

Centre de Recherches Sémiologiques

Travaux de logique

N° 4 — Avril 1991

Denis Miéville

**INTRODUCTION A LA
THEORIE DES SYSTEMES FORMELS
(PREMIERE PARTIE)**

EDITION REVUE ET CORRIGEE

CdRS



Université de Neuchâtel

**Cet ouvrage constitue une réédition revue et corrigée
d'un texte paru sous le même titre en 1985
(Travaux de logique, N° 1).**

**Centre de Recherches Sémiologiques
Université de Neuchâtel
Espace Louis-Agassiz 1
CH-2000 Neuchâtel (Switzerland)**

© 1991 by Centre de Recherches Sémiologiques. Tous droits réservés.

SOMMAIRE

En guise d'avertissement	vii
Avant-propos.....	ix
Chapitre 1. Un aperçu historique	
1. Préambule	1
2. Une genèse.....	2
3. Un grand projet	4
4. Les vérités premières	5
5. La démarche axiomatique se précise	8
6. Vers une algébrisation de la logique.....	10
7. L'avènement de la théorie des ensembles.....	12
8. Le logicisme.....	14
9. Une certaine confusion.....	19
10. L'émergence de la théorie des systèmes formels.....	20
Chapitre 2. La construction d'une langue formelle	
1. Quelques remarques	23
2. Notion générale de système formel.....	24
2.1. L'alphabet	24
2.2. L'ensemble des expressions bien formées	27
2.3. L'ensemble des axiomes.....	29
2.4. L'ensemble des règles	30
2.5. Quelques commentaires.....	31
3. Preuve et théorème	32
4. Déduction et conclusion.....	36
5. Métathéorèmes.....	38
6. Quelques espèces de systèmes formels.....	40
6.1. Les systèmes combinatoires	40
6.2. Les systèmes semi-thueiens.....	40
6.3. Les systèmes de Chomsky	41

Chapitre 3. Un système formel L^0 pour la logique des propositions

1. Les quatre ensembles fondamentaux	43
1.1. L'alphabet	43
1.2. L'ensemble des ebf	44
1.3. L'ensemble des axiomes.....	46
1.4. L'ensemble des règles	46
2. Preuve et déduction: des exemples	47
2.1. Exemple de preuve dans L^0	47
2.2. Exemple de déduction dans L^0	48
3. Le «théorème» de la déduction pour L^0	50
4. Les règles de la déduction naturelle	58
5. Où il est question d'interprétation et des problèmes qui en découlent.....	65
5.1. Préambule	65
5.2. Quelques définitions fondamentales	66
5.3. Consistance et non-contradiction.....	74
5.4. La complétude.....	78
5.5. La décidabilité.....	87
5.6. Quelques questions	88

Annexe. Présentation naïve de la théorie des ensembles

1. Remarques préliminaires	93
2. Appartenance et inclusion	94
2.1. La relation d'appartenance	94
2.2. La relation d'inclusion	95
2.3. Quelques exemples d'ensembles	95
2.4. Remarques	96
2.5. Questions.....	97
3. Quelques définitions.....	98
3.1. Ensemble complémentaire	98
3.2. L'ensemble vide	98
3.3. L'opération de réunion	99
3.4. L'opération d'intersection.....	100
3.5. Ensemble des parties d'un ensemble.....	100
3.6. Vecteur	105
3.7. Ensemble produit	106

4. L'infini.....	109
4.1. Application	111
4.2. Mise en correspondance d'ensembles infinis.....	114
Bibliographie des ouvrages cités.....	119
Index des auteurs	123
Index des matières	125

EN GUISE D'AVERTISSEMENT

Ce fascicule représente davantage que la simple réédition d'une monographie. En effet, sa forme et sa présentation ont été complètement repensées. Il ne s'agissait pas de réaliser une démarche de pure cosmétique, mais bien de travailler une matière avec les moyens dont nous disposons aujourd'hui afin de la rendre plus accessible encore. Par ailleurs, nous avons profité de cette refonte pour ajouter quelques résultats que la version de 1985 ne contenaient pas.

Cette première partie d'une introduction à la théorie des systèmes formels conserve le rôle que nous lui avons assigné alors; il s'agissait de présenter le cadre général de la théorie des systèmes formels, de rappeler quelques concepts ensemblistes indispensables à une bonne compréhension du texte, puis de développer, à titre d'exemple et de modèle, toute la démarche métalogique associée à la formalisation de la logique classique des propositions.

Je tiens à remercier tout particulièrement et très chaleureusement Martine Chavaz et Christiane Tripet, ainsi que James Gasser. C'est grâce à leur volonté, leur tenacité, leur haut niveau d'exigence et leur amitié que cette deuxième édition a pu être réalisée.

Denis MIEVILLE

AVANT-PROPOS

Le premier cahier des Travaux du Centre de Recherches sémiologiques (1969-1970) était dû à la plume de Georges Vignaux et constituait une réflexion sur la Nouvelle rhétorique de Chaïm Perelman. Quarante-huit autres l'ont suivi qui, à l'exception d'un seul, portaient sur des thèmes plus ou moins directement liés au problème de l'argumentation.

A parcourir l'ensemble, on s'aperçoit que l'étude de l'argumentation proprement dite a progressivement cédé la place à celle des opérations générales qui permettent d'engendrer n'importe quel discours, pourvu qu'il soit organisé par la raison. C'est ce que nous avons appelé la logique naturelle.

Certains ont jugé l'expression peu opportune. Elle offre cependant l'avantage de renvoyer explicitement à la logique telle qu'elle s'est développée en Occident pour aboutir à la logique mathématique, de sorte que la question des rapports qui peuvent exister entre logique naturelle et logique au sens strict se pose d'elle-même. Elle est d'ailleurs de la plus grande importance pour nous. Il y en va, non certes de la légitimité de notre orientation, mais de celle de notre prétention à construire une logique.

Aborder une telle problématique exige évidemment d'élargir le champ de la réflexion à celui de la logique *stricto sensu*. C'est la raison pour laquelle nous avons décidé de créer une nouvelle série de cahiers, sans d'ailleurs renoncer pour autant à poursuivre celle intitulée «Travaux du Centre de Recherches sémiologiques». A vrai dire, s'il était possible de revenir sur le passé, le cahier 37 (juin 1981) serait le premier numéro de cette nouvelle série¹. Il portait en effet comme titre «Traduction arithmétique des graphes et des relations binaires et applications

1 Il est encore disponible à l'adresse du Centre de Recherches sémiologiques.

logiques et informatiques» et son auteur, Miguel Sanchez-Mazas, spécialiste de logique juridique, est actuellement professeur à l'Université de Saint-Sébastien (San Sebastian). Mais, puisque en toute logique la chose est impossible, le numéro contiendra la première partie d'une introduction aux systèmes formels.

Cette introduction se présente sous la forme d'un cours et elle est due à Denis Miéville, chargé de cours en logique à l'Université de Genève.

Il s'agit-là d'un document qui peut surprendre dans une collection consacrée à des travaux d'un centre de recherches. Mais il faut bien voir quel est le statut actuel de la logique dans les études de lettres, en Suisse mais en France aussi. Ces études comportent, au mieux, une initiation à la logique des propositions et des prédicats. Simultanément les sciences humaines ne cessent—ne serait-ce que sous la pression de l'informatique—de parler de formaliser, de formalisation, de formalisme. Il est bien rare que ces termes soient employés dans le sens du logicien. Il ne s'agit certes pas là d'un crime: les mots appartiennent à ceux qui s'en servent. Mais il est bien clair qu'une réflexion sérieuse ne peut se dispenser de connaître tout au moins les grandes lignes de ce que sont les systèmes formels aux yeux de la logique.

On dira qu'il existe pour cela des manuels très complets. Ceci est exact, mais précisément parce que complets, ils s'adressent en principe à un public qui vise à se spécialiser ou à des purs mathématiciens. Or cette introduction est destinée à un autre public. Elle a, comme point de départ, un cours que nous avons fait Denis Miéville et moi, et progressivement adapté à un auditoire d'étudiants en majorité littéraires. Denis Miéville l'a entièrement repensé et rédigé et nous avons jugé utile de pouvoir en faire profiter d'autres que nos étudiants.

J'ajouterai des remerciements tout particuliers à notre secrétaire, Christiane Tripet. Il suffit de feuilleter ce cahier et le suivant pour s'apercevoir du talent et de la bonne volonté dont elle a fait preuve.

Jean-Blaise GRIZE

Neuchâtel, septembre 1985

CHAPITRE 1

UN APERÇU HISTORIQUE

1. Préambule

Saisir que la logique possède une histoire, c'est réaliser que l'organisation de cette activité humaine n'est pas figée, qu'elle se manifeste à travers l'esprit créatif de l'homme. Elle se détermine peu à peu dans une lente succession de situations socio-culturelles, comme un incessant échange entre les acquis du passé et les réflexions d'un présent.

Dans cet aperçu historique, nous parlerons abondamment de pensée rationnelle, de langage formalisé, de raisonnement; il sera donc globalement question du logique. Nous voulons cependant d'emblée opérer une première distinction, ou plutôt préciser la nuance entre logique et logique formelle. Nous le ferons en rapportant les définitions très claires de Guillaume (1978, pp. 315-316).

La logique a pour objet l'étude des formes que revêt la pensée dans l'efficace de sa fonction de connaissance, et des lois qui conditionnent cette efficience. Le domaine de la logique formelle, plus étroit, est celui de l'inférence; il se prête à la mathématique, en cette branche que l'on nomme, depuis la parution tardive des Ecrits mathématiques de Leibniz en 1863, la logique mathématique—comme il le faisait lui-même.

Nous nous intéresserons plus particulièrement à l'histoire de la logique formelle; elle permettra d'explicitier la raison d'être d'une théorie connue sous le nom de systèmes formels. Cette théorie est le résultat d'une longue histoire, histoire jalonnée d'inquiétude; mais surtout de grandes réussites. Il n'est pas

inutile de rappeler quelques étapes importantes qui ont participé à la réalisation d'une théorie qui s'ancre profondément dans la volonté de l'homme à saisir et à contrôler les moindres rouages du raisonnement.

Il n'y a pas à proprement parler d'histoire de la théorie des systèmes formels; il y a bien plus un enchaînement, une conjonction de réflexions qui, d'Aristote à Gödel, s'intéressent tout à la fois à l'instrument de la déduction logique, aux problèmes des fondements des mathématiques, au mystère des infinis, à la théorie des ensembles, à la formalisation, ... Nous ne saurions, en quelques pages, faire pleinement revivre ce déroulement historique. Notre but est plus modeste et plus limité: expliciter quelques moments importants et significatifs pendant lesquels la pensée rationnelle s'est vue progressivement cernée puis formulée en un calcul efficace pour aboutir à l'expression de systèmes symboliques dégagés de toute signification et dont le rôle essentiel consiste à assurer la non-contradiction d'un système de relations.

Nous souhaitons que ce bref exposé soit de nature à mieux faire comprendre la théorie des systèmes formels, théorie qui, de prime abord, peut sembler quelque peu détachée de préoccupations réelles.

Nous procéderons à l'image d'un cinéaste qui, sur l'écran de l'histoire, projetterait quelques séquences schématiques de manière à faire saisir une théorie en l'éclairant de son histoire.

2. Une genèse

L'origine de l'histoire de la logique formelle et de la méthode déductive s'ancre profondément dans l'Antiquité. Les noms glorieux d'Aristote [384-322] et d'Euclide [4e-3e av.] y sont intimement associés. Ces deux noms inaugurent le dialogue qui, progressivement, s'installe entre mathématique et philosophie. Une mathématique qui très tôt sait maîtriser et utiliser les processus déductifs, mais qui néanmoins, est amenée peu à peu à développer une réflexion sur ses méthodes et ses fondements.

Une philosophie qui rêve de s'instituer en une science rigoureuse, déroulant ses raisonnements à l'image du discours de la mathématique.

Dans les *Seconds Analytiques*, Aristote traite de la démonstration. Sa conception d'une organisation déductive se présente comme un système d'énoncés primitifs desquels d'autres énoncés peuvent être dérivés à l'aide de règles logiques, plus précisément grâce aux principes rigoureux du syllogisme qu'il expose systématiquement dans les *Premiers Analytiques*. Les règles générales qui s'appliquent aux raisonnements deductifs sont présentées de manière systématique, révélant ainsi un premier pas vers une formalisation. Voici le syllogisme catégorique de la première figure:

Si A est affirmé de tout B, et B de tout Γ , nécessairement A est affirmé de tout Γ (Prem. Analy., I, 4).

La réflexion d'Aristote relative à la logique offre donc une codification partielle de modes de raisonnement élémentaires. Tout raisonnement pouvant être ramené à l'application d'un nombre restreint de règles, ces règles se caractérisent déjà par leur généralité et leur indépendance par rapport aux domaines sur lesquels elles peuvent être appliquées.

Si Aristote développe ce que nous appelons aujourd'hui la logique des prédicats, c'est aux Stoïciens que revient le mérite de l'étude de la logique des propositions inanalysées.

A travers l'oeuvre d'Euclide et les discussions qu'elle a suscitées, l'Antiquité nous offre également l'expression d'une organisation déductive efficace, dont le modèle géométrique est une référence. Partant de propositions géométriques premières—les postulats—dont la validité n'était pas mise en doute, de nouvelles propositions sont dérivées. Euclide nous offre par là le premier exposé de l'organisation déductive d'une science. Nous pouvons lui attribuer la paternité d'un système axiomatique, système non totalement dégagé de l'expérience mais dont les modes de démonstration ont encore aujourd'hui valeur de modèle. Cette conception d'une exposition déductive restera longtemps paradigmatique. Il faudra attendre l'émergence de

«nouvelles géométries» à la fin du XIXe siècle pour mettre en cause le caractère absolu des axiomes et des postulats euclidiens, dont la vérité paraissait s'imposer à l'esprit.

3. Un grand projet

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) et son projet ambitieux d'une langue symbolique universelle susceptible de rendre compte de tous les actes de la pensée rationnelle peut être considéré comme le point de départ qui anticipe les grandes réalisations du XXème siècle dans le domaine de la logique symbolique. Avec le projet de Leibniz nous sommes en présence d'une démarche fortement organisée que lie l'idée d'une traduction formelle des raisonnements dans un calcul efficace. Jusqu'à Leibniz, mis à part les travaux de Raymond Lulle (1235-1315), la logique est discours, elle est énoncée dans une langue naturelle. Nous l'avons vu, par l'usage de lettres majuscules Aristote ébauche une formalisation de la logique, mais, s'il introduit bien des symboles de variables, les relations qui les unissent sont exprimées dans la langue de tous les jours. Or les langues naturelles ont ceci de particulier que leurs unités syntaxiques (les mots) ne sont pas toujours, sémantiquement parlant, univoquement déterminées. Certains connecteurs, certaines relations sont polysémiques et, de ce fait, n'offrent pas toujours les garanties de rigueur que requiert le raisonnement.

Le projet de Leibniz est double. Il consiste, d'une part, à faire correspondre un et un seul symbole à chaque idée claire et distincte et, d'autre part, à formuler explicitement toutes les règles qui permettent d'enchaîner ces symboles. C'est dans ce sens que le projet très généreux de Leibniz annonce l'avènement des systèmes formels.

La véritable méthode nous doit fournir un filum Ariadnes, c'est à dire un certain moyen sensible et grossier, qui conduise l'esprit, comme sont les lignes tracées en géométrie et les formes des opérations qu'on prescrit aux apprentifs en

Arithmétique. Sans cela notre esprit ne saurait faire un long chemin sans s'égarer. Nous le voyons clairement dans l'Analyse, et si nous avons des caractères tels que je les conçois en métaphysique et en morale, et ce qui en dépend, nous pourrions faire en ces matières des propositions très assurées et très importantes; nous pourrions mettre les avantages et desavantages en ligne de compte, lorsqu'il s'agit d'une délibération, et nous pourrions estimer les degrés de probabilité, à peu près comme les angles d'un triangle (Leibniz, 1890, p. 22).

Le succès de ce projet n'a pas été à l'image de son ambition. Il n'en reste pas moins que l'idée de Leibniz a su alimenter la réflexion de générations de chercheurs, et que ses contributions à l'édifice de la logique méritent, encore aujourd'hui, la plus grande attention.

4. Les vérités premières

Toute organisation déductive exige un point de départ: les vérités premières. Le contenu de cette expression va changer au cours de l'histoire. Les Anciens distinguaient deux types de vérités premières: les axiomes, il s'agissait de vérités communes à toutes les sciences, et les postulats, qui consistaient en des vérités spécifiques à telle science particulière. «Le tout est plus grand que la partie»—Axiome 5—ou «tous les angles droits sont égaux les uns aux autres»—4^e postulat—sont deux exemples de telles vérités.

Ces vérités conçues comme naturellement évidentes étaient acceptées sans critique, comme des vérités absolues dont on ne pouvait pas douter. Des Anciens jusqu'au XIX^e siècle, cette attitude reste globalement la même: une foi totale en l'intuition. Blaise Pascal (1623-1662) partage cette croyance et il l'exprime dans ses *Pensées*.

Différence entre l'esprit de géométrie et l'esprit de finesse

—En l'un, les principes sont palpables, mais éloignés de l'usage commun; de sorte qu'on a peine à tourner la tête de ce côté-là, manque d'habitude: mais pour peu qu'on l'y tourne, on voit les principes à plein; et il faudrait avoir tout à fait l'esprit faux pour mal raisonner sur des principes si gros qu'il est presque impossible qu'ils échappent (Pascal, 1904, p. 9).

L'oeuvre géométrique d'Euclide—les *Eléments*—est un témoin particulièrement frappant de cet accord entre une théorie déductive et la croyance profonde qu'elle est de toute évidence l'unique expression des faits géométriques. Il est remarquable de réaliser que cette oeuvre a été considérée quelque deux mille ans comme l'expression définitive d'une théorie en profond accord avec les faits. Il est vrai que le dernier des cinq postulats dérangeait un peu. Il s'agit du postulat des parallèles, le fameux cinquième.

Si une ligne droite coupant deux lignes droites forme du même côté des angles internes plus petits que deux angles droits, ces deux lignes droites, si elles sont prolongées indéfiniment, se rencontrent du côté duquel les angles sont plus petits que les deux angles droits.

Ce postulat est plus connu sous la forme suivante:

Deux droites qui se coupent ne peuvent pas être parallèles à la même ligne

et ne va pas contre l'expérience naïve. Par lui-même, il n'avait pas de quoi troubler les mathématiciens. Il permet de prouver que la somme des angles d'un triangle est égale à 180° , fait qui, à première vue, n'est pas particulièrement choquant. Mais il permet également de s'engager dans le domaine de l'infini, notion délicate et alors mal maîtrisée.

Déjà dans l'Antiquité, on avait tenté de reformuler ce postulat ou de le déduire des autres vérités premières, mais sans

succès. Pendant plus de deux mille ans de telles tentatives se succèdent et échouent.

Cependant, au XVIII^e siècle, les choses se modifient. Johann Heinrich Lambert (1728-1777) réalise notamment que tout ensemble d'hypothèses «géométriques» non contradictoire génère une géométrie possible, mais qui n'était bien sûr pas en accord avec les faits du sens commun. Avec Johann Friedrich Karl Gauss (1777-1855), une première modification s'établit dans le rapport entre la Géométrie et la perception du monde. En réalisant une géométrie non euclidienne—géométrie astrale—, il est convaincu que son application est possible et qu'il peut exister d'autres géométries que celle d'Euclide. La solidité absolue des vérités premières est dès lors ébranlée.

En offrant l'alternative d'autres géométries, Nikolai Ivanovitch Lobatchevski (1793-1856) et Johann Bolyai (1802-1860) contribuent également largement à cet effort de réflexion qui vise à mettre en cause le caractère absolu de la géométrie euclidienne. Dans les années 1830-40, l'idée de géométries non euclidiennes appliquées à l'espace physique se répand peu à peu. En ce qui concerne notre propos, il est intéressant de remarquer que les vérités géométriques premières, considérées comme des vérités absolues, apparaissent progressivement reposer sur l'expérience des sens et sur l'intuition, et que les objets fondamentaux—lignes, points, figures, ...—des différentes géométries commencent à être perçus comme relativisés aux différentes théories auxquelles ils appartiennent. Cette conscience prend une forme plus définitive avec Georg Riemann (1826-1866), étudiant de Gauss; il va créer pour cela une géométrie non euclidienne—une géométrie hyperbolique—; dans cette géométrie, la somme des angles d'un triangle est toujours plus grande que 180° . Une telle réalisation embarrasse ceux pour qui la géométrie euclidienne était la seule possible.

5. La démarche axiomatique se précise

L'homme a ceci de particulier qu'il n'accepte qu'avec difficulté les changements. La géométrie euclidienne—si ancrée dans la pensée des mathématiciens et dans l'intuition de chacun—à peine à quitter son piédestal. Un jugement de Max Planck (Prix Nobel de physique en 1918) s'applique particulièrement bien à cette situation: voici en substance ce qu'il dit:

Une nouvelle vérité scientifique ne s'impose pas par la conviction, mais par la mort de ses détracteurs.

Il faut attendre Felix Klein (1849-1925) et le programme d'Erlangen pour mettre fin aux différentes controverses.

Les recherches en question sur la théorie des parallèles et leurs développements successifs ont par deux côtés une importance mathématique précise.

Elles montrent d'abord, et l'on peut considérer la chose comme définitivement tranchée, que l'axiome des parallèles n'est pas une conséquence mathématique des axiomes généralement placés avant lui, mais qu'il est l'expression d'un fait intuitif essentiellement nouveau laissé intact par les recherches qui le précèdent. Une semblable discussion pourrait et devrait être faite, même ailleurs qu'en Géométrie, relativement à chaque axiome; on y gagnerait en vues sur les situations respectives de ceux-ci.

...

Absolument indépendante de ces considérations est la question de savoir sur quoi repose l'axiome des parallèles, s'il doit être considéré comme donné d'une façon absolue, ce que veulent les uns, ou comme établi seulement approximativement par l'expérience, ce que prétendent les autres. S'il y avait des raisons d'accepter cette dernière façon de voir, les recherches mathématiques en question nous montreraient comment doit alors être construite une Géométrie plus exacte. Mais c'est là évidemment une question philosophique qui atteint aux principes les plus généraux

de notre entendement. Elle n'intéresse pas le mathématicien comme tel, et il peut souhaiter que ses recherches ne soient pas considérées comme dépendant de la réponse qui, d'un côté ou de l'autre, peut lui être donnée.

(Klein, 1974, pp. 40-41; programme publié en 1872)

Si nous insistons autant sur cette page d'histoire, c'est qu'elle est significative d'une modification profonde dans la façon d'appréhender la notion de système déductif. On s'aperçoit que les objets mathématiques plus ou moins liés à l'intuition que nous avons du réel ne sont pas les seuls à avoir droit de cité et que la pensée jouit d'une extrême liberté. Il suffit qu'un système soit non contradictoire pour qu'il soit aussi valable qu'un autre.

Die Mathematik ist in ihrer Entwicklung völlig frei und nur an die selbstredende Rücksicht gebunden, dass ihre Begriffe sowohl in sich widerspruchlos sind, als auch in festen durch Definitionen geordneten Beziehungen zu den vorher gebildeten, bereits vorhandenen und bewährten Begriffen stehen. Im besondern ist sie bei der Einführung neuer Zahlen nur verpflichtet, Definitionen von ihnen zu geben, durch welche ihnen eine solche Bestimmtheit und unter Umständen eine solche Beziehung zu den älteren Zahlen verliehen wird, dass sie sich in gegebenen Fällen unter einander bestimmt unterscheiden lassen.

(Cantor, 1962, p. 182, première publication 1883)

Cette période se caractérise par deux mouvements de pensée. Il y a d'une part une prise de conscience que l'on pouvait choisir les axiomes comme on le voulait pour autant qu'ils ne conduisent à aucune contradiction. Cette modification de la démarche axiomatique est profonde, elle implique que le sens des «termes primitifs» d'un système est entièrement déterminé par les axiomes. Il y a d'autre part une réflexion sur les fondements, non plus uniquement de la géométrie, mais également de l'arithmétique et de l'analyse.

En 1888, Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) propose la formulation d'une base axiomatique complète pour l'arithmétique, ainsi que celle du principe d'induction. Trois ans plus tard, Giuseppe Peano (1858-1932) les utilisera à son tour en introduisant certains signes logiques, faisant ainsi un pas de plus dans la direction d'un calcul symbolique. Les analyses portant sur la notion de nombre entraînent inexorablement les mathématiciens à se confronter tout à la fois aux problèmes de l'infini et à une explicitation des notions ensemblistes.

La quête des fondements des mathématiques ainsi que l'analyse de plus en plus poussée de leurs notions essentielles donnent naissance à deux événements particulièrement importants qui, dans le champ des études logiques, ont joué un rôle déterminant; il s'agit de l'algébrisation de la logique et de la théorie des ensembles.

6. Vers une algébrisation de la logique

La prise de conscience qu'un objet mathématique est une libre création de l'esprit

It is not of the essence of mathematics to be conversant with the ideas of number and quantity.

(Boole, 1958, p. 12, première impression 1854)

en conjonction avec l'existence de l'algèbre symbolique conduisent toute une génération de chercheurs à s'intéresser à la combinaison des symboles d'un système, aux lois qui président à leur organisation, indépendamment de leurs interprétations possibles. Leur objectif était de construire une algèbre symbolique consistante et susceptible d'interprétations diverses.

Il s'agit en quelque sorte de déterminer les «lois de la pensée». Le nom de George Boole (1815-1864) est attaché à ce grand dessein. En publiant *An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities* son objectif est

to investigate the fundamental laws of those operations of the mind by which reasoning is performed; to give expression to them in the symbolical language of a Calculus, and upon this foundation to establish the science of Logic and construct its method.

(Boole, 1958, p. 1; première impression 1854)

Boole va construire un véritable calcul. L'algèbre qu'il conçoit admet des variables qui prennent valeurs sur un domaine à deux éléments, les valeurs 1 et 0. Il propose deux interprétations possibles de ce calcul. La première consiste en une algèbre des classes. Les variables du calcul sont interprétées comme des classes, et les opérations fondamentales, comme l'intersection, la réunion des classes disjointes et la complémentation. Le 1 s'interprète comme la classe universelle, l'univers du discours. Le 0 sera considéré comme la classe vide.

Cette interprétation introduit une importante nouveauté dans la logique des classes traditionnelles, c'est-à-dire dans la syllogistique interprétée en extension. Celle-ci connaît bien l'universalité d'une classe, c'est-à-dire la classe prise dans toute son extension, mais elle ignore la classe universelle, et elle ne prend pas davantage en considération la classe vide.

(Blanché, 1970, p. 274)

La deuxième interprétation consiste en une algèbre de la logique bivalente. Les variables du calcul sont interprétées comme des propositions, et les opérations fondamentales comme la conjonction, la disjonction et la négation (*the symbol —, the equivalent of the preposition 'except'*, Boole, 1958, p. 55). Les valeurs 1 et 0 sont considérées comme le «vrai» d'une part, et le «faux» d'autre part.

La contribution de Boole est fondamentale en ce sens qu'elle porte en elle les germes d'une algèbre logique abstraite, dégagée de toute interprétation ainsi que l'idée d'une séparation de la syntaxe et de la sémantique. Dans les faits toutefois, Boole n'a pas su se libérer totalement de l'influence du calcul numérique.

Un jugement de Jørgensen (1962, pp. 115-116) rend particulièrement bien compte de cette situation.

It is thus, properly speaking, only the premises and the final results of treatment which with Boole directly represent logical facts, whereas the road by which he proceeds from premises to results, is, logically speaking, meaningless nonsense. Boole's calculus cannot therefore by any means be said to express the natural course of logical thought, but must rather be regarded as an application of quantitative algebra to the problems of logic.

L'oeuvre de Boole reste l'expression d'une évolution de la logique déterminée par le progrès des mathématiques, et qui contient en germe son dépassement. Mais il y a une autre contribution mathématique tout autant déterminante pour la logique; il s'agit de la théorie des ensembles.

7. L'avènement de la théorie des ensembles

La théorie des ensembles est associée au nom de Georg Cantor (1845-1918). Cela ne signifie pas que jusqu'à lui, mathématiciens et philosophes ignoraient les modes de raisonnement ensemblistes; les relations d'inclusion et d'appartenance étaient connues et utilisées depuis fort longtemps, mais elles l'étaient de manière intuitive, non réellement stabilisées. Les notions de compréhension et d'extension attachées aux propriétés d'objets n'étaient pas toujours franchement distinguées.

Grâce à Cantor, les choses vont se modifier. Ce qu'il est intéressant de remarquer c'est qu'il ne développe pas une théorie des ensembles conçue à partir d'une réflexion sur la relation des parties au tout et qui s'ancrerait sur l'analyse en extension du raisonnement syllogistique. Les réflexions de Cantor ne s'appuient pas sur des préoccupations de pure logique. Sa démarche est d'une autre nature, elle s'inscrit dans le cadre de recherches en analyse mathématique. En effet, ses recherches

sur les séries trigonométriques l'amènent à s'intéresser, à se passionner pour les ensembles numériques et leurs propriétés. Il finit même par se consacrer entièrement à la théorie des ensembles. Il aborde les problèmes d'équipotence entre ensembles infinis. Il offre notamment la démonstration qui met en évidence que l'ensemble des nombres entiers naturels est en correspondance biunivoque avec celui des nombres rationnels. Il établit également qu'une telle correspondance n'existe pas entre les nombres réels et les entiers naturels. Les résultats débouchent sur une réflexion relative à l'ordre des nombres cardinaux transfinis et sur la proposition d'une hypothèse connue comme celle du continu. Elle répond hypothétiquement par la négative à la question suivante: existe-t-il entre le plus petit infini, celui qui est représenté par la puissance de l'ensemble des nombres entiers naturels, et l'infini représenté par la puissance de l'ensemble des nombres réels, un ensemble d'une puissance intermédiaire?

La théorie créée par Cantor n'est pas acceptée sans opposition, et il faut attendre la fin du XIXe siècle pour la voir partout reconnue. Les travaux de Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) ne sont pas totalement étrangers à cette reconnaissance. Dedekind a été un lecteur attentif des travaux de Cantor; il est amené ainsi à généraliser et à développer certains résultats nouveaux. Il montre, entre autres choses, que la notion du nombre entier naturel peut être explicitée à l'aide des concepts de base de la théorie des ensembles.

Ces résultats, nés de préoccupations mathématiques, vont avoir une importance considérable dans le champ d'une réflexion logique qui, avec Frege et Russell, tente de réduire la mathématique aux seuls concepts de la logique et de la théorie des ensembles.

8. Le logicisme

Pendant près de deux mille ans, la logique reste intimement liée au discours. Que l'on pense à Aristote et ses syllogismes, que l'on songe à l'enseignement de la logique dans les écoles médiévales: il s'agissait alors, comme l'a écrit Kotarbinski (1964, p. 82), d'un «programme de spéculation verbale». *«La logique ou l'Art de Penser»* contenant entre autres Règles communes, plusieurs observations nouvelles propres à former le Jugement d'Arnauld et Nicole (1612-1694, 1625-1695), est exposée dans une langue naturelle et, comme nous l'avons dit, le rêve de Leibniz d'un calcul universel ne dépasse pas le projet d'une grammaire générale.

Tributaire du discours, la logique trouve réellement son identité formelle avec Gottlob Frege (1848-1925). Nous avons vu que Boole—comme De Morgan du reste (1806-1871)—avait construit un véritable calcul logique. Mais leurs entreprises n'ont pas eu ce caractère d'indépendance, cette ouverture sur un champ d'étude autonome que possède la création de Frege. Avec lui, c'est la logique mathématique qui prend naissance à la fin du siècle dernier. On attribue même une année de naissance à cette logique: celle de la parution de l'ouvrage de Frege, la *Begriffsschrift*, 1879.

La logique de Frege n'est pas uniquement une expansion du calcul de Boole, elle le recouvre certes, mais elle en est surtout un véritable dépassement, et ceci en plusieurs sens.

- Elle est instaurée comme un système autonome qui se libère du carcan de l'analyse grammaticale des langues naturelles. L'analyse d'une proposition en termes d'un attribut prédiqué d'un sujet est remplacée par une expression fonctionnelle pouvant être saturée par un argument.
- Elle fournit une théorie de la quantification.
- Elle est libérée de l'influence mathématique en ce sens qu'elle contient une syntaxe propre, ses règles de raisonnement déductif et les lois qui les fondent.

Le projet de Frege est double. D'une part, mathématicien, il veut expliciter ce qui, dans le discours des démonstrations mathématiques, est exprimé dans une langue naturelle et règle les preuves. Il s'agit donc d'aller en deçà des structures mathématiques et d'extraire la substance logique même qui gère les raisonnements mathématiques. Il va reformuler la logique de manière à offrir un système formalisé susceptible de rendre compte des raisonnements qui fondent les démonstrations mathématiques.

Ce système est ainsi conçu qu'il ne laisse aucune part à l'évidence, tout développement rationnel étant contrôlé sur la base de ce qui a été préalablement et explicitement posé. Dans son ouvrage, les *Grundgesetze der Arithmetik* (1893, p. vi) Frege expose cet idéal:

Das Ideal einer streng wissenschaftlichen Methode der Mathematik, das ich hier zu verwirklichen gestrebt habe, und das wohl nach Euklid benannt werden könnte, möchte ich so schildern. Dass Alles bewiesen werde, kann zwar nicht verlangt werden, weil es unmöglich ist; aber man kann fordern, dass alle Sätze, die man braucht, ohne sie zu beweisen, ausdrücklich als solche ausgesprochen werden, damit man deutlich erkenne, worauf der ganze Bau beruhe. Es muss danach gestrebt werden, die Anzahl dieser Ur-gesetze möglichst zu verringern, indem man Alles beweist, was beweisbar ist. Ferner, und darin gehe ich über Euklid hinaus, verlange ich, dass alle Schluss- und Folgerungsweisen, die zur Anwendung kommen, vorher aufgeführt werden. Sonst ist die Erfüllung jener ersten Forderung nicht sicher zu stellen. Dieses Ideal glaube ich nun im Wesentlichen erreicht zu haben.

Sur les modèles des systèmes hypothético-déductifs de la géométrie, Frege construit un système hypothético-déductif pour la logique, système qui possède ses propres caractéristiques et qui permet de fonder les raisonnements de la démonstration mathématique.

D'autre part, et ceci est profondément lié au point que nous venons de traiter, Frege est persuadé que la logique est le fondement même de l'arithmétique, que les propositions arithmétiques peuvent être réduites à celles de la logique, que l'arithmétique, donc, est dépendante de la logique. En ce sens, on qualifie le projet de Frege de projet logiciste.

La réalisation de Frege est caractéristique d'un esprit génial qui a su offrir les assises d'une science nouvelle, libérant la logique de la tutelle des discours tenus dans une langue naturelle, réalisant ainsi une partie du pari de Leibniz. Il a su échapper à l'omniprésence du modèle mathématique pour mieux en saisir les fondements.

A great epoch in the theory of logic did open in 1879, when Gottlob Frege's Begriffsschrift was published. This book freed logic from an artificial connection with mathematics but at the same time prepared a deeper interrelation between these two sciences.

(van Heijenoort, 1977, p. vi)

Frege possède un lecteur attentif de ses oeuvres, il s'agit de Bertrand Russell (1872-1970). En 1902, ce dernier lui fait part de son admiration, mais également lui communique un résultat auquel il parvient lorsqu'il utilise le système frégéen. Voici le texte qu'il communique à Frege.

Friday's Hill, Haslemere, 16 June 1902

Dear colleague,

For a year and a half I have been acquainted with your Grundgesetze der Arithmetik, but it is only now that I have been able to find the time for the thorough study I intended to make of your work. I find myself in complete agreement with you in all essentials, particularly when you reject any psychological element [Moment] in logic and when you place a high value upon an ideography [Begriffsschrift] for the foundations of mathematics and of formal logic, which, incidentally, can hardly be distinguished. With regard to many particular questions, I

find in your work discussions, distinctions, and definitions that one seeks in vain in the works of other logicians. Especially so far as function is concerned (§9 of your Begriffsschrift), I have been led on my own to views that are the same even in the details. There is just one point where I have encountered a difficulty. You state (p. 17) that a function, too, can act as the indeterminate element. This I formerly believed, but now this view seems doubtful to me because of the following contradiction. Let w be the predicate: to be a predicate that cannot be predicated of itself. Can w be predicate of itself? From each answer its opposite follows. Therefore we must conclude that w is not a predicate. Likewise there is no class (as a totality) of those classes which, each taken as a totality, do not belong to themselves. From this I conclude that under certain circumstances a definable collection [Menge] does not form a totality.

I am on the point of finishing a book on the principles of mathematics and in it I should like to discuss your work very thoroughly. I already have your books or shall buy them soon, but I would be very grateful to you if you could send me reprints of your articles in various periodicals. In case this should be impossible, however, I will obtain them from a library.

The exact treatment of logic in fundamental questions, where symbols fail, has remained very much behind; in your works I find the best I know of our time, and therefore I have permitted myself to express my deep respect to you. It is very regrettable that you have not come to publish the second volume of your Grundgesetze; I hope that this will still be done.

*Very respectfully yours,
Bertrand Russell*

Explicitons davantage cette contradiction. Nous dirons qu'une classe n'est pas subordonnée à elle-même si elle n'est pas élément d'elle-même. Considérons la classe R , la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes. Une question surgit alors: R

est-elle subordonnée à elle-même? Si nous répondons par l'affirmative: R est subordonnée à elle-même, nous rencontrons un premier problème. En effet, les classes subordonnées à la classe R ne sont pas subordonnées à elles-mêmes; c'est même en raison de cette caractéristique qu'elles appartiennent à la classe R. Ainsi donc R ne peut pas être subordonnée à elle-même. Il y a contradiction. Supposons alors que la classe R n'est pas subordonnée à elle-même. Cette hypothèse nous oblige à admettre que la classe R appartient à la classe des classes non subordonnées à elles-mêmes, donc à la classe R elle-même. Situation fâcheuse puisque, en ce cas, la classe R est subordonnée à elle-même. Quelle que soit donc l'hypothèse choisie, la contradiction subsiste.

Cette découverte ébranle fortement l'édifice mathématique. En effet, la contradiction semble régner dans les fondements mêmes de cette science. L'avènement des géométries non euclidiennes avait permis de douter des vérités premières acceptées comme des vérités absolues; elles ont été alors considérées peu à peu comme des vérités relatives au système déductif dans lequel elles étaient associées. Avec Frege ce sont les règles mêmes du raisonnement qui sont mises en cause.

Russell poursuit le projet de Frege, celui de réduire l'arithmétique à la logique. Il évite l'antinomie en proposant une théorie des types; cette théorie détermine une relation hiérarchisée entre un élément d'une classe et la classe à laquelle appartient cet élément, excluant ainsi toute possibilité d'admettre dans une classe, des éléments du même type que la classe elle-même.

Les systèmes logiques formalisés et axiomatisés de Frege et Russell restent en deçà d'un programme qui ne s'appuierait pas sur la signification. En effet, ces deux systèmes ont ceci de particulier qu'ils permettent de caractériser sans ambiguïté les expressions du langage et les règles des démonstrations acceptables, mais s'il s'agit bien d'un jeu symbolique, ce jeu continue de dépendre d'un sens bien déterminé par les notions, les concepts fondamentaux de la mathématique tels ceux de classe, d'identité, Une question se pose alors: n'est-il pas possible de créer des systèmes de formes totalement dégagés de toute

signification, susceptibles d'être appliqués à posteriori aux systèmes de la logique et de l'arithmétique de manière à en vérifier les propriétés essentielles? Dans le bouillonnement intellectuel que connaissent les logiciens et les mathématiciens à l'aube de ce siècle, deux tendances se dégagent: l'intuitionnisme, dont la paternité est attribuée à Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), et le formalisme avec David Hilbert (1862-1943).

9. Une certaine confusion

Au moment même où la formalisation des mathématiques s'achève sur la base des fondements logiques, elle est profondément compromise par la découverte des contradictions. (Celle rapportée plus haut n'est pas la seule.) La construction de Russell n'est pas vraiment satisfaisante. Bien qu'évitant l'antinomie, elle ne remplit pas totalement le projet logiciste: une réduction de l'arithmétique à la logique. En effet, deux axiomes extralogiques sont nécessaires pour édifier le système de Russell, les *Principia mathematica* (1910-1913). Les questions soulevées sont graves et vont déterminer des recherches divergentes.

Qu'est-ce que la mathématique? Est-ce cette position exacte et parfaite de notre pensée, perçue par l'intuition? N'est-elle que construction abstraite? La logique n'est-elle que langage de formes, et comme tel, son existence ne se réduit-elle qu'à des constructions? La logique symbolique doit-elle être l'expression réfléchissante de l'Art de Penser? L'existence en logique et en mathématique est-elle synonyme de non-contradiction?

Nous ne saurions faire revivre en quelques pages les débats suscités par ces questions! Nous nous contenterons de développer la démarche suivie par Hilbert et qui s'oppose à l'intuitionnisme de Brouwer, ce dernier n'acceptant pas de se détacher de l'intuition mathématique profonde et de lui substituer des «vérités» indépendantes de leur signification.

10. L'émergence de la théorie des systèmes formels

L'avènement des géométries non euclidiennes a permis de se libérer de cette valeur absolue que l'on attribuait aux vérités premières. L'antinomie de Russell a obligé les mathématiciens et les logiciens à prendre conscience de la fragilité des règles de raisonnement. Plus que cela. L'arithmétique, «la reine des sciences», se trouve ébranlée en ses fondements. Le problème de sa non-contradiction se pose alors avec une grande acuité. Il s'agit de s'assurer avant de développer une théorie mathématique que ses fondements sont exempts de toute contradiction et que les règles de déduction ne peuvent pas en produire une. C'est à ce problème qu'Hilbert va se confronter. Ce problème n'est pas simple, et dans la solution qu'Hilbert offre, il faut y voir la marque d'un esprit génial.

Hilbert a compris une leçon de l'histoire des sciences, celle qui met en évidence la faiblesse, la non-certitude de nos sens, de nos jugements lorsqu'ils tentent de cerner un contenu conceptuel en un processus rationnel. Il est persuadé que la mathématique doit être libre de tout préjugé et pour cela qu'il faut en aborder les fondements d'une manière uniquement formelle.

Hilbert s'engage dans une réflexion sur la théorie de la démonstration. Il n'est pas question de le faire en considérant une organisation mathématique chargée de sens. Une idée-clé chez lui est d'avoir formulé la distinction précise entre le langage utilisé dans une théorie mathématique et le langage qui sert à en parler, séparant ainsi nettement mathématique et métamathématique. La métamathématique au sens d'Hilbert n'est que syntaxe pure accompagnée de l'étude des lois qui l'organisent. Cette syntaxe bien que ne référant à aucune signification, n'est bien sûr pas quelconque; elle possède la structure formelle de la logique utilisée dans les systèmes hypothético-déductifs, elle est le discours formel sur les mécanismes des raisonnements mathématiques. Elle se présente comme un système axiomatique qui s'organise sur la base de matériaux symboliques et qui contient des règles formelles de formation et de transformation, règles purement opératoires. Une telle structure doit être contrôlable, c'est la raison pour laquelle Hilbert exige des condi-

tions d'effectivité; il s'agit en effet de se doter des moyens de reconnaître si tel ou tel symbole appartient au système, si telle ou telle caractérisation de symbole détermine ou non une expression «bien formée» du système, si telle ou telle expression est un axiome du système, si telle ou telle règle a été utilisée de manière conforme à sa définition. De telles reconnaissances, pour être effectives, ne peuvent être réglées que sur la base de tests quasi mécaniques et finis. Hilbert n'a pas su donner de ces «procédés finitistes» une définition exhaustive. Il faut attendre les travaux de Jacques Herbrand (1908-1931) pour en obtenir une. L'exigence de ces méthodes finitistes est primordiale; en effet, toute démonstration est ainsi l'expression d'une organisation symbolique finie dans laquelle la démarche de la pensée n'est plus qu'une reconnaissance et une vérification du jeu des symboles.

Le problème de la non-contradiction se pose alors en d'autres termes. Il s'agit de démontrer qu'en appliquant les règles formelles aux axiomes, il est impossible d'obtenir à la fois une formule du système et la négation de cette formule. (Cet appel à la notion de la négation montre bien qu'Hilbert n'a pas réussi totalement à s'affranchir de toute interprétation des symboles.) La pensée d'Hilbert va plus loin encore. Le rapport qu'il établit entre la métamathématique et les fondements de la mathématique est tel que si la mathématique contient tous les modes de raisonnement rationnel, elle contient donc ceux qui s'appliquent à la métamathématique; plus particulièrement, elle contient ceux (finitistes) qui entreront dans le déroulement de la démonstration de la non-contradiction. La métamathématique posséderait, de manière réfléchissante, les moyens de montrer sa propre non-contradiction. Ce rêve s'éteint lorsque Kurt Gödel (1906-1978) démontre en 1931 l'impossibilité de démontrer la non-contradiction de toute théorie contenant l'arithmétique si les démonstrations utilisées consistent en ces procédés finis, voulus par Hilbert.

Cette limitation du projet hilbertien, mise en évidence par Gödel, n'arrête pas cette lente démarche qui pendant plus de deux mille ans occupe de nombreux savants à cerner le raisonnement. Les travaux d'Hilbert et de Gödel ainsi que les

réflexions qu'ils suscitent participent à l'élaboration de la théorie des systèmes formels. Sans s'écarter du projet mathématique elle s'élargit à des domaines de connaissance autres, s'organise en science qui règle la construction d'une langue et son rapport à des modèles possibles, à des mondes possibles, en décrivant ses propriétés intéressantes et en en traçant les limitations. Elle est aujourd'hui l'expression d'une forme de pensée rationnelle qui a su se dégager presque totalement de l'influence de l'intuition. Elle est d'une certaine manière l'aboutissement d'un long processus qui veut se libérer du poids de la « chose-objet » pour manipuler les signes en toute liberté. Elle sait distinguer avec clarté domaine syntaxique et domaine sémantique, ainsi que leurs rapports (Tarski, 1901-1983).

[Les propriétés des systèmes formels] éclairent tout le processus de symbolisme, d'algébrisation, de réduction de la théorie des choses à la théorie des signes [...] et d'exclusion de la signification qui caractérise l'évolution des sciences exactes dans les temps modernes [...]. La cause de tout ce processus a été purement et simplement le désir, essentiel à toute forme de connaissance, de réduire le complexe au simple, et dans ce cas de réduire l'infini au fini. (Raggio, 1970, p. 217.)

Au-delà de l'aspect historique, l'étude des systèmes formels se révèle être d'un grand intérêt. Ces systèmes sont d'une certaine manière l'outil théorique des informaticiens. Ils ont pénétré profondément dans le champ de la linguistique (Chomsky). Mais, plus que cela, leur compréhension et les réflexions qu'ils suscitent s'ancrent dans une réflexion épistémologique qui veut toujours en savoir plus sur ce que c'est que raisonner.

CHAPITRE 2

LA CONSTRUCTION D'UNE LANGUE FORMELLE

1. Quelques remarques

La volonté de créer une langue formelle et de la faire vivre impose d'emblée un certain nombre de conditions. Il faut, pour la construire, disposer d'éléments de base, des *unités syntaxiques primitives* que la pensée sait discriminer. Il s'agit donc de se doter d'un *alphabet*. Mais une langue qui ne contiendrait qu'une liste de symboles sans possibilité aucune de les organiser ne serait pas d'une grande efficacité. Nous nous intéresserons donc à des langues formelles, susceptibles de posséder des expressions conçues à partir de l'alphabet selon une procédure effective, de telle sorte qu'il soit toujours possible de décider si telle ou telle expression est conforme à la règle de formation qui la soutient. Il s'agira de la famille des *expressions bien formées* (ebf). Il est utile d'attribuer à certaines de ces expressions bien formées un statut privilégié ayant un rôle dominant dans la vie formelle envisagée. Ces expressions seront appelées *axiomes*. Animer une langue formelle nécessite la présence de règles de mise en relation d'expressions bien formées. Il s'agit de *règles d'inférence*. Une langue formelle conçue sur les exigences précédentes est un *système formel*.

Avant d'aborder avec une plus grande précision cette notion, nous voulons sensibiliser le lecteur à une première difficulté. Construire une langue formelle nécessite la présence de moyens pour en parler. Il s'agit donc de distinguer la langue formelle elle-même et le langage pour en parler. Il est indispensable de toujours dissocier ces deux niveaux: le langage formel, autonome de son état, mais dépendant d'un *métalangage* pour le construire et l'étudier.

2. Notion générale de système formel

Un système formel est constitué par la donnée de quatre ensembles notés et appelés respectivement:

- A: l'alphabet
 E: les expressions bien formées
 P: les axiomes
 R: les règles d'inférence

Ces différents ensembles sont soumis à certaines conditions que nous formulerons.

Q u e s t i o n s

1. Soit les écritures suivantes:
 $\{a, c, b\}$, $\{a, b, c\}$, $\{b, a, b, c\}$, $\{x, z, y\}$, $\{1, 2, 3\}$,
 $\{1, 6, 2, 8\}$
 — Lesquelles désignent des ensembles?
 — Quels sont les ensembles égaux?
 — Quels sont les ensembles de même puissance?
2. Peut-on dire que deux ensembles égaux ont toujours même puissance?
3. Les écritures suivantes désignent-elles des ensembles:
 $\{a\}$, $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, \emptyset , $\{\emptyset\}$?
4. Qu'est-ce qu'un ensemble fini? dénombrable? au plus dénombrable? non dénombrable?
5. On note $\langle a, b \rangle$, le couple ordonné a, b . Que signifie ceci?
6. Ecrire quelques ensembles de couples ordonnés, de triplets ordonnés.
7. Ecrire quelques couples d'ensembles.

2.1. L'alphabet A

L'alphabet A d'un système formel est un ensemble au plus dénombrable. Ses éléments sont conventionnellement appelés des

lettres. Nous admettrons de plus qu'il contient au moins deux lettres.

Q u e s t i o n s

8. L'ensemble des chiffres de la notation décimale constitue-t-il un alphabet? et l'ensemble des nombres entiers naturels? et l'ensemble des nombres réels? et l'ensemble des lettres de l'alphabet latin?
9. Quand deux ensembles sont-ils disjoints?
10. Si Γ et Δ sont des ensembles, que signifient $\Gamma \cup \Delta$, $\Gamma \cap \Delta$, $\Gamma \subseteq \Delta$?

R e m a r q u e. Pour des raisons de commodité, il arrive souvent que les lettres de A soient réparties en plusieurs sous-ensembles disjoints. L'alphabet est alors l'union de ces sous-ensembles.

Exemple: $A = \{p, q, m, \dots\} \cup \{\sim, \supset\} \cup \{(,)\}$.

METATHEOREME:

Quel que soit l'alphabet A d'un système formel, il est possible de l'engendrer à l'aide d'un alphabet \underline{A} qui ne contient que deux lettres.

Démonstration:

- a) A est au plus dénombrable (2.1). On peut donc numéroter ses éléments. Ecrivons donc:

$$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$$

b) Considérons l'alphabet $\underline{A} = \{*, |\}$ et posons la définition suivante:

- (1) * est une lettre de B.
- (2) Si L est une lettre de B, L| est une lettre de B.
- (3) Rien n'est une lettre de B, sinon par (1) et (2).

Q u e s t i o n s

11. Ecrire quelques lettres de B.
12. Pourquoi |, *|*, ||* ne sont-elles pas des lettres de B?

c) Les ensembles A et B sont de même puissance. Il suffit pour le montrer d'établir les deux correspondances suivantes:

$$\underbrace{*||\dots|}_{n \text{ fois}} \rightarrow a_n \quad \text{et} \quad a_n \rightarrow \underbrace{*||\dots|}_{n \text{ fois}}$$

d) Ayant établi ces correspondances entre lettres de l'alphabet A et expressions de B formées à partir de l'alphabet \underline{A} , il est à loisir possible d'exprimer les lettres de l'un en utilisant les expressions correspondantes de l'autre.

R e m a r q u e. Le mode de formation des expressions de B à partir de l'alphabet \underline{A} est intéressant et sera utilisé souvent. Il s'agit d'une procédure de construction par définition qui se caractérise par le fait qu'elle comprend trois types de clauses:

- (1) Une clause dite initiale.
- (2) Une clause dite inductive.
- (3) Une clause dite finale.

Cette procédure de construction est appelée une *définition inductive*. Elle peut contenir plusieurs clauses initiales et inductives. Mais elle ne contient qu'une clause finale.

Q u e s t i o n s

13. A quoi servent les clauses initiales? les clauses inductives?
14. Pourquoi une telle définition ne peut-elle pas comporter plus d'une clause finale?

2.2. L'ensemble des expressions bien formées E

Nous procéderons en deux temps. Nous définirons tout d'abord l'objet mathématique «monoïde libre», puis à partir de cette définition nous dégagerons de quelle manière l'ensemble des expressions bien formées (ebf) est engendré.

Le monoïde libre A^* engendré sur un ensemble A de lettres se construit à partir de l'ensemble A . Il s'agit de l'ensemble des suites finies (mots) avec répétitions possibles des éléments (lettres) de A muni de l'opération de concaténation \bullet , telle que:

$$\underbrace{a_1 a_2 \dots a_i}_{\text{mot de } A^*} \bullet \underbrace{b_1 b_2 \dots b_j}_{\text{mot de } A^*} = \underbrace{a_1 a_2 \dots a_i b_1 b_2 \dots b_j}_{\text{mot de } A^*}$$

Q u e s t i o n s

15. Soit l'alphabet A : $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, *, !\}$. Ecrire quelques mots du monoïde libre A^* .
16. a_1 est-il un mot de A^* ? et $a_1 a_1 a_1$?
17. Si α et β désignent deux mots de A^* , $\alpha\beta$ et $\beta\alpha$ désignent-ils également des mots de A^* ? Le mot désigné par $\alpha\beta$ est-il le même mot que celui désigné par $\beta\alpha$?
18. Quelle distinction y a-t-il entre le mot a_1 par exemple et l'expression α dont on dit qu'elle désigne un mot?

L'ensemble E des expressions bien formées (ebf) est un sous-ensemble de A^* engendré par une définition inductive.

Exemple: On donne l'alphabet ci-dessus et la définition:

- (1) Une lettre minuscule est une ebf.
- (2) Si α est une ebf, $!\alpha$ est une ebf.
- (3) Si α et β sont des ebf, $*\alpha\beta$ est une ebf.
- (4) Rien n'est une ebf sinon par ce qui précède.

Les expressions suivantes sont des expressions bien formées:

$$!a_7, *a_3a_8, *!a_5a_1, *!a_6*a_2a_3$$

Alors que celles-ci n'en sont pas

$$a_8!, *a_9, !a_3a_{21}, *!a_9a_4a_1$$

Q u e s t i o n s

19. Ecrire quelques ebf.
20. Une ebf peut-elle contenir deux lettres minuscules de suite, deux lettres ! de suite, deux lettres * de suite?
21. Y a-t-il une relation entre le nombre de lettres minuscules d'une ebf et le nombre de lettres *?
22. Revenons à la définition globale de l'ensemble des ebf. Nous autorise-t-elle à choisir le monoïde libre A^* lui-même comme ensemble d'ebf? Si cela est, proposez une définition inductive pour un tel ensemble.

E x e r c i c e s

1. Soit l'alphabet A: $A = \{/, o, *\}$ et l'ensemble des ebf défini ainsi:
 - (1) Les lettres o et * sont des ebf.
 - (2) Si α est une ebf, $/\alpha$ est une ebf.
 - (3) Si α est une ebf, $\alpha/$ est une ebf.
 - (4) Si α et β sont des ebf, $\alpha\beta$ est une ebf.
 - (5) Rien n'est une ebf sinon par ce qui précède.

Les expressions suivantes sont-elles des ebf?

/o/, //o/, /o*/, *///, ****, ///

Former quelques ebf.

2. Soit l'alphabet A: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
 Proposer une définition inductive susceptible d'engendrer un ensemble d'ebf dont les éléments représentent tous les nombres entiers naturels.

2.3. L'ensemble des axiomes P

C'est un sous-ensemble de E qui contient toutes les ebf de certaines formes données et seulement celles-ci.

Q u e s t i o n s

23. Soit l'alphabet A: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, *, !\}$. Est-il possible de dégager une forme commune aux ebf suivantes et si oui, laquelle?
 $*a_1a_3, !a_1a_3, !a_1!a_3, *a_1*a_3a_4, **a_1a_3a_4$
24. Ecrire quelques ebf de la forme $*!a^*\alpha\beta$.

R e m a r q u e. Les formes des éléments de P sont appelées des *schémas d'axiomes*. Elles permettent d'écrire autant d'axiomes d'une même famille formelle que l'on veut.

Exemple:

Schéma d'axiome
 Axiomes

$*\alpha^*\beta\alpha$
 $*a_1*a_2a_1$
 $*a_1*a_1a_1$
 $*!a_1*a_3!a_1$
 $**a_1a_2*a_3*a_1a_2$

Question

25. Si l'on considère le schéma d'axiome de l'exemple ci-dessus, les expressions suivantes sont-elles des axiomes?

$$*a_1*a_1a_1, *a_1*a_1a_3, *!a_1*a_2!a_1, *a_2**a_3a_3a_2$$

R e m a r q u e. Pendant plus de deux mille ans l'axiome a été considéré comme une unité fondamentale qui inscrivait dans une théorie des relations entre sens; ces relations étaient alors acceptées comme fondamentales. Aujourd'hui, dans le cadre d'un système formel, l'axiome inscrit des relations entre signes uniquement.

2.4. L'ensemble des règles R

Les règles, dites règles d'inférence, sont en nombre fini. Chacune d'elles est l'expression d'une relation formelle particulière entre une ou plusieurs ebf et une ebf particulière. Elles sont formulées de telle manière que pour toute règle R_i , pour tout ensemble E d'ebf et pour toute ebf α , on puisse décider si les ebf de E sont en relation avec α par la règle R_i . Si tel est le cas, on dit que α est une *conséquence immédiate* des ebf de E par la règle R_i .

Les règles sont donc de la forme:

$$R_i : P_1, P_2, \dots, P_n \rightarrow C \text{ où } P_1, \dots, P_n \text{ et } C \text{ désignent des ebf.}$$

C est une conséquence immédiate de l'ensemble E des P_i par la règle R_i . Les P_i sont appelées les *prémises* de la règle R_i .

Pour des raisons de commodité, les règles d'inférence sont définies en compréhension et non pas sous la forme d'un ensemble présenté de manière extensionnelle.

Exemple:

Règle R_i : Une ebf N est une conséquence immédiate de deux autres ebf par la règle R_i si et seulement si elles ont entre elles

la relation formelle qui existe entre une expression de la forme α et une expression de la forme $*\alpha\beta$.

Q u e s t i o n

26. Si l'on considère la règle ci-dessus, peut-on dire que
 a_7 est une conséquence immédiate de $!a_3$ et $*!a_3a_7$?
 $!a_8$ est une conséquence immédiate de a_3 et $*a_3!a_8$?
 a_5 est une conséquence immédiate de a_3 et $*a_3!a_5$?
 $*a_2a_1$ est une conséquence immédiate de $!a_1$ et $*!a_1*a_2a_1$?

R e m a r q u e. L'expression «être conséquence immédiate de» dénote une conséquence de forme et non de contenu.

2.5. Quelques commentaires

Les quatre ensembles qui constituent un système formel sont décidables. Cela signifie que l'on peut toujours savoir, par une procédure effective—systématique et finie—si:

1. Un signe fait ou ne fait pas partie de l'alphabet.
2. Une suite de signes est ou n'est pas une ebf.
3. Une ebf est ou n'est pas un axiome.
4. Si n ebf étant données, l'une d'entre elles est une conséquence immédiate des $n-1$ autres par une des règles du système.

Il est possible d'engendrer des systèmes formels aussi divers que nombreux. En eux-mêmes, ils ne présentent guère d'intérêt, sinon peut-être l'intérêt ludique d'une construction symbolique. Nous ne nous contenterons pas de cela.

En fonction de caractéristiques particulières (nombre d'axiomes, forme de règles, ...) il est possible de catégoriser les systèmes formels en espèces. Mais cela n'est pas suffisant pour les rendre davantage intéressants.

Un système formel se révèle être d'un plus grand intérêt lorsqu'on lui fournit une dynamique interne. On le fait en imposant un rapport hiérarchisé entre ebf et axiomes, et en appliquant les règles sur certaines ebf et pas sur d'autres. Sur la base d'une telle organisation il est possible d'étudier les systèmes formels, puis de les caractériser. Nous les structurerons en définissant ce qu'est une preuve, une déduction, un théorème et une conclusion.

Un système formel qui ne serait qu'une construction syntaxique isolée n'a guère d'utilité. Son intérêt réside dans la possibilité de l'interpréter, de projeter certains de ses éléments dans une (des) organisation(s) sémantique(s) et d'étudier leurs rapports.

La construction d'un système formel n'est pas réellement indépendante de l'objet d'étude sémantique pour lequel il est conçu. Cette dépendance n'aliène pas sa liberté, mais sa forme.

Que la formalisation soit toujours rétrospective, cela prouve qu'elle n'est jamais complète qu'en apparence, et que la pensée formelle vit dans la pensée intuitive.

(Merleau-Ponty 1945: 482)

3. Preuve et théorème

DEFINITION 1 - preuve -

Soit un système formel S . Une preuve dans S est une suite ordonnée finie d'ebf $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ telles que chacune d'elles soit:

- ou un axiome
- ou une conséquence immédiate d'ebf qui la précède(nt)

DEFINITION 2 - théorème -

Soit un système formel S . Un théorème dans S est une ebf α telle qu'il existe une preuve dont α est la dernière ebf. Nous écrivons: $\vdash \alpha$, α est un théorème.

Q u e s t i o n s

27. Par quoi commence nécessairement une preuve?

28. Un axiome est-il un théorème?

Exemple:

Soit le système formel S donné par:

— L'alphabet A : $A = \{a, b\}$

— L'ensemble des ebf, $E = A^*$

— Un axiome unique: aba

— Trois règles: R_1 : Soit α une ebf. L'ebf $ab\alpha$ est une conséquence immédiate d'une autre ebf par la règle R_1 si et seulement si cette dernière ebf est de la forme $a\alpha$; $a\alpha \rightarrow ab\alpha$.

R_2 : Soit α une ebf. L'ebf αab est une conséquence immédiate d'une autre ebf par la règle R_2 si et seulement si cette dernière ebf est de la forme αa ; $\alpha a \rightarrow \alpha ab$.

R_3 : Soit α et β deux ebf. L'ebf $\alpha ab\beta$ est une conséquence immédiate d'une autre ebf par la règle R_3 si et seulement si cette dernière ebf est de la forme $\alpha a\beta$; $\alpha a\beta \rightarrow \alpha ab\beta$.

Quelques preuves:

I.	1. aba	axiome
	2. $abba$	1, R_1 , α/ba
	3. $abbab$	2, R_2 , α/abb
	4. $abbabb$	3, R_3 , α/abb , β/b

II.	1. aba	axiome
	2. abab	1, R_2 , α/ab
	3. ababb	2, R_3 , α/ab , β/b
	4. abbabb	3, R_1 , $\alpha/babb$
III.	1. aba	axiome
	2. abba	1, R_1 , α/ba
	3. abbba	2, R_1 , α/bba
	4. abbbab	3, R_2 , $\alpha/abbb$
	5. abbbabb	4, R_3 , $\alpha/abbb$, β/b
	6. abbbabbb	5, R_3 , $\alpha/Abbb$, β/bb

Questions

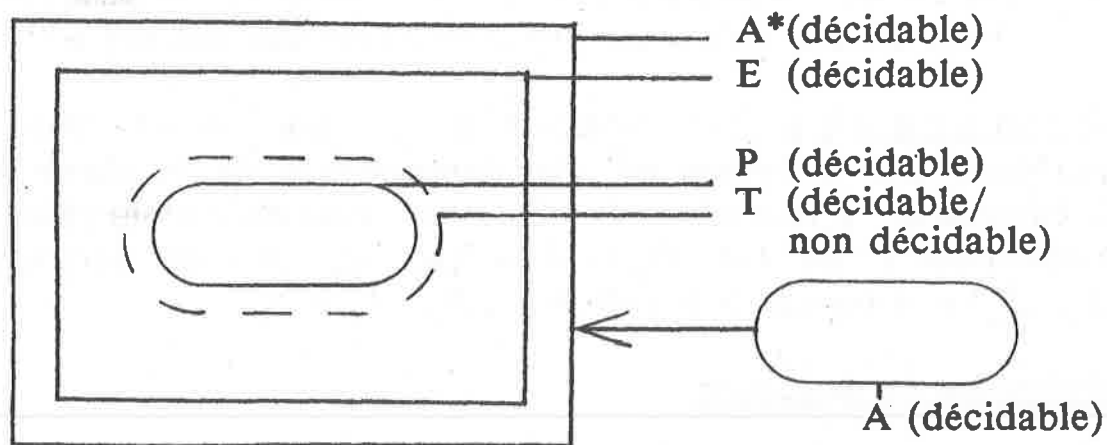
29. Le théorème I.4 est-il différent du théorème II.4?
30. La preuve I est-elle différente de la preuve II?
31. La suite ordonnée finie suivante est-elle une preuve dans S?
- | | |
|---------------|--|
| 1. abbbabbb | théorème III.6 |
| 2. abbbabbbb | 1, R_3 , $\alpha/abbb$, β/bbb |
| 3. abbbbabbbb | 2, R_1 , $\alpha/bbbabbbb$ |
- Y aurait-il quelque intérêt à la considérer comme une preuve dans S?
32. Les expressions suivantes sont-elles des théorèmes de S?
- | |
|--|
| 1. bbb |
| 2. aaaa |
| 3. abababab |
| 4. $\underbrace{abb \dots ba}_{33 \text{ fois}}$ |
33. Existe-t-il une procédure de décision de telle manière qu'il soit toujours possible d'affirmer si une ebf de S est ou n'est pas un théorème? Dit autrement: L'ensemble des théorèmes est-il décidable?

Remarques. Nous noterons T l'ensemble des théorèmes d'un système formel. Les ensembles A, E, P sont décidables. De

plus, on peut décider si une suite d'ebf est ou non preuve de sa dernière ligne. Mais cela n'implique pas que T soit nécessairement décidable. En effet, pour affirmer que A est un théorème, il faut se procurer une preuve. Il peut arriver qu'on n'en trouve pas, sans que cela prouve qu'il n'en existe pas.

DEFINITION 3 - décidable -

Un système formel est décidable si l'ensemble de ses théorèmes est décidable.



4. Dédution et conclusion

DEFINITION 4 - déduction -

Soit un système formel S . et Γ un ensemble d'ebf. Une déduction dans S est une suite ordonnée et finie d'ebf $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ telles que chacune d'elles soit:

- ou un axiome
- ou un élément de Γ
- ou une conséquence immédiate d'ebf qui la précède(nt)

DEFINITION 5 - conclusion -

Soit un système formel S , et Γ un ensemble d'ebf. Une conclusion dans S par rapport à Γ est une ebf α telle qu'il existe une déduction dont α est la dernière ebf. On écrit $\Gamma \vdash \alpha$, c'est-à-dire α est une conclusion par rapport à Γ .

Remarques. Les éléments de Γ sont appelés des *hypothèses*. Un théorème est une conséquence de la classe vide d'hypothèse. L'ensemble Γ n'est pas nécessairement fini. Si l'ensemble Γ est fini et si $\Gamma = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ on écrira $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \vdash \alpha$ ou par convention $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \vdash \alpha$.

Exemples de déduction:

Considérons le système S exposé en page 33 et l'ensemble d'hypothèses suivant:

$$\Gamma : \{aa, aaaa\}$$

I.	<ol style="list-style-type: none"> 1. aba 2. aaaa 3. aaaba 4. abaaba 	<p>axiome</p> <p>appartient à Γ</p> <p>2, R_3, α/aa, β/a</p> <p>3, R_1, $\alpha/aaba$</p>
----	--	---

L'ebf abaaba est une conclusion par rapport à Γ :
 $aa, aaaa \vdash abaaba$.

II.	1. aa	appartient à Γ
	2. aab	1, R_2 , α/a
	3. aabb	2, R_3 , α/a , β/b

L'ebf aabb est une conclusion par rapport à Γ :
 $aa, aaaa \vdash aabb$.

Remarque. Lorsque l'on effectue une déduction de manière à obtenir une conclusion α par rapport à Γ : $\Gamma \vdash \alpha$, il n'est pas nécessaire d'utiliser toutes les hypothèses contenues dans Γ .

Questions

34. Les suites ordonnées finies ci-dessous sont-elles des déductions par rapport à l'ensemble d'hypothèses Γ :
 $\Gamma = \{aa, aab, ba\}$?

1. aba	axiome
2. abba	1, R_1 , α/ba
3. abbba	2, R_1 , α/bba

1. aa	appartient à Γ
2. aba	1, R_1 , α/a
3. abab	2, R_2 , α/ab

1. aab	appartient à Γ
2. ba	appartient à Γ
3. aa	appartient à Γ
4. abab	1, R_1 , α/ab
5. ababb	4, R_3 , α/ab , β/b

35. Une preuve est-elle toujours une déduction?
 Une déduction est-elle toujours une preuve?
 Un théorème est-il toujours une conclusion?
 Une conclusion est-elle toujours un théorème?

5. Métathéorèmes

Un théorème est une ebf dans un système formel. Nous aurons aussi à prouver certaines propriétés des systèmes formels que nous étudierons. Comme il s'agira de faits démontrés, on aura aussi affaire à quelque chose de l'ordre des «théorèmes». Seulement leurs démonstrations se feront à l'aide de divers symboles et d'une langue comme le français et non pas à l'aide des règles du système formel considéré. On dira que ces vérités sont démontrées dans une *métalogique* et, pour éviter toute confusion, nous parlerons de *métathéorèmes*.

METATHEOREME 1

- 1.1. Si $\Delta \subseteq \Gamma$ et si α est une conclusion par rapport à l'ensemble d'hypothèses Δ : $\Delta \vdash \alpha$, alors α est aussi une conclusion par rapport à l'ensemble d'hypothèses Γ : $\Gamma \vdash \alpha$.

Démonstration:

La définition 4 n'exige pas qu'il soit fait usage de toutes les hypothèses, et qui peut le plus, peut le moins.

- 1.2. Une ebf α est une conclusion par rapport à l'ensemble d'hypothèses Γ : $\Gamma \vdash \alpha$, si et seulement si il existe un sous-ensemble fini Δ de Γ tel que α est une conclusion par rapport à l'ensemble d'hypothèses Δ : $\Delta \vdash \alpha$.

Démonstration:

(\leftarrow) Il existe $\Delta \subseteq \Gamma$ tel que $\Delta \vdash \alpha$. Le métathéorème 1.1 établit que $\Gamma \vdash \alpha$.

(\rightarrow) Soit α , une conclusion par rapport à l'ensemble d'hypothèses Γ : $\Gamma \vdash \alpha$. Une conclusion est la dernière ligne d'une déduction (définition 5), et une déduction est une suite finie d'ebf (définition 4). Elle n'utilise donc

qu'un ensemble fini Δ d'éléments de Γ , et on a bien $\Delta \vdash \alpha$.

1.3. Si α est une conclusion par rapport à l'ensemble d'hypothèses $\Delta : \Delta \vdash \alpha$, et si pour chaque $\beta \in \Delta$, β est une conclusion par rapport à l'ensemble d'hypothèses $\Gamma : \Gamma \vdash \beta$, alors $\Gamma \vdash \alpha$.

Démonstration:

Si α est une conclusion par rapport à l'ensemble d'hypothèses Δ , c'est qu'on peut déduire α en utilisant des éléments β de Δ .

$$\begin{array}{l} \Delta \vdash \\ \vdots \\ \beta_i \quad \beta_i \in \Delta \\ \vdots \\ \beta_j \quad \beta_j \in \Delta \\ \vdots \\ \alpha \end{array}$$

Si à leur tour chaque $\beta \in \Delta$ est tel que β est une conclusion à partir de l'ensemble d'hypothèses $\Gamma : \Gamma \vdash \beta$, c'est qu'on peut déduire β à partir d'éléments de Γ .

$$\begin{array}{l} \Gamma \vdash \\ \vdots \\ \gamma \quad \gamma \in \Gamma \\ \vdots \\ \beta_i \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Gamma \vdash \\ \vdots \\ \delta \quad \delta \vdash \Gamma \\ \vdots \\ \beta_j \end{array}$$

Il suffit alors «d'enchaîner» les déductions à partir de Γ .

$$\Gamma \vdash \begin{array}{c} \vdots \\ \gamma \\ \vdots \\ \beta \\ \vdots \\ \alpha \end{array}$$
 $\gamma \in \Gamma$
 $\beta \in \Gamma$

C'est-à-dire $\Gamma \vdash \alpha$.

6. Quelques espèces de systèmes formels

Description sommaire:

6.1. Les systèmes combinatoires

Il s'agit des systèmes pour lesquels l'ensemble E des ebf est égal au monoïde libre A^* engendré sur un alphabet fini A . ($E = A^*$).

L'ensemble des axiomes ne possède qu'un élément distingué. La puissance de cet ensemble est donc égale à 1.

6.2. Les systèmes semi-thueiens

Il s'agit des systèmes combinatoires dont toutes les règles ont la forme $YXZ \rightarrow YX'Z$. Les expressions YXZ et $YX'Z$ sont des ebf. Il est imposé que le fragment X' ne soit pas vide.

L'exemple de la page 33 est un système semi-thueien.

6.3. Les systèmes de Chomsky

Il s'agit de systèmes semi-thueiens tels que de plus:

1. On distingue deux parties disjointes dans l'alphabet:
 $V_A \cup V_T$: A alphabet Auxiliaire; T alphabet Terminal
2. L'unique élément de P appartient à V_A .
3. Si $x \in V_A$ et $y \in (V_A \cup V_T)^*$, les règles sont toutes de la forme $x \rightarrow y$.

Exemple:

$A = \{\text{ART, N, PHR, SN, SV, V}\} \cup \{\text{la, le, concierge, interroge, journaliste}\}$

$V_A = \{\text{ART, N, PHR, SN, SV, V}\}$

$V_T = \{\text{la, le, concierge, interroge, journaliste}\}$

$E = A^*$

$P = \{\text{PHR}\}, \text{PHR} \in V_A$

$R = \{R_1, R_2, \dots, R_8\}$

$R_1: \text{PHR} \rightarrow \text{SN SV}$

$R_2: \text{SN} \rightarrow \text{ART N}$

$R_3: \text{SV} \rightarrow \text{V SN}$

$R_4: \text{ART} \rightarrow \text{la}$

$R_5: \text{ART} \rightarrow \text{le}$

$R_6: \text{N} \rightarrow \text{concierge}$

$R_7: \text{N} \rightarrow \text{journaliste}$

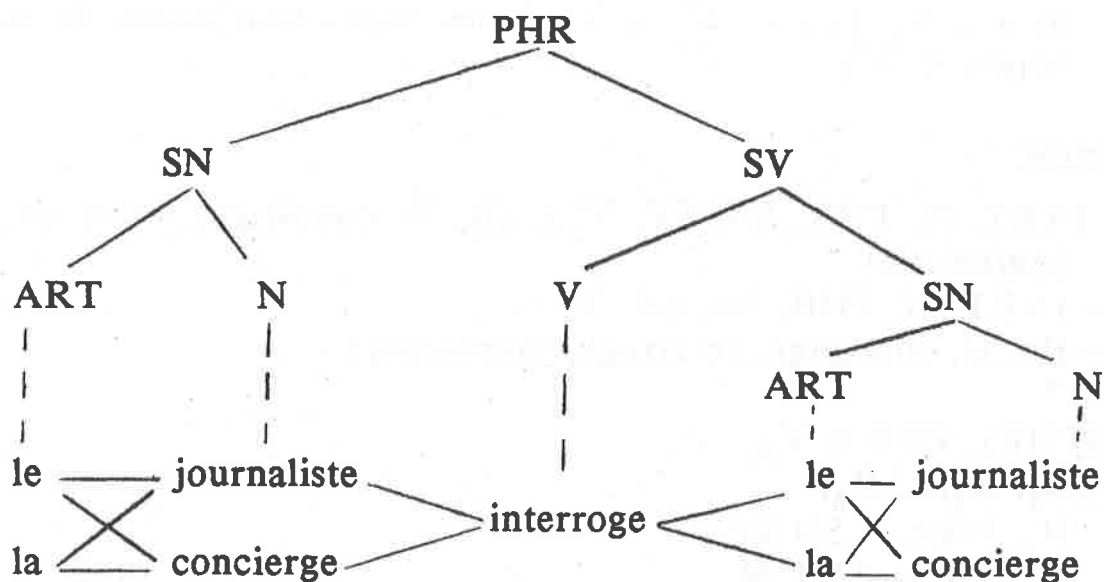
$R_8: \text{V} \rightarrow \text{interroge}$

Voici une preuve dans ce système:

1.	PHR	axiome
2.	SN SV	1, R_1
3.	ART N SV	2, R_2
4.	ART N V SN	3, R_3
5.	ART N V ART N	4, R_2
6.	la N V ART N	5, R_4
7.	la journaliste V ART N	6, R_7
8.	la journaliste interroge ART N	7, R_8
9.	la journaliste interroge le N	9, R_5
10.	la journaliste interroge le concierge	9, R_6

La proposition «la journaliste interroge le concierge» est un théorème dans ce système.

Une représentation arborescente permet une bonne reconnaissance des théorèmes possibles.



E x e r c i c e

Proposez une preuve du théorème «le concierge interroge la concierge».

*

Dans cette introduction à la théorie des systèmes formels, nous nous intéresserons à des systèmes particuliers. Nous étudierons tout d'abord un système L^0 pour la logique des propositions. Ensuite nous aborderons les autres systèmes formels du premier ordre pur. Il s'agit d'une grande famille de systèmes. Elle comprend notamment L^0 , le système du calcul des propriétés L^1 , le système du calcul des relations binaires L^2 , et plus généralement le système du calcul des relations n-aires L^n . Enfin, nous développerons un système formel appliqué.

CHAPITRE 3

UN SYSTEME FORMEL L^0

POUR LA LOGIQUE DES PROPOSITIONS

Dans ce chapitre, nous allons construire un système formel pour la logique des propositions. Tout d'abord nous introduirons les éléments syntaxiques qui en constituent les fondements. Ce n'est qu'ensuite que nous l'interpréterons.

1. Les quatre ensembles fondamentaux

1.1. L'alphabet A

L'alphabet A est composé de l'union de trois ensembles:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3.$$

L'ensemble A_1 contient des symboles dont on dira qu'ils sont des symboles de prédicats de degré 0.

$$A_1 = \{p_1^0, p_2^0, p_3^0, \dots\}$$

R e m a r q u e. Dans ce chapitre, nous nous contenterons d'écrire p_i , où $p_i = \text{df } p_i^0$. L'écriture indicée du degré 0 nous importera lorsque nous étudierons les systèmes formels du premier ordre. Les symboles de prédicats de degré 0 seront interprétés comme des symboles de propositions.

L'ensemble A_2 contient deux symboles que l'on nommera «connecteurs».

$$A_2 = \{\sim, \supset\}$$

R e m a r q u e. Ces deux connecteurs seront interprétés comme des opérateurs propositionnels: le connecteur \sim comme opérateur unaire qui correspond à la négation, et le connecteur \supset comme opérateur binaire qui correspond à la conditionnelle.

L'ensemble A_3 contient deux symboles que l'on appellera «parenthèses».

$$A_3 = \{(,)\}$$

R e m a r q u e. Ces deux symboles ne seront pas interprétés. Ils serviront de signes de ponctuation. Il aurait été possible de s'en passer si nous avions choisi de présenter les ebf de L^0 selon le mode d'écriture de Lukasiewicz (écriture post ou préfixée).

1.2. L'ensemble des ebf E

Définition inductive:

- (1) Un symbole de prédicat de degré 0 est une ebf.
- (2) Si α est une ebf, $\sim\alpha$ est une ebf.
- (3) Si α et β sont des ebf, $(\alpha \supset \beta)$ est une ebf.
- (4) Rien n'est une ebf sinon par ce qui précède.

Exemples:

Les expressions suivantes sont des ebf:

$$\sim p_4, p_1, p_{37}, (\sim p_2 \supset p_1), \sim(p_3 \supset (\sim p_1 \supset p_3)), (\sim\sim p_7 \supset (p_1 \supset p_2)).$$

Q u e s t i o n s

1. Les expressions suivantes sont-elles des ebf?
 $(p_2 \supset \sim p_3)$, $(\sim p_3 \supset p_1 \sim)$, $p_3 \supset p_9$, $p_1 \supset p_3 \supset p_7$,
 $\sim(p_1 \supset \sim p_3)$, $\sim p_1 \supset (p_3 \supset p_{12})$, $\sim\sim p_2$
2. Pourquoi avoir introduit des parenthèses dans la clause (3) et pas dans la clause (2)?

R e m a r q u e s. Les parenthèses servent à marquer la façon dont une ebf a été engendrée. Si nous ne disposions pas de parenthèses, une expression comme $p_1 \supset p_2 \supset p_3$ serait ambiguë. En effet, nous ne saurions pas si le premier signe \supset agit sur le prédicat p_2 ou sur l'expression complexe $p_2 \supset p_3$.

Par ailleurs nous supprimerons la paire extérieure des parenthèses d'une ebf. Au lieu de $(p_1 \supset (p_2 \supset p_3))$, par exemple, nous écrirons $p_1 \supset (p_2 \supset p_3)$.

Enfin, nous poserons par convention les définitions suivantes:

- 1) $\alpha \vee \beta =df \sim\alpha \supset \beta$
- 2) $\alpha \wedge \beta =df \sim(\sim\alpha \vee \sim\beta)$
- 3) $\alpha \equiv \beta =df (\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \alpha)$

Q u e s t i o n s

3. Peut-on poser les définitions 1)-3) dans un autre ordre?
4. Abréger les ebf suivantes en utilisant les définitions 1)-3):
 $\sim p_1 \supset p_2$, $\sim(\sim\sim p_2 \supset \sim p_2)$, $\sim(\sim\sim(p_2 \supset \sim p_1) \supset \sim(p_1 \supset p_2))$
5. Ecrire sans abréviation les expressions suivantes:
 $p_1 \equiv p_3$, $(p_1 \wedge p_2) \supset p_3$
6. L'ensemble des ebf E de L^0 est décidable. Etablir un algorithme de décision.

1.3. L'ensemble des axiomes P

Il s'agit d'un ensemble infini d'ebf. Il est engendré de manière inductive ainsi:

(1) Si α , β et γ sont des ebf, toute ebf de l'une des formes

$$(A1) \quad \alpha \supset (\beta \supset \alpha)$$

$$(A2) \quad (\alpha \supset (\beta \supset \gamma)) \supset ((\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \gamma))$$

$$(A3) \quad (\sim\beta \supset \sim\alpha) \supset ((\sim\beta \supset \alpha) \supset \beta)$$

est un axiome.

(2) Rien n'est un axiome sinon par ce qui précède.

Remarque. Les expressions (A1)-(A3) sont des schémas d'axiome.

Question

7. Les expressions suivantes sont-elles des axiomes?

$$p_1 \supset (p_1 \supset p_1), (p_2 \supset p_1) \supset p_2,$$

$$(p_1 \supset (p_2 \supset (p_3 \supset p_3))) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_1 \supset (p_3 \supset p_3))),$$

$$\beta \supset (\alpha \supset \beta)$$

1.4. L'ensemble des règles R

Le système L^0 ne contient qu'une seule règle que l'on désigne par MP (Modus Ponens).

La règle MP: Une ebf β est une conséquence immédiate de deux autres ebf par la règle MP si et seulement si elles ont entre elles la relation qui existe entre une expression de la forme α et une expression de la forme $\alpha \supset \beta$.

Question

8. p_1 est-elle une conséquence immédiate par la règle MP de p_2 et $p_2 \supset p_1$?
- p_1 est-elle une conséquence immédiate par la règle MP de p_1 et $p_1 \supset p_1$?
- p_7 est-elle une conséquence immédiate par la règle MP de $p_3 \supset p_4$ et $(p_3 \supset p_4) \supset p_7$?
- $\sim(p_1 \supset \sim p_3)$ est-elle une conséquence immédiate par la règle MP de $p_7 \supset \sim p_3$ et $(p_7 \supset \sim p_3) \supset \sim(p_1 \supset \sim p_3)$?
- $p_2 \supset \sim p_1$ est-elle une conséquence immédiate par la règle MP de $p_2 \supset \sim p_1$ et $(p_1 \supset \sim p_2) \supset (p_2 \supset \sim p_1)$?

2. Preuve et déduction: des exemples

2.1. Exemple de preuve dans L^0

1. $(p_1 \supset ((p_1 \supset p_1) \supset p_1)) \supset ((p_1 \supset (p_1 \supset p_1)) \supset (p_1 \supset p_1))$
(A2) $\alpha/p_1, \beta/p_1 \supset p_1, \gamma/p_1$
2. $p_1 \supset ((p_1 \supset p_1) \supset p_1)$ (A1) $\alpha/p_1, \beta/p_1 \supset p_1$
3. $(p_1 \supset (p_1 \supset p_1)) \supset (p_1 \supset p_1)$ 1, 2, MP
4. $p_1 \supset (p_1 \supset p_1)$ (A1) $\alpha/p_1, \beta/p_1$
5. $p_1 \supset p_1$ 3, 4, MP

L'expression $p_1 \supset p_1$ est un théorème: $\vdash p_1 \supset p_1$, elle appartient à l'ensemble des théorèmes T.

Remarque. Toute ebf de la forme $\alpha \supset \alpha$ est un schéma de théorème. Par abus d'écriture nous écrirons $\alpha \supset \alpha \in T$ ou $\vdash \alpha \supset \alpha$. Il s'agit d'un résultat couramment utilisé.

Questions

9. Les expressions 1-4 de la preuve ci-dessus sont-elles également des théorèmes?
10. L'ebf $\sim p_1 \supset \sim p_1$ est-elle un théorème?
11. Est-on en droit, maintenant, de lire l'expression $\sim p_1 \supset \sim p_1$ en lui assignant les valeurs sémantiques de la négation et de la conditionnelle?

2.2. Exemple de déduction dans L^0

Soit Γ un ensemble d'hypothèses qui contient un et un seul élément, p_1 : $\Gamma = \{p_1\}$.

- | | |
|--|----------------------------------|
| 1. p_1 | appartient à Γ |
| 2. $p_1 \supset (p_{126} \supset p_1)$ | (A1) $\alpha/p_1, \beta/p_{126}$ |
| 3. $p_{126} \supset p_1$ | 2, 1, MP |

L'expression $p_{126} \supset p_1$ est une conclusion par rapport à l'ensemble Γ ; $\Gamma \vdash p_{126} \supset p_1$ ou $p_1 \vdash p_{126} \supset p_1$.

Remarque. Il est également utile d'introduire des schémas de déduction. Ils représentent l'ensemble des déductions de même forme. Ainsi, sur la base de l'exemple précédent il est possible de poser $\beta \vdash \alpha \supset \beta$, la «conclusion» $\alpha \supset \beta$ est déductible de l'«hypothèse» β , quel que soit α .

Questions

12. Les deux inscriptions suivantes sont-elles l'expression de schémas de déduction?
 $\alpha, \beta, \beta \supset \gamma \vdash \beta; \beta, \beta \supset (\alpha \supset \gamma), \alpha \vdash \gamma$

13. Quel est le statut de chacune des ebf d'une déduction dont la dernière est un théorème?
14. Soit α_i , α_j et α_k trois ebf d'une déduction. On sait que α_k est une conséquence immédiate de α_i et de α_j par la règle MP. Quel est l'ordre des indices i , j , k ? Quelle est nécessairement soit la forme de α_j soit la forme de α_i ?

Lorsqu'on s'occupe des théorèmes de L^0 , il est souvent intéressant de les aborder en termes de schéma de théorèmes et donc de fournir la «preuve» de ces schémas.

METATHEOREME 2

2.1. Si $\beta \in T$ alors $\alpha \supset \beta \in T$ quel que soit α .

Démonstration:

- | | |
|---|---|
| 1. β | $\beta \in T$ (ce qu'on aurait aussi pu écrire $\vdash \beta$) |
| 2. $\beta \supset (\alpha \supset \beta)$ | (A1), $\alpha/\beta, \beta/\alpha$ |
| 3. $\alpha \supset \beta$ | 2, 1, MP |
| $\alpha \supset \beta \in T$ | |

2.2. Si $\alpha \supset \gamma \in T$ et $\alpha \supset (\gamma \supset \beta) \in T$ alors $\alpha \supset \beta \in T$.

Démonstration:

- | | |
|---|--|
| 1. $\alpha \supset \gamma$ | $\alpha \supset \gamma \in T$ |
| 2. $\alpha \supset (\gamma \supset \beta)$ | $\alpha \supset (\gamma \supset \beta) \in T$ |
| 3. $(\alpha \supset (\gamma \supset \beta)) \supset ((\alpha \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta))$ | (A2) $\alpha/\alpha, \beta/\gamma, \gamma/\beta$ |
| 4. $(\alpha \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta)$ | 3, 2, MP |
| 5. $\alpha \supset \beta$ | 4, 1, MP |
| $\alpha \supset \beta \in T$ | |

3. Le «théorème» de la déduction pour L^0

Ce métathéorème que l'on appelle «théorème» de la déduction est extrêmement puissant. Il dit en substance que si β est une conclusion déductible de l'ensemble d'hypothèses Γ et de l'hypothèse α , alors l'expression $\alpha \supset \beta$ est une conclusion déductible de l'ensemble d'hypothèses Γ uniquement.

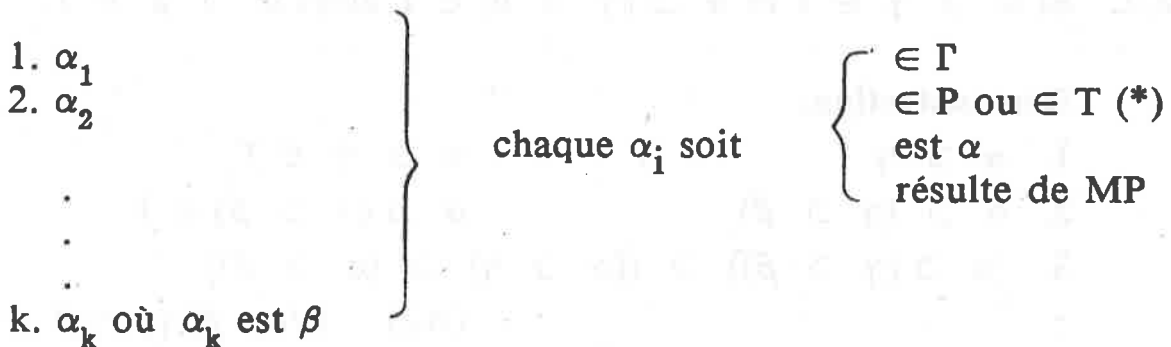
METATHEOREME 3

Dans L^0 , si $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, alors $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$.

Démonstration:

Il s'agit de considérer toutes les déductions envisageables dans L^0 . Il est possible de catégoriser les déductions en familles. Les déductions qui n'ont qu'une seule ligne, celles qui en comptent deux, ..., celles qui en comptent n , ...

Il s'agit alors de démontrer que quelle que soit la famille considérée, on aura le métathéorème. La situation est donc la suivante: montrer que quelle que soit la longueur k de la déduction $\Gamma, \alpha \vdash \beta$



on peut établir la déduction suivante: $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$

$$\left. \begin{array}{l} 1. \beta_1 \\ 2. \beta_2 \\ \vdots \\ n. \beta_n \text{ où } \beta_n \text{ est } \alpha \supset \beta \end{array} \right\} \text{chaque } \beta_i \text{ soit } \left\{ \begin{array}{l} \in \Gamma \\ \in P \text{ ou } \in T \\ \text{résulte de MP} \end{array} \right.$$

Remarques. (*) L'appartenance à l'ensemble des théorèmes n'est pas conforme à la définition 4, page 36. Il s'agit simplement d'une commodité. (Cf. question 28, page 33 et question 31, page 34.)

Attention le métathéorème n'impose aucune condition à la longueur n de la déduction $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$. Il est seulement dit qu'elle existe si la déduction $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ existe.

La démonstration va se faire par induction sur le nombre k de lignes de la déduction supposée donnée: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. La déduction la plus courte possible possède *une* ligne.

Base de l'induction: $k = 1$

Montrons que si la déduction $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ ne comporte qu'une seule ligne, alors on peut établir une déduction $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$. Dans cette situation la déduction se réduit à α_1 qui est β .

$$1. \quad \alpha_1 \qquad \alpha_1 \text{ est } \beta$$

Trois cas peuvent se présenter:

1. β est un théorème ou un axiome: $\beta \in T$ ou $\beta \in P$
2. β appartient à Γ
3. β est α .

Q u e s t i o n

15. Pourquoi β ne pourrait-il pas résulter de deux ebf par la règle du MP?

Etude du premier cas

β est un axiome ou un théorème: $\beta \in P$ ou $\beta \in T$.

Le métathéorème 2.1 nous dit que si $\beta \in T$ alors $\alpha \supset \beta \in T$ quel que soit α donc, $\alpha \supset \beta \in T$.

Ainsi, si β est un théorème, $\alpha \supset \beta$ l'est également: $\vdash \alpha \supset \beta$. Un théorème est une conclusion obtenue à partir de la classe vide d'hypothèses $\emptyset \vdash \alpha \supset \beta$. L'ensemble vide est contenu dans tout ensemble, il s'ensuit que $\emptyset \subseteq \Gamma$. Par le métathéorème 1.1 nous pouvons donc inscrire $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$. Ainsi, si $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ est une déduction qui ne comporte qu'une ligne, on peut établir une déduction $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$.

Etude du deuxième cas

β appartient à l'ensemble d'hypothèses Γ , on peut donc l'introduire comme première ligne d'une déduction à partir de Γ .

1. β β_1 est β et $\beta \in \Gamma$
2. $\beta \supset (\alpha \supset \beta)$ (A1), α/β , β/α
3. $\alpha \supset \beta$ 2, 1, MP

Ainsi, si β est une des hypothèses de Γ , alors $\alpha \supset \beta$ est une conclusion à partir de l'ensemble Γ : $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$.

Etude du troisième cas

β est α . On a montré (§2.1) que $\alpha \supset \alpha$ est un schéma de théorème quelque que soit α . L'expression $\alpha \supset \alpha$ peut donc être introduite comme la première ligne d'une preuve.

1. $\alpha \supset \alpha$ $\in T$
2. $\alpha \supset \beta$ α est β , il est donc possible de récrire $\alpha \supset \alpha$ en remplaçant l'une ou l'autre des occurrences de α par β .

Ainsi, $\alpha \supset \beta$ est un théorème: $\vdash \alpha \supset \beta$. Comme dans le premier cas, on a $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$ en utilisant le métathéorème 1.1.

Hypothèse d'induction:

Pour toute déduction $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ qui compte au plus k lignes, on peut établir une déduction $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$.

Pas d'induction:

Nous devons montrer que si la déduction $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ compte $k+1$ lignes, on peut établir une déduction $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$. Quatre cas sont à considérer si l'on pose que α_{k+1} est β .

1. β est un axiome ou un théorème: $\beta \in P$ ou $\beta \in T$
2. β appartient à Γ
3. β est α
4. β est une conclusion immédiate de deux ebf qui la précèdent par la règle MP

Les trois premiers cas se traitent de la même manière que précédemment. La seule modification consiste à inscrire tout d'abord une déduction $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ qui compte $k+1$ lignes au lieu d'une seule.

Etude du quatrième cas

L'expression β de la $k+1$ nième ligne est une conséquence immédiate par MP de deux autres expressions α_i et α_j qui la précèdent.

$\{i < k+1 \text{ et } j < k+1\}$

1.	α_1	
2.	α_2	
⋮	⋮	
⋮	⋮	
i.	α_i	
⋮	⋮	
⋮	⋮	
j	α_j	
⋮	⋮	
⋮	⋮	
k+1	α_{k+1}	α_{k+1} est β

L'une des deux ebf (α_i ou α_j) est de la forme «l'autre $\supset \alpha_{k+1}$ ». Il ne peut en être autrement puisque le cas étudié est celui où α_{k+1} est une conséquence immédiate par MP de α_i et α_j (cf. question 14). Supposons que α_j est de la forme $\alpha_i \supset \alpha_{k+1}$. Les indices i et j sont plus petits que $k+1$. Nous sommes donc dans une situation réglée par l'hypothèse d'induction. Cette hypothèse nous permet de savoir que

$$\Gamma \vdash \alpha \supset \alpha_i$$

et

$$\Gamma \vdash \alpha \supset \alpha_j, \text{ mais } \alpha_j \text{ est } \alpha_i \supset \alpha_{k+1}$$

donc

$$\Gamma \vdash \alpha \supset (\alpha_i \supset \alpha_{k+1})$$

Jouons sur cette connaissance que $\alpha \supset \alpha_i$ et $\alpha \supset (\alpha_i \supset \alpha_{k+1})$ sont déductibles de l'ensemble d'hypothèses Γ pour établir une nouvelle déduction.

- | | | |
|----|--|--|
| 1. | $\alpha \supset \alpha$ | β_1 est $\alpha \supset \alpha_i$ et
$\Gamma \vdash \alpha \supset \alpha_i$, hyp. ind. |
| 2. | $\alpha \supset (\alpha_i \supset \alpha_{k+1})$ | β_2 est $\alpha \supset (\alpha_i \supset \alpha_{k+1})$ et
$\Gamma \vdash \alpha \supset (\alpha_i \supset \alpha_{k+1})$,
hyp. ind. |
| 3. | $(\alpha \supset (\alpha_i \supset \alpha_{k+1})) \supset ((\alpha \supset \alpha_i) \supset (\alpha \supset \alpha_{k+1}))$ | (A2) α/α , β/α_i , γ/α_{k+1} |
| 4. | $(\alpha \supset \alpha_i) \supset (\alpha \supset \alpha_{k+1})$ | 3, 2, MP |
| 5. | $\alpha \supset \alpha_{k+1}$ | 4, 1, MP |
| 6. | $\alpha \supset \beta$ | 5, a_{k+1} est β |

Dans cette déduction, le seul ensemble d'hypothèses qui est utilisé est Γ ; il s'ensuit donc que $\alpha \supset \beta$ est déductible de l'ensemble d'hypothèses Γ : $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$.

Ce métathéorème est très intéressant; il permet notamment d'établir des théorèmes en construisant préalablement une déduction. Ce que nous verrons sur un exemple. Il permettra surtout d'interpréter le symbole « \supset » comme «si...alors».

Exemple:

Nous voulons établir le schéma de théorème suivant:

$$\vdash (\sim\beta \supset \sim\alpha) \supset (\alpha \supset \beta)$$

Nous pourrions le faire sans utiliser le métathéorème de la déduction, mais la démarche serait fort longue. Nous allons donc procéder autrement:

- (1) Etablir la conclusion β à partir de l'ensemble d'hypothèses Δ : $\Delta = (\sim\beta \supset \sim\alpha, \alpha)$, puis (2) utiliser deux fois le métathéorème 3.

(1) $\sim\beta \supset \sim\alpha, \alpha \vdash \beta$

- | | | |
|----|---|--|
| 1. | α | $\in \Delta$ |
| 2. | $\sim\beta \supset \sim\alpha$ | $\in \Delta$ |
| 3. | $(\sim\beta \supset \sim\alpha) \supset ((\sim\beta \supset \alpha) \supset \beta)$ | (A3) |
| 4. | $(\sim\beta \supset \alpha) \supset \beta$ | 3, 2, MP |
| 5. | $\alpha \supset (\sim\beta \supset \alpha)$ | (A1), $\alpha/\alpha, \beta/\sim\beta$ |
| 6. | $\sim\beta \supset \alpha$ | 5, 1, MP |
| 7. | β | 4, 6, MP |

(2) Utilisation du métathéorème 3.

si $\sim\beta \supset \sim\alpha, \alpha \vdash \beta$ alors $\sim\beta \supset \sim\alpha \vdash \alpha \supset \beta$

(2') donc $\sim\beta \supset \sim\alpha \vdash \alpha \supset \beta$ (1), Mth. 3

si $\sim\beta \supset \sim\alpha \vdash \alpha \supset \beta$ alors $\vdash (\sim\beta \supset \sim\alpha) \supset (\alpha \supset \beta)$

(2'') donc $\vdash (\sim\beta \supset \sim\alpha) \supset (\alpha \supset \beta)$ (2'), Mth. 3

Exercice

Démontrer les schémas de théorèmes suivants en établissant tout d'abord une déduction, puis en utilisant le métathéorème 3.

1. $\vdash \sim\sim\alpha \supset \alpha$

2. $\vdash \alpha \supset \sim\sim\alpha$

METATHEOREME 4

Dans L^0 , si $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$ alors $\Gamma, \alpha \vdash \beta$.

Il s'agit de la réciproque du métathéorème 3.

Démonstration:

Il s'agit de montrer qu'à partir de la donnée de la déduction $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$

- | | | | | | |
|----|---|---|------------------------|---|--------------------|
| 1. | α_1 | } | chaque α_i soit | { | $\in \Gamma$ |
| 2. | α_2 | | | | $\in P$ ou $\in T$ |
| ⋮ | ⋮ | | | | résulte de MP |
| k. | α_k où α_k est $\alpha \supset \beta$ | | | | |

on peut établir la déduction $\Gamma, \alpha \vdash \beta$.

- | | | | | | |
|----|------------------------------------|---|-----------------------|---|--------------------|
| 1. | β_1 | } | chaque β_i soit | { | $\in \Gamma$ |
| 2. | β_2 | | | | est α |
| ⋮ | ⋮ | | | | $\in P$ ou $\in T$ |
| m. | β_m où β_m est β | | | | résulte de MP |

Formons l'ensemble Δ de la manière suivante: $\Delta = \{\Gamma, \alpha\}$. Le sous-ensemble Γ est contenu dans l'ensemble Δ : $\Gamma \subseteq \Delta$. Par le métathéorème 1.1 on peut donc poser $\Delta \vdash \alpha \supset \beta$, ou écrit autrement: $\Gamma, \alpha \vdash \alpha \supset \beta$. Schématisons cette déduction.

- | | | |
|----|-----------|---|
| 1. | β_1 | β_1 est α_1 |
| 2. | β_2 | β_2 est α_2 |
| ⋮ | ⋮ | |
| k. | β_k | β_k est α_k qui est $\alpha \supset \beta$ |

et poursuivons-la

- | | | |
|-----|---------------|---|
| k+1 | β_{k+1} | β_{k+1} est α , $\alpha \in \Delta$ et $\Delta = \{\Gamma, \alpha\}$ |
| m. | β_m | β_m est β ; k, k+1, MP |

Ainsi, si $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$ alors on peut établir une déduction $\Gamma, \alpha \vdash \beta$.

4. Les règles de la déduction naturelle

Les règles de la déduction naturelle offrent un mode démonstratif plus proche de l'idée que l'on possède de la notion de preuve. Il y a donc quelque intérêt à se demander si ces règles sont disponibles dans L^0 . Puisque les termes primitifs de L^0 sont les symboles \supset et \sim , nous allons voir si leurs règles d'élimination et d'introduction sont dérivables dans le système L^0 .

Elimination de « \supset »: Règle $\supset e$

A la notation près, l'élimination de « \supset » est le modus ponens (MP).

$$\begin{array}{l|l} m & \alpha \supset \beta \\ n & \alpha \\ \hline & \beta \end{array} \quad m, n, \text{MP}$$

Introduction de « \supset »: Règle $\supset i$

Il s'agit d'un corollaire immédiat du métathéorème 3:

$$\text{Si } \Gamma, \alpha \vdash \beta \text{ alors } \Gamma \vdash \alpha \supset \beta$$

Posons $\Gamma = \emptyset$: nous obtenons:

$$\text{si } \emptyset, \alpha \vdash \beta \text{ alors } \emptyset \vdash \alpha \supset \beta$$

Ce que l'on peut aussi écrire:

$$\text{si } \alpha \vdash \beta \text{ alors } \vdash \alpha \supset \beta$$

Cette dernière formulation correspond à l'introduction de « \supset »:

$$\begin{array}{l|l} m & \left| \begin{array}{l} \alpha \\ \vdots \\ \beta \end{array} \right. \\ n & \left| \begin{array}{l} \alpha \supset \beta \end{array} \right. \end{array} \quad m-n, \supset i$$

Elimination de «~»: Règle $\sim e$

Rappelons le schéma de cette règle:

m	α	
n	~α	

	β	m, n, $\sim e$

Il s'agit de démontrer dans L^0 le schéma de déduction suivant:
 $\alpha, \sim\alpha \vdash \beta$.

Démonstration: Posons $\Gamma = \{\alpha, \sim\alpha\}$

- | | | |
|----|----------------------------|------------------|
| 1. | α | ∈ Γ |
| 2. | ~α | ∈ Γ |
| 3. | α ⊃ (~β ⊃ α) | (A1), α/α, β/~β |
| 4. | ~β ⊃ α | 3, 1, MP |
| 5. | ~α ⊃ (~β ⊃ ~α) | (A1), α/~α, β/~β |
| 6. | ~β ⊃ ~α | 5, 2, MP |
| 7. | (~β ⊃ ~α) ⊃ ((~β ⊃ α) ⊃ β) | (A3) |
| 8. | (~β ⊃ α) ⊃ β | 7, 6, MP |
| 9. | β | 8, 4, MP |

Elimination de «~~»: Règle $neg \sim e$

Rappelons le schéma de cette règle:

m	~~α	

	α	m, $neg \sim e$

Il s'agit donc de démontrer dans L^0 le schéma de déduction suivant: $~~\alpha \vdash \alpha$. Démontrons tout d'abord le schéma de théorème: $\vdash ~~\alpha \supset \alpha$.

En effet, si $\vdash \sim\sim\alpha \supset \alpha$, alors par le métathéorème 4 on aura $\sim\sim\alpha \vdash \alpha$, de sorte que si $\sim\sim\alpha$ figure dans une déduction, on pourra aussi écrire α .

Pour alléger la démonstration, nous commencerons par établir deux lemmes. (Un lemme est un théorème—ici un schéma de théorèmes—qui n'a pas grand intérêt en lui-même, mais qui facilite la démonstration d'un théorème important.)

LEMME I

$$\vdash (\alpha \supset (\beta \supset \gamma)) \supset (\beta \supset (\alpha \supset \gamma))$$

Démonstration: Posons $\Gamma = \{\alpha \supset (\beta \supset \gamma), \beta, \alpha\}$

- | | | |
|----|---|--------------|
| 1. | $\alpha \supset (\beta \supset \gamma)$ | $\in \Gamma$ |
| 2. | α | $\in \Gamma$ |
| 3. | $\beta \supset \gamma$ | 1, 2, MP |
| 4. | β | $\in \Gamma$ |
| 5. | γ | 3, 4, MP |

Nous avons obtenu ainsi le schéma de déduction suivant:

a) $\alpha \supset (\beta \supset \gamma), \beta, \alpha \vdash \gamma$

Il suffit alors d'appliquer trois fois le métathéorème 3 pour obtenir successivement:

- | | | |
|----|--|-----------|
| b) | $\alpha \supset (\beta \supset \gamma), \beta \vdash \alpha \supset \gamma$ | a) Mth. 3 |
| c) | $\alpha \supset (\beta \supset \gamma) \vdash \beta \supset (\alpha \supset \gamma)$ | b) Mth. 3 |
| d) | $\vdash (\alpha \supset (\beta \supset \gamma)) \supset (\beta \supset (\alpha \supset \gamma))$ | c) Mth. 3 |

LEMME II

$$\vdash (\alpha \supset \beta) \supset ((\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma))$$

Démonstration: Posons $\Gamma = \{\alpha \supset \beta, \beta \supset \gamma, \alpha\}$

1. $\alpha \supset \beta \quad \in \Gamma$
2. $\alpha \quad \in \Gamma$
3. $\beta \quad 1, 2, \text{MP}$
4. $\beta \supset \gamma \quad \in \Gamma$
5. $\gamma \quad 4, 3, \text{MP}$

Nous avons ainsi obtenu le schéma de déduction suivant:

$$\text{a) } \alpha \supset \beta, \beta \supset \gamma, \alpha \vdash \gamma$$

Il suffit de nouveau d'appliquer trois fois le métathéorème 3 pour obtenir successivement:

- | | |
|---|-----------|
| b) $\alpha \supset \beta, \beta \supset \gamma \vdash \alpha \supset \gamma$ | a) Mth. 3 |
| c) $\alpha \supset \beta \vdash (\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma)$ | b) Mth. 3 |
| d) $\vdash (\alpha \supset \beta) \supset ((\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma))$ | c) Mth. 3 |

Avec l'aide de ces deux lemmes, nous pourrions démontrer le schéma de théorème $\vdash \sim\sim\alpha \supset \beta$ de la façon suivante:

- | | | |
|----|--|--|
| 1. | $(\sim\alpha \supset \sim\sim\alpha) \supset ((\sim\alpha \supset \sim\alpha) \supset \alpha)$ | (A3), β/α , $\alpha/\sim\alpha$ |
| 2. | $\sim\alpha \supset \sim\alpha$ | schéma de théo-
rème p. 47, $\alpha/\sim\alpha$ |
| 3. | $((\sim\alpha \supset \sim\sim\alpha) \supset ((\sim\alpha \supset \sim\alpha) \supset \alpha)) \supset$
$((\sim\alpha \supset \sim\alpha) \supset ((\sim\alpha \supset \sim\sim\alpha) \supset \alpha))$ | Lemme I,
$\alpha/\sim\alpha \supset \sim\sim\alpha$,
$\beta/\sim\alpha \supset \sim\alpha$,
γ/α |
| 4. | $(\sim\alpha \supset \sim\alpha) \supset ((\sim\alpha \supset \sim\sim\alpha) \supset \alpha)$ | 3, 1, MP |
| 5. | $(\sim\alpha \supset \sim\sim\alpha) \supset \alpha$ | 4, 2, MP |
| 6. | $\sim\sim\alpha \supset (\sim\alpha \supset \sim\sim\alpha)$ | (A1), $\alpha/\sim\sim\alpha$,
$\beta/\sim\alpha$ |
| 7. | $(\sim\sim\alpha \supset (\sim\alpha \supset \sim\sim\alpha)) \supset$
$((\sim\alpha \supset \sim\sim\alpha) \supset \alpha) \supset (\sim\sim\alpha \supset \alpha)$ | Lemme II,
$\alpha/\sim\sim\alpha$,
$\beta/\sim\alpha \supset \sim\sim\alpha$,
γ/α |
| 8. | $((\sim\alpha \supset \sim\sim\alpha) \supset \alpha) \supset (\sim\sim\alpha \supset \alpha)$ | 7, 6, MP |
| 9. | $\sim\sim\alpha \supset \alpha$ | 8, 5, MP |

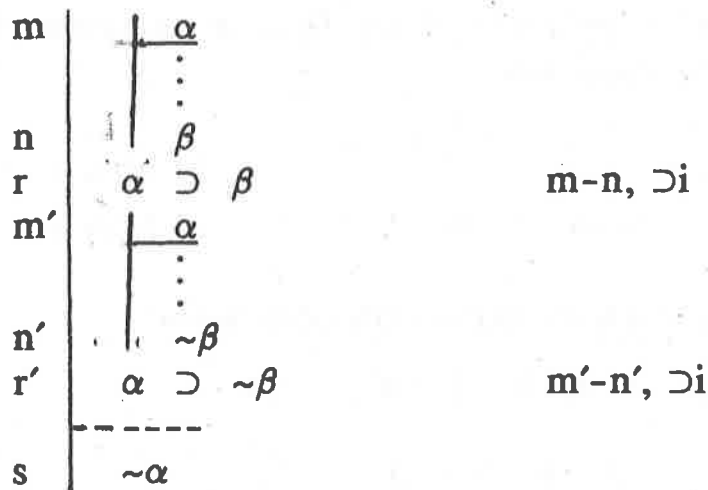
Et par le métathéorème 4, nous obtenons: $\sim\sim\alpha \vdash \alpha$.

Introduction de «~»: Règle $\sim i$

Rappelons le schéma de cette règle:



Nous aurions pu aussi schématiser cette règle ainsi:



Il s'agit donc de démontrer dans L^0 le schéma de déduction suivant:

$$\alpha \supset \beta, \alpha \supset \sim\beta \vdash \sim\alpha$$

Démontrons préalablement le lemme suivant:

LEMME III

$$\vdash (\alpha \supset \beta) \supset (\sim\sim\alpha \supset \beta)$$

Démonstration: Posons $\Gamma = \{\alpha \supset \beta, \sim\sim\alpha\}$

- | | | |
|----|---------------------------------|-------------------------|
| 1. | $\alpha \supset \beta$ | $\in \Gamma$ |
| 2. | $\sim\sim\alpha$ | $\in \Gamma$ |
| 3. | $\sim\sim\alpha \supset \alpha$ | $\in T$ (cf. ci-dessus) |
| 4. | α | 3, 2, MP |
| 5. | β | 1, 4, MP |

Nous avons ainsi obtenu le schéma de déduction suivant:

a) $\alpha \supset \beta, \sim\sim\alpha \vdash \beta$

Il suffit alors d'appliquer deux fois le métathéorème 3 pour obtenir successivement:

- b) $\alpha \supset \beta \vdash \sim\sim\alpha \supset \beta$ a) Mth.3
 c) $\vdash (\alpha \supset \beta) \supset (\sim\sim\alpha \supset \beta)$ b) Mth.3

Démonstration du schéma de déduction pour «~i»:

$$\alpha \supset \beta, \alpha \supset \sim\beta \vdash \sim\alpha$$

Posons $\Gamma = \{\alpha \supset \beta, \alpha \supset \sim\beta\}$

- | | | |
|----|--|--|
| 1. | $\alpha \supset \beta$ | $\in \Gamma$ |
| 2. | $\alpha \supset \sim\beta$ | $\in \Gamma$ |
| 3. | $(\alpha \supset \beta) \supset (\sim\sim\alpha \supset \beta)$ | Lemme III,
$\alpha/\alpha, \beta/\beta$ |
| 4. | $\sim\sim\alpha \supset \beta$ | 3, 1, MP |
| 5. | $(\alpha \supset \sim\beta) \supset (\sim\sim\alpha \supset \sim\beta)$ | Lemme III,
$\alpha/\alpha, \beta/\sim\beta$ |
| 6. | $\sim\sim\alpha \supset \sim\beta$ | 5, 2, MP |
| 7. | $(\sim\sim\alpha \supset \sim\beta) \supset ((\sim\sim\alpha \supset \beta) \supset \sim\alpha)$ | (A3) $\alpha/\beta, \beta/\sim\alpha$ |
| 8. | $(\sim\sim\alpha \supset \beta) \supset \sim\alpha$ | 7, 6, MP |
| 9. | $\sim\alpha$ | 8, 4, MP |

Quant aux règles «hyp», «reit» et «rep», elles découlent de la définition de la déduction.

5. Où il est question d'interprétation et des problèmes qui en découlent

5.1. Préambule

Le travail que nous avons fait jusqu'à maintenant a consisté à décrire la notion de langage formel (vocabulaire, expressions bien formées) et à lui adjoindre un appareil déductif (axiomes et règles en relation avec les notions de preuve et de déduction). Ce que nous avons obtenu est un langage syntaxique organisé en système. Nous nous sommes plus particulièrement attaché au système L^0 . En aucun cas, nous n'avons attribué une quelconque valeur sémantique aux symboles utilisés. Si la création de tel ou tel système relève d'une motivation sémantique, les systèmes présentés ne possèdent que le caractère d'un objet étudié sous l'aspect de sa syntaxe. Il est possible de ne s'intéresser qu'à l'étude d'un langage formel et de son appareil déductif sans passer au niveau d'une démarche interprétative possible. C'est ce que fait la *théorie de la preuve*—proof theory. Mais il est un autre champ d'études possible. Celui qui ouvre la réflexion sur les interprétations possibles d'un langage formel (une interprétation consiste à attribuer une signification aux symboles et aux expressions bien formées du langage formel). La théorie qui s'occupe des interprétations est connue sous le nom de *théorie des modèles*—model theory. Les notions essentielles de cette théorie sont celles d'interprétation, de conséquence sémantique et de validité. C'est de cela que nous allons principalement nous occuper maintenant.

5.2. Quelques définitions fondamentales

DEFINITION 6 - interprétation -

Une interprétation de L^0 est la donnée d'un ensemble de valeurs V , d'une application τ_p^0 qui, à chaque prédicat de degré zéro de L^0 , fait correspondre une et une seule valeur de l'ensemble V , et d'une procédure d'évaluation des expressions bien formées.

Remarques. Nous choisirons un domaine à deux éléments $V = \{\top, \perp\}$. Cela revient à interpréter L^0 comme la logique bivalente. Rien n'empêcherait de considérer des systèmes polyvalents.

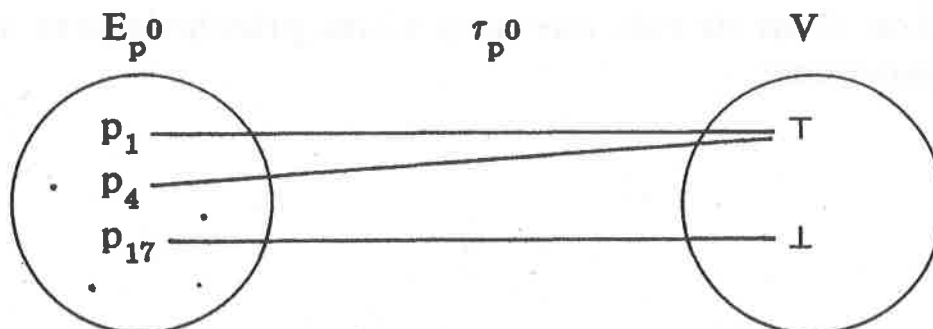
L'ensemble V s'appelle le domaine de valeurs.

L'ensemble E_p^0 désigne l'ensemble des prédicats de degré zéro de L^0 .

L'application τ_p^0 s'appelle une assignation de valeurs, $\tau_p^0 : E_p^0 \rightarrow V$.

Exemple:

Soit l'ensemble E_p^0 ; considérons trois de ses éléments; p_1, p_4, p_{17} . Posons l'interprétation I_1 suivante:



Dans cette interprétation, τ_p^0 assigne la valeur \top aux prédicats p_1 et p_4 et la valeur \perp au prédicat p_{17} .

R e m a r q u e. Le domaine de valeurs et la procédure d'évaluation étant fixés, deux interprétations ne diffèrent que par l'application τ_p , donc par les assignations de valeurs aux p_i .

Q u e s t i o n

16. Le domaine de valeurs et la procédure d'évaluation étant fixés existe-t-il des interprétations différentes de I_1 et qui assignent cependant aux prédicats p_1, p_4, p_{17} les mêmes valeurs que dans l'interprétation I_1 ?
Si oui, combien y en a-t-il?

Il s'agit maintenant de déterminer quelle valeur assigner à une ebf quelconque de L^0 . Si l'expression bien formée se réduit à un symbole de prédicat de degré zéro, l'application τ_p choisie répond à la question. Mais pour une ebf composée il est nécessaire de disposer d'une procédure d'évaluation pour lui assigner une valeur. D'une façon générale, nous allons poser ce qui suit:

DEFINITION 7 - évaluation -

Evaluer une ebf dans L^0 dans une interprétation I , c'est lui faire correspondre un élément de V à l'aide de l'application val suivante:

1. $\text{val}(p_i) = \top$ ssi $\tau_p(p_i) = \top$ dans I
2. $\text{val}(\sim\alpha) = \top$ ssi $\text{val}(\alpha)$ est différente de \top dans I
3. $\text{val}(\alpha \supset \beta) = \top$ ssi $\text{val}(\alpha)$ est différente de \top dans I ou $\text{val}(\beta) = \top$ dans I
4. $\text{val}(\alpha) = \perp$ ssi $\text{val}(\alpha)$ est différente de \top dans I

R e m a r q u e. Cette formulation paraît inutilement artificielle. Elle est formulée cependant ainsi dans la mesure où il existe des domaines de valeurs qui diffèrent de V par leur cardinalité. Un domaine à n valeurs est envisageable, offrant ainsi la possibilité d'une étude des logiques polyvalentes. La valeur

d'une proposition différente de \top ne serait donc pas nécessairement \perp .

Q u e s t i o n

17. Aurions-nous pu offrir une autre définition de l'évaluation par exemple pour le point (3). Et si oui, quelles en auraient été alors les conséquences?

Exemple:

Soit l'ebf $\alpha : \alpha =_{df} \sim p_1 \supset (p_4 \supset p_{17})$ et l'interprétation I_1 définie comme ci-dessus.

$\text{val}(p_1) = \top$	1., déf. 7, τ_p^0
$\text{val}(\sim p_1) = \perp$	2., 4., déf. 7
$\text{val}(p_4) = \top$	1., déf. 7 τ_p^0
$\text{val}(p_{17}) = \perp$	1., 4., déf. 7 τ_p^0
$\text{val}(p_4 \supset p_{17}) = \perp$	3., 4., déf. 7
$\text{val}(\alpha) = \top$	3, déf. 7

La valeur de α dépend donc de l'application τ_p^0 choisie. Il y a donc sens à concevoir toutes les évaluations possibles d'une quelconque ebf. Toute ebf se caractérise d'une part par le nombre de mentions des prédicats de degré zéro qu'elle contient et d'autre part, par le nombre de prédicats différents (par leur indice) qui y sont inscrits. Nous retiendrons ce dernier caractère et nous dirons qu'une ebf α possède la caractéristique n ssi elle possède n prédicats de degré zéro différents.

Exemple:

$\sim(p_1 \supset p_1)$ possède la caractéristique 1

$p_4 \supset p_3$ possède la caractéristique 2

$p_2 \supset (p_3 \supset (p_4 \supset (p_5 \supset p_2)))$ possède la caractéristique 4

A une ebf α de caractéristique n correspondent 2^{n0} interprétations différentes. Mais uniquement 2^n familles nous importent. Chacune de ces familles est caractérisée par une combinatoire particulière—une évaluation—des valeurs assignées aux prédicats de α . Nous opérerons donc une distinction entre les interprétations possibles et les évaluations significatives.

DEFINITION 8 - modèle -

Une interprétation I est un *modèle* pour une ebf α de L^0 si et seulement si l'ebf α est vraie par rapport à I .

Une interprétation I est un modèle pour un ensemble Γ d'ebf de L^0 si et seulement si tous les éléments de Γ sont vrais par rapport à I .

Q u e s t i o n

18. Considérons l'interprétation I_1 proposée précédemment et l'ensemble Γ .

$$\Gamma = \{p_1 \supset p_1, p_4 \supset \sim p_{17}, \sim p_4 \vee p_{17}\}.$$

L'interprétation I_1 est-elle un modèle pour l'ensemble Γ ?

DEFINITION 9 - logiquement valide -

Une ebf α de L^0 est dite *logiquement valide* si et seulement si elle est vraie pour toutes les interprétations. Si α est logiquement valide nous le noterons ainsi: $\vdash_{L^0} \alpha$. Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible nous supprimerons l'indice L^0 .

R e m a r q u e s. Nous préférons l'expression «logiquement valide» à «valide» dans la mesure où le terme «valide» est parfois utilisé pour qualifier une classe particulière d'interprétations. Cette classe permet d'établir si la base axiomatique d'un système formel est indépendante ou non. Cette notion sera définie à la fin du chapitre 3.

Dans L^0 nous pourrions utiliser le terme de «tautologie» à la place de «logiquement valide». Cette identité n'est pas réalisée

dans tous les systèmes formels. Dans le système formel pour le calcul des prédicats, on trouve des ebf logiquement valides qui ne sont pas des tautologies. Une tautologie sous-tend l'idée d'une analyse *finie* de la combinatoire des valeurs de vérité.

Dans la définition 9 nous avons utilisé l'expression «vraie pour toutes les interprétations». Il est clair que cela renvoie à une procédure d'évaluation qui ne considère que les évaluations significatives de l'ebf considérée.

Un résultat: LE METATHEOREME DE COMPACITE

Si tout sous-ensemble fini d'un ensemble d'ebf Γ de L^0 possède un modèle alors Γ possède un modèle.

DEFINITION 10 - M-non contradictoire -

Un ensemble Γ d'ebf de L^0 est M-non contradictoire (non contradictoire par rapport à la théorie des modèles) si et seulement s'il possède au moins un modèle.

- M-contradictoire -

Un ensemble d'ebf Γ de L^0 est M-contradictoire si et seulement s'il ne possède aucun modèle.

Q u e s t i o n s

19. Soit l'ensemble Γ : $\Gamma = \{p_1, p_4 \supset p_{17}\}$. Cet ensemble est-il M-contradictoire?
20. Proposer un ensemble Γ M-contradictoire possédant trois éléments.
21. Comment pourrions-nous appeler les éléments d'un ensemble M-contradictoire?

R e m a r q u e. Il est intéressant de souligner que la M-contradiction d'un ensemble Γ d'ebf d'un langage formel ne fait pas appel à l'appareil déductif du système.

DEFINITION 11 - conclusion sémantique -

Une ebf α est une conclusion sémantique par rapport à un ensemble Γ d'ebf de L^0 si et seulement si aucune interprétation n'existe telle que α est fausse et chaque élément de Γ est vrai. Si α est une conclusion sémantique par rapport à Γ , nous la noterons ainsi: $\Gamma \vDash_{L^0} \alpha$.

Q u e s t i o n

22. Soit l'ensemble Γ_1 : $\Gamma_1 = \{p_1, p_{17} \supset p_{17}, p_4\}$ et α_1 : p_{17}
L'ebf p_{17} est-elle une conclusion sémantique de Γ_1 ?
- Soit l'ensemble Γ_2 : $\Gamma_2 = \{p_1\}$ et α_2 : $p_{17} \supset p_1$
L'ebf $p_{17} \supset p_1$ est-elle une conclusion sémantique de Γ_2 ?

R e m a r q u e. La conclusion sémantique est dans la théorie des modèles le pendant de la conclusion dans la théorie de la preuve. La première est une conséquence sémantique, la seconde une conséquence syntaxique.

Q u e s t i o n s

23. Démontrer que si une interprétation I est un modèle pour l'ensemble Γ_1 : $\Gamma_1 = \{\alpha, \alpha \supset \beta\}$, alors I est aussi un modèle pour β . Il s'agit en fait de démontrer que la règle de L^0 , MP, conserve la propriété d'être modèle.
24. Démontrer le métathéorème suivant:
 $\alpha \supset \beta$ est logiquement valide: $\vDash_{L^0} \alpha \supset \beta$, si et seulement si β est une conclusion sémantique par rapport à α :
 $\alpha \vDash_{L^0} \beta$.

Un résultat: LE METATHEOREME D'INTERPOLATION

Si $\alpha \supset \beta$ est logiquement valide et que les ebf α et β possèdent au moins un symbole de prédicat de degré zéro en commun *alors* il existe une ebf γ de L^0 qui contient tous les symboles de prédicats de degré zéro communs à α

et β et telles que $\alpha \supset \gamma$ et $\gamma \supset \beta$ sont logiquement valides, donc telle que $\vdash_{L^0} \alpha \supset \gamma$ et $\vdash_{L^0} \gamma \supset \beta$.

Nous avons abordé l'étude d'un langage formel et de l'appareil déductif qui lui est associé de deux manières différentes: tout d'abord en le présentant sous un aspect purement syntaxique, puis en lui offrant une dimension sémantique. Il est évident -qu'il s'agit de deux éclairages différents «d'un même objet», et que le logicien doit s'inquiéter de la cohérence de ces deux approches. Il va donc s'intéresser plus particulièrement à deux types de problèmes:

- 1) Etablir que la mise en relation de ces deux approches est cohérente et,
- 2) partant des propriétés qui apparaissent comme fondamentales pour un système formel (celles de non-contradiction, de complétude ou de décidabilité par exemple) étudier si elles appartiennent ou non à tel ou tel système.

Il s'agit donc de mettre en évidence les limites d'un système formel à travers l'analyse des propriétés fondamentales qu'il possède ou ne possède pas.

Avant d'entreprendre une analyse des propriétés fondamentales nous voulons démontrer que tout ce qui est théorème dans L^0 est logiquement valide.

METATHEOREME 5

Tout théorème de L^0 est logiquement valide: si $\vdash_{L^0} \alpha$ alors $\vDash_{L^0} \alpha$.

Démonstration:

Dire que $\alpha \in T$ c'est dire que α est la dernière ligne d'une preuve dont chacune est soit un axiome, soit une conséquence immédiate par la règle MP. Il nous faut alors démontrer que

- (1) Si α est un axiome alors α est logiquement valide
- (2) La règle MP conserve la propriété «d'être logiquement valide».

- (1) Il s'agit de vérifier pour chaque schéma d'axiomes que toutes les évaluations significatives qui lui sont associées sont le «vrai». La vérification est immédiate.
- (2) Il s'agit de démontrer que quels que soient α et β , si $\vdash_{L^0} \alpha$ et $\vdash_{L^0} \alpha \supset \beta$ alors $\vdash_{L^0} \beta$. C'est-à-dire qu'il faut montrer que l'application de MP dans le déroulement d'une preuve conserve la propriété «d'être logiquement valide» (comparer avec la question 23). Supposons que, dans une preuve, l'ebf β résulte de la règle MP des deux ebf α et $\alpha \supset \beta$. Par hypothèse nous avons $\vdash_{L^0} \alpha$ et $\vdash_{L^0} \alpha \supset \beta$. (Ces deux ebf sont logiquement valides.) Supposons que β n'est pas logiquement valide. Cela signifie qu'il existe une interprétation I dans laquelle β est fausse. Si cela est nous avons:

- a) $\text{val}(\alpha \supset \beta) = \top$ dans I
 - b) $\text{val}(\alpha) = \top$ dans I
- } hypothèse
- et
- c) $\text{val}(\beta) = \perp$ dans I.

Par la définition 7, clause (3), nous savons que

$\text{val}(\alpha \supset \beta) = \top$ si et seulement si
 $\text{val}(\alpha)$ est différente de \top dans I

ou

$\text{val}(\beta)$ est \top dans I.

En vertu des points b) et c) et de la définition 7, nous obtenons $\text{val}(\alpha \supset \beta) = \perp$, ce qui est contraire à l'hypothèse a).

Il s'ensuit donc que si $\vdash_{L^0} \alpha$ et $\vdash_{L^0} \alpha \supset \beta$ alors $\vdash_{L^0} \beta$.

Un résultat: METATHEOREME 6

Si α est une conclusion de L^0 relativement à un ensemble Γ d'ebf: $\Gamma \vdash_{L^0} \alpha$, alors α est une conclusion sémantique relativement à Γ : $\Gamma \models_{L^0} \alpha$.

5.3. Consistance et non-contradiction

L'ensemble des systèmes formels concevables est d'une très grande richesse. Nous nous intéresserons uniquement aux systèmes satisfaisant certaines propriétés opératoires. Il y a en effet peu d'intérêt à poser notre regard sur un système dans lequel toute ebf est théorème, comme il n'est guère utile d'étudier des systèmes contradictoires. La recherche se tourne donc vers l'étude de systèmes offrant une «cohérence syntaxique» et, une «non-absurdité sémantique»: des systèmes consistants et non contradictoires. Il est donc fondamental de s'assurer que le système que nous avons présenté possède bien ces qualités-là.

Une qualité syntaxique: la consistance

Dans son remarquable traité de logique, Church rend compte de trois types de consistance qu'un système formel peut posséder. Il dit également de manière très claire les motivations sémantiques qui ont rendu nécessaire la définition de la propriété syntaxique de consistance.

The notion of consistency of a logistic system is semantical in motivation, arising from the requirement that nothing which is logically absurd or self-contradictory in meaning shall be a theorem, or that there shall not be two theorems of which one is the negation of the other. But we seek to modify this originally semantical notion in such a way as to make it syntactical in character (and therefore applicable to a logistic system independently of the interpretation adopted for it). This may be done by defining relative consistency with respect to any transformation by

which each sentence or propositional form A is transformed into a sentence or propositional form A' , the definition (given below) being such that relative consistency reduces to the semantical notion of consistency under an interpretation that makes A' the negation of A . Or we may define absolute consistency by the condition that not every sentence or propositional form shall be a theorem, since in the case of nearly all the systems with which we shall deal it is easy to see that, once we had two theorems which were negations of each other, every sentence and propositional form whatever could be proved.

Or, following Hilbert, we might in the case of particular system select an appropriate particular sentence and define the system as being consistent if that particular sentence is not a theorem. [...] Or if the system has propositional variables, we may define it as being consistent in the sense of Post if a wff consisting of a propositional variable alone is not a theorem.

Turning now to the purely syntactical statement of the matter, we have the following:

(a) A logistic system is consistent with respect to a given transformation by which each sentence or propositional form A is transformed into a sentence or propositional form A' , if there is no sentence or propositional form A such that $\vdash A$ and $\vdash A'$.

(b) A logistic system is absolutely consistent if not all its sentences and propositional forms are theorems.

(c) A logistic system is consistent in the sense of Post (with respect to a certain category of primitive symbols designated as «propositional variables») if a wff consisting of a propositional variable alone is not a theorem.

(Church, 1956, pp. 108-109, 1ère édition 1944.)

Nous lui emprunterons ces définitions.

DEFINITION 12 - consistant relativement à une transformation-

Un système formel est consistant relativement à une transformation donnée par laquelle une ebf α est transformée en une ebf α' s'il n'existe aucune ebf α telle que $\vdash \alpha$ et $\vdash \alpha'$.

Q u e s t i o n

25. Considérer la transformation qui consiste à transformer toute ebf α en l'ebf $\alpha' =df \alpha \supset \sim(\beta \supset \beta)$. Démontrer que L^0 est consistant relativement à cette transformation.

DEFINITION 13 - absolument consistant -

Un système formel est absolument consistant (syntaxiquement consistant, consistant) si toutes ses ebf ne sont pas des théorèmes.

METATHEOREME 7

Le système L^0 est absolument consistant.

Démonstration:

Considérons un prédicat de degré zéro: p_1 par exemple. Il existe une interprétation I dans laquelle son évaluation est fausse: $\text{val}(p_1) = \perp$.

* L'ebf p_1 n'est donc pas logiquement valide: $\text{non } \vdash p_1$ ou $\nVdash p_1$. Utilisons la contraposée du métathéorème 5:

** Si α n'est pas logiquement valide alors α n'est pas un théorème, soit:

$$\nVdash \alpha \Rightarrow \nVdash \alpha$$

Par * et ** nous obtenons $\nVdash p_1$.

Il existe donc dans L^0 au moins une ebf qui n'est pas un théorème. L^0 est donc absolument consistant.

DEFINITION 14 - consistant dans le sens de Post -

- Un système formel est consistant dans le sens de Post si, possédant des prédicats de degré zéro, aucun d'entre eux n'est un théorème.

METATHEOREME 8

Le système L^0 est consistant dans le sens de Post.

Une qualité à motivation sémantique: la non-contradiction

DEFINITION 15 - non contradictoire -

Un système formel qui possède un signe qui sera interprété comme la négation est non contradictoire (consistant relativement à la négation, sémantiquement consistant) s'il ne contient aucune ebf α telle que l'on ait à la fois $\vdash \alpha$ et $\vdash \sim\alpha$.

METATHEOREME 9

Le système L^0 est non contradictoire.

Démonstration:

Considérons une ebf quelconque appartenant à l'ensemble des théorèmes, soit α cette ebf: $\vdash \alpha$. Par le métathéorème 5, α est logiquement valide: $\models \alpha$; et par la définition 9, quelle que soit l'interprétation I envisagée, $\text{val}(\alpha) = \top$. Il s'ensuit donc, par la définition 7 clauses (2) et (4), que $\text{val}(\sim\alpha) = \perp$ et que $\sim\alpha$ n'est pas logiquement valide: $\not\models \sim\alpha$. Avec la contraposée du métathéorème 5, on obtient que $\sim\alpha$ n'est pas un théorème: $\not\vdash \sim\alpha$. L^0 est donc non contradictoire.

R e m a r q u e. Post a été le premier à offrir une démonstration de la consistance et de la non-contradiction de L^0 (thèse de doctorat 1929, publiée notamment in van Heijenoort, 1967, 264-283). La démarche utilisée est de caractère sémantique.

Lukasiewicz (1966, 67-72; 1ère éd., 1929), procède d'une manière «plus» syntaxique.

5.4. La complétude

Avec la notion de complétude, nous abordons un problème fondamental de la réflexion logique. Ce problème relève de la volonté profonde du logicien d'atteindre toutes les vérités de la logique pure. Geoffrey Hunter énonce très simplement les limites actuelles de ce projet:

What do logicians want? The Holy Grail of logic would be a system or set of systems that caught all truths of pure logic. This nobody has yet found. All truths of pure propositional logic then? But they include non-truth-functional logical truths, and the task of systematising these is not yet finished (it is hardly begun). So we ask: «What do we want that we have some hope of getting?» ... an answer is: «All truths of pure truth-functional propositional logic». (Hunter, 1973, p. 93.)

Dans la construction qui précède, où syntaxe et sémantique sont confrontées, le logicien travaille de manière à ce que le domaine des symboles et celui de leur signification soient compatibles entre eux. Cette volonté de mise en relation possède une motivation sémantique «consisting roughly in the intention that the system shall have all possible theorems not in conflict with the interpretation» (Church, 1956, p. 109). Il s'agit ainsi de s'intéresser à des systèmes qui possèdent la propriété de *complétude*.

D'emblée nous sommes confrontés à une difficulté non négligeable. En effet, les logiciens n'ont pas su éviter de mettre sous ce terme de «complétude» des significations différentes. La complétude peut être sémantique comme elle peut être syntaxique, et à l'intérieur même de ces deux catégories, des nuances sont proposées. Le lecteur aura donc à être particulièrement attentif lorsqu'il rencontrera ce terme.

La complétude: le point de vue sémantique

Un système formel—un langage formel et l'appareil déductif qui lui est associé—n'est pas donné en soi. Il doit être construit, et la liberté offerte pour le construire est considérable. Cette liberté est toutefois limitée par notre volonté d'interprétation. En fait, toute la construction syntaxique est continuellement guidée par des motivations sémantiques. Ce n'est qu'en apparence que l'organisation syntaxique s'impose comme première. Construire un système formel, c'est avant tout accommoder une organisation syntaxique à une organisation sémantique, dans une démarche qui veut circonscrire et contrôler les limites qu'un calcul du raisonnement formel peut offrir.

Dans ce chapitre, nous traitons d'un système susceptible d'être interprété comme la logique des propositions bivalentes. Cela a motivé le choix d'une organisation syntaxique particulière. Mais nous voulions plus, nous voulions que tout axiome, tout théorème et toute règle soient en accord avec le rôle que nous comptons leur attribuer: aux axiomes et théorèmes: d'être évalués comme le «vrai»; aux règles: de conserver la vérité. Nous voulions donc construire un système *fondé* (sound). Le système L^0 possède cette propriété-là, ce que montre le métathéorème 5. Mais nous voulions davantage. Nous voulions nous assurer que toute ebf logiquement valide est un théorème, c'est-à-dire démontrer que L^0 est sémantiquement complet. Le terme de complétude recouvre cependant un problème peu souvent abordé et que nous formulerons sous forme de question: en quel sens un système formel est-il complet?

Le serait-il uniquement parce que toute ebf logiquement valide est un théorème? C'est effectivement une solution possible, et c'est souvent ainsi que la complétude sémantique est présentée. Mais cela sous-tend autre chose encore. Que représentent ces ebf logiquement valides, dans quel sens leur collection rend-elle compte d'une complétude et par rapport à quoi le système est-il complet? En vue de construire un système formel L^0 susceptible de représenter la logique des propositions, il est nécessaire de s'assurer que le langage formel proposé est tel que, interprété, il permet de représenter toutes les fonctions

de vérité possibles (celles qui définissent les opérateurs logiques): les quatre opérateurs unaires, les 16 opérateurs binaires, ..., les 2^{2^n} opérateurs n -aires, ... Si nous avons interprété le symbole \sim comme la conditionnelle et le symbole \supset comme la disjonction, nous n'aurions pas pu engendrer toutes les fonctions de vérité de la logique des propositions. Le choix de l'interprétation proposée (p. 67) rend la chose possible.

DEFINITION

Un système formel est complet relativement à l'ensemble de toutes les fonctions de vérité qui sont des tautologies si et seulement si

- a. le langage formel interprété est capable de générer *toutes* les fonctions de vérité;
- b. toute tautologie est un théorème.

Le système L^0 est complet relativement à l'ensemble de toutes les fonctions de vérité qui sont des tautologies.

Nous ne développerons pas plus longuement cet aspect. Notre intention n'était que de souligner le problème que pose la complétude et nous retiendrons la définition suivante, plus conforme à l'usage:

DEFINITION 16 - sémantiquement complet -

Un système formel est sémantiquement complet si et seulement si toutes ses ebf logiquement valides sont des théorèmes: si $\models \alpha$ alors $\vdash \alpha$.

Le système L^0 est sémantiquement complet. Pour le montrer, il faut faire un certain détour.

LEMME

Soit α une ebf de L^0 et p_1, p_2, \dots, p_k ses symboles de prédicat. Soit I une interprétation qui assigne des valeurs de vérité aux différents symboles de prédicat de α .

E x e r c i c e

Vérifier le bien-fondé du lemme en reprenant l'ebf α relativement à l'interprétation I_2 , donnée ainsi:

$$\text{val}(p_1) = \perp, \text{val}(p_3) = \perp \text{ et } \text{val}(p_2) = \top$$

Revenons au lemme:

Démonstration:

Cette démonstration se fait par induction sur le nombre n des connecteurs de α .

Base de l'induction: $n = 0$

Dans ce cas, toute ebf α consiste en un unique symbole de prédicat: soit p_i l'un d'eux

$$n = 0 \Rightarrow \alpha = p_i$$

Il faut prouver que $p_i' \vdash \alpha'$ soit $p_i' \vdash p_i'$

$$\text{Mais } \vdash p_i' \supset p_i'$$

$$\text{donc } p_i' \vdash p_i'$$

Remarque p. 47

Mth. 4

Hypothèse d'induction:

Le lemme est vérifié pour toute ebf qui contient au plus n connecteurs.

Pas d'induction:

Démontrons que le lemme est vérifié si l'ebf α contient $n+1$ connecteurs. L'ebf α peut être de l'une des deux formes suivantes: α est $\sim\beta$ ou α est $\beta \supset \gamma$.

 α est $\sim\beta$

Deux cas sont possibles: (1) $\text{val}(\beta) = \top$ et (2) $\text{val}(\beta) = \perp$.

(1) $\text{val}(\beta) = \top$ et donc $\text{val}(\alpha) = \perp$.

Ceci entraîne que $\beta' = \beta$ et $\alpha' = \sim\alpha$.

L'ebf β possède un connecteur de moins que α , elle possède n connecteurs et entre ainsi dans le champ de l'hypothèse d'induction; cela permet de poser:

p_1', p_2', \dots, p_k'	$\vdash \beta'$	hyp. d'induction
...	$\vdash \beta$	β' est β
...	$\vdash \beta \supset \sim\sim\beta$	schéma de théorème (cf. p. 56)
...	$\vdash \sim\sim\beta$	MP
...	$\vdash \sim\alpha$	α est $\sim\beta$
...	$\vdash \alpha'$	α' est $\sim\alpha$

(2) $\text{val}(\beta) = \perp$ et donc $\text{val}(\alpha) = \top$.

La démarche est analogue à celle de (1).

α est $\beta \supset \gamma$

Deux cas sont de nouveau possibles: (1) $\text{val}(\beta \supset \gamma) = \top$ et
(2) $\text{val}(\beta \supset \gamma) = \perp$.

(1) $\text{val}(\beta \supset \gamma) = \top$, cela entraîne que $\text{val}(\beta) = \perp$ ou que $\text{val}(\gamma) = \top$.

(1.1) $\text{val}(\beta) = \perp$ et $\text{val}(\alpha) = \top$.

Ceci entraîne que $\beta' = \sim\beta$ et $\alpha' = \alpha$.

L'ebf β possède au plus n connecteurs; elle entre ainsi dans le champ de l'hypothèse d'induction. Il s'ensuit que:

p_1', p_2', \dots, p_k'	$\vdash \beta'$	hyp. d'induction
...	$\vdash \sim\beta$	β' est $\sim\beta$
...	$\vdash \sim\beta \supset (\beta \supset \gamma)$	schéma de théorème
...	$\vdash \beta \supset \gamma$	MP
...	$\vdash \alpha$	α est $\beta \supset \gamma$
...	$\vdash \alpha'$	α' est α

R e m a r q u e. Tous les symboles de prédicat qui figurent dans α ne figurent pas dans β . Le cas échéant on utilisera donc le métathéorème 1.1.

$$(1.2) \quad \text{val}(\gamma) = \top \text{ et } \text{val}(\alpha) = \top.$$

Ceci entraîne que $\gamma' = \gamma$ et $\alpha' = \alpha$.

L'ebf γ possède au plus n connecteurs; elle entre ainsi dans le champ de l'hypothèse d'induction. Il s'ensuit que:

p_1', p_2', \dots, p_k'	$\vdash \gamma'$	hyp. d'induction
...	$\vdash \gamma$	γ' est γ
...	$\vdash \gamma \supset (\beta \supset \gamma)$	schéma de théorème
...	$\vdash \beta \supset \gamma$	MP
...	$\vdash \alpha$	α est $\beta \supset \gamma$
...	$\vdash \alpha'$	α' est α

$$(2) \quad \text{val}(\beta \supset \gamma) = \perp$$

Cela entraîne que $\text{val}(\beta) = \top$ et $\text{val}(\gamma) = \perp$.

On a donc $\beta' = \beta$ et $\gamma' = \sim\gamma$. Les ebf β et γ possèdent au plus n connecteurs; elles entrent ainsi dans le champ de l'hypothèse d'induction. Il s'ensuit que:

p_1', p_2', \dots, p_k'	$\vdash \beta'$	hyp. d'induction
...	$\vdash \beta$	β est β'
...	$\vdash \gamma'$	hyp. d'induction
...	$\vdash \sim\gamma$	γ' est $\sim\gamma$
...	$\vdash \beta \supset (\sim\gamma \supset \sim(\beta \supset \gamma))$	schéma de théorème
...	$\vdash \sim\gamma \supset \sim(\beta \supset \gamma)$	MP
...	$\vdash \sim(\beta \supset \gamma)$	MP
...	$\vdash \sim\alpha$	α est $\beta \supset \gamma$
...	$\vdash \alpha'$	α' est $\sim\alpha$

Remarque. En énonçant et en démontrant ce lemme, la notion d'interprétation a été utilisée. Cela ne signifie pas toutefois que ce lemme dépend d'une quelconque interprétation. Il possède une dimension purement syntaxique. Nous pouvons le résumer ainsi: pour toute ebf α composée de prédicats p_i de degré zéro, il est possible d'opérer *un ensemble de transformations syntaxiques* de telle manière que la transformée α' soit une conclusion (syntaxique) relativement à l'ensemble de ses prédicats p_i' .

METATHEOREME 10

L^0 est sémantiquement complet, c'est-à-dire que si $\vDash_{L^0} \alpha$ alors $\vdash_{L^0} \alpha$.

Démonstration:

α est logiquement valide, cela signifie que $\text{val}(\alpha) = \top$ quelle que soit l'interprétation, donc $\alpha' = \alpha$. Soit p_1, p_2, \dots, p_k les symboles de prédicat de α . Utilisons le lemme:

p_1', p_2', \dots, p_k'	$\vdash \alpha'$	lemme
...	$\vdash \alpha$	α est α'

Considérons le prédicat p_k . Deux situations sont possibles:

$$(1) \quad \text{val}(p_k) = \top \text{ et } p_k' = p_k.$$

On obtient ainsi:

$$p_1', p_2', \dots, p_{k-1}', p_k \vdash \alpha$$

et par le métathéorème 3,

$$p_1', p_2', \dots, p_{k-1}' \vdash p_k \supset \alpha$$

$$(2) \quad \text{val}(p_k) = \perp \text{ et } p_k' = \sim p_k.$$

On obtient ainsi:

$$p_1', p_2', \dots, p_{k-1}', \sim p_k \vdash \alpha$$

et par le métathéorème 3,

$$p_1', p_2', \dots, p_{k-1}' \vdash \sim p_k \supset \alpha$$

A partir de (1) et (2) on peut construire la déduction suivante:

$$\begin{array}{ll}
 p_1', \dots, p_{k-1}' & \vdash p_k \supset \alpha \\
 \dots & \vdash \sim p_k \supset \alpha \\
 \dots & \vdash (\beta \supset \alpha) \supset ((\sim \beta \supset \alpha) \supset \alpha) \\
 & \text{schéma de théorème} \\
 \dots & \vdash (p_k \supset \alpha) \supset ((\sim p_k \supset \alpha) \supset \alpha) \quad \beta/p_k \\
 \dots & \vdash \alpha \quad \text{MP deux fois}
 \end{array}$$

Partant de ce résultat,

$$p_1', \dots, p_{k-1}' \vdash \alpha$$

et en opérant de la même manière que précédemment, on obtient en $k-1$ pas le résultat escompté: $\vdash \alpha$.

5.5. La décidabilité

Il arrive parfois d'être convaincu qu'une ebf se doit d'être un théorème sans toutefois pouvoir en offrir la preuve. Il se peut que la non-réalisation de la preuve soit due à notre erreur de jugement; il se peut également que notre intuition soit correcte, mais que néanmoins nous ne parvenions pas à fournir la preuve du théorème. Il est donc intéressant de disposer d'un système formel décidable (cf. déf. 3, p. 35). Il faut donc s'assurer qu'il existe une procédure de décision effective permettant de déterminer par rapport à une ebf quelconque si elle est ou n'est pas un théorème. Cela ne signifie pas pour autant qu'une telle méthode de décision, si elle existe, procure la clé de la démonstration; elle permet seulement de déterminer si une ebf est ou n'est pas un théorème.

METATHEOREME 11

Le système L^0 est décidable.

Démonstration:

Soit une ebf α de L^0 . Elle contient un nombre fini de symboles de prédicats, soit k . Elle admet 2^k interprétations différentes. Il y a deux cas à considérer.

- (1) Pour chacune des interprétations $\text{val}(\alpha) = \top$. Dans ce cas, α est logiquement valide: $\models \alpha$ et par le métathéorème 10, elle est un théorème $\vdash \alpha$.
- (2) Pour une interprétation au moins $\text{val}(\alpha) = \perp$. Dans ce cas, α n'est pas logiquement valide $\not\models \alpha$ et par la contraposée du métathéorème 5, elle n'est pas un théorème: $\not\vdash \alpha$.

Ceci constitue une méthode de décision. et le système L^0 est bien décidable.

5.6. Quelques questions

DEFINITION 17 - catégorique -

Un système formel est catégorique ssi, pour chacune de ses ebf α , on a soit $\vdash \alpha$ soit $\vdash \sim\alpha$.

Q u e s t i o n s

26. Le système L^0 est-il catégorique?
27. J.G. Kemeny (*JSL*, 13, 1948, 16-30) a montré qu'un système formel pouvait être consistant sans être non contradictoire. Mais peut-on dire que si un système formel est non contradictoire, il est nécessairement consistant?
28. Le système L^0 possède trois schémas d'axiomes (cf. p. 46). Aurions-nous pu choisir d'autres schémas d'axiomes? Si oui, quelles précautions aurions-nous dû prendre?

DEFINITION 18 - indépendant -

On dit de la base axiomatique d'un système qu'elle est indépendante ssi chaque schéma pris isolément n'est pas déductible des autres. Les schémas d'axiomes de L^0 sont indépendants.

Q u e s t i o n s

29. La propriété d'indépendance des schémas d'axiomes est-elle indispensable?
30. Si nous avons proposé pour L^0 un quatrième schéma d'axiomes non indépendant des trois autres, aurions-nous obtenu un ensemble de théorèmes égal à celui du système présenté?
31. Aurions-nous pu présenter un système formel pour la logique des propositions ne comportant qu'un seul schéma d'axiomes?

32. Considérer un système L^0 qui possède le même vocabulaire, les mêmes ebf et la même règle que L^0 . Il ne diffère qu'en ceci: en plus des trois schémas d'axiomes de L^0 , il possède un quatrième: A^* . Ce schéma a la particularité d'être un schéma d'ebf non déductible des axiomes dans L^0 . Le système L^0 est-il contradictoire?

Nous terminerons ce chapitre en abordant un problème qui relève de la dimension syntaxique de L^0 . Il s'agit de s'assurer que L^0 est syntaxiquement complet. Si d'un point de vue sémantique la complétude concerne un juste rapport entre théorèmes et tautologies, la perspective syntaxique se rapporte à l'état de saturation de l'ensemble des axiomes du système considéré. On peut dire, de manière intuitive et naïve, qu'un système est syntaxiquement complet, c'est-à-dire saturé, s'il possède l'ensemble de tous les schémas d'axiomes indépendants qu'il est en mesure de contenir. Cette définition n'est pas satisfaisante. Passons donc à une définition plus rigoureuse.

DEFINITION 19 - syntaxiquement complet -

Un système est syntaxiquement complet ssi *aucun schéma d'ebf non prouvable* dans le système ne peut lui être ad-joint comme schéma d'axiomes sans le rendre contradictoire (comparer avec déf. 16).

Afin de démontrer la complétude syntaxique, il est nécessaire de disposer de la définition suivante:

DEFINITION 20 - extension -

Un système S^* est une extension d'un système S ssi:

- (1) S^* a mêmes symboles et mêmes règles que S .
- (2) Tout théorème de S est un théorème de S^* , et pas inversement.

Question

33. Une extension offre quel type de liberté? Autrement dit, que faut-il ajouter à un système formel S pour obtenir une extension?

METATHEOREME 12

Le fragment L^0 de L est syntaxiquement complet.

Démonstration:

Soit α , un quelconque schéma d'ebf non prouvable dans L^0 , et soit $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ ses n composants schématiques distincts. Le schéma α ne peut pas être un schéma de tautologie (contraposée du Mth. 10). Il existe donc une interprétation I pour laquelle $\text{val}(\alpha) = \perp$. Considérons le système L^{0*} dans lequel le schéma α est un schéma d'axiomes (ce n'est pas le cas dans L^0): Dans ce système toute expression résultant de α par substitution d'ebf aux β_i est un axiome. Considérons une telle substitution. Soit γ l'axiome résultant du schéma d'axiomes α par la substitution suivante:

$$\beta_i / p^0 \supset p^0 \text{ si } \text{val}(\beta_i) = \top \text{ relativement à } I.$$

$$\beta_i / \sim(p^0 \supset p^0) \text{ si } \text{val}(\beta_i) = \perp \text{ relativement à } I.$$

L'ebf γ est un théorème (axiome) de L^{0*} .

Par ailleurs, quelle que soit l'interprétation considérée (i.e. $\text{val}(p^0) = \top$ ou $\text{val}(p^0) = \perp$), $\text{val}(\gamma) = \perp$, et ceci, indépendamment de l'extension L^{0*} . Il en résulte (déf. 7, clause 2) que $\text{val}(\sim\gamma) = \top$ quelle que soit l'interprétation. Nous pouvons donc écrire: $\vdash_{L^{0*}} \sim\gamma$. Par le métathéorème 10, il s'ensuit que $\sim\gamma$ est un théorème de L^0 : $\vdash_{L^0} \sim\gamma$. Tout théorème de L^0 est également un théorème de L^{0*} , et donc: $\vdash_{L^{0*}} \sim\gamma$ (déf. 20, clause 2). Ainsi on a dans L^{0*} à la fois $\vdash_{L^{0*}} \gamma$ et $\vdash_{L^{0*}} \sim\gamma$; L^{0*} est donc contradictoire.

Le schéma α était un schéma d'ebf non prouvable quelconque dans L^0 . L^0 est donc syntaxiquement complet.

Q u e s t i o n

34. Montrer que la val(γ) est bien \perp , et ceci quelle que soit l'interprétation.

Insistons une fois encore sur le fait que la complétude syntaxique exige l'addition d'un schéma d'axiomes, et non pas d'un axiome. Cette distinction est importante, dans la mesure où il est possible d'obtenir, en ajoutant un axiome à L^0 , une extension non contradictoire.

LEMME

Si $\sim\alpha$ est une ebf de L^0 telle que $\not\vdash_{L^0} \sim\alpha$, l'extension L^* de L^0 obtenue en ajoutant α aux axiomes de L^0 est non contradictoire.

Démonstration:

Supposons L^* contradictoire (hypothèse absurde).

Il existe alors une ebf β de L^* telle que:

$$(*) \vdash_{L^*} \beta \text{ et } \vdash_{L^*} \sim\beta.$$

Cette contradiction résulte nécessairement de la présence de α comme axiome de L^* .

Par ailleurs, l'ebf suivante est un théorème de L^0 :

$$\vdash_{L^0} (\beta \supset (\sim\beta \supset \sim\alpha))$$

on a donc également (cf. déf. 20):

$$(**) \vdash_{L^*} (\beta \supset (\sim\beta \supset \sim\alpha))$$

Il résulte de (*) et (**) par deux applications de la règle MP que $\vdash_{L^*} \sim\alpha$.

L'expression α est prouvable dans L^* parce que α est un axiome de ce système.

S'il est possible de prouver $\sim\alpha$ dans L^* grâce à la présence de l'axiome α , il est donc possible de déduire $\sim\alpha$ dans L^0 à partir de l'ensemble d'hypothèses Γ : $\Gamma = \{\alpha\}$, i.e.:

$$\alpha \vdash_{L^0} \sim\alpha.$$

On dispose du «théorème» de la déduction dans L^0 . On obtient donc:

$$(+) \vdash_{L^0} \alpha \supset \sim\alpha.$$

Par ailleurs, l'ebf suivante est un théorème de L^0 :

$$(++) \vdash_{L^0} (\alpha \supset \sim\alpha) \supset \sim\alpha.$$

Il résulte de (+) et (++) par application de la règle MP que $\vdash_{L^0} \sim\alpha$.

Ce résultat contredit l'hypothèse du Lemme, hypothèse qui stipule que $\not\vdash_{L^0} \sim\alpha$.

Ainsi, l'extension L^* de L^0 obtenue en adjoignant α aux axiomes de L^0 est non contradictoire.

ANNEXE

PRESENTATION NAIVE DE LA THEORIE DES ENSEMBLES

1. Remarques préliminaires

L'exposé de la théorie des systèmes formels exige une connaissance élémentaire de la théorie des ensembles. En effet, les définitions qui permettent de structurer les systèmes formels ainsi que le déroulement des raisonnements qui met en évidence leurs propriétés, se caractérisent par un usage abondant des notions ensemblistes. C'est la raison pour laquelle nous en rappelons quelques-unes. Bien que naïve, cette présentation conserve une dimension suffisamment opérationnelle pour atteindre l'objectif que nous lui assignons: faciliter l'accès à la compréhension de la théorie des systèmes formels.

Dans cette entreprise, nous sommes d'emblée confrontés à une première difficulté: comment définir la notion d'ensemble? Il nous semble opportun de nous baser sur la définition que propose le créateur de la théorie des ensembles, Georg Cantor.

Unter einer «Menge» verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die «Elements» von M genannt werden) zu einem Ganzen. (Cantor, 1962, p. 282.)

Nous demandons au lecteur d'accepter cette façon de penser la notion d'ensemble et de lui attribuer le caractère d'une notion primitive, comprise intuitivement.

2. Appartenance et inclusion

Lorsqu'il est question d'ensemble, deux relations essentielles sont dégagées; il s'agit de la relation d'appartenance et de celle d'inclusion. Frege fut le premier à distinguer clairement ces deux résultats.

2.1. La relation d'appartenance

Soit M , un ensemble et x , un de ses éléments. La relation de x à M s'écrit $x \in M$ et se lit: x appartient à M ou x est un élément de M . Cette relation se caractérise par les propriétés suivantes:

- elle est intransitive (si x appartient à M et M appartient à F , alors x n'appartient pas à F);
- elle est irreflexive (un élément n'appartient jamais à lui-même);
- elle est asymétrique (si x appartient à M , alors M n'appartient pas à x).

Notre présentation s'inspire de celle présentée dans le système de Russell et Whitehead et ne correspond pas à celui de Zermelo-Fraenkel. En effet, dans ce dernier système, il est légitime d'écrire x appartient à x .

R e m a r q u e. Nous écrivons $x \notin M$ — x n'appartient pas à M — lorsque x n'est pas élément de M .

PROPOSITION 1

Deux ensembles E et F sont *égaux*, $E = F$, s'ils possèdent les mêmes éléments. Dit autrement, pour tout ensemble E et F , on a l'équivalence suivante:

$$E = F \leftrightarrow (\forall x)(x \in E \equiv x \in F).$$

2.2. La relation d'inclusion

Soit deux ensembles E et F ; on dit que E est *contenu dans* F ou E est *une partie de* F ou E est *un sous-ensemble de* F , et on l'écrit $E \subseteq F$ si et seulement si tout élément de E est également un élément de F . La relation d'inclusion est donc conçue sur celle d'appartenance

$$E \subseteq F = \text{df } (\forall x)(x \in E \supset x \in F).$$

Cette relation se caractérise par les propriétés suivantes:

- elle est réflexive (un ensemble E est donc toujours contenu dans lui-même. Il s'agit de l'inclusion au sens large): $E \subseteq E$;
- elle est antisymétrique (un ensemble A est contenu dans un ensemble B , et l'ensemble B est contenu dans l'ensemble A ne se réalise que si A désigne le même ensemble que B);
- elle est transitive (si un ensemble A est contenu dans un ensemble B et l'ensemble B est contenu dans un ensemble C , alors l'ensemble A est contenu dans l'ensemble C).

PROPOSITION 2

Deux ensembles E et F sont *égaux* si on a à la fois $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$. Dit autrement, pour tout ensemble E et F , on a l'équivalence suivante:

$$E = F \leftrightarrow E \subseteq F \wedge F \subseteq E.$$

2.3. Quelques exemples d'ensembles

- 1) $E_1 = \{1, 2, 3, 4\}$
- 2) $E_2 = \{a, b, c, d, e\}$
- 3) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, l'ensemble des entiers naturels.
- 4) $\mathbb{Z} =$ l'ensemble des entiers rationnels; il s'agit de l'ensemble des entiers de signe quelconque.

- 5) Q = l'ensemble des nombres rationnels; il s'agit de l'ensemble des quotients de deux entiers rationnels a et b , a/b , avec b différent de la valeur zéro.
- 6) R = l'ensemble des nombres réels; il s'agit de l'ensemble des nombres de signe quelconque, entiers ou non.

Ces quelques exemples appellent quelques remarques et soulignent d'emblée plusieurs questions.

2.4. Remarques

- 1) L'ordre des éléments d'un ensemble n'importe pas.
- 2) Les éléments d'un ensemble s'inscrivent entre des accolades symétriques $\{, \}$.
- 3) Tout ensemble ne comporte qu'une seule fois la mention d'un de ses éléments.
- 4) Un ensemble se caractérise par le nombre de ses éléments, sa *puissance* ou sa *cardinalité*.
- 5) Deux ensembles sont *égaux* s'ils possèdent les mêmes éléments.
- 6) Deux ensembles sont *équivalents*—*équipotents* ou de *même puissance*—s'ils possèdent le même nombre d'éléments.
- 7) Les notions d'égalité de deux ensembles et d'équivalence de deux ensembles renvoient donc à des propriétés différentes.
- 8) Il n'est pas possible d'inscrire tous les éléments d'un ensemble de puissance infinie. Pour indiquer ce caractère d'infinité, nous inscrivons une suite de points après quelques mentions d'éléments appartenant à l'ensemble:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

2.5. Questions

1. Existe-t-il des ensembles de puissance infinie de nature différente? La réponse est affirmative et pose plusieurs problèmes:
 - Y a-t-il un plus petit infini?
 - Est-il possible d'ordonner ces puissances infinies?
 - Comment établir si des ensembles infinis différents possèdent la même puissance?

Dans la suite de cet exposé, nous reviendrons sur ces différents problèmes.

2. Y a-t-il quelque pertinence à parler d'un ensemble vide? Si l'on accepte qu'un ensemble existe par ses éléments, il est alors difficile de légitimer l'existence de l'ensemble vide. Il sera cependant nécessaire de définir l'objet mathématique: ensemble vide (cf. 3.2).
3. Il existe une relation entre chaque exemple proposé et une propriété qui peut lui être attribuée. Est-il possible de faire correspondre un ensemble à toute propriété? L'intuition nous pousse à répondre par l'affirmative. Considérons un exemple:

Soit la propriété a =df «être un nombre entier et être différent de 1 et n'être divisible que par lui-même».

Dans ce cas, il existe bien un ensemble qui correspond à la propriété a ; il s'agit de l'ensemble des nombres premiers. Considérons maintenant un nouvel exemple:

Soit la propriété b =df «être l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes».

Si nous acceptons l'existence d'un ensemble correspondant à la propriété b , nous serions confrontés au grave problème de la contradiction.

... l'usage du mot «ensemble» est soumis en mathématiques à des limitations que l'intuition n'enseigne pas. (Godement, 1966, p. 45.)

3. Quelques définitions

3.1. Ensemble complémentaire

Considérons un ensemble E , une partie—un sous-ensemble— P de E , et la relation «n'appartient pas à P ». Posons maintenant la définition suivante:

$$C = \text{df } (\forall x)(x \in E \wedge x \notin P).$$

Cet ensemble C est l'ensemble complémentaire de P dans E . Il se note:

$$E - P, \text{ ou } C_E P.$$

PROPOSITION 3

Si P et Q sont deux parties d'un ensemble E alors, si $P \subseteq Q$ alors $C_E Q \subseteq C_E P$.

3.2. L'ensemble vide

Considérons un ensemble E . La relation d'inclusion est réflexive $E \subseteq E$; il est donc possible de se demander quel est le complémentaire de E par rapport à lui-même.

$$C_E E = \text{df } (\forall x)(x \in E \wedge x \notin E)$$

Cette partie un peu particulière de E se nomme l'ensemble vide et s'écrit \emptyset . Cet ensemble, en fait, ne dépend pas de l'ensemble particulier de référence E .

PROPOSITION 4

Quel que soit E , $\emptyset \subseteq E$.

PROPOSITION 5

L'ensemble vide est unique. En effet, si quel que soit E , il existe deux ensembles vides \emptyset_1 et \emptyset_2 , tels que $\emptyset_1 \subseteq E$ et $\emptyset_2 \subseteq E$, alors $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2$ et $\emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$, et donc $\emptyset_1 = \emptyset_2$ (propositions 2 et 4).

3.3. L'opération de réunion

Soit deux ensembles P et Q , leur réunion $P \cup Q$ consiste en l'ensemble de tous les éléments de P ou Q , le «ou» n'étant pas exclusif.

$P \cup Q = \text{df}$ l'ensemble des éléments x tels que $(\forall x)(x \in P \vee x \in Q)$.

Exemples:

1. $\{a, b, c, d\} \cup \{a, e, f\} = \{a, b, c, d, e, f\}$
2. $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$
3. $\emptyset \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$
4. $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\} \cup \{3, 6, 9, 12, \dots\} = \{2, 3, 6, 8, 9, 10, 12, \dots\}$

Quelques propriétés de l'opération de réunion:

1. Elle est commutative: $P \cup Q = Q \cup P$
2. Elle est associative: $(P \cup Q) \cup R = P \cup (Q \cup R)$
3. Elle est idempotente: $E \cup E = E$

Quelques résultats:

1. Pour tout ensemble E , $E \cup \emptyset = E$
2. Pour tout ensemble P, Q , $P \cup Q = Q$ ssi $P \subseteq Q$
3. Pour tout ensemble P, Q , $P \subseteq P \cup Q$ et $Q \subseteq P \cup Q$

3.4. L'opération d'intersection

Soit deux ensembles E et F , leur intersection $E \cap F$ consiste en l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à la fois à E et à F .

$E \cap F$ =df l'ensemble de tous les éléments x tels que $(\forall x)(x \in E \wedge x \in F)$.

Exemples:

1. $\{a, b, c, d\} \cap \{a, e, f\} = \{a\}$
2. $\{1\} \cap \{2\} = \emptyset$
3. $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$
4. $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\} \cap \{4, 8, 12, 16, \dots\} = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$

Quelques propriétés de l'opération d'intersection:

1. Elle est commutative: $E \cap F = F \cap E$
2. Elle est associative: $E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G$
3. Elle est idempotente: $E \cap E = E$

Quelques résultats:

1. Pour tout ensemble E , $E \cap \emptyset = \emptyset$
2. Pour tout ensemble E et F , $E \cap F \subseteq F$ et $E \cap F \subseteq E$
3. Pour tout ensemble E et F , $E \cap F = E$ ssi $E \subseteq F$
4. Les opérations de réunion et d'intersection sont distributives l'une par rapport à l'autre:
 - 4.1. $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$
 - 4.2. $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$

3.5. Ensemble des parties d'un ensemble

Il est toujours possible de considérer les parties d'un ensemble comme des entités à part entière, et de les appréhender à leur tour comme les éléments d'un ensemble. Nous avons vu qu'un ensemble est toujours une partie de lui-même (cf. 2.2) et

que l'ensemble vide est contenu—est partie—de tout ensemble (proposition 4). Il est souvent utile d'envisager toutes les parties d'un ensemble donné. Posons la définition de l'ensemble des parties d'un ensemble.

Pour tout ensemble E , il existe un et un seul ensemble qui correspond à l'ensemble des parties de E . Cet ensemble s'écrit $\mathcal{P}(E)$; il est conçu ainsi: les parties de E sont les éléments de $\mathcal{P}(E)$. Dit autrement, pour toute partie P de E , on a l'équivalence suivante:

$$P \in \mathcal{P}(E) \leftrightarrow P \subseteq E.$$

Exemple:

Considérons l'ensemble fini E : $E = \{a, b, c\}$.

Nous savons que $E \subseteq E$ et $\emptyset \subseteq E$.

Nous pouvons donc déjà poser: $E \in \mathcal{P}(E)$ et $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$.

Construisons les autres parties de E .

$$P_1 = \{a\}$$

$$P_2 = \{b\}$$

$$P_3 = \{c\}$$

$$P_4 = \{a, b\}$$

$$P_5 = \{a, c\}$$

$$P_6 = \{b, c\}$$

Ces huit parties de E épuisent tous les cas possibles.

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

R e m a r q u e. L'ensemble E est de cardinalité 3—il possède trois éléments; l'ensemble des parties de E , $\mathcal{P}(E)$, possède huit éléments. Le rapport de ces deux cardinalités est le suivant:

$$2^3 = 8 [2^{\text{card}(E)} = \text{card}(\mathcal{P}(E))].$$

PROPOSITION 6

Pour tout ensemble E de cardinalité n , $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des parties de E , $\mathcal{P}(E)$, possède la cardinalité 2^n .

Démonstration par induction sur le nombre n d'éléments d'un ensemble.

Base de l'induction: $n = 0$

Ce cas est trivial; il s'agit en effet de vérifier que l'ensemble des parties de l'ensemble vide—l'ensemble qui possède 0 élément—est bien de puissance 1.

$\mathcal{P}(\emptyset) = \emptyset$; cet ensemble possède bien un et un seul élément, l'ensemble vide, et $2^0 = 1$.

Hypothèse d'induction: $n = k$

Acceptons dans ce cas que quel que soit l'ensemble E de cardinalité k , l'ensemble de ses parties possède la cardinalité 2^k .

Pas d'induction: $n = k+1$

Dans ce cas, il s'agit de vérifier que, sur la base de l'hypothèse d'induction, la proposition s'applique également pour tout ensemble de cardinalité $k+1$.

Soit E un ensemble quelconque possédant $k+1$ éléments.

$$E = \{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}\}$$

Considérons le sous-ensemble F de E de cardinalité k .

$$F = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

L'ensemble F tombe sous l'hypothèse d'induction; cela signifie que l'ensemble des parties de F , $\mathcal{P}(F)$, est de cardinalité 2^k .

Il est possible maintenant de construire l'ensemble des parties de E , $\mathcal{P}(E)$, en considérant les parties de F en conjonction ou non avec l'élément x_{k+1} . F possède 2^k parties différentes; il y a donc $2^k \cdot 2$ parties contenues dans

E. L'ensemble des parties de E, $\mathcal{O}(E)$, est donc bien de cardinalité $2^k \cdot 2 = 2^{k+1}$.

Le raisonnement par induction ou par récurrence joue un grand rôle dans les processus démonstratifs. Il peut paraître quelque peu arbitraire. En fait, il s'appuie sur un «principe d'héritage» d'une propriété attachée aux entiers naturels. Ce principe repose sur la proposition suivante:

PROPOSITION 7

Si $p(k)$ est une propriété et k est une variable prenant valeur sur \mathbb{N} et
 $p(0)$ est vraie et $p(k)$ entraîne $p(k+1)$
 alors, $p(n)$ est vraie pour tout n , $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration:

Considérons l'ensemble V des entiers naturels tel que la propriété $p(n)$ soit vraie et montrons que l'ensemble V est égal à \mathbb{N} .

Raisonnons par l'absurde et supposons que l'ensemble V n'est pas égal à \mathbb{N} , c'est-à-dire que l'ensemble complémentaire de V par rapport à \mathbb{N} est un ensemble F non vide; $C_{\mathbb{N}}V = F$ et $F \neq \emptyset$. F est un sous-ensemble des entiers naturels. Ce sous-ensemble possède un plus petit élément que nous désignerons par a .

L'ensemble des éléments de F ne vérifie pas la propriété $p(n)$, $p(a)$ est donc fausse (*).

Ce plus petit élément a ne peut pas être égal à 0 puisque par hypothèse nous acceptons que $p(0)$ est vraie et donc que $0 \in V$. Il s'ensuit que $a \geq 1$, qu'il est possible d'écrire $a = k + 1$ (**), pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Mais k ne peut pas appartenir à F car nous avons choisi a comme le plus petit nombre entier naturel appartenant à F . Ce nombre k appartient donc à V et $p(k)$ est vraie.

Par hypothèse, $p(k)$ entraîne $p(k+1)$. $p(k)$ étant vraie, $p(k+1)$ l'est également. Mais $p(k+1)$ est $p(a)$, (**), $p(a)$ est donc vraie (***). Les assertions (*) et (***) sont en con-

tradiction. L'hypothèse absurde, V n'est pas égal à N , conduit à une contradiction.

V est donc égal à N et la proposition 7 est ainsi démontrée.

R e m a r q u e. L'ensemble des parties d'un ensemble E est un ensemble. Il est donc possible de parler de l'ensemble des parties de l'ensemble des parties de E , $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, comme il est possible de poursuivre ce processus d'engendrement d'ensemble des parties de ...

Exemples:

$$1. \quad E = \{a, b\} \qquad \text{card}(E) = 2$$

$$1.1. \quad \mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \qquad \text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^2 = 4$$

$$1.2. \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}, \\ \{\emptyset, \{b\}\}, \{\emptyset, \{a, b\}\}, \{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \{a, b\}\}, \\ \{\{b\}, \{a, b\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}, \\ \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}, \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}, \{\{a, b\}\}, \\ \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \qquad \text{card}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))) = 2^4 = 16$$

$$2. \quad \text{Considérons l'ensemble vide } \emptyset: \qquad \text{card}(\emptyset) = 0$$

$$2.1. \quad \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \qquad \text{card}(\mathcal{P}(\emptyset)) = 1$$

$$2.2. \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \qquad \text{card}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = 2^1 = 2$$

$$2.3. \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\ \text{card}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))) = 2^2 = 4$$

$$\text{card}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))))) = 2^4 = 16$$

⋮

3.6. Vecteur

PROPOSITION 8

On appelle vecteur à n arguments a_1, a_2, \dots, a_n , l'objet a_1, a_2, \dots, a_n énoncé dans cet ordre. La notion d'ordre ou de «précédence» caractérise donc un vecteur. On écrit cet objet ainsi:

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle.$$

PROPOSITION 9

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs arguments correspondant sont égaux.

$$\begin{aligned} \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle &= \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle \\ &\text{ssi} \\ a_1 &= b_1 \\ a_2 &= b_2 \\ &\vdots \\ a_n &= b_n \end{aligned}$$

Insistons sur le fait que l'ordre dans lequel les arguments d'un vecteur sont inscrits est essentiel. Cela n'est pas le cas pour un ensemble.

$$\begin{aligned} \langle a_1, a_2, a_3 \rangle &\neq \langle a_1, a_3, a_2 \rangle \\ &\text{MAIS} \\ \{a_1, a_2, a_3\} &= \{a_1, a_3, a_2\} \end{aligned}$$

Il est possible d'exprimer un vecteur à n arguments de manière ensembliste.

$$n = 2: \langle a, b \rangle = \text{df } \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

$$\begin{aligned} n = 3: \langle a, b, c \rangle &= \text{df } \langle \langle a, b \rangle, c \rangle \\ \langle \langle a, b \rangle, c \rangle &= \{\{\langle a, b \rangle\}, \{\langle a, b \rangle, c\}\} = \\ &= \underbrace{\{\{\{a\}, \{a, b\}\}\}}_{\text{}} \underbrace{\{\{\{a\}, \{a, b\}\}, c\}}_{\text{}} \end{aligned}$$

La relation d'ordre ou de «précédence» d'un vecteur est ainsi projetée sur l'organisation des parties d'un ensemble: ces parties possèdent une hiérarchie ordonnée par l'inclusion.

Un vecteur à deux arguments est souvent appelé *un couple*, un vecteur à trois arguments *un triplet* et un vecteur à n arguments un *n -uple*.

3.7. Ensemble produit

PROPOSITION 10

Il est toujours possible, à partir de deux (ou plusieurs ensembles E et F , de former un nouvel ensemble G , l'ensemble produit de E et F . Cet ensemble G s'écrit $E \times F$. Les éléments de G sont définis ainsi:

$g \in G$ ssi il existe e et f , $e \in E$, $f \in F$ et $g = \langle e, f \rangle$.

Exemples:

$$\begin{aligned} 1. \quad E &= \{a, b, c\} \\ F &= \{b, d\} \\ G_1 &= E \times F \\ &= \{\langle a, b \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, d \rangle\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad G_2 &= F \times E \\ &= \{\langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle d, a \rangle, \langle d, b \rangle, \langle d, c \rangle\} \end{aligned}$$

! ATTENTION: $G_1 \neq G_2$

$$\begin{aligned} 3. \quad G_3 &= E \times E \text{ (noté également } E^2) \\ &= \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, b \rangle, \\ &\quad \langle c, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, c \rangle\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad G_4 &= N \times N \times N \text{ (} N^3) \\ &= \{\langle 0, 0, 0 \rangle, \langle 0, 0, 1 \rangle, \langle 0, 1, 0 \rangle, \langle 1, 0, 0 \rangle, \\ &\quad \langle 0, 0, 2 \rangle, \langle 0, 2, 0 \rangle, \langle 2, 0, 0 \rangle, \langle 0, 0, 3 \rangle, \dots\} \end{aligned}$$

R e m a r q u e. $E \times E \times E \neq E \times (E \times E) \neq (E \times E) \times E$

Exemples: $E = \{a, b\}$

$$E^3 = \{\langle a, a, a \rangle, \langle a, a, b \rangle, \langle a, b, a \rangle, \langle a, b, b \rangle, \langle b, b, b \rangle, \langle b, b, a \rangle, \langle b, a, b \rangle, \langle b, a, a \rangle\}$$

$$E \times E^2 = \{\langle a, \langle a, a \rangle \rangle, \langle a, \langle a, b \rangle \rangle, \langle a, \langle b, a \rangle \rangle, \langle a, \langle b, b \rangle \rangle, \langle b, \langle a, b \rangle \rangle, \langle b, \langle b, a \rangle \rangle, \langle b, \langle a, a \rangle \rangle, \langle b, \langle b, b \rangle \rangle\}$$

$$E^2 \times E = \{\langle \langle a, a \rangle, a \rangle, \langle \langle a, b \rangle, a \rangle, \langle \langle b, a \rangle, a \rangle, \langle \langle b, b \rangle, a \rangle, \langle \langle a, b \rangle, b \rangle, \langle \langle b, a \rangle, b \rangle, \langle \langle a, a \rangle, b \rangle, \langle \langle b, b \rangle, b \rangle\}$$

R e m a r q u e s. Cette organisation de produits d'ensembles est intéressante à plusieurs égards. En effet, elle offre la possibilité de représenter en extension relations et opérations. Avant de le montrer, rappelons brièvement la distinction entre «compréhension» et «extension». Il est possible de définir un concept en proposant l'ensemble des caractères qui appartiennent à ses éléments. Il s'agit du point de vue en «compréhension» (l'influence anglo-saxonne impose de plus en plus le terme «intensionnel»—avec *s*). Dans ce cas, «être un nombre premier» se présente sous les caractéristiques suivantes:

- être un nombre entier naturel
- être différent de 1
- être divisible uniquement par 1 et par lui-même.

Le point de vue extensionnel procède d'une autre manière. Un concept se présente sous l'aspect de l'ensemble des éléments qu'il subsume. Dans cette appréhension, «être un nombre premier» correspond à l'ensemble suivant: $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$. L'approche extensionnelle a été très profitable aux logiciens. Elle permet de surmonter les difficultés d'une démarche conçue sur la «compréhension», en offrant la possibilité d'un calcul efficace.

Exemples:

1. Considérons l'ensemble des couples suivant:

$$E = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle \}$$

Il correspond à la relation exprimée en compréhension ainsi: «être strictement plus petit que», relativement à l'univers de référence $\{1, 2, 3, 4\}$. L'ensemble E est la représentation en extension de cette relation. E est contenu dans l'ensemble produit $N \times N$.

2. Soit $F = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle n, n \rangle, \dots \}$

Cet ensemble est la représentation extensionnelle de la relation d'égalité dans N ; la définition de cette égalité en serait la description en compréhension. F est également contenu dans l'ensemble produit $N \times N$.

3. Les opérations élémentaires sont si fortement ancrées dans nos habitudes de pensée qu'elles paraissent absolument évidentes. Les définir semble parfois même une ineptie. Et cependant, il ne s'agit pas du tout d'une question triviale. Ces opérations peuvent être appréhendées d'une manière relativement simple à travers leur représentation extensionnelle.

Considérons l'addition; sa représentation extensionnelle est un ensemble infini de vecteurs.

$$A = \{ \langle \langle 0, 0 \rangle, 0 \rangle, \langle \langle 0, 1 \rangle, 1 \rangle, \langle \langle 1, 0 \rangle, 1 \rangle, \langle \langle 0, 2 \rangle, 2 \rangle, \langle \langle 2, 0 \rangle, 2 \rangle, \dots, \langle \langle 4, 7 \rangle, 11 \rangle, \dots \}$$

Chaque élément de A est un vecteur composé de deux arguments dont le premier est lui-même un couple (il représente les termes d'une addition dans N), et le second est un élément de N (il représente la somme des termes qui lui sont associés).

A est contenu dans l'ensemble produit $N^2 \times N$.

4. L'infini

Dans les pages précédentes, nous affirmions que deux ensembles sont équivalents—équipotents—s'ils possèdent le même nombre d'éléments. Dans le cas d'ensembles finis, il est aisé de contrôler l'équipotence ou la non-équipotence entre deux ensembles. Une méthode possible consisterait par exemple à «barrer» simultanément un élément de chaque ensemble et à observer si, lorsque nous avons épuisé tous les éléments d'un ensemble, il en reste quelques-uns dans l'autre.

Dans le cas d'ensembles infinis, le problème est tout autre. Pensez au problème suivant relativement simple:

Soit N , l'ensemble des entiers naturels.

Considérons l'ensemble P constitué de tous les nombres pairs de N . L'ensemble P est strictement contenu dans N (il n'est pas égal à N). Posons-nous maintenant la question suivante: P est-il ou non équipotent à N ? Notre perception des «grandeurs ou quantités» nous engagerait à répondre par la négative alors que la réponse positive est la bonne. Il existe en effet une correspondance biunivoque entre ces deux ensembles (cf. 4.2). Le domaine de l'infini offre des résultats qui échappent totalement à l'entendement des notions communes.

Plusieurs questions se posent :

- Comment définir un ensemble fini?
- Comment définir un ensemble infini?
- Comment considérer l'existence de l'infini?

PROPOSITION 11

Un ensemble E est fini si et seulement si le cardinal de E n'est pas égal au cardinal de E auquel il est additionné le nombre 1.

$$\text{card}(E) \neq \text{card}(E) + 1$$

ou dit autrement: si et seulement si le seul ensemble équipotent à E et contenu dans E est E lui-même.

Cette définition laisse présager que, d'une part, l'addition des cardinalités infinies ne répond plus aux critères de notre bonne vieille arithmétique et, d'autre part, les ensembles infinis possèdent des sous-ensembles propres qui leur sont équipotents. (Un sous-ensemble propre d'un ensemble E est un sous-ensemble strictement contenu dans l'ensemble E .)

PROPOSITION 12

Un ensemble est infini s'il n'est pas fini (définition par la «négative»).

Un ensemble est infini s'il est équipotent à un de ses sous-ensembles propres, c'est-à-dire:

$$\text{si } \text{card}(E) = \text{card}(E) + 1$$

(définition «positive»).

Lorsqu'on aborde l'étude des ensembles infinis, on s'éloigne radicalement de l'aperception intuitive que l'on attribue à la notion d'ensemble.

PROPOSITION 13

L'existence naïve d'un ensemble infini manque de limpidité. On distingue deux natures d'infini:

L'infini actuel: il s'agit de la notion d'infinitude perçue simultanément dans la pensée;

L'infini potentiel: il s'agit de la notion d'infinitude conçue sur la possibilité d'augmenter toute grandeur donnée.

L'«existence mathématique» d'ensembles infinis est imposée par un axiome propre de la mathématique.

Abordons maintenant la démarche permettant de rendre compte de l'équipotence ou non de deux ensembles. Pour ce faire, nous rappelons de manière très générale ce qu'est une application.

4.1. Application

Une application est une opération de mise en correspondance d'éléments d'un ensemble dans un autre et soumise à certaines conditions particulières. Cela nécessite donc l'existence d'ensembles sur lesquels opérer cette mise en relation. Il y a deux manières de l'exprimer.

1. En compréhension: il s'agit de formuler cette correspondance en précisant les propriétés (ou le calcul qui la fonde).
2. En extension: il s'agit d'inscrire un ensemble de couples d'éléments qui rend compte de cette correspondance.

Proposons un exemple de nature à mieux faire comprendre les choses.

Soit deux ensembles A et B:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{1, 0\}$$

Proposons l'application de A dans B suivante:

1. Définition en compréhension:
A chaque élément pair de A correspond l'élément 0 de B et à chaque élément impair de A correspond l'élément 1 de B.
2. Définition en extension:
{<2, 0>, <4, 0>, <6, 0>, <1, 1>, <3, 1>, <5, 1>}

Que l'on choisisse l'une ou l'autre de ces représentations, nous définissons la même application. Il est cependant une différence non négligeable entre ces deux formulations. En effet, la première fait appel à la notion de correspondance pour définir la notion d'application, provoquant ainsi un sentiment de gêne dû à une définition circulaire. La seconde est plus rigoureuse. Nous nous contenterons cependant d'utiliser l'approche en compréhension lorsque nous opérerons avec les applications.

PROPOSITION 14

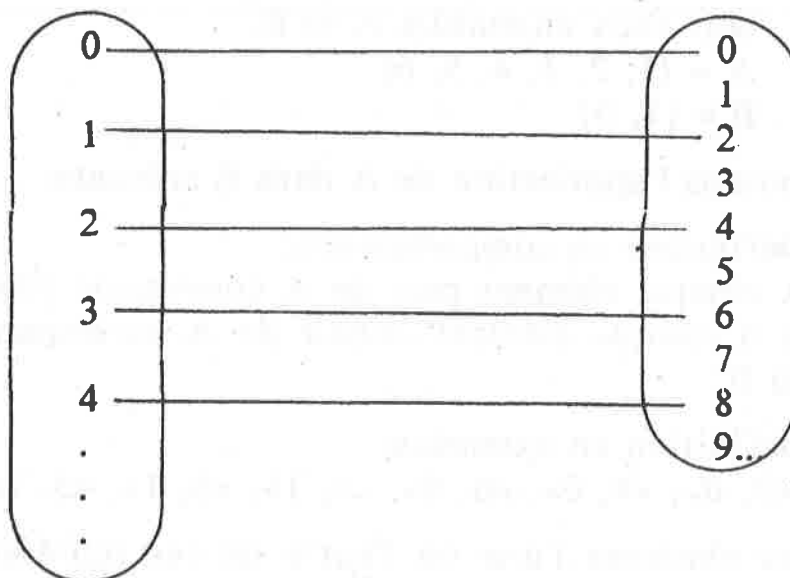
Une application d'un ensemble A dans un ensemble B est une mise en correspondance telle que: à tout élément de A correspond *un et un seul* élément de B.

L'ensemble A est appelé ensemble de départ, et l'ensemble B ensemble d'arrivée. Les éléments de B qui sont pris en considération par l'application constituent l'ensemble image.

Exemple:

$A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$

mise en correspondance «être en relation avec son multiple de deux» [$(y = 2 \cdot x)$ où $x \in A$ et $y \in B$]



ou $\{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 4, 8 \rangle, \dots \} \subseteq A \times B$.

Remarques.

- Tous les éléments de l'ensemble de départ possèdent une et une seule image dans l'ensemble d'arrivée.
Il n'est pas nécessaire qu'un élément de l'ensemble d'arrivée soit image d'un élément de l'ensemble de départ.

Il est commode de donner un nom à la «mise en correspondance» d'une application. A cette fin, nous utiliserons une lettre minuscule f , g , h .

Il est possible de caractériser les applications selon l'organisation de l'ensemble des images et le(s) correspondant(s) de départ, ainsi que la relation entre ensemble image et ensemble d'arrivée.

PROPOSITION 15

Une application f de A dans B ($A \rightarrow B$) est *surjective* si et seulement si
pour tout y appartenant à B , il existe au moins un x appartenant à A tel que $y = f(x)$, donc $f(A) = B$.

PROPOSITION 16

Une application f de A dans B ($A \rightarrow B$) est *injective* si et seulement si
pour tout y appartenant à B , il existe au plus un x appartenant à A tel que $y = f(x)$.

PROPOSITION 17

Une application f de A dans B ($A \rightarrow B$) est *bijjective* si et seulement si
pour tout y appartenant à B , il existe un et un seul x appartenant à A tel que $y = f(x)$.

Exemples:

1. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, f : «être le carré de», $y = x^2$
 $f: A \rightarrow B$ est une application injective.
2. L'exemple de la page 111 est une application surjective.
3. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{C}_N^0$
 f : «être le résultat de l'addition d'une unité», $y = x + 1$
 $f: A \rightarrow B$ est une application bijective.

4.2. Mise en correspondance d'ensembles infinis

Postuler la possibilité de mettre en correspondance des ensembles infinis nécessite d'accepter l'existence mathématique d'ensembles infinis, et plus que cela, une norme inférieure susceptible d'ancrer la «plus petite puissance».

PROPOSITION 18

Un ensemble infini ayant la propriété d'avoir la «plus petite puissance» possible de l'infini possède la puissance du dénombrable (ou, plus simplement est dénombrable).

Cette définition n'est qu'apparente, En effet, il n'est rien dit de cette «plus petite puissance» de l'infini. Il est donc nécessaire de s'en donner un modèle de référence.

PROPOSITION 19

L'ensemble des nombres entiers naturels N possède la puissance du dénombrable.

PROPOSITION 20

Tout ensemble équipotent à N possède la puissance du dénombrable.

R e m a r q u e. On attribue un nom à cette plus petite puissance de l'infini. La première lettre de l'alphabet hébreux—aleph—indiqué de 0 a été choisie pour cela: \aleph_0 .

Montrer qu'un ensemble infini E possède la puissance du dénombrable consiste donc à vérifier l'existence d'une application bijective entre E et N .

Cantor a réalisé que beaucoup d'ensembles infinis étaient équipotents à l'ensemble des nombres entiers naturels. Plus que cela, il a élaboré une méthode pour le montrer. Illustrons cette méthode en vérifiant que l'ensemble des entiers rationnels positifs Q^+ possède la puissance du dénombrable.

$\frac{1}{1}$	\longrightarrow	0
$\frac{2}{1}$	\longrightarrow	1
$\frac{1}{2}$	\longrightarrow	2
$\frac{1}{3}$	\longrightarrow	3
$\frac{2}{2}$	\longrightarrow	4
\vdots		

Cette mise en correspondance établit une application bijective entre les éléments de \mathbb{Q}^+ et \mathbb{N} . L'ensemble \mathbb{Q}^+ est donc dénombrable. L'ensemble \mathbb{Q}^+ , en apparence plus «dense» que \mathbb{N} , possède cependant la même puissance que celui-ci.

Il existe des ensembles infinis d'une cardinalité plus grande que celle du dénombrable. Considérons l'ensemble E des nombres réels compris entre 0 et 1 exprimés sous la forme de leur développement décimal et imaginons de les organiser de telle manière qu'à chacun d'eux correspond un nombre entier naturel.

0,45821...	\rightarrow	0
0,32789...	\rightarrow	1
0,18327...	\rightarrow	2
0,64853...	\rightarrow	3
0,01234...	\rightarrow	4
etc. ...		
\vdots		

Construisons maintenant un nombre réel de telle manière qu'il diffère

- de la première décimale du nombre associé à 0;
- de la deuxième décimale du nombre associé à 1;
- de la troisième décimale du nombre associé à 2;
- etc. ...

Quelle que soit la correspondance établie, ce nombre n'est en rapport avec aucun nombre des entiers naturels. Il n'est donc pas possible de concevoir une application biunivoque entre E et N. La cardinalité de E—comme celle de R du reste—est ainsi plus grande que celle de N: $\text{card}(R) = 2^{\aleph_0}$, on l'appelle la puissance du continu. Cantor avait établi ce résultat. Il avait également ordonné une suite de cardinalités possibles conçue de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \text{card}(N) &= \aleph_0 \\ \text{card}(\mathcal{P}(N)) &= \aleph_1, \aleph_1 > \aleph_0 \\ \text{card}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(N))) &= \aleph_2, \aleph_2 > \aleph_1 \\ \text{card}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(N)))) &= \aleph_3, \aleph_3 > \aleph_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ayant établi que 2^{\aleph_0} est plus grand que \aleph_0 , il lui restait à mettre en correspondance cette puissance avec l'un des alephs de sa liste. En 1884, il propose la conjecture suivante appelée l'hypothèse du continu:

La puissance de l'ensemble des nombres réels est égale à \aleph_1

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

ou dit autrement: tout sous-ensemble infini de l'ensemble des nombres réels R est soit de cardinalité dénombrable, soit de la même cardinalité que R lui-même. Il «n'existe pas» d'ensemble infini de puissance intermédiaire entre \aleph_0 et \aleph_1 .

Cette conjecture est associée à un autre problème, celui que pose l'axiome de choix. Il semble à première vue trivial. En substance, il stipule:

Si E est un ensemble d'ensembles disjoints F_i , alors il est possible de créer un nouvel ensemble ayant pour éléments un élément de chacun des ensembles F_i .

Cette conjecture et cet axiome n'ont pas laissé les logiciens indifférents. Depuis le début du siècle, ils ont tenté d'établir ces résultats. En 1938, Gödel a démontré qu'ils n'engendraient aucune contradiction dans un système non contradictoire. Cohen, en 1963, établissait que la négation de ces propositions n'engendrait aucune contradiction. L'interrogation de Russell reste donc toujours ouverte.

Whether [this axiom] is true or not, no one knows. It is easy to imagine universes in which it would be true, and it is impossible to prove that there are possible universes in which it would be false; but it is also impossible (at least, so I believe) to prove that there are no possible universes in which it would be false. (Russell, 1936, p. viii, première impression 1903.)

Encore aujourd'hui, «we are left completely up in the air as to whether they are true or not» (Crossley, 1979, p. 10).

BIBLIOGRAPHIE DES OUVRAGES CITES

- ARISTOTE: *Premiers analytiques*. Paris, Vrin, 1936, trad. J. Tricot.
- BETH E.W.: *The foundations of mathematics. A study in the philosophy of science*. Amsterdam, North Holland, 1959.
- BLANCHE R.: *La logique et son histoire*. Paris, Colin, 1970.
- BOCHENSKI J.M.: *Formale Logik*. München, Alber, 1956.
- BOOLE G.: *An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. New York, Dover, 1958.
- BOURBAKI N.: *Eléments d'histoire des mathématiques*. Paris, Hermann, 1969.
- CANTOR G.: *Gesammelte Abhandlungen*. Hildesheim, Olms Verlag, 1962.
- CHURCH A.: *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton, Princeton University Press, vol. I, 1956.
- COHEN P.J.: *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. New York, Benjamins, 1966.
- COMBES M.: *Fondements des mathématiques*. Paris, PUF, 1971.
- CROSSLEY J.N.: *What is mathematical logic?* Oxford, Oxford University Press, 1979.
- DUMITRIU A.: *History of logic*. Tunbridge Wells, Abacus Press, 4 vol., 1977.
- EUCLIDE: *The thirteen books of Euclid's Elements*. New York, Dover, 1956, traduction, introduction et commentaire de T. Heath.
- FREGE G.: *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle, Nebert, 1879.
- FREGE G.: *Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau, Marcus, 1884.

- FREGE G.: *Ecrits logiques et philosophiques*. Paris, Seuil, 1971, trad. C. Imbert.
- FREGE G.: *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*. Hildesheim, Olms, 1983.
- GODEMENT R.: *Cours d'algèbre*. Paris, Hermann, 1966.
- GOEDEL K.: «The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis», *Proc. Nat. Acad. Sci.* 24 (1938).
- GUILLAUME M.: «Axiomatique et logique» in J. Dieudonné (ed.) *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*. Vol. II. Paris, Hermann, 1978, chap. XIII, pp. 315-430.
- HEIJENOORT J. VAN (ed.): *From Frege to Gödel*. Cambridge, Harvard University Press, 1967.
- HUNTER G.: *Metalogic. An Introduction to the Metatheory of Standard First-Order Logic*. London, Macmillan, 1971.
- JØRGENSEN J.: *A treatise of formal logic. Its evolution and main branches, with its relations to mathematics and philosophy*. New York, Russell, 1962.
- KEMENY J.G.: «Models of Logical Systems», *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 13, no 1, 16-30 (1948).
- KLEIN F.: *Le programme d'Erlangen*. Paris, Gauthier-Villars, 1974.
- KLINE M.: *Mathematics, the loss of certainty*. Oxford, Oxford University Press, 1980.
- KNEALE W.; M. KNEALE: *The development of logic*. Oxford, Clarendon Press, 1962.
- KOTARBINSKI T.: *Leçons sur l'histoire de la logique*. Paris, PUF, 1964.
- LEIBNIZ G.W.: *Mathematische Schriften*. Berlin-Halle, C.I. Gerhardt, Asher-Schmidt, 1849-1863, 7 volumes.
- LEIBNIZ G.W.: *Philosophische Schriften*. Berlin, Gerhardt, 1890.
- LUKASIEWICZ J.: *Elements of Mathematical Logic*. Oxford, Pergamon Press, 1966.
- MERLEAU-PONTY M.: *Phénoménologie de la perception*. Paris, Gallimard, 1945.
- PASCAL B.: *Pensées et opuscules*. Paris, Hachette, 1904. Introduction et notes, Brunschvicg.

- POST E.L.: «Introduction to a general theory of elementary propositions», in Heijenoort (ed.) 1967, 264-283.
- RAGGIO A.R.: «L'évolution de la notion de système axiomatique», *L'Age de la science*, vol. III, 1970, no 3, pp. 207-224.
- RUSSELL B.: *The Principles of Mathematics*. London, Allen & Unwin, 1903.
- WHITEHEAD A.N.; B. RUSSELL: *Principia mathematica*. Cambridge, Cambridge University Press, 1910-1913, 3 volumes.

INDEX DES AUTEURS

- Aristote 2-4, 14
Arnauld A. 14
Blanché R. 11
Bolyai J. 7
Boole G. 10-12, 14
Brouwer L.E.J. 19
Cantor G. 9, 12-13, 93,
115, 117
Chomsky N. 22, 41
Church A. 74-75, 78
Cohen P.J. 118
Crossley J.N. 118
Dedekind J.W.R. 10, 13
De Morgan A. 14
Euclide 2-3, 6-7, 15
Fraenkel A. 94
Frege G. 13-16, 18, 94
Gauss J.F.K. 7
Gödel K. 2, 21, 118
Godement R. 98, 115
Guillaume M. 1
Herbrand J. 21
Hilbert D. 19-21, 75
Hunter G. 78
Jørgensen J. 12
Kemeny J.G. 88
Klein F. 8-9
Kotarbinski T. 14
Lambert J.H. 7
Leibniz G.W. 1, 4-5, 14, 16
Lobatchevski N.I. 7
Lukasiewicz 44, 78
Lulle R. 4
Merleau-Ponty M. 32
Nicole P. 14
Pascal B. 5-6
Peano G. 10
Planck M. 8
Post E. 75, 77
Raggio A.R. 22
Riemann G. 7
Russell B. 13, 16-20, 94,
118
Stoïciens 3
Tarski A. 22
van Heijenoort J. 16, 77
Whitehead A.N. 94
Zermelo E. 94

INDEX DES MATIERES

- aleph-zéro 114
algèbre logique (algèbre de Boole) 10-12
alphabet 23-26, 43-44
analyse 10, 12
antinomie (contradiction) de Russell 16-18
appareil déductif 65, 70, 72, 79
appartenance 94
application 66-68, 111-113
 bijective 113
 injective 113
 surjective 113
arithmétique 5, 10, 16, 19-21
L'art de penser 14
assignation de valeurs 66
axiome
 (ebf) 21, 23, 29-30, 46, 65, 69, 79, 91
 (vérité première) 3-10, 18-19, 30
 de choix 118

Begriffsschrift 14, 16-17
calcul logique 4, 11-12, 14, 79
caractéristique 68
cardinalité d'un ensemble 96, 101-103, 116-117
 voir aussi puissance d'un ensemble
catégoricité 88
classe
 universelle 11
 vide 11
 voir aussi ensemble
compacité 70
complétude 72, 78-86, 89
 relativement à l'ensemble de toutes les fonctions de vérité qui sont des tautologies 80
 sémantique 79-80, 85
 syntaxique 89-92
compréhension 12, 107-108, 111
concaténation 27
conclusion 36-40, 71, 74
 sémantique 71, 74
connecteur 44
conséquence
 immédiate 30-31, 46
 sémantique 65, 71
 syntaxique 71
consistance 74-78, 88
 absolue 75-76

- consistance (*suite*)
 dans le sens de Post 75,
 77
 relativement à la négation
 77
 relativement à une
 transformation 76
 sémantique 77
 syntaxique 76
 couple 106
- décidabilité 31, 35, 72, 87
 déduction 36-37, 48-49, 65
 déduction naturelle 58-64
 définition inductive 26
 démonstration 3, 12-15,
 20-21
 domaine de valeurs 66-67
- effectivité 21, 23, 31
 égalité
 d'ensembles 94-96
 de vecteurs 105
 élément d'un ensemble 93,
 97
- Eléments* 6
 ensemble 93, 95-96
 complémentaire 98
 des parties d'un ensemble
 100-104
 fini 109-110
 infini 110, 114-118
 produit 106-108
 vide 98-99
 voir aussi classe
 équipotence d'ensembles 96,
 109, 114
- équivalence d'ensembles 96,
 109
 évaluation 66-67, 68-69
 expression bien formée 21,
 23, 27-29, 44-45, 65
 extension 12, 107-108, 111
 extension d'un système
 formel 89-91
- finitude, procédés finitistes
 21-22, 69-70
 fondé (propriété de système)
 79
 fondements des
 mathématiques 2, 9,
 15-21
 formalisme 19
- géométrie 3-9, 15, 18, 20
Grundgesetze der Arithmetik
 15-17
 hypothèse 36
 hypothèse du continu
 117-118
- image 112
 inclusion 94-98
 indépendance d'axiomes 69,
 88-89
 induction 10, 103
 l'infini 2, 6, 10, 13, 22,
 96-97, 109-110, 114-118
 actuel 110
 dénombrable 114-118
 potentiel 110
 informatique 22
 interpolation 71-72
 interprétation 65-66, 80, 85

- intersection 100
 intuition 5, 7, 9, 19, 22
 intuitionnisme 19
- langage formel 4, 23, 65,
 72, 79-80
Laws of Thought 10-11
 lemme 60
 lettre (élément d'un
 alphabet) 25
 linguistique 22
 logicisme 14-19
 logique
 bivalente 66
 des classes 11
 des prédicats 3, 42, 70
 des propositions 3, 11,
 42-92
 polyvalente 66-67
 logiquement valide 69-74,
 79-80
- M-contradiction,
 -non-contradiction 70
 métalangage 23
 métalogue 38
 métamathématique 20-21
 métathéorème 38
 modèle 69-71
 modus ponens 46, 58, 73
 monoïde libre 27
 mot (suite finie de lettres)
 27
- N 95-96, 114, 116-117
- non-contradiction 2, 19-21,
 72, 74, 77-78, 88
 voir aussi
 M-non-contradiction
 n-uple 106
- opération 108
- parenthèses 44
Pensées 5
 postulat 3-7
 postulat des parallèles 6-7
 prédicat 43
Premiers analytiques 3
 prémisse de règle 30
 preuve 32-35, 47-48, 65, 87
Principia mathematica 19
 programme d'Erlangen 8-9
 puissance
 du continu 117
 du dénombrable 114-118
 d'un ensemble 96-97,
 114-117
 voir aussi cardinalité d'un
 ensemble
- Q 96
 Q⁺ 114, 116
- R 96, 117
 récurrence 103
 règle d'inférence 23, 30-31,
 46-47, 58-65, 79
 réunion 99
 rigueur 3-4

- schéma
 - d'axiome 29, 46, 73, 88-89, 91
 - de déduction 48
 - de théorème 49
- science déductive 2-6, 9, 18, 22
- Seconds analytiques* 3
- sémantique 11, 22, 32, 65, 72, 74-79
- syllogisme 3, 14
- syntaxe 11, 20, 22, 32, 65, 72, 74-75, 78-79
- système
 - axiomatique 3, 20
 - combinatoire 40
 - de Chomsky 41-42
 - hypothético-déductif 15, 20
 - semi-thueien 40
- tautologie 69-70, 89
- théorème 32-35, 38, 47-48, 72, 74-75, 79-80, 87, 89
- théorème de la déduction, pour L° 50-57
- théorie
 - de la preuve 65, 71
 - des ensembles 2, 10, 12-13, 93-118
 - des modèles 65, 71
 - des types 18
- triplet 106
- univers du discours 11
- validité 65, 69
- vecteur 105-106
- vérité première, voir axiome
- Z 95

Couverture : Atelier Seth, Peseux

Impression : Zentralstelle der Studentenschaft der Universität Zürich