[i]);
      Comparer(17,5,Num_Plan,Comp_Ok);
      If Comp_Ok Then Num_Plan:=Num_Plan-1;
    End;
  End;
End;

Procedure Plans_2x5;
Var
   i,j:Integer;
Begin
  Plans_2x4;
  Nb_Obs := 6;
  Nb_Plans_Inf:= 48;
  Num_Plan:=Nb_Plans_Inf;
  For j:= 17 To 48 Do Begin
    For i:= 1 To 10 Do Begin
      Num_Plan:=Num_Plan+1;
      Ajouter_Obs(1,5,j,Num_Plan,El1[i],El2[i]);
      Comparer(49,6,Num_Plan,Comp_Ok);
      If Comp_Ok Then Num_Plan:=Num_Plan-1;
    End;
  End;
```

```
End;

Procedure Plans_3x3;
Var
   i,j:Integer;
Begin
  Plans_2x3;
  El1[7]:=1;
  El2[7]:=3;
  El1[8]:=2;
  El2[8]:=3;
  El1[9]:=3;
  El2[9]:=3;
  Nb_Obs := 5;
  Nb_Plans_Inf:= 16;
  Num_Plan:=Nb_Plans_Inf;
  For j:= 5 To 16 Do Begin
    For i:= 1 To 9 Do Begin
      Num_Plan:=Num_Plan+1;
      Ajouter_Obs(2,4,j,Num_Plan,El1[i],El2[i]);
      Comparer(17,5,Num_Plan,Comp_Ok);
      If Comp_Ok Then Num_Plan:=Num_Plan-1;
    End;
  End;
End;

Procedure Plans_3x4;
Var
   i,j:Integer;
Begin
  Plans_3x3;
  El1[10]:=4;
  El2[10]:=1;
  El1[11]:=4;
  El2[11]:=2;
  El1[12]:=4;
  El2[12]:=3;
  Nb_Obs := 6;
  Nb_Plans_Inf:= 97;
  Num_Plan:=Nb_Plans_Inf;
  For j:= 17 To 97 Do Begin
    For i:= 1 To 12 Do Begin
      Num_Plan:=Num_Plan+1;
      Ajouter_Obs(1,5,j,Num_Plan,El1[i],El2[i]);
      Comparer(98,6,Num_Plan,Comp_Ok);
```

```
      If Comp_Ok Then Num_Plan:=Num_Plan-1;
    End;
  End;
End;

Begin (* AXB *)
  Window(0,0,80,25);
  TextColor(15);
  Clrscr;
  Writeln(' DETERMINATION DES PLANS MINIMAUX CONNEXES');
  Writeln;
  Writeln(' Plans minimaux connexes 2x2   -> 1');
  Writeln(' Plans minimaux connexes 2x3   -> 2');
  Writeln(' Plans minimaux connexes 2x4   -> 3');
  Writeln(' Plans minimaux connexes 2x5   -> 4');
  Writeln(' Plans minimaux connexes 3x3   -> 5');
  Writeln(' Plans minimaux connexes 3x4   -> 6');
  Writeln;
  Repeat
    Write(' Votre choix : (1-6) ');
    {$I-}
    Readln(Choix);
    {$I+}
    Choix_Ok:= (IoResult=0);
  Until Choix_Ok And (Choix In [1..6]);
  Case Choix Of 1: Categorie := '2X2';
                2: Categorie := '2X3';
                3: Categorie := '2X4';
                4: Categorie := '2X4';
                5: Categorie := '3X3';
                6: Categorie := '3X4';
  End;
  Assign(Fich,Categorie+'.RES');
  Rewrite(Fich);
  Writeln(Fich,' ':5,'PLANS MINIMAUX CONNEXES ',Categorie);
  Case Choix Of 1: Plans_2x2;
                2: Plans_2x3;
                3: Plans_2x4;
                4: Plans_2x5;
                5: Plans_3x3;
                6: Plans_3x4;
  End;
  Writeln(Fich);
  Writeln(Fich,' ':5,'NOMBRE DE PLANS : ',Num_Plan-Nb_Plans_Inf);
  Writeln(Fich);
```

```
  Imprimer_Plane(Nb_Plans_Inf,Num_Plan,Nb_Obs);
  Close(Fich);
  Writeln;
  Writeln(' Les plans se trouvent dane le fichier ',Categorie,'.RES');
End.
```

PLANS MINIMAUX CONNEXES 2X3

NOMBRE DE PLANS : 12

```
1 1     1 1     1 2     1 1
2 1     1 2     2 1     1 2
2 2     2 1     2 2     2 2
3 1     3 1     3 1     3 1

1 1     1 1     1 2     1 1
1 2     2 1     2 1     1 2
2 1     2 2     2 2     2 2
3 2     3 2     3 2     3 2

1 1     1 2     1 1     1 2
2 1     2 1     2 2     2 2
3 1     3 1     3 1     3 1
3 2     3 2     3 2     3 2
```

# ANNEXE 3

```
Program AXBXC(Input,Output);

Uses
    Dos,Crt,Printer;

Type
    T_Vecteur       = Array [1..7] Of Integer;
    T_Plan          = Record
                         V1 : T_Vecteur;
                         V2 : T_Vecteur;
                         V3 : T_Vecteur;
                      End;
    T_Ens_Plans     = Array [1..1000] Of T_Plan;

Var
   P                : T_Ens_Plans;
   El1,El2,El3      : Array [1..18] Of Integer;
   Nb_Plans_Inf,
   Nb_Obs,
   Num_Plan         : Integer;
   Comp_Ok,
   Choix_Ok         : Boolean;
   i,j,l,
   Choix            : Integer;
   Categorie        : String[5];
   Fich             : Text;

Procedure Plans_2x2;
Begin
  P[1].V1[1]:=1;
  P[1].V2[1]:=1;
  P[1].V1[2]:=1;
  P[1].V2[2]:=2;
  P[1].V1[3]:=2;
  P[1].V2[3]:=1;
  P[2].V1[1]:=1;
  P[2].V2[1]:=1;
  P[2].V1[2]:=1;
  P[2].V2[2]:=2;
  P[2].V1[3]:=2;
  P[2].V2[3]:=2;
  P[3].V1[1]:=1;
  P[3].V2[1]:=1;
  P[3].V1[2]:=2;
```

```
  P[3].V2[2]:=1;
  P[3].V1[3]:=2;
  P[3].V2[3]:=2;
  P[4].V1[1]:=1;
  P[4].V2[1]:=2;
  P[4].V1[2]:=2;
  P[4].V2[2]:=1;
  P[4].V1[3]:=2;
  P[4].V2[3]:=2;
End;

Procedure Construction_Obs_Sup;
Begin
  El1[1]:=1;
  El2[1]:=1;
  El1[2]:=2;
  El2[2]:=1;
  El1[3]:=1;
  El2[3]:=2;
  El1[4]:=2;
  El2[4]:=2;
  El1[5]:=3;
  El2[5]:=1;
  El1[6]:=3;
  El2[6]:=2;
  El1[7]:=4;
  El2[7]:=1;
  El1[8]:=4;
  El2[8]:=2;
  El1[9]:=5;
  El2[9]:=1;
  El1[10]:=5;
  El2[10]:=2;
End;

Procedure Ajouter_Obs_3(Dim,a,j,No,E1,E2,E3:Integer);
Var
   k,l,m: Integer;
   Seuve1,Sauve2,Seuve3: Integer;
Begin
  For k:= 1 To a Do Begin
    P[No].V1[k]:= P[j].V1[k];
    P[No].V2[k]:= P[j].V2[k];
    P[No].V3[k]:= P[j].V3[k];
  End;
```

```
P[No].V1[a+1]:= E1;
P[No].V2[a+1]:= E2;
P[No].V3[a+1]:= E3;
If Dim = 1 Then Begin
  For k:= 1 To a Do Begin
    If P[No].V1[k] >= E1 Then P[No].V1[k]:= P[No].V1[k] + 1;
  End;
End
Else If Dim = 2 Then Begin
  For k:= 1 To a Do Begin
    If P[No].V2[k] >= E2 Then P[No].V2[k]:= P[No].V2[k] + 1;
  End;
End
Else If Dim = 3 Then Begin
  For k:= 1 To a Do Begin
    If P[No].V3[k] >= E3 Then P[No].V3[k]:= P[No].V3[k] + 1;
  End;
End;
k:=1;
While k <= a Do Begin
  l:= k + 1;
  While l <= a+1 Do Begin
    If P[No].V1[l] < P[No].V1[k] Then Begin
      Sauve1:= P[No].V1[l];
      P[No].V1[l]:= P[No].V1[k];
      P[No].V1[k]:= Sauve1;
      Sauve2:= P[No].V2[l];
      P[No].V2[l]:= P[No].V2[k];
      P[No].V2[k]:= Sauve2;
      Sauve3:= P[No].V3[l];
      P[No].V3[l]:= P[No].V3[k];
      P[No].V3[k]:= Sauve3;
    End
    Else If P[No].V1[l] = P[No].V1[k] Then Begin
      If P[No].V2[l] < P[No].V2[k] Then Begin
        Sauve2:= P[No].V2[l];
        P[No].V2[l]:= P[No].V2[k];
        P[No].V2[k]:= Sauve2;
        Sauve3:= P[No].V3[l];
        P[No].V3[l]:= P[No].V3[k];
        P[No].V3[k]:= Sauve3;
      End
      Else If P[No].V2[l] = P[No].V2[k] Then Begin
        If P[No].V3[l] < P[No].V3[k] Then Begin
          Sauve3:= P[No].V3[l];
```

```
            P[No].V3[l]:= P[No].V3[k];
            P[No].V3[k]:= Sauve3;
          End;
        End;
      End;
      l:=l+1;
    End;
    k:=k+1;
  End;
End;

Procedure Comparer_3(a,b,No:Integer;Var Existe:Boolean);
Var
   k2,k,l : Integer;
   Id : Array [1..10] Of Boolean;

Begin
  For k:= 1 To 10 Do Id[k]:= True;
  Existe:= False;
  k := a;
  While (k < No) And Not Existe Do Begin
    For l:= 1 To b Do Begin
      If (P[k].V1[l] = P[No].V1[l]) And
         (P[k].V2[l] = P[No].V2[l]) And
         (P[k].V3[l] = P[No].V3[l]) Then Id[l]:=True
      Else Id[l]:= False;
    End;
    If Id[1] And Id[2] And Id[3] And Id[4] And Id[5]
    And Id[6] Then Existe:= True
    Else Existe:=False;
    k:= k+1;
  End;
End;

Procedure Plans_2x2x1;
Begin
  Plans_2x2;
  P[1].V3[1]:=1;
  P[1].V3[2]:=1;
  P[1].V3[3]:=1;
  P[2].V3[1]:=1;
  P[2].V3[2]:=1;
  P[2].V3[3]:=1;
  P[3].V3[1]:=1;
  P[3].V3[2]:=1;
```

```
  P[3].V3[3]:=1;
  P[4].V3[1]:=1;
  P[4].V3[2]:=1;
  P[4].V3[3]:=1;
End;

Procedure Dbs_Sup_2x2x1;
Begin
  Construction_Obs_Sup;
  E13[1]:=1;
  E13[2]:=1;
  E13[3]:=1;
  E13[4]:=1;
  E11[5]:=1;
  E12[5]:=1;
  E13[5]:=2;
  E11[6]:=2;
  E12[6]:=1;
  E13[6]:=2;
  E11[7]:=1;
  E12[7]:=2;
  E13[7]:=2;
  E11[8]:=2;
  E12[B]:=2;
  E13[8]:=2;
End;

Procedure Obs_Sup_2x1x2;
Var
   E1       : Integer;
   i,j,k    : Integer;

Begin
   For i:= 1 To 4 Do Begin
     For j:= 1 To 3 Do Begin
       E1  := P[i].V3[j];
       P[i].V3[j]  := P[i].V2[j];
       P[i].V2[j]  := E1;
     End;
   End;
   For i:= 1 To B Do Begin
     E1  := E13[i];
     E13[i]:=E12[i];
     E12[i]:= E1;
   End;
```

```
End;

Procedure Dbs_Sup_1x2x2;
Var
   E1      : Integer;
   i,j     : Integer;

Begin
   For i:= 1 To 4 Do Begin
     For j:= 1 To 3 Do Begin
       E1 := P[i].V2[j];
       P[i].V2[j] := P[i].V1[j];
       P[i].V1[j] := E1;
     End;
   End;
   For i:= 1 To B Do Begin
     E1 := E12[i];
     E12[i]:=E11[i];
     E11[i]:= E1;
   End;
End;

Procedure Rajouter_2_Plans;
Begin
  P[61].V1[1] := 1;
  P[61].V1[2] := 2;
  P[61].V1[3] := 1;
  P[61].V1[4] := 2;
  P[61].V2[1] := 1;
  P[61].V2[2] := 2;
  P[61].V2[3] := 2;
  P[61].V2[4] := 1;
  P[61].V3[1] := 1;
  P[61].V3[2] := 1;
  P[61].V3[3] := 2;
  P[61].V3[4] := 2;
  P[62].V1[1] := 1;
  P[62].V1[2] := 2;
  P[62].V1[3] := 1;
  P[62].V1[4] := 2;
  P[62].V2[1] := 2;
  P[62].V2[2] := 1;
  P[62].V2[3] := 1;
  P[62].V2[4] := 2;
  P[62].V3[1] := 1;
```

```
  P[62].V3[2] := 1;
  P[62].V3[3] := 2;
  P[62].V3[4] := 2;
End;

Procedure Imprimer_Plans(Plan_Debut,Plan_Fin,Nb_Lignes:Integer);
Var
   No_Plan,
   Plan,l : Integer;

Begin
  Writeln(Fich);
  No_Plan := Plan_Debut+1;
  Repeat
    For l:= 1 To Nb_Lignes Do Begin
      For Plan:= 0 To 3 Do Begin
        If (No_Plan+Plan) <= Num_Plan Then Begin
          Write(Fich,' ':5,P[No_Plan+Plan].V1[l],'  ',
          P[No_Plan+Plan].V2[l],
          '  ',P[No_Plan+Plan].V3[l]);
        End;
      End;
      Writeln(Ficb);
    End;
    Writeln(Fich);
    Inc(No_Plan,4);
  Until No_Plan > Plan_Fin;
End;

Procedure Plans_2x2x2;
Var
   i,j: Integer;

Begin
  Plans_2x2x1;
  Nb_Plans_Inf := 4;
  Num_Plan := Nb_Plans_Inf;
  Nb_Obs := 4;
  Obs_Sup_2x2x1;
  For j:= 1 To 4 Do Begin
    For i:= 1 To B Do Begin
      Num_Plan:=Num_Plan+1;
      Ajouter_Obs_3(3,3,j,Num_Plan,El1[i],El2[i],El3[i]);
      Comparer_3(5,4,Num_Plan,Comp_Ok);
      If Comp_Ok Then Num_Plan:=Num_Plan-1;
```

```
    End;
  End;
  Obs_Sup_2x1x2;
  For j:= 1 To 4 Do Begin
    For i:= 1 To 8 Do Begin
      Num_Plan:=Num_Plan+1;
      Ajouter_Obs_3(2,3,j,Num_Plan,El1[i],El2[i],El3[i]);
      Comparer_3(5,4,Num_Plan,Comp_Ok);
      If Comp_Ok Then Num_Plan:=Num_Plan-1;
    End;
  End;
  Obs_Sup_1x2x2;
  For j:= 1 To 4 Do Begin
    For i:= 1 To 8 Do Begin
      Num_Plan:=Num_Plan+1;
      Ajouter_Obs_3(1,3,j,Num_Plan,El1[i],El2[i],El3[i]);
      Comparer_3(5,4,Num_Plan,Comp_Ok);
      If Comp_Ok Then Num_Plan:=Num_Plan-1;
    End;
  End;
  Rajouter_2_Plans;
  Inc(Num_Plan,2);
End;

Procedure Obs_Sup_2x2x3;
Begin
  El1[9]:=1;
  El2[9]:=1;
  El3[9]:=3;
  El1[10]:=2;
  El2[10]:=1;
  El3[10]:=3;
  El1[11]:=1;
  El2[11]:=2;
  El3[11]:=3;
  El1[12]:=2;
  El2[12]:=2;
  El3[12]:=3;
End;

Procedure Plans_2x2x3;
Var
   i,j:Integer;

Begin (* Plans_2x2x3 *)
```

```
  Plans_2x2x2;
  Nb_Plans_Inf:= 62;
  Num_Plan:=Nb_Plans_Inf;
  Nb_Obs := 5;
  Obs_Sup_2x2x3;
  For j:= 5 To 62 Do Begin
    For i:= 1 To 12 Do Begin
      Num_Plan:=Num_Plan+1;
      Ajouter_Obs_3(3,4,j,Num_Plan,E11[i],E12[i],E13[i]);
      Comparer_3(63,5,Num_Plan,Comp_Ok);
      If Comp_Ok Then Num_Plan:=Num_Plan-1;
    End;
  End;
End;

Begin (* AXBXC *)
  Window(0,0,80,25);
  TextColor(15);
  Clrscr;
  Writeln(' DETERMINATION DES PLANS MINIMAUX CONNEXES');
  Writeln;
  Writeln(' Plans minimaux connexes 2x2x2 -> 1');
  Writeln(' Plans minimaux connexes 2x2x3 -> 2');
  Writeln;
  Repeat
    Write(' Votre choix : (1-2) ');
    {$I-}
    Readln(Choix);
    {$I+}
    Choix_Ok:= (IoResult=0);
  Until Choix_Ok And (Choix In [1..3]);
  Writeln;
  Writeln(' Procedure en cours...');
  Case Choix Of 1: Categorie := '2X2X2';
                2: Categorie := '2X2X3';
  End;
  Assign(Fich,Categorie+'.RES');
  Rewrite(Fich);
  Writeln(Fich,' ':5,'PLANS MINIMAUX CONNEXES ',Categorie);
  Case Choix Of 1: Plans_2x2x2;
                2: Plans_2x2x3;
  End;
  Writeln(Fich);
  Writeln(Fich,' ':5,'NOMBRE DE PLANS : ',Num_Plan-Nb_Plans_Inf);
  Writeln(Fich);
```

```
  Imprimer_Plans(Nb_Plans_Inf,Num_Plan,Nb_Obs);
  Close(Fich);
  Writeln;
  Writeln(' Les plans se trouvent dans le fichier ',Categorie,'.RES');
End.
```

PLANS MINIMAUX CONNEXES 2X2X2

NOMBRE DE PLANS : 58

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |