

## **CALCUL ET RAISONNEMENT CHEZ LESNIEWSKI**

**Denis MIÉVILLE**

Le but de la logique est purement et simplement l'investissement de la théorie de la logique et pas du tout la construction d'un calcul aidant à tirer des inférences. Ces deux propos sont incompatibles, parce que le système requis pour l'investigation logique devrait être aussi analytique que possible, brisant les inférences en un plus grand nombre possible d'étapes, et les exhibant sous les catégories les plus générales possibles, alors qu'un calcul chercherait au contraire à réduire le plus possible le nombre des étapes et à spécialiser les symboles de façon à les adapter à des sortes spéciales d'inférence (Peirce: 4.373).

### **Préambule**

Depuis plusieurs années, je conduis des recherches dans deux directions. Je m'intéresse d'une part au développement d'une logique naturelle, et d'autre part, à l'élaboration de structures logiques plus complexes et subtiles que celle sur laquelle s'est fondée l'exposition de la logique mathématique classique. Bien que l'objet d'étude de chacune de ces recherches est différent, elles sont toutes deux motivées par le même intérêt qui consiste à cerner toujours davantage les mécanismes d'une pensée logique mise en oeuvre dans le processus d'une démarche raisonnée. Par ailleurs, ces deux travaux se nourrissent, d'une certaine manière, l'un de l'autre dans la mesure où ils contribuent à établir entre eux une frontière fluente. Enfin, l'une et l'autre recherches s'appuient sur des travaux de S. Lesniewski [1886-1939].

Ce savant polonais a su à la perfection privilégier l'étude de la logique dans le sens d'une «investigation aussi analytique que possible, brisant les inférences en un plus grand nombre possible d'étapes, et les exhibant sous les catégories les plus générales possibles» pour reprendre les termes même de Peirce. Cependant, Lesniewski n'a pas négligé ni méprisé la construction d'un calcul lorsque celui-ci permettait d'accéder à des résultats qui n'étaient pas liés directement à l'analyse et l'exposé des inférences.

Dans la suite de mon propos j'esquisserai les deux dimensions complémentaires «calcul» et «raisonnement» qui sont inscrites dans l'oeuvre logique de Lesniewski, en insistant sur l'originalité de chacune des approches et en mettant en évidence l'actualité de sa manière d'appréhender la logique.

### Quelques remarques liminaires

Lorsqu'on s'intéresse à l'étude des articulations logiques et à la mise en évidence de nouvelles inférences qui interviennent dans une démarche raisonnée, on est immédiatement confronté à plusieurs questions:

- Comment reconnaître ces inférences?
- Quels sont les opérateurs logiques qui y sont liés?
- Quelle en est la liste?
- Dans quel système les représenter?

Les réponses à ces questions ne sont pas simples. Je m'aventurerai cependant à affirmer ce qui suit:

Nous ne connaissons pas la liste exhaustive des opérateurs logiques qui interviennent dans le déroulement d'une démarche raisonnée; nous ne saurions donc connaître la liste des inférences logiques qui leur sont associées.

Une manière de mettre en évidence de nouvelles entités logiques consiste à analyser des énigmes qui ne trouvent pas de solution dans le paradigme de la logique classique contemporaine, à définir un nouvel opérateur, si cela est possible, contribuant à

la résolution du problème et à montrer que, sans ladite solution, l'énigme ne saurait être déchiffrée. Dans cette perspective, la logique naturelle s'avère être un outil précieux dans la mesure où elle concourt à donner des équivalents formels aux expressions et raisonnements intuitifs. La quête de nouvelles entités logiques n'est donc que progressive et jamais achevée.

Ces énigmes sont nombreuses et ne cessent de nourrir l'investigation de la théorie logique. A titre d'exemple, mentionnons deux problèmes.

a) Le premier est lié à une inférence valide qu'il n'est pas possible d'exposer comme telle dans la logique classique:

*Tout cheval est un animal  
donc  
toute tête de cheval est une tête d'animal.*

Pour obvier à cette difficulté, il faut modifier de manière fondamentale la conception classique de la sémantique et lui adjoindre une perspective collective ainsi que son corrélat syntaxique.

b) Le deuxième problème est lié à la loi d'obversion qui consacre une absence de distinction entre deux types de négation:

A universal-affirmative proposition is convertible into a universal-negative, and vice versa by negation of the predicate. [...]  
A particular-affirmative proposition is convertible into a particular-negative, and vice versa by negation of the predicate. (Boole 1965: 29; 1ère éd. 1847).

Alexander Bain [1818-1903] justifiait cette loi ainsi:

D'après le principe de la relativité, toute proposition a deux caractères, deux aspects. Il y a toujours quelque chose à nier, quand il y a quelque chose à affirmer. Quiconque est sage n'est pas fou. Nous devons accepter les deux propositions ou les repousser l'une et l'autre. De l'une à l'autre il n'y a pas de progrès, d'addition dans la connaissance. Nous ne faisons qu'une chose, compléter l'expression de notre pensée qui, en général, est elliptique et incomplète, en raison du fait corrélatif (Bain 1875: 161).

Cet aveu d'allégence à la loi d'obversion ne doit pas occulter les difficultés qu'elle pose! En effet, si j'accepte volontiers que, quel que soit l'objet de pensée  $x$ ,

« $x$  est sage» implique « $x$  n'est pas fou»,

j'ai quelque peine à admettre sans autre forme de procès l'implication inverse, à savoir, que quel que soit l'objet de pensée  $x$ ,

« $x$  n'est pas fou» implique « $x$  est sage».

En effet, si les deux propositions suivantes sont valides ensemble sur le domaine des philosophes:

- a) Aristote n'est pas fou
- b) Aristote est sage

les deux propositions ci-après ne sont ni valides ni non valides ensemble sur le domaine des nombres:

- a) trois n'est pas fou
- b) trois est sage.

Ne pas distinguer «ne pas être fou» de «être non-fou» pose donc problème. Cette loi impose des contraintes qui ne sont pas conformes aux activités naturelles de la pensée logique qui s'expriment discursivement au travers du jeu des propriétés duales et de la négation qui les lie de manière corrélatrice. La résolution de ce problème nécessite la définition d'un nouvel opérateur de négation de la catégorie syntaxico-sémantique formateur de propriété à un argument de la catégorie des propriétés (Miéville 1991).

Si l'on partage cette méthodologie que je viens juste d'esquisser et d'illustrer dans les deux exemples précédents, nous sommes en présence d'un choix. En effet, la mise en évidence de chaque entité logique nouvelle relative à une structure logique qui ne la contient pas pose le problème de sa représentation et de sa signification au sein d'un nouveau système. Celui-

ci peut être construit en tous les cas de deux manières différentes.

a) Construire une expansion de la structure logique précédente en y intégrant axiomatiquement la signification logique de la nouvelle entité logique et définir les règles d'inférence qui y sont liées. Cette manière d'agir nécessite une étude métalogue afin de contrôler la non-contradiction de cette expansion, sa complétude et pose le problème de l'indépendance de la nouvelle signification introduite. Cette voie est répétitive: à chaque expansion nouvelle correspond une nouvelle enquête métalogue.

b) Une alternative consiste à se doter d'un système développemental muni d'une véritable règle d'inférence définitoire préservant la non-contradiction et permettant d'introduire des thèses-définitions dans le système, thèses qui contiennent la signification de nouveaux opérateurs. Nous disposerions ainsi d'un moyen d'étendre progressivement un système logique, et cela avec la garantie d'un développement en toute sûreté, à partir d'un système initial modeste.

C'est cette dernière voie que Lesniewski a choisie. Partageant pleinement les vues de Peirce, il élabore une théorie logique qui permet effectivement de développer progressivement des structures logiques bien plus complexes et subtiles que celle sur laquelle s'est fondée l'exposition de la logique classique.

### **Une caractérisation de la théorie logique de S. Lesniewski**

A l'aube de ce siècle, S. Lesniewski n'a pas directement participé au très vaste courant de pensée logique que Russell, notamment, a fédéré. Il était donc plus apte à poser un regard neuf et critique sur ce qui s'est alors construit que ceux qui ont été aspirés par ce courant. Il était davantage perméable à des perspectives logiques plus généreuses que celles qui ont participé aux fondements des mathématiques. Ne trouvant pas dans la théorie logique classique des propositions et des prédicats du premier ordre ce qu'il y cherche, il va développer de nouvelles théories permettant de «briser les inférences en un plus grand

nombre possible d'étapes, et de les exhiber sous les catégories les plus générales possibles». Pour y parvenir, Lesniewski va concevoir deux familles de systèmes: la protothétique et l'ontologie (Miéville 1984). Celles-ci se caractérisent par l'expression d'une base axiomatique extrêmement modeste en termes de catégories syntaxico-sémantiques; en fait, deux catégories suffisent, celle des propositions  $S$  et celle des noms  $N$ . Dans la protothétique, la signification primitive d'un seul foncteur constant est proposée de manière axiomatique: il s'agit de la biconditionnelle,  $\equiv$ , qui appartient à la catégorie des foncteurs formateur de proposition à deux arguments propositionnels,  $S/SS$ . Ce choix s'explique aisément dès lors que l'on considère que toute définition établit une relation d'équivalence entre un *definiens* et un *definiendum* et que ladite relation est validée à l'aide d'un calcul fondé sur l'opérateur de la biconditionnelle. Quant à l'ontologie, elle peut être fondée sur l'unique foncteur de la catégorie formatrice de proposition à deux arguments nominaux, l'épsilon de Lesniewski,  $\epsilon$ , qu'il ne faut pas confondre avec le symbole d'appartenance de la théorie des ensembles. Ce foncteur primitif, inscrit au sein de la proposition singulière  $a \epsilon b$ , qui peut être interprété de la manière suivante:

$a \epsilon b$ , le nom  $a$  dénote l'objet, ou un des objets dénotés par le nom  $b$ , ou, dit autrement et plus élégamment,  $a$  est parmi les  $b$ .

Avec une quantification qui porte sur toute catégorie syntaxico-sémantique préalablement introduite, avec une règle inférentielle de définition explicitement formalisée, Lesniewski donne accès dans ses systèmes à toutes les constantes logiques qui peuvent être conçues sur la base des deux catégories des propositions,  $S$  et des noms,  $N$ . Il ne nous dit pas dans quel ordre les définir, mais offre la possibilité de définir progressivement celles qu'exige la solution des problèmes logiques rencontrés. La petite grammaire inductive suivante illustre l'ampleur des catégories, et donc des constantes, qu'il est possible de définir:

- i. S et N sont des catégories syntaxico-sémantiques;
- ii. Si  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$  sont des catégories syntaxico-sémantiques,  
alors  $C_1/C_2 C_3 \dots C_n$  est une catégorie syntaxico-sémantique,
- iii. Rien n'est une catégorie syntaxico-sémantique sinon par ce qui précède.

Cette petite grammaire permet également d'appréhender les multiples développements possibles à partir des catégories et du foncteur de base.

Pour réaliser un tel projet, Lesniewski a dû substituer, à l'écriture catégorielle des systèmes formels traditionnels, une écriture substitutionnelle. La catégorie d'un symbole n'est plus déterminée uniquement en fonction de sa forme, mais en fonction de la place qu'il occupe dans l'inscription qui le contient. Mais cette manière de faire dépasse l'objet qui nous intéresse aujourd'hui.

Ainsi, sur la base des théories logiques de Lesniewski, il est possible de définir progressivement tous les foncteurs logiques conçus sur la base des deux catégories des noms et des propositions, foncteurs dont on aura reconnu le lien nécessaire avec les inférences sous-jacentes au processus d'une démarche de pure logique. Dans ces limites-là, ces théories offrent donc le moyen le plus achevé au service de l'exposé le plus fin et le plus analytique de l'investigation logique comprise comme la contribution à la mise en évidence et à l'exposé des étapes inférentielles liées aux raisonnements. Grâce à elles, il m'a été possible de rendre compte d'activités inférentielles liées notamment aux opérateurs de la conjonction nominale [ce drapeau est blanc **et** noir] et de la négation nominale [cette eau est **non** potable].

Lesniewski ne s'est pas contenté de concevoir des familles de systèmes logiques qui peuvent être perturbés de l'extérieur pour être orientés en fonction des finalités de ceux qui les développent. Il a également construit une famille de systèmes logiques qui se caractérisent par leurs fonctions dans le cadre d'une réflexion métalogique. En effet, la protothétique et l'ontologie ne se prêtent pas immédiatement à une investigation métalogique.

Lesniewski va donc proposer une famille de logiques calculables, logiques qui ne répondent plus à l'exposé des inférences, mais qui vise davantage l'efficacité d'un calcul.

### Vers une logique calculable

En 1924, Lesniewski développe un système logique basé sur les deux termes primitifs « $\supset$ » et « $0$ », un seul axiome, « $(0 \supset 0)$ » et neuf directives inférentielles:

#### *Directive 1*

Si deux expressions « $A$ » et « $B$ » sont des thèses préalablement inscrites dans le système, alors l'expression « $(A \supset B)$ » peut également y être inscrite comme une thèse.

#### *Directive 2*

Si deux expressions « $A$ » et « $(B \supset 0)$ » sont des thèses préalablement inscrites dans le système, alors l'expression « $((A \supset B) \supset 0)$ » peut également y être inscrite comme une thèse.

#### *Directive 3*

Si deux expressions « $(A \supset 0)$ » et « $B$ » sont des thèses préalablement inscrites dans le système alors, l'expression « $(A \supset B)$ » peut également y être inscrite comme une thèse.

#### *Directive 4*

Si deux expressions « $(A \supset 0)$ » et « $(B \supset 0)$ » sont des thèses préalablement inscrites dans le système alors, l'expression « $(A \supset B)$ » peut également y être inscrite comme une thèse.

#### *Directive 5*

Toute expression ayant la forme globale suivante:

$$(\forall v_1 v_2 \dots v_i) [((A_{v_1 v_2 \dots v_i} \supset C(v_1 v_2 \dots v_i)) \supset ((C(v_1 v_2 \dots v_i) \supset A_{v_1 v_2 \dots v_i} \supset 0)) \supset 0)]$$

peut être inscrite dans le système comme une thèse-définition pour autant que:

1. l'expression « $A_{v_1 v_2 \dots v_i}$ ». — le *definiens* — soit une expression bien formée du système en fonction de ce qu'il contient actuellement,
2.  $C$ , dans l'expression « $C (v_1 v_2 \dots v_i)$ » — le *definiendum* —, soit un signe nouveau,
3. les conditions élémentaires et essentielles à toute définition explicite soient réunies entre « $C (v_1 v_2 \dots v_i)$ » et « $A_{v_1 v_2 \dots v_i}$ ».

Un cas limite de cette forme globale est celui où le foncteur constant  $C$  du *definiendum* est une constante. Alors, l'expression globale ne contiendra plus de quantificateur dominant et aura la forme réduite suivante:

$$((A \supset C) \supset ((C \supset A) \supset 0)) \supset 0$$

#### *Directive 6*

Si le *definiens* d'une quelconque thèse-définition — ou une instance de substitution de la thèse en question — est une thèse préalablement inscrite dans le système alors le *definiendum* de la thèse-définition — ou une instance de substitution de la thèse en question — peut également y être introduit comme une thèse.

#### *Directive 7*

Si une expression « $(A \supset 0)$ » est une thèse préalablement inscrite dans le système et l'expression « $A$ » est le *definiens* de quelque thèse-définition -ou une instance de substitution de la thèse en question- est une thèse préalablement inscrite dans le système alors l'expression « $(B \supset 0)$ » peut également y être inscrite comme une thèse, l'expression « $B$ » étant le *definiendum* de la thèse-définition — ou une instance de substitution de la thèse en question.

*Directive 8*

De manière potentielle, toute catégorie conçue à partir de la catégorie des propositions,  $S$ , est en relation avec un nombre fini de constantes logiques de base de la catégorie en question. Il y en a deux pour la catégorie  $S$ , quatre pour la catégorie  $S/S$ , seize pour la catégorie  $S/SS$ , seize également pour la catégorie  $S/(S/S)$ , etc.

En connaissance de ce qui précède, une expression  $\langle\langle \forall v_1 \dots v_n A(v_1 \dots v_n) \rangle\rangle$  dont le connecteur dominant est le quantificateur universel peut être introduite comme thèse dans le système si celui-ci contient déjà en tant que thèse toutes les expressions issues de  $\langle\langle \forall v_1 \dots v_n A(v_1 \dots v_n) \rangle\rangle$  par substitution des constantes de base à ses variables. Ainsi en présence des thèses  $\langle\langle 0 \supset 0 \rangle\rangle$  et  $\langle\langle 1 \supset 1 \rangle\rangle$ , il est possible d'introduire, par cette directive, la thèse  $\langle\langle \forall p (p \supset p) \rangle\rangle$ . Cette directive supporte le principe d'extensionnalité.

*Directive 9*

Si  $\langle\langle A \rangle\rangle$  est une expression bien formée dont le connecteur dominant est le quantificateur universel, si une expression  $\langle\langle B \rangle\rangle$  peut être obtenue de l'expression  $\langle\langle A \rangle\rangle$  par la substitution à ses variables de constantes de base de la même catégorie, et si l'expression  $\langle\langle B \supset 0 \rangle\rangle$  est déjà une thèse du système, alors  $\langle\langle A \supset 0 \rangle\rangle$  peut également y être introduite comme une thèse.

Afin d'illustrer ce style calculable de logique, j'emprunte, dans l'esprit, un exemple de déduction proposée par Lesniewski (1992: 690-693).

1	$\langle\langle 0 \supset 0 \rangle\rangle$	axiome
2	$\langle\langle (((0 \supset 0) \supset 1) \supset ((1 \supset (0 \supset 0)) \supset 0)) \supset 0) \rangle\rangle$	dir. 5
3	$\langle\langle \forall p [(((p \supset p) \supset v(p)) \supset ((v(p) \supset (p \supset p)) \supset 0)) \supset 0] \rangle\rangle$	dir. 5
4	$\langle\langle \forall a [((p \supset a(p)) \supset ((a(p) \supset p) \supset 0)) \supset 0] \rangle\rangle$	dir. 5
5	$\langle\langle \forall n [(((p \supset 0) \supset n(p)) \supset ((n(p) \supset (p \supset 0)) \supset 0)) \supset 0] \rangle\rangle$	dir. 5
6	$\langle\langle \forall f [(((p \supset p) \supset 0) \supset f(p)) \supset ((f(p) \supset ((p \supset p) \supset 0) \supset 0))] \supset 0] \rangle\rangle$	dir. 5

7	$((\forall p)(p) \supset 0)$	1, dir. 9
8	$((\forall p)(p) \supset (\forall p)(p))$	7, dir. 4
9	$v((\forall p)(p))$	3, 8, dir. 6
10	$(v((\forall p)(p)) \supset v((\forall p)(p)))$	9, dir. 1
11	$v(v((\forall p)(p)))$	3, 10, dir. 6
12	$v(0)$	3, 1, dir. 6
13	1	2, 1, dir. 6
14	$(1 \supset 1)$	13, dir. 1
15	$v(1)$	3, 14, dir. 6
16	$(\forall p)(v(p))$	12, 15, dir. 8
17	$(v(v((\forall p)(p))) \supset (\forall p)(v(p)))$	11, 16, dir. 1
18	$(a((\forall p)(p)) \supset 0)$	4, 7, dir. 7
19	$(a(a((\forall p)(p))) \supset 0)$	4, 18, dir. 7
20	$(a(0) \supset 0)$	4, 1, dir. 7
21	$((\forall p)(a(p)) \supset 0)$	20, dir. 9
22	$(a(a((\forall p)(p))) \supset (\forall p)(a(p)))$	19, 21, dir. 4
23	$n((\forall p)(p))$	5, 7, dir. 6
24	$((n((\forall p)(p)) \supset 0) \supset 0)$	23, 1, dir. 2
25	$(n(n((\forall p)(p))) \supset 0)$	5, 24, dir. 7
26	$((1 \supset 0) \supset 0)$	13, 1, dir. 2
27	$(n(1) \supset 0)$	5, 26, dir. 7
28	$((\forall p)(n(p)) \supset 0)$	27, dir. 9
29	$(n(n((\forall p)(p))) \supset (\forall p)(n(p)))$	28, 25, dir. 4
30	$((((\forall p)(p) \supset (\forall p)(p)) \supset 0) \supset 0)$	1, 8, dir. 2
31	$(f((\forall p)(p)) \supset 0)$	6, 30, dir. 7
32	$(f((\forall p)(p)) \supset f((\forall p)(p)))$	31, dir. 4

33	$((f((\forall p)(p)) \supset f((\forall p)(p))) \supset 0) \supset 0)$	1, 32, dir. 2
34	$(f(f((\forall p)(p))) \supset 0)$	6, 33, dir. 7
35	$((0 \supset 0) \supset 0)$	1, dir. 2
36	$(f(0) \supset 0)$	6, 35, dir. 7
37	$((\forall p)(f(p)) \supset 0)$	36, dir. 9
38	$(f(f((\forall p)(p))) \supset (\forall p)(f(p)))$	34, 37, dir. 4
39	$(\forall g)[g(g((\forall p)(p)) \supset (\forall p)(g(p)))]$	17, 22, 29, 38, dir. 8

La preuve précédente, au-delà du développement d'une suite ordonnée d'expressions qui aboutit à la thèse 39, révèle un mode démonstratif curieux et très intéressant, de nature algorithmique.

## Epilogue

Mon intention était modeste. Il s'agissait de mettre en évidence que, dans l'oeuvre de Lesniewski, deux familles de théories logiques étaient présentes. L'une, liée au développement de structures logiques plus subtiles et complexes que celle sur laquelle se fonde la logique classique, structures dominées par la recherche des inférences liées aux mouvements raisonnés. L'autre catégorie a été davantage conçue pour rendre compte de propriétés métalogiques ou pour contribuer à des investigations de compatibilité logique. Ces deux familles se distinguent profondément par leurs styles et leurs finalités. Leur étude révèle une originalité constructive que l'on aurait tort de négliger et qui contribue de manière essentielle à l'investissement de la théorie logique.

*Séminaire de logique*  
*Université de Neuchâtel*  
*Espace Louis-Agassiz 1, CH-2000 Neuchâtel*

### Références bibliographiques

- BAIN A. (1875). *Logique déductive et logique inductive*. Paris: Gernier Boillière.
- BOOLE G. (1847). *The Mathematical Analysis of Logic*. Oxford: Basil Blackwell, 1965, T. I et II.
- BOREL M.-J., GRIZE J.-B. & MIÉVILLE D. (1983). *Essai de logique naturelle*. Berne, Francfort/M., New York: P. Lang.
- HARTSHORNE C. & WEISS P. (eds) (1960). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. Cambridge: The Belknap Press of Harvard University Press, Vol. 4.
- MIÉVILLE D. (1984). *Un développement des systèmes logiques de S. Lesniewski. Protothétique, Ontologie, Méréologie*. Berne, Francfort/M., New York: P. Lang.
- MIÉVILLE D. (1987). Axiomes et définitions chez Lesniewski: une manière génétique de développer les systèmes formels. *Theoria*, Segunda Epoca, 5-6, 285-307.
- MIÉVILLE D. (1991). *La négation, une étude logique*. Travaux de Logique 6. Neuchâtel: Centre de Recherches Sémiologiques.
- SRZEDNICK J.T. & STACHINIAK Z. (eds). (1988). *S. Lesniewski. Lecture Notes in Logic*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.
- SRZEDNICK J.T. & BARNETT D.I. (eds) (1992). *Collected Works of S. Lesniewski*. Dordrecht: Kluwer Academic Press, Vol. I, II.