1442

Conjecture de Baum-Connes et homologie en petits degrés

Thèse

présentée à la faculté des sciences pour l'obtention du grade de docteur ès sciences, par

Hela Bettaieb

Université de Neuchâtel
Institut de mathématiques
Rue E. Argand 13
2007 NEUCHATEL (Suisse)

IMPRIMATUR POUR LA THÈSE

Conjecture de Baum-Connes et homologie en petits degrés.

de Mme Hela Bettaieb

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

FACULTÉ DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel sur le rapport des membres du jury,

Messieurs A. Valette (directeur de thèse), U. Suter, P. Jolissaint, P. Julg (Strasbourg) et G. Skandalis (Paris).

autorise l'impression de la présente thèse.

Neuchâtel, le 4 mars 1999

Le doyen:

F. Stoeckli

F. Stoeckli

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Pour Γ un groupe discret dénombrable, soit $C_r^*(\Gamma)$ la C^*-algèbre réduite de Γ, c'est-à-dire la C^*-algèbre engendrée par la représentation régulière gauche λ_Γ de Γ. En géométrie non commutative, le calcul de la K-théorie de $C_r^*(\Gamma)$ est un problème difficile. La conjecture de Baum-Connes ramène ce problème analytique au calcul d'un objet topologique. Pour formuler la conjecture (selon [BCH94], §3), on commence par associer à chaque groupe Γ un espace $\underline{E\Gamma}$ qui est l'espace classifiant pour les actions propres de Γ (voir [BCH94], définition 1.6). En utilisant la KK-théorie de Kasparov (voir [Kas88]), Baum, Connes et Higson forment le groupe de K-homologie équivariante $K_i^\Gamma(\underline{E\Gamma})$ à Γ-support compact. Une classe dans $K_i^\Gamma(\underline{E\Gamma})$ est représentée par un opérateur elliptique abstrait Γ-équivariant sur $\underline{E\Gamma}$ supporté par un sous-espace Γ-invariant X tel que X/Γ soit compact. Suivant Kasparov [Kas83], Baum, Connes et Higson définissent un homomorphisme de groupes abéliens

$$\mu_i^\Gamma \,:\, K_i^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \to K_i(C_r^*(\Gamma)),\ i = 0,1$$

en associant à chaque opérateur elliptique son indice.

Conjecture de Baum-Connes *Pour tout groupe discret dénombrable, l'application μ_i^Γ est un isomorphisme pour $i = 0,1$.*

L'injectivité de l'application de Baum-Connes a des conséquences en topologie; la plus importante est probablement la conjecture de Novikov sur l'invariance homotopique des hautes signatures pour les variétés de groupe fondamental Γ. Une des conséquences analytiques de la surjectivité de l'application de Baum-Connes est la conjecture des idempotents de Kaplansky-Kadison (voir [Val89]) :

Conjecture des idempotents *Soit Γ un groupe discret dénombrable sans torsion. Alors $C_r^*(\Gamma)$ ne contient pas d'idempotents non triviaux.*

La conjecture de Baum-Connes a été vérifiée pour les groupes abéliens, les groupes libres (voir [PV82]), les sous-groupes discrets des groupes de Lie moyennables connexes (voir [Kas81]), les sous-groupes discrets de $SO(n,1)$ et $SU(n,1)$ (voir [Kas83], [JK95]); récemment N. Higson et G. Kasparov l'ont montrée pour les groupes a-T-moyennables [HK97] (voir aussi [Jul98]). Un des résultats principaux de cette thèse est la preuve de la conjecture de Baum-Connes pour les groupes à un relateur sans torsion (voir aussi [BBV96]).

Motivation et organisation de la thèse

Le calcul de la K-théorie de $C_r^*(\Gamma)$ est donc ramené par la conjecture de Baum-Connes à celui des groupes de K-homologie équivariante, mais au moins à torsion près ces groupes sont calculables. En effet Baum et Connes définissent un caractère de Chern (voir [BC88])

$$ch_*^\Gamma \, : \, K_i^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \to \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_{i+2n}(\Gamma, F\Gamma)$$

où $H_i(\Gamma, F\Gamma)$ désigne le i-ème groupe d'homologie de Γ à coefficients dans $F\Gamma$, le Γ-module des fonctions complexes sur Γ à support fini contenu dans les éléments elliptiques (c'est-à-dire les éléments d'ordre fini); notons que l'action de Γ est par conjugaison.
Le caractère de Chern est un isomorphisme rationnel, c'est-à-dire

$$ch_*^\Gamma \otimes Id \, : \, K_i^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \to \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_{i+2n}(\Gamma, F\Gamma)$$

est un isomorphisme (voir [BC88], proposition 15.2).
Soit maintenant $\mu_{i,\mathbb{C}}^{\Gamma}$ l'unique application qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
K_i^{\Gamma}(\underline{E}\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \arrow[r, "\mu_i^{\Gamma} \otimes \mathbf{1}"] \arrow[d, "ch_*^{\Gamma} \otimes \mathbf{1}"'] & K_i(C_r^*(\Gamma)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \\
\bigoplus_{n=0}^{\infty} H_{i+2n}(\Gamma, F\Gamma) \arrow[ur, "\mu_{i,\mathbb{C}}^{\Gamma}"'] \arrow[u, phantom, shift left=8, "\circlearrowleft"] &
\end{tikzcd}$$

Une conséquence de la conjecture de Baum-Connes est :

Conjecture $\mathbb{C}$ *Pour tout groupe discret dénombrable, l'application $\mu_{i,\mathbb{C}}^{\Gamma}$ est un isomorphisme* $(i = 0, 1)$.

Le triangle ci-dessus est notre motivation principale. En effet, notre but est d'écrire explicitement la restriction de $\mu_{i,\mathbb{C}}^{\Gamma}$ à certains groupes d'homologie. Dans le cas où le groupe Γ est sans torsion, le Γ-module $F\Gamma$ est le module trivial $\mathbb{C}$; de plus $K_i^{\Gamma}(\underline{E}\Gamma) \simeq K_i(B\Gamma)$, la K-homologie (à support compact) de l'espace classifiant $B\Gamma$ de Γ, d'où le triangle commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
K_i(B\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \arrow[r, "\mu_i^{\Gamma} \otimes \mathbf{1}"] \arrow[d, "ch_*^{\Gamma} \otimes \mathbf{1}"'] & K_i(C_r^*(\Gamma)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \\
\bigoplus_{n=0}^{\infty} H_{i+2n}(\Gamma, \mathbb{C}) \arrow[ur, "\mu_{i,\mathbb{C}}^{\Gamma}"'] \arrow[u, phantom, shift left=8, "\circlearrowleft"] &
\end{tikzcd}$$

Ce travail se présente ainsi :
Le chapitre 1 est consacré à la description de la conjecture de Baum-Connes; nous commençons par rappeler la notion d'action propre, ensuite de K-homologie équivariante.

Le chapitre 2 ainsi que le paragraphe 4 du chapitre 3, ont été obtenus en collaboration avec Michel Matthey. Au chapitre 2, nous construisons (selon une idée de P. Baum) un homomorphisme analytique $\beta_a \ : \ H_0(\Gamma, F\Gamma) \to$

$K_0(C_r^*(\Gamma))$ qui se factorise via $K_0(l^1(\Gamma))$; et nous montrons que l'homomorphisme algébrique $\beta_{alg} : H_0(\Gamma, F\Gamma) \to K_0(l^1(\Gamma))$ est injectif. Nous expliquons ensuite le lien avec la conjecture de Baum-Connes en construisant un homomorphisme topologique $\beta_t : H_0(\Gamma, F\Gamma) \to K_0^\Gamma(\underline{E\Gamma})$ qui vérifie : $\beta_a = \mu_0^\Gamma \circ \beta_t$.

Au chapitre 3, nous donnons une nouvelle preuve d'un résultat d'Elliott et Natsume [EN87] : l'application canonique $\kappa_\Gamma : H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \simeq \Gamma^{ab} \to K_1(C_r^*(\Gamma))$ est rationnellement injective. Nous remarquons ensuite (à l'aide d'un résultat d'A. Valette dans [Val96]) que $\kappa_\Gamma \otimes 1 : H_1(\Gamma, \mathbb{C}) \to K_1(C_r^*(\Gamma)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ coincide avec $\mu_{1,\mathbb{C}}^\Gamma|_{H_1(\Gamma,\mathbb{C})}$ où $H_1(\Gamma, \mathbb{C})$ est le sous-espace de $H_1(\Gamma, F\Gamma)$ correspondant au neutre de Γ. Comme corollaire, nous obtenons que l'application de Baum-Connes est rationnellement injective "en degré 1". En procédant ensuite de la même manière qu'au chapitre 2, nous construisons un homomorphisme "analytique" $\beta_a : H_1(\Gamma, F\Gamma) \to K_1(C_r^*(\Gamma))$, ainsi qu'un homomorphisme "topologique" $\beta_t : H_1(\Gamma, F\Gamma) \to K_1^\Gamma(\underline{E\Gamma})$. Nous montrons ensuite que β_a et β_t sont liés par l'application de Baum-Connes, plus précisement : $\beta_a = \mu_1^\Gamma \circ \beta_t$. Nous terminons le chapitre en introduisant une notion de groupe de Whitehead topologique.

Au chapitre 4, nous construisons d'abord un homomorphisme analytique $\beta_a : H_2(\Gamma, \mathbb{Z}) \to K_0(C_r^*(\Gamma))$. Nous montrons ensuite que c'est le "bon candidat", c'est-à-dire que $\beta_a \otimes 1 : H_2(\Gamma, \mathbb{C}) \to K_0(C_r^*(\Gamma)) \otimes \mathbb{C}$ coincide avec $\mu_{0,\mathbb{C}}^\Gamma|_{H_2(\Gamma,\mathbb{C})}$. Enfin, à l'aide du calcul de la K-homologie d'un CW-complexe fini de dimension 2, nous donnons une reformulation de la conjecture de Baum-Connes pour certains groupes :

Proposition *Soit Γ un groupe discret tel que son espace classifiant $B\Gamma$ est un CW-complexe fini de dimension 2. La conjecture de Baum-Connes est équivalente au fait que les applications*

$$\begin{cases} \beta_a \oplus \beta_a : & H_0(\Gamma, \mathbb{Z}) \oplus H_2(\Gamma, \mathbb{Z}) & \to & K_0(C_r^*(\Gamma)) \\ \kappa_\Gamma : & H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) & \to & K_1(C_r^*(\Gamma)) \end{cases}$$

sont des isomorphismes.

Les résultats du chapitre 5 ont été obtenus en commun avec C. Beguin et A. Valette; ils concernent les groupes à un relateur sans torsion. Nous commençons par calculer la K-théorie de la C^*-algèbre de tels groupes (notons que ce calcul a été généralisé par C. Beguin pour un groupe à un relateur quelconque). Nous montrons ensuite la conjecture de Baum-Connès pour $i = 1$, et pour $i = 0$ dans le cas "générique" c'est-à-dire quand l'image de la relation dans le groupe abélianisé est non triviale. Dans ce chapitre, nous montrons aussi qu'un groupe à un relateur (même avec torsion) est K-moyennable.

Remerciements

Je tiens, en tout premier lieu, à remercier mon directeur de thèse Alain Valette, qui m'a proposé le sujet de ce travail, qui m'a guidée durant toutes ces années, grâce à ses conseils fructueux, sa patience et sa grande disponibilité. Il m'est évident que sans lui, cette thèse ne verrait pas le jour aujourd'hui.

Mes chaleureux remerciements vont aussi à Messieurs Paul Jolissaint, Pierre Julg, Georges Skandalis et Ueli Suter qui m'ont fait l'honneur de faire partie de mon jury. Je voudrais aussi remercier les professeurs et assistants de l'Institut de Mathématiques de Neuchâtel pour la bonne ambiance qui y règne et le profit certain que j'ai pu en tirer pendant toutes ces années d'études. Je dois cependant citer Michel Matthey pour la collaboration et les discussions enrichissantes que j'ai eues avec lui.

Je remercie aussi mon "patient" mari qui m'a constamment apporté un précieux soutien moral, ainsi que ma fille Chayma pour sa bonne humeur. Finalement, toute ma gratitude va à mes parents qui m'ont tant apporté durant toutes mes années d'études.

Chapitre 1

Préliminaires et conjecture de Baum-Connes

Nous débutons avec des rappels sur les actions propres. Dans la deuxième section, nous définissons la K-homologie équivariante et nous passons en revue les principaux exemples qui vont nous être utiles plus tard. La définition de l'application de Baum-Connes est présentée dans la dernière section.

1.1 Actions propres

Dans cette section, nous introduisons la notion d'action propre d'un groupe, considérée dans [BCH94] . L'intérêt de cette notion est d'associer à chaque groupe un espace $\underline{E}\Gamma$ qui joue le même rôle dans la théorie des Γ-actions propres que l'espace $E\Gamma$ (le revêtement universel de l'espace classifiant $B\Gamma$) dans celle des Γ-actions libres. Une importante particularité est que dans bien des cas, il existe un modèle d'un intérêt géométrique particulier.

Soit Γ un groupe discret dénombrable agissant sur un espace topologique métrisable X par homéomorphismes.

Définition 1.1 (**[BCH94]**) *On dit que X est un Γ-espace propre si tout point x de X possède un voisinage ouvert Γ-invariant U_x qui s'envoie de* *manière continue et Γ-équivariante sur un espace homogène Γ/H_x, où H_x est un sous-groupe fini de Γ.*

Exemples 1.2 *On a clairement des actions propres dans les cas suivants:*

(1) Γ est un groupe fini agissant sur X quelconque.

(2) $\mathbb{Z}$ agissant sur $\mathbb{R}$ par translation.

Remarque 1.3 *Lorsque l'espace X est localement compact, la définition 1.1 ci-dessus est équivalente à la définition usuelle d'une action propre, c'est-à-dire : pour tout compact $W \subseteq X$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma W \cap W \neq \emptyset\}$ est fini. Notons que l'action d'un groupe Γ sur l'espace à un point $\{pt\}$ est propre si et seulement si Γ est fini.*

Définition 1.4 *Un Γ-espace propre $\underline{E\Gamma}$ est universel si, pour tout Γ-espace propre X, il existe une application continue, Γ-équivariante $f : X \to \underline{E\Gamma}$ unique à homotopie Γ-équivariante près.*

Remarque 1.5 *$\underline{E\Gamma}$ est unique à homotopie Γ-équivariante près.*

Exemples 1.6

(1) Si Γ est un groupe fini, on peut prendre $\underline{E\Gamma} = \{pt\}$.

(2) La droite réelle $\mathbb{R}$ est un exemple universel pour les actions propres de $\mathbb{Z}$.

(3) Si Γ est sans torsion, toute action propre est nécessairement libre, et on peut prendre alors $\underline{E\Gamma} = E\Gamma$, le revêtement universel de l'espace classifiant $B\Gamma$.

Dans le cas général, on peut réaliser l'exemple universel pour les actions propres de la manière suivante :

Proposition 1.7 (**[BCH94]**) *Soit* Γ *un groupe discret et soit*

$$\underline{E\Gamma} = \{f \,:\, \Gamma \to [0,1] \text{ à support fini, } \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) = 1\}$$

l'espace des mesures de probabilités à support fini sur Γ, *muni de la métrique*

$$\|f - g\|_\infty = \sup_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma) - g(\gamma)|.$$

Alors $\underline{E\Gamma}$ *est un exemple universel.*

1.2 K-homologie équivariante

Le but de cette section est de définir le groupe géométrique $K_i^\Gamma(\underline{E\Gamma})$ (qui apparaît dans le membre de gauche dans la conjecture de Baum-Connes) à l'aide de la théorie de Kasparov équivariante par rapport à l'action d'un groupe Γ discret, dite KK_Γ-théorie.

Soit X un Γ-espace localement compact. Considérons l'algèbre $C_0(X)$ des fonctions continues sur X, nulles à l'infini. Commençons par définir le groupe $KK_i^\Gamma(C_0(X), \mathbb{C}))$ de K-homologie Γ-équivariante de X, en suivant Kasparov. Pour plus de détails sur la théorie de Kasparov, voir [Kas88]. Pour les constructions sur les modules hilbertiens, voir [Lan95].

Définition 1.8 *Un* Γ*-opérateur elliptique généralisé sur* X *(ou cycle de Kasparov) est un triple* $(\mathcal{H}, \pi, F)$ *où*

- $\mathcal{H}$ *est un espace de Hilbert muni d'une représentation unitaire* u *de* Γ.
- π *est une représentation covariante de* $C_0(X)$ *dans* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ *c'est-à-dire, telle que* $\pi(\gamma f) = u_\gamma \pi(f) u_{\gamma^{-1}}$, $\forall \gamma \in \Gamma$, $\forall f \in C_0(X)$.
- $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *est un opérateur autoadjoint tel que,* $\forall \gamma \in \Gamma$, $\forall f \in C_0(X)$, *les opérateurs* $[\pi(f), F]$, $\pi(f)(F^2 - 1)$ *et* $\pi(f)[\gamma, F]$ *sont compacts.*

Notons $\mathcal{E}_1^\Gamma(C_0(X),\mathbb{C})$ l'ensemble de tels triples.
Les éléments de $\mathcal{E}_0^\Gamma(C_0(X),\mathbb{C}))$ correspondent à des cycles $\mathbb{Z}/2$-gradués. Plus précisement : $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert $\mathbb{Z}/2$-gradué, les représentations u et π sont par des opérateurs de degré 0, et F est un opérateur de degré 1.

Un cycle $(\mathcal{H},\pi,F)$ est dégénéré si $F\pi(f)=\pi(f)F$ pour toute $f\in C_0(X)$, et si $F^2=1$.

Définitions 1.9

(1) Soient $\alpha_0=(\mathcal{H}_0,\pi_0,F_0)$, $\alpha_1=(\mathcal{H}_1,\pi_1,F_1)$ deux éléments de $\mathcal{E}_i^\Gamma(C_0(X),\mathbb{C})$ $(i=0,1)$. On dit que α_0, α_1 sont homotopes si $u_0=u_1$, $\pi_0=\pi_1$ et s'il existe une famille $(F_t)_{t\in[0,1]}$, continue en norme, telle que pour tout $t\in[0,1]$ $(\mathcal{H}_0,\pi_0,F_t)$ appartient à $\mathcal{E}_i^\Gamma(C_0(X),\mathbb{C})$ $i=0,1$.

*(2) On dira que α_0, α_1 sont équivalents s'il existe des cycles dégénérés β_0, β_1 tels que $\alpha_0\oplus\beta_0$ est homotope à $\alpha_1\oplus\beta_1$.
(En particulier, les cycles dégénérés sont tous équivalents.)*

(3) On note $KK_i^\Gamma(C_0(X),\mathbb{C})$ ou $K_i^\Gamma(X)$ le quotient de $\mathcal{E}_i^\Gamma(C_0(X),\mathbb{C})$ par la relation d'équivalence ci-dessus.

Remarque 1.10 *Supposons que X est un Γ-espace propre. Par la proposition 1 de [Val96], on peut supposer dans la définition d'un élément de Kasparov que F est Γ-équivariant (c'est-à-dire $[\gamma,F]=0$, $\forall\gamma\in\Gamma$) et à support propre, c'est-à-dire $\forall f\in C_0(X)$ il existe $g\in C_c(X)$ telle que $(\pi(g)-1)F\pi(f)=0$. De plus, quitte à remplacer $\mathcal{H}$ par $\overline{\pi(C_0(X))\mathcal{H}}$, on peut supposer que π est non dégénérée.*

Pour $i=0,1$, $\mathcal{E}_i^\Gamma(C_0(X),\mathbb{C})$ est muni d'une addition naturelle donnée par la somme directe. $K_i^\Gamma(X)$ muni de l'addition induite est un groupe abélien, invariant par homotopie, covariant en X. L'élément neutre est donné par la classe des cycles dégénérés. L'opposé d'un élément $(\mathcal{H},\pi,F)$ dans $K_1^\Gamma(X)$ est donné par le cycle $(\mathcal{H},\pi,-F)$, par contre celui d'un élément dans $K_0^\Gamma(X)$

s'obtient en inversant la $\mathbb{Z}/2$-graduation. Disons quelques mots sur la fonctorialité : soit $f : X \to Y$ une application continue Γ-équivariante, propre. Alors $f_* : K_i^\Gamma(X) \to K_i^\Gamma(Y)$ est donnée par

$$f_*([\mathcal{H}, \pi, F]) = [\mathcal{H}, \pi \circ \tilde{f}, F],$$

où $\tilde{f} : C_0(Y) \to C_0(X) : g \mapsto g \circ f$.

Si Γ est trivial, $K_i^\Gamma(X)$ est la K-homologie habituelle de X, notée $K_i(X)$.

Remarque 1.11 *Si Γ agit librement sur X, alors $K_i^\Gamma(X) \simeq K_i(\Gamma\backslash X)$. Indiquons quel est l'isomorphisme. Pour cela soit $x = [(\mathcal{H}, \pi, F)] \in K_i^\Gamma(X)$. Soit $\tilde{\mathcal{H}}$ l'espace séparé complété de $\pi(C_c(X))\mathcal{H}$ pour le produit scalaire*

$$\ll \xi|\eta \gg = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle \xi|\gamma\eta\rangle$$

($\xi, \eta \in \pi(C_c(X))\mathcal{H}$).
Maintenant F est un opérateur borné Γ-équivariant sur $\mathcal{H}$ qui préserve $\pi(C_c(X))\mathcal{H}$, pour $\xi \in \pi(C_c(X))\mathcal{H}$,

$$\langle F\xi|.F\xi\rangle \leq \|F\|^2 \langle \xi|.\xi\rangle$$

au sens de l'ordre dans $C^*(\Gamma)$. En prenant la somme sur Γ, ceci implique

$$\ll F\xi|F\xi \gg \leq \|F\|^2 \ll \xi|\xi \gg .$$

D'où F s'étend en un opérateur borné $\tilde{F}$ sur $\tilde{\mathcal{H}}$. Via la projection canonique $X \to \Gamma\backslash X$, nous pouvons regarder $C_0(\Gamma\backslash X)$ comme une algèbre de multiplicateurs de $C_0(X)$. D'autre part π s'étend d'une manière unique, en une représentation des multiplicateurs sur $\mathcal{H}$, qui préserve $\pi(C_c(X))\mathcal{H}$ (voir [Ped79] 3.12.10). Donc $\pi|_{C_0(\Gamma\backslash X)}$ nous donne une représentation $\tilde{\pi}$ de $C_0(\Gamma\backslash X)$ sur $\tilde{\mathcal{H}}$. Alors l'isomorphisme est défini par :

$$KK_i^\Gamma(X) \ni [\mathcal{H}, \pi, F] \mapsto [\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\pi}, \tilde{F}] \in K_i(\Gamma\backslash X).$$

Nous sommes maintenant prêts à définir le groupe géométrique $K_i^\Gamma(\underline{E\Gamma})$:

Définition 1.12 *Le groupe géométrique de Baum-Connes est*

$$K_i^{\Gamma}(\underline{E\Gamma}) = \lim_{\vec{X}} KK_i^{\Gamma}(C_0(X), \mathbb{C})$$

où X parcourt les parties Γ-compactes de $\underline{E\Gamma}$ (c'est-à-dire, telles que l'espace quotient $\Gamma \backslash X$ est compact); notons que dans ce cas X est nécessairement localement compact.

Avant de donner des exemples, remarquons que beaucoup d'éléments intéressants de KK-théorie proviennent d'opérateurs non bornés (par exemple les opérateurs différentiels elliptiques d'ordre 1 sur une variété C^{∞}). Il est donc important d'avoir un formalisme pour la KK-théorie qui tienne compte des opérateurs non bornés [BJ83] :

Définition 1.13 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert muni d'une représentation unitaire u de Γ, π une représentation covariante de $C_0(X)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur autoadjoint densément défini. Le triple $(\mathcal{H}, \pi, F)$ est un élément de Kasparov non borné si*

i) $\pi(f)(1+F^2)^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ *(l'idéal des opérateurs compacts),* $\forall f \in C_0(X)$

ii) $[\pi(f), F] \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\forall f \in \mathcal{A}$, *où $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre dense de $C_0(X)$.*

Si $(\mathcal{H}, \pi, F)$ est un élément de Kasparov non borné, alors $(\mathcal{H}, \pi, \frac{F}{\sqrt{1+F^2}}) \in \mathcal{E}_i^{\Gamma}(C_0(X), \mathbb{C})$.

Exemples 1.14
Nous donnons ici des exemples d'éléments de K-homologie bornés et non bornés.

(1) (Voir exemple 1 dans [Val96]) Soit H un sous-groupe fini de Γ et soit ρ une représentation unitaire de dimension finie de H sur un espace vectoriel complexe V_ρ. Prenons $X_H = \Gamma/H$, avec l'action de Γ par translation à gauche; c'est un espace discret, propre et Γ-compact. En

identifiant X_H avec l'ensemble des mesures de probabilité uniformes sur les classes latérales γH, $\gamma \in \Gamma$, l'espace X_H se plonge dans $\underline{E\Gamma}$. Considérons maintenant $\mathcal{H}^0$ l'espace de Hilbert de la représentation induite de H à Γ

$$\mathcal{H}^0 = \{\xi : \Gamma \to V_\rho : \xi(\gamma h) = \rho(h^{-1})\xi(\gamma) \text{ pour tous } h \in H,\ \gamma \in \Gamma \text{ et } \sum_{x \in \Gamma/H} \|\xi(x)\|^2 < \infty\}.$$

L'action de Γ sur $\mathcal{H}^0$ est donnée par : $(\gamma.\xi)(\gamma') := \xi(\gamma^{-1}\gamma')$.
Notons que c'est aussi l'espace des sections L^2 du fibré vectoriel induit $E_\rho = \Gamma \times_H V_\rho$ sur $X_H = \Gamma/H$. Prenons pour π la représentation de $C_0(X_H)$ par multiplication ponctuelle sur $\mathcal{H}^0$; comme X_H est discret et que V_ρ est de dimension finie, cette représentation agit par des opérateurs diagonaux dont les valeurs propres tendent vers 0, donc par des opérateurs compacts. Ainsi le triple $(\mathcal{H} = \mathcal{H}^0 \oplus 0, \pi, 0)$ définit un élément $\beta_{H,\rho}$ de $K_0^\Gamma(\underline{E\Gamma})$.

(2) Soient $X = S^1$ et $\Gamma = \{e\}$. Dans l'espace de Hilbert $L^2(S^1)$ muni de la base trigonométrique $(e^{2\pi i n\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$, on a la représentation M de $C(S^1)$ par multiplication ponctuelle. Considérons l'opérateur F, diagonal dans cette base, donné par

$$F = diag(sign(n))_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Alors on vérifie facilement que le triple $(L^2(S^1), M, F)$ définit un opérateur elliptique généralisé; c'est en fait le générateur de "Toeplitz" de $K_1(S^1) = KK_1(C(S^1), \mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}$. Notons que l'image non bornée du générateur de "Toeplitz" est le triple $(L^2(S^1), M, D)$, où

$$D = \frac{1}{i}\frac{d}{d\theta},$$

puisque $F = \frac{D}{|D|}$.

(2bis) Via l'isomorphisme $K_1(S^1) \simeq K_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$, le triple $(L^2(S^1), M, D)$ va sur $(L^2(\mathbb{R}), \tilde{M}, \tilde{D})$, où $\tilde{M}$ est la représentation $\mathbb{Z}$-covariante de $C_0(\mathbb{R})$ par multiplication ponctuelle sur $L^2(\mathbb{R})$, et

$$\tilde{D} = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}.$$

C'est donc le générateur de $K_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$.

(3) Pour $\Gamma = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n$, prenons $\underline{E\Gamma} = \mathbb{R}$. Alors $K_1^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}^n$, en effet : soit $[(\mathcal{H}, \pi, F)] \in K_1^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n}(\mathbb{R})$; considérons la restriction de la représentation unitaire u de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n$ sur $\mathcal{H}$ à $\mathbb{Z}/n$, alors $u|_{\mathbb{Z}/n}$ se décompose canoniquement comme suit :

$$u|_{\mathbb{Z}/n} = \bigoplus_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}/n}} U_\chi$$

où χ parcourt l'ensemble des caractères de $\mathbb{Z}/n$. L'espace de représentation de U_χ est l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}_\chi = \{\xi \in \mathcal{H} \ : \ u(g)\xi = \chi(g)\xi, \ \forall g \in \mathbb{Z}/n\}.$$

Comme on peut supposer que F commute à $\mathbb{Z}/n$, $\mathcal{H}_\chi$ est invariant par F. De plus $\mathcal{H}_\chi$ est aussi invariant par π puisque $\mathbb{Z}/n$ agit trivialement sur $\mathbb{R}$. Donc $K_1^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n}(\mathbb{R}) \simeq \bigoplus_{\chi\in\widehat{\mathbb{Z}/n}} K_{1,\chi}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n}(\mathbb{R})$, où $K_{1,\chi}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des classes $[\mathcal{H}, \pi, F]$ munies de l'action de $\mathbb{Z}/n$ via χ. Donc une base de $K_1^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n}(\mathbb{R})$ est :

$\{e_l = [L^2(\mathbb{R}), M, D = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}]_l$, où l'action de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n$ sur $L^2(\mathbb{R})$ est donnée par $af(x) = f(x+1)$, $bf(x) = \omega^l f(x)$ et où M est la représentation $(\mathbb{Z}\times \mathbb{Z}/n)$-covariante de $C_0(\mathbb{R})$ par multiplication sur $L^2(\mathbb{R})$, $l = 0, 1, \ldots, n-1\}$.

Ici ω est une racine n-ième primitive de l'unité et a (respectivement b) est un générateur de $\mathbb{Z}$ (respectivement de $\mathbb{Z}/n$).

(4) Soit X une variété compacte, soient E_0, E_1 deux fibrés vectoriels complexes sur X. Rappelons qu'un opérateur pseudo-différentiel P définit une application linéaire continue $P \ : \ C^\infty(X; E_0) \to C^\infty(X; E_1)$, où $C^\infty(X; E_i)$ est l'espace des sections lisses de E_i, $i = 0, 1$. Si P est d'ordre 0, il s'étend en un opérateur linéaire continu, encore noté

$P : L^2(X; E_0) \to L^2(X; E_1)$ où $L^2(X; E_i)$ désigne l'espace des sections L^2 de E_i. Un opérateur pseudo-différentiel P a un symbole σ_P qui est une section lisse du fibré $\mathrm{Hom}(E_0, E_1)$ au dessus de T^*X (l'espace total du fibré cotangent de X), c'est-à-dire $\sigma_P(x, \xi_x) \in \mathcal{L}((E_0)_x, (E_1)_x)$ pour tous $x \in X$, $\xi_x \in T_x^*(X)$. Quand P est d'ordre 0, son symbole est borné sur T^*X. On dit que P est elliptique, si σ_P est inversible en dehors d'un compact de T^*X; dans ce cas P définit un opérateur de Fredholm c'est-à-dire, il existe $Q : L^2(X; E_1) \to L^2(X; E_0)$ tel que $PQ - 1$ et $QP - 1$ sont compacts. Remarquons maintenant que $C(X)$, l'espace des fonctions continues sur X, possède deux représentations par multiplications sur $L^2(X; E_0)$ et $L^2(X; E_1)$, notées M^{E_0} et M^{E_1}. Pour toute $f \in C^\infty(X)$, $M^{E_0}(f)$ et $M^{E_1}(f)$ sont des opérateurs différentiels d'ordre 0, ce qui implique que $PM^{E_0}(f) - M^{E_1}(f)P$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 à symbole nul et donc définit un opérateur compact sur L^2. Par densité de $C^\infty(X)$, l'opérateur $f \mapsto PM^{E_0}(f) - M^{E_1}(f)P$ est compact pour toute $f \in C(X)$. Ainsi le triple $(L^2(X, E_0) \oplus L^2(X, E_1), M, F = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ P & 0 \end{pmatrix})$ définit un élément de $K_0(X)$.

Plus concrètement, considérons le fibré vectoriel complexe $\Lambda^* T^* X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sur X; notons que l'espace des sections de ce fibré s'identifie à l'algèbre des formes différentielles extérieures à coefficients complexes $\Omega^*(X)$. L'opérateur de Hodge (voir par exemple [Sha78], §6) $\not{\partial}$ sur $\Omega^*(X)$ est l'opérateur différentiel elliptique, non borné de degré 1 défini par :

$$\begin{aligned} \not{\partial} : \quad C^\infty(\Omega^*(X)) &\to C^\infty(\Omega^*(X)) \\ \omega &\mapsto \not{\partial}\omega = d\omega + d^*\omega \end{aligned}$$

où d est l'opérateur de de Rham.
Par l'exemple ci-dessus, l'opérateur de Hodge nous définit donc un élément noté $[\not{\partial}] \in K_0(X)$.

1.3 Enoncé de la conjecture de Baum-Connes

Soit Γ un groupe discret dénombrable. La conjecture de Baum-Connes relie le calcul du groupe analytique de la K-théorie de $C_r^*(\Gamma)$ au calcul de la K-homologie équivariante de $\underline{E\Gamma}$. Plus précisement P. Baum et A. Connes conjecturent que l'application

$$\mu_i^\Gamma \, : \, K_i^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \to K_i(C_r^*(\Gamma))$$

est un isomorphisme. Nous allons rappeler ici la définition de cette flèche (selon [BCH94]); pour plus de détails voir [Val96].
Soit X un Γ-espace propre et Γ-compact et soit $[\mathcal{H}, \pi, F] \in K_i^\Gamma(X)$ tel que F est supposé Γ-équivariant et à support propre. On considère le sous-espace dense $\pi(C_c(X))\mathcal{H}$, où $C_c(X)$ est l'espace des fonctions continues à support compact sur X; c'est naturellement un Γ-module. On le munit d'une structure de $\mathbb{C}\Gamma$-module à droite:

$$\xi.\gamma = \gamma^{-1}\xi,$$

et comme l'action de Γ est propre, on peut le munir d'un produit scalaire à valeurs dans $\mathbb{C}\Gamma$ défini par :

$$\langle \xi, \eta \rangle (\gamma) = \langle \xi | \gamma \eta \rangle .$$

La fonction $\gamma \mapsto \langle \xi | \gamma \xi \rangle$ est positive dans $C_r^*(\Gamma)$ (voir [Dix69], 13.7.8). En complétant $\pi(C_c(X))\mathcal{H}$ suivant ce produit scalaire, on obtient un C^*-module de Hilbert $\mathcal{E}$ sur $C_r^*(\Gamma)$.

Lemme 1.16 *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur Γ-équivariant tel que*

$$T(\pi(C_c(X))\mathcal{H}) \subseteq \pi(C_c(X))\mathcal{H}.$$

Alors T s'étend continûment en un opérateur $\mathcal{T} \in \mathcal{L}_{C_r^*(\Gamma)}(\mathcal{E})$.

Preuve : Considérons, pour $\xi \in \pi(C_c(X))\mathcal{H}$, la fonction

$$\Gamma \to \mathbb{C}, \ \gamma \mapsto \|T\|^2 \langle \xi | \gamma \xi \rangle - \langle T\xi, \gamma T \xi \rangle \, ;$$

c'est une fonction de type positif sur Γ. En effet, soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} \overline{\lambda}_i \lambda_j (\|T\|^2 \left\langle \xi | \gamma_i^{-1} \gamma_j \xi \right\rangle - \left\langle T\xi | \gamma_i^{-1} \gamma_j T\xi \right\rangle) \\ = \|T\|^2 \, \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_i \xi\|^2 - \|T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_i \xi)\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

où l'égalité résulte de la Γ-équivariance de T. Donc, au sens de l'ordre dans $C_r^*(\Gamma)$, nous pouvons écrire

$$\langle T\xi | T\xi \rangle (\cdot) \leq \|T\|^2 \langle \xi | \xi \rangle (\cdot).$$

Ainsi :

$$\|T\xi\|_{\mathcal{E}}^2 = \| \langle T\xi | \cdot T\xi \rangle \|_{C_r^*(\Gamma)} \leq \|T\|^2 \, \| \langle \xi | \cdot \xi \rangle \|_{C_r^*(\Gamma)} = \|T\|^2 \, \|\xi\|_{\mathcal{E}},$$

ce qui termine la preuve. □

Le lemme ci-dessus nous dit donc que F s'étend en un opérateur $\mathcal{F} \in \mathcal{L}_{C_r^*(\Gamma)}(\mathcal{E})$. Et comme par la proposition 2 dans [Val96], on a que $\mathcal{F}^2 - 1$ est un opérateur compact sur le C^*-module $\mathcal{E}$, la paire $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ définit un élément dans $KK_i(\mathbb{C}, C_r^*(\Gamma)) = K_i(C_r^*(\Gamma))$. Notons que dans [BCH94], cet élément est appelé Γ-indice de F et noté $\mathrm{Indice}_\Gamma(F)$.

Définition 1.17 *L'homomorphisme*

$$\begin{aligned}\mu_i^\Gamma \; : \quad & K_i^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \to K_i(C_r^*(\Gamma)) \\ & (\mathcal{H}, \pi, F) \mapsto \mathrm{Indice}_\Gamma(F)\end{aligned}$$

s'appelle l'application d'assemblage.

Remarque 1.18 *L'application μ_i^Γ se factorise via*

$$\tilde{\mu}_i^\Gamma \; : \; K_i^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \to K_i(C^*(\Gamma))$$

où $C^*(\Gamma)$ est la C^*-algèbre maximale de Γ qui est la C^*-algèbre enveloppante de $l^1(\Gamma)$ [Jul97].

Exemple 1.19 *(Voir exemple 1 dans [Val96]) Calculons $\mu_0^\Gamma(\beta_{H,\rho})$, où $\beta_{H,\rho}$ est l'élément de $K_0^\Gamma(\underline{E\Gamma})$ défini dans l'exemple 1.14(1). Remarquons d'abord qu'on peut supposer que ρ est irréductible. Donc*

$$\pi(C_c(X_H))\mathcal{H} = \mathbb{C}\Gamma \bigotimes_{\mathbb{C}H} V_\rho,$$

l'espace des sections de E_ρ à support fini. Comme ρ est irréductible, il existe un projecteur minimal $p_{H,\rho} \in \mathbb{C}H$ tel que les $\mathbb{C}H$-modules V_ρ et $\mathbb{C}H * p_{H,\rho}$ sont isomorphes. Pour $\xi \in \mathbb{C}\Gamma$, posons

$$\check{\xi}(\gamma) = \xi(\gamma^{-1}), \quad \gamma \in \Gamma.$$

On vérifie alors que l'application de $\mathbb{C}\Gamma$-modules à droite :

$$\psi \; : \; \mathbb{C}\Gamma \bigotimes_{\mathbb{C}H} (\mathbb{C}H * p_{H,\rho}) \to p_{H,\rho} * \mathbb{C}\Gamma \quad : \; a \otimes b \mapsto \check{b} * \check{a}$$

s'étend en une isométrie de $C_r^*(\Gamma)$-modules de Hilbert entre la complétion de $\mathbb{C}\Gamma \otimes_{\mathbb{C}H} (\mathbb{C}H * p_{H,\rho})$ et l'idéal à droite $p_{H,\rho} C_r^*(\Gamma)$ dans $C_r^*(\Gamma)$. D'où $\mu_0^\Gamma(\beta_{H,\rho}) = [p_{H,\rho}]$, la classe du projecteur $p_{H,\rho}$ dans $K_0(C_r^*(\Gamma))$. En particulier, pour $[\Gamma] := \beta_{1,1_H}$, c'est-à-dire pour $H = 1$ et $\rho = 1_H$ la représentation triviale, on obtient $\mu_0^\Gamma([\Gamma]) = [1]$, la classe de l'unité dans $K_0(C_r^*(\Gamma))$.

Avec les notations déjà introduites, la conjecture de Baum-Connes s'énonce :

Conjecture 1 *Pour tout groupe discret dénombrable, l'application d'assemblage*

$$\mu_i^\Gamma \; : \; K_i^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \to K_i(C_r^*(\Gamma))$$

est un isomorphisme, pour $i = 0, 1$.

Donnons un premier exemple où la conjecture de Baum-Connes est vérifiée.

Lemme 1.20 *Soit Γ un groupe fini. Alors μ_i^Γ est un isomorphisme pour $i = 0, 1$.*

Preuve : Pour $i = 1$, c'est trivial puisque $K_1^\Gamma(\underline{E\Gamma}) = 0 = K_1(C_r^*(\Gamma))$. Pour $i = 0$, commençons par montrer que $K_0^\Gamma(pt)$ est isomorphe au groupe additif de l'anneau des représentations $R(\Gamma)$, c'est-à-dire au groupe abélien libre sur l'ensemble $\hat{\Gamma}$ des classes d'isomorphie des représentations irréductibles de Γ. En effet, soit $[\mathcal{H} = \mathcal{H}^0 \oplus \mathcal{H}^1, \pi, F] \in K_0^\Gamma(pt)$ et soit $P = \pi(1) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, projecteur de degré 0 par rapport à la graduation. Considérons l'opérateur $F_P = PF|_{P(\mathcal{H})}$; c'est un opérateur de degré 1, donc il s'écrit sous la forme

$$F_P = \begin{pmatrix} 0 & F_P^- \\ F_P^+ & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $F_P^+ = PF|_{P(\mathcal{H}^0)} : P(\mathcal{H}^0) \to P(\mathcal{H}^1)$ est un opérateur de Fredholm car par hypothèse, les opérateurs $F_P^+ F_P^- - 1$ et $F_P^- F_P^+ - 1$ sont compacts sur $\mathcal{H}$. Ainsi $\operatorname{Ker} F_P^+$ et $\operatorname{Ker}(F_P^+)^*$ sont des espaces de représentations de Γ de dimension finie et l'homomorphisme μ_0^Γ est donc donné par :

$$F \mapsto [\operatorname{Ker} F_P^+] - [\operatorname{Ker}(F_P^+)^*] \in R(\Gamma).$$

Maintenant si nous prenons dans l'exemple 1.19 $H = \Gamma$, alors $\{\beta_{\Gamma,\rho}\}_{\rho \in \hat{\Gamma}}$ (respectivement $\{[P_{\Gamma,\rho}]\}_{\rho \in \hat{\Gamma}}$) est un ensemble de générateurs de $K_0^\Gamma(pt)$ (respectivement de $K_0(C_r^*(\Gamma))$). Donc μ_0^Γ est un isomorphisme. □

Chapitre 2

Sur le triangle $(H_0(\Gamma, F\Gamma), K_0^\Gamma(\underline{\mathbf{E}\Gamma}), K_0(C_r^*(\Gamma))$

Dans la première section, nous construisons un homomorphisme "analytique" $\beta_a : H_0(\Gamma, F\Gamma) \to K_0(C_r^*(\Gamma)) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{C}$ qui se factorise via $K_0(l^1(\Gamma)) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{C}$:

$$H_0(\Gamma, F\Gamma) \xrightarrow{\beta_{alg}} K_0(l^1(\Gamma)) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{C} \longrightarrow K_0(C_r^*(\Gamma)) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{C}.$$

Nous montrons que la flèche "algébrique" β_{alg} est injective. Dans la deuxième section, nous montrons qu'il existe un lien avec la flèche de Baum-Connes; en fait nous construisons un homomorphisme "topologique" $\beta_t : H_0(\Gamma, F\Gamma) \to K_0^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{C}$ qui vérifie : $\beta_a = (\mu_0^\Gamma \otimes 1) \circ \beta_t$.

Considérons tout d'abord le cas où Γ est sans torsion; alors $K_0^\Gamma(E\Gamma) = K_0(B\Gamma)$; de plus, on a grâce au caractère de Chern en K-homologie $K_0(B\Gamma) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{C} \simeq \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_{2n}(\Gamma, \mathbb{C})$. Mais comme $\mu_0^\Gamma([\Gamma]) = [1]$ (voir exemple 1.19), on a le triangle commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
K_0^\Gamma(E\Gamma) \arrow[r, "\mu_0^\Gamma"] & K_0(C_r^*(\Gamma)) \\
\mathbb{Z} = H_0(\Gamma, \mathbb{Z}) \arrow[u, "\beta_t"] \arrow[ur, "\beta_a"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft", shift left=3] &
\end{tikzcd}$$

où $\beta_t[1] := [\Gamma]$ et $\beta_a[1] = [1]$.
Maintenant comme l'image de [1] par la trace canonique $K_0(C_r^*(\Gamma)) \to \mathbb{R}$ vaut 1, [1] est d'ordre infini dans $K_0(C_r^*(\Gamma))$ et donc β_a est injectif. Donc l'application μ_0^Γ est injective sur le sous-groupe engendré par $[\Gamma]$ dans $K_0^\Gamma(\underline{E}\Gamma)$.

2.1 Définition de $\beta_a : H_0(\Gamma, F\Gamma) \to K_0(C_r^*(\Gamma)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$

Notons $S\Gamma$ l'ensemble des éléments elliptiques de Γ, c'est-à-dire les éléments d'ordre fini; c'est un ensemble non vide puisqu'il contient au moins l'identité de Γ. Via l'action de Γ par conjugaison sur $S\Gamma$, on munit $F\Gamma$, l'espace des fonctions complexes sur Γ à support fini contenu dans $S\Gamma$, d'une structure de Γ-module. On note alors $H_n(\Gamma, F\Gamma)$ le n-ème groupe d'homologie de Γ à coefficients dans le Γ-module $F\Gamma$.

Remarque 2.1 *Soit* $S = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\} \subseteq \Gamma$ *un ensemble de représentants des classes de conjugaison elliptiques de* Γ*; notons que l'identité appartient à cet ensemble. Soit* $F[\gamma_j]$ *le* Γ*-sous-module de* $F\Gamma$ *engendré par la classe de* γ_j*. Alors*

$$F\Gamma = \bigoplus_j F[\gamma_j].$$

Soit $Z_\Gamma(\gamma_j)$ *le centralisateur de* γ_j *dans* Γ*. Alors par le lemme de Shapiro (voir [Bro82]), on a*

$$H_n(\Gamma, F\Gamma) \simeq \bigoplus_j H_n(\Gamma, F[\gamma_j]) \simeq \bigoplus_j H_n(Z_\Gamma(\gamma_j), \mathbb{C})$$

où le dernier terme désigne l'homologie à coefficient complexes.
En particulier pour $n = 0$*, nous obtenons*

$$H_0(\Gamma, F\Gamma) = \bigoplus_j H_0(Z_\Gamma(\gamma_j), \mathbb{C}) = \mathbb{C}[\gamma_1] \oplus \mathbb{C}[\gamma_2] \oplus \ldots$$

où chaque $[\gamma_j]$ *est un symbole tel que* $H_0(Z_\Gamma(\gamma_j), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\gamma_j] \simeq \mathbb{Z}$.

Soit maintenant $\gamma \in S$, $|\gamma| = n$; soient ω une racine n-ème primitive de l'unité et $P_{\omega^i} = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \omega^{il}\gamma^l \in \mathbb{C}\Gamma$ les projecteurs spectraux associés à γ ($0 \leq i \leq$

$n-1$). Remarquons que comme $P_{\omega^i}P_{\omega^k} = 0$ pour $i \neq k$ et $\sum_{i=0}^{n-1} P_{\omega^i} = 1$, on peut écrire $C_r^*(Z_\Gamma(\gamma)) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} P_{\omega^i}C_r^*(Z_\Gamma(\gamma))$ où chaque $P_{\omega^i}C_r^*(Z_\Gamma(\gamma))$ est une C^*-algèbre à unité P_{ω^i}; notons $\iota_{\omega^i} : P_{\omega^i}C_r^*(Z_\Gamma(\gamma)) \to C_r^*(\Gamma)$ l'injection canonique (non unitale!), et encore ι_{ω^i} l'homomorphisme induit au niveau du groupe de K-théorie K_0.

Définition 2.2 *Pour définir* $\beta_a : H_0(\Gamma, F\Gamma) \to K_0(C_r^*(\Gamma)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, *nous définissons* $\beta_{a|_{\mathbb{C}[\gamma]}}$, *comme la composition des homomorphismes suivants :*

$$\begin{tikzcd}
\beta_{a|_{\mathbb{C}[\gamma]}} : \mathbb{Z}[\gamma]\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C} \arrow[r, "\beta_a \otimes \mathbf{1}"] & K_0(C_r^*(Z_\Gamma(\gamma)))\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C} \arrow[d, "\simeq"] \\
& \bigoplus_i K_0(P_{\omega^i}C_r^*(Z_\Gamma(\gamma))\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C} \arrow[d, "\sum_{i=0}^{n-1}(\iota_{\omega^i}\otimes\overline{\omega}^i)"] \\
& K_0(C_r^*(\Gamma))\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

où $\beta_a : \mathbb{Z}[\gamma] \to K_0(C_r^*(Z_\Gamma(\gamma)))$ *est l'homomorphisme qui à* $[\gamma]$ *associe* $[1]$, *la classe de l'unité de* $C_r^*(Z_\Gamma(\gamma))$. *Ainsi*

$$\beta_a([\gamma]) = \sum_{i=0}^{n-1}[P_{\omega^i}] \otimes \overline{\omega}^i.$$

Notons que, si Γ est sans torsion, on retrouve la formule donnée au début du chapitre.

Remarque 2.3 *Comme la formule de* β_a *est entièrement algébrique,* β_a *se factorise naturellement via* $K_0(\mathcal{A})$, *où* $\mathcal{A}$ *est n'importe quelle sous-algèbre de* $C_r^*(\Gamma)$ *contenant* $\mathbb{C}\Gamma$, *par exemple* $\mathcal{A} = l^1(\Gamma)$ *:*

$$\begin{tikzcd}
\beta_a : H_0(\Gamma, F\Gamma) \arrow[rr] \arrow[dr, "\beta_{alg}"'] & & K_0(C_r^*(\Gamma))\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C} \\
& K_0(l^1(\Gamma))\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Théorème 2.4 $\beta_{alg}\ :\ H_0(\Gamma, F\Gamma) \to K_0(l^1(\Gamma)) \otimes \mathbb{C}$ *est injective.*

Preuve : Associons à chaque classe de conjugaison elliptique C_j (avec $\gamma_j \in C_j$) la trace suivante :

$$\begin{array}{rlll} \tau_{C_j}\ : & l^1(\Gamma) & \to \mathbb{C} \\ & a = \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma\delta_\gamma & \mapsto \sum_{\gamma\in C_j} a_\gamma \end{array}$$

Notons encore τ_{C_j} l'homomorphisme associé $K_0(l^1(\Gamma)) \to \mathbb{C}$; on a alors

$$\begin{aligned} \bullet\ (\tau_{C_j}\otimes \mathbf{1})(\beta_{alg}[\gamma_j]) &= \frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1}\overline{\omega}^i \sum_{l:\gamma_j^l\in C_j}\omega^{il} \\ &= \frac{1}{n_j}\sum_{i=0}^{n_j-1}\overline{\omega}^i(\omega^i + \sum_{l:\gamma_j^l\in C_j, l\neq 1}\omega^{il}) \\ &= \frac{1}{n_j}\left[\sum_{i=0}^{n_j-1} 1 + \sum_{l:\gamma_j^l\in C_j, l\neq 1}\ \sum_{i=0}^{n_j-1}\omega^{i(l-1)}\right] \\ &= 1. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $k \neq j$:

$$\begin{aligned} \bullet\ (\tau_{C_j}\otimes \mathbf{1})(\beta_{alg}[\gamma_k]) &= \frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1}\overline{\omega}_k^i \sum_{l:\gamma_k^l\in C_j}\omega_k^{il} \\ &= \frac{1}{n_k}\sum_{l:\gamma_k^l\in C_j}\ \sum_{i=0}^{n_k-1}\omega_k^{i(l-1)} \\ &= 0\ \ \text{(car on a } l\neq 1 \text{ pour tout } l \text{ dans cette somme).} \end{aligned}$$

Donc

$$(\tau_{C_j}\otimes \mathbf{1})(\beta_{alg}[\gamma_k]) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit maintenant $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k[\gamma_k] \in H_0(\Gamma, F\Gamma)$, alors

$$\tau_{C_j}\circ\beta_{alg}(x) = \alpha_j \qquad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

D'où l'injectivité. □

Remarque 2.5 *Si* Γ *est un groupe de type fini et virtuellement nilpotent, alors* $K_0(l^1(\Gamma)) \simeq K_0(C_r^*(\Gamma))$ *(voir [Lep81], [Ros84]). Dans ce cas* β_a *est injective.*

2.2 Définition de $\beta_t : H_0(\Gamma, F\Gamma) \to K_0^\Gamma(\underline{\mathbf{E}\Gamma}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$

Pour définir β_t, notons que tout $\gamma \in S$ d'ordre n définit uniquement un homomorphisme de groupe

$$\begin{aligned} \alpha_\gamma : G_n := \mathbb{Z}/n &\to \Gamma \\ b &\mapsto \gamma \end{aligned}$$

où $b \in \mathbb{Z}/n$ est le générateur canonique de $\mathbb{Z}/n$. De plus, le caractère de Chern équivariant de Baum-Connes (voir [BC88]) induit un isomorphisme

$$ch \otimes \mathbf{1} : K_0^{G_n}(\underline{EG_n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \to H_0(G_n, FG_n)$$

Comme G_n est abélien, l'action de G_n sur FG_n est triviale (on rappelle que l'action est par conjugaison), donc $H_0(G_n, FG_n)$, ou encore l'espace des co-invariants de FG_n, n'est autre que $FG_n = \mathbb{C}b^0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}b^{n-1}$.
Soit alors $x_n = (ch \otimes \mathbf{1})^{-1}(b) \in K_0^{G_n}(\underline{EG_n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. Par fonctorialité, on obtient un homomorphisme $(\alpha_\gamma)_* : K_0^{G_n}(\underline{EG_n}) \to K_0^\Gamma(\underline{E\Gamma})$ et on pose alors:

$$\beta_t([\gamma]) := (\alpha_\gamma)_*(nx_n).$$

Remarquons que par construction $\beta_t : H_0(\Gamma, F\Gamma) \to K_0^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ est un homomorphisme.

Calculons maintenant explicitement x_n :

Lemme 2.6 $x_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \otimes \overline{\omega}^i$, *où les* ρ_i $(i = 0, \ldots, n-1)$ *sont les* n *représentations irréductibles de* $\mathbb{Z}/n$, *définies par* $\rho_i(b) = \omega^i$.

Preuve : Commençons par rappeler la définition du caractère de Chern équivariant pour un groupe fini Γ (voir [BC88], p169). Dans ce cas $K_0^\Gamma(pt)$

est isomorphe au groupe additif de l'anneau des représentations $R(\Gamma)$, i.e. au groupe abelien libre sur $\hat{\Gamma}$, l'ensemble des classes d'isomorphie des représentations irréductibles de Γ. Ecrivons alors $K_0^\Gamma(pt) \simeq \bigoplus_{\rho_i \in \hat{\Gamma}} \mathbb{Z}[\rho_i]$. De plus, comme la cardinalité de $\hat{\Gamma}$ est le nombre de classes de conjugaison de Γ et que $H_0(\Gamma, F\Gamma)$ s'identifie à l'espace des fonctions centrales sur Γ, on peut écrire $H_0(\Gamma, F\Gamma) = \bigoplus_{i=0}^{|\hat{\Gamma}|-1} \mathbb{C}[1_{C_i}]$, où 1_{C_i} est la fonction caractéristique de la classe de conjugaison C_i. Alors

$$\begin{aligned} ch_*^\Gamma \;:\; K_0^\Gamma(pt) = \oplus_{\rho_i \in \hat{\Gamma}} \mathbb{Z}[\rho_i] &\;\to\; H_0(\Gamma, F\Gamma) \\ \rho_i &\;\mapsto\; (\chi_{\rho_i} : \Gamma \to \mathbb{C},\; g \mapsto Tr(\rho_i(g)))\,. \end{aligned}$$

Revenons à notre problème c'est-à-dire pour $\Gamma = \mathbb{Z}/n$ engendré par b. Dans ce cas, on sait que les représentations irréductibles de $\mathbb{Z}/n$ sont de degré 1. Une telle représentation associe à b un nombre complexe ω vérifiant $\omega^n = 1$, c'est-à-dire $\omega = e^{\frac{2\pi i h}{n}}$ avec $h = 0, 1, \ldots, n-1$. On trouve ainsi n représentations irréductibles ρ_h de degré 1 dont les caractères $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{n-1}$ sont donnés par les formules:

$$\chi_{\rho_h}(b^k) = e^{\frac{2\pi i h k}{n}}.$$

Donc calculer le caractère de Chern équivariant revient à tracer le tableau des caractères irréductibles:

	1	b	b^2	$\cdots$	b^{n-1}
χ_0	1	1	1	$\cdots$	1
χ_1	1	ω	ω^2	$\cdots$	ω^{n-1}
χ_2	1	ω^2	ω^4	$\cdots$	ω^{2n-2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
χ_{n-1}	1	ω^{n-1}	ω^{2n-2}	$\cdots$	$\omega^{(n-1)^2}$

Donc trouver le vecteur x_n revient à resoudre l'équation $Ax_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; où A

est la matrice de Vandermonde, donc $x_n = A^{-1}a^{(1)}$. Mais

$$A^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \overline{\omega} & \cdots & \overline{\omega}^{n-1} \\ 1 & \overline{\omega}^2 & \cdots & \overline{\omega}^{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \overline{\omega}^{n-1} & \cdots & \overline{\omega}^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

Donc $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{\overline{\omega}}{n}, \frac{\overline{\omega}^2}{n}, \ldots, \frac{\overline{\omega}^{n-1}}{n}) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \otimes \frac{\overline{\omega}^i}{n}$.

Remarque 2.7 *Grâce au lemme ci-dessus, on a une formule pour* $\beta_t[\gamma] \in K_0^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ *:*

$$\beta_t[\gamma] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Ind}_{\langle\gamma\rangle}^\Gamma(\rho_i) \otimes \overline{\omega}^i.$$

2.3 Lien avec la conjecture de Baum-Connes

Dans cette section nous montrons que les homomorphismes β_a et β_t sont liés par l'application de Baum-Connes, plus précisément : $(\mu_0^\Gamma \otimes \mathbf{1}) \circ \beta_t^\Gamma = \beta_a^\Gamma$. Pour cela, nous avons besoin de le montrer d'abord pour le cas particulier du groupe cyclique fini $G_n = \mathbb{Z}/n$.

Commençons par montrer le lemme technique suivant :

Lemme 2.8 *Soit* $G_n = \mathbb{Z}/n$*, engendré par* b*, soient* $P_{\omega^i} = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \omega^{il}b^l$, $P_{\omega^i}^{(k)} = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \omega^{il}b^{kl}$*, où* $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$*. Alors*

$$\sum_{i=0}^{n-1} P_{\omega^i} \otimes \overline{\omega}^{ik} = \sum_{i=0}^{n-1} (P_{\omega^i}^{(k)}) \otimes \overline{\omega}^i \quad \textit{dans } \mathbb{C}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$$

pour $k = 0, \ldots, n-1$.

Preuve : Pour $k = 0$, c'est trivial. Si $k \neq 0$, posons $D = pgcd(n, k)$, alors on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} P_{\omega^i} \otimes \overline{\omega}^{ik} = \frac{1}{n} \sum_{\substack{0 \le i \le n-1 \\ \text{et } D|i}} \left[\sum_{\substack{0 \le i' \le n-1 \\ \text{et } i'k \equiv i(n)}} \left(\sum_{l=0}^{n-1} \omega^{i'l} b^l \right) \right] \otimes \overline{\omega}^i.$$

Distinguons les deux cas suivants :

Cas 1. k divise n (et donc $k = D$ divise i dans la somme ci-dessus) :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{0\le i'\le n-1\\ \text{et } i'k\equiv i(n)}} \sum_{l=0}^{n-1} \omega^{i'l} b^l &= \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{k-1} \omega^{\frac{sn+i}{k}l} b^l \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \omega^{\frac{il}{k}} \left(\sum_{s=0}^{k-1} \omega^{\frac{sn}{k}l}\right) b^l.\end{aligned}$$

$$\text{Mais } \sum_{s=0}^{k-1} \omega^{\frac{sn}{k}l} = \begin{cases} k & \text{si } l \text{ est multiple de } k \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc } \sum_{i=0}^{n-1} P_{\omega^i} \otimes \overline{\omega}^{ik} &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{0\le i\le n-1\\ \text{et } k|i}} \left(k \sum_{\substack{0\le l\le n-1\\ \text{et } k|l}} \omega^{\frac{il}{k}} b^l \right) \otimes \overline{\omega}^i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{0\le i\le n-1\\ \text{et } k|i}} \left(\sum_{l=0}^{n-1} \omega^{il} b^{kl} \right) \otimes \overline{\omega}^i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{l=0}^{n-1} \omega^{il} b^{kl} \right) \otimes \overline{\omega}^i\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte du fait que

$$\sum_{l=0}^{n-1} \omega^{il} b^{kl} = \sum_{\substack{0\le l\le n-1\\ \text{et } k|l}} \omega^{\frac{il}{k}} \left(\sum_{s=0}^{k-1} \omega^{\frac{sn}{k}i}\right) b^l = 0 \text{ si } i \text{ n'est pas multiple de } k.$$

Cas 2. k ne divise pas n : posons $M = ppcm(n, k)$

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{0\le i'\le n-1\\ \text{et } i'k\equiv i(n)}} \sum_{l=0}^{n-1} \omega^{i'l} b^l &= \sum_{l=0}^{n-1} \left(\sum_{s=0}^{\frac{nk}{M}-1} \omega^{(\frac{sM+i}{k})l} \right) b^l \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \omega^{\frac{il}{k}} \left(\sum_{s=0}^{\frac{nk}{M}-1} \omega^{\frac{sM}{k}l} \right) b^l \\ &= \frac{nk}{M} \sum_{\substack{0\le l\le n-1\\ \text{et } k|l}} \omega^{\frac{il}{k}} b^l \\ &= \sum_{0\le l\le n-1} \omega^{il} b^{kl}\end{aligned}$$

Et on conclut comme ci-dessus.

□

Remarquons que dans la preuve de ce lemme, on aurait pu regrouper les deux cas ensemble, en effet, si k divise n, alors le $ppcm(n, k)$ est égal à n.

Lemme 2.9 *Soit* $G_n = \mathbb{Z}/n$*, alors le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} K_0^{G_n}(\underline{EG_n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \arrow[r, "\tilde{\mu}_0^{G_n} \otimes \mathbf{1}"] & K_0(C^*(G_n)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \\ H_0(G_n, FG_n) \arrow[u, "\beta_t"] \arrow[ur, "\beta_a"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Preuve : Soit $b^k \in G_n$; notons N l'ordre de b^k dans G_n (donc $N = \frac{n}{pgcd(k,n)}$); on a alors, en notant ω_N une racine N-ème primitive de 1 dans $\mathbb{C}$, et $\rho_{i,N}$ la représentation de $\langle b^k \rangle$ définie par $\rho_{i,N}(b^k) = \omega_N^i$.

$$\begin{aligned} (\tilde{\mu}_0^{G_n} \otimes \mathbf{1}) \circ \beta_t^{G_n}(b^k) &= (\tilde{\mu}_0^{G_n} \otimes \mathbf{1})(\sum_{i=0}^{N-1} \mathrm{Ind}_{\langle b^k \rangle}^{\langle b \rangle}(\rho_{i,N}) \otimes \overline{\omega}_N^i) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{i=0}^{N-1} [P_{\omega_N^i}^{(k)}] \otimes \overline{\omega}_N^i = \beta_a^{G_n}(b^k) \end{aligned}$$

où P_{ω^i} est le projecteur spectral associé à b et où l'égalité $(*)$ vient de l'exemple 1.19.

Remarque 2.10 *Par le lemme 2.8, on a* $\beta_t^{G_n}(b^k) = \sum_{i=0}^{N-1} \rho_{i,N} \otimes \overline{\omega}^{ik}$.

Théorème 2.11 *Soit* Γ *un groupe discret, alors le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} K_0^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \arrow[r, "\mu_0^\Gamma \otimes \mathbf{1}"] & K_0(C_r^*(\Gamma)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \\ H_0(\Gamma, F\Gamma) \arrow[u, "\beta_t"] \arrow[ur, "\beta_a"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Preuve : Fixons $\gamma \in S$ et désignons encore par $\alpha_\gamma : \mathbb{Z}/n \to \Gamma$ l'unique homomorphisme tel que $\alpha_\gamma(b) = \gamma$. Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
K_0^{G_n}(\underline{EG_n}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{C} \arrow[ddd, "\tilde{\mu}_0^{G_n} \otimes \mathbf{1}"'] \arrow[rrr, "(\alpha_\gamma)_* \otimes \mathbf{1}"] & & & K_0^{\Gamma}(\underline{E\Gamma}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{C} \arrow[ddd, "\mu_0^{\Gamma} \otimes \mathbf{1}"] \\
& & & \\
& H_0(G_n, FG_n) \arrow[ull, "\beta_t^{G_n}"'] \arrow[dl, "\beta_a^{G_n}"] \arrow[r, "(\alpha_\gamma)_*"'] \arrow[u, phantom, "(*)"] & H_0(\Gamma, F\Gamma) \arrow[uur, "\beta_t^{\Gamma}"] \arrow[dr, "\beta_a^{\Gamma}"'] & \\
K_0(C^*(G_n)) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{C} \arrow[rrr, "(\alpha_\gamma)_* \otimes \mathbf{1}"'] & & & K_0(C_r^*(\Gamma)) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Remarquons que le grand rectangle commute par la naturalité de la flèche de Baum-Connes (voir théorème 1 dans [Val96]), le triangle de gauche commute par le lemme précédent et $((\alpha_\gamma)_* \otimes \mathbf{1}) \circ \beta_a^{G_n} = \beta_a^{\Gamma} \circ (\alpha_\gamma)_*$ trivialement. Enfin, le diagramme $(*)$ commute. En effet, en suivant les notations de la preuve du lemme 2.9, on a :

$$\begin{aligned}
((\alpha_\gamma)_* \otimes \mathbf{1})(\beta_t^{G_n}[b^k]) &= ((\alpha_\gamma)_* \otimes \mathbf{1}) \left(\sum_{i=0}^{N-1} [\mathrm{Ind}_{\langle b^k \rangle}^{\langle b \rangle}(\rho_{i,N})] \otimes \varpi_N^i \right) \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} [\mathrm{Ind}_{\langle \gamma \rangle}^{\Gamma} \mathrm{Ind}_{\langle b^k \rangle}^{\langle b \rangle}(\rho_{i,N})] \otimes \varpi_N^i \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} [\mathrm{Ind}_{\langle \gamma^k \rangle}^{\Gamma}(\rho_{i,N})] \otimes \varpi_N^i \quad \text{(par induction par étages)} \\
&= \beta_t^{\Gamma}[\gamma^k] = \beta_t^{\Gamma}(((\alpha_\gamma)_* \otimes \mathbf{1})[b^k]).
\end{aligned}$$

□

Chapitre 3

Sur le groupe K_1 des C^*-algèbres réduites de groupes discrets

Soit Γ un groupe discret et soit Γ^{ab} son groupe abélianisé. On sait que Γ s'injecte canoniquement dans le groupe unitaire $U(C^*_r(\Gamma))$. Donc, il existe un homomorphisme canonique $\overline{\kappa}_\Gamma : \Gamma \to K_1(C^*_r(\Gamma))$. Et comme $K_1(C^*_r(\Gamma))$ est abélien, il existe un unique homomorphisme $\kappa_\Gamma : \Gamma^{ab} \to K_1(C^*_r(\Gamma))$ faisant commuter le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "\overline{\kappa}_\Gamma"] \arrow[d, "-"'] & K_1(C^*_r(\Gamma)) \\ \Gamma^{ab} \arrow[ur, "\kappa_\Gamma"'] & \end{tikzcd}$$

où $- : \Gamma \to \Gamma^{ab} : \gamma \mapsto \overline{\gamma}$ est l'homomorphisme quotient.
Le but de ce chapitre est de donner une nouvelle preuve, purement C^*-algébrique, d'un résultat de G. Elliott et T. Natsume [EN87] : l'application canonique

$$\Gamma^{ab} \to K_1(C^*_r(\Gamma))$$

est rationnellement injective (la preuve originale reposait sur la cohomologie cyclique des sous-algèbres denses et stables par calcul fonctionnel holomorphe).

Considérons maintenant la C^*-algèbre maximale de Γ. Parallèlement, l'injection canonique de Γ dans $U(C^*(\Gamma))$ induit une application canonique $\tilde{\kappa_\Gamma}$: $\Gamma^{ab} \to K_1(C^*(\Gamma))$. Et le théorème ci-dessus implique directement que $\tilde{\kappa_\Gamma}$ est aussi rationnellement injective puisque $\kappa_\Gamma = (\lambda_\Gamma)_* \circ \tilde{\kappa}_\Gamma$. Néanmoins, nous en donnerons dans la première section une preuve directe. Dans la troisième section nous présentons un résultat d'A. Valette qui expliqueront le lien avec la conjecture de Baum-Connes. Dans la quatrième section, nous procédons de la même manière qu'au chapitre 2 pour construire un homomorphisme analytique $\beta_a : H_1(\Gamma, F\Gamma) \to K_1(C_r^*(\Gamma)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. Nous construisons ensuite un homomorphisme topologique $\beta_t : H_1(\Gamma, F\Gamma) \to K_1^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ qui vérifie : $\beta_a = (\mu_1^\Gamma \otimes \mathbf{1}) \circ \beta_t$. Enfin, dans la dernière section, nous introduisons une notion de groupe de Whitehead topologique.

3.1 Cas de la C^*-algèbre maximale

Commençons par énoncer notre résultat dans ce cas.

Proposition 3.1 *Soit Γ un groupe discret, alors l'homomorphisme canonique*

$$\tilde{\kappa}_\Gamma : \Gamma^{ab} \to K_1(C^*(\Gamma))$$

est rationnellement injectif.

Remarquons tout d'abord que pour la preuve, on peut supposer que Γ est finiment engendré. En effet, tout groupe est limite directe de ses sous-groupes finiment engendrés et

$$\begin{aligned} K_1(C^*(\varinjlim \Gamma_i)) &= K_1(\varinjlim C^*(\Gamma_i)) \\ &= \varinjlim K_1(C^*(\Gamma_i)). \end{aligned}$$

De plus l'application $\tilde{\kappa}_\Gamma$ est naturelle dans le sens suivant : si $i\ :\ H \to \Gamma$ est un monomorphisme de groupes, alors on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^{ab} & \xrightarrow{i^{ab}} & \Gamma^{ab} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \tilde{\kappa}_H} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \tilde{\kappa}_\Gamma} \\ K_1(C^*(H)) & \xrightarrow[i_*]{} & K_1(C^*(\Gamma)) \end{array}$$

Lorsque Γ est de type fini, Γ^{ab} est (par le théorème de structure des groupes abéliens de type fini) somme directe d'un groupe libre finiment engendré $\mathbb{Z}^n$ et d'un groupe abélien fini qu'on notera F.

Avant de montrer la proposition 3.1, préparons d'abord le terrain; pour cela nous allons montrer deux lemmes dont le second est dû à J.L. Taylor [Tay75].

Lemme 3.2 *Soit $\pi\ :\ \Gamma_1 \twoheadrightarrow \Gamma_2$ un homomorphisme surjectif de groupes discrets. Alors l'homomorphisme induit $\pi_*\ :\ C^*(\Gamma_1) \to C^*(\Gamma_2)$ est aussi surjectif.*

Preuve : On considère l'application linéaire

$$\pi_*\ :\ \mathbb{C}\Gamma_1 \to \mathbb{C}\Gamma_2\ ,\ \sum_\gamma f_\gamma \delta_\gamma\ \mapsto\ \sum_\gamma f_\gamma \delta_{\pi(\gamma)},$$

où $\mathbb{C}\Gamma_i$ désigne l'algèbre de groupe de Γ_i, $i = 1, 2$.
On vérifie facilement que π_* est un $*$-homomorphisme. De plus π_* est continue. En effet, soit $x = \sum_\gamma f_\gamma \delta_\gamma \in \mathbb{C}\Gamma_1$, alors on a

$$\begin{aligned} \|\pi_*(x)\|_{C^*(\Gamma_2)} &= \|\sum_\gamma f_\gamma \delta_{\pi(\gamma)}\|_{C^*(\Gamma_2)} \\ &= \sup_{\varphi \in Rep(\Gamma_2)} \|\varphi \circ \pi_*(x)\| \\ &\leq \sup_{\varphi \in Rep(\Gamma_1)} \|\varphi(x)\| = \|x\|_{C^*(\Gamma_1)}, \end{aligned}$$

où $Rep(\Gamma_i)$ désigne la classe des représentations unitaires de Γ_i, $i = 1, 2$.
Maintenant $\mathbb{C}\Gamma_1 \simeq \pi_u(\mathbb{C}\Gamma_1)$ est dense dans $C^*(\Gamma_1)$ où π_u est la représentation universelle de Γ_1; donc π_* s'étend continument en un $*$-homomorphisme π_* :

$C^*(\Gamma_1) \to C^*(\Gamma_2)$. Comme $\pi_*(C^*(\Gamma_1)) = \overline{\pi_u(\mathbb{C}\Gamma_2)} = C^*(\Gamma_2)$, π_* est surjectif. $\square$

Notons que dans le lemme ci-dessus, il est crucial de travailler avec la C^*-algèbre maximale; ce serait faux avec la C^*-algèbre réduite.

Désignons par A^{-1} le groupe des éléments inversibles d'une algèbre de Banach unitale A et par $exp(A)$ le sous-groupe de A^{-1} engendré par les éléments de la forme $exp(a)$ où $a \in A$. En particulier, si A est abélienne alors $exp(A) = \{exp(a),\ a \in A\}$.

Lemme 3.3 *Soit A une algèbre de Banach abélienne unitale. Alors $A^{-1}/exp(A)$ est un sommant direct dans $K_1(A)$.*

Preuve : Soit $GL_n(A)$ le groupe des matrices $n \times n$ inversibles à coefficients dans A. Alors le déterminant nous fournit une application

$$det\ :\ GL_n(A) \to A^{-1}$$

qui envoie la composante connexe de l'unité notée $GL_n(A)_\circ$ sur $exp(A)$. En effet, soit $z = exp(a) \in exp(A)$, $a \in A$, alors z est le déterminant de la matrice $Q = diag(exp(a), \mathbf{1}_{n-1})$ qui est homotope à la matrice identité $\mathbf{1}_n$ via l'homotopie $Q_t = diag(exp(at), \mathbf{1}_{n-1})$, $t \in [0,1]$. Donc $exp(A) \subseteq det(GL_n^\circ(A))$.
Inversément, $GL_n^\circ(A) = GL^\circ(M_n(A)) = exp(M_n(A))$ (pour cette dernière égalité, voir par exemple la proposition 4.3.2 dans [Weg93]). Mais si $a \in M_n(A)$, $det(exp(a)) = exp(trace(a))$.
Il s'ensuit alors qu'il existe une application induite

$$det_*\ :\ K_1(A) \to A^{-1}/exp(A).$$

Soit $i_*\ :\ A^{-1}/exp(A) \to K_1(A)$ l'homomorphisme canonique et soit $[u] \in A^{-1}/exp(A)$. Alors on a

$$det_* \circ i_*([u]) = [det \circ i(u)] = [det(diag(u, \mathbf{1}_\infty))] = [u].$$

$\square$

Si de plus A est une C^*-algèbre, c'est-à-dire $A = C(X)$, avec X compact, on a $A^{-1}/exp(A) \simeq H^1(X, \mathbb{Z})$ (voir [Tay75], 3.9). Le lemme 3.3 se ré-interprète donc en disant que $H^1(X, \mathbb{Z})$ est un sommant direct dans $K^1(X)$.

Preuve de la proposition 3.1 : Supposons Γ de type fini et écrivons $\Gamma^{ab} = \mathbb{Z}^n \oplus F$, où F est abélien fini. Soit $\alpha : \Gamma \to \mathbb{Z}^n$ la composée de l'application quotient $\Gamma \to \Gamma^{ab}$ et de la projection $\Gamma^{ab} \to \mathbb{Z}^n$. Soit $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n$ une base de $\mathbb{Z}^n$; choisissons $a_1, \ldots, a_n \in \Gamma$ tels que $\alpha(a_i) = \overline{a_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Comme $C^*(\mathbb{Z}^n) \simeq C(\mathcal{T}^n)$, l'espace des fonctions continues sur le tore à n dimensions, par le lemme 3.2, on a un homomorphisme induit

$$\alpha_* : K_1(C^*(\Gamma)) \to K_1(C(\mathcal{T}^n)).$$

Remarquons que les $[\overline{a}_i]$, $i = 1, \ldots, n$ sont dans l'image de $K_1(C^*(\Gamma))$:

$$\alpha_*([a_i]) = [\alpha(a_i)] = [\overline{a}_i], \ i = 1, \ldots, n.$$

Notons de plus que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\overline{a}_i$ s'identifie, via l'isomorphisme $C^*(\mathbb{Z}^n) \simeq C(\mathcal{T}^n)$ à $z_i : \mathcal{T}^n \to S^1$, la i-ème fonction coordonnée. Comme d'autre part par le lemme 3.3, $H^1(\mathcal{T}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^n$ est sommant direct dans $K_1(C(\mathcal{T}^n))$ et que les fonctions coordonnées z_i, $i = 1, \ldots, n$ sont les générateurs de $H^1(\mathcal{T}^n, \mathbb{Z})$, on a le résultat cherché. □

3.2 Cas de la C^*-algèbre réduite

Commençons cette section par rappeler le résultat principal de ce chapitre, obtenu en collaboration avec A. Valette (voir [BV96]).

Théorème 3.4 *Soit Γ un groupe discret. Alors l'homomorphisme canonique*

$$\kappa_\Gamma : \Gamma^{ab} \to K_1(C_r^*(\Gamma))$$

est rationnellement injectif.

Remarquons que comme pour la C^*-algèbre maximale, on peut supposer que Γ est finiment engendré. On a vu que dans ce cas Γ^{ab} se décompose en somme directe $\Gamma^{ab} \simeq \mathbb{Z}^n \oplus F$. Il faut alors montrer que la restriction de κ_Γ au facteur abélien libre $\mathbb{Z}^n$ est injective. Pour cela nous avons besoin de la notion suivante dans $\mathbb{Z}^n$:

Définition 3.5 *x est dit primitif dans $\mathbb{Z}^n$ si, $x \neq 0$ et pour tout $m \geq 2$, $\frac{x}{m} \notin \mathbb{Z}^n$.*

Le théorème est alors une conséquence directe de la proposition suivante:

Proposition 3.6 *Soit $x \in \Gamma$ tel que $\overline{x}$ est un élément primitif dans $\mathbb{Z}^n$. Alors $\kappa_\Gamma(\overline{x})$ est d'ordre infini dans $K_1(C_r^*(\Gamma))$.*

Pour la preuve de cette proposition, nous aurons besoin de deux lemmes dont le second est bien connu. Néanmoins on ne trouve la preuve nulle part.

Lemme 3.7 *Soit $x \in \Gamma$, $\overline{x}$ est primitif dans $\mathbb{Z}^n$ si et seulement si il existe un homomorphisme $h : \Gamma \to \mathbb{Z}$ tel que $h(x) = 1$.*

Preuve : Comme $\overline{x}$ est primitif dans $\mathbb{Z}^n$, il existe une base de $\mathbb{Z}^n$ qui comprend $\overline{x}$. Donc, il existe un homomorphisme $\overline{h} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ tel que $\overline{h}(\overline{x}) = 1$, et on prend alors $h = \overline{h} \circ \alpha$, où α est défini comme à la preuve de la proposition 3.1. La réciproque est claire. □

Avant d'énoncer le deuxième lemme, rappelons la construction du produit croisé réduit pour un groupe discret (voir par exemple [Ped79]). Soit (A, Γ, α) un C^*-système dynamique, c'est-à-dire une C^*-algèbre A avec un homomorphisme α de Γ dans $\mathrm{Aut}(A)$. Soit (π, H) une représentation fidèle de A. Considérons l'espace de Hilbert $l^2(\Gamma, H) = \{\xi : \Gamma \to H;\ \sum_{\gamma\in\Gamma} \|\xi(\gamma)\|^2 < \infty\}$. On définit $\tilde{\pi} : A \to \mathcal{L}(l^2(\Gamma, H))$ et $\tilde{\lambda} : \Gamma \to U(l^2(\Gamma, H))$ par

$$\begin{aligned}(\tilde{\pi}(x)\xi)(g) &= \pi(\alpha_{g^{-1}}(x))\xi(g) \quad \text{et} \\ (\tilde{\lambda}_g\xi)(h) &= \xi(g^{-1}h).\end{aligned}$$

Alors $(\tilde{\pi}, \tilde{\lambda}, l^2(\Gamma, H))$ est une représentation covariante de (A, Γ, α).
Notons $C_c(\Gamma, A) = \{f : \Gamma \to A;$ support de f est fini$\}$; c'est une $*$-algèbre pour le produit: $f_1 * f_2(\gamma) = \sum_{\beta\in\Gamma} f_1(\beta) * \alpha_\beta(f_2(\beta^{-1}\gamma))$, et l'involution:

$f^*(\gamma) = \alpha_\gamma(f(\gamma^{-1})^*)$.
Alors l'application $\tilde{\pi} \times \tilde{\lambda} \, : \, C_c(\Gamma, A) \to \mathcal{L}(l^2(\Gamma, H))$ définie par

$$\tilde{\pi} \times \tilde{\lambda}(f) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \tilde{\pi}(f(\gamma))\tilde{\lambda}_\gamma$$

pour $f \in C_c(\Gamma, A)$, est une représentation fidèle de $C_c(\Gamma, A)$. De plus si (ρ, K) est une autre représentation fidèle de A, alors les C^*-algèbres $\overline{\tilde{\pi} \times \tilde{\lambda}(C_c(\Gamma, A))}$ et $\overline{\tilde{\rho} \times \tilde{\lambda}(C_c(\Gamma, A))}$ sont isomorphes, ce qui nous mène à la définition suivante :

Définition 3.8 *Le produit croisé réduit de A par Γ, noté $A \rtimes_\alpha \Gamma$, est la C^*-algèbre $\overline{\tilde{\pi} \times \tilde{\lambda}(C_c(\Gamma, A))}$, où π est une représentation fidèle de A.*

Lemme 3.9 *Soient G, Γ deux groupes discrets et soit $\alpha \, : \, \Gamma \to \mathrm{Aut}(G)$ un homomorphisme. Alors $C_r^*(G \rtimes_\alpha \Gamma) \simeq C_r^*(G) \rtimes_{\tilde{\alpha}} \Gamma$, où $\tilde{\alpha} \, : \, \Gamma \to \mathrm{Aut}(C_r^*(G))$ est l'homomorphisme défini par: $\tilde{\alpha}_\gamma(\delta_g) = \delta_{\alpha_{\gamma^{-1}}(g)}$.*

Pour simplifier, désignons dans la suite par la même lettre α les deux actions de Γ sur G et sur $C_r^*(G)$.

Preuve : Soit l'application linéaire

$$\begin{array}{rll} \psi : & \mathbb{C}(G \rtimes_\alpha \Gamma) & \to C_c(\Gamma, C_r^*(G)) \\ & f & \mapsto (F : \, \gamma \mapsto F(\gamma) : \, g \mapsto f(g, \gamma)). \end{array}$$

Il s'agit d'abord de montrer que ψ est un $*$-homomorphisme, pour cela soient f, f_1, $f_2 \in \mathbb{C}(G \rtimes_\alpha \Gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ et $g \in G$,

$$\begin{array}{rcl} \psi(f_1 * f_2)(\gamma)(g) & = & f_1 * f_2(g, \gamma) = \sum_{h \in G, \, \beta \in \Gamma} f_1(h, \beta) f_2((h, \beta)^{-1}(g, \gamma)) \\ & = & \sum_{\beta \in \Gamma} [\sum_{h \in G} f_1(h, \beta) f_2(\alpha_{\beta^{-1}}(h^{-1}g), \beta^{-1}\gamma)] \\ & = & [\sum_{\beta \in \Gamma} F_1(\beta) * \alpha_\beta(F_2(\beta^{-1}\gamma))](g) \\ & = & (F_1 * F_2)(\gamma)(g). \\ \psi(f^*)(\gamma)(g) & = & f^*(g, \gamma) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{f(\alpha_{\gamma^{-1}}(g^{-1}),\gamma^{-1})} \\
&= \overline{F(\gamma^{-1})(\alpha_{\gamma^{-1}}(g^{-1}))} \\
&= F(\gamma^{-1})^*(\alpha_{\gamma^{-1}}(g)) \\
&= \alpha_\gamma(F(\gamma^{-1})^*)(g) \\
&= F^*(\gamma)(g).
\end{aligned}$$

En fait, ψ est une isométrie : soit λ_G (respectivement λ_Γ) la représentation régulière gauche de G (respectivement de Γ), et soit $(\tilde{\lambda}_G, \tilde{\lambda}_\Gamma, H = l^2(\Gamma, l^2(G)))$ la représentation covariante correspondante du C^*-système dynamique $(C_r^*(G), \Gamma, \alpha)$. Alors l'application $\tilde{\lambda}_G \times \tilde{\lambda}_\Gamma : C_c(\Gamma, C_r^*(G)) \to \mathcal{L}(H)$ définie ci-dessus est fidèle.

Soit $f \in \mathbb{C}(G \rtimes_\alpha \Gamma)$,

$$\begin{aligned}
\|\psi(f)\|^2_{C_r^*(G)\rtimes_\alpha\Gamma} &= \|F\|^2_{C_r^*(G)\rtimes_\alpha\Gamma} = \sup_{\substack{\|\eta\|\leq 1\\ \eta\in H}} \|(\tilde{\lambda}_G \times \tilde{\lambda}_\Gamma(F))(\eta)\|^2_H \\
&= \sup_{\|\eta\|\leq 1} \sum_{\gamma\in\Gamma} \|\tilde{\lambda}_G \times \tilde{\lambda}_\Gamma(F)(\eta)(\gamma)\|^2_{l^2(G)} \\
&= \sup_{\|\eta\|\leq 1} \sum_{\gamma\in\Gamma} \|\sum_{\beta\in\Gamma} \tilde{\lambda}_G(F(\beta))\tilde{\lambda}_\Gamma(\beta)(\eta)(\gamma)\|^2_{l^2(G)} \\
&= \sup_{\|\eta\|\leq 1} \sum_{\gamma\in\Gamma} \|\sum_{\beta\in\Gamma} \lambda_G(\alpha_{\gamma^{-1}}(F(\beta)))\eta(\beta^{-1}\gamma)\|^2_{l^2(G)} \\
&= \sup_{\|\eta\|\leq 1} \sum_{\gamma\in\Gamma} \|\sum_{\beta\in\Gamma} \alpha_{\gamma^{-1}}(F(\beta)) * \eta(\beta^{-1}\gamma)\|^2_{l^2(G)} \\
&= \sup_{\|\eta\|\leq 1} \sum_{\gamma\in\Gamma} \sum_{h\in G} |\sum_{\beta\in\Gamma}(\alpha_{\gamma^{-1}}(F(\beta)) * \eta(\beta^{-1}\gamma))(h)|^2 \\
&= \sup_{\|\eta\|\leq 1} \sum_{\gamma\in\Gamma} \sum_{h\in G} |\sum_{g\in G} \sum_{\beta\in\Gamma} \alpha_{\gamma^{-1}}(F(\beta))(g)\eta(\beta^{-1}\gamma)(g^{-1}h)|^2 \\
&= \sup_{\|\eta\|\leq 1} \sum_{\gamma\in\Gamma} \sum_{h\in G} |\sum_{g\in G} \sum_{\beta\in\Gamma} F(\beta)(\alpha_\gamma(g))\eta(\beta^{-1}\gamma)(g^{-1}h)|^2 \\
&= \sup_{\|\eta\|\leq 1} \sum_{\gamma\in\Gamma} \sum_{h\in G} |\sum_{g\in G} \sum_{\beta\in\Gamma} F(\beta)(g)\eta(\beta^{-1}\gamma)(\alpha_{\gamma^{-1}}(g^{-1}h))|^2 \\
&= \sup_{\substack{\|\eta\|\leq 1\\ \eta\in l^2(G\rtimes\Gamma)}} \sum_{\gamma\in\Gamma} \sum_{h\in G} |\sum_{g\in G} \sum_{\beta\in\Gamma} f(g,\beta)\eta(\alpha_{\gamma^{-1}}(g^{-1}h),\beta^{-1}\gamma)|^2 \\
&= \sup_{\|\eta\|\leq 1} \sum_{\gamma\in\Gamma} \sum_{h\in G} |\sum_{g\in G} \sum_{\beta\in\Gamma} f(g,\beta)\eta((g,\beta)^{-1}(h,\gamma))|^2 \\
&= \sup_{\|\eta\|\leq 1} \|\lambda(f)(\eta)\|^2_{l^2(G\rtimes\Gamma)} = \|f\|^2_{C_r^*(G\rtimes\Gamma)}.
\end{aligned}$$

Donc ψ s'étend continument en un $*$-homomorphisme isométrique (donc injectif) noté encore $\psi : C_r^*(G \rtimes_\alpha \Gamma) \to C_r^*(G) \rtimes_\alpha \Gamma$.
Comme de plus $\psi(C_r^*(G \rtimes_\alpha \Gamma)) = \overline{\tilde{\lambda}_G \times \tilde{\lambda}_\Gamma(C_c(\Gamma, C_r^*(G)))} = C_r^*(G) \rtimes_\alpha \Gamma$, on obtient que ψ est surjectif. □

Maintenant que les ingrédients sont en place, nous pouvons nous attaquer à la preuve de la proposition 3.6.

Preuve de la proposition 3.6 : Soit $h : \Gamma \to \mathbb{Z}$ tel que $h(x) = 1$ (lemme 3.7). Posons $N = \operatorname{Ker} h$. En identifiant $\mathbb{Z}$ au sous-groupe engendré par x, Γ apparaît comme un produit semi-direct $\Gamma = N \rtimes_\beta \mathbb{Z}$ où $\beta = Ad\ x$ est l'automorphisme de N donné par la conjugaison par x. Dès lors, par le lemme 3.9, $C_r^*(\Gamma)$ apparaît comme un produit croisé $C_r^*(\Gamma) = C_r^*(N) \rtimes_\beta \mathbb{Z}$. Mais dans ce cas on dispose de la suite exacte à 6 termes de Pimsner-Voiculescu [PV82] :

$$\begin{tikzcd}
K_0(C_r^*(N)) \arrow[r, "Id-\beta_*"] & K_0(C_r^*(N)) \arrow[r, "i_*"] & K_0(C_r^*(\Gamma)) \arrow[d, "\partial_0"] \\
K_1(C_r^*(\Gamma)) \arrow[u, "\partial_1"] & K_1(C_r^*(N)) \arrow[l, "i_*"'] & K_1(C_r^*(N)) \arrow[l, "Id-\beta_*"']
\end{tikzcd}$$

Cette suite exacte provient en fait d'une suite exacte courte:

$$0 \longrightarrow C_r^*(N) \otimes \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow C_r^*(\Gamma) \longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{K}$ désigne la C^*-algèbre des opérateurs compacts, et $\mathcal{F}$ est la C^*-sous-algèbre de $\mathcal{B}(l^2(\Gamma) \otimes l^2(\mathbb{N}))$ engendrée par $C_r^*(N) \otimes 1$ et par l'isométrie $V = \lambda_\Gamma(x) \otimes S$ où S est le décalage unilatéral sur $l^2(\mathbb{N})$; l'application $\mathcal{F} \to C_r^*(\Gamma)$ est donnée par

$$\begin{cases} \lambda_\Gamma(n) \otimes 1 \mapsto \lambda_\Gamma(n), \ n \in N \\ \lambda_\Gamma(x) \otimes S \mapsto \lambda_\Gamma(x) \end{cases}$$

Comme $\lambda_\Gamma(x)$ se relève en l'isométrie V dans $\mathcal{F}$, un calcul classique de K-théorie [Weg93] montre que:

$$\partial_1(\kappa_\Gamma(\overline{x})) = [1 - VV^*] = [1 \otimes (1 - SS^*)] = [1 \otimes e],$$

où e est un projecteur de rang 1 dans $\mathcal{K}$. Par l'isomorphisme canonique:

$$\begin{array}{ccc} K_1(C_r^*(N)) & \to & K_1(C_r^*(N) \otimes \mathcal{K}) \\ a & \longmapsto & a \otimes e \end{array}$$

on obtient $\partial_1(\kappa_\Gamma(\overline{x})) = [1]$. Comme l'image de [1] par la trace canonique $K_0(C_r^*(N)) \to \mathbb{R}$ vaut 1, [1] est d'ordre infini dans $K_0(C_r^*(N))$. Il s'ensuit donc que $\kappa_\Gamma(\overline{x})$ est d'ordre infini dans $K_1(C_r^*(\Gamma))$. □

Remarque 3.10 *Si $\overline{\gamma} \in \Gamma^{ab}$ provient de l'élément $\gamma \in \Gamma$ d'ordre fini, alors $\lambda_\Gamma(\gamma)$ engendre une C^*-sous-algèbre de dimension finie dans $C_r^*(\Gamma)$. Comme le groupe unitaire d'une C^*-algèbre de dimension finie est connexe, la classe de $\lambda_\Gamma(\gamma)$ dans $K_1(C_r^*(\Gamma))$ est triviale. Plus généralement, si H est le sous-groupe de Γ^{ab} engendré par les éléments qui se relèvent en des éléments d'ordre fini de Γ, alors l'image de H par κ_Γ est triviale. Exemple : $\Gamma = \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3$; alors $\Gamma^{ab} = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3 \simeq \mathbb{Z}/6$. Un élément d'ordre 6 ne se relève en aucun élément d'ordre fini, mais son image par κ_Γ est triviale (en fait $K_1(C_r^*(\Gamma)) = 0$, comme l'a montré Cuntz [Cun83]). Notons que la torsion peut survivre dans $K_1(C_r^*(\Gamma))$; comme exemple, prenons un groupe à un relateur sans torsion dont l'abélianisé n'est pas libre, ceci car nous allons montrer dans le chapitre 5 que pour un tel groupe, $K_1(C_r^*(\Gamma)) \simeq \Gamma^{ab}$. Par exemple $\Gamma = \left\langle a, b \mid a^k b^k \right\rangle$ avec $k \geq 2$; alors $K_1(C_r^*(\Gamma)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.*

3.3 Application : lien avec la conjecture de Baum-Connes

Dans cette section, nous commençons par présenter un résultat d'A. Valette [Val96] qui explique le lien avec la conjecture de Baum-Connes. Il s'agit de construire un homomorphisme $\beta_t : \Gamma^{ab} \to K_1^\Gamma(\underline{E\Gamma})$ tel que $\kappa_\Gamma = \mu_1^\Gamma \circ \beta_t$. Nous montrons ensuite que β_t "inverse" le caractère de Chern.

Notons que Natsume a obtenu le même résultat pour Γ un groupe sans torsion [Nat88] (il néglige cependant de vérifier que β_t est un homomorphisme).

Définition de β_t *Commençons par construire une application $\tilde{\beta}_t : \Gamma \to K_1^\Gamma(\underline{E\Gamma})$: Pour cela notons d'abord que tout élément $\gamma \in \Gamma$ définit un unique homomorphisme de groupe $\alpha_\gamma : \mathbb{Z} \to \Gamma$ tel que*

$$\alpha_\gamma(1) = \gamma,$$

qui induit un unique homomorphisme au niveau des espaces classifiants

$$\gamma : B\mathbb{Z} = S^1 \to B\Gamma.$$

Soit $x = (L^2(S^1), M, F)$ le générateur de "Toeplitz" de $K_1^{\mathbb{Z}}(\underline{E\mathbb{Z}}) \simeq K_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ (voir exemple 1.14(2)). Par fonctorialité, on obtient un homomorphisme

$$\gamma_* : K_1(S^1) \to K_1(B\Gamma)$$

Comme maintenant l'action de Γ sur $E\Gamma$ est propre, il existe une application continue Γ-équivariante $\phi : E\Gamma \to \underline{E\Gamma}$ unique à homotopie Γ-équivariante près. Ainsi par fonctorialité, on obtient un homomorphisme

$$\phi_* : K_1(B\Gamma) \simeq KK_1^\Gamma(E\Gamma, \mathbb{C}) \to K_1^\Gamma(\underline{E\Gamma})$$

et on pose alors

$$\tilde{\beta}_t : \Gamma \to K_1^\Gamma(\underline{E\Gamma}) : \gamma \mapsto \phi_*(\gamma_*(x)).$$

Remarquons que par définition, $\tilde{\beta}_t$ factorise par $K_1(B\Gamma)$.

Lemme 3.11 *L'application $\tilde{\beta}_t : \Gamma \to K_1^\Gamma(\underline{E\Gamma})$ est un homomorphisme de groupes.*

Preuve : Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$; considérons γ_1, γ_2 comme des applications continues $S^1 \to B\Gamma$. Posons $X = \gamma_1(S^1) \cup \gamma_2(S^1)$. Pour $i = 1, 2$, l'élément $(\gamma_i)_*(x) \in K_1(B\Gamma)$ est décrit par le triple $(L^2(S^1), \pi_i, D)$ où, pour $f \in C(X)$, $\pi_i(f)$ est l'opérateur de multiplication ponctuelle par $f \circ \gamma_i$ sur $L^2(S^1)$, et $D = \frac{1}{i}\frac{d}{d\theta}$. D'une manière similaire $(\gamma_1\gamma_2)_*(x)$ est décrit par $(L^2(S^1), \pi, D)$ où $\pi(f)$ est la multiplication ponctuelle par $f \circ \gamma_1\gamma_2$; ici l'application $\gamma_1\gamma_2 : S^1 \to X$ est donnée par

$$(\gamma_1\gamma_2)(\theta) = \begin{cases} \gamma_1(2\theta) & \text{si } 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2\theta - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1. \end{cases}$$

Il suffit alors de montrer que

$$(\gamma_1\gamma_2)_*(x) = (\gamma_1)_*(x) + (\gamma_2)_*(x)$$

dans $KK_1(C_0(X), \mathbb{C})$. Pour cela, on considère l'unitaire de "doublement" :

$$u : \begin{cases} L^2(S^1) \oplus L^2(S^1) & \to \quad L^2(S^1) \\ (\xi_1, \xi_2) & \mapsto \quad \left(\theta \mapsto \begin{cases} \sqrt{2}\xi_1(2\theta) & \text{si } 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}; \\ \sqrt{2}\xi_2(2\theta - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1. \end{cases} \right) \end{cases}$$

L'inverse de u est donné pour $\xi \in L^2(S^1)$ par la formule :

$$\begin{cases} (u^*\xi)_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi(\frac{\theta}{2}) \\ (u^*\xi)_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi(\frac{\theta+1}{2}), \end{cases}$$

où $\theta \in S^1$.
On vérifie que $u(\pi_1 \oplus \pi_2)u^* = \pi$, et que $u(D \oplus D)u^* = \frac{D}{2}$. Ceci montre que $(\gamma_1)_*(x) + (\gamma_2)_*(x)$ est unitairement équivalent au triple $(L^2(S^1), \pi, \frac{D}{2})$, qui est trivialement homotope à $(\gamma_1\gamma_2)_*(x)$. □

Comme $K_1^\Gamma(\underline{E\Gamma})$ est abélien, l'homomorphisme de groupe $\tilde{\beta}_t$ se factorise via un homomorphisme

$$\beta_t \; : \; \Gamma^{ab} \to K_1^\Gamma(\underline{E\Gamma}).$$

Il faut maintenant montrer que β_t est le bon candidat:

Théorème 3.12 *Soit Γ un groupe discret, alors le diagramme suivant:*

$$\begin{tikzcd} K_1^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \arrow[r, "\mu_1^\Gamma"] & K_1(C_r^*(\Gamma)) \\ \Gamma^{ab} \arrow[u, "\beta_t"] \arrow[ur, "\kappa_\Gamma"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Preuve : Il suffit clairement de montrer que $\overline{\kappa}_\Gamma = \mu_1^\Gamma \circ \tilde{\beta}_t$. Soit $\gamma \in \Gamma$ et $\alpha_\gamma : \mathbb{Z} \to \Gamma$ l'unique homomorphisme tel que $\alpha_\gamma(1) = \gamma$. Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[rrr, "\alpha_\gamma"] \arrow[dr, "\kappa_\mathbb{Z}"] \arrow[dd, "\beta_t"'] & & & \Gamma \arrow[dl, "\overline{\kappa}_\Gamma"'] \arrow[dd, "\tilde{\beta}_t"] \\
& K_1(C_r^*(\mathbb{Z})) \arrow[r, "(\alpha_\gamma)_*"] & K_1(C_r^*(\Gamma)) & \\
K_1^\mathbb{Z}(\underline{E\mathbb{Z}}) \arrow[ur, "\mu_1^\mathbb{Z}"'] \arrow[rrr, "(\alpha_\gamma)_*"'] & & & K_1^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \arrow[ul, "\mu_1^\Gamma"]
\end{tikzcd}$$

Remarquons que le grand rectangle commute par la définition de $\tilde{\beta}_t$, $(\alpha_\gamma)_* \circ \kappa_\mathbb{Z} = \overline{\kappa}_\Gamma \circ \alpha_\gamma$ trivialement et $(\alpha_\gamma)_* \circ \mu_1^\mathbb{Z} = \mu_1^\Gamma \circ (\alpha_\gamma)_*$ par le théorème 1 dans [Val96], i.e. par la naturalité de la flèche de Baum-Connes. De plus le triangle de gauche est un triangle commutatif d'isomorphismes, puisqu'on connaît la conjecture de Baum-Connes pour le groupe $\mathbb{Z}$. On termine la preuve par "diagram chasing". □

Considérons maintenant le caractère de Chern équivariant de Baum-Connes [BC88] :

$$ch_*^\Gamma : K_1^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \to H_{impair}(\Gamma, F\Gamma).$$

Remarquons que $H_1(\Gamma, \mathbb{C}) \simeq \Gamma^{ab} \otimes \mathbb{C}$ et montrons la proposition suivante :

Proposition 3.13 *Soit Γ un groupe discret, alors on a :*

$$ch_*^\Gamma \circ (\beta_t \otimes \mathbf{1}_\mathbb{C}) = id_{H_1(\Gamma,\mathbb{C})}.$$

Preuve : Comme la flèche β_t factorise par $K_1(B\Gamma)$, et que le caractère de Chern de Baum-Connes est naturel par rapport au caractère de Chern ordinaire en K-homologie (en d'autres termes, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
K_1(B\Gamma) \arrow[r] \arrow[d, "ch_*"'] & K_1^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \arrow[d, "ch_*^\Gamma"] \\
H_{impair}(\Gamma, \mathbb{C}) \arrow[r, hook] & H_{impair}(\Gamma, F\Gamma)
\end{tikzcd}$$

est commutatif, voir [BCH94], §7), il suffit de vérifier que

$$ch_* \circ (\beta_t \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{C}}) = id_{H_1(\Gamma,\mathbb{C})}.$$

Fixons alors un élément $\gamma \in \Gamma$, et regardons γ comme une application continue $\gamma : S^1 \to B\Gamma$. Alors par la naturalité du caractère de Chern en K-homologie, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} K_1(B\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \arrow[r, "\gamma_* \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{C}}"] \arrow[d, "ch_*"', "\simeq"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & K_1(B\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \arrow[d, "ch_*"] \\ \mathbb{C} \simeq H_1(B\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \arrow[r, "\gamma_*"] & H_{impair}(B\Gamma, \mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } ch_*[(\beta_t \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{C}})(\overline{\gamma} \otimes 1)] &= ch_*(\gamma_*(x) \otimes 1) \\ &= (\gamma_* \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{C}})(ch_*(x) \otimes 1) \\ &= \gamma_*(1) \otimes 1 = \overline{\gamma} \otimes 1. \end{aligned}$$

□

Une conséquence directe de cette proposition est que β_t est toujours rationnellement injective. Comme de plus κ_Γ l'est aussi par le théorème 3.4, on a :

Corollaire 1 *Soit Γ un groupe discret. Alors μ_1^Γ est rationnellement injective sur $\beta_t(\Gamma^{ab}) \simeq \beta_t(H_1(\Gamma, \mathbb{Z}))$.*

3.4 Sur le triangle $(H_1(\Gamma, F\Gamma), K_1^\Gamma(\underline{E\Gamma}), K_1(C_r^*(\Gamma))$

Tout au long de cette section, nous allons garder les mêmes notations que pour le cas $i = 0$ traité dans le chapitre 2. Nous allons procéder de la même manière pour définir un homomorphisme "analytique" $\beta_a : H_1(\Gamma, F\Gamma) \to K_1(C_r^*(\Gamma)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ ainsi qu'un homomorphisme "topologique" $\beta_t : H_1(\Gamma, F\Gamma) \to K_1^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. Nous expliquons ensuite le lien avec la conjecture de Baum-Connes en montrant que $(\mu_1^\Gamma \otimes \mathbf{1}) \circ \beta_t = \beta_a$.

3.4.1 Définition de $\beta_a : H_1(\Gamma, F\Gamma) \to K_1(C_r^*(\Gamma)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$

Soit $\gamma_j \in S$, $|\gamma_j| = n_j$; soit ω une racine n_j-ème de l'unité et P_ω le projecteur spectral associé. Remarquons tout d'abord que l'injection canonique $\iota_\omega : P_\omega C_r^*(Z_\Gamma(\gamma_j)) \to C_r^*(\Gamma)$ n'est pas unitale. Donc on a besoin du lemme suivant pour déterminer l'homomorphisme, encore noté ι_ω, induit au niveau du groupe K_1.

Lemme 3.14 *Soient A et B deux C^*-algèbres unitales et soit $\alpha : A \to B$ un homomorphisme non unital; soit $e := \alpha(1_A)$; alors l'homomorphisme α_* : $K_1(A) \to K_1(B)$ induit en K_1-théorie est défini pour $u \in GL_1(A)$ par:*

$$[u] \mapsto [\alpha(u) + 1_B - e].$$

Preuve : Soit $A^+ := A \oplus \mathbb{C}I$, soit $\tilde{\alpha} : A^+ \to B$ l'$*$-homomorphisme unital défini par $\tilde{\alpha}(a + \lambda I) = \alpha(a) + \lambda 1_B$. Rappelons qu'on a $K_1(A) \simeq K_1(A^+)$ via l'homomorphisme qui à $u \in GL_1(A)$ associe l'unitaire $u + I - 1_A \in U(A^+)$. Donc $\alpha_*([u]) = \tilde{\alpha}_*([u + I - 1_A]) = [\alpha(u) + 1_B - e]$. □

Rappelons maintenant que par le lemme de Shapiro on a :

$$\begin{aligned} H_1(\Gamma, F\Gamma) &= \bigoplus_j H_1(Z_\Gamma(\gamma_j), \mathbb{C}) \\ &= \bigoplus_j Z_\Gamma(\gamma_j)^{ab} \otimes \mathbb{C} \end{aligned}$$

Pour définir $\beta_a : H_1(\Gamma, F\Gamma) \to K_1(C_r^*(\Gamma)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, nous définissons $\beta_a|_{Z_\Gamma(\gamma_j)^{ab} \otimes \mathbb{C}}$, pour $j = 1, 2, \ldots$ comme la composition des homomorphismes suivants:

$$\begin{tikzcd} \beta_a|_{Z_\Gamma(\gamma_j)^{ab}\otimes\mathbb{C}} : Z_\Gamma(\gamma_j)^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \arrow[r, "\kappa_{Z_\Gamma(\gamma_j)} \otimes 1"] & K_1(C_r^*(Z_\Gamma(\gamma_j))) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \arrow[d, "\simeq"] \\ & \bigoplus_i K_1(P_{\omega^i} C_r^*(Z_\Gamma(\gamma_j)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \arrow[d, "\sum_{i=0}^{n_j-1} (\iota_{\omega^i} \otimes \overline{\omega}^i)"] \\ & K_1(C_r^*(\Gamma)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

où $\kappa_{Z_\Gamma(\gamma_j)}$ est l'homomorphisme qui à $\overline{\gamma} \in Z_\Gamma(\gamma_j)^{ab}$ associe l'unitaire $[\delta_\gamma] \in K_1(C_r^*(Z_\Gamma(\gamma_j))$. Ainsi pour $\overline{\gamma} \in Z_\Gamma(\gamma_j)^{ab}$, $|\gamma_j| = n_j$,

$$\beta_a(\overline{\gamma}) = \sum_{i=0}^{n_j-1} [P_{\omega^i}\gamma + 1 - P_{\omega^i}] \otimes \overline{\omega}^i.$$

3.4.2 Définition de $\beta_t \; : \; H_1(\Gamma, F\Gamma) \to K_1^\Gamma(\underline{\mathbf{E}\Gamma}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$

Pour définir β_t, notons que tout élément $\gamma \in Z_\Gamma(\gamma_j)$, $|\gamma_j| = n_j$, définit un unique homomorphisme de groupe

$$\begin{aligned} \alpha_\gamma^{(j)} \; : \; G_{n_j} := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_j \; &\to \Gamma \\ a \; &\mapsto \gamma \\ b \; &\mapsto \gamma_j \end{aligned}$$

où a (respectivement b) est le générateur canonique de $\mathbb{Z}$ (respectivement $\mathbb{Z}/n_j$). En plus, le caractère de Chern induit un isomorphisme

$$ch \otimes \mathbf{1} \; : \; K_1^{G_{n_j}}(\underline{EG}_{n_j}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{C} \to H_1(G_{n_j}, FG_{n_j}).$$

Comme G_{n_j} est abélien, FG_{n_j} est un G_{n_j}-module trivial, donc

$$\begin{aligned} H_1(G_{n_j}, FG_{n_j}) &= FG_{n_j} \otimes_{\mathbf{Z}} G_{n_j} \\ &= \mathbb{C}b^{(0)} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}b^{(n_j-1)} \end{aligned}$$

où le symbole $b^{(l)}$ correspond à $b^l \in G_{n_j}$.
Soit alors $x_{n_j} = (ch \otimes \mathbf{1})^{-1}(b^{(1)}) \in K_1^{G_{n_j}}(\underline{EG}_{n_j}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{C}$. Par fonctorialité, on obtient un homomorphisme $(\alpha_\gamma^{(j)})_* \; : \; K_1^{G_{n_j}}(\underline{EG}_{n_j}) \to K_1^\Gamma(\underline{E\Gamma})$ et on pose alors:

$$\beta_t(\overline{\gamma}) := (\alpha_\gamma^{(j)})_*(x_{n_j}).$$

<u>**candidat**</u>: $x_{n_j} = \sum_{i=0}^{n_j-1} e_i \otimes \overline{\omega}^i$, où $\{e_l = [L^2(\mathbb{R}), M, D = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}]_l\}_{0 \leq l \leq n_j-1}$ est la base de $K_1^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_j}(\mathbb{R})$ décrite à l'exemple 1.14(3).

Proposition 3.15 *β_t est un homomorphisme.*

Preuve : Soient $\gamma, \gamma' \in Z_\Gamma(\gamma_j)$, alors $\gamma\gamma' \in Z_\Gamma(\gamma_j)$. Il faut montrer que

$$(\alpha_{\gamma\gamma'})_*(e_i) = (\alpha_\gamma)_*(e_i) + (\alpha_{\gamma'})_*(e_i) \;\; \forall\, i = 0, \ldots, n_j - 1.$$

Mais ceci découle trivialement du fait que $K_1^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\chi\in\widehat{\mathbb{Z}/n}} K_{1,\chi}(S^1)$ (voir exemple 1.14(3)) et du lemme 3.11 où l'on montre que $(\gamma\gamma')_*(e_0) = (\gamma)_*(e_0) + (\gamma')_*(e_0)$. □

3.4.3 Lien avec l'application de Baum-Connes

Le but de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant :

Théorème 3.16 *Soit Γ un groupe discret, alors on a*

$$(\mu_1^\Gamma \otimes \mathbf{1}) \circ \beta_t^\Gamma = \beta_a^\Gamma.$$

Autrement dit, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
K_1^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \arrow[r, "\mu_1^\Gamma \otimes \mathbf{1}"] & K_1(C_r^*(\Gamma)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \\
H_1(\Gamma, F\Gamma) \arrow[u, "\beta_t"] \arrow[ur, "\beta_a"'] &
\end{tikzcd}$$

Pour la démonstration de ce théorème nous avons besoin d'abord de montrer explicitement la conjecture de Baum-Connes pour le groupe $G_n = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n$, au niveau des K_1. Commençons alors par identifier les générateurs de $K_1(C^*(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n))$ à l'aide du lemme ci-dessous bien connu.

Lemme 3.17 $C^*(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n) \simeq \underbrace{C(S^1) \oplus \cdots \oplus C(S^1)}_{n\ sommands}.$

Preuve : D'une manière générale, on montre (en utilisant la dualité de Pontryagin) que si Γ est un groupe abélien et $\hat{\Gamma}$ son groupe dual, alors

$C^*(\Gamma) \simeq C_0(\hat{\Gamma})$ (voir proposition 7.1.6 dans [Ped79]). Néanmoins nous avons besoin de la forme explicite de la transformation de Fourier :

$$\begin{array}{rrl} \alpha : C^*(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n) & \to & C(S^1)\oplus\cdots\oplus C(S^1) \\ (a,b^j) & \mapsto & e^{i\theta}(1,\omega^j,\omega^{2j},\ldots,\omega^{(n-1)j}) \\ (0,b^j) & \mapsto & \mathbf{1}(1,\omega^j,\omega^{2j},\ldots,\omega^{(n-1)j}) \end{array}$$

où $e^{i\theta} : S^1 \to \mathbb{C},\quad z \mapsto z$ désigne l'application identité sur S^1 et où $\mathbf{1} : S^1 \to \mathbb{C},\quad z \mapsto 1$ est l'application constante. □

Corollaire 2 *$K_1(C^*(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n)) \simeq \mathbb{Z}^n$, de base $\{\epsilon_i = [aP_{\omega_i}]\}_{i=0,\ldots,n-1}$, où P_{ω^i} est le projecteur spectral associé à b.*

Prenons maintenant $\underline{EG}_n = EG_n = \mathbb{R}$, où $\mathbb{Z}$ agit par translation sur $\mathbb{R}$ et où $\mathbb{Z}/n$ agit trivialement sur $\mathbb{R}$, et montrons la proposition suivante :

Proposition 3.18 *L'application de Baum-Connes*

$$\mu_1^{G_n} : K_1^{G_n}(\mathbb{R}) \to K_1(C^*G_n)$$

est un isomorphisme.

Preuve : Rappelons que dans l'exemple 1.14(3), nous avons montré que $K_1^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}^n$ et est engendré par la base suivante :

$\{e_l = [L^2(\mathbb{R}), M, D = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}]_l$, où l'action de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n$ sur $L^2(\mathbb{R})$ est donnée par $af(x) = f(x+1)$, $bf(x) = \omega^l f(x)$ et où M est la représentation $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n$-covariante de $C_0(\mathbb{R})$ par multiplication sur $L^2(\mathbb{R})$, $l = 0,1,\ldots,n-1\}$, ici $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

Fixons l et calculons $\mu_1^{G_n}(e_l)$.
Comme domaine pour D, prenons l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Par la transformée de Fourier, le triple $(L^2(\mathbb{R}), M, D)$ va sur le triple $(L^2(\mathbb{R}), \Lambda, E)$, où Λ est la représentation de $C_0(\mathbb{R})$ par convolution par les transformées de Fourier, E est l'opérateur de multiplication par la variable duale λ et l'action de G est maintenant donnée par: $mf(\lambda) = f(\lambda)e^{2\pi i m\lambda}$ et $bf(\lambda) = \omega^l f(\lambda)$.

Le domaine de E est $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Le $C^*(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n)$-produit scalaire sur $S(\mathbb{R})$ est donné par :

$$\begin{aligned}\langle\xi_1,\xi_2\rangle(m,k) &= \langle\xi_1,(m,k)(\xi_2)\rangle\\ &= \omega^{lk}\int_{\mathbb{R}}\overline{\xi_1(\lambda)}e^{2\pi im\lambda}\xi_2(\lambda)d\lambda\end{aligned}$$

$(\xi_1,\xi_2\in\mathcal{S}(\mathbb{R}))$.

Via l'isomorphisme

$$\begin{aligned}C^*(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n) &\to C(S^1\times\mathbb{Z}/n)\simeq C(S^1,\mathbb{C}^n)\\ \alpha &\mapsto ((\theta,k)\mapsto\sum_{(m,f)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n}\alpha(m,f)e^{2\pi im\theta}.e^{\frac{2\pi ikf}{n}})\end{aligned}$$

$(\alpha\in\mathbb{C}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n),\ \theta\in S^1,\ k\in\mathbb{Z}/n)$, le C^*G_n-produit scalaire devient un $C(S^1,\mathbb{C}^n)$-produit scalaire, dont la valeur $\langle\xi_1,\xi_2\rangle(\theta)$ est donnée par :

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{2\pi im\theta}\int_{\mathbb{R}}\overline{\xi_1(\lambda)}e^{2\pi im\lambda}\xi_2(\lambda)d\lambda\left(\sum_{f\in\mathbb{Z}/n}\omega^{fl},\sum_{f\in\mathbb{Z}/n}\omega^{f(l+1)},\dots,\sum_{f\in\mathbb{Z}/n}\omega^{f(l+n-1)}\right)$$

$$=\textstyle\sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\overline{\xi_1(\lambda)}e^{2\pi im(\lambda+\theta)}\xi_2(\lambda)d\lambda(0,\cdots,0,\underset{\underset{(n-l)}{\uparrow}}{n},0,\cdots,0)$$

Soit Ξ_l la complétion de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour ce $C(S^1\times\mathbb{Z}/n)$- produit scalaire. Comme on complète pour la norme nulle selon toutes les copies sauf la $(n-l)$-ème, on déduit par la proposition 3 et sa preuve dans [Val96] que

$$\mu_1^{G_n}(e_l)=([1],\dots,[1],\underset{\underset{n-l}{\uparrow}}{[e^{i\theta}]},[1],\dots,[1])\in\oplus_{i=0}^{n-1}K_1(C(S^1)).$$

Et donc que $\mu_1^{G_n}$ est un isomorphisme. □

Il est clair que la proposition 3.18 est bien connue, même si on ne trouve nulle part de preuve spécifique. Par exemple, on peut la déduire des résultats du "conceptus" de Kasparov (1981). On pouvait aussi dire que, si Γ est un groupe qui satisfait Baum-Connes, et F est un groupe fini, alors $\Gamma\times F$ satisfait Baum-Connes.

Proposition 3.19 *Soit $G_n = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n$, alors le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd}
K_1^{G_n}(\underline{EG}_n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \arrow[r, "\tilde{\mu}_1^{G_n} \otimes \mathbf{1}"] & K_1(C^*(G_n)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \\
H_1(G_n, FG_n) \arrow[u, "\beta_t"] \arrow[ur, "\beta_a"'] &
\end{tikzcd}$$

Preuve : Remarquons que par le corollaire 2 et la proposition ci-dessus on a,

$$\tilde{\mu}_1^{G_n}(e_l) = [aP_{\omega^l} + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq l}}^{n-1} P_{\omega^i}] = [aP_{\omega^l} + 1 - P_{\omega^l}].$$

Notons N l'ordre de b^k dans G_n; on a alors en notant ω_N une racine N-ème primitive de 1 dans $\mathbb{C}$, et $e_{i,N} = [L^2(\mathbb{R}), M, \frac{d}{dx}]$ le i-ème vecteur de base de $K_1^{\mathbb{Z} \times \langle b^k \rangle}(\mathbb{R})$, avec l'action $\rho_{i,N}$ de $\mathbb{Z} \times \langle b^k \rangle$ donnée par $af(x) = f(x+1)$, $b^k f(x) = \omega_N^i f(x)$:

$$\beta_t^{G_{n_j}}(b^{(k)}) = \sum_{i=0}^{N-1} e_{i,N}^{(k)} \otimes \overline{\omega}_N^i$$

où $e_{i,N}^{(k)}$ est le triple $[L^2(\mathbb{R}), M, \frac{d}{dx}]$, avec l'action de $\mathbb{Z} \times \langle b \rangle$ est donnée par $\mathrm{Ind}_{\mathbb{Z} \times \langle b^k \rangle}^{\mathbb{Z} \times \langle b \rangle}(\rho_{i,N})$. Donc

$$\begin{aligned}
(\tilde{\mu}_1^{G_n} \otimes \mathbf{1}) \circ \beta_t^{G_n}(b^{(k)}) &= (\tilde{\mu}_1^{G_n} \otimes \mathbf{1})(\sum_{i=0}^{n-1} e_{i,N}^{(k)} \otimes \overline{\omega}_N^i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} [aP_{\omega_N^i}^{(k)} + 1 - P_{\omega_N^i}^{(k)}] \otimes \overline{\omega}_N^i = \beta_a(b^{(k)}).
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.20 *En remarquant que*
$GL_1(\bigoplus_{i=0}^{n-1} P_{\omega^i}\mathbb{C}G_n) \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} GL_1(P_{\omega^i}\mathbb{C}G_n) \otimes \mathbb{C} \subset \bigoplus_{i=0}^{n-1} P_{\omega^i}\mathbb{C}G_n \otimes \mathbb{C}$
et en appliquant le lemme 2.8, on obtient l'égalité :

$$\sum_{i=0}^{n-1} [aP_{\omega^i} + 1 - P_{\omega^i}] \otimes \overline{\omega}^{ik} = \sum_{i=0}^{n-1} [aP_{\omega^i}^{(k)} + 1 - P_{\omega^i}^{(k)}] \otimes \overline{\omega}^i.$$

Donc $\beta_t^{G_n}(b^{(k)}) = \sum_{i=0}^{n-1} e_{i,N} \otimes \overline{\omega}_N^{ik}$.

On est enfin prêt pour s'attaquer à la preuve du théorème 3.16.

Preuve du théorème 3.16 : Fixons $\gamma_j \in S$, soient $\gamma \in Z_\Gamma(\gamma_j)$ et $\alpha_\gamma^{(j)} : G_{n_j} \to \Gamma$ l'unique homomorphisme associé. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
K_1^{G_{n_j}}(pt) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \arrow[rrr, "(\alpha_\gamma^{(j)})_* \otimes \mathbf{1}"] \arrow[dd, "\tilde{\mu}_1^{G_{n_j}} \otimes \mathbf{1}"'] & {} \arrow[r, phantom, "(*)"] & {} & K_1^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \arrow[dd, "\mu_1^\Gamma \otimes \mathbf{1}"] \\
& H_1(G_{n_j}, FG_{n_j}) \arrow[ul, "\beta_t^{G_{n_j}}"'] \arrow[dl, "\beta_a^{G_{n_j}}"] \arrow[r, "(\alpha_\gamma^{(j)})_*"'] & H_1(\Gamma, F\Gamma) \arrow[ur, "\beta_t^\Gamma"] \arrow[dr, "\beta_a^\Gamma"'] & \\
K_1(C^*(G_{n_j})) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \arrow[rrr, "(\alpha_\gamma^{(j)})_* \otimes \mathbf{1}"'] & & & K_1(C_r^*(\Gamma)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

On a $((\alpha_\gamma^{(j)})_* \otimes \mathbf{1}) \circ \beta_a^{G_{n_j}} = \beta_a^\Gamma \circ (\alpha_\gamma^{(j)})_*$ trivialement, le grand rectangle commute par la naturalité de la flèche de Baum-Connes, et le triangle de gauche commute par la proposition 3.19. De plus le diagramme $(*)$ commute, en effet :

$$\begin{aligned}
((\alpha_\gamma^{(j)})_* \otimes \mathbf{1})(\beta_t^{G_{n_j}}[b^{(k)}]) &= ((\alpha_\gamma^{(j)})_* \otimes \mathbf{1})((\alpha_b^{(k)})_* \otimes \mathbf{1})(\sum_{i=0}^{N-1} e_{i,N} \otimes \overline{\omega}_N^i) \\
&= ((\alpha_\gamma^{(j)})_* \circ (\alpha_b^{(k)})_*)(\sum_{i=0}^{N-1} e_{i,N} \otimes \overline{\omega}_N^i) \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} (\alpha_\gamma^{(\gamma_j^k)})_* (\sum_{i=0}^{N-1} e_{i,N} \otimes \overline{\omega}_N^i) \\
&= \beta_t^\Gamma(\overline{\gamma}^k) = \beta_t^\Gamma((\alpha_\gamma^{(j)})_*(b^{(k)}))
\end{aligned}$$

On termine la preuve par "diagram chasing". □

3.5 Groupe de Whitehead topologique

Notons que pour un groupe Γ, le groupe de K-théorie algébrique $K_1^{alg}(\mathbb{Z}\Gamma)$ contient toujours certains éléments "triviaux" : ce sont les classes des inversibles $\pm\delta_g$, $g \in \Gamma$. Motivé par la partie non "triviale" de $K_1^{alg}(\mathbb{Z}\Gamma)$, en algèbre, on définit le groupe de Whitehead $Wh(\Gamma)$ comme le quotient de $K_1^{alg}(\mathbb{Z}\Gamma)$ par l'image du sous-groupe $\langle \pm\delta_g \ : \ g \in \Gamma\rangle$ de $(\mathbb{Z}\Gamma)^\times$.

Maintenant, si nous considérons le groupe de K-théorie topologique $K_1(C_r^*(\Gamma))$, la même idée nous mène à la définition suivante

Définition 3.21 *Définissons le groupe de Whitehead topologique par*

$$Wh^{top}(\Gamma) = K_1(C_r^*(\Gamma))/_{\langle[\delta_g]:g\in\Gamma\rangle} = K_1(C_r^*(\Gamma))/Im\ \kappa_\Gamma.$$

Exemples 3.22

(1) Si Γ est un groupe fini, alors $C_r^*(\Gamma)$ est une C^*-algèbre de dimension finie. Donc le groupe de Whitehead topologique $Wh^{top}(\Gamma)$ est trivial (puisque $K_1(C_r^*(\Gamma))$ l'est déjà).

(2) Pour $n \geq 1$, $Wh^{top}(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^{2^{n-1}-n}$.

Remarque 3.23 $Wh^{top}(\Gamma) = 0$ *si et seulement si tout élément de $GL_\infty(C_r^*(\Gamma))$ est dans la même composante connexe qu'un certain* $\begin{pmatrix} \delta_g & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \end{pmatrix}$, *où $g \in \Gamma$ et où 1 désigne l'unité de $C_r^*(\Gamma)$. Cette dernière condition équivaut à la surjectivité de κ_Γ.*

La conjecture de Baum-Connes nous mène à la conjecture suivante :

Conjecture 2 *Soit Γ un groupe discret,*

$$Wh^{top}(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_{2n+1}(\Gamma, F\Gamma)$$

Nous reviendrons sur le groupe de Whitehead à la fin du chapitre 4.

Chapitre 4

Construction de $\beta_a : H_2(\Gamma, \mathbb{Z}) \to K_0(C_r^*(\Gamma))$

Le résultat principal de ce chapitre se trouve dans la deuxième section où nous construisons un homomorphisme "analytique" $\beta_a : H_2(\Gamma, \mathbb{Z}) \to K_0(C_r^*(\Gamma))$, ainsi qu'un homomorphisme "topologique" $\beta_t : H_2(\Gamma, \mathbb{Z}) \to K_0^\Gamma(\underline{E\Gamma})$ où Γ est un groupe discret (de type fini). Dans la première section, nous présentons l'outil principal pour cette construction : c'est une description bien utile du groupe $H_2(\Gamma, \mathbb{Z})$, donnée par B. Zimmermann dans [Zim87].
Dans la quatrième section, nous discutons le lien avec la conjecture de Baum-Connes. Plus précisement, nous montrons que $\mu_0^\Gamma \circ \beta_t = \beta_a$ et que β_t "inverse" rationnellement le caractère de Chern. A l'aide du calcul de la K-homologie d'un CW-complexe fini de dimension 2, nous finissons le chapitre en donnant une reformulation de la conjecture de Baum-Connes pour un groupe Γ tel que son espace classifiant $B\Gamma$ a cette propriété.

4.1 Rappels et définitions

Dans cette section on va rappeler une description du groupe $H_2(\Gamma, \mathbb{Z})$, donnée par B. Zimmermann dans [Zim87] pour Γ un groupe (de type fini). Nous allons donner ensuite une nouvelle définition équivalente de la structure additive de ce groupe.

Soit $B\Gamma$ l'espace classifiant de Γ et soit $\Gamma_g = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid \Pi_{i=1}^{g}[a_i, b_i] = 1\rangle$ le groupe fondamental d'une surface Σ_g fermée orientée de genre $g \geq 1$.

Définition 4.1 *Soient (Σ_{g_1}, x_1) et (Σ_{g_2}, x_2) deux surfaces pointées de genre g_1 et g_2. Soient $f_1\ :\ (\Sigma_{g_1}, x_1) \to (B\Gamma, y_0)$ et $f_2\ :\ (\Sigma_{g_2}, x_2) \to (B\Gamma, y_0)$ deux applications continues pointées (donc on a $f_1(x_1) = f_2(x_2) = y_0$).*
Quitte à modifier f_1 et f_2 dans leurs classes d'homotopie, on peut 'élargir' x_1 et x_2 en des petits disques (fermés, de rayon > 0) D_1 et D_2, sur lesquels f_1 et f_2 prennent la valeur y_0. A présent, on découpe ces petits disques dans Σ_{g_1}, et Σ_{g_2}, puis on recolle selon leur bord. On obtient ainsi la somme connexe $\Sigma_{g_1}\#\Sigma_{g_2}$ et une application continue $f_1\#f_2\ :\ \Sigma_{g_1}\#\Sigma_{g_2} \to B\Gamma$ définie par :

$$x \mapsto \begin{cases} f_1(x) & si\ x \in \Sigma_{g_1}\backslash D_1 \\ y_0 & si\ x \in \partial D_1 = \partial D_2 \\ f_2(x) & si\ x \in \Sigma_{g_2}\backslash D_2. \end{cases}$$

Définitions 4.2

(1) Soient $f_1,\ f_2\ :\ \Sigma_g \to B\Gamma$ deux applications continues induisant des homomorphismes surjectifs $\varphi_1,\ \varphi_2\ :\ \Gamma_g \twoheadrightarrow \Gamma$. Les homomorphismes φ_1 et φ_2 (respectivement les applications f_1 et f_2) sont dits équivalents s'il existe un automorphisme $\alpha\ :\ \Gamma_g \to \Gamma_g$ induit (au niveau des π_1) par un homéomorphisme $h\ :\ \Sigma_g \to \Sigma_g$ préservant l'orientation et tels que les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd} \Gamma_g \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft", near start] & \Gamma \\ \Gamma_g \arrow[ur, "\varphi_2"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Sigma_g \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft", near start] & B\Gamma \\ \Sigma_g \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd}$$

le deuxième à homotopie près.

Remarquons que si le deuxième diagramme commute, alors le premier commute aussi.

(2) *Deux applications continues* $f_1 : \Sigma_{g_1} \to B\Gamma$, $f_2 : \Sigma_{g_2} \to B\Gamma$ *sont stablement équivalentes s'il existe* $g \geq g_1, g_2$ *tel que* $f_1\#y_0\ :\ \Sigma_{g_1}\#\Sigma_{g-g_1} \to B\Gamma$ *et* $f_2\#y_0\ :\ \Sigma_{g_2}\#\Sigma_{g-g_2} \to B\Gamma$ *sont équivalentes; ici* y_0 *désigne l'application constante* $\Sigma_g \to B\Gamma$, $x \mapsto y_0$ *(si* $g = g_1$ *ou* g_2, Σ_0 *désigne ici la sphère* S^2*).*

Formulation algébrique *: deux surjections* $\varphi_1\ :\ \Gamma_{g_1} \twoheadrightarrow \Gamma$ *et* $\varphi_2\ :\ \Gamma_{g_2} \twoheadrightarrow \Gamma$ *sont stablement équivalentes, s'il existe un diagramme commutatif:*

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_g \arrow[r, "\overline{\varphi_1}"] \arrow[d, "\alpha"', "\simeq"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \Gamma \\
\Gamma_g \arrow[ur, "\overline{\varphi_2}"'] &
\end{tikzcd}$$

où $\Gamma_g = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \ \mid\ \Pi_{i=1}^{g}[a_i, b_i] = 1\rangle$, *avec* $g \geq g_1, g_2$,
$\overline{\varphi}_\epsilon(a_i) = \varphi_\epsilon(a_i)$, $\overline{\varphi}_\epsilon(b_i) = \varphi_\epsilon(b_i)$, $1 \leq i \leq g_\epsilon$,
$\overline{\varphi}_\epsilon(a_i) = \overline{\varphi}_\epsilon(b_i) = 1$, $g_\epsilon + 1 \leq i \leq g$, $\epsilon = 1, 2$.
Autrement dit: φ_1 *et* φ_2 *sont stablement équivalentes s'il existe* $g \geq g_1, g_2$ *telle que* $\overline{\varphi_1}, \overline{\varphi_2}\ :\ \Gamma_g \twoheadrightarrow \Gamma$ *sont équivalentes.*

Remarques 4.3

(1) *Un groupe* Γ *de type fini est quotient d'un groupe de surface convenable. En effet, soit* $q\ :\ F_n \to \Gamma$ *la surjection donnée par le choix d'un système de générateur fini, où* $F_n = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ *est le groupe libre. Mais* $\Gamma_n = \langle a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \ \mid\ \Pi_{i=1}^{n}[a_i, b_i] = 1\rangle$ *se surjecte clairement sur* F_n *via l'application* $\alpha :\ a_i \mapsto x_i,\ \ b_i \mapsto x_i$.

(2) *Soient* $f_1\ :\ \Sigma_{g_1} \to B\Gamma$ *et* $f_2\ :\ \Sigma_{g_2} \to B\Gamma$ *deux applications stablement équivalentes. Quitte à prolonger trivialement* f_1 *et* f_2, *on peut toujours*

supposer que $g_1 = g_2$ et que f_1 et f_2 s'écrivent $f_1 = y_0\#\tilde{f}_1\#y_0$ et $f_2 = y_0\#\tilde{f}_2\#y_0 : \Sigma_1\#\Sigma_{g_1-2}\#\Sigma_1 \to B\Gamma$.

Dans la suite, on conviendra que si $f : \Sigma_g \to B\Gamma$ est une application continue, alors f s'écrit sous la forme $y_0\#\tilde{f}\#y_0$, comme ci-dessus.

Enonçons maintenant le théorème fondamental de B. Zimmermann :

Théorème 4.4 ([**Zim87**]) *Soit Γ un groupe de type fini; alors $H_2(\Gamma,\mathbb{Z})$ est isomorphe au groupe $[\{\Sigma_g,\ g \in \mathbb{N}^*\},\ B\Gamma]$ de classes d'équivalence stable des applications continues $\Sigma_g \to B\Gamma$ induisant des surjections au niveau des groupes fondamentaux, via l'application*

$$\Omega : [f] \mapsto f_*[\Sigma_g],$$

où $f_* : H_2(\Sigma_g,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \to H_2(B\Gamma,\mathbb{Z})$ et $[\Sigma_g]$ désigne la classe fondamentale de Σ_g.

Remarques 4.5

(1) Soient $[f_1]$ et $[f_2] \in [\{\Sigma_g, g \in \mathbb{N}^*\}, B\Gamma]$. Alors la somme est donnée par: $[f_1] + [f_2] = [f_1\#f_2]$.

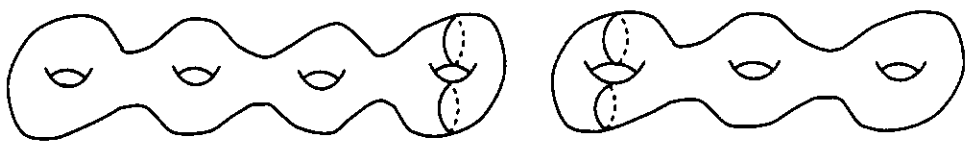
(2) L'application $\beta = q \circ \alpha : \Gamma_g \to F_g \to \Gamma$ qui se factorise via le groupe libre F_g, décrit l'élément neutre 0 de $[\{\Sigma_g, g \in \mathbb{N}^*\}, B\Gamma]$ (en effet β est nulle en homologie, puisque $H_2(F_g,\mathbb{Z}) = 0$).

(3) Soit $[f : \Sigma_g \to B\Gamma] \in [\{\Sigma_g, g \in \mathbb{N}^*\}, B\Gamma]$, soit h un difféomorphisme de Σ_g renversant l'orientation. Alors $[f \circ h]$ est l'opposé de $[f]$ dans $[\{\Sigma_g, g \in \mathbb{N}^*\}, B\Gamma]$ (en effet en homologie: $f_* \circ h_*([\Sigma_g]) = f_*(-[\Sigma_g]) = -f_*([\Sigma_g])$).

Dorénavant nous identifierons $[\{\Sigma_g, g \in \mathbb{N}^*\}, B\Gamma]$ à $H_2(\Gamma,\mathbb{Z})$ via Ω.

Voici maintenant une nouvelle définition équivalente de somme connexe qui va nous être techniquement utile plus tard (et qui s'avèrera équivalente au sens ci-dessus).

Définition 4.6 *Soient* Σ_{g_1}, Σ_{g_2} *deux surfaces de genre* g_1 *et* $g_2 \geq 1$. *En coupant une anse dans* Σ_{g_1} *(respectivement dans* Σ_{g_2}*) comme dans le dessin ci-dessous, et en recollant selon ces sections, nous obtenons une surface de genre* $g_1 + g_2 - 1$, *notée* $\Sigma_{g_1} * \Sigma_{g_2}$.



Σ_{g_1} Σ_{g_2}

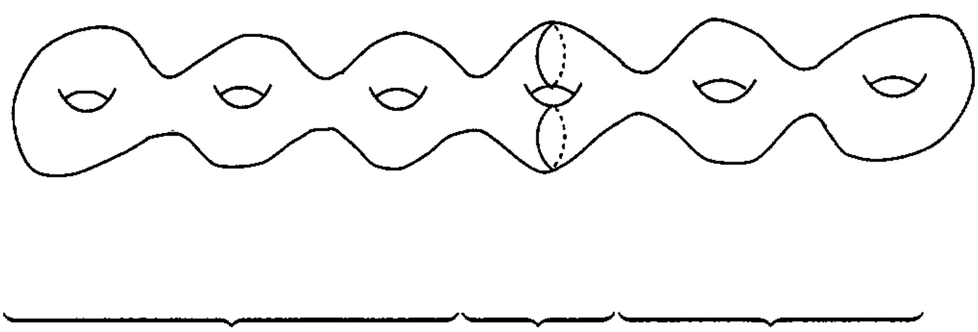
Soient $f_1 : \Sigma_{g_1} \to B\Gamma$ *et* $f_2 : \Sigma_{g_2} \to B\Gamma$ *deux applications continues, égales à* y_0 *sur les anses de* Σ_{g_1} *et* Σ_{g_2} *selon lesquelles on recolle. Alors la somme connexe modifiée de* f_1 *et* f_2 *est l'application continue notée* $f_1 * f_2 : \Sigma_{g_1} * \Sigma_{g_2} \to B\Gamma$ *définie par:*

$$x \mapsto \begin{cases} f_1(x) & si\ x \in \Sigma_{g_1} \\ y_0 & si\ x \in \Sigma_1 \\ f_2(x) & si\ x \in \Sigma_{g_2} \end{cases}$$

où Σ_1 *est "l'anse commune" à* Σ_{g_1} *et* Σ_{g_2} *selon laquelle on a collé.*

Remarques 4.7

(1) Si $\tilde{f}_1 : \Sigma_{g_1-1} \to B\Gamma$, $\tilde{f}_2 : \Sigma_{g_2-1} \to B\Gamma$ *sont des applications continues pointées, alors* $f_1 = y_0\#\tilde{f}_1\#y_0$, $f_2 = y_0\#\tilde{f}_2\#y_0$ *satisfont les hypothèses de la définition 4.6, de plus* $[f_1 * f_2] = [\tilde{f}_1\#\tilde{f}_2]$.



(2) $f_1 * f_2$ *s'écrit aussi sous la forme* $y_0\#f\#y_0$.

4.2 K-homologie d'un 2-complexe fini

Nous remercions M. U. Suter de nous avoir suggéré ce lemme :

Lemme 4.8 *Soit* X *un CW-complexe fini de dimension* ≤ 2. *Alors on a :*

$$\begin{aligned} K_0(X) &= H_0(X,\mathbb{Z}) \oplus H_2(X,\mathbb{Z}) \\ K_1(X) &= H_1(X,\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Pour simplifier notons dans la suite $H_i(X)$ l'homologie à coefficients entiers.

Preuve : En collapsant le 1-squelette A (qui a le type d'homotopie d'un bouquet de m cercles) à un point, on obtient un bouquet de n sphères; ainsi on a une suite exacte d'espaces :

$$\bigvee_{i=1}^{m} S^1 \simeq A \xrightarrow{\ i\ } X \xrightarrow{\ q\ } \bigvee_{j=1}^{n} S^2.$$

Ecrivons la suite exacte à 6 termes associée en K-homologie (où $\tilde{K}_i$ désigne la K-homologie réduite) :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\bigvee_{i=1}^{m} S^1) \simeq \mathbb{Z} & \longrightarrow & K_0(X) & \longrightarrow & \tilde{K}_0(\bigvee_{j=1}^{n} S^2) \simeq \mathbb{Z}^n \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ \tilde{K}_1(\bigvee_{j=1}^{n} S^2) = 0 & \longleftarrow & K_1(X) & \longleftarrow & K_1(\bigvee_{i=1}^{m} S^1) \simeq \mathbb{Z}^m \end{array}$$

D'autre part, en homologie entière on a la longue suite exacte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 = H_2(\bigvee_{i=1}^{m} S^1) & \to & H_2(X) & \to & \tilde{H}_2(\bigvee_{j=1}^{n} S^2) & \to & H_1(\bigvee_{i=1}^{m} S^1) & \to & \\ H_1(X) & \to & \tilde{H}_1(\bigvee_{j=1}^{n} S^2) & \to & H_0(\bigvee_{i=1}^{m} S^1) & \to & H_0(X) & \to 0 & \end{array}$$

qu'on peut écrire comme suit :

$$\begin{tikzcd}
H_0(\bigvee_{i=1}^{m} S^1) \simeq \mathbb{Z} \arrow[r] & H_0(X)\oplus H_2(X) \arrow[r] & \tilde{H}_2(\bigvee_{j=1}^{n} S^2) \simeq \mathbb{Z}^n \arrow[d] \\
\tilde{H}_1(\bigvee_{j=1}^{n} S^2) = 0 \arrow[u] & H_1(X) \arrow[l] & H_1(\bigvee_{i=1}^{m} S^1) \simeq \mathbb{Z}^m \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Rappelons maintenant que pour des bouquets de cercles et de sphères, le caractère de Chern définit les isomorphismes : $K_0(\bigvee_{i=1}^m S^1) \simeq H_0(\bigvee_{i=1}^m S^1)$, $K_1(\bigvee_{i=1}^m S^1) \simeq H_1(\bigvee_{i=1}^m S^1)$ et $\tilde{K}_0(\bigvee_{j=1}^n S^2) \simeq H_2(\bigvee_{j=1}^n S^2)$. Alors en superposant les deux suites on obtient :

$$\begin{tikzcd}
 & H_0(\bigvee_{i=1}^{m} S^1) \arrow[rr] & & H_0(X)\oplus H_2(X) \arrow[rr] & & H_2(\bigvee_{j=1}^{n} S^2) \arrow[dl] \\
0 \arrow[ur] & & H_1(X) \arrow[ll] & & H_1(\bigvee_{i=1}^{m} S^1) \arrow[ll] & \\
 & K_0(\bigvee_{i=1}^{m} S^1) \arrow[uu] \arrow[rr] & & \mathbb{Z}\oplus\tilde{K}_0(X) \arrow[uu, dashed] \arrow[rr] & & \tilde{K}_0(\bigvee_{j=1}^{n} S^2) \arrow[uu] \arrow[dl] \\
0 \arrow[uu] \arrow[ur] & & K_1(X) \arrow[ll] \arrow[uu, dashed] & & K_1(\bigvee_{i=1}^{m} S^1) \arrow[ll] \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

Remarquons que le diagramme vertical de droite commute par naturalité du caractère de Chern; pour celui de gauche, c'est trivial. Il faut donc construire les homomorphismes manquants à l'aide de la "chasse aux diagrammes" pour faire commuter tous les autres diagrammes verticaux. Enfin, par le lemme des 5, nous pourrons conclure.

Commençons par définir $f : K_1(X) \to H_1(X)$. Soit $x \in K_1(X)$, alors comme $i_* : K_1(\bigvee_{i=1}^m S^1) \to K_1(X)$ est surjectif, il existe $\alpha \in K_1(\bigvee_{i=1}^m S^1)$ tel que $i_*(\alpha) = x$. Posons alors

$$f(x) := i_*(ch(\alpha)).$$

Cette application est bien définie car le noyau de l'application $i_* : K_1(\bigvee_{i=1}^m S^1) \to K_1(X)$ est envoyé par le caractère de Chern sur celui de $i_* : H_1(\bigvee_{i=1}^m S^1) \to$

$H_1(X)$.

Pour définir $f : K_0(X) \to H_0(X) \oplus H_2(X)$ écrivons $K_0(X) = \mathbb{Z} \oplus \tilde{K}_0(X)$ et distinguons deux cas :

(1) Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $x \in Ker(q_* : K_0(X) \to \tilde{K}_0(\bigvee_{j=1}^n S^2)) = Im\ i_*$, alors il existe $\alpha \in K_0(\bigvee_{i=1}^m S^1)$ tel que $i_*(\alpha) = x$. Dans ce cas, posons

$$f(x) := i_*(ch(\alpha)) \in H_0(X).$$

(2) Si $x \in \tilde{K}_0(X)$, alors $ch(q_*(x)) \in Ker(\partial : \tilde{H}_2(\bigvee_{i=1}^n S^2) \to H_1(\bigvee_{i=1}^m S^1))$ remonte de manière unique en un élément $y \in H_2(X)$ car $H_2(X) \to H_2(\bigvee_{i=1}^n S^2)$ est injective. Posons alors

$$f(x) := y \in H_2(X).$$

□

Remarque 4.9 *Grâce à la naturalité du caractère de Chern et la définition de* f, *on a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(\bigvee_{i=1}^m S^1) \arrow[r, hook, "i_*"] \arrow[d, "ch"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & K_0(X) \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dr, "ch_*"] & \\
0 \arrow[r] & H_0(\bigvee_{i=1}^m S^1) \arrow[r, hook, "i_*"] & H_0(X) \oplus H_2(X) \arrow[r] & H_0(\Gamma,\mathbb{Q}) \oplus H_2(\Gamma,\mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

Comme f *est l'unique isomorphisme qui fait commuter ce diagramme, l'homomorphisme* f *doit être le caractère de Chern (avant tensorisation!).*
En particulier si $X = \Sigma_g$, *on a que le caractère de Chern*

$$ch_* : K_0(\Sigma_g) \to H_0(\Sigma_g,\mathbb{Z}) \oplus H_2(\Sigma_g,\mathbb{Z})$$

définit un isomorphisme.

Notons $i : pt \to \Sigma_g$ l'inclusion du point-base. Notons $[i_*] \in K_0(\Sigma_g)$ l'image par i du générateur canonique de $K_0(pt) = \mathbb{Z}$. Notons encore $[\sigma_g]$ l'image inverse de la classe fondamentale $[\Sigma_g]$ par l'inverse du caractère de Chern $ch_*^{-1} : H_0(\Sigma_g,\mathbb{Z}) \oplus H_2(\Sigma_g,\mathbb{Z}) \to K_0(\Sigma_g)$.

Lemme 4.10 *Notons* $[\overline{\partial}_g]$ *la classe dans* $K_0(\Sigma_g)$ *de l'opérateur de Dolbeault* $\overline{\partial} + \overline{\partial}^*$ *où* $\overline{\partial} := d_x + id_y$ *sur* Σ_g *(vue comme une courbe complexe). Alors*

$$[\sigma_g] = [\overline{\partial}_g] - \frac{\chi(\Sigma_g)}{2}[i_*]$$

où $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ *est la caractéristique d'Euler de* Σ_g.

Preuve : Soient M une variété Kählerienne, $\overline{\partial}$ l'opérateur de Dolbeault sur M, et $[\overline{\partial}]$ sa classe dans $K_0(M)$. Par la formule de Riemann-Roch-Hirzebruch (voir [Sha78], p. 29), appliquée à M, on a que $ch_*[\overline{\partial}]$ est en dualité de Poincaré avec la classe de Todd $\mathrm{Td}(TM)$. En particulier, si $M = \Sigma_g$, alors $ch_*[\overline{\partial}_g]$ est en dualité de Poincaré avec

$$\mathrm{Td}(T\Sigma_g) = 1 + \frac{c_1(T\Sigma_g)}{2}$$

(voir [Sha78], p. 3; ici $T\Sigma_g$ est vu comme un fibré complexe en droite et $c_1(T\Sigma_g)$ désigne la première classe de Chern). Comme

$$< \frac{c_1(T\Sigma_g)}{2}, [\Sigma_g] >= \mathrm{Ind}(\overline{\partial}_g) = 1 - g$$

(voir [Sha78], p. 27), on conclut en faisant appel à la dualité de Poincaré. □

4.3 Construction de β_a et β_t

Soit $[f : \Sigma_g \to B\Gamma] \in H_2(\Gamma,\mathbb{Z})$ et soit $\varphi : \Gamma_g \twoheadrightarrow \Gamma$ la surjection correspondante. Alors φ induit un homomorphisme surjectif $\varphi : C^*(\Gamma_g) \twoheadrightarrow C^*(\Gamma)$ qui par composition avec la représentation régulière gauche λ_Γ donne un homomorphisme

$$\lambda_\Gamma \circ \varphi : C^*(\Gamma_g) \to C^*(\Gamma) \to C_r^*(\Gamma).$$

On sait grâce à Kasparov [Kas83] que $\tilde{\mu}_0^{\Gamma_g} : K_0(\Sigma_g) \to K_0(C^*(\Gamma_g))$ est un isomorphisme (en effet, la conjecture de Baum-Connes est vraie pour Γ_g, et de plus Γ_g est K-moyennable au sens de la définition 5.4 ci-dessous). On a vu que $K_0(\Sigma_g)$ est engendré par $[i_*]$ et $[\sigma_g]$. Dans $K_0(C^*(\Gamma_g)) \simeq \mathbb{Z}^2$ on a donc deux générateurs: $\tilde{\mu}_0^{\Gamma_g}([i_*]) = [1]$ la classe de l'unité et $[c_g] := \tilde{\mu}_0^{\Gamma_g}([\sigma_g])$.

Définitions 4.11 *(1)* $\beta_t : H_2(\Gamma,\mathbb{Z}) \to K_0^\Gamma(\underline{E\Gamma})$, $[f] \mapsto \pi_*(f_*([\sigma_g]))$, *où* $f_* : K_0^{\Gamma_g}(E\Gamma_g) \simeq K_0(\Sigma_g) \to K_0(B\Gamma) \simeq K_0^\Gamma(E\Gamma)$ *est l'application induite au niveau de la K-homologie, et où* $\pi : E\Gamma \to \underline{E\Gamma}$ *est une application continue* Γ*-équivariante unique à homotopie près (existe car l'action de* Γ *sur* $E\Gamma$ *est propre).*

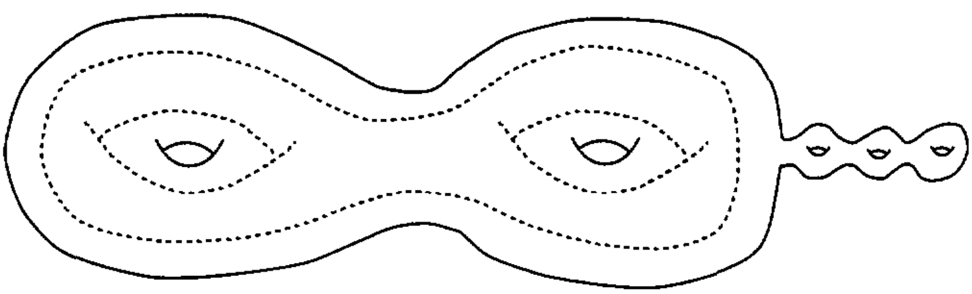
(2) $\beta_a : H_2(\Gamma,\mathbb{Z}) \to K_0(C^*_r(\Gamma))$, $[\varphi] \mapsto (\lambda_\Gamma)_* o \varphi_*([c_g])$, *où* $\varphi_* : K_0(C^*(\Gamma_g)) \to K_0(C^*(\Gamma))$ *est l'application induite au niveau de la K-théorie (voir lemme 3.2).*

Proposition 4.12 β_t *est un homomorphisme bien défini.*

Preuve : Soit $[f_1] = [f_2] \in H_2(\Gamma,\mathbb{Z})$. Commençons par montrer que, si $f_1 : \Sigma_{g_1} \to B\Gamma$ et $f_2 : \Sigma_{g_2} \to B\Gamma$ sont telles que $f_1 = f_2 \# y_0$ (donc $g_1 > g_2$), alors $(f_1)_*[\sigma_{g_1}] = (f_2)_*[\sigma_{g_2}]$. Pour ce faire, plaçons les surfaces Σ_{g_1} et Σ_{g_2} comme ci-dessous :

— : Σ_{g_1}

- - : Σ_{g_2}



Nous pouvons supposer que Σ_{g_1} est contenu dans un voisinage tubulaire U de Σ_{g_2} dans $\mathbb{R}^3$; l'identification de U à l'espace total du fibré normal de

Σ_{g_2} fournit une projection $q : U \to \Sigma_{g_2}$. Il est clair que $q|_{\Sigma_{g_1}}$ est une application de degré 1 de Σ_{g_1} sur Σ_{g_2}, donc $(q|_{\Sigma_{g_1}})_*[\Sigma_{g_1}] = [\Sigma_{g_2}]$. Par naturalité et injectivité du caractère de Chern, on en déduit $(q|_{\Sigma_{g_1}})_*[\sigma_{g_1}] = [\sigma_{g_2}]$. D'autre part, il est clair que $f_1 = f_2 \# y_0$ est homotope à $f_2 \circ q|_{\Sigma_{g_1}}$. Donc $(f_1)_*[\sigma_{g_1}] = (f_2 \circ q|_{\Sigma_{g_1}})_*[\sigma_{g_1}] = (f_2)_*[\sigma_{g_2}]$.
Il faut encore vérifier que, si $f_1, f_2 : \Sigma_g \to B\Gamma$ sont deux applications équivalentes, alors $(f_1)_*[\sigma_g] = (f_2)_*[\sigma_g]$. Par hypothèse, il existe un homéomorphisme $h : \Sigma_g \to \Sigma_g$ préservant l'orientation tel que $f_1 \sim f_2 \circ h$. Remarquons que comme h préserve l'orientation, h_* agit trivialement sur $K_0(\Sigma_g)$. D'où on a:

$$\begin{aligned} \beta_t([f_1]) &= \pi_*[(f_1)_*[\sigma_g]] = \pi_*[(f_2 \circ h)_*[\sigma_g]] \\ &= \pi_*[(f_2)_*(h_*[\sigma_g])] \\ &= \pi_*[(f_2)_*[\sigma_g]] = \beta_t([f_2]), \end{aligned}$$

Donc β_t est bien défini.

Montrons maintenant que β_t est un homomorphisme. Soient $[f_1 : \Sigma_g \to B\Gamma]$, $[f_2 : \Sigma_g \to B\Gamma] \in H_2(\Gamma,\mathbb{Z})$ (par ce qui précède nous pouvons supposer que f_1 et f_2 ont pour source la même surface Σ_g), soit $X = f_1(\Sigma_g) \cup f_2(\Sigma_g)$, et soit $\tilde{f}_i : C_0(X) \to C(\Sigma_g)$ l'application continue définie par $\tilde{f}_i(f) = f \circ f_i$, $i = 1, 2$. Nous devons montrer que $(f_1 * f_2)_*[\sigma_{2g-1}] = (f_1)_*[\sigma_g] + (f_2)_*[\sigma_g]$. Rappelons (voir lemme 4.10) que $[\sigma_g] = [\overline{\partial}_g] - \frac{\chi(\Sigma_g)}{2}[i_*]$ et remarquons que

$$\chi(\Sigma_g * \Sigma_g) = 2 - 2(2g-1) = 4 - 4g = 2\chi(\Sigma_g)$$

(plus généralement $\chi(\Sigma_{g_1} * \Sigma_{g_2}) = \chi(\Sigma_{g_1}) + \chi(\Sigma_{g_2})$: la caractéristique d'Euler est additive pour notre somme connexe modifiée!). Il suffit donc de vérifier que

$$(f_1 * f_2)_*[\overline{\partial}_{2g-1}] = (f_1)_*[\overline{\partial}_g] + (f_2)_*[\overline{\partial}_g].$$

Pour $i = 1, 2$, l'élément $(f_i)_*([\overline{\partial}_g]) \in K_0(B\Gamma)$ est décrit par la classe du triplet $(H = L^2(\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}}\Sigma_g), \pi_g \circ \tilde{f}_i, \overline{\partial}_g)$, où $L^2(\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}}\Sigma_g)$ désigne l'espace de Hilbert des formes différentielles L^2 à coefficients complexes sur Σ_g, π_g est la représentation de $C(\Sigma_g)$ par multiplication sur $L^2(\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}}\Sigma_g)$, et $\overline{\partial}_g : \Omega^*(\Sigma_g) \to$

$\Omega^*(\Sigma_g)$ est l'opérateur de Dolbeault défini sur les formes différentielles C^∞ sur Σ_g. D'une manière similaire, $(f_1 * f_2)_*([\overline{\partial}_{2g-1}])$ est décrit par $(L^2(\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}}\Sigma_{2g-1}),$ $\pi_{2g-1} \circ (\widetilde{f_1 * f_2}), \overline{\partial}_{2g-1})$. Il est suffisant (voir [BD82]) de trouver un unitaire

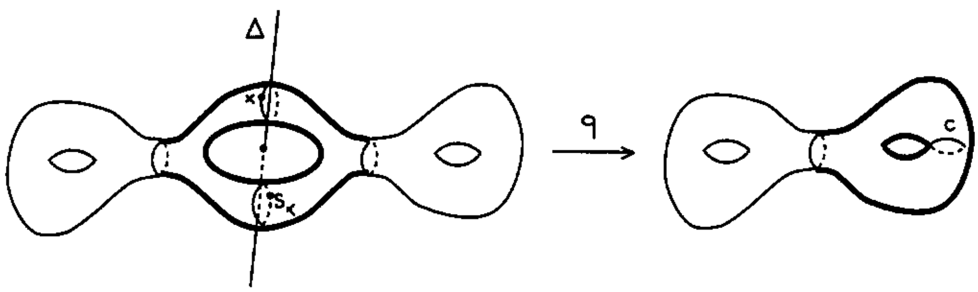
$$u\ :\ L^2(\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}}\Sigma_g) \oplus L^2(\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}}\Sigma_g) \to L^2(\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}}\Sigma_{2g-1})$$

tel que

$$\begin{cases} (1) \quad u((\pi_g \circ \tilde{f}_1)(f) \oplus (\pi_g \circ \tilde{f}_2)(f))u^* = \pi_{2g-1} \circ (\widetilde{f_1 * f_2})(f), \quad \forall f \in C_0(X) \\ (2) \quad u(\overline{\partial}_g \oplus \overline{\partial}_g)u^* = \overline{\partial}_{2g-1} \end{cases}$$

Pour cela, nous mettons la surface Σ_{2g-1} de manière parfaitement symétrique dans la position horizontale et nous considérons le demi-tour s par rapport à l'axe vertical de symétrie Δ (voir dessin).

En quotientant Σ_{2g-1} par s, nous obtenons Σ_g; notons $q\ :\ \Sigma_{2g-1} \to \Sigma_g$ le revêtement double associé:



Nous considérons alors l'unitaire "de doublement"

$$\begin{array}{rcl} u\ :\ L^2(\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}}\Sigma_g) \oplus L^2(\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}}\Sigma_g) & \to & L^2(\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}}\Sigma_{2g-1}) \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto & \omega = \begin{cases} q^*\omega_1 & \text{sur } D_1 \\ q^*\omega_2 & \text{sur } D_2 \end{cases} \end{array}$$

où $q^*\omega_i(x) = \omega_i(q(x))$, pour $x \in \Sigma_{2g-1}$ et où D_1 (respectivement D_2) est la moitié gauche de Σ_{2g-1} (respectivement la moitié droite). On peut supposer que le point-base x_0 de Σ_{2g-1} est sur $\partial D_1 = \partial D_2$.

L'inverse de u est donné pour $\xi \in L^2(\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}}\Sigma_{2g-1})$ par la formule:

$$(u^*\xi)_1(x) = \xi((q_{|D1})^{-1}(x))$$
$$(u^*\xi)_2(x) = \xi((q_{|D2})^{-1}(x))$$

Soient $F_i : (\Sigma_{2g-1}, x_0) \to (\Sigma_g, x_0')$, $i = 1,2$, les applications pointées (non continues mais mesurables) définies par

$$F_1 := \begin{cases} q & \text{sur } D_1 \\ x_0' & \text{sur } D_2 \end{cases} \qquad F_2 := \begin{cases} x_0' & \text{sur } D_1 \\ q & \text{sur } D_2 \end{cases}$$

Alors $u(\omega_1, \omega_2) = F_1^*\omega_1 + F_2^*\omega_2$.
Soit $f \in C_0(X)$ et soient ω_1, $\omega_2 \in L^2(\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}}\Sigma_g)$; on a

$$\begin{aligned} u \circ (\pi_g(f \circ f_1) \oplus \pi_g(f \circ f_2))(\omega_1, \omega_2) &= F_1^*((f \circ f_1) \cdot \omega_1) + F_2^*((f \circ f_2) \cdot \omega_2) \\ &= (f \circ f_1 \circ q) \cdot F_1^*\omega_1 + (f \circ f_2 \circ q) \cdot F_2^*\omega_2 \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \pi_{2g-1}(f \circ (f_1 * f_2)) \circ u(\omega_1, \omega_2) &= (f \circ (f_1 * f_2)) \cdot (F_1^*\omega_1 + F_2^*\omega_2) \\ &= (f \circ (f_1 * y_0)) \cdot F_1^*\omega_1 + (f \circ (y_0 * f_2)) \cdot F_2^*\omega_2 \\ &= (f \circ f_1 \circ q) \cdot F_1^*\omega_1 + (f \circ f_2 \circ q) \cdot F_2^*\omega_2 \end{aligned}$$

où y_0 est l'application constante définie sur Σ_g. D'où (1).
Pour montrer l'assertion (2), remarquons que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \Omega^*(\Sigma_g) \oplus \Omega^*(\Sigma_g) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\overline{\partial}_g \oplus \overline{\partial}_g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \Omega^*(\Sigma_{2g-1}) \arrow[d, "\overline{\partial}_{2g-1}"] \\ \Omega^*(\Sigma_g) \oplus \Omega^*(\Sigma_g) \arrow[r, "u"] & \Omega^*(\Sigma_{2g-1}) \end{tikzcd}$$

n'est pas forcément bien défini, puisque F_i^*, $i = 1,2$ n'envoie pas $\Omega^*(\Sigma_g)$ dans $\Omega^*(\Sigma_{2g-1})$. Soient alors $\Omega^*_{0,2g-1} = \{\omega \in \Omega^*(\Sigma_{2g-1}) : \omega_{|\partial D_1 = \partial D_2} = 0\}$ et $\Omega^*_{0,g} = \{\omega \in \Omega^*(\Sigma_g) : \omega_{|C} = 0$, où $C = q(\partial D_1) = q(\partial D_2)\}$. Comme F_i, $i = 1,2$ est un difféomorphisme local sur $intD_i$, $F_i^*(\Omega^*_{0,g}) \subseteq \Omega^*_{0,2g-1}$, et comme $\overline{\partial}_g$, $\overline{\partial}_{2g-1}$ sont des opérateurs locaux, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \Omega^*_{0,g} \arrow[r, "F_i^*"] \arrow[d, "\overline{\partial}_g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \Omega^*_{0,2g-1} \arrow[d, "\overline{\partial}_{2g-1}"] \\ \Omega^*_{0,g} \arrow[r, "F_i^*"] & \Omega^*_{0,2g-1} \end{tikzcd}$$

Dès lors pour $\omega_1,\ \omega_2 \in \Omega_{0,g}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_{2g-1} \circ u(\omega_1,\omega_2) &= \overline{\partial}_{2g-1} F_1^* \omega_1 + \overline{\partial}_{2g-1} F_2^* \omega_2 \\
&= F_1^* \overline{\partial}_g \omega_1 + F_2^* \overline{\partial}_g \omega_2 \\
&= u \circ (\overline{\partial}_g \oplus \overline{\partial}_g)(\omega_1,\omega_2).
\end{aligned}$$

Soient $\xi_1,\ \xi_2 \in \mathrm{Dom}\,\overline{\partial}_g$ (le domaine $\mathrm{Dom}\,\overline{\partial}_g$ est l'espace de Sobolev $H^1(\Omega^*(\Sigma_g)) = \{\omega \in L^2(\Lambda^* T_{\mathbb{C}}^* \Sigma_g) \mid \overline{\partial}_g \omega \in L^2(\Lambda^* T_{\mathbb{C}}^* \Sigma_g)\}$, voir [BW93], chapitre 20). Puisque $\overline{\partial}_g$ est autoadjoint sur $\mathrm{Dom}\,\overline{\partial}_g$, $\overline{\partial}_g$ est fermé et pour tout $\delta > 0$, on trouve $\omega_1,\ \omega_2 \in \Omega^*(\Sigma_g)$ tel que

$$\|\xi_i - \omega_i\|_2^2 + \|\overline{\partial}_g \xi_i - \overline{\partial}_g \omega_i\|_2^2 < \delta^2.$$

Mais comme $\Omega_{0,g}^*$ est dense dans $\Omega^*(\Sigma_g)$, il existe $\epsilon > 0$ assez petit pour lequel nous pouvons supposer que ω_i est nul sur V_ϵ, où V_ϵ est une couronne de largeur ϵ autour de la courbe C dans Σ_g. De plus, u est unitaire, donc

$$\begin{aligned}
u(\overline{\partial}_g \oplus \overline{\partial}_g)(\xi_1,\xi_2) &\sim_\delta u(\overline{\partial}_g \oplus \overline{\partial}_g)(\omega_1,\omega_2) \\
&= \overline{\partial}_{2g-1} u(\omega_1,\omega_2) \\
&\sim_\delta \overline{\partial}_{2g-1} u(\xi_1,\xi_2)
\end{aligned}$$

où $\sim_\delta$ veut dire "être δ-proche". D'où (2). □

4.4 Lien avec la conjecture de Baum-Connes

Dans cette section nous montrons que β_a est un homomorphisme bien défini, et que les homomorphismes β_t et β_a sont liés par l'application de Baum-Connes. De plus la flèche topologique "inverse" le caractère de Chern.

Proposition 4.13 *Soit* Γ *un groupe de type fini, alors on a*

$$\mu_0^\Gamma \circ \beta_t = \beta_a.$$

(en particulier β_a *est bien défini, et est un homomorphisme)*
Autrement dit, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} K_0^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \arrow[r, "\mu_0^\Gamma"] & K_0(C_r^*(\Gamma)) \\ H_2(\Gamma,\mathbb{Z}) \arrow[u, "\beta_t"] \arrow[ur, "\beta_a"'] & \end{tikzcd}$$

Preuve : Soit $[\varphi\ :\ \Gamma_g \twoheadrightarrow \Gamma] = [f\ :\ \Sigma_g \to B\Gamma] \in H_2(\Gamma,\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned} \mu_0^\Gamma \circ \beta_t([\varphi]) &= (\lambda_{\Gamma *}\circ \tilde{\mu}_0^\Gamma)(\pi_*\circ f_*([\sigma_g])) \\ &= (\lambda_{\Gamma *}\circ \varphi_*)(\tilde{\mu}_0^{\Gamma_g}([\sigma_g])) = (\lambda_{\Gamma *}\circ\varphi_*)([c_g]) \\ &= \beta_a([\varphi]). \end{aligned}$$

où la deuxième égalité provient de la naturalité de $\tilde{\mu}_0^\Gamma$ (voir [Val96]). □

Considérons le caractère de Chern équivariant $ch_*^\Gamma\ :\ K_0^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \to H_{pair}(\Gamma, F\Gamma)$.

Proposition 4.14 *Soit* Γ *un groupe discret de type fini, alors on a*

$$ch_*^\Gamma \circ (\beta_t \otimes \mathbf{1}_\mathbb{C}) = id_{H_2(\Gamma,\mathbb{C})}.$$

Preuve : Comme la flèche β_t factorise par $K_0(B\Gamma)$, et que le caractère de Chern de Baum-Connes est naturel par rapport au caractère de Chern ordinaire en K-homologie (en d'autres termes, le diagramme

$$\begin{tikzcd} K_0(B\Gamma) \arrow[r] \arrow[d, "ch_*"'] & K_0^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \arrow[d, "ch_*^\Gamma"] \\ H_{pair}(\Gamma,\mathbb{C}) \arrow[r, hook, "f_*"] & H_{pair}(\Gamma, F\Gamma) \end{tikzcd}$$

est commutatif, voir [BCH94] §7), il suffit de vérifier que

$$ch_* \circ (\beta_t \otimes \mathbf{1}_\mathbb{C}) = id_{H_2(\Gamma,\mathbb{C})}.$$

Construction de β_a : $H_2(\Gamma, \mathbb{Z}) \to K_0(C_r^*(\Gamma))$

Soit $\alpha \in H_2(\Gamma, \mathbb{Z})$, par le théorème 4.4 il existe $f : \Sigma_g \to B\Gamma$ tel que $f_*[\Sigma_g] = \alpha$. Par naturalité du caractère de Chern en K-homologie, nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
K_0(\Sigma_g) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \arrow[r, "f_* \otimes 1_{\mathbb{C}}"] \arrow[d, "ch_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & K_0(B\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \arrow[d, "ch_*"] \\
H_{pair}(\Sigma_g, \mathbb{C}) \arrow[r, "f_*"] & H_{pair}(B\Gamma, \mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

Alors

$$\begin{aligned}
ch_*([(\beta_t \otimes 1_{\mathbb{C}})(\alpha \otimes 1)]) &= ch_*(\beta_t(\alpha) \otimes 1) \\
&= ch_*(f_*([\sigma_g]) \otimes 1) \\
&= (f_* \otimes 1_{\mathbb{C}})(ch_*([\sigma_g]) \otimes 1) \\
&= f_*[\Sigma_g] \otimes 1 = \alpha \otimes 1.
\end{aligned}$$

□

4.5 Reformulation de la conjecture de Baum-Connes pour certains groupes

Soit Γ un groupe discret tel que $B\Gamma$ est un CW-complexe fini de dimension 2 (en particulier Γ est sans torsion). Alors par le lemme 4.8, on a

$$\begin{aligned}
K_0(B\Gamma) &\simeq H_0(\Gamma, \mathbb{Z}) \oplus H_2(\Gamma, \mathbb{Z}) \\
K_1(B\Gamma) &\simeq H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \simeq \Gamma^{ab}.
\end{aligned}$$

Donc on peut reformuler la conjecture de Baum-Connes ainsi :

Proposition *Pour tout groupe discret (de type fini) tel que $B\Gamma$ est un CW-complexe fini de dimension ≤ 2, la conjecture de Baum-Connes est équivalente au fait que les applications*

$$\begin{cases}
\beta_a \oplus \beta_a & : \quad H_0(\Gamma, \mathbb{Z}) \oplus H_2(\Gamma, \mathbb{Z}) \to K_0(C_r^*(\Gamma)) \\
\kappa_\Gamma & : \quad H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \to K_1(C_r^*(\Gamma))
\end{cases}$$

sont des isomorphismes.

Exemples de tels groupes

(1) Les groupes à un relateur sans torsion (voir le chapitre 5, où nous montrons la conjecture, sauf dans le cas $i = 0$ lorsque l'image de la relation dans le groupe abélianisé est triviale).

(2) (Voir théorème 2 dans [JJV98]) Soit $\Gamma = \langle X \mid r_1, r_2, \ldots, r_m\rangle$ un groupe de présentation finie; on suppose que les r_i sont des mots cycliquement réduits dans le groupe libre $F(X)$ de base X. On note $\hat{r}_i$ le mot cyclique obtenu en refermant r_i; posons $\hat{R} = \{\hat{r}_i, \ldots, \hat{r}_m\}$.
Supposons que Γ vérifie les hypothèses suivantes :

1. $|r_i| \geq 6$ pour $i = 1, \ldots, m$;
2. tout mot de longueur 2 de $F(X)$ apparaît au plus une fois dans $\hat{R}$;
3. si un mot de longueur 2 de $F(X)$ apparaît dans $F(X)$, son inverse n'apparaît pas.

Alors le groupe Γ possède la propriété de Haagerup, et est classifié par un CW-complexe fini de dimension 2.
Notons que pour un tel groupe, la conjecture de Baum-Connes est vérifiée, puisqu'il a la propriété de Haagerup (voir [HK97]).

(3) Les groupes agissant librement avec quotient fini sur un immeuble $\tilde{A}_2$. Notons que pour ces groupes qui ont la propriété (T) de Kazhdan, Kasparov et Skandalis ont montré l'injectivité rationnelle de l'application de Baum-Connes μ_i^Γ, $i = 0, 1$ (voir [KS91]).

Finissons ce chapitre en remarquant qu'une autre conséquence directe du lemme 4.8 est la proposition suivante :

Proposition 4.15 *Soit Γ un groupe qui possède un classifiant fini de dimension ≤ 2. Si $\mu_1^\Gamma : K_1(B\Gamma) \to K_1(C_r^*(\Gamma))$ est surjective alors $Wh^{top}(\Gamma) = 0$. (Ceci s'inscrit dans la philosophie que la surjectivité de μ_i^Γ a des conséquences analytiques)*

Chapitre 5

K-Théorie d'un groupe à un relateur sans torsion et conjecture de Baum-Connes

Tous les résultats de ce chapitre ont été obtenus en commun avec C. Beguin et A. Valette (voir [BBV96]).

Ce chapitre se divise en trois sections. Dans la première, nous calculons explicitement la K-théorie de la C^*-algèbre réduite $C_r^*(\Gamma)$ d'un groupe à un relateur sans torsion. Dans la deuxième section, nous montrons qu'un groupe à un relateur (même avec torsion) est K-moyennable dans le sens de Cuntz [Cun83].
Enfin dans la troisième partie, nous montrons d'une manière pédestre la conjecture de Baum-Connes pour un groupe à un relateur $\Gamma = \langle X|r\rangle$ sans torsion tel que $\overline{r} \neq 0$, où $\overline{r}$ est l'image de r dans le groupe abélianisé Γ^{ab}.

Définition *Γ est un groupe à un relateur s'il existe une présentation de Γ de la forme $\Gamma = \langle X|r\rangle$, où X est un ensemble dénombrable de générateurs et r la relation est cycliquement réduite dans le groupe libre $F(X)$ sur X, c'est à dire qu'elle ne contient pas de séquence du type xx^{-1} ou $x^{-1}x$ où $x \in X$ et qu'elle ne commence pas par un élément x et finisse par son inverse x^{-1}.*

Comme nous nous intéressons particulièrement à des groupes sans torsion, citons un résultat de Karras, Magnus, Solitar qui permet de détecter la torsion dans un groupe à un relateur :

Théorème (Théorème 5.2 dans [LS77]) *Soit $\Gamma = \langle X|r\rangle$ un groupe à un relateur. Le groupe Γ est sans torsion si et seulement si r n'est pas une puissance non triviale d'un élément dans $F(X)$.*

Citons ci-dessous quelques exemples de groupes à un relateur sans torsion.

Exemples

(1) *Les groupes fondamentaux de surfaces orientables de genre $k \geq 1$*

$$\Gamma_k = \left\langle a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k \mid \prod_{i=1}^{k}[a_i, b_i] = 1 \right\rangle.$$

(2) *Les groupes de nœuds toriques :*

$$\langle x, y \mid x^p = y^q \rangle .$$

(3) *Les monstres de Baumslag-Solitar :*

$$\left\langle x, y \mid xy^p x^{-1} = y^q, \ \ (p, q) = 1 \right\rangle .$$

(4) *Le groupe des tresses à 3 brins : $B_3 = \langle a, b \mid aba = bab \rangle$.*

5.1 Calcul de la K-théorie

Dans cette section, nous calculons simultanément $K_i(C_r^*(\Gamma))$, $i = 0, 1$ pour $\Gamma = \langle X|r\rangle$, un groupe à un relateur sans torsion, en utilisant certains points cruciaux de la démonstration du Freiheitssatz de Lyndon et Schupp ([LS77], chap. IV, Thm. 5.1).

Théorème 5.1 (Le Freiheitssatz) *Soit $\Gamma = \langle X|r\rangle$ un groupe à un relateur. Si L est un sous-ensemble de X omettant un générateur apparaissant dans r, alors le sous-groupe de Γ engendré par L est un sous-groupe libre de base L.*

En particulier, nous allons utiliser le principe d'induction sur la longueur de la relation r. Notons d'abord que si un seul générateur apparait dans r, alors Γ est un produit libre d'un groupe libre par un groupe cyclique fini; ce cas est exclu si Γ est sans torsion. Supposons ensuite que $X = \{t, b, c, d, \ldots\}$, avec au moins deux générateurs distincts t et b dans r. Pour $x \in X$, notons par $\sigma_x(r)$ la somme des exposants des occurences de x dans r. Deux cas se présentent :

Cas 1. Il existe un générateur t tel que $\sigma_t(r) = 0$. Posons $b_i = t^i b t^{-i}$, $c_i = t^i c t^{-i}, \ldots$ $(i \in \mathbb{Z})$. Réécrivons r en un mot réduit s sur $b_i, c_i, \ldots$. Dans cet alphabet la longueur de s est plus courte que celle de r dans l'alphabet X. Si μ et m désignent le plus petit et le plus haut indice des b_i apparaissant dans s, alors Γ peut être vu comme une extension HNN, $\Gamma = HNN(H, A, \theta)$ avec :

$$\begin{aligned} H &= \langle b_\mu, \ldots, b_m, c_i, d_i, \ldots \ (i \in \mathbb{Z}) \mid s\rangle \\ A &= \begin{cases} \langle b_\mu, \ldots, b_{m-1}, c_i, d_i, \ldots \ (i \in \mathbb{Z})\rangle & \text{si } \mu < m \\ \langle c_i, d_i, \ldots, \ (i \in \mathbb{Z})\rangle & \text{si } \mu = m \end{cases} \\ \theta &: A \to H, \begin{cases} b_i \mapsto b_{i+1}, \ c_i \mapsto c_{i+1}, \cdots & \text{si } \mu < m \\ c_i \mapsto c_{i+1}, \cdots & \text{si } \mu = m \end{cases} \end{aligned}$$

Remarquons que par le Freiheitssatz, A est un groupe libre et donc θ est bien défini.

Cas 2. Pour tout $x \in X$, $\sigma_x(r) \neq 0$. Posons $\alpha = \sigma_t(r)$, $\beta = \sigma_b(r)$. Soient le groupe $G = \left\langle y, x, c, d, \ldots \mid r(yx^{-\beta}, x^\alpha, c, d, \ldots)\right\rangle$ et l'application ψ : $\Gamma \to G$, $t \mapsto yx^{-\beta}$, $b \mapsto x^\alpha$, $c \mapsto c$, $\cdots$. Alors ψ est un homomorphisme injectif [LS77]. De plus G apparait comme un produit amalgamé $G =$

$\Gamma *_{\langle b=x^\alpha\rangle} \langle x\rangle$. En effet les morphismes :

$$\Gamma *_{\langle b=x^\alpha\rangle} \langle x\rangle \to G \text{ défini par :}$$
$$t \mapsto yx^{-\beta},\ b \mapsto x^\alpha,\ c \mapsto c,\ d \mapsto d, \cdots \text{ et } x \mapsto x$$

et
$$G \to \Gamma *_{\langle b=x^\alpha\rangle} \langle x\rangle \text{ défini par :}$$
$$y \mapsto tx^\beta,\ x \mapsto x,\ c \mapsto c,\ d \mapsto d, \cdots$$

sont inverses l'un de l'autre. Soit r_1 le mot obtenu en réduisant cycliquement $r(yx^{-\beta}, x^\alpha, c, d, \ldots)$. On a $\sigma_x(r_1) = 0$ et $\sigma_y(r_1) = \sigma_y(r) \neq 0$, donc on peut appliquer le premier cas, c'est-à-dire $G = (y, x, c, d, \ldots | r_1)$ est une extension HNN d'un groupe à un relateur $H = \langle y_i, c_i, d_i, \ldots | s\rangle$ avec $|s| < |r|$ (remarquons qu'en général, on n'a pas $|r_1| < |r|$).

Enonçons maintenant le premier théorème qui nous donne le résultat pour K_0 :

Théorème 5.2 *Soit $\Gamma = \langle X|r\rangle$ un groupe à un relateur sans torsion,*

$$K_0(C_r^*(\Gamma)) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & si\ \bar{r} = 0 \ dans\ F(X)^{ab} \\ \mathbb{Z} & sinon \end{cases}$$

De plus, dans le deuxième cas, $K_0(C_r^*(\Gamma))$ est engendré par [1], *la classe de l'unité en K-théorie.*

Pour mieux expliquer notre résultat au niveau du K_1, rappelons la construction de l'application $\kappa_\Gamma : \Gamma^{ab} \to K_1(C_r^*(\Gamma))$: tout groupe discret Γ s'injecte dans $U(C_r^*(\Gamma))$, le groupe unitaire de $C_r^*(\Gamma)$; donc en composant avec l'homomorphisme canonique $U(C_r^*(\Gamma)) \to K_1(C_r^*(\Gamma))$, on obtient un homomorphisme $\Gamma \to K_1(C_r^*(\Gamma))$. Comme $K_1(C_r^*(\Gamma))$ est un groupe abélien, cet homomorphisme se factorise via un homomorphisme :

$$\kappa_\Gamma : \Gamma^{ab} \to K_1(C_r^*(\Gamma)).$$

Nous avons montré dans le chapitre 1 que κ_Γ est rationnellement injective. Ici, nous montrons :

Théorème 5.3 *Soit Γ un groupe à un relateur sans torsion. Alors l'application :*

$$\kappa_\Gamma : \Gamma^{ab} \to K_1(C_r^*(\Gamma))$$

est un isomorphisme.

Preuve de 5.2 et 5.3 : Par induction sur $|r|$. L'ancrage est trivial car si $|r| = 1$, alors Γ est le groupe libre $F(X)$; et dans ce cas, Pimsner et Voiculescu ont montré que $K_0(C_r^*(\Gamma)) \simeq \mathbb{Z}[1]$ et $K_1(C_r^*(\Gamma)) \simeq F(X)^{ab}$ ([PV82]). Pour le pas d'induction : comme le groupe Γ est sans torsion, on peut supposer dans la suite qu'au moins deux générateurs apparaissent dans la relation et distinguer ainsi les deux cas précédents :

Cas 1. $\sigma_t(r) = 0$, dans ce cas $\Gamma = HNN(H, A, \theta)$. Notons par i l'inclusion de H dans Γ. On fait appel à la suite exacte à 6 termes due à Anderson-Paschke [AP86] et Pimsner [Pim86], qui permet de calculer les groupes de K-théorie d'une extension HNN :

$$\begin{tikzcd} K_0(C_r^*(A)) \arrow[r, "Id-\theta_*"] & K_0(C_r^*(H)) \arrow[r, "i_*"] & K_0(C_r^*(\Gamma)) \arrow[d, "\partial_0"] \\ K_1(C_r^*(\Gamma)) \arrow[u, "\partial_1"] & K_1(C_r^*(H)) \arrow[l, "i_*"'] & K_1(C_r^*(A)) \arrow[l, "Id-\theta_*"'] \end{tikzcd}$$

Essayons maintenant d'identifier certaines flèches. Par le Freiheitssatz, A est libre, on a donc $K_0(C_r^*(A)) = \mathbb{Z}[1]$; comme θ_* est induite par un *-homomorpbisme unital, on obtient $\theta_*[1] = [1]$, et donc l'application $Id - \theta_* : K_0(C_r^*(A)) \to K_0(C_r^*(H))$ est nulle; ainsi, on peut écrire notre suite comme suit :

$$\begin{array}{llllll} 0 \to K_0(C_r^*(H)) & \xrightarrow{i_*} & K_0(C_r^*(\Gamma)) & \xrightarrow{\partial_0} & K_1(C_r^*(A)) & \xrightarrow{Id-\theta_*} \\ & & K_1(C_r^*(H)) & \xrightarrow{i_*} & K_1(C_r^*(\Gamma)) & \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[1] \to 0 \end{array}$$

Intéressons-nous maintenant à $\partial_1 : K_1(C_r^*(\Gamma)) \to \mathbb{Z}[1]$, et essayons de calculer $\partial_1[\delta_t]$. Pour cela, nous allons utiliser la description donnée dans [AP86] qui dit que la suite exacte à 6 termes dans le cas d'une extension HNN provient en fait d'une "extension de Toeplitz", i.e. une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow C_r^*(A) \otimes \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow C_r^*(\Gamma) \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{K}$ est l'algèbre des opérateurs compacts sur un Hilbert séparable et $\mathcal{D}$ est une C^*-algèbre agissant sur $l^2(\Gamma)$, engendrée par les δ_h $(h \in H)$ et par une isométrie S jouant le rôle de t, telle que $1 - SS^* = 1 \otimes \mathrm{e}$, où e est un projecteur de rang 1 dans $\mathcal{K}$. Comme δ_t se relève en l'isométrie S, un calcul classique de K-théorie (voir [Weg93] 8. C.) montre que

$$\begin{aligned} \partial_1([\delta_t]) &= -[1 - S^*S] + [1 - SS^*] \\ &= -[1-1] + [1 \otimes \mathrm{e}] \\ &= [1 \otimes \mathrm{e}] \in K_0(C_r^*(A) \otimes \mathcal{K}). \end{aligned}$$

Par l'isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} K_0(C_r^*(A)) &\to K_0(C_r^*(A) \otimes \mathcal{K}) \\ a &\mapsto a \otimes \mathrm{e}, \end{aligned}$$

on obtient $\partial_1([\delta_t]) = 1$. Remarquons maintenant que comme $\sigma_t(r) = 0$, il existe un homomorphisme de groupe $p : \Gamma \to \mathbb{Z}$ obtenu en envoyant t sur 1 et tous les autres générateurs sur 0. Notons par θ^{ab}, i^{ab}, p^{ab} les homomorphismes induits sur les groupes abélianisés par θ, i, p respectivement, et montrons que la suite

$$A^{ab} \xrightarrow{Id - \theta^{ab}} H^{ab} \xrightarrow{i^{ab}} \Gamma^{ab} \xrightarrow{p^{ab}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

est exacte :

- En $\mathbb{Z}$: l'exactitude est triviale.
- En Γ^{ab}: comme $\operatorname{Ker} p^{ab}$ est le sous-groupe de Γ^{ab} engendré par $\bar{b}, \bar{c}, \ldots$, l'exactitude résulte des relations $i^{ab}(\bar{b}_j) = \bar{b}$, $i^{ab}(\bar{c}_j) = \bar{c}, \ldots$

- En H^{ab}: Notons que $Id-\theta^{ab}\ :\ A^{ab}\to H^{ab}$ est donnée par

$$\begin{cases} \overline{b}_i \mapsto \overline{b}_i - \overline{b}_{i+1},\ \overline{c}_i \mapsto \overline{c}_i - \overline{c}_{i+1}, \cdots & \text{si } \mu < m \\ \overline{c}_i \mapsto \overline{c}_i - \overline{c}_{i+1}, \cdots & \text{si } \mu = m \end{cases}.$$

Rappelons que A^{ab} est le groupe abélien libre sur $\overline{b}_\mu, \ldots, \overline{b}_{m-1}, \overline{c}_i, \ldots$ si $\mu < m$ et sur $\overline{c}_i, \overline{d}_i, \ldots$ si $\mu = m$. Ecrivons H^{ab} (resp. Γ^{ab}) comme le quotient du groupe abélien libre $\mathbb{Z}\left\langle \overline{b}_i, \overline{c}_i, \ldots \right\rangle$ (resp. $\mathbb{Z}\left\langle \overline{t}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots \right\rangle$) par le sous-groupe engendré par $\overline{s}$ (resp. par $\overline{r}$). Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z}\left\langle \overline{b}_i, \overline{c}_i, \ldots \right\rangle \arrow[r, "\widetilde{i^{ab}}"] \arrow[dd] & \mathbb{Z}\left\langle \overline{t}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots \right\rangle \arrow[dd] \\ A^{ab} \arrow[ur, "\widetilde{Id-\theta^{ab}}"] \arrow[dr, "Id-\theta^{ab}"'] & & \\ & H^{ab} \arrow[r, "i^{ab}"] & \Gamma^{ab} \end{tikzcd} \qquad (*)$$

où $\tilde{}$ désigne la même application, écrite au niveau des groupes abéliens libres, et les flèches verticales sont les projections canoniques. La suite d'en haut est trivialement exacte en $\mathbb{Z}\left\langle \overline{b}_i, \overline{c}_i, \ldots \right\rangle$; comme de plus $\widetilde{i^{ab}}(\overline{s}) = \overline{r}$, l'exactitude en H^{ab} résulte d'un "diagram chasing".

On peut alors définir le diagramme commutatif suivant, à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} A^{ab} \arrow[r, "Id-\theta^{ab}"] \arrow[d, "\kappa_A"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H^{ab} \arrow[r, "i^{ab}"] \arrow[d, "\kappa_H"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \Gamma^{ab} \arrow[r, "p^{ab}"] \arrow[d, "\kappa_\Gamma"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "="] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & 0 \arrow[d, "="] \\ K_1(C_r^*(A)) \arrow[r, "Id-\theta_*"'] & K_1(C_r^*(H)) \arrow[r, "i_*"'] & K_1(C_r^*(\Gamma)) \arrow[r, "\partial_1"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Comme par hypothèse d'induction, κ_A et κ_H sont des isomorphismes, il s'ensuit par le lemme des 5 que κ_Γ est un isomorphisme. Donc la suite exacte en K-théorie devient :

$$0 \to K_0(C_r^*(H)) \xrightarrow{i_*} K_0(C_r^*(\Gamma)) \xrightarrow{\partial_0} A^{ab} \xrightarrow{Id-\theta^{ab}}$$
$$H^{ab} \xrightarrow{i^{ab}} \Gamma^{ab} \xrightarrow{p^{ab}} \mathbb{Z} \to 0$$

Pour traiter K_0, distinguons les cas suivants :

(a) $\overline{s} = 0$, alors $\overline{r} = 0$ par le diagramme $(*)$, donc $Id - \theta_*$ est injectif, ce qui implique $\partial_0 = 0$, i.e. $i_* : K_0(C_r^*(H)) \to K_0(C_r^*(\Gamma))$ est un isomorphisme. Mais $K_0(C_r^*(H)) \simeq \mathbb{Z}^2$ par hypothèse d'induction.

(b) $\overline{s} \neq 0$ et $\overline{r} = 0$: par le diagramme $(*)$, on obtient que $im(\partial_0) = \mathrm{Ker}(Id - \theta^{ab}) \simeq \mathbb{Z}$. Donc $K_0(C_r^*(\Gamma)) \simeq K_0(C_r^*(H)) \bigoplus \mathbb{Z}$ et par l'hypothèse d'induction, $K_0(C_r^*(H)) \simeq \mathbb{Z}$, d'où $K_0(C_r^*(\Gamma)) \simeq \mathbb{Z}^2$

(c) $\overline{s} \neq 0$ et $\overline{r} \neq 0$: par le diagramme $(*)$, on obtient que $Id - \theta_*$ est injectif; comme dans le cas (a), on déduit que $i_* : K_0(C_r^*(H)) \to K_0(C_r^*(\Gamma))$ est un isomorphisme. Comme i_* est induit par un $*$-homomorphisme unital, et $K_0(C_r^*(H)) = \mathbb{Z}[1]$ par hypothèse d'induction, on obtient $K_0(C_r^*(\Gamma)) = \mathbb{Z}[1]$.

Ce qui termine la première partie de la preuve, passons alors au deuxième cas.

Cas 2. Pour tout $x \in X$, $\sigma_x(r) \neq 0$. Alors, en posant $\alpha = \sigma_t(r)$, le premier cas s'applique à $G = \Gamma *_{(b=x^\alpha)} \langle x \rangle$. En écrivant $G = \langle y, x, c, d, \ldots | r_1 \rangle$, on a $\sigma_y(r_1) = \alpha \neq 0$. Ceci implique que $\overline{r}_1 \neq 0$, et donc par le premier cas : $K_0(C_r^*(G)) = \mathbb{Z}[1]$ et $\kappa_G : G^{ab} \to K_1(C_r^*(G))$ est un isomorphisme.

Dans la suite, nous aurons besoin des homomorphismes de groupes suivants :

$$\begin{array}{rcccccccc} i_1 & : & \mathbb{Z} & \to & \Gamma & : & 1 & \mapsto & b \\ i_2 & : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} & : & 1 & \mapsto & \alpha \\ j_1 & : & \Gamma & \to & G & & & & \\ j_2 & : & \mathbb{Z} = \langle x \rangle & \to & G & & & & \end{array}$$

Maintenant, faisons appel à la suite exacte à 6 termes qui permet de calculer les groupes de K-théorie d'un produit amalgamé (Lance [Lan83], Natsume [Nat85], Pimsner [Pim86]).

$$\begin{tikzcd}
K_0(C_r^*(\mathbb{Z})) \arrow[r, "(i_{1*},-i_{2*})"] & K_0(C_r^*(\Gamma)) \oplus K_0(C_r^*(\mathbb{Z})) \arrow[r, "j_{1*}+j_{2*}"] & K_0(C_r^*(G)) \arrow[d, "\partial_0"] \\
K_1(C_r^*(G)) \arrow[u, "\partial_1"] & K_1(C_r^*(\Gamma)) \oplus K_1(C_r^*(\mathbb{Z})) \arrow[l, "j_{1*}+j_{2*}"'] & K_1(C_r^*(\mathbb{Z})) \arrow[l, "(i_{1*},-i_{2*})"']
\end{tikzcd}$$

Remarquons que les deux applications $(i_{1*}, -i_{2*})$ sont injectives. En effet on a :

$$\begin{array}{rccc}
(i_{1*}, -i_{2*}) : & K_0(C_r^*(\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}[1] & \to & K_0(C_r^*(\Gamma)) \oplus K_0(C_r^*(\mathbb{Z})) \\
 & [1] & \mapsto & ([1], -[1]) \\
(i_{1*}, -i_{2*}) : & K_1(C_r^*(\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}[\delta_1] & \to & K_1(C_r^*(\Gamma)) \oplus K_1(C_r^*(\mathbb{Z})) \\
 & [\delta_1] & \mapsto & ([\delta_b], -\alpha[\delta_1])
\end{array}$$

et comme $\alpha \neq 0$, on a l'injectivité de la deuxième application. Ceci implique que la suite exacte à 6 termes se scinde en deux suites exactes courtes :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[1] \xrightarrow{(i_{1*},-i_{2*})} K_0(C_r^*(\Gamma)) \oplus \mathbb{Z}[1] \xrightarrow{j_{1*}+j_{2*}} K_0(C_r^*(G)) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[\delta_1] \xrightarrow{(i_{1*},-i_{2*})} K_1(C_r^*(\Gamma)) \oplus \mathbb{Z}[\delta_1] \xrightarrow{j_{1*}+j_{2*}} K_1(C_r^*(G)) \longrightarrow 0$$

Donc $j_{1*} : K_0(C_r^*(\Gamma)) \to K_0(C_r^*(G))$ est un isomorphisme. Mais $K_0(C_r^*(G)) = \mathbb{Z}[1]$, donc de même pour $K_0(C_r^*(\Gamma))$.
Montrons maintenant que la suite

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{(i_1^{ab},-i_2^{ab})} \Gamma^{ab} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{j_1^{ab}+j_2^{ab}} G^{ab} \longrightarrow 0$$

est exacte.
L'exactitude en $\mathbb{Z}$ et en G^{ab} est triviale. Pour montrer l'exactitude en $\Gamma^{ab} \oplus \mathbb{Z}$, notons d'abord que $\left\{\begin{array}{rcl} j_1^{ab}(\bar{t}) & = & \bar{y} - \beta\bar{x} \\ j_1^{ab}(\bar{b}) & = & \alpha\bar{x} \text{ et } j_2^{ab}(1) = \bar{x}; \\ j_1^{ab}(\bar{c}) & = & \bar{c} \end{array}\right.$ et

écrivons $\Gamma^{ab} = \mathbb{Z}\left\langle \bar{t}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots \right\rangle / \langle \bar{r} \rangle$, $G^{ab} = \mathbb{Z}\langle \bar{x}, \bar{y}, \bar{c}, \ldots \rangle / \langle \overline{r_1} \rangle$. Enfin, relevons les homomorphismes aux groupes abéliens libres :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}\left\langle \bar{t}, \bar{b}, \bar{c} \ldots \right\rangle \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, "\widetilde{j_1^{ab}}+\widetilde{j_2^{ab}}"] \arrow[d] & \mathbb{Z}\langle \bar{x}, \bar{y}, \bar{c}, \ldots \rangle \arrow[d] \\
\mathbb{Z} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & \Gamma^{ab} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, "j_1^{ab}+j_2^{ab}"] & \Gamma^{ab}
\end{tikzcd}$$

La ligne d'en haut est clairement exacte. Comme $\widetilde{j_1^{ab}}(\bar{r}) = \overline{r_1}$, on a bien l'exactitude en $\Gamma^{ab} \oplus \mathbb{Z}$.

Considérons maintenant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, "="'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "(i_1^{ab}, -i_2^{ab})"] \arrow[d, "\kappa_{\mathbb{Z}}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \Gamma^{ab} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, "j_1^{ab}+j_2^{ab}"] \arrow[d, "\kappa_\Gamma \oplus \kappa_{\mathbb{Z}}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G^{ab} \arrow[r] \arrow[d, "\kappa_G"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & 0 \arrow[d, "="] \\
0 \arrow[r] & K_1(C_r^*(\mathbb{Z})) \arrow[r, "(i_{1*}, -i_{2*})"] & K_1(C_r^*(\Gamma)) \oplus K_1(C_r^*(\mathbb{Z})) \arrow[r, "j_{1*}+j_{2*}"] & K_1(C_r^*(G)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

avec des lignes exactes. Comme κ_G et $\kappa_{\mathbb{Z}}$ sont des isomorphismes, on a par le lemme des 5 que κ_Γ est un isomorphisme.

□

On arrive enfin à la conjecture de Kaplansky-Kadison dans le "cas générique" pour un groupe à un relateur sans torsion.

Corollaire 3 *Soit $\Gamma = \langle X | r \rangle$ un groupe à un relateur sans torsion tel que $\bar{r} \neq 0$, alors $C_r^*(\Gamma)$ n'a pas d'idempotent non trivial.*

Preuve : Soit τ la trace canonique sur $C_r^*(\Gamma)$. Comme $K_0(C_r^*(\Gamma)) = \mathbb{Z}[1]$, l'application $\tau_* : K_0(C_r^*(\Gamma)) \to \mathbb{R}$ est à valeurs entières. Soit $0 \leq p \leq 1$ un projecteur dans $C_r^*(\Gamma)$; comme τ est positive, $0 \leq \tau(p) \leq 1$. Ainsi $\tau(p) = 0$ ou 1 et, par fidélité, $p = 0$ ou 1. On termine la preuve en remarquant que tout idempotent dans une C^*-algèbre unitale, est conjugué à un projecteur via un élément inversible (voir par exemple [Val89]). □

5.2 K-moyennabilité

Commençons par rappeler la notion de K-moyennabilité comme l'a introduite Cuntz dans [Cun83] :

Définition 5.4 *On dit qu'un groupe discret* Γ *est K-moyennable, si l'application* $\lambda_\Gamma^* : K^0(C_r^*(\Gamma)) \to K^0(C^*(\Gamma))$ *est un isomorphisme en K-homologie.*

Notons que si Γ est K-moyennable, alors par le théorème 2.1 dans [Cun83], pour tout C^*-système dynamique (A, Γ, α), l'application canonique $\lambda_{A,\Gamma}$: $A \rtimes_\alpha \Gamma \to A \rtimes_{\alpha,r} \Gamma$ du produit croisé maximal dans le produit croisé réduit induit un isomorphisme en K-théorie. En particulier , si $A = \mathbb{C}$, alors l'application $(\lambda_\Gamma)_* : K_0(C^*(\Gamma)) \to K_0(C_r^*(\Gamma))$ est un isomorphisme.

Nous pouvons maintenant énoncer notre théorème :

Théorème 5.5 *Tout groupe à un relateur est K-moyennable.*

Preuve : Nous allons utiliser la même procédure d'induction décrite dans la première section. L'ancrage est trivial puisque si un seul générateur apparait dans la relation, alors Γ est ou bien un groupe libre, ou bien un produit libre d'un groupe libre par un groupe cyclique fini, et donc par les résultats de Cuntz [Cun83], Γ est K-moyennable. Donc on peut supposer qu'au moins deux générateurs apparaissent dans la relation, et que $|r| > 2$. Séparons alors les mêmes cas que Lyndon et Schupp, rappelés dans la première section.

Cas 1. Dans ce premier cas on a $\Gamma = HNN(H, A, \theta)$, avec H un groupe à un relateur dont la longueur de la relation est plus courte que celle de r. Par les résultats de Serre pour une extension HNN, [Ser77], il existe un arbre sur lequel Γ agit naturellement, dont les stabilisateurs de sommets sont conjugués à H et les stabilisateurs d'arêtes sont conjugués à A. Mais par hypothèse d'induction, H et A sont K-moyennables; donc on conclut par le résultat de Pimsner ([Pim86], corollaire 19) qui dit : un groupe agissant sur un arbre avec stabilisateurs K-moyennables est K-moyennable.

Cas 2. Dans ce second cas, Γ s'injecte dans un groupe G auquel le premier cas s'applique, donc qui est K-moyennable, et on conclut par un résultat de Cuntz ([Cun83], théorème 2.4) qui dit : tout sous-groupe d'un groupe K-moyennable est K-moyennable.

5.3 Conjecture de Baum-Connes

Pour un groupe à un relateur $\Gamma = \langle X|r\rangle$ finiment engendré et sans torsion, citons le résultat de Lyndon [Lyn50] : Γ admet un espace classifiant $B\Gamma$ qui est un CW-complexe de dimension 2. Plus précisement : c'est un bouquet de $card(X)$ cercles sur lequel on recolle une unique 2-cellule σ d'intérieur homéomorphe à $\mathbb{R}^2$, le long de la relation. Le complexe de chaines de $B\Gamma$ est donc réduit à :

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2 = \mathbb{Z}[\sigma] \xrightarrow{\partial_2} C_1 = \mathbb{Z}[X] \xrightarrow{\partial_1} C_0 = \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où $\partial_1 = 0$, car $B\Gamma$ a un seul sommet. D'où :

$$\begin{aligned} H_0(\Gamma,\mathbb{Z}) &= \operatorname{Ker}\partial_0/im\partial_1 && \simeq \mathbb{Z} \\ H_1(\Gamma,\mathbb{Z}) &= \operatorname{Ker}\partial_1/im\partial_2 && \simeq \mathbb{Z}[X]/\mathbb{Z}[\overline{r}] \simeq \Gamma^{ab} \\ H_2(\Gamma,\mathbb{Z}) &= \operatorname{Ker}\partial_2/im\partial_3 && = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } \overline{r} = 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc par les théorèmes 5.2 et 5.3, on a des isomorphismes abstraits :

$$\begin{aligned} K_0(C_r^*(\Gamma) &\simeq H_0(\Gamma,\mathbb{Z}) \oplus H_2(\Gamma,\mathbb{Z}) \\ K_1(C_r^*(\Gamma) &\simeq H_1(\Gamma,\mathbb{Z}) \simeq \Gamma^{ab}, \end{aligned}$$

en accord avec la conjecture de Baum-Connes que nous allons montrer dans cette section dans le cas générique, i.e. quand $\overline{r} \neq 0$. Nous allons utiliser une méthode directe; pour cela, commençons par calculer le membre de gauche dans la conjecture de Baum-Connes, i.e. la K-homologie de $B\Gamma$.

Lemme 5.6 *Soit $\Gamma = \langle X|r\rangle$ un groupe à un relateur sans torsion. Alors les groupes $K_i(B\Gamma)$ et $K_i(C_r^*(\Gamma))$ sont abstraitement isomorphes, $i = 0, 1$.*

Preuve : Comme tout groupe est limite inductive de ses sous-groupes de type fini, et que le foncteur K_i commute aux limites inductives, on voit qu'il suffit de démontrer le lemme pour un groupe Γ à un relateur de type fini.

Remarquons maintenant que le modèle de $B\Gamma$ décrit ci-dessus est un CW-complexe fini de dimension 2. Donc en utilisant le lemme 4.8, nous obtenons

$$\begin{aligned} K_0(B\Gamma) &\simeq H_0(\Gamma,\mathbb{Z})\oplus H_2(\Gamma,\mathbb{Z}) \\ K_1(B\Gamma) &\simeq H_1(\Gamma,\mathbb{Z}) = \Gamma^{ab}. \end{aligned}$$

□

Remarques 5.7

(1) *Si $\bar{r} \neq 0$, l'injection d'un point base x_0 dans $B\Gamma$, induit un isomorphisme en K_0-homologie. Notons alors par $[x_0]$ le générateur de $K_0(B\Gamma)$ dans ce cas.*

(2) *Dans le cas où $\bar{r} = 0$, il est possible de décrire explicitement le second générateur de $K_0(B\Gamma) \simeq \mathbb{Z}^2$. En effet, comme $r \in [F(X), F(X)]$ (le sous-groupe des commutateurs), r s'écrit comme un produit de commutateurs*

$$r = \prod_{i=1}^{g}[A_i, B_i]$$

pour certains A_i, B_i dans $F(X)$. Soit alors le groupe de surface $\Gamma_g = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i]\rangle$; c'est le groupe fondamental de la surface de Riemann fermée Σ_g de genre $g \geq 1$. Nous avons un homomorphisme

$$\Gamma_g \to \Gamma \ : \ \begin{cases} a_i \mapsto A_i & (1 \leq i, j \leq g) \\ b_j \mapsto B_j \end{cases}$$

induit par une application continue $f : \Sigma_g \to B\Gamma$, qui est une application de degré 1 et donc induit un isomorphisme en K_0-homologie par le lemme 4.8.

Théorème 5.8 *Soit $\Gamma = \langle X|r\rangle$ un groupe à un relateur sans torsion,* *a) Il existe un triangle commutatif d'isomorphismes*

$$\begin{tikzcd} K_1(B\Gamma) \arrow[rr, "\mu_1^\Gamma"] & & K_1(C_r^*(\Gamma)) \\ & \Gamma^{ab} \arrow[ul, "\beta_t"] \arrow[ur, "\kappa_\Gamma"'] & \end{tikzcd}$$

b) Si $\overline{r} \neq 0$, alors μ_0^Γ est un isomorphisme.

Preuve :

a) Rappelons d'abord un résultat de Natsume (théorème 4.4 dans [Nat85]) : si un groupe G sans torsion est tel que $H_{2n+1}(G, \mathbb{Q}) = 0$ pour tout $n \geq 1$, alors μ_1^Γ est rationnellement injective. Ce qui est le cas ici, puisque notre groupe Γ est de dimension homologique au plus égale à 2. D'autre part, κ_Γ est un isomorphisme par le théorème 5.8 donc μ_1^Γ est surjective. De plus par le lemme 5.6, $K_1(B\Gamma)$ est abstraitement isomorphe à Γ^{ab} qui est une somme directe d'un groupe abélien libre et un groupe cyclique fini. Nous avons donc obtenu un homomorphisme de groupe $\Gamma^{ab} \to \Gamma^{ab}$, qui est à la fois surjectif et rationnellement injectif, donc nécessairement un isomorphisme. Donc μ_1^Γ est un isomorphisme.

b) Par le théorème 5.2, $K_0(C_r^*(\Gamma)) = \mathbb{Z}$ est engendré par la classe [1] de l'unité; par la remarque 5.7(1), $K_0(B\Gamma) = \mathbb{Z}$ est engendré par $[x_0]$. Mais $\mu_0^\Gamma[x_0] = [1]$ (voir exemple 1 dans [Val96]).

Remarque 5.9 *Dans le cas où $\overline{r} = 0$ nous n'avons pas une description explicite du second générateur de $K_0(C_r^*(\Gamma)) = \mathbb{Z}^2$. Ceci nous a empêché de conclure que μ_0^Γ est un isomorphisme dans ce cas.*

Après avoir pris connaissance de [BBV96], H. Oyono-Oyono [OO97] et J.-L. Tu [Tu97] ont pu démontrer (indépendamment) la conjecture de Baum-Connes à coefficients pour tous les groupes à un relateur.

Bibliographie

[AP86] J. Anderson and W.L. Paschke. The K-theory of the reduced C*-algebra of an HNN-group. *J. Operator Theory*, 16:165–187, 1986.

[BCH94] P. Baum, A. Connes, and N. Higson. Classifying space for proper actions and K-theory of group C*-algebras. *Contemporary Maths*, 164:241–292, 1994.

[BC88] P. Baum and A. Connes. Chern character for discrete groups. In *A fête of topology*, pages 163–232. Academic Press, 1988.

[BJ83] S. Baaj and P. Julg. Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non-bornés dans les C*-modules hilbertiens. *C.R.Acad.Sci.Paris*, 296:875–878, 1983.

[BBV96] C. Beguin, H. Bettaieb and A. Valette. K-Theory for C*-algebras of one-relator groups. *K-Theory*, 16:277–298, 1999.

[BV96] H. Bettaieb and A. Valette. Sur le groupe K_1 des C*-algèbres réduites de groupe discrets. *C.R.Acad.Sci.Paris*, 925:928–322, 1996.

[Bro82] K. S. Brown. Cohomology of Groups. Springer-Verlag, 1982.

[BD82] P. Baum, R. Douglas. K-homology and index theory. *Operator Algebras and Applications, Proc. Symposia Pure Math, part I*, 38:117–173, 1982.

[BW93] B.B. Bavnbek and K.P. Wojciechowski. Elliptic Boundary Problems for Dirac Operators. Birkhäuser, 1993.

[Cun83] J. Cuntz. K-theoretic amenability for discrete groups. *J. Reine Angew. Math*, 344:180–195, 1983.

[Dix69] J. Dixmier. *Les C*-algèbres et leurs Représentations.* Gauthier-Villars Editeur, Paris, 1969.

[EN87] G. Elliott and T. Natsume. A Bott periodicity map for crossed products of C*-algebras by discrete groups. *K-theory*, 1:423–435, 1987.

[HK97] N. Higson and G. Kasparov. Operator K-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space. *Electronic Research Announcements of the AMS*, 3, 1997.

[Jul97] P. Julg. Remarks on the Baum-Connes Conjecture and Kazhdan's Property *(T). Fields Institute Communications*, 13:145–153, 1997.

[Jul98] P. Julg. Travaux de N. Higson et G. Kasparov sur la conjecture de Baum-Connes. *Séminaire Bourbaki, Exposé 841*, Mars 1998.

[Kas81] G.G. Kasparov. The operator K-functor and extensions of C*-algebras. *Math. USSR-Izv.*, 16:513–572, 1981.

[Kas83] G.G. Kasparov. The index of invariant elliptic operators, K-theory, and Lie group representations. *Dokl.Akad. Nauk. USSR*, 268:533–537, 1983.

[Kas88] G.G. Kasparov. Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture. *Invent. Math.*, 91:147–201, 1988.

[KS91] G.G. Kasparov and G. Skandalis. Groups acting on buildings, operator K-theory, and Novikov's conjecture. *K-Theory*, 4:303–337, 1991.

[JJV98] P. Jolissaint, P. Julg et A. Valette. Nouveaux exemples de groupes avec la propriété de Haagerup. *preprint*, 1998.

[JK95] P. Julg and G.G. Kasparov. Operator K-theory for the group *SU(n,1)*. *J. reine angew. Math.*, 463:99–152, 1995.

[Lan83] E.C. Lance. K-theory for certain group C*-algebras. *Acta Math.*, 151:209–230, 1983.

[Lan95] E.C. Lance. *Hilbert C*-modules, a toolkit for operator algebraists.* London Math. Soc. lecture notes ser. 210, 1995.

[Lep81] H. Leptin. The structure of $L^1(G)$ for locally compact groups. *Operator Algebra and Group Representations.*, 2:48–61, 1981.

[LS77] R.C. Lyndon and P.E. Schupp. *Combinatorial group theory.* Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete 89. Springer-Verlag, 1977.

[Lyn50] R.C. Lyndon. Cohomology theory of groups with a single defining relation. *Annals of Math.*, 52:650–665, 1950.

[Nat85] T. Natsume. On $K_*(C^*(SL_2(\mathbb{Z})))$. *J. Operator Theory*, 13:108–118, 1985.

[Nat88] T. Natsume. The Baum-Connes conjecture, the commutator theorem, and Rieffel projections. *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, 1:13–18, 1988.

[OO97] H. Oyono-Oyono. *La Conjecture de Baum-Connes pour les Groupes Agissant sur des Arbres.* Thèse de Doctorat, ENS Lyon, 1997.

[Ped79] G.K. Pedersen. *C*-algebras and their automorphism groups.* Academic Press, 1979.

[Pim86] M.V. Pimsner. KK-groups of crossed products by groups acting on trees. *Inventiones mathematicae*, 86:603–634, 1986.

[PV82] M. Pimsner and D. Voiculescu. K-groups of reduced crossed products by free groups. *J. Operator Theory*, 8:131–156, 1982.

[Ros84] J. Rosenberg. Group C*-algebras and topological invariants. *Operator Algebra and Group Representations*, 2:95–115, 1984.

[Ser77] J.-P. Serre. *Arbres, Amalgames, SL_2*. Astérisque 46. Société mathématique de France, 1977.

[Sha78] P. Shanahan. *The Atiyah-Singer Index Theorem, An Introduction.* Springer-Verlag, 1978.

[Tu97] J.-L. Tu. *The Baum-Connes conjecture and discrete groups actions on trees.* Preprint, 1997.

[Tay75] J.L. Taylor. Banach Algebras and Topology. In *Algebras in analysis* 118-186. Academic Press, 1975.

[Val89] A. Valette. The conjecture of idempotents : A survey of the C*-algebraic approach. *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, XLI:485–521, 1989.

[Val96] A. Valette. On the Baum-Connes assembly map for discrete groups. Preliminary version, 1996.

[Weg93] N.E. Wegge-Olsen. *K-theory and C*-algebras.* Oxford University Press, 1993.

[Zim87] B. Zimmermann. Surfaces and the Second Homology of a Group. Mh. Math. 104:247–253, 1987.