

LA DÉFINITION DANS LES AXIOMATIQUES EUCLIDIENNE ET HILBERTIENNE

Jacqueline BONIFACE

Introduction

Dans l'axiomatique euclidienne, les définitions sont considérées comme des principes, à côté des notions communes et des postulats, et sont nettement différenciées de ces deux autres types de principes. Bien qu'il prît le modèle euclidien pour base de sa propre méthode axiomatique, Hilbert apporta un changement radical dans la conception de ces principes. Avec lui, les notions communes et les postulats furent regroupés sous le seul terme d'axiomes, et les définitions elles-mêmes se trouvèrent en partie confondues avec les axiomes.

Cet article se donne pour but de comparer les conceptions euclidienne et hilbertienne de la définition et d'analyser comment s'est effectué le passage de l'une à l'autre. Ceci implique d'abord de revenir sur les définitions euclidiennes, dont nous donnerons une interprétation nouvelle. Pour cela, nous réexaminerons ces définitions à la lumière des thèses aristotéliennes. Il est en effet très probable, et généralement admis, qu'Euclide se soit appuyé sur les thèses épistémologiques d'Aristote pour établir son axiomatique. Nous pourrions d'ailleurs vérifier cette hypothèse au cours de notre examen. Nous verrons ensuite quelles sont les innovations introduites par Hilbert et en quoi ces innovations marquent une rupture avec la conception « classique » représentée alors par Frege. Enfin nous comparerons les

conceptions euclidienne et hilbertienne. La conception hilbertienne s'avèrera curieusement plus proche de la conception euclidienne que de celle de ses prédécesseurs directs.

C'est donc par l'acception aristotélicienne de la définition que nous allons commencer. Les définitions, selon Aristote, font partie des principes, il nous faudra donc commencer par préciser ce qu'est un principe aristotélicien. Nous serons amenés pour cela à revoir certaines interprétations qui en ont été données, en particulier à travers des partis pris de traduction. La prise en compte de textes autres que les *Seconds Analytiques*, auxquels se limitent souvent les épistémologues qui étudient la théorie de la science aristotélicienne, nous permettra en outre d'avoir une idée plus complète de ce qu'Aristote entend par définition.

1. La définition selon Aristote

Quel statut Aristote a-t-il donné aux définitions ? L'exposé qu'il fait des principes des sciences, parmi lesquels il place les définitions, constitue le modèle sur lequel s'est appuyé Euclide ; c'est en tout cas ce que nous essayerons de mettre en évidence.

C'est dans les *Seconds Analytiques* qu'Aristote expose sa théorie de la science. Il divise les principes, qui sont au commencement de toute science, en deux grands types : 1) les principes propres à une science particulière, qu'il appelle les thèses, et 2) les principes valables pour toutes les sciences, qu'il appelle les axiomes. L'ensemble des thèses elles-mêmes se divise en hypothèses et en définitions. Ainsi, les définitions sont des thèses, et donc, en tant que thèses, des principes.

1.1. Les définitions sont des principes

1.1.1. Les principes selon Aristote

Nous examinerons tout d'abord cette première caractérisation des définitions comme principes. Qu'est-ce qu'un principe ? La traduction littérale de la réponse d'Aristote à cette question est la suivante : « J'entends par principe dans chaque genre ceux dont on ne peut prouver qu'ils sont tels »¹. Cette définition des principes a été traduite et interprétée de plusieurs manières. La traduction française de Jean Tricot, qui généralement fait référence en France, est particulièrement malheureuse, car elle introduit les termes de vérité et surtout d'existence, absents du texte grec. L'utilisation du terme d'existence pour caractériser les principes en général constitue même un contre-sens : en parlant des définitions, justement, Aristote précise qu'elles ne disent rien de l'existence². « J'entends par principes dans chaque genre, traduit Tricot, ces vérités dont l'existence est impossible à démontrer » (Aristote *op. cit.*, trad. Tricot). Par ailleurs, dans la traduction anglaise de Thomas Heath, on ne trouve pas le terme d'existence, mais on trouve encore celui de vérité : « By first principles in each genus I mean those the truth of which it is not possible to prove » (Heath 1998 : 50). Selon cette traduction, il semblerait que la preuve dont il est question concerne la vérité des principes. Cette interprétation peut être démentie si l'on suit plus littéralement le texte grec, comme nous l'avons fait ci-dessus, ou comme le fait encore Pierre Pellegrin qui traduit cette même phrase : « J'appelle "principes" dans chaque genre ceux dont on ne peut pas prouver qu'ils sont le cas ». Ce que fait apparaître une telle traduction est que l'impossibilité de donner une preuve des principes ne concerne pas l'existence ou la vérité de ces principes, mais concerne leur

1 Aristote, *Seconds Analytiques*, I, 10, 76a 31, il s'agit ici de notre traduction.

2 Nous développerons ce point plus loin.

place ou leur statut de principe. Pellegrin précise en note, dans ce sens : « [...] il semble donc qu'A. veuille dire que les principes ne sont pas démontrables à l'intérieur du genre de la science dont ils sont les principes » – ce qui sous-entend qu'ils pourraient être démontrés dans un autre genre, dans lequel, donc, ils ne seraient plus principes. Ce qui ne veut pas dire qu'il y aurait chez Aristote l'idée d'un choix arbitraire des principes d'une science. Ce que veut dire Aristote, pensons-nous, est qu'une proposition doit être considérée comme principe, lorsque l'on ne peut aller plus avant, en remontant régressivement, à l'intérieur d'un genre donné, en suivant la chaîne déductive de raisons à conséquences. Le caractère indémontrable des principes ne vient donc pas de quelque évidence qu'on leur trouverait, mais de leur place dans la connexion logique qui les lie aux autres propositions.

Cette caractérisation des définitions comme principes a suscité des critiques, par exemple celle de Robert Blanché.

1.1.2. Une critique de la caractérisation des définitions comme principes

Blanché écrit ainsi :

Encore moins faut-il compter les définitions parmi les principes premiers. C'est là une erreur logique étonnante, qu'un instant de réflexion suffit à dissiper. On justifie le recours à des propositions premières en invoquant l'impossibilité de tout démontrer. Or, les mêmes raisons qui valent pour la démonstration valent évidemment pour la définition. On définit un terme par d'autres termes, ceux-ci à leur tour par d'autres, de sorte que, pour éviter la régression à l'infini, il faut bien s'arrêter à quelques termes non définis, de même que les démonstrations doivent reposer sur quelques propositions non démontrées. (Blanché 1999, 20)

Selon Blanché, donc, les définitions ne sont pas des principes et, par conséquent, ne doivent pas figurer en tête de la théorie

axiomatique. Il faudra, au contraire, placer au début de la théorie, des termes indéfinissables, ces termes constituant une sorte d'alphabet utilisé dans les définitions elles-mêmes. Nous verrons plus loin quelles objections peuvent être formulées à l'encontre de cette critique.

1.2. La définition est une thèse

Les définitions font partie des principes propres à une science particulière, c'est-à-dire des thèses, contrairement aux axiomes qui sont les principes communs à toutes les sciences. Parmi les thèses, les définitions se distinguent des hypothèses, qui affirment qu'une chose est ou n'est pas.

En effet, dit Aristote, la définition est une thèse car l'arithméticien pose que l'unité, c'est l'indivisible du point de vue de la quantité ; or ce n'est pas une hypothèse. En effet, ce qu'est une chose et qu'elle est, ce n'est pas la même chose. (Aristote, *Seconds Analytiques*, I, 2, 22, trad. Pellegrin)

Autrement dit la définition répond à la question « qu'est cet objet ? », l'hypothèse à la question « est-il ? ». Cette distinction entre définitions et hypothèses permet de caractériser la définition comme énonçant ce qu'est tel objet, son essence ; elle ne dit rien de « l'existence » de l'objet défini. Sans doute faut-il nuancer un peu cette différenciation. Dans la science, contrairement à ce qui se passe dans la fiction, la définition concerne l'essence de l'objet, mais n'est pas totalement indépendante de son existence. En effet, en science, l'essence d'un objet est fondée dans l'existence de cet objet, car la science, en tout cas la science grecque, ne s'intéresse qu'aux objets existants (nous aborderons plus loin le mode d'existence de ces objets). Afin de préciser ce lien entre définition mathématique et existence de l'objet, il convient de distinguer entre les objets premiers et les objets (ou

propriétés) dérivés. L'existence des objets premiers est simplement posée, celle des objets dérivés doit être démontrée :

Ce que, donc, signifient aussi bien les notions premières que celles qui en viennent, on l'admet, mais qu'ils sont, pour les principes, il est nécessaire de l'admettre, et pour les autres de le prouver. Par exemple, ce que signifie l'unité, ou ce que signifient le droit ou le triangle il est nécessaire de l'admettre, d'admettre que l'unité et la grandeur sont, et pour les autres choses de les prouver. (*Seconds Analytiques*, I, 10,76a, trad. Pellegrin)

En résumé, les définitions posent la signification des termes qui désignent des objets dont l'existence est soit posée par hypothèse tacite, soit en attente d'être démontrée.

1.3. La définition comme détermination d'une matière par une forme

Aristote complète en *Méta Z 12* ce qu'il a dit dans les *Analytiques* sur la définition. La thèse principale de ce chapitre est que, dans les définitions, « le genre ne peut point exister de façon absolue en dehors des espèces en lesquelles il se divise », ou, s'il existe en dehors d'elles, « c'est comme leur matière » (*Métaphysique*, 1038a). « Il n'y a dans la définition, dit encore Aristote, absolument rien d'autre que le genre primordial dont il s'agit et ses différences » (*op. cit.*, 1037b). Et plus précisément « la définition n'est que l'explication (le *logos*) qui ressort des différences » (*op. cit.*, 1038a). Ainsi, le genre est une matière et la définition est le *logos* qui donne forme à cette matière, par « enchaînement continu des différences obtenues par division à partir du genre » (*Des parties des animaux*, 643b 33). Le terme dernier de la division est ainsi celui qu'accomplit l'énoncé définitionnel. Et cet exercice continu de différenciation qu'accomplit la définition est destiné à individualiser une unité

de signification. Le genre lui-même ne peut pas être une unité autonome, il ne peut pas être défini.

A l'autre bout d'une chaîne qui irait du genre à l'objet individuel, concret, les objets réels, qu'ils soient sensibles ou intelligibles, ne peuvent pas non plus être connus par définition. C'est ce que précise Aristote en *Méta Z*, 11 :

L'essence du cercle et le cercle, l'essence de l'âme et l'âme, sont la même chose et se confondent. Mais le composé, par exemple, ce cercle individuel et particulier, que j'ai sous les yeux, ce cercle soit [réel et] sensible, soit [purement] intelligible (et par intelligibles j'entends les cercles mathématiques, comme par sensibles j'entends les cercles d'airain et de bois), ces composés réels et individuels ne sont pas connus par définition ; on ne les connaît que par la pensée, ou le témoignage des sens. Une fois que nous sortons de la réalité actuelle, nous ne savons plus au juste s'ils existent ou n'existent pas ; mais nous pouvons toujours les dénommer et les connaître, si nous le voulons, par leur notion universelle. (*Métaphysique*, 1036a)

Aristote distingue donc entre l'objet individuel, concret, et l'essence de l'objet, c'est-à-dire le concept ou la notion qui détermine l'objet ; seule l'essence de l'objet peut être définie, l'objet lui-même, qu'il soit sensible ou intelligible, ne peut être que perçu ou pensé. Il s'ensuit que ce que nous appelons « objets mathématiques » sont, pour Aristote, des notions, premières ou dérivées. La détermination de ces notions par un *logos* de définition se situe au niveau de l'espèce, entre deux extrêmes : celui de la possibilité indéfinie (le genre) et celui de la réalité concrète (l'individu). Ainsi, le cercle, comme notion déterminée, se situe entre un genre (indéterminé), la grandeur, et un objet concret, le cercle individuel comportant une matière, sensible ou intelligible (cercle tracé sur le papier ou simplement imaginé par l'esprit). Les objets de la science, en particulier de la science mathématique, sont donc des notions, universelles et définies. Il n'y a pas à proprement parler, selon cette conception

aristotélicienne, d'objet indéfinissable ; la grandeur, par exemple, n'est pas un objet mathématique, pas plus que le cercle individuel. On comprend alors pourquoi il ne peut y avoir ici de régression à l'infini et on peut donc répondre maintenant à la critique de Blanché : c'est à l'intérieur d'un genre que l'on définit, non dans l'absolu, et l'objet défini est en quelque sorte borné de deux côtés : du côté du genre lui-même qui lui sert de matière et du côté de l'objet matériel en lequel il peut prendre forme intelligible (dans la pensée) ou sensible (sur le papier ou dans des objets matériels). La définition effectue donc une découpe dans le genre ; elle n'est pas conçue comme composition d'éléments premiers indéfinissables.

1.4. La nature des objets des mathématiques

Nous avons vu que la définition pose la signification des notions et ne dit rien de l'existence des objets. Cependant la question du mode d'existence et de la nature de ces objets est liée à celle de la définition. Nous venons de voir que les définitions, selon Aristote, portent sur les notions universelles et non sur les objets concrets. Aristote toutefois ne conçoit pas ces notions, à l'instar de Platon, comme des êtres intermédiaires entre les Idées et les choses sensibles. Les êtres mathématiques, selon lui, sont des abstractions, c'est-à-dire qu'ils sont obtenus en retranchant aux choses sensibles toutes leur propriétés sensibles.

[...] le mathématicien [...] ne considère dans ses théories que des abstractions, puisque c'est en retranchant toutes les conditions sensibles qu'il étudie des choses. Ainsi, il ne tient compte, ni de la légèreté, ni de la dureté des corps, ni des qualités contraires à celles-là ; il néglige également la chaleur, le froid, et les autres oppositions que nos sens perçoivent. Il ne conserve que la quantité et le continu, ici en une seule dimension, là en deux, ailleurs en trois, et les affections propres à ces entités, en tant qu'elles sont quantitatives et continues ; il ne regarde absolument rien d'autre. (*Métaphysique*, 1061a)

Le mathématicien, écrit encore Aristote, considère les objets sensibles en mouvement non en tant qu'ils sont mûs, mais seulement en tant que corps, ou en tant qu'ils sont de simples surfaces, ou de simples longueurs, ou qu'ils sont divisibles ou indivisibles, et avec une certaine position, ou enfin en tant qu'ils sont exclusivement indivisibles (*Métaphysique*, 1077b). Ainsi, selon Aristote, les objets mathématiques sont considérés en tant que notions universelles, mais à partir de leur support sensible, par « abstraction », c'est-à-dire par neutralisation du contenu sensible (intuitif) de ces objets. Les définitions de ces objets, ou plutôt des notions qui les universalisent, auront pour fonction de réaliser cette abstraction : et nous allons voir que les définitions de l'axiomatique euclidienne, conformément aux conceptions aristotéliciennes, auront bien pour effet de neutraliser le contenu intuitif des objets définis.

2. Les définitions chez Euclide

Dans le corpus euclidien, les définitions sont bien des thèses au sens aristotélicien : elles font partie des principes et ne concernent que la signification des notions définies ; elles ne disent rien de l'existence des objets subsumés sous ces notions. Le livre 1 des *Éléments*, par exemple, s'ouvre par l'énoncé des 23 définitions. Examinons plus précisément certaines d'entre elles.

2.1. Définitions des notions premières

Ce sont les définitions des notions premières qui ont suscité le plus de commentaires et de critiques. La difficulté principale de ces définitions premières et surtout de la toute première, celle du point, est qu'elles doivent obéir à la nécessité énoncée par Aristote (par exemple dans les *Topiques*, VI, 4) de ne définir une notion qu'à l'aide de termes antérieurs et plus connus. Ainsi

la définition du point ne peut utiliser aucun terme antérieurement défini. La seule issue est d'en donner une définition négative.

2.1.1. Définition du point

Euclide donne la définition suivante :

Déf I,1 : Un point est ce dont il n'y a aucune partie.
(Euclide 1990, vol. 1, 151)

On trouve une définition très proche de cette première définition des *Éléments* chez Aristote, qui définit le point comme « ce qui [est indivisible en quantité et en tant que quantité], et est indivisible en tout sens, mais qui a une position » (*Métaphysique*, 1016 b). Cette définition du point s'oppose d'une part à celle de l'unité numérique qui est, selon Aristote, « ce qui est indivisible en tout sens, mais sans avoir de position » (*ibid.*), et, d'autre part, à la ligne « ce qui n'est divisible qu'en un sens » (*Ibid.*), à la surface : « ce qui est divisible en deux sens » (*ibid.*) ou au corps : « ce qui est divisible en tout sens » (*ibid.*).

Si l'on compare les deux définitions, aristotélicienne et euclidienne, du point, il apparaît d'abord que la définition d'Aristote précise dans quel genre, ou catégorie³ (la quantité), se situe la notion à définir (celle de point). Cette précision est absente de la définition euclidienne. Cette absence d'indication d'un genre est mentionnée par Heath, par exemple, qui en fait le reproche à Euclide : « les mots "ce qui" dans "ce qui n'a aucune partie" » pose presque la question « qu'est ce que vous entendez par "ce" ? » (1998, 89). Et Heath renvoie à Aristote qui mentionne aussi cette erreur et écrit :

3 La quantité est une catégorie, à côté de la substance, de la qualité, de la relation, du lieu, du temps, etc. La quantité se divise en deux sous-catégories : le discret et le continu. Les catégories sont aussi appelées genres premiers. Cf. *Métaphysique*, 1024 b : « Dans les définitions, on entend encore par genre le primitif intégrant, qui exprime essentiellement ce qu'est la chose, et dont les qualités sont ce qu'on appelle les différences ».

Cette sorte d'erreur se rencontre partout où l'essence de la chose n'est pas posée dans l'expression de la définition : par exemple, la définition du corps comme ce qui a trois dimensions, ou la définition de l'homme, en supposant qu'on ait à la donner, comme ce qui sait compter ; car on n'a pas indiqué la nature de ce qui a trois dimensions ou la nature de ce qui sait compter. Or le genre vise précisément à signifier l'essence de la chose, et c'est le premier terme qui est supposé parmi les éléments de la définition. (*Topiques* VI, 5, 142b)

On peut donc reprocher à la définition d'Euclide de ne pas indiquer le genre, la quantité continue ou la grandeur, dans lequel rentre la notion définie. Toutefois, comme le premier livre des éléments présente les principes de la géométrie, on peut supposer que ce genre est implicitement indiqué par Euclide, ou bien que ce dernier juge inutile de le préciser.

Les deux définitions, aristotélicienne et euclidienne, ont ensuite en commun, comme nous l'avons noté d'emblée, d'être toutes deux négatives. Est-ce à dire qu'elles ne procèdent pas par divisions successives, contrairement à ce que préconise Aristote ? Non, car définir par négation, dit Aristote, est une manière de définir par division. L'exemple qu'il prend pour illustrer son propos est la définition de la ligne, qui est la deuxième définition des *Éléments*.

2.1.2. Définition de la ligne

Def I, 2 : Une ligne est une longueur sans largeur.
(Euclide 1990, vol. 1, 152)

Cette définition de la ligne, comme celle du point qui la précède, est négative. Aristote montre dans le passage des *Topiques* que nous venons de citer, que cette définition procède bien par division à l'intérieur d'un genre :

En outre il faut voir si on a divisé le genre par négation, à la façon de ceux qui définissent la ligne comme étant une longueur sans largeur, car cela ne signifie rien d'autre que la ligne n'a pas de largeur. [...] en

effet, toute longueur doit être ou sans largeur ou avec largeur, puisque, en toute chose, c'est ou l'affirmation ou la négation qui est vraie ; de sorte que le genre de la ligne aussi, qui est la longueur, sera ou sans largeur ou avec largeur. Mais la longueur sans largeur est la définition d'une espèce, et de même l'est aussi la longueur avec largeur : car sans largeur et avec largeur sont des différences, et c'est à partir de la différence et du genre que la définition de l'espèce est constituée. (*Topiques* VI, 6, 143b, 15-20)

Comme l'indique Aristote, la définition euclidienne de la ligne prend comme genre la longueur. On peut la rapprocher de la propre définition d'Aristote qui prend pour genre la quantité continue et que nous avons énoncée plus haut : la ligne est [la quantité continue] qui n'est divisible qu'en un sens ». Les deux définitions respectent bien les exigences aristotéliennes : elles procèdent par division à partir d'un genre pris comme matière.

2.2. Définitions des notions dérivées

A partir des notions premières, Euclide définit les notions dérivées en respectant, là encore, les principes énoncés par Aristote, notamment celui de l'antériorité des notions utilisées dans une définition. Ainsi définit-il le triangle (figure trilatère) à partir de la notion de figure, elle-même d'abord définie à partir de celle de frontière :

Déf. 13 : Une frontière est ce qui est limite de quelque chose. (Euclide 1990, vol. 1, 161)

La notion de frontière (*horos*) est définie comme une sorte particulière de limite (*péras*), propre aux aires, semble-t-il, mais qui peut aussi s'appliquer aux volumes, par exemple aux polyèdres. Il faut comprendre aussi que « frontière » signifie « limite fermée ». Par conséquent le segment de droite, l'angle, possèdent bien des limites mais non une frontière. La notion de limite elle-même n'est pas définie par Euclide. On peut penser qu'il s'agit

là d'une notion générale, dont la définition n'est pas propre à la géométrie et n'a donc pas à figurer dans ce traité. Comme nous l'avons annoncé, la notion de frontière permet de définir celle de figure :

Déf 14 : Une figure est ce qui est contenu par quelque ou quelques frontière(s). (Euclide 1990, vol. 1 : 161).

La figure ne se limite pas à sa frontière, l'aire est comprise. Une fois la figure définie, Euclide peut en introduire différentes espèces, comme le cercle (dont la frontière est réduite à une seule ligne), les figures rectilignes (contenues par des droites), et parmi ces dernières les trilatères [contenues] par trois droites (déf. 19 ; Euclide 1990, vol. 1, 163).

2.3. Les définitions euclidiennes : constructions logiques et non descriptions d'objets

Pour conclure cette première partie, nous insisterons surtout sur le caractère constructif de l'ensemble des définitions de la géométrie. Partant des définitions des notions premières, Euclide construit pas à pas une chaîne de notions dérivées – les notions premières étant elles-mêmes construites à l'intérieur d'un genre pris comme matière de la définition.

Le fait que les notions définies par Euclide soient conformes à la conception aristotélicienne des « objets » mathématiques, comme objets (notions) *abstrait(e)s* de leur supports matériels, n'implique pas que les définitions qui en sont données soient obtenues par abstraction, c'est-à-dire par neutralisation de certaines propriétés des objets matériels considérés. Il paraît important d'insister sur ce point, car il semble avoir donné lieu à des contre-sens. En témoignent, par exemple, ce que Blanché écrit à ce propos :

Aussi les "définitions" initiales d'Euclide n'ont-elles des définitions que l'apparence. Elles se réduisent à de simples descriptions empiri-

ques, comparables à celles que donnerait un dictionnaire, ayant pour objet de diriger l'esprit vers la notion dont il s'agit. (Blanché 1999, 21)

On trouve pareil reproche chez Cavailles, qui note, dans *Méthode axiomatique et formalisme*, à propos d'Euclide : « les notions ne sont pas exhaustivement décrites, il y a dans les définitions simple renvoi à une intuition sensible supposée » (1981, 20). Dans son compte-rendu de l'ouvrage de Hilbert et Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, Cavailles écrit encore :

Les axiomatiques concrètes – comme celle d'Euclide – énumèrent simplement les propriétés sans définir leur contenu supposé connu intuitivement. (Cavaillès 1935, t. 35, 424)

Si l'on considèrait les définitions euclidiennes du point ou de la droite, par exemple, comme des tentatives de « descriptions empiriques », il est certain que ces définitions seraient tout à fait insatisfaisantes. Mais nous avons vu qu'il s'agit en réalité de définitions au sens aristotélicien, c'est-à-dire de constructions logiques, obtenues par divisions spécifiques, à partir d'un genre pris comme matière.

3. Les définitions dans l'axiomatique hilbertienne

Afin de comprendre le changement apporté par Hilbert dans la conception de la définition, il nous faut au préalable donner quelques précisions sur l'évolution de la géométrie.

3.1. L'évolution de la géométrie et son accession au statut de science pure

Nous venons de voir que, pour Euclide, conformément à la conception aristotélicienne des mathématiques, la géométrie n'était pas une science empirique. Entre la période grecque et le

19^e siècle, cependant, la conception de cette discipline se modifia, et lorsque les géomètres du 19^e siècle entreprirent d'axiomatiser la géométrie projective, de laquelle devait être dérivée toute autre géométrie, en particulier la géométrie euclidienne, celle-ci était devenue une science empirique. Selon Pasch, par exemple, dont la *Vorlesung über neuere Geometrie*, publiée en 1882, donnait la première reconstruction axiomatique de la géométrie projective, la géométrie devait être fondée sur des concepts et axiomes tirés de l'expérience. Ainsi, les droites infinies, qui ne correspondent à aucun objet d'expérience, sont-elles remplacées, dans la géométrie de Pasch, par des segments finis. De même, les points ne représentent que des « corps dont une décomposition en parties est incompatible avec les limites de l'observation » (Pasch 1882, 3). Mais en même temps, Pasch remarquait que « si la géométrie doit se transformer en une science réellement déductive, il faut que la déduction soit absolument indépendante du sens des concepts géométriques, comme de celui des figures » ; et il poursuivait ainsi : « Au cours de la déduction, il est à la fois recommandé et utile, mais d'aucune manière essentiel, d'avoir à l'esprit la signification des concepts géométriques utilisés » (Pasch 1882, 90).

Hilbert lui-même dans ses premiers cours sur la géométrie considérait celle-ci comme une science empirique. Il énonce par exemple dans un cours de géométrie projective tenu à Königsberg en 1891 :

La géométrie est l'étude des propriétés de l'espace. [...] j'ai donc besoin de mes sens pour le fondement de ses propriétés. J'ai besoin de l'intuition et de l'expérience comme pour le fondement des lois physiques [...]. (Hilbert, cours de 1891, édité par Toepell en 1986)

Ce n'est qu'à partir de 1898 qu'Hilbert situera la géométrie parmi les sciences pures ; et son critère de classification sera la constitution de la science en un système déductif complet. Au-

trement dit une science parvient au statut de science pure, selon Hilbert, lorsqu'elle a été complètement axiomatisée.

Dès son cours de 1898-9, Hilbert place le point de départ de l'axiomatisation non plus dans l'intuition mais dans la logique pure. « Nous considérons comme données, les lois de la pure logique et spécialement toute l'arithmétique »⁴.

La géométrie ne pouvant évidemment pas résulter de la seule logique, Hilbert va ensuite chercher quels axiomes proprement géométriques il est nécessaire d'adjoindre à la logique pour obtenir la géométrie. Les éléments adjoints à la logique afin de constituer la géométrie, sont d'abord, pour Hilbert comme pour ses prédécesseurs, les notions premières de points, droites et plans, mais ces notions, comme Hilbert l'explique dans un cours donné en 1899, « ne sont rien de plus que leur dénomination de choses ; nous ne leur reions aucune intuition et aucune propriété supplémentaire ». Ce qu'Hilbert exprimera encore par la fameuse phrase que l'on cite toujours :

On doit toujours pouvoir dire – à la place de point, droite et plan – table, chaise et verre de bière.

Ce qui veut dire que les termes premiers de l'axiomatique ne renvoient à aucun objet particulier ; ils désignent de simples « choses », dépourvues de tout contenu intuitif et de toute signification, et caractérisées seulement par leur appartenance à un système.

3.2. La définition dans l'axiomatique hilbertienne de la géométrie

C'est, conformément à l'axiomatique euclidienne, par une « définition » que s'ouvre les *Grundlagen der Geometrie* :

4 "Als gegebenem betrachten wir die Gesetze der reinen Logik und speciell die ganze Arithmetik". (Hilbert in Toepell 1986, 204)

1. Définition. Nous pensons trois systèmes différents de choses ; nous nommons les choses du premier système des *points* ; nous les désignons par des majuscules A, B, C, \dots ; nous nommons *droites* les choses du deuxième système et nous les désignons par des minuscules a, b, c, \dots ; nous appelons *plans* les choses du troisième système et nous les désignons par des caractères grecs $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Les points constituent les éléments de la géométrie linéaire ; les points et les droites les éléments de la géométrie plane ; enfin les points, les droites et les plans sont ceux de la géométrie de l'espace ou de l'espace lui-même. (Hilbert 1971, chap.1)

Les objets premiers sont donc pensés, désignés, nommés, et non plus décrits, ou définis, dans le sens habituel. Ce qu'Hilbert appelle « définition », dans cette introduction des termes premiers, ne suffit évidemment pas à déterminer ces termes. De même, les relations entre les objets premiers sont dans un premier temps simplement nommées :

2. Entre les points, les droites et les plans, nous imaginons certaines relations que nous exprimons par des expressions telles que "être sur", "entre", "congruent" ; la description exacte et appropriée au but des mathématiques de ces relations est donnée par les *axiomes de la géométrie*. (Hilbert 1971)

Objets premiers et relations entre ces objets, au départ simplement posés, devront ensuite être spécifiés, *définis*, et ce qui tiendra lieu de véritables définitions seront les axiomes eux-mêmes. Les objets seront déterminés par les relations qui les lient et ces relations elles-mêmes seront caractérisées par les axiomes. Ainsi, à l'introduction des objets premiers et des relations qui relient ces objets, fait suite l'énoncé des cinq groupes d'axiomes. Le premier groupe, par exemple, contient les axiomes dits d'incidence (ou d'appartenance) qui expriment un lien entre les notions de point, de droite et de plan. Le premier de ces axiomes est le suivant :

(I.1) Il existe une droite liée à deux points donnés A et B , à laquelle appartiennent ces deux points. (Hilbert 1971)

3.3. Les définitions en rapport aux axiomes

3.3.1. La controverse avec Frege

La conception hilbertienne des définitions (et corrélativement des axiomes) marque une véritable rupture dont témoigne la controverse qui eut lieu entre Frege et Hilbert, et qui apparaît essentiellement dans trois lettres écrites autour de 1900⁵. Le point de désaccord tient essentiellement à la divergence concernant les rôles respectifs des définitions et des axiomes. Pour Frege, il est nécessaire de bien distinguer les définitions des axiomes. Les premières fixent par un mot ou un signe un référent donné. Les seconds sont des propositions vraies non démontrées.

Chaque *définition* contient un signe (une expression, un mot) qui ne possédait pas de référence auparavant, et auquel seule la définition en confère une. Lorsque c'est chose faite, on peut tenir la définition comme un énoncé évident, et l'utiliser comme un axiome. [...]

Les propositions non définitionnelles (*axiomes*, principes fondamentaux, théorèmes) ne doivent contenir aucun mot ou signe dont le sens et la référence [...] ne soient pas pleinement établis. (Rivenc/de Rouilhan 1992, 222-223)

En réponse à Frege qui lui objectait précisément que la référence des mots « point », « droite », « entre » ne soit pas indiquée, mais supposée connue, Hilbert écrivait :

Le cœur du malentendu est ici. Je ne désire rien supposer connu ; je vois dans mon explication du §1 [c'est-à-dire dans les axiomes] la dé-

5 Ces trois lettres ont été éditées dans *Kleine Schriften* et traduites en français par Jacques Dubucs in Rivenc & de Rouilhan (1992, 220-235).

finition des concepts de point, de droite et de plan, si l'on prend comme caractéristiques tous les axiomes des groupes I-V. Si quelqu'un cherche d'autres définitions de "point", peut-être à l'aide de circonlocutions du type "sans extension", etc., il me faudra évidemment m'opposer à cette entreprise de la manière la plus nette ; on cherche là quelque chose qu'on ne pourra jamais trouver parce qu'à cet endroit il n'y a rien, et tout se perd, devient confus et vague, dégénère en un jeu de cache-cache. (Rivenc/de Rouilhan 1992, 226)

Ce que Hilbert explique à Frege, pensant justifier ainsi sa propre conception de la définition, est qu'il est impossible de définir certains concepts, comme celui de point.

3.3.2. *Sur l'indéfinissabilité du point*

Si, selon Hilbert, le point est indéfinissable, c'est parce que l'on n'arrivera jamais à l'atteindre. Pourquoi ? parce qu'à cet endroit, écrit Hilbert, il n'y a rien. Autrement dit, ce concept n'a pas de référent, c'est un concept vide. Frege, qui ne comprend pas vraiment ce qu'écrit Hilbert, lui répond qu'il est d'accord sur ce point :

Je conviens également avec vous que la définition de "point" par des circonlocutions comme "sans extension" est à dédaigner ; en outre, je ne craindrais pas d'admettre que "point" ne peut pas du tout être défini. (Rivenc/de Rouilhan 1992, 231)

Mais pour Frege, à la différence de Hilbert, ne pas pouvoir définir ce concept n'implique pas que ce concept n'ait pas un sens déterminé. Frege soutiendra, au contraire, dans un écrit sur la géométrie euclidienne⁶, que les termes conceptuels « point », « droite » et « plan » ont un sens. Ainsi, selon Frege, ne pas pouvoir définir le concept de point signifie simplement que ce concept ne peut être enfermé dans des limites certaines. La solution adoptée est alors de considérer le point comme un terme

6 Cf. Frege (1994, 200).

indéfinissable, mais dont les propriétés sont vraies, car elles proviennent de notre source géométrique de la connaissance. Pour Hilbert, au contraire, ce terme n'a, en soi, aucun sens et aucun référent. Ce sont les axiomes, c'est-à-dire les déterminations des relations posées entre les différents termes de la théorie qui lui donneront un sens. C'est ce qu'explique encore Hilbert :

Il est impossible selon moi de donner en trois lignes une définition complète. Chaque axiome apporte quelque chose à la définition et donc chaque nouvel axiome modifie le concept. En géométrie euclidienne, non euclidienne, archimédienne, non archimédienne, "point" est à chaque fois quelque chose de différent. (Rivenc/de Rouilhan 1992, 227-8)

Autrement dit, selon Hilbert, une définition est relative à un système axiomatique : un « point », objet primitif de l'axiomatique d'une géométrie, sera défini par le système d'axiomes de la géométrie et aura donc un sens différent selon l'axiomatique qui le définit. Il s'ensuit que le même terme « point » désignera, selon l'axiomatique choisie, des objets différents. Nous allons voir que ces objets sont en fait des classes d'objets.

3.3.3. Un système axiomatique définit une classe d'objet

Dans un même système axiomatique, un même terme, « point » par exemple, pourra être interprété de plusieurs manières différentes. Ainsi, un point de l'axiomatique euclidienne, par exemple, pourra désigner des objets différents, selon que ce système est interprété dans la géométrie euclidienne, dans une géométrie physique ou encore dans la géométrie cartésienne. Dans le premier cas, il désignera les points de l'espace euclidien, dans le deuxième cas, les points seront les points « physiques », objets du monde physique de dimension la plus petite possible, dans le troisième cas, ce seront les couples de nombres réels. Par conséquent, d'une part, les concepts hilbertiens ne

sont pas univoquement définis, ils dépendent de l'axiomatique choisie, d'autre part, chaque concept désigne non un objet, mais une classe, potentiellement infinie, d'objets, la classe de tous les objets donnés par les différentes interprétations possibles du système. Autrement dit, les objets d'un système axiomatique sont définis à un homomorphisme près. Loin de voir dans cette conséquence un défaut, Hilbert en montre la fertilité ; le principe de dualité en est un exemple. Ce principe permet, par exemple, en géométrie projective, d'obtenir des théorèmes « duaux » en échangeant les termes de « point » et de « droite » dans les théorèmes d'incidence, ce qui apporte une grande simplicité à la théorie. Hilbert donne encore l'exemple d'une théorie de l'électricité qui sera « encore valable de tout système de choses que l'on pourra substituer aux concepts de magnétisme, d'électricité..., à la seule condition que les axiomes requis soient satisfaits » (Rivenc/de Rouilhan 1992, 228-29).

On peut s'interroger sur ce qui garantit que le système formel mis en place trouve des interprétations, et donc assure que les classes d'objets définis ne soient pas vides. Cette question se poserait en effet si l'axiomatisation hilbertienne était obtenue indépendamment de tout champ théorique déterminé. Si elle était, ainsi qu'on la présente le plus souvent, un système purement formel. Or, le processus d'axiomatisation de Hilbert part au contraire d'un champ théorique déterminé : la géométrie euclidienne. On peut, plus généralement, noter que, quel que soit le domaine étudié, Hilbert est toujours parti de théories existantes. Il y a donc des objets qui, préalablement à leur formalisation, c'est-à-dire à la neutralisation de leurs qualités, satisfont à ces relations. Le problème de l'accord entre le schéma formel et les objets d'une interprétation de ce système est donc résolu en amont de la formalisation. L'avantage de la formalisation étant que le système formel lui-même pourra éventuellement trouver d'autres interprétations.

Ce processus d'axiomatisation a cependant pour inconvénient que le système formel y apparaît comme tributaire de la théorie « naïve » qui en constitue le donné immédiat. L'ambition de Hilbert était, au contraire, d'obtenir par la méthode axiomatique un véritable fondement de la géométrie. Pour accéder à ce statut de fondement, l'axiomatisation devait donc se libérer de son support naïf et garantir l'existence des objets définis par le système axiomatique, sans avoir recours à un modèle particulier. Cette garantie ne pouvait donc être obtenue que par les propriétés métamathématiques du système lui-même, notamment par sa non-contradiction et sa complétude – la non-contradiction assurant la possibilité même des objets sans le recours au donné (intérieur) de la théorie naïve, la complétude garantissant une sorte d'unité du système, en éliminant la nécessité du recours à un donné extérieur. Par conséquent, le système axiomatique ne peut vraiment tenir lieu de définition, que s'il s'avère être non contradictoire.

3.3.4. Définitions et non contradiction du système

Sur la question du rapport entre définition et non-contradiction du système, plus encore que sur toute autre, la position de Hilbert s'opposait à celle de Frege, ou plus exactement était incompréhensible pour ce dernier qui écrit :

C'est sûrement à propos de votre critère de l'existence et de la vérité que nos vues sont les plus opposées. Mais je ne comprends peut-être pas très bien votre position. Pour tirer la chose au clair, je propose l'exemple suivant.

Supposons que nous sachions que les propositions

1. *A* est un être intelligent
2. *A* est omniprésent
3. *A* est tout-puissant

prises avec toutes leurs conséquences, ne se contredisent pas ; pourrions-nous en conclure qu'il existe un être tout-puissant, omniprésent et intelligent ? (Rivenc/de Rouilhan 1992, 234)

Pour montrer à Hilbert l'absurdité de sa conception, Frege énumère donc une suite de prédicats d'un éventuel sujet A , et affirme, à juste titre, que la non-contradiction des prédicats n'implique pas l'existence du sujet. Mais un système axiomatique n'est pas une telle énumération visant à décrire un objet. Ce que décrit un système axiomatique, ce sont les relations entre des objets possibles. Et la non-contradiction du système garantit la possibilité d'objets satisfaisants à ces relations et fonde l'existence des objets d'une interprétation du système.

Cependant la démonstration de la non-contradiction d'un système souleva des difficultés qu'Hilbert mit longtemps à reconnaître. La non-contradiction du système de la géométrie fut ramenée à celle de l'arithmétique et Hilbert pensa d'abord pouvoir démontrer celle-ci directement et sans difficulté. Or, on le sait, les théorèmes de limitation de Gödel mirent fin aux espoirs hilbertiens. Plus encore, les théorèmes d'incomplétude établirent la nécessité de concevoir les mathématiques, non comme un système unique, mais comme une série indéfinie de systèmes emboîtés – chaque système exigeant d'être englobé dans un système plus grand afin de démontrer sa non-contradiction, ou de démontrer ou réfuter ses propositions indécidables, le nouveau système présentant à son tour la même exigence, etc.

Puisqu'il n'y a pas de système complet et que la série des systèmes s'englobant les uns les autres est infinie, il n'y aura pas non plus de définition complète. Chaque définition peut au contraire être complétée par un système axiomatique en évolution perpétuelle. Ainsi, l'incomplétude fondamentale des formalismes conduit à concevoir les définitions des objets mathématiques, non plus comme des déterminations closes, mais comme des définitions en évolution, au gré du développement du système axiomatique, c'est-à-dire véritablement comme des processus.

4. Conclusion : les définitions euclidiennes et hilbertiennes, similitudes et différences

Ce dernier point, la considération des définitions et des objets définis comme des processus en évolution, et non comme des déterminations closes, opposent les définitions hilbertiennes (ou post-hilbertiennes) aux définitions euclidiennes. Ces dernières en effet sont toujours des déterminations exactes et complètes de ce que contient le concept, car, comme l'écrit Kant à propos des définitions mathématiques :

le concept est d'abord donné par la définition, il ne contient exactement que ce que la définition veut que l'on pense de ce concept. (Kant 1980, Méth. Chap.1 sect.1)⁷

Une différence connexe entre les deux types de définitions, euclidiennes et hilbertiennes, est que les (véritables) définitions hilbertiennes arrivent seulement au terme de la théorie, les définitions euclidiennes, au contraire, conformément là aussi aux énoncés kantien, se situent au début de l'œuvre :

[...] dans les mathématiques, écrit Kant, nous n'avons aucun concept qui précède la définition, puisque c'est par elle que le concept est d'abord donné ; elles doivent et peuvent d'ailleurs toujours commencer par là. (Kant 1980, Méth. Chap.1 sect.1)

Ce que les deux types de définitions ont en commun est qu'elles sont des constructions logiques et s'opposent donc à toute définition conçue comme description d'objets empiriques.

De plus les définitions euclidiennes et hilbertiennes sont des définitions relatives : à un genre pour les définitions euclidiennes, à un système axiomatique, pour les définitions hilbertien-

7 On sait, par ailleurs, que les mathématiques euclidiennes sont, pour Kant, le paradigme des mathématiques.

nes. Dès que l'on conçoit les définitions comme absolues, en effet, les objets primitifs deviennent, à proprement parler, indéfinissables ; si on cherche à en donner une définition empirique, ce ne sera en fait qu'une description, toujours imparfaite de l'objet, ainsi que le montre l'exemple du point défini comme ce qui est sans extension, etc., cité par Hilbert.

Enfin, et nous terminerons là-dessus, chacun des deux types de définitions, euclidien et hilbertien, peut se comprendre comme étape d'un même processus de formalisation d'un champ empirique donné, l'espace. La géométrie euclidienne est le premier stade de formalisation, celui de la construction d'une géométrie à partir d'un donné empirique. A ce premier stade, les définitions des concepts sont elles-mêmes les étapes de la construction des objets formels que sont les objets de la géométrie euclidienne. L'axiomatique hilbertienne constitue la seconde étape de ce processus ; elle prend en considération, non plus directement le donné empirique, mais sa première expression formelle, l'axiomatique euclidienne. Les objets définis par l'axiomatique hilbertienne sont alors obtenus par formalisation des objets euclidiens.

Ce qui précède peut aussi s'exprimer du point de vue inverse à celui de la formalisation, celui de la particularisation. De ce point de vue, les objets empiriques, les points physiques par exemple, sont des représentations sensibles des objets de l'axiomatique euclidienne (des points euclidiens). De manière analogue, les objets définis par l'axiomatique euclidienne, les points euclidiens par exemple, peuvent alors apparaître comme ceux de la première des interprétations possibles du système hilbertien.

Références bibliographiques

- ARISTOTE : *Les Seconds Analytiques*. Paris : Vrin 1995 [Trad. fr. J. Tricot] ; [Paris : GF Flammarion 2005, éd. bilingue, trad. fr. P. Pellegrin].
- ARISTOTE : *La Métaphysique*. Paris : Vrin 1964, 2 vols [Trad. fr. J. Tricot].
- ARISTOTE : *Les Topiques*. Paris : Vrin, 2004 [Trad. fr. J. Tricot].
- ARISTOTE : *Les Parties des Animaux*. Paris : Les Belles Lettres, 2003 [Trad. P. Louis].
- BLANCHÉ R. (1999). *L'axiomatique*. Paris : PUF.
- CAVAILLÈS J. (1934). Compte rendu de D. Hilbert, P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik I. Recherches philosophiques*, t. 35, 423-30.
- CAVAILLÈS J. (1981). *Méthode axiomatique et formalisme : Essai sur le problème du fondement des mathématiques*. Paris : Hermann.
- EUCLIDE (1990). *Les Éléments*. Paris : PUF [Trad. B. Vitrac].
- FREGE G. (1967). *Kleine Schriften*. Hildesheim : Olms [Éd. par I. Angelelli].
- FREGE G. (1969). *Nachgelassene Schriften*. Hambourg : F. Meiner [Éd. par H. Hermes, F. Kambartel & Kaulbach].
- FREGE G. (1994). *Ecrits posthumes*. Paris : Ed. Jacqueline Chambon [Trad. fr. sous la dir. de Ph. de Rouilhan & C. Tiercelin].
- FREGE G. (1900). Correspondance Frege/Hilbert. In : F. Rivenc & Ph. de Rouilhan : *Logique et fondements des mathématiques*. Paris : Payot, 1992, 215-235 [Introd. et trad. J. Dubucs].
- HEATH T. (1998). *Mathematics in Aristotle*. Bristol : Thoemmes Press.
- HILBERT D. (1891). Projektive Geometrie, Cours du semestre d'été 1891, Cod. Ms. D. Hilbert 535. In : Toepell 1986, 18-39.

- HILBERT D. (1894). Die Grundlagen der Geometrie, Cours du semestre d'été 1894, Cod. Ms. D. Hilbert 541. In : Toepell 1986, 51-114.
- HILBERT D. (1898-99). Grundlagen der Euklidischen Geometrie, Cours du semestre d'hiver 1898-99, Cod. Ms. D. Hilbert 551. In : Toepell 1986, 143-201.
- HILBERT D. (1899). Elemente der Euklidischen Geometrie, Cours de mars 1899, Cod. Ms. D. Hilbert 552. In : Toepell 1986, 202-235.
- HILBERT D. (1971). *Grundlagen der Geometrie*. Stuttgart : Teubner [Trad. fr., intro. et compléments, P. Rossier, Paris : Dunod].
- KANT E. (1980). *Critique de la Raison Pure*. Paris : Gallimard/ La Pléiade [1^e éd. 1781, trad. fr. œuvres philosophiques].
- PASCH M. (1882). *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Leipzig : Teubner.
- RIVENC F. & ROUHLAN Ph. de (1992). *Logique et fondements des mathématiques. Anthologie (1850-1914)*. Paris : Payot.
- TOEPELL M.M. (1986). *Über die Entstehung von David Hilberts « Grundlagen der Geometrie »*. Göttingen : Vandenhoeck & Ruprecht.