Publié dans Travaux de logique 7, 11-35, 1992,
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

DU ROLE DE L'ANALYSE DES CONCEPTS SELON GÖDEL ET DE SON RAPPORT A LA THEORIE DES MODELES

Hourya Sinaceur

Il y a au moins trois raisons de s'intéresser au thème philosophique de l'analyse des concepts dans l'œuvre de Kurt Gödel. 1°) Il s'agit d'un thème récurrent quoique non amplement développé; de 1944 à 1974 il apparaît dans trois articles différents, une note sur l'analyse non standard et deux lettres adressées à Hao Wang (Gödel 1944, 1947, 1958, 1974 et Wang 1974: 8-11). 2°) Ce thème a exercé une influence assez profonde sur la philosophie et les réflexions de certains logiciens contemporains, et non des moindres, Georg Kreisel par exemple (et nombre de ses élèves) ou Solomon Feferman. 3°) Enfin et surtout, l'étude de ce thème permet d'apercevoir l'amorce, dans la pensée de Gödel, d'un tournant décisif de la conception moderne de la logique, qui cesse, dans ces années 1930, de se présenter comme un fondement et préfère constituer, pour les mathématiques, une méthodologie ou même un «art d'inventer».

Après un examen chronologique des textes d'après lesquels nous tâcherons de décrire ce que Gödel entendait par «analyse des concepts», nous montrerons que, de façon parallèle et relativement ou totalement indépendante, Alfred Tarski a proposé une «reconstruction mathématique» en vue de transformer l'analyse conceptuelle en une «science déductive». C'est ainsi que naît la théorie des modèles dont le développement a grandement contribué à faire de la logique une branche mathématique comparable aux branches traditionnelles et capable d'interaction avec elles.

1. Cinq caractères de l'analyse des concepts selon Gödel

1. Dans la première page de son article sur la logique de Russell (1944), Gödel oppose «l'analyse des preuves» aux «théorèmes» en remarquant que Frege n'a tiré de sa soigneuse analyse de preuves que les propriétés les plus élémentaires de la suite des entiers, tandis que Peano a obtenu une grande collection de théorèmes mathématiques dans le nouveau langage symbolique, mais sans preuves. Il fallut, écrit-il, les *Principia Mathematica* pour dériver effectivement de larges parties des mathématiques d'un très petit nombre de concepts et d'axiomes logiques. Son but à lui, Gödel, n'est pas d'entrer dans le détail du formalisme ou du contenu mathématique des *Principia* mais d'analyser les concepts et axiomes sous-jacents à la logique mathématique, je dis bien à la logique mathématique en général, à laquelle les *Principia* ont apporté des contributions essentielles mais partielles. Donc cet article sur la logique des *Principia* est en réalité un article sur la logique mathématique en général.

D'ailleurs, Gödel commence par rappeler dans les premières lignes la dualité de cette discipline, d'une part secteur des mathématiques traitant de classes, de relations, de combinaisons de symboles au lieu de traiter de nombres comme l'arithmétique, de fonctions comme l'analyse ou de figures comme la géométrie, et d'autre part, science «fondamentale» s'il en est, «science des principes sous-jacents à toutes les autres sciences». C'est de la logique en ce deuxième sens que s'est occupé Russell après Frege, et, ajoute Gödel, après Leibniz qui nous a laissé le paradigme d'une *characteristica universalis,* c'est-à-dire d'une langue symbolique universelle. Et c'est de la logique en ce deuxième sens que s'occupe Gödel dans cet article (et dans d'autres réflexions sur l'histoire de la logique ou dans certains commentaires de ses propres résultats). Première constatation: la logique en ce deuxième sens est étroitement liée à ce qu'il appelle «l'analyse des concepts».

2. Deuxième point: il est significatif que l'analyse des concepts soit unie par lui à l'idée de *characteristica universalis,* évoquée en commençant et de nouveau dans la conclusion de cet ar-

ticle de 1944. Evocation «des plus frappantes», mais aussi des plus «énigmatiques» selon Ch. Parsons qui a écrit la note introductive dans le volume II des *Collected Works*. C'est ce caractère énigmatique que nous allons tâcher d'élucider ici, espérant jeter quelque lumière sur un tournant décisif de la logique mathématique.

Gödel (1944) est une critique de la «no class theory» de Russell. Il est donc naturel que presque tout l'article tourne autour de la question de savoir ce que sont les concepts[1] mathématiques et logiques, s'il ont une réalité objective ou ne sont que des façons de parler, et si on doit les accepter ou en faire l'économie dans une théorie logique des mathématiques. L'expression «analyse des concepts», ou simplement «analyse», ou encore «élucidation», «clarification» a exactement 8 occurrences. Ce n'est pas beaucoup mais c'est déjà suffisant pour un auteur aussi concis et économe que Gödel, à constituer un «motto» de l'article. Comme exemples tirés des *Principia*, il évoque l'analyse des descriptions définies et l'analyse des paradoxes (qui montre que nos intuitions immédiates des notions de vérité, de concept, de classe, etc., sont contradictoires). L'analyse des concepts est donc l'héritière directe des travaux menés dans la perspective de la recherche de fondements logiques pour les mathématiques. Comme le souligne Gödel au début de son article, celle-ci ne produit pas de théorèmes, mais clarifie la base sur laquelle ils reposent. La théorie simple des types, convenablement interprétée, et la théorie axiomatique des ensembles, ont fourni une telle base. Pourtant les «concepts primitifs» de l'une ou l'autre demeurent insuffisamment élucidés. Et Gödel, à la fin de l'article, soupçonne que c'est cela «qui est responsable du fait que la logique mathématique est demeurée jusqu'alors si en deçà des espérances de ceux, Peano entre autres, qui en attendaient (conformément aux prétentions de Leibniz) une facilitation des mathématiques théoriques identique à celle que le système décimal des nombres a permise pour les calculs numériques». Le soupçon, la supputation de Gödel répond ainsi à une exigence dont elle explique la non-satisfaction, du moins jusqu'alors. Cette exigence c'est que

1 Sur la distinction entre «concept» et «ensemble» cf. Wang 1987, p. 306-307, 309.

la logique mathématique doit «faciliter» les mathématiques, permettre de «résoudre de façon systématique des problèmes par une simple analyse des concepts impliqués dans ces problèmes» (Gödel 1944, *C.W.*, II, p. 140).

Exigence éminemment leibnizienne, comme le souligne Gödel, qui ne prend pas la *characteristica universalis* pour une utopie dépassée, et rappelle que Leibniz la tenait responsable de toutes ses découvertes mathématiques. J'ai mené antérieurement une sorte d'enquête systématique quoique non exhaustive à travers l'œuvre logique, mathématique et philosophique de Leibniz sur le thème de la fécondité mathématique de la caractéristique et de l'analyse logique des concepts, ou, pour reprendre une façon leibnizienne de s'exprimer, sur la logique considérée comme un art d'inventer des mathématiques (Sinaceur 1988b, 1989a, 1989b, 1990a). Cette enquête était largement motivée, dans une lecture rétrospective de Leibniz, par diverses indications laconiques de Gödel, dont je viens de citer celles qui sont chronologiquement les premières dans ses écrits publiés. Il restait à prendre ces indications pour objet même de l'étude au lieu d'y puiser seulement le motif d'une relecture de Leibniz. C'est ce que je fais ici. Nous allons voir que contrairement à ce qu'écrit Parsons dans son introduction (*C.W.*, II: 117-118), la tonalité leibnizienne des écrits de Gödel ne s'est pas estompée avec le temps. Au contraire, elle a donné lieu, dans le style lapidaire et incisif propre à Gödel, à un véritable leitmotiv, dont témoignent d'ailleurs des personnalités plus ou moins proches de Gödel, Hao Wang (1987)[2] et Simon Kochen (1976: 315) entre autres. On sait aussi que le *Nachlass* (Dawson 1991: 2, 4) contient des notes abondantes sur les écrits de Leibniz.

3. Revenons au texte de 1944. Après avoir opposé, au début, analyse des concepts et production ou dérivation de théorèmes, Gödel les entrelace dans ses remarques finales. L'ambition de la logique symbolique: résoudre systématiquement des problèmes mathématiques en analysant les concepts qui y occurrent, n'est pas une vaine ambition. L'importance de l'œuvre mathématique

2 Index, entrée 'Leibniz' et plus particulièrement p. 74, 165, 210, 226, 298 («Gödel semble suggérer que lorsque la théorie des concepts [la logique] sera développée adéquatement, elle pourra aider les mathématiques»).

d'un Leibniz en témoigne assez pour convaincre même un Poincaré. Mais il est raisonnable de commencer par une analyse des concepts primitifs[3] et des axiomes où ils sont mis en œuvre.
Il n'est pas absolument clair dans ces dernières lignes si Gödel conserve l'idée d'un fondement (au sens d'une réduction) logique des mathématiques — comme il l'exprime au début en disant en disant que les *Principia* ont permis de dériver une grande partie des mathématiques de quelques concepts et axiomes logiques — ou s'il pense seulement à l'utilité mathématique d'une analyse logique de ce qui constitue la base des théories mathématiques: concepts primitifs et axiomes. Autrement dit — et c'est notre troisième point — on a là sans doute le premier glissement chez Gödel de l'idée classique de fondement vers l'idée, moderne, de fondation, qui veut que la recherche fondationnelle est 1°) interne aux mathématiques et 2°) devrait déboucher sur des résultats proprement mathématiques. On trouve un indice de cette attitude dès 1929. A la fin de l'introduction à son mémoire sur la complétude du calcul des prédicats du premier ordre, Gödel souligne l'indépendance du problème qu'il a résolu par rapport à la controverse sur les fondements des mathématiques.

> Même si on n'avait jamais douté de la valeur [Geltung] du contenu de la mathématique 'naïve', écrit Gödel, le problème de la complétude (contrairement à celui de la consistance) aurait pu être judicieusement [sinnvoll] posé *à l'intérieur de* cette mathématique naïve, parce qu'une restriction des moyens de preuve ne semble pas plus pressante ici que pour n'importe quel autre problème mathématique» (*C.W.*, I: 64; c'est Gödel qui souligne).

C'est prendre le contre-pied de Hilbert (1922: 161; Sinaceur 1991a: 308-310), pour qui il s'agissait d'un problème extérieur aux mathématiques, et amorcer un retournement qui deviendra, chez Tarski, la base d'un nouveau point de vue (Sinaceur 1991a: 317-318). C'est aussi prendre le contre-pied de Frege (et de Russell) pour qui l'élucidation des concepts mathématiques

3 Wang 1987 (p. 309) note que Gödel n'a jamais donné une liste complète de ce qu'il considère comme «concepts primitifs» de la logique.

fondamentaux sert seulement à nous «éclairer»[4] sur nos objets mathématiques les plus familiers. S'il est vrai qu'il s'agit d'une activité engendrée *de l'intérieur des mathématiques*, alors il serait naturel qu'elle rejaillisse sur elles. Pour Gödel clarifier n'a pas seulement un objectif théorique: élucider les concepts qui font difficulté devrait conduire à la production *systématique* de théorèmes.

Que veut dire «systématique»? Si l'on revient à la phrase de Gödel qui comporte cet adjectif («résoudre de façon systématique des problèmes par une simple analyse des concepts impliqués dans ces problèmes»), on verra que «systématique» veut d'abord dire *a priori*, puisqu'il s'agit, en attaquant un problème, d'en analyser les concepts et les termes, *avant même* de se mettre en quête des éléments d'une solution. En somme, la simple analyse (logique) de l'énoncé indique la voie d'une solution. N'est-ce pas là seulement l'extension grâce aux techniques logiques d'une exigence méthodologique triviale dans la pratique mathématique? Mais «systématique» ne le dit-on pas aussi d'une solution *uniforme* pour un ensemble de problèmes de même type? Certes. Il faut alors supposer que l'analyse des concepts met au jour des parentés profondes, l'identité structurale, de problèmes distincts. L'on est bien en droit de retenir ce second sens, Gödel ayant clairement invoqué le patronage de Leibniz qui voyait dans la caractéristique le moyen de traiter aussi bien *intrinsèquement* que *systématiquement* des problèmes apparemment divers. Leibniz cherchait à réduire la diversité des matières ou des expressions à l'unité des formes symboliques. Pourtant, ce second sens ne va pas tout à fait de soi, s'agissant de Gödel dont les résultats (de 1931) nous enseignent qu'il n'est pas de langue (caractéristique) universelle et qu'il n'est même pas toujours possible, dans un langage (formel) donné, de résoudre systématiquement la question de la décision pour *toutes* les propositions de ce langage. Dans son commentaire de Gödel 1944, Hao Wang (1987: 311) a du reste avoué ne pas bien comprendre ce que Gödel entendait suggérer. Il me semble pourtant qu'il y a une façon naturelle de comprendre cet emploi de «systématique». Gödel n'était pas

4 *Die Grunlagen der Arithmetik*, Einleitung, trad. frç., Paris: Seuil, p. 116.

moins subtil que précis; il en résultait chez lui des positions non tranchées quoique très bien définies. Il en appelle à Leibniz, mais il ne s'identifie pas à Leibniz. Celui-ci avait foi dans la recherche de méthodes dérivées de l'établissement d'une caractéristique universelle. Les résultats de Gödel ne ruinent pas cet optimisme mais forcent à préciser les limites dans lesquelles on peut le *maintenir*, c'est-à-dire à la fois le restreindre et le garder. L'espoir peut être maintenu de trouver des méthodes générales *relativement à une* catégorie de problèmes formulés dans *un* langage donné. Attitude nuancée, comparable à celle de son commentaire au deuxième résultat d'incomplétude du mémoire de 1931. Rappelons que Gödel fait observer que son résultat négatif n'interdit pas de chercher une démonstration finitaire de consistance de l'arithmétique élémentaire, mais seulement d'abandonner l'espoir de pouvoir faire cette démonstration avec des moyens internes au système considéré. Ici, il suggère que la logique peut bien jouer, dans des limites à préciser, le rôle d'*ars inveniendi* que lui assignait Leibniz. Cette interprétation est confortée par les remarques de Gödel à propos de l'*Analyse non standard* d'Abraham Robinson[5]: celle-ci offre l'avantage de «simplifier de manière substantielle les preuves, non seulement pour des théorèmes élémentaires mais aussi pour des résultats profonds»; or, la simplification des preuves «facilite la découverte» écrit-il (1974, *C.W.*, II, p. 311) d'une façon qui reprend exactement l'expression et les préoccupations de son article de 1944. Autrement dit, comme le confirme par ailleurs Simon Kochen (1976: 315), la théorie des modèles à la manière de Robinson (et, ajouterons-nous, de Tarski), paraît à Gödel offrir une réalisation de l'ambition leibnizienne de constituer la «vraye logique» en *ars inveniendi*. Nous illustrerons plus précisément ce jugement de Gödel dans la deuxième partie de cette étude.

4. Le thème de l'analyse des concepts, des procédures et des résultats est peut-être plus prégnant dans Gödel (1947), dont la section 3 porte le titre: «Reformulation du problème [du continu]

---

5 Wang 1987, qui pense qu'il «n'est pas facile de voir comment la logique mathématique telle qu'elle est pratiquée aujourd'hui pourrait être étendue de manière à fournir de puissantes méthodes (ou seulement des guides efficaces) pour de nouvelles découvertes» (p. 311), ne fait précisément pas état de ces remarques de Gödel.

sur la base d'une analyse des fondations[6] de la théorie des ensembles et des résultats obtenus dans les différentes perspectives». Gödel y affirme la nécessité, pour une solution complète du problème du continu, d'une «analyse plus profonde (qu'il n'est habituel de faire en mathématiques) des significations [meanings] des termes ... "ensemble", "correspondance un à un"[7], etc.». Avec l'entrée en scène des termes "sens" et "signification", l'analyse des concepts devient une analyse des significations — c'est notre quatrième point .

L'axiomatique de la théorie des ensembles a transformé en un problème de pure combinatoire de signes la question de savoir si telle proposition dérive des axiomes retenus, mais ces signes ont une signification. «Même l'intuitionniste le plus radical doit reconnaître qu'ils ont une signification [meaningful]» écrit Gödel (1947, *C.W.*, II: 181). Cette phrase n'a pas un sens absolument évident. Hao Wang (1987: 297), par exemple, voit une ambiguïté dans l'usage de l'adjectif "meaningful". Pour moi la difficulté est ailleurs. La présence d'une ou plusieurs significations inscrites dans le symbolisme d'un système axiomatique — à ne pas confondre avec système formel, comme le fait remarquer Wang ailleurs dans son livre (par exemple, p. 247).— est en effet une assomption indispensable pour qui veut entreprendre une analyse des significations et en tirer des résultats. Gödel se démarque donc (implicitement) ici du formalisme pour lequel, formalisées, les mathématiques seraient des combinaisons finies et discrètes de signes matériels.

> «Comment peut-on penser à *exprimer* la métamathématique *dans* des systèmes mathématiques eux-mêmes, écrira-t-il en 1967, si on considère que ceux-ci consistent en symboles sans signification qui

---

6 Gödel entend par là les différentes axiomatiques de la théorie des ensembles et non les différentes attitudes dictées par la conception (philosophique) qu'on se fait de la nature des objets mathématiques (réalisme, intuitionnisme, semi-intuitionnisme, etc.)

7 On peut bien dire que Tarski s'est, de son côté, livré à une analyse de la relation de correspondance bijective dans sa théorie des algèbres cardinales et ordinales. Commencée dès 1926, elle aboutit, entre autres, à la publication d'un ouvrage en collaboration avec B. Jónsson en 1949 (*Cardinal algebras*, Oxford University Press).

n'acquièrent quelque substitut de signification que par *l'intermédiaire de* la métamathématique?»[8]

Ce commentaire *a posteriori* fait voir clairement une chose: traduire un langage dans un autre, comme Gödel l'a fait en codant par des entiers ses énoncés métamathématiques sur l'arithmétique, *présuppose* que ce langage ait une signification. D'une façon analogue, Tarski associe le fait que les énoncés ont une signification et le fait qu'on puisse *interpréter* un langage dans un autre, c'est-à-dire définir les concepts primitifs d'une théorie dans une autre. Une grande partie de l'activité mathématique aussi bien que métamathématique consistant à user de la méthode des interprétations (par exemple, pour des preuves d'indécidabilité), il n'est pas question de croire qu'on manipule des signes vides de sens[9]. Pousser ainsi sur le devant de la scène mathématico-logique les catégories associées de signification et d'interprétation est même une des idées-forces qui ont donné naissance à la théorie des modèles.

Gödel se démarque aussi (explicitement), dans son texte de 1947, de «l'intuitionnisme radical», mais seulement dans la mesure où pour celui-ci les significations ne sont pas objectives mais subjectives. En dépit de la tournure raccourcie de sa phrase, Gödel ne reproche pas aux intuitionnistes de vouloir manipuler des signes sans signification mais de rapporter celle-ci à l'activité du mathématicien. Gödel (1958, *C.W.*, II: 244) ne doute pas que «les objets de la logique intuitionniste sont des énoncés et des preuves pourvus de signification», ce qu'il conteste c'est que

---

8 Lettre à Hao Wang du 7 décembre 1967, dans Wang 1974, p. 8-9 (les soulignements sont de Gödel).

9 Tarski 1936/1960 explique cela très simplement et très clairement: «Si, dans la construction d'une théorie, on se comporte comme quelqu'un qui n'aurait pas compris la signification des termes de cette discipline, ce n'est pas du tout la même chose que de dénier à ces termes toute signification. C'est un fait que nous développons quelquefois [donc pas toujours!] une théorie déductive sans attribuer un sens défini à ses termes primitifs, traitant alors ces derniers comme des variables; dans ce cas nous disons que nous traitons la théorie comme un SYSTÈME FORMEL. Mais cette situation... ne se produit que lorsqu'il est possible de fournir plusieurs interprétations du système axiomatique de la théorie, c'est-à-dire s'il y a plusieurs moyens qui s'offrent d'attribuer des significations concrètes aux termes qui figurent dans la théorie, mais que nous n'avons pas l'intention d'accorder d'avance la préférence à aucune de ces significations particulières» (p. 113-114).

cette signification dépende de notre esprit ou de nos constructions. Ou que, comme il l'a écrit explicitement, la métamathématique soit considérée comme une «théorie de l'activité humaine consistant à manipuler des symboles» plutôt que comme une «science décrivant des situations mathématiques objectives» (Wang 1974: 10). Bref ce qui est opposé à «l'intuitionnisme le plus radical» c'est le fameux réalisme gödelien — sur lequel je ne m'étendrai pas ici.

Un passage du début de Gödel (1958, *C.W.*, II: 240, auquel je viens d'emprunter l'explicitation sur la logique intuitionniste) permet de comprendre plus clairement cette insistance sur la présence de significations dans les symboles. Si l'on comprend par «mathématique finitaire» la mathématique de l'évidence *intuitive*, alors il faut reconnaître, observe Gödel, qu'une preuve de consistance de l'arithmétique a besoin de certains concepts *abstraits*[10]. Les concepts abstraits renvoient à des «constructions mentales» [Denkgebilde]: démonstrations, énoncés pourvus de signification [sinnvolle Aussagen], etc. Dans les preuves relatives à ces constructions mentales interviennent des «vues» [Einsichten, insights] suggérées[11] non par la combinaison matérielle de signes représentant les concepts abstraits mais par la signification [Sinn] de ces signes. On retrouve la triade concept-signe-sens, dont les éléments ne semblent pas pouvoir, pour Gödel, être dissociés. Renversant le point de vue de Hilbert pour qui *seul* un processus fini a du contenu, on pourrait dire que *même* un formalisme finitaire, une pure combinatoire de signes, a un contenu [Inhalt]; la réflexion sur ce contenu conduit à des concepts abstraits (Gödel 1958, *C.W.*, II, p. 242, note 4). C'est parce que le contenu est inéliminable que l'analyse est à la fois possible et fructueuse. Les commentaires de Gödel sur les axiomes forts de l'infini laissent penser que pour lui — c'est-à-dire d'un point de vue réaliste — le contenu est même en quelque sorte inépuisable. Les nouveaux axiomes «ne font que déployer le contenu du concept d'ensemble» écrit-il (1964, *C.W.*, II: 261) en effet dans un style dont il convient de remarquer la tonalité très

10 Soulignements de Gödel.

11 Dans la version anglaise, Gödel emploie l'expression, plus forte, de «dérivé de» (Gödel 1972, *C.W.*, II, p. 273).

leibnizienne, même si pour expliquer notre connaissance intuitive de ce contenu Gödel recourt, dans le supplément à la seconde édition de son texte de 1947, à l'idée kantienne de synthèse rationnelle du divers.

5. «Analyser» ne se réduit d'ailleurs pas à «clarifier», qui n'a qu'une valeur contemplative. Analyser a une valeur opératoire, comme l'indique nettement la note 5 de Gödel (1972*C.W.*, II: 275). Gödel y remarque que l'expression «fonction mécaniquement calculable» avait dès avant les travaux de Turing un sens *clair* mais *inanalysé*. Observons que l'analyse est, dans ce cas, plutôt ou autant le *produit* que l'origine du passage d'une notion intuitive (plus ou moins vague) à une définition mathématique précise. Quoiqu'il en soit, analyser c'est *préciser mathématiquement* un concept - tel est notre cinquième point. Mais tous les concepts mathématiquement précis ne constituent pas une «analyse» de la notion intuitive correspondante; par exemple, «la notion de démontrabilité formelle n'est pas une *analyse*[12] du concept de vérité mathématique» (Wang 1974: 10).

Revenons au problème du continu. Il se peut qu'il y ait de nouveaux axiomes de la théorie des ensembles que nous reconnaîtrions comme impliqués par les concepts sous-jacents à la logique et aux mathématiques, si nous avions de ces derniers une compréhension plus profonde (Gödel 1947, *C.W.*, II: 182). Commençons donc par les analyser. Nous reconnaîtrons qu'il existe au moins deux interprétations du terme «ensemble», c'est-à-dire deux classes d'objets satisfaisant les axiomes de la théorie des ensembles. L'une est constituée de multitudes arbitraires; l'autre de multitudes qui sont des extensions de propriétés définissables. Que, dans cette deuxième interprétation (où Gödel suppose que nous savons ce qu'est une propriété définissable), les ensembles soient identifiés à des propriétés définissables n'est ni énoncé explicitement ni contenu implicitement dans les axiomes de la théorie des ensembles. Cela laisse prévoir, conclut Gödel, qu'un nouvel axiome susceptible de décider l'hypothèse du continu, devrait «impliquer quelque chose sur la définissabilité des ensembles» (*Ibid.*, p. 184). Gödel a lui-même *vérifié*

12 Souligné par Gödel.

cette supposition, toute *théorique* quand elle découle comme ici d'une analyse du concept d'ensemble, en montrant que l'hypothèse généralisée du continu est dérivable de l'axiome: «tout ensemble est définissable en termes de notions primitives de la théorie des ensembles, c'est-à-dire, en un mot, est constructible», ce que nous écrivons aujourd'hui par la formule $V = L$ où L dénote l'univers des constructibles et V celui des ensembles. Gödel nous montre donc sur un exemple tiré de ses propres travaux techniques, logiques au premier sens distingué dans Gödel 1944, comment l'analyse des concepts — la logique au second sens — permet de *prévoir*[13] un résultat. Les ensembles constructibles sont, «d'un point de vue purement mathématique» et «indépendant de la question philosophique de savoir si les définitions non prédicatives sont admissibles», une application «féconde» de la théorie ramifiée des types de Russell[14]. Cependant, Gödel ne nous confirme pas si lui-même avait *effectivement* trouvé son résultat grâce à une analyse du concept d'ensemble dérivée de la théorie des types, ou si une réflexion *a posteriori* sur son résultat lui a suggéré cette analyse, dont le statut est *logiquement* antérieur au résultat lui-même, ou si, troisième éventualité, les deux processus d'analyse et d'invention furent plus ou moins concomitants. Quoi qu'il en soit, on peut dire qu'*en principe*, l'analyse du concept d'ensemble, adossée à la théorie des ordinaux combinée avec la notion logique de définissabilité, conduit à une demi-solution du problème du continu: la consistance avec les axiomes habituels de la théorie des ensembles; de même l'analyse des concepts et de leurs significations nous met sur la voie de nouveaux axiomes dont découlera probablement, pense Gödel, la fausseté de l'hypothèse du continu.

Résumons les acquis de notre lecture de Gödel: l'analyse des concepts est une activité logique mathématiquement féconde; elle

13 Il est plus intéressant, pensait Leibniz, de prévoir que de trouver un résultat. Sans en appeler à Leibniz, Kreisel a beaucoup commenté et pratiqué pour son propre compte le point de vue de Gödel; il a lui-même souvent insisté sur l'utilité *technique* de l'analyse des concepts (cf. Sinaceur 1991b).

14 Gödel 1944, *C.W.*, II, p. 136 : «The theory of orders proves more fruitful if considered from a purely mathematical standpoint, independently of the philosophical question whether impredicative definitions are admissible...».

consiste en une réflexion sur des contenus mathématiques et cette réflexion est utile dans la recherche systématique de résultats; elle peut réussir simultanément à déployer la signification de ces contenus et à la préciser mathématiquement.

2. L'analyse des concepts comme science déductive

Du point de vue technique, il y a de multiples points de contact entre les travaux de Gödel et la théorie des modèles, ne serait-ce d'abord que l'utilisation centrale dans les premiers de la notion logique de modèle, formellement définie par Alfred Tarski en 1936. Bien entendu, c'est le parallélisme entre les concepts de décidabilité et de définissabilité qui donne lieu à la convergence la plus fine entre les résultats de Gödel et ceux de Tarski. On peut montrer aussi, et c'est ce que je me propose de faire maintenant, une affinité également profonde, en dépit d'éventuelles divergences philosophiques (d'ailleurs non radicales), sur leur conception du rôle de la logique par rapport aux mathématiques.

1. L'analyse des concepts comme méthodologie des sciences déductives.

On ne trouve pas dans les travaux d'Alfred Tarski l'expression «analyse des concepts». Tarski était avare en commentaires épistémologiques sur sa façon de travailler. Sans doute aussi se voulait-il moins tributaire que Gödel d'un certain vocabulaire philosophique, leibnizien ou non. Pourtant, une grande partie de ses résultats reposent sur une analyse de concepts qui le conduit à introduire de manière explicite et *formelle* des distinctions ou des définitions inexistantes ou seulement implicites chez d'autres. Ainsi en est-il des distinctions entre les concepts de dérivabilité et de conséquence (1936c), entre ceux de définition explicite et de définition implicite (1931b, § 4), etc.; ainsi en est-il de sa définition formelle du concept de définissabilité (1935). Quant à sa fameuse analyse du concept de vérité, elle pourrait être, du point de vue de ses objectifs, mise en parallèle avec celle du concept d'ensemble par Gödel, bien qu'elle soit, au moins en volume de pages, beaucoup plus importante.

Nous voici convaincus sur la foi de ces quelques exemples d'une chose: Tarski a amplement pratiqué l'analyse des concepts. C'est, note John Barwise (1989: 396-398), un de ses traits communs avec Gödel et avec Kleene, les deux autres pères fondateurs de la logique contemporaine. Bien plus que cela, sous le nom de «Méthodologie des sciences déductives» ou «Métamathématique», il a fait de l'analyse des concepts une discipline scientifique autonome et capable d'interaction avec d'autres disciplines scientifiques. C'est Tarski qui, le premier, a fait le plus grand pas dans la réalisation du vœu leibnizien d'une «vraye logique» comme *ars inveniendi* et mis en place les conditions générales d'applicabilité de la logique non pas seulement à l'analyse des procédures mathématiques mais aussi à la *recherche mathématique*.

La source commune à Gödel et à Tarski, c'est non seulement les *Principia mathematica* de Russell et Whitehead mais encore, bien entendu la métamathématique de Hilbert. Tarski hérite de cette «mathématique nouvelle» (Hilbert 1922: 174), définit[15] plus précisément et élargit le champ de ses concepts fondamentaux et, surtout, *lui donne la configuration d'une science déductive*: l'interaction avec les autres sciences déductives (les autres théories mathématiques) en découle alors comme une *conséquence*[16]. En somme, Tarski est remonté du but à la source: il a compris que pour faire jouer à la logique son plein rôle dans la recherche de résultats mathématiques, il fallait organiser mathématiquement non seulement la logique elle-même (ce qui était chose faite) mais encore son activité réflexive sur les théories mathématiques (les métathéories de ces théories). Grâce à lui, cette activité réflexive (analyse des concepts et des procédures mathématiques) se présente sous le visage d'une *méthodologie* plutôt que d'un fondement. Dans son *Introduction à la logique*, ouvrage destiné à un large public, Tarski définit justement la méthodologie des sciences déductives (c'est-à-dire des mathématiques) comme

15 Dans un métamétalangage, comme l'observe John Corcoran dans son introduction à la seconde édition de Tarski 1956, p. XIX.

16 Cf. Sinaceur 1991a, 4e partie, chap. 1, §§ 1 et 2, p. 306-325.

> «*l'analyse* détaillée et *l'évaluation critique* des principes fondamentaux ... qui doivent s'appliquer dans la construction de la logique et des mathématiques» (1936/1960: 103 les termes et expressions soulignées le sont par nous).

Désignation somme toute banale si elle n'était assortie de l'exigence que cette méthodologie devienne

> «une science générale des sciences déductives dans un sens analogue où l'arithmétique est la science des nombres et où la géométrie est la science des figures géométriques» (*Ibid.*, p. 123).

Arrêtons-nous sur cette analogie établie par Tarski entre la métamathématique d'une part et l'arithmétique ou la géométrie d'autre part. Car c'est une clef de son œuvre et présente dès 1928 (Tarski 1930a, *Collec. papers,* I: 313). L'arithmétique, l'algèbre ni la géométrie n'embrassent la totalité des objets mathématiques; chacune possède un domaine bien délimité: nombres, équations ou figures et un langage spécifique: des concepts primitifs et des axiomes particuliers. Une fois ces domaines découpés dans l'univers mathématique, il n'est pas rare qu'on puisse passer de l'un à l'autre, les «interpréter» l'un dans l'autre de façon à établir une correspondance bijective entre énoncés sur les objets de l'un et énoncés sur les objets de l'autre. Ainsi Descartes nous a montré comment interpréter la géométrie dans l'algèbre. Mais nous pouvons réciproquement interpréter l'arithmétique ou l'algèbre dans la géométrie; c'est le procédé bien connu sous le nom de «méthode des graphiques». Et depuis l'apparition des géométries non euclidiennes, c'est devenu un procédé systématique d'en montrer la consistance par interprétation dans un modèle euclidien. Par ailleurs, Gödel a arithmétisé la métathéorie du système dans lequel il construit sa preuve d'incomplétude de l'arithmétique élémentaire. C'est un premier pont de passage entre métamathématique et mathématique, établi à l'occasion d'un problème dans lequel — rappelons-le — Gödel voit l'indice de l'intériorité, et non de l'extériorité, de l'une à l'autre. Rapprochons Gödel de Descartes et généralisons. Il suffit d'effacer la distinction gödelienne entre logique au sens 1 et logique au sens 2. Si nous considérons, en effet, la logique comme une portion bien délimitée de l'univers mathématique, bien qu'elle soit en même temps une étude des procédures mathématiques, alors il y a des chances pour que le jeu de l'interprétation soit possible entre elle et n'importe laquelle des autres branches mathématiques. C'est sur ce point que s'exerce le génie propre de Tarski: non pas appliquer les mathématiques à la logique ni même seulement appliquer pour ainsi dire de l'extérieur la logique aux mathématiques, mais tout simplement considérer la logique, *à la fois au sens 1 et au sens* 2, comme l'une des nombreuses disciplines mathématiques. Pensée semi-triviale, puisqu'elle consiste à prendre la mesure d'une semi-évidence: la logique est une théorie déductive; or «toute théorie déductive est une discipline mathématique» (Tarski 1936/1960:106). La logique au sens 1? Non, pas seulement la logique au sens 2 aussi! Puisqu'il n'y a pas démarcation entre les deux[17]. Du moins suffira-t-il de présenter déductivement toute analyse logique d'un concept mathématique ou impliqué dans le raisonnement mathématique comme ceux de vérité et de définissabilité, c'est-à-dire toute recherche métamathématique. Tarski retrouve sans le savoir, ou tout au moins sans le dire, cette conviction bien leibnizienne: la clef du passage d'une théorie dans une autre c'est bien la formalisation, pourvu qu'on mette en évidence par ailleurs les règles de passage, c'est-à-dire d'interprétation. Cette disposition si fondamentale pour les mathématiques, il faut la prolonger à la métamathématique, qui sera formelle *et* significative. La théorie de la vérité, souligne Tarski, est une «discipline déductive... qui établit de façon axiomatique les propriétés du concept primitif de vérité»[18]. Barwise remarque que Tarski procède en mathématicien: il développe la notion de vérité non en général mais dans un domaine particulier, relativement à un langage donné. Il faut bien déterminer les conditions du problème pour pouvoir le résoudre. Et pour une solution précise, rien de tel qu'une formalisation soignée.

---

17 Tarski 1944, *Collec. papers*, II, p. 693 (Vaught observe que cette absence de démarcation *découle* de la définition tarskienne de la vérité, cf. Hodges 1986, p. 876. Mais on peut supposer aussi que la définition de la vérité *implique* l'absence de démarcation).

18 *Collec. papers*, I, 616-617.

2. La reconstruction mathématique de la métamathématique.

Tarski a constamment cherché à «reconstruire» mathématiquement la métamathématique, c'est-à-dire à en faire une branche des mathématiques ordinaires, ayant certes ses concepts spécifiques (déduction, vérité, conséquence, définissabilité, etc.) et un objet particulier: analyser les théories mathématiques et les concepts intuitifs auxquels elles s'adossent, mais organisée selon les mêmes principes formels et puisant sa fécondité dans un jeu analogue entre expression et intuition, théorie et modèles, syntaxe et sémantique. Depuis Boole la logique appliquait des méthodes mathématiques à l'analyse de la pensée; depuis Frege elle s'appliquait à l'analyse des concepts et des procédures mathématiques; pour cette analyse Hilbert a proposé des moyens formels (l'axiomatisation) et Gödel a montré comment elle pouvait être exprimée dans l'arithmétique tout en souhaitant qu'elle eût des retombées sur les mathématiques elles-mêmes. Tarski, enfin, a fait en sorte qu'il n'y ait plus lieu de distinguer, *même du point de vue du mathématicien ordinaire*, entre logique et mathématique. En «poussant l'analyse» (comme eût dit Leibniz) jusqu'à la formaliser et en tirer des méthodes susceptibles d'être appliquées avec fruit à un domaine mathématique spécifique: algèbre ou géométrie, il a créé un nouveau domaine de la logique mathématique: la théorie des modèles. Celle-ci nous a donné les premiers échantillons de ce qu'on peut appeler une «mathématique logique», dont le trait distinctif est l'entrelacement dont elle se constitue de méthodes logiques (analyse syntaxique et analyse sémantique) et de méthodes mathématiques (calcul, constructions géométriques, approche topologique).

J'ai analysé en détail cet entrelacement dans le cas de la preuve, par généralisation d'un théorème d'analyse numérique, de la décidabilité de l'algèbre et de la géométrie élémentaires. En d'autres termes, j'ai examiné la transformation du théorème de Sturm sur le nombre de racines réelles d'un polynôme en méthode d'élimination des quantificateurs (Sinaceur 1991a, 4e partie, 1e section, 304-371). Je me bornerai ici à rappeler combien Tarski tient à faire comprendre que son résultat d'élimination des quantificateurs (théorème 31 de Tarski 1951, note 12, *Collec. Papers*, III: 354) a un intérêt «même du point de vue purement mathématique». Cette préoccupation, dont nous avons trouvé l'expression chez Gödel à propos des ensembles constructibles, est une véritable obsession chez Tarski (Cf. Sinaceur 1991a: 321). Il faut dire que le développement actuel de la théorie des modèles en relation avec d'autres disciplines mathématiques, la géométrie algébrique en particulier, lui a enfin rendu justice. Laissant donc de côté la méthode tarskienne d'élimination des quantificateurs (sur laquelle il est bien curieux que Gödel ne se soit jamais exprimé, à ma connaissance), je voudrais revenir sur la notion de définissabilité, utilisée mais non définie par Gödel, et montrer rapidement comment Tarski en a fait un concept mathématiquement opératoire.

3. La définissabilité des nombres réels

Dès 1931 Tarski a montré sur l'exemple des nombres réels et celui des ensembles projectifs (ensembles obtenus à partir d'un ensemble fermé par un nombre fini d'opérations de projection orthogonales ou de passage au complémentaire) l'intérêt pour le mathématicien de déterminer des classes d'ensembles définissables dans un langage logique du premier ordre. Soit dit en passant, il est caractéristique de la méthode de Tarski d'examiner le problème de la définissabilité dans le cadre restreint d'un langage déterminé, celui de l'arithmétique des nombres réels par exemple, *avant* d'envisager la notion générale d'ensemble élémentairement définissable (Tarski 1931a, *in fine*), et aussi avant d'attaquer le problème sous son aspect formel, généralisant et justifiant la méthode de Padoa comme instrument systématique de preuve de l'indépendance d'une constante non-logique par rapport à un sous-ensemble de l'ensemble des autres constantes non-logiques d'un langage du premier ordre (Tarski 1935). C'est le propre du créateur de la sémantique scientifique et de la théorie des modèles que le travail sur le terrain sémantique (par le biais de langages interprétés dans un domaine particulier ou dans le domaine général de la théorie des ensembles) précède le travail dans un langage formel ininterprété.

Venons-en à la définissabilité dans le modèle particulier du corps ordonné des nombres réels, c'est-à-dire aux deux mémoires de 1931. Tarski indique que la détermination de l'ensemble des sous-ensembles définissables de nombres réels découle du lemme d'élimination des quantificateurs auquel j'ai fait allusion plus haut. Ce lemme étant la généralisation d'un théorème mathématique usuel (le théorème de Sturm), on doit pouvoir «reconstruire ... dans le cadre des mathématiques» la notion de sous-ensemble définissable de nombres réels. C'est ce que fait Tarski. Il établit qu'un ensemble de suites de nombres réels, c'est-à-dire un sous-ensemble du produit cartésien $\mathbb{R}^n$, est élémentairement définissable si et seulement s'il est combinaison booléenne finie de sous-ensembles mathématiquement définis par des équations ou des inégalités algébriques à coefficients réels. Si l'on met en valeur l'aspect *métamathématique* de cette définition, on dira qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est élémentairement définissable si et seulement s'il est l'extension d'une formule sans quantificateur du langage de la théorie des corps ordonnés. Si l'on met en valeur son aspect *mathématique*, on verra qu'en particulier un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est élémentairement définissable si et seulement s'il est somme finie d'intervalles de la droite réelle bornés algébriquement, et un nombre réel est définissable si et seulement s'il est algébrique. Voilà bien qu'on retombe sur des notions mathématiques usuelles. Ainsi Tarski a donné l'interprétation mathématique du concept de définissabilité dans le modèle des nombres réels. Il a donc illustré concrètement les faits suivants:

1°) Prise dans un sens relatif (à un langage formel donné L) la notion de définissabilité est non seulement non contradictoire mais encore parfaitement précise. Il n'y a pas à craindre le spectre d'un paradoxe comme celui de Richard.

2°) Un peu de travail d'analyse à la fois syntaxique (de la structure des formules du langage L) et sémantique (de la signification de l'existence d'une solution commune à un système fini d'équations et d'inégalités algébriques à coefficients réels) suffit en effet à montrer que cette notion n'est pas «en dehors des limites propres aux mathématiques» (Tarski 1931a, *Collec. Papers*, I: 519), qu'elle ne «diffère en rien des autres notions mathématiques» et ne doit «éveiller ni crainte ni doute» (ibid., p. 520) chez les mathématiciens; que ceux-ci cessent donc de se méfier de la métamathématique qui n'est que la face abstraite de la (sémantique) mathématique.

3°) Puisque nous retombons dans l'algèbre et la géométrie ordinaires, nous pourrons déduire des résultats dont nous n'aurions pas eu seulement idée si nous en étions restés au domaine purement métamathématique; c'est le croisement — et non pas seulement l'application dans un sens ou dans l'autre — des méthodes logiques et mathématiques qui est fructueux.

4°) En croisant algèbre, géométrie et logique nous définissons le concept de base d'une nouvelle discipline mathématique; le concept d'ensemble définissable de nombres réels est en effet analogue à ceux de ligne et de surface en géométrie, relativement tout au moins car ici nous établissons une définition précise à partir d'une intuition vague, là notre intuition est déjà travaillée par la précision logique (*ibid.*, p. 521). De fait cette nouvelle discipline mathématique, dont Tarski voyait distinctement les contours en 1931, existe pleinement depuis une dizaine d'années sous le nom de géométrie algébrique réelle; son concept de base, celui d'ensemble semi-algébrique, n'est autre que celui d'ensemble définissable de nombres réels de Tarski généralisé au cas d'un corps réel clos quelconque, ce à quoi les mathématiciens peu au fait de l'histoire de la logique n'ont pas pris garde. Bien plus, le résultat d'élimination des quantificateurs dans la théorie élémentaire du corps ordonné des nombres réels et des corps réels clos est systématiquement utilisé aujourd'hui pour simplifier les démonstrations; on démontre plus facilement la stabilité des ensembles semi-algébriques par projection en se servant des propriétés syntaxiques des formules qui les définissent qu'en s'en tenant aux propriétés géométriques des projections; on démontre de même leur stabilité par produit cartésien et par adhérence topologique. L'exposé du résultat d'élimination des quantificateurs de Tarski figure naturellement dans les traités de géométrie algébrique réelle actuellement disponibles. Il figure aussi et depuis plus longtemps, ce qui est plus significatif, dans un traité d'algèbre abstraite comme celui de Nathan Jacobson (1974, 1985), qui salue dans sa préface l'émergence d'une nouvelle algèbre: l'algèbre modèle-théorique. C'est assez montrer le chemin que l'analyse des concepts métamathématiques s'est frayée, depuis une décennie ou deux, dans les mathématiques mêmes.

En conclusion, je voudrais faire observer que l'ordre d'exposition et mon intention de braquer les pleins feux sur Gödel pour un colloque consacré essentiellement à lui ont fait que j'ai parlé de Tarski comme si son travail avait pris la succession de celui de Gödel. Il n'en est rien; et j'ai averti dans mon introduction de la relative ou totale indépendance des travaux des deux logiciens. On sait, et lui-même a souvent insisté sur ce fait, que Tarski était en possession de certains de ses résultats dès les années 1926-28, où il tenait séminaire à Varsovie. Plus précisément, on a vu que l'idée d'organiser déductivement la métamathématique est déjà présente dans des travaux publiés en 1928; que deux mémoires publiés avant que Tarski n'ait eu le temps de prendre connaissance du résultat d'indécidabilité de Gödel portent sur la définissabilité sémantique; que son fameux mémoire sur le concept de vérité tire son origine d'une conférence du 21 mars 1931 à la Société des Lettres et des Sciences de Varsovie. D'un autre côté, on sait que Tarski et Gödel se sont rencontrés plusieurs fois, à Vienne en 1935, à Princeton en 1946 (à la conférence sur les problèmes dans les mathématiques): le texte de Gödel de 1946 commence d'ailleurs par évoquer la conférence de Tarski; plus tard encore en 1962 (photographie retrouvée dans le *Nachlass* et reproduite dans le volume II, p. 252, des *Collected Works*). Il est dommage qu'il soit trop tard pour procéder sur les rapports de Gödel et Tarski à quelque chose comme le questionnaire Grandjean qui nous a livré certains renseignements factuels bien précieux!

Institut d'histoire et philosophie
des sciences et des techniques,
13, rue du Four
F 75006 Paris

Références bibliographiques

BARWISE, J., FEFERMAN, S. & SUPPES, P. (1989). Commemorative meeting for Alfred Tarski. Stanford University-November 7, 1983. In: *A Century of Mathematics in America*, Part III. Rhodes Island: American Mathematical Society, 393-403.

BENIS-SINACEUR (ou SINACEUR), H. (1988a). La logique comme *ars inveniendi*. In: A. Robinet (éd.), *Doctrines et concepts. Cinquante ans de philosophie de langue française 1937-1987*. Paris: Vrin, 319-334.

BENIS-SINACEUR (ou SINACEUR), H. (1988b). *Ars inveniendi* et théorie des modèles. *Dialogue*, XXVII, 591-613 (numéro paru en 1989).

BENIS-SINACEUR (ou SINACEUR), H. (1989a). *Ars inveniendi* aujourd'hui. In: *Les Etudes philosophiques*, Avril-Juin, 199-214.

BENIS-SINACEUR (ou SINACEUR), H. (1989b). *Ars inveniendi* aujourd'hui. In: *Leibniz, Tradition und Aktualität* , V. Internationaler Leibniz-Kongress, Vorträge II. Teil. Hannover: Gottfried-Wilhelm-Leibniz-Gesellschaft, 59-70

BENIS-SINACEUR (ou SINACEUR), H. (1990a). Caractéristique de G.W. Leibniz et théorie des modèles selon A. Robinson. Prépublications de l'Equipe de Logique Mathématique, CNRS-Université Paris VII, Séminaire de Structures algébriques ordonnées 1988-1989, n° 2.

BENIS-SINACEUR (ou SINACEUR), H. (1990b). Article «Définissabilité». In: *Encyclopédie philosophique universelle. Vol. II: Les notions philosophiques,* t. 1, 564-566.

BENIS-SINACEUR (ou SINACEUR), H. (1991a). *Corps et modèles. Essai sur l'histoire de l'algèbre réelle*. Paris: Vrin.

BENIS-SINACEUR (ou SINACEUR), H. (1991b). Logique: mathématique ordinaire ou épistémologie effective? *Hommage à Jean-Toussaint Desanti*. TER, 331-346.

DAWSON, J.W. Jr. (1991). *The Nachlass of Kurt Gödel: An Overview 6/91*, à paraître dans le volume III de Gödel 1986 (copie aimablement communiquée par l'auteur).

GÖDEL, K. (1944). Russell's mathematical logic. In : P.A. Schilpp (ed.), *The Philosophy of Bertand Russell*. Library of living philosophers, vol. 5, Evanston, Northwestern University, 123-153. (*C.W.*, II, 119-141).

GÖDEL, K.(1947). What is Cantor's continuum problem? *American Mathemathical Monthly 54*, 515-525. (*C.W.*, II, 176-187).

GÖDEL, K. (1958). Über eine noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standspunkt. *Dialectica 12*, 280-287. (*C.W.*, II, 240-251).

GÖDEL, K. (1964). What is Cantor's continuum problem? Version revue et augmentée de Gödel 1947, *C.W.*, II, 254-270.

GÖDEL, K. (1972). On an extension of finitary mathematics. Version anglaise augmentée de Gödel 1958, *C.W.*, II, 271-280.

GÖDEL, K. (1974). Remark on non-standard analysis. *C.W.*, II, 311.

GÖDEL, K. (1986). *Collected Works*, *I et II*. S. Feferman *et al.* (eds), New York-Oxford: Oxford University Press.

HILBERT, D. (1922). Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung. *Abh. math. Sem. Hamb. 1,* 157-177. (*Gesam. Abh. III,* 157-177). (Reprint: New York, Chelsea, 1965).

HODGES, W. (ed.) (1986). Survey /Expository papers by R.L. Vaught, B. Jónsson, F. McNulty, J.D. Monk, L.W. Szczerba, S. Givant, *The Journal of Symbolic Logic 51*, n° 4, 865-941.

HODGES, W. (ed.) (1988). Survey /Expository papers by A. Levy, L. van den Dries, J. Doner & W. Hodges, W.J. Blok & DonPigozzi, J. Etchemendy, P. Suppes, *The Journal of Symbolic Logic 53,* n° 1, 1-91.

JACOBSON, N. (1974-1980). *Basic algebra I, II*. San-Francisco: W.H. Freeman & C°. Second edition, vol. I, New York: W.H. Freeman & C°, 1985.

KOCHEN, S., KÖRNER, S., ROQUETTE, P., YOUNG, A.D. (1976). The pure mathematician. On Abraham Robinson's work in mathematical logic. *Bull. London math. soc. 8*, 307-323.

TARSKI, A. (1928). Remarques sur les notions fondamentales de la méthodologie des mathématiques. *Annales de la Société polonaise de mathématique* 7, 270-272. (*Collec. Papers IV*, 552-554).

TARSKI, A. (1930a). Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik. *C. R. Soc. sc. et lettres de Varsovie* XXIII, Cl. 3; dans Tarski 1972-1974, t. 1, III; (*Collec. Papers I*, 311-320).

TARSKI, A. (1930b). Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften I. *Monatsh. Math. Phys.* 37, 361-404; (dans Tarski 1972-1974, t.1, V; *Collec. Papers I*, 341-390).

TARSKI, A. (1931a). Sur les ensembles définissables de nombres réels I, *Fund. Math. 17*, 210-239; (dans Tarski 1972-1974, t. 1, VI; *Collec. Papers I*, 517-548).

TARSKI, A. (1931b). Les opérations logiques et les ensembles projectifs, *Fund. Math. 17*, 240-248; dans Tarski 1972-1974, t.1, VII; *Collec. Papers I*, 549-559.

TARSKI, A. (1935). Einige methodologische Untersuchungen über die Definierbarkeit der Begriffe. *Erkenntnis 5*, 80-100; (dans Tarski 1972-1974, t. 2, X. *Collec. Papers II*, 637-659).

TARSKI, A. (1936/1960). Introduction à la logique. Paris: Gauthier-Villars/Louvain: E. Nauwelarts. (2e éd. augmentée 1969. 3e éd. 1971).

TARSKI, A. (1936a). Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. *Studia Philos. 1*, 261-404; (dans Tarski 1972-1974, t. 1, VIII;*Collec. Papers II*, 51-198).

TARSKI, A. (1936b). *Grundlagen der wissenschaftlichen Semantik. Actes cong. intern. philosophie scientifique 3.* Paris: Hermann, Actualités scientif. et indus. 390, 1-8; (dans Tarski 1972-1974, t. 2, XV; *Collec. Papers II*, 259-268).

TARSKI, A. (1936c). *Über den Begriff der logischen Folgerungen. Actes cong. intern. philosophie scientifique 7.* Paris: Hermann, Actualités scientif. et indus. 394, 1-11; (dans Tarski 1972-1974, *t.* 2, XVI; *Collec. Papers II*, 269-282).

TARSKI, A. (1944). The semantic conception of truth and the foundations of semantics. *Philos. and Phenomenal. Res. 4*, 341-376; (dans Tarski 1972-1974, t. 2, XXI; *Collec. Papers II*, 661-699).
TARSKI, A. (1951). *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*. Berkeley & Los Angeles:.University of California Press, second revised ed. (*Collec. Papers III*, 297-368).
TARSKI, A. (1956). *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938*. Translated by J.H. Woodger. Oxford: Clarendon Press. (Second edition edited and introduced by J. Corcoran, Indianapolis: Hackett Pub. C°, 1983).
TARSKI, A. (1972-1974). *Logique, sémantique, métamathématique 1923-1944. 1, 2,* (en abrégé *L. S. M. 1,* 2). Paris: A. Colin.
TARSKI, A. (1986). *Collected Papers, I, II, III, IV.* S.R. Givant, McKenzie R.N. Birkhäuser.
WANG, H. (1974) *From Mathematics to Philosophy*. London: Routledge & Kegan Paul.
WANG, H. (1987). *Reflections on Kurt Gödel.* Cambridge (Mass.)/London: The MIT Press.