Novembre 2011

TRAVAUX DE LOGIQUE No 20

ISSN 1420-8520 Novembre 2011 20

TRAVAUX DE LOGIQUE

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Regards croisés sur l'axiomatique

Edited by
Pierre Joray & Denis Miéville

CdRS

Centre de Recherches Sémiologiques
Travaux de logique
N° 20 — novembre 2011

REGARDS CROISES SUR L'AXIOMATIQUE

Pierre Joray & Denis Miéville
éditeurs

CdRS

α η δ τ

Université de Neuchâtel

&

EA « Philosophie des Normes »
Université de Rennes 1

Centre de Recherches Sémiologiques
Université de Neuchâtel
Espace Louis-Agassiz 1
CH-2000 Neuchâtel (Switzerland)

&

EA 1270 «Philosophie des Normes»
Université de Rennes 1
263 Av. du Général Leclerc, CS 74205
F-35042 Rennes Cedex (France)
(pierre.joray@univ-rennes1.fr)

TABLE DES MATIERES

Avant-propos

Seul le pouvoir découpe le savoir.
A l'état paisible il est dense.
Je suis à la recherche de la PAIX.

Michel Serres

En l'an 1985 paraissait le premier fascicule de la collection des « Travaux de Logique » édité par le Centre de Recherches Sémiologiques de La Faculté des lettres de l'Université de Neuchâtel. Ce volume exposait la métamathématique et s'intitulait « Introduction à la théorie des systèmes formels ». Motivé par la nécessité de disposer, en français, d'une présentation systématique et complète de ladite théorie, il augurait des développements logiques futurs que le Centre et l'Institut de logique allaient conduire avec l'aide du Fonds National de la Recherche Scientifique Suisse ainsi que le Fonds Canadien de Recherches. Cette collection s'est notamment distinguée par la publication, hors-série, de six fascicules exposant la genèse, les réflexions critiques et les développements théoriques associés à l'œuvre extraordinaire du logicien polonais, Stanisław Leśniewski, la protothétique, l'ontologie et la méréologie. C'était un temps où la recherche libre et fondamentale était soutenue, voire même, privilégiée. C'était un temps où l'université ne partageait pas encore les termes économiques pour se singulariser.

La société change et avec elle, l'université connaît de nouvelles missions et de nouveaux modes de communication. Des complicités scientifiques s'établissent en modifiant l'espace des échanges et en favorisant la mobilité des enseignants et des chercheurs. Ainsi, la logique naturelle développée dans le cadre du Centre de Recherches Sémiologiques émigre progressivement en des lieux où l'été indien caresse de ses couleurs chaudes un nord accueillant. Quant aux travaux issus de la problématique logique traitée pas Leśniewski, ils verront leur destin stimulé et dynamisé par une équipe de recherches de l'Université de Rennes 1, une équipe présidée par le professeur de philosophie et de logique, Monsieur Pierre Joray.

Ce numéro 20 est ainsi un numéro de transition qui exprime, tout à la fois, par les mentions de deux éditeurs et des deux affiliations universitaires neuchâteloise et rennaise, la fin d'un temps qui inscrit tout naturellement un passé, et l'annonce d'un très bel avenir. Je ne peux que me réjouir, par le biais des réflexions fondamentales qui sont présentées dans ce volume 20 et qui concernent un thème propre aux fondements de toute théorie formelle, de voir une réflexion logique prendre assise en des lieux stimulés par un vivifiant air marin.

Denis Miéville
Professeur de logique
Directeur du Centre de Recherches
Sémiologiques de l'Université de Neuchâtel

Introduction

Atavists of all nations, unite !
Return to content !

Göran Sundholm

Depuis les *Éléments* d'Euclide, jusqu'au programme formaliste de David Hilbert, la méthode axiomatique a longtemps accompagné le développement des mathématiques et aussi, bien que plus tardivement, celui de la logique et des démarches de formalisation. Pour Frege, en effet, l'approche logiciste de l'arithmétique nécessitait d'étendre le champ d'usage des langues formulaires et de l'axiomatisation à la logique elle-même. Comme il l'écrivait dans son introduction à la *Begriffsschrift*,

> Pour que, ce faisant [à savoir réduire le concept de *nombre* à la conséquence logique] quelque chose d'intuitif ne puisse pas s'introduire de façon inaperçue, tout devait dépendre de l'absence de lacunes dans la chaîne des déductions[1].

Si l'idéographie et le système axiomatique qu'il mit en place pour réaliser son grand projet de réduction devait sombrer dans l'échec par la contradiction que B. Russell y décela en 1902, il n'en reste pas moins que les travaux axiomatiques de Frege ouvraient une ère nouvelle pour la logique, pour les fondements

---

[1] Frege G. 1879. *Begriffsschrift, eine des arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens,* Halle: Nebert. [Cité dans trad. fr. par Besson C. *Idéographie,* Paris: Vrin, 1999, p. 6.]

de l'arithmétique et donc aussi pour l'épistémologie d'une grande partie des mathématiques.

On sait, par exemple, qu'une fois limité au second ordre et expurgé de la fameuse Loi V, qui introduisait la notion contradictoire *d'extension de concept*, le système de Frege permet une axiomatisation extraordinairement économique de l'arithmétique élémentaire. Ce qu'on nomme aujourd'hui l'arithmétique de Frege, s'obtient en effet à partir d'une logique des prédicats du second ordre, par l'ajout d'un unique axiome ne contenant pour seul terme propre que « nombre de… ». Cet axiome que l'on nomme désormais le *Principe de Hume*[2] constitue alors une définition implicite de la notion de nombre cardinal.

Il est sans doute banal aujourd'hui de rappeler que, malgré l'échec d'une forme sans doute trop radicale de logicisme, l'héritage de Frege reste considérable. Non seulement l'étude qu'il donna de la notion de *nombre cardinal* reste un modèle d'analyse logique, mais surtout il montra la fécondité dans les domaines de la logique et des fondements des mathématiques de la méthode axiomatique lorsqu'elle se trouve formalisée par l'adoption d'une idéographie logique et l'intégration d'axiomes et de règles caractérisant l'ensemble des chaînes déductives.

A. N. Whitehead, B. Russell, F. P. Ramsey, R. Carnap et aussi, à sa manière, S. Leśniewski furent sur ce plan parmi les héritiers de Frege. En atteignant à des degrés divers l'idéal de rigueur que s'était fixé Frege, chacun pratiqua en effet l'analyse logique à l'aide d'une axiomatique formelle, mais sans être formaliste, en usant d'un langage interprété, à savoir une idéographie dont les formules ne sont pas de simples suites de caractères, mais des expressions pourvues de sens.

---

[2] A savoir, $(\forall F)(\forall G)(Nombre(F) = Nombre(G) \equiv F\infty G)$, une formule du second ordre où $F\infty G$ exprime qu'il existe une relation biunivoque entre les objets tombant sous le concept F et ceux tombant sous G.

Tout lecteur attentif du *Journal of Symbolic Logic* constate aujourd'hui sans peine que les travaux logiques dominants ne ressemblent plus guère, ni par leurs sujets, ni par leurs méthodes, aux œuvres des illustres ancêtres que j'ai nommés ici. La raison en est assez simple et remonte au changement radical de perspective que la logique a subi dans les années Trente, après la découverte des théorèmes de limitation et en particulier le théorème d'incomplétude de Gödel. Depuis cette période l'approche axiomatique d'une théorie ou d'un domaine spécifique d'objets, l'usage de l'axiomatique comme outil d'analyse, ne sont plus parmi les préoccupations premières de la grande majorité des logiciens. Avec Gödel, avec Tarski aussi (pourtant l'élève de Leśniewski), le travail premier des logiciens devenait de montrer de manière métamathématique les propriétés de systèmes formels, à savoir de systèmes symboliques considérés comme dépouillés de tout contenu représentationnel. Dans cette perspective, la logique telle que l'avait conçue des Frege, Russell et Leśniewski devait passer au second plan et laisser sa place au langage devenu idiome universel de la théorie des modèles.

Cette évolution, sans doute rendue nécessaire par les problématiques spécifiques rencontrées par les sciences formelles, ne rendait cependant pas caduques les questions et les enjeux de l'analyse logique de contenu. Avec le renouveau des entreprises fondationnalistes, celui de l'intuitionnisme, avec l'urgence d'éclaircir les notions de réduction et de définition en épistémologie, avec aussi le développement de l'inférentialisme en philosophie du langage, l'usage de l'axiomatique comme instrument précieux de clarification et de découverte revient sur le devant de la scène logique. On notera aussi l'apparition de plusieurs systèmes à langage logique de base interprété, par exemple la Théorie Intuitionniste des Types, élaborée par Per Martin-Löf dans les années Quatre-vingt et qui fut discutée à plusieurs reprises dans les années Nonante au Centre de

Recherches Sémiologiques de Neuchâtel[3]. L'étude des systèmes et des axiomatiques construites sur la base de langages interprétés n'est désormais plus du ressort des seuls historiens des sciences formelles, mais revient naturellement aux logiciens.

Il est d'ailleurs frappant que depuis la parution en 1955 de l'excellent petit ouvrage de Robert Blanché sur l'axiomatique, aucune monographie ne soit, à notre connaissance, parue en français sur le sujet. Il nous a ainsi semblé naturel que les *Travaux de Logique*, qui ont entre autres largement consacré leurs pages aux études leśniewskiennes, contribuent à combler ce retard.

L'atavisme ne se caractérise pas comme une dévotion marquée au culte des ancêtres, mais comme la mise en valeur d'un héritage délaissé par les générations récentes. Puissent les regards croisés sur l'axiomatique offerts ici au lecteur contribuer au retour du contenu que notre ami Göran Sundholm appelait de ses vœux, par un plaisant manifeste, lors de l'édition 2000 du colloque tchèque *Logica*[4].

***

Je ne saurais terminer cette introduction sans évoquer la disparition toute prochaine du Centre de Recherches Sémiologiques de l'Université de Neuchâtel. Pour ne pas m'adonner prématurément au plus célèbre des sentiments brésiliens, je voudrais tout simplement saluer la générosité intellectuelle et la remarquable émulation scientifique que tout d'abord Jean-Blaise Grize, le fondateur du Centre, puis Denis Miéville, qui lui succéda à la direction, ont su offrir aux nombreux chercheurs

---

[3] Voir en particulier, Martin-Löf P. 1984. *Intuitionistic Type Theory*, Naples : Bibliopolis et la présentation de cette théorie par Sommaruga G. dans le numéro 11 des *Travaux de Logique*.

[4] Sundholm G. 2001. A Plea for Logical Atavism, in Majer O. (ed). *The Logica Yearbook 2000*, Prague: Filosofia, 151-162.

qui ont eu le privilège de travailler avec eux. J'espère qu'en reprenant la responsabilité éditoriale des *Travaux de Logique*, je saurai faire vivre à l'avenir un peu de cet esprit qui caractérise l'Ecole neuchâteloise de logique.

Pierre Joray
Professeur de logique et de philosophie des sciences
UFR de philosophie
Université de Rennes 1

Des vertus de l'axiomatisation illustrées par l'exemple

Denis Vernant

> Wir haben Zeichen nötig, nicht nur unsere Meynung Andern anzudeuten, sondern auch unsern Gedanken selbst zu helfen.
>
> G. W. LEIBNIZ

Depuis Euclide, l'axiomatique a été principalement pensée comme un mode de présentation d'un système déductif formel, logique ou mathématique.

Dans ce qui suit, je voudrais moins revenir sur la description de l'axiomatique comme produit que me centrer sur l'opération d'axiomatisation conçue comme une activité productive dont il importe d'interroger le pouvoir créateur.

Je m'attacherai donc à caractériser l'axiomatisation avant de définir ce qu'est une théorie axiomatisée. Enfin, je proposerai l'exemple de l'axiomatique des actes véridictionnels dans le champ de la philosophie du langage pour illustrer les vertus de l'axiomatisation en tant qu'étape cruciale du procès de connaissance.

1. L'axiomatisation

Il importe d'abord de dégager les fonctions principales de l'activité d'axiomatisation. Schématiquement, celles-ci relèvent de trois niveaux : de l'expression, du contenu et du contrôle.

1.1 L'expression

La question première est celle de la conceptualisation de ce qui d'abord se présente sous une forme pré-systématique de notions vagues, grevées de connotations usuelles[1]. Les opérations initiales en jeu sont alors celles d'abstraction et de généralisation. Au plan de l'expression, il s'agit d'*expliciter* ce qui pouvait rester implicite ; de *caractériser* par un symbole univoque ce qui pouvait se signifier de façon ambiguë ; enfin de *formaliser* rigoureusement ce qui pouvait s'appuyer subrepticement sur un contenu empirique.

En termes leibniziens, il s'agit de construire une *characteristica universalis* qui mette « des caractères à la place des choses pour dés-embarrasser l'imagination »[2]. Ces « caractères » sont des *symboles formels* dont le sens se résume à leur manipulation logique et qui ne retiennent plus les significations concrètes des notions d'origine.

Une telle exigence, qui semble aujourd'hui convenue, suppose cependant une discipline conceptuelle qui en géométrie par

---

[1] Méthodologiquement, nous distinguons notion, concept et symbole. Par exemple, la *notion* d'assertion, attestée en français depuis le XII[e] siècle, mais peu usitée couramment, recouvre pour une part le sens d'affirmation avec laquelle elle reste souvent confondue. Par contre, le *concept* d'assertion possède une signification précisément déterminée par une théorie particulière. Comme on le verra par la suite, il convient de ne pas confondre le concept *logique* d'assertion tel qu'il fut utilisé par Frege et Russell avec celui de la théorie *pragmatique* contemporaine, cf. (Vernant 2005). Quant au *symbole* formel, il ne prend sens que dans une axiomatique, tel le symbole A dans notre axiomatique des actes véridictionnels, cf. *infra*. (On distingue le symbole de ses diverses *occurrences* incriptionnelles concrètes).

[2] *De la méthode de l'universalité* (vers 1674) § 4, dans (Leibniz 1875-90 : V, 10).

exemple n'a pu être réalisée qu'à la fin du XIX^e^ siècle avec une axiomatisation qui rectifia sévèrement la tradition euclidienne[3].

1.2 Le contenu

Le plan du contenu – lié organiquement au précédant – est celui de la structuration logique des concepts. Il requiert une *analyse* des concepts complexes ainsi qu'une *déduction* de leurs relations. Comme tel, il correspond au *calculus ratiocinator* leibnizien. Le processus en jeu est alors celui, double, d'une inventivité conceptuelle et d'une systématisation des relations.

À partir d'un petit nombre d'idées primitives, il s'agit de dégager les modalités d'engendrement définitoire des concepts dérivés. De même, il s'agit de choisir initialement les propositions primitives qui gouvernent les liens logiques entre les concepts primitifs (et en constituent ainsi une définition implicite) et d'en déduire des propositions admises comme théorèmes.

Possédant une valeur zététique puissante, cette activité d'axiomatisation impose quasi mécaniquement la considération de *tous* les aspects d'un concept, comme de *toutes* les relations interconceptuelles logiquement possibles. Une telle activité fonctionne comme un précieux outil d'*analyse logique* :

> Je passe par des phases dont la première serait de voir quelque chose à l'œil nu, et la dernière de l'examiner au microscope. Je constate que

[3] La première axiomatisation rigoureuse de la géométrie, qui ne retenait que quatre idées primitives, fut celle de Moritz Pasch (1882). Voir aussi David Hilbert (1899). Fut dès lors particulièrement critiqué le recours subreptice à des hypothèses implicites et à l'usage des figures. D'où l'attaque violente de Russell : « ce n'est rien moins qu'un scandale qu'il soit encore enseigné aux garçons d'Angleterre. Un livre devrait être soit intelligible, soit exact. Il est impossible de combiner les deux, mais manquer des deux est indigne de la place occupée par Euclide dans l'éducation » (Russell 2007 : chap. V, 102).

> l'attention fait apparaître des divisions et des distinctions là où d'abord rien n'était visible, tout comme à travers un microscope vous pouvez voir dans une eau impure des bacilles qui, à l'œil nu, n'étaient pas discernables. (Russell 1959 : 165-6)

1.3 Le contrôle

Imposant précision et rigueur, les opérations précédentes font elles-mêmes l'objet d'un contrôle second portant sur les propriétés métalogiques du système déductif qui résulte de l'activité d'axiomatisation.

On sait que l'exigence de contrôle n'est apparue clairement qu'au tournant des années Trente avec la *métamathématique* de Hilbert[4] et sa reprise dans le champ logique par Leśniewski[5].

Désormais, cette exigence métalogique s'exprime par la démonstration pour un système formel donné de[6]:

- sa consistance[7];

---

[4] Cf. (Hilbert 1918).

[5] Contre les auteurs des *Principia Mathematica*, Stanisław Leśniewski distingua clairement le niveau du langage logique de celui, métalogique, de ses règles d'utilisation, cf. (Leśniewski 1989). Cette approche fut précisée par son élève Alfred Tarski, notamment dans sa communication de 1930 : « Sur quelques concepts fondamentaux de la métamathématique », dans (Tarski 1972 : T1, 35-43).

[6] Sur les propriétés métalogiques des systèmes logiques standard, cf. (Vernant 2001 : § 1.3.5 ; 2.4 ; 3.3.4).

[7] On exige en principe qu'un système muni de la négation soit *non contradictoire*, c'est-à-dire qu'il n'y ait aucune proposition prouvable dans ce système et dont la négation serait également prouvable. De façon plus générale, on exige d'un système qu'il soit *consistant* (ou non trivial), c'est-à-dire qu'il ne soit pas possible d'y prouver toutes les formules. Si le système contient la négation classique, ces deux exigences sont équivalentes. Munis d'une négation plus faible, les logiques dites paraconsistantes permettent de concevoir des systèmes consistants qui ne sont pourtant pas soumis à l'exigence de non contradiction.

– sa complétude[8];
– sa décidabilité[9];
– l'indépendance de ses axiomes[10];
– l'économie des idées et des propositions primitives[11].

Le contrôle de ces exigences assure la cohérence logique du système formel ainsi que sa simplicité théorique.

1.4 Le procès de connaissance

Nous venons de définir cursivement l'activité d'axiomatisation au triple plan de l'expression, du contenu et du contrôle. Il reste toutefois à déterminer son rôle et sa place dans le processus complet de connaissance.

[8] Cette propriété assure la correspondance entre preuve syntaxique et validité sémantique.

[9] On sait que la logique des relations n'est plus généralement décidable, cf. (Vernant 2001 : § 3.3.4.3).

[10] Cette exigence est simplement heuristique. Une méthode consiste à tester, par exemple par l'absurde, si un axiome donné est démontrable à partir des autres. Dans sa perspective universaliste, Russell ne pouvait admettre qu'une telle métaprocédure soit appliquée à la question de l'indépendance des axiomes logiques : « car tous nos axiomes sont des principes de déduction ; et s'ils sont vrais, les conséquences qui semblent suivre de l'emploi d'un principe opposé ne s'en suivront pas réellement, si bien que les arguments tirés de la supposition de la fausseté d'un axiome sont ici sujets à des erreurs particulières » (Russell 1903 : 15).

[11] Souvent l'économie théorique s'accorde mal avec l'économie pratique. Ainsi Russell, dans la seconde édition, s'est bien gardé de réécrire les *Principia Mathematica* lorqu'il découvrit que l'on pouvait en simplifier l'axiomatique en recourant au seul opérateur d'incompatibilité de Sheffer et à l'unique axiome correspondant de Nicod, cf. (Vernant 2001 : § 1.3.1.3).

De façon générale et schématique, nous décrirons ce processus en quatre opérations :

– la première est celle de la récollection des données empiriques et de la recension des savoirs pré-théoriques sur le domaine d'objets que l'on étudie[12];

– la deuxième est celle de la *théorisation* proprement dite où s'élaborent la description, l'analyse et l'explication conceptuelles du domaine[13];

– la troisième est précisément celle de l'*axiomatisation* de la théorie produite selon la triple dimension décrite précédemment ;

– enfin, la quatrième est celle de la *modélisation*. On sait en effet qu'une axiomatique donnée peut admettre plusieurs modèles qui viennent en fournir des interprétations différentes[14]. Par exemple, en plus de l'interprétation arithmétique usuelle pour laquelle elle a été conçue, l'axiomatique de Peano peut

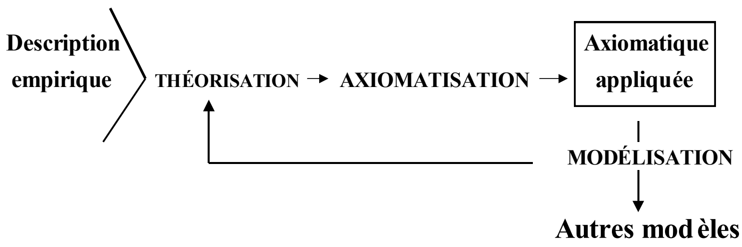
[12] On pourrait concevoir une axiomatique comme un pur jeu formel, combinatoire et arbitraire. Dans notre perspective d'une opération d'*axiomatisation* d'une théorie, nous partons d'une enquête empirique initiale : « Toute pensée effective suppose application de la pensée abstraite à une intuition » (Cavaillès 1981 : 92).

[13] Une *théorie* est composée d'un ensemble de *signes* ayant fonction de description et d'explication d'un domaine spécifié de phénomènes et d'objets. En ce sens, une logique n'est pas une théorie. En tant que jeu de manipulation de *symboles*, elle ne porte que sur des *activités* opératoires. Le calcul des propositions traite non de la *vérité*, mais de la *validité* et ses propositions sont dénuées de contenu (*sinnlos*). Le calcul des prédicats élabore des procédures universelles d'objectité (critère d'engagement ontologique), mais n'impose aucun contenu objectal particulier (choix d'une ontologie).

[14] En logique, un *modèle* d'une axiomatique formelle est une interprétation qui, à partir du choix d'un domaine d'objets, donne sens à ses concepts primitifs et rend vrais ses axiomes.

recevoir bien d'autres interprétations[15]. Il importe de remarquer que la théorie axiomatisée peut admettre comme modèle la théorie initiale, telle pour l'axiomatique de Peano l'arithmétique « naïve » usuelle. On a là un retour formel qui vient valider tout le procès de connaissance.

Schématiquement, on en résumera les étapes de cette façon :



[15] Peano lui-même relève la multiplicité des interprétations (ou « systèmes » dans son vocabulaire) que peut recevoir son axiomatique conçue sur la base de trois idées primitives (*zéro*, *nombre entier* et *successeur immédiat*) et de cinq propositions primitives : « Il y a une infinité de systèmes satisfaisant toutes les propositions primitives. Par ex. elles sont toutes vérifiées si l'on remplace nombre et 0 par nombre autre que 0 et 1. Tous les systèmes qui satisfont les propositions primitives sont en correspondance un-un avec les nombres. Le nombre est ce qu'on obtient par abstraction de tous ces systèmes ; en d'autres termes, le nombre est le système qui a toutes les propriétés énoncées dans les propositions primitives et celles-ci seulement » (Peano 1899 : vol.1, § 20). Russell (1903 : 125*sq*), critique cette procédure par abstraction qui ne permet ni d'assurer l'existence, ni de définir de façon univoque le nombre.

2. L'axiomatique

Ayant caractérisé l'activité d'axiomatisation et sa place dans le procès de connaissance, il convient de préciser ce qui en résulte : une axiomatique. Nous rappellerons donc succinctement la structure d'une théorie axiomatisée.

2.1 Structure d'une axiomatique

Sous forme axiomatisée, un système formel se présente *classiquement* comme un stock, aussi limité que possible, d'idées et de propositions primitives auquel on adjoint des règles de définition explicite des idées dérivées, des règles de bonne formation des formules et des règles de transformation déductive de certaines de ces formules à partir des axiomes. L'axiomatique se résume alors à une triple procédure *effective*, c'est-à-dire algorithmique, de définition des idées dérivées, de formation des formules et de démonstration des théorèmes. Comme on l'a vu, la cohérence, la simplicité et la productivité d'un tel système axiomatique sont contrôlées par des méta-règles.

2.2 Axiomatique pure/appliquée

Ce qu'on vient de décrire vaut au premier chef pour toutes les présentations axiomatiques des systèmes formels logiques. De tels systèmes constituent des axiomatiques *pures* en ce qu'elles n'intègrent ni idée ni proposition primitives relevant d'une théorie spécifiée qui vise la description et l'explication d'un domaine d'objets particulier. Ainsi, l'axiomatique du calcul propositionnel élaborée par Łukasiewicz en 1924 est une *axiomatique pure*[16]; par contre, l'axiomatique peanienne de l'arithmétique constitue une *axiomatique appliquée* dans la mesure où ce système formel et axiomatisé relève bien d'une *théorie*, même si elle n'est pas empirique : celle de l'arithmétique, qui admet pour objets les entiers naturels. Selon cette définition, il en va de même en géométrie, dans la mesure où toute géométrie, si formelle soit-elle, est bien la théorie d'un domaine d'objets particulier[17]. À l'inverse, une axiomatique *pure* vaut comme outil formel *universel*, c'est-à-dire potentiellement applicable à n'importe quelle théorie rendant compte d'un domaine spécifique d'objets[18].

Dès lors, toute axiomatisation d'une théorie, qu'elle porte sur des objets abstraits ou empiriques, produit une *axiomatique appliquée* qui adjoint au noyau logique pur des idées et des

---

[16] Elle admet pour idées primitives la négation et le conditionnel ainsi que trois axiomes.

[17] Nous n'ignorons pas que certains parlent de géométrie « pure » à propos de la géométrie systématisée et axiomatisée. En toute rigueur, il convient de parler d'« axiomatique formelle » (par opposition à *matérielle*), cf. (Kleene 1971 : 200-1).

[18] « La logique, globalement, se distingue par le fait que ses propositions peuvent être formulées de telle sorte qu'elles s'appliquent à n'importe quoi » (Russell 2007 : 88).

propositions primitives relevant spécifiquement du domaine d'objets étudié.

2.3 Axiomatique bipolaire

À titre provisionnel, nous avons précédemment présenté la forme « classique » d'une axiomatique pure. Mais à bien y réfléchir, une telle forme est incomplète, proprement « hémiplégique ». En effet, cette forme « classique » ne prend en compte que les axiomes, c'est-à-dire les propositions que, pour des raisons diverses, l'on *accepte* initialement. Mais c'est oublier que si un jugement possède un pôle positif exprimant ce que l'on accepte et asserte, il possède aussi un pôle négatif composé de ce que l'on rejette et dénie. En fait, le processus zététique de théorisation se fonde tout autant – et peut-être même plus – sur ce que l'on veut rejeter que sur ce que l'on veut accepter. Ainsi, pour être complète, une axiomatique doit se construire de façon *bipolaire*[19] en dédoublant le choix des axiomes et des règles.

Marqué par Twardowski[20], Łukasiewicz proposa au début des années Trente une définition logique du concept de rejet (ou dénégation) et, avec l'aide de son disciple Słupecki, élabora une *axiomatisation bipolaire* de la syllogistique traditionnelle[21] qui peut se résumer ainsi :

---

[19] On sait que Wittgenstein proposa une notation *ab* bipolaire pour les propositions élémentaires fondée sur l'idée selon laquelle : « nous comprenons une proposition *que* si nous savons *à la fois* ce qui aurait lieu si elle était *fausse*, *et* si elle était *vraie* » (Wittgenstein 1971 : 224).

[20] Kazimierz Twardowski adopta la conception de Brentano selon laquelle le jugement ne met pas en relation deux représentations, mais le rapport intentionnel de la conscience à son objet. Juger est alors *accepter* ou *refuser* l'existence de l'objet présenté.

[21] Pour une présentation de la genèse du système Łukasiewicz-Słupecki, cf. (Vernant 2006).

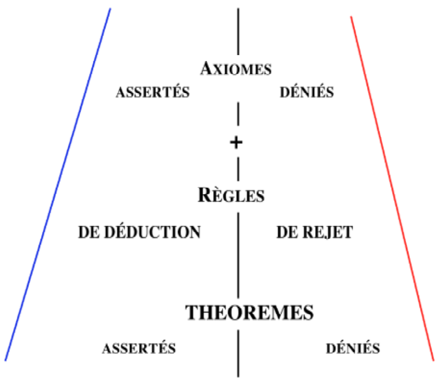
Termes :

primitifs : ***Aab, Iab***

définis : ***Eab, Oab***

ASSERTION	**REJET**
Axiomes :	
AA1 $\vdash A(aa)$	**AR1 :** $\dashv (Acb \circ Aab) \rightarrow Iac$
AA2 $\vdash I(aa)$	
AA3 $\vdash (Abc \circ Aab) \rightarrow Aac$	
AA4 $\vdash (Abc \circ Iba) \rightarrow Iac$	
Règles :	
Détachement :	
DA	**DR**
Substitution :	
SA	**SR**
	SRR Règle de rejet de Slupecki

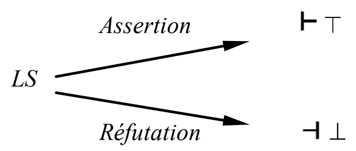
Une telle axiomatique permet d'engendrer à la fois des théorèmes à partir des axiomes assertés *et des « contre-théorèmes » à partir des axiomes déniés*.



STRUCTURE D'UNE AXIOMATIQUE BIPOLAIRE

Ainsi déployé de façon bipolaire, le champ déductif s'avère complet qui couvre aussi bien tout ce que l'on accepte que tout ce que l'on refuse.

BIPOLARITÉ DÉDUCTIVE



3. L'axiomatisation de la pragmatique véridictionnelle

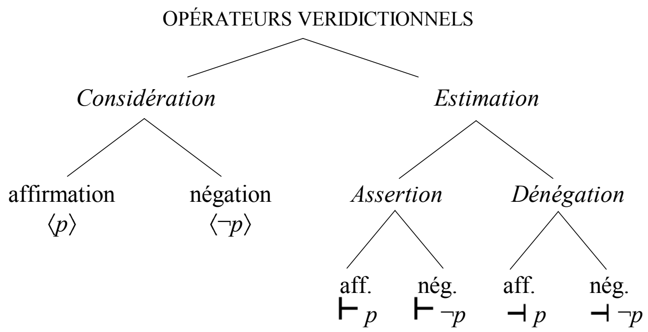
Afin de mesurer sur un exemple précis l'apport et les vertus de l'activité d'axiomatisation, nous allons examiner le cas de l'axiomatisation de la pragmatique des actes véridictionnels.

3.1 La théorie pragmatique de la véridiction

La pragmatique véridictionnelle résulte d'une théorisation des procédures langagières par lesquelles un locuteur s'engage ou non sur la vérité de ce qu'il dit. Sans entrer dans les détails[22], rappelons que nous avons proposé une théorie pragmatique qui distingue entre un acte de simple *considération* du contenu propositionnel sans aucun engagement du locuteur et un acte contraire d'*estimation*, c'est-à-dire d'engagement. Cet engagement peut être celui, positif, d'acceptation, d'*assertion*, ou bien, négatif, de refus, de *dénégation*[23]. L'ensemble des actes véridictionnels s'organise alors ainsi :

[22] Pour une analyse précise, cf. (Vernant 2009).

[23] On ne confondra pas l'*assertion* et la *dénégation* qui sont des opérations illocutoires de nature pragmatique avec les opérations, purement logiques, d'*affirmation* ou de *négation* du contenu propositionnel.



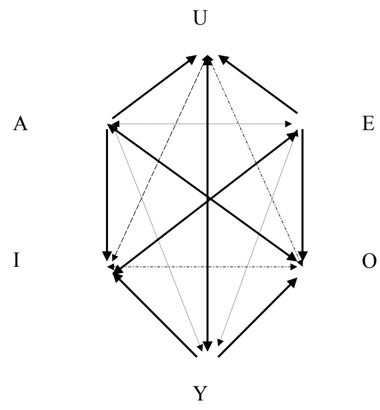
La théorie pragmatique consiste à définir la nature de chacun de ces actes et leurs conditions de réussite comme de satisfaction. Le recours à l’outil logique et à ses capacités d’axiomatisation permet, comme nous l’avons indiqué, de préciser chaque définition de ces actes et surtout de spécifier leurs relations logiques en garantissant de plus la systématicité et l’exhaustivité de l’analyse.

3.2 L’hexagone alternatif

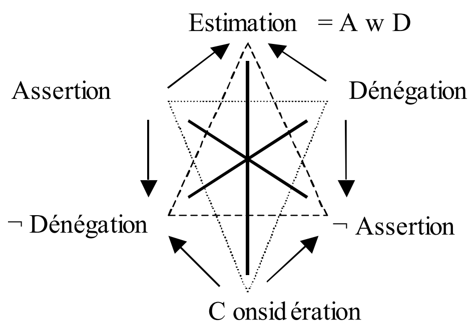
Manifestement, les relations logiques entre actes véridictionnels fonctionnent selon un jeu d’« opposition ». Pour formaliser un tel jeu, nous avons eu recours à l’hexagone d’Augustin Sesmat qui complète le carré dit des « oppositions » d’Aristote en ajoutant aux traditionnelles positions A, E, I, O, les sommets U et Y.[24]

---

[24] Quoiqu’informelle, l’analyse de Sesmat s’avère remarquablement systématique, cf. (1951 : T.2, § 117 & 128).



Conformément à l'intuition pragmatique, nous avons interprété alors U comme l'*estimation* qui, en termes de disjonction exclusive, propose une *alternative* entre A, l'Assertion et E, la Dénégation. Quant à Y, le contradictoire de U, il correspond à la simple *Considération* et, *sous la contrainte d'incompatiblité entre A et E*, est définissable comme la conjonction de ¬A et ¬E.



Il restait alors à construire une axiomatique qui rende compte de toutes les relations logiques entre les différents sommets de l'hexagone[25].

3.3 L'axiomatisation des actes véridictionnels

Les actes véridictionnels A, E, I, O, U, Y sont des *opérateurs pragmatiques* qui expriment l'attitude véridictionnelle du locuteur relativement au contenu propositionnel de ce qu'il dit. On peut donc formellement les considérer comme des opérateurs propositionnels, par exemple A*P*, signifie l'assertion de *P*, et E*Q* la dénégation de *Q*, *etc*. (*P* et *Q* étant des méta-variables de propositions, simples ou complexes).

L'analyse du fonctionnement logique de ces actes passe par une axiomatique qui permet de définir rigoureusement leurs relations systématiques. Nous avons ainsi construit une axiomatique qui prend pour idées primitives les opérations d'assertion et de dénégation et qui peut se résumer ainsi :

[25] En annexe de (Vernant 2009), nous présentons une axiomatisation de l'hexagone alternatif ainsi que celle des opérateurs véridictionnels que nous présentons succinctement ici.

IDÉES PRIMITIVES :

A		(assertion)
E		(dénégation)

DEFINITIONS :

D1	$\mathrm{I}P =_{\mathrm{Df}} \neg\mathrm{A}\neg P$	(non assertion)
D2	$\mathrm{O}P =_{\mathrm{Df}} \neg\mathrm{E}\neg P$	(non dénégation)
D3	$\mathrm{U}P =_{\mathrm{Df}} \mathrm{A}P \text{ w } \mathrm{E}P$	(estimation)
D4	$\mathrm{Y}P =_{\mathrm{Df}} \neg\mathrm{U}P$	(considération)

AXIOMES :

AX0	$\vdash (\mathrm{A}P \text{ –> } \neg\mathrm{E}P)$	(Axiome alternatif)
AX1	$\vdash (\mathrm{A}P \text{ –> } P)$	(Axiome d'assertabilité)[26]
AX2	$\vdash \{[\mathrm{A}(P \text{ –> } Q) \circ \mathrm{A}P] \text{ –> } \mathrm{A}Q\}$	(Principe d'assertion)[27]

REGLES DE TRANSFORMATION PRIMITIVES :

R0	SUBSTITUTION	(notée SUB. P/Q)
R1	$\vdash P \Rightarrow \vdash \mathrm{A}P$ [28]	

REGLES DE TRANSFORMATION DERIVEES :

R2	$\vdash (P \text{ –> } Q) \Rightarrow \vdash (\mathrm{A}P \text{ –> } \mathrm{A}Q)$	
R3	$[\vdash \mathrm{A}(P \text{ –> } Q) \circ \vdash \mathrm{A}P] \Rightarrow \vdash \mathrm{A}Q$	(*Modus Ponens*)
R4	$[\vdash \mathrm{A}(P \text{ –> } Q) \circ \vdash \mathrm{E}Q] \Rightarrow \vdash \mathrm{E}P$	(*Modus tollens*)
R5	$\vdash (P \equiv Q) \Rightarrow \vdash (\mathrm{A}P \equiv \mathrm{A}Q)$	(Règle d'extensionnalité)

---

[26] Cet *axiome d'assertabilité* (qui formellement correspond à l'axiome de nécessité) n'affirme rien d'autre qu'en assertant *P*, le locuteur s'engage sur la vérité de *P*. Ce qui ne signifie en rien que *P* soit vrai, mais est *tenu pour vrai* dans le monde discursif proposé par le locuteur. Pour un traitement sémantique, cf. (Vernant 2009 : chap.VI).

[27] Le choix de cet axiome est commandé par notre préoccupation pragmatique puisqu'il correspond structurellement au « principe d'assertion » de Russell. Son sens ici ne doit toutefois pas être confondu avec celui du *Modus ponens*.

[28] L'écriture $\vdash P$ signifie dans cette axiomatique que la formule *P* est une *thèse* du système et « => » est le métasymbole de *dérivabilité*.

Une telle axiomatique mobilise toutes les ressources de la logique formelle standard et en particulier ses règles usuelles de transformation[29]. Mais il s'agit bien d'une *axiomatique appliquée* dans la mesure où elle introduit des opérateurs de nature pragmatique et opère un choix initial d'axiomes qui gouverne l'usage *proprement pragmatique* de l'assertion. Ainsi, A*P* signifie l'assertion de *P* par un locuteur, autrement dit le fait que le locuteur en question s'engage sur la *vérité* de *P*, ce qui, bien entendu, diffère *toto cælo* de l'assertion *logique* de *P*, qui, notée ici $\vdash P$, signifie que la proposition *P* est *prouvable* dans le système formel considéré.

Opérant la symbolisation et la formalisation de la théorie initiale, cette axiomatique garantit au plan de l'expression le caractère explicite et univoque des concepts pragmatiques en jeu.

Au plan du contenu, elle assure la systématicité et l'exhaustivité de l'analyse. Elle impose de compter à titre d'actes véridictionnels, non seulement l'assertion et la dénégation, mais leur négation ainsi que les actes d'estimation et de simple considération. De même, elle requiert la démonstration formelle de la totalité des relations logiquement possibles entre les concepts[30]. Pour ne prendre qu'un exemple, il est aisé de démontrer ce que nous avons appelé la loi de Russell[31] qui stipule que « Si *p* est déniée, non *p* doit être assertée », soit en symboles $\mathrm{E}p \rightarrow \mathrm{A}\neg p$:

[29] Il en va de même pour les règles de bonne formation des formules que nous laissons ici implicites pour simplifier l'exposition.

[30] L'hexagone exprime 15 relations (dont 9 sont symétriques si on excepte les contraposées des subalternes).

[31] Cf. (Vernant 2009 : chap.1).

1	$p \mid \neg p$	Condition
2	E$p \mid$ E$\neg p$	Application de E sur 1
3	E$\neg p \mid$ Ep	2, Commutativité
4	A$p \mid$ Ep	Application T2 sur p [32]
5	E$p \mid$ Ap	4, Commutativité
6	(E$\neg p \to \neg$Ep) ∘ (E$p \to \neg$E$\neg p$)	3, Df Incompatibilité
7	(E$p \to \neg$Ap) ∘ ($\neg$E$p \to$ Ap)	5, Df Incompatibilité
8	E$\neg p \to \neg$Ep	6, Élim. Conjonction
9	$\neg$E$p \to$ Ap	7, Élim. Conjonction
10	E$\neg p \to$ Ap	8, 9, Transitivité
11	E$\neg\neg p \to$ A$\neg p$	10, Sub $p/\neg p$
12	E$p \to$ A$\neg p$	11, double nég. *CQFD*.

Au plan du contrôle, cette axiomatique répond aux exigences métalogiques habituelles. Ainsi, dans la mesure où elle est logiquement équivalente au système modal *T* de Robert Feys[33], elle possède les métapropriétés de consistance, de complétude et de décidabilité[34].

[32] Stipulant que A et E sont incompatibles, ce théorème T2 appartient à notre axiomatique de l'hexagone alternatif qui examine les relations entre A, E, I, O, U, Y, cf. (Vernant 2009 : 236).

[33] Cf. (Feys 1937-8). Ce système se fonde sur l'axiome de nécessité (L$p \to p$) et l'axiome L($p \to q$) $\to$ (L$p \to$ Lq) qui correspond dans notre axiomatique au théorème général 9.

[34] Pour une présentation du système *T* et une démonstration de sa consistance, complétude et décidabilité, cf. (Hugues & Cresswell 1968 : 22-42, 82-104).

3.4 L'axiomatique bipolaire des actes véridictionnels

Telle que nous venons de la présenter, notre axiomatique garde une forme classique en ce qu'elle ne fait figurer que les axiomes admis et, partant, les théorèmes que l'on peut en déduire. Mais comme nous importe du point de vue de la théorisation pragmatique autant *ce que nous rejetons* que ce que nous acceptons, nous devons en proposer une présentation *bipolaire* qui autorise aussi bien la démonstration de tout ce qu'elle rejette – les *contre-théorèmes* – que de ce qu'elle admet – les théorèmes. D'où la nécessité de lui adjoindre ceci :

CONTRE-AXIOME :

CAX1 $\dashv (\neg \mathrm{A}P \to \neg P)$ (contre-axiome de négation)

CONTRE-REGLES DE TRANSFORMATION :

CR0 Substitution (notée : CSub. *P*/*Q*)

CR1 $[\vdash \mathrm{A}(P \to Q) \circ \dashv \mathrm{A}Q] \Rightarrow \dashv \mathrm{A}P$ (Détachement)

CR2 $\{[\dashv (\alpha \to \Gamma) \circ \dashv (\beta \to \Gamma)] \Rightarrow \dashv [\alpha \to (\beta \to \Gamma)]\}$[35]

On dispose alors d'une axiomatique complète de la théorie pragmatique des actes véridictionnels. Explicite, univoque, systématique et exhaustive, cette axiomatique permet une évaluation précise de la théorie de départ dans ses prémisses comme dans toutes ses conséquences, aussi bien en ce qu'elle admet qu'en ce qu'elle refuse.

Pour montrer tout l'intérêt théorique de cette possibilité, arrêtons-nous pour finir sur un cas précis de théorème et de contre-théorème.

---

[35] α et β représentent des propositions simples et Γ des propositions élémentaires conditionnelles. C'est le contre-détachement de Słupecki.

D'un point de vue purement technique, l'enjeu est celui de l'itération de l'opérateur d'assertion. Il est aisé de démontrer dans notre axiomatique l'implication de gauche à droite. On obtient en effet le théorème général 11 à partir de l'axiome 1 par simple substitution :

TG11 $\vdash$ (AAP –> AP)

1	AP –> P	AX1
2	AAP –> AP	Sub. P/AP

Par contre, pour démontrer le *contre-théorème* 1, qui fait jouer l'implication de droite à gauche, il convient de démontrer auparavant le théorème général 8 de contraposition :

TG8 $\vdash$ [(AP –> AQ) ≡ (¬AQ –> ¬AP)]

1	(P –> Q) ≡ (¬Q –> ¬P)	Tautologie
2	(AP –> AQ) ≡ (¬AQ –> ¬AP)	Sub. P/AP ; Q/AQ

Le contre-théorème général 1 s'obtient alors ainsi :

CTG1 $\dashv$ (AP –> AAP)

1	$\dashv$ (¬AP –> ¬P)	CAX1
2	$\vdash$ [(AP –> AQ) ≡ (¬AQ –> ¬AP)]	TG8
3	$\vdash$ [(AP –> AAP) ≡ (¬AAP –> ¬AP)]	2, CSub. Q/AP
4	$\dashv$ (¬AAP –> ¬AP)	1, CSub P/AP
5	$\vdash$ {[(AP –> AAP) –> (¬AAP –> ¬AP)] ∘ [(¬AAP –> ¬AP) –> (AP –> AAP)]}	3, Df. biconditionnel
6	$\vdash$ [(AP –> AAP) –> (¬AAP –> ¬AP)]	5, Élim. conjonction
7	$\dashv$ (AP –> AAP)	6, 4 CR1. *CQFD.*

Est ainsi logiquement démontré *qu'il n'y a pas équivalence entre l'assertion et son redoublement*. On sait qu'une telle équivalence n'est possible que dans un système formel de puissance égale au système modal *S4* et non à un système aussi faible que *T* [36].

Pareil résultat n'est donc en rien logiquement surprenant et remarquable. Toutefois, il possède un intérêt pragmatique déterminant en ce qu'il prend position sur l'interprétation de l'itération de l'assertion.

D'un strict point de vue pragmatique, il convient en effet de ne pas confondre ou assimiler l'assertion et son itération. Ap symbolise l'assertion de p par un locuteur[37]. Le locuteur s'engage sur la vérité du contenu de la proposition p. C'est par

[36] Cf. (Hugues & Cresswell 1968 : 43-44).

[37] Une formalisation plus sophistiquée est possible qui intégre le locuteur, on a alors $A_a p$, cf. (Vernant 2009 : chap.VI).

exemple le cas lorsqu'il énonce : « Il pleut ». Par contre, AA*p* symbolise l'opération qui a pour effet rhétorique de *renforcer* le degré de puissance de l'assertion initiale. Dans la langue naturelle, cela s'exprime par exemple par le fait que notre locuteur énonce cette fois : « J'affirme qu'il pleut ». Pragmatiquement, les deux actes diffèrent manifestement, le premier étant une simple *assertion*, vraie ou fausse, et le second un acte de nature métadiscursive – plus précisément un expositif[38] – qui, en tant que tel, ne peut pas ne pas être vrai dès lors qu'il est produit :

> La phrase « C'est le cas que j'affirme qu'il pleut » a manifestement une valeur de vérité différente de la phrase « Il pleut » (la première peut être vraie sans que l'autre le soit). (Apel 1994 : 43)

Si on admet cette distinction conceptuelle[39], on comprend que l'implication puisse valoir de gauche à droite puisque si on affirme une proposition, on ne peut pas ne pas l'asserter, l'engagement métadiscursif étant plus fort que la simple assertion. Par contre, une simple assertion n'implique pas nécessairement un engagement plus fort. Par où l'on voit que le fait de *rejeter* l'implication de droite à gauche explicite toute une thématisation et une conceptualisation de nature pragmatique[40].

[38] Pour une définition précise, cf. (Vernant 2009 : chap.IV, § 2.1) où nous procédons à une analyse des métadiscursifs en tant que type spécifique d'actes de discours.

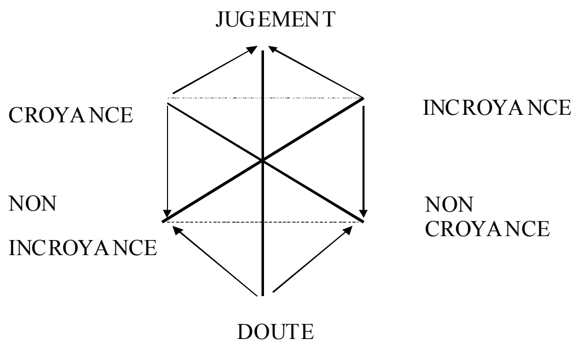
[39] Ce que ne fait pas Searle qui néglige la spécificité des métadiscursifs et assimile indûment « J'affirme qu'il pleut » à un assertif, cf. (Searle 1982 : 61).

[40] Daniel Vanderveken, qui formalise la théorie searlienne, recourt à un système équivalent au système modal *S5* autorisant la réciproque de notre TG11, cf. (Vanderveken 1990).

3.5 La modélisation

Comme on l’a vu, en tant que système formel, une axiomatique appliquée peut recevoir plusieurs modèles. Le premier modèle qui vient à l’esprit est, bien entendu, la théorie qui est à l’origine de l’axiomatisation. Ainsi notre axiomatique appliquée admet pour modèle notre théorisation pragmatique des actes véridictionnels.

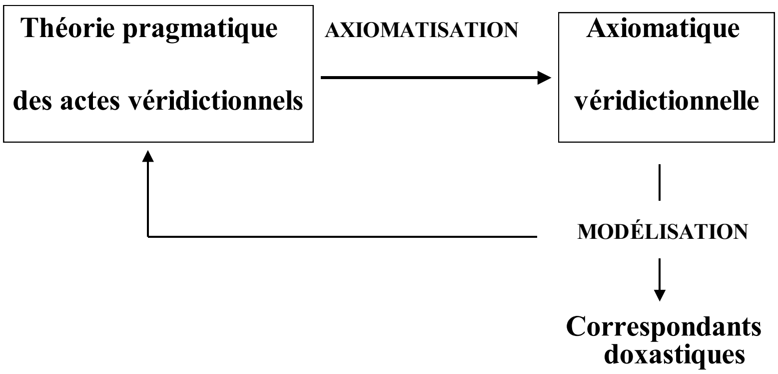
Mais d’autres modèles sont toujours concevables. Dans notre cas, l’axiomatique fournit une *structure formelle* qui vaut non seulement pour les actes de discours, mais aussi pour les *états d’esprit* qui leur sont associés. Ainsi obtient-on l’hexagone suivant qui exprime les relations logiques entre les *correspondants doxastiques* des actes véridictionnels :



Le *Jugement*, qui est un engagement véridictionnel exprimé par l’Assertion ou la Dénégation, repose sur une attitude soit de Croyance, soit d’Incroyance. Le *Doute*, en tant qu’état mental, correspond à la position neutre, suspensive qu’est la simple Considération : à la fois non-croyance et non-incroyance.

Théorie des actes véridictionnels et théorie des états mentaux s’avèrent ainsi deux modèles isomorphes de la même et unique architecture axiomatique. Tout comme elle l'a permis pour les actes de discours, cette architecture formelle permet de clarifier et de systématiser la théorie des actes mentaux. Pour ne prendre qu'un exemple, elle établit logiquement qu'il convient, à l'encontre de ce que l'on fait trop souvent, de ne pas confondre l'incroyance [*disbelief*], qui relève de la dénégation, avec la non-croyance, qui dépend de la non-assertion[41].

Au terme, le processus complet de connaissance que nous avons suivi peut se schématiser ainsi :



La construction axiomatique fournit ainsi une structuration relationnelle abstraite qui peut recevoir plusieurs modèles isomorphes faisant jouer la structure formelle sur des objets de nature différente, en l'occurrence les actes véridictionnels et leurs correspondants doxastiques.

[41] Sur cette distinction importante, cf. (Vernant 2009 : chap.I & VII).

Conclusion

Si l’on considère l’axiomatisation non comme un pur jeu formel n’ayant qu’une valeur expositive, mais comme une activité de formalisation et de systématisation d’une théorie préalable, elle apparaît comme un *ars inveniendi* qui, composant l’étape cruciale du processus de connaissance, en garantit l’abstraction, la généralité, la systématicité et l’exhaustivité ainsi que l’extension éventuelle à d’autres domaines d’objets à travers la mise en correspondance de modèles inédits.

On sait aujourd’hui qu’un système formel peut parfaitement se dispenser d’être axiomatisé, il n’en demeure pas moins, comme nous l’avons montré sur un exemple précis, que la procédure d’axiomatisation d’une théorie particulière présente des vertus incomparables permettant de l’expliciter, de la systématiser et, *in fine,* d’en évaluer la pertinence conceptuelle.

L’axiomatisation vient clore le dynamisme du procès de connaissance en le marquant du sceau de sa nécessité.

Bibliographie

APEL K.-O. 1994. *Le Logos propre au langage humain*, trad. fr. Charrière M. & Cometti J.-P., Paris : L'Éclat.

CAVAILLÈS J. 1981. *Méthode axiomatique et formalisation*, Paris : Hermann.

FEYS R. 1937-38. Les logiques nouvelles des modalités, *Revue Néoscolastique de Philosophie* **40**(1937), 517-553 & **41**(1938), 217-252.

HILBERT D. 1899. *Grundlagen der Geometrie,* Leibzig: Gauss-Weber Festschrift. [Trad. fr. par Rossier P. *Fondements de la géométrie*, Paris: Gabay, 1997].

HILBERT D. 1918. Axiomatisches Denken, *Mathematische Annalen* **78**, 405-415. [Trad. fr. Arnold Reymond, Pensée axiomatique, *L'enseignement mathématique* 1919].

HUGHES G. E. & CRESSWELL M. J. 1968. *An Introduction to Modal Logic*, London: Methuen & Co.

KLEENE S. C. 1971. *Logique mathématique*, trad. fr. par Largeault J., Paris : Armand Colin.

LEIBNIZ G. W. 1875-90. *Die philosophischen Schriften von G. W. Leibniz,* Berlin: Gerhard.

LEŚNIEWSKI S. 1989. *Sur les fondements de la mathématique,* trad. fr. Kalinowski G., Paris : Hermès.

PASCH M. 1882. *Vorlesungen über neuere Geometrie,* Leibzig.

PEANO G. 1899. *Formulaire de mathématiques*, Turin : Bocca.

RUSSELL B. 1903. *Principles of Mathematics,* London: Allen & Unwin.

RUSSELL B. 1959. *Histoire de mes idées philosophiques,* trad. fr. Auclair G., Paris : Gallimard.

RUSSELL B. 2007. *Mysticisme et logique,* trad. fr. Vernant D. *et alii*, Paris : Vrin.

SEARLE J. 1982. *Sens et expression*, trad. fr. Proust J., Paris : Minuit.

SESMAT A. 1951. *Logique*, Paris: Hermann.

TARSKI A. 1972. *Logique, sémantique, métamathématique*, trad. fr. dirigée par Granger G.-G. Paris : A. Colin.

VANDERVEKEN D. 1990. *Meaning and Speech Acts* (Vol. 1 *Principles of Language*, Vol. 2 *Formal Semantics of Success and Satisfaction*), Cambridge University Press.

VERNANT D. 2001. *Introduction à la logique standard*, Paris : Flammarion.

VERNANT D. 2005. The limits of a logical treatment of assertion, in Vanderveken D. (ed.) *Logic, Thought and Action*, Dordrecht: Springer. 276-287.

VERNANT D. 2006. La genèse logique du concept de dénégation de Frege à Słupecki, in Pouivet R. & Rebuschi M. (éds) *La philosophie en Pologne 1918-1939*, Paris : Vrin. 151-178.

VERNANT D. 2009. *Discours et vérité, aspects pragmatiques, dialogiques et praxéologiques de la véridicité*, Paris : Vrin.

WHITEHEAD A. N. & RUSSELL B. 1927. *Principia Mathematica*, Cambridge University Press. [First ed. 1910-13].

WITTGENSTEIN L. 1971. *Carnets 1914-1916*, trad. fr. Granger G.-G., Paris : Gallimard.

L'axiomatisation a-t-elle des limites formelles ?

Denis Miéville

Ce qui montre … que la logique est entrée depuis les temps les plus anciens dans cette voie certaine [la voie sûre de la science], c'est que, depuis Aristote, elle n'a pas eu besoin de faire un pas en arrière, à moins que l'on ne regarde comme des améliorations le retranchement de quelques subtilités inutiles, ou une plus grande clarté dans l'exposition, toutes choses qui tiennent plutôt à l'élégance qu'à la certitude de la science. Il est aussi digne de remarquer que, jusqu'ici, elle n'a pu faire un seul pas en avant, et qu'aussi, selon toute apparence, elle semble arrêtée et achevée. En effet, lorsque certains modernes ont pensé l'étendre en y introduisant certains chapitres,…, cela provient de leur ignorance de la nature propre de cette science. Ce n'est pas étendre les sciences, mais les dénaturer, que de confondre leurs limites. Or celles de la logique sont déterminées très exactement par ceci qu'elle est une science qui expose en détail et démontre rigoureusement les seules règles formelles de toute pensée (que cette pensée soit a priori ou empirique, qu'elle ait telle ou telle origine et tel ou tel objet, qu'elle rencontre dans notre esprit des obstacles accidentels ou naturels).

Si la logique a été si heureuse, elle ne doit cet avantage qu'à son étroite spécialisation, qui l'oblige à faire abstraction de tous les objets de la connaissance et de leur différence, et qui veut que l'entendement ne s'y occupe que de lui-même et de sa forme. Il devait être naturellement beaucoup plus difficile pour la raison d'entrer dans la voie sûre de la science, lorsqu'elle n'a plus seulement affaire à elle-même, mais aussi à des objets. Aussi la logique, comme propédeutique, n'est-elle en quelque sorte que le vestibule des sciences ; et lorsqu'il s'agit de connaissances, on suppose sans doute une logique pour les juger, mais leur acquisition, c'est dans ce qu'on appelle proprement et objectivement les sciences qu'il faut la chercher.

Kant, *Critique de la raison pure*, Préface de la deuxième édition

Préambule

Ces propos d'Emmanuel Kant m'ont toujours intrigué tant par la force de leur certitude que par l'incongruité de leur contenu. Il est vrai que depuis Aristote, en passant par les stoïciens, deux systèmes émergent progressivement ; ces systèmes, par les temps parcourus, vont se sédimenter en ce que l'on nomme aujourd'hui d'une part la logique des propositions et, d'autre part, celle des prédicats. Mais la logique, ou l'« art de penser », n'a eu de cesse d'être discutée, bousculée, interrogée ! Et si elle devient ce qu'elle semble être, un acquis définitif, c'est en fonction des avatars de l'histoire et des accidents qui l'ont conduite à entrer dans un moule non pas arbitraire, mais façonné en fonction de la finalité pour laquelle on voulait la réduire pour répondre à des questions fondatrices.

Tout au long de sa longue histoire, la logique est confrontée à moult questions :

- Existe-t-il d'autres catégories d'activités opératoires logiques que celles associées aux connecteurs dits standard ?
- Les concepts ensemblistes appartiennent-ils au champ de la logique ?
- Qu'est-ce qu'une constante logique, combien y en a-t-il ?
- Les directives inférentielles qui contribuent à la recherche de la vérité sont-elles véritablement et équitablement étudiées ?

Aristote, par exemple, reconnaissait la force d'une opération logique nominale ou propriétale qui permettait de jouer sur la contrariété des notions duales. Ce faisant, il pouvait proposer une solution au problème que pose la loi d'obversion:

> Cette loi fait évanouir le couplage de deux termes au profit de la complémentation, ce qui ne va pas sans quelque artifice : la contradiction purement formelle ne s'associe plus à la contrariété sémantique. La répartition des choses en classes prend désormais le pas sur l'articulation des pensées. (Frey 1987 : 60)

La définition des constantes logiques en termes d'invariance (Bonnay 2007) fait éclater, par extension, le carcan de la logique des propositions et des prédicats dite classique.

Si le statut abréviatif de la définition doit être remplacé par la force créative qu'elle semble porter dans l'aire des activités humaines liées à l'acquisition des connaissances, force est d'admettre que la définition doit alors être inscrite à travers une réelle procédure inférentielle (Leśniewski 1992 ; Miéville 2008).

En traitant de ces questions, l'édifice logique prôné par Kant, et matérialisé formellement en fonction de la complicité que la logique a vécue avec la mathématique, se craquèle. Il est intéressant d'évoquer cette dernière relation ! En effet, le pari logiciste pris tant par Frege que par Russell conduit au développement d'une logique formelle des propositions et des prédicats satisfaisante et suffisante pour tenter d'atteindre une partie des objectifs associés aux fondements de la mathématique ; mais cette construction conduit à un réductionnisme logique qui outrage tout chercheur à la recherche de l'expressivité logique la plus fine. Cette complicité a offert un outil logique, un style et une manière de concevoir la logique élémentaire. La logique des propositions et des prédicats que cette histoire a produite n'est pas la logique des propositions et des prédicats de plus grande extension. Et le propos de cet article esquissera le chemin qui vise à l'appropriation de cette logique maximale, un chemin qui passe nécessairement par une réflexion sur l'axiomatisation et ses limites.

1. Un regard sur la logique classique

Lorsque l'on pose un regard sur la logique classique des propositions et des prédicats, force est d'admettre la pauvreté des catégories logiques qui la constituent. Il ne s'agit certes pas d'un défaut, car ce système remplit l'objectif pour lequel il a été conçu : être la logique mathématique indispensable au projet fondationnel. Toutefois, ce qu'il donne à voir ne saurait satisfaire un logicien en soif d'expressivité logique. L'analyse de ses constituants logiques est, à cet égard, révélatrice.

La logique classique des propositions, en tant que système fermé, contient quatre opérateurs unaires de la catégorie S/S (formatrice de propositions à un argument propositionnel), et seize opérateurs binaires de la catégorie S/SS (formatrice de propositions à deux arguments propositionnels). Cette logique est souvent, et notamment, présentée à partir des seuls connecteurs de la négation et de la conditionnelle. Cet ensemble est adéquat puisqu'il donne accès, par combinatoire et définitions abréviatives, à l'ensemble de tous les connecteurs que le système vise à représenter. Quant à la logique des prédicats, sa seule constante logique propre consiste en une quantification du premier ordre de la catégorie S/(S/N … N) (formatrice de propositions à un argument de la catégorie des fonctions propositionnelles). Cette quantification est du premier ordre ; elle joue sur des variables nominales, habitant le statut de nom singulier. Par ailleurs, un décret arbitraire stipule que toute caractérisation d'une fonction ou d'un prédicat s'effectue dans le champ de la sémantique, c'est-à-dire dans la théorie des modèles. Agissant de cette manière, on exclut de l'activité logique le traitement extensionnel. Cela est bien regrettable !

2. Une ouverture sur la maximalité

Dans le champ du traitement de la vérité et de la prédication, la logique peut offrir davantage que ce que, classiquement, elle donne à voir ; elle peut être plus audacieuse et donner, avec pertinence, tort à Kant. Pour s'en convaincre, il est instructif de considérer les réflexions intellectuelles – parfois les balbutiements – de ceux qui ont contribué à l'émergence de la logique formelle des propositions et des prédicats. Russell [1872-1970] en fait bien entendu partie. Lorsqu'il ébauche ses premiers systèmes, il s'interroge sur la possibilité de fonder la logique des propositions sur la base de l’unique conditionnelle. Ce choix est motivé par une conviction gnoséologique : il lui semble nécessaire de fonder ce système fondamental sur le connecteur porteur de l’idée d’inférence. Si aujourd’hui on se gausse, à tort, de cette apparente naïveté, c’est que l’on est habité par la conviction que ce dont on dispose est l’expression d’une totale perfection. Ce qui est faux ! On ne questionne plus guère les systèmes à disposition et on accepte trop souvent, sans critique ni recul, que les concepts logiques en présence seraient justifiables en soi, parce qu’ainsi saisis depuis les heures glorieuses de l’aube de la logique formelle. Mais Russell a eu l’audace de quantifier sur la catégorie des propositions (1906), et partant, il s’est doté d’un moyen de définir la négation à partir de cet unique connecteur logique de la conditionnelle. Comme le montrent les définitions suivantes, il accédait ainsi à la totalité des connecteurs logiques de la théorie classique :

Définition de la négation
$(\forall p)({\sim}p \supset (p \supset (\forall q)\, q))$ et $(\forall p)((p \supset (\forall q)\, q) \supset {\sim}p)$

Définition de la conjonction
$(\forall pq)((p \wedge q) \supset {\sim}(p \supset {\sim}q))$ et $(\forall pq)({\sim}(p \supset {\sim}q) \supset (p \wedge q))$

La première de ces définitions est particulièrement intéressante et révèle trois points non négligeables. Tout d’abord, elle ouvre la possibilité de définir la logique complète des propositions sur la base de l’unique connecteur de conditionnelle. Il y a également l’usage de la quantification propositionnelle $\forall_S$ associée à un traitement extensionnel particulier et détaché de la dimension existentielle (Miéville 2008). Cela ne laisse pas indifférent le logicien qui s’est toujours inquiété de la double nature de la quantification du calcul des prédicats : tout à la fois associée à la notion d’existence et à l'expression du distributif ! Il y a enfin une ébauche de réflexion à propos de la définition.

Certains logiciens, dont Leśniewski [1886-1939], ont eu le même souci gnoséologique, mais en attribuant la force fondatrice de la logique non pas à la conditionnelle, mais à la biconditionnelle. La raison qui guide Leśniewski est fondée sur sa conviction profonde que la définition est une procédure fondamentale et cognitivement créative. Or la relation d'équivalence logique posée dans la définition entre le *definiens* et le *definiendum* nécessite la présence de la biconditionnelle pour être validée sous la forme logique d'un théorème clairement structuré.

La progression des tentatives pour réaliser ce projet fondateur, basé sur la biconditionnelle est intéressante à suivre.

1ère étape : $L_{\equiv}$

Cette étape consiste en la détermination d'un système minimal $L_{\equiv}$, construit uniquement sur la biconditionnelle. Par combinatoire, il est aisément vérifié que les seuls connecteurs dérivables sont au nombre de quatre : la biconditionnelle $\equiv$[pq]: [1001], le connecteur tautologique T_2 [pq]: [1111], l'antécédent en présence du conséquent p[q] : [1100] et le conséquent en présence de l'antécédent q[p] : [1010]. Il est également possible d'inscrire les définitions des deux connecteurs unaires suivants, T_1[p] : [11] , l'opérateur unaire de tautologie et l'opérateur unaire d' « identité » I[p] : [10].

2e étape : $L_{\equiv} + \forall_S$

C'est la détermination d'un système minimal quantifié. Dans cette tentative, la négation peut désormais être définie :

$$(\forall p)\ (\sim p \equiv (p \equiv (\forall q)\ q))$$

Cette définition offre l'accès à huit connecteurs binaires logiques, à savoir, les quatre connecteurs binaires du système minimal $L_{\equiv}$, auxquels s'ajoutent leurs pendants négatifs. Ce système contient, bien entendu, tous les connecteurs unaires, et donc le connecteur unaire d'anti-tautologie : $\perp_1$ [p] : [00].

3e étape : $L_{\equiv} + \forall_S + \forall_{S/S}$

Il s'agit d'un système fondé sur l'unique connecteur de biconditionnelle et qui autorise une quantification sur deux catégories syntaxico-sémantiques: celle des propositions S et celle des foncteurs unaires S/S. En plus de ce qu'offrait la deuxième étape, il est désormais possible dans un tel système d'inscrire la définition de la conjonction :

$$(\forall pq)\ ((p \wedge q) \equiv ((\forall f)\ (p \equiv ((\forall r)(p \equiv f(r)) \equiv (\forall r)(q \equiv f(r))))))$$

Ce résultat n'est rien moins que celui présenté par Tarski [1902-1983] dans sa thèse de doctorat défendue en 1923 (Tarski 1923, 1972). Cette troisième étape est intéressante à plus d'un titre. Il y a tout d'abord la prouesse de Tarski, une prouesse définitoire qui conduit à obtenir un système complet du calcul des propositions (16 opérateurs binaires et quatre opérateurs unaires). Il y a surtout l'usage et la force d'une quantification portant sur deux catégories syntaxico-sémantiques : S et S/S. Il y a enfin l'expression d'une forme définitoire conforme aux conditions d'une bonne définition et conçue uniquement sur la base du connecteur de la biconditionnelle.

> Le problème pour lequel j'offre une solution est le suivant : *est-il possible de construire un système de la logistique comportant comme seul signe primitif, le signe de l'équivalence* [en fait la biconditionnelle] (en plus, bien sûr, des quantificateurs) ? Ce problème me semble intéressant pour les raisons suivantes. Nous savons qu'il est possible de construire le système de la logistique à l'aide d'un seul terme primitif, utilisant pour cela, soit le signe d'implication [en fait la conditionnelle], si l'on veut suivre l'exemple de Russell, soit l'idée de

> Sheffer qui introduit spécialement à cet effet le signe d'incompatibilité. Pour réellement parvenir à ce but, il faut se garder de faire entrer dans les énoncés des définitions tout terme constant particulier, distinct à la fois du terme primitif adopté, des termes préalablement définis, et du terme à définir. Le signe d'équivalence employé comme terme primitif présente à ce point de vue l'avantage de permettre d'observer strictement cette règle et de donner en même temps aux définitions une forme aussi naturelle que commode, celle d'une équivalence. (Tarski 1972 : 3-4)

4^e^ étape : $L_{\equiv} + \forall_S + \forall_{S/SS} + \forall_{\text{toute catégorie préalablement introduite}}$

Cette étape correspond aux choix de Leśniewski. Suite aux travaux de Tarski, Leśniewski propose la base axiomatique suivante :

A1: $(\forall pqr)(((p \equiv r) \equiv (q \equiv p)) \equiv (r \equiv q))$
A2: $(\forall pqr)((p \equiv (q \equiv r)) \equiv ((p \equiv q) \equiv r))$
A3: $(\forall pg)[(\forall f)(g(pp) \equiv ((\forall r)(f(rr) \equiv g(pp)) \equiv$
$(\forall r)(f(rr) \equiv g((p \equiv (\forall q)(q))p)))) \equiv (\forall q)(g(qp))]$

Ces axiomes présentent effectivement et explicitement deux types de quantification : $\forall_S$ et $\forall_{S/SS}$. A partir de cette base, il est possible de définir tous les connecteurs de la logique classique. Par ailleurs, elle est posée comme un tremplin pour accéder à de nouvelles constantes logiques et, nonobstant, à de nouvelles catégories syntaxico-sémantiques. Pour rendre cet accès possible, il est nécessaire de disposer d'une procédure définitoire construite sur le connecteur de biconditionnelle, une procédure autorisant l'introduction de nouvelles catégories et de nouvelles constantes.

Ainsi donc, Leśniewski propose un système des propositions maximal. Il le présente (Leśniewski 1929, 1992) avec un très haut degré de précision et le nomme *protothétique*. Son travail explicite de manière formelle les règles de procédures inférentielles nécessaires à l'élaboration progressive de son système.

Ces règles sont au nombre de cinq : la règle de définition, la règle de substitution, la règle de distribution des quantificateurs, la règle de détachement et la règle d'extensionnalité. J'ai présenté ailleurs ces procédures inférentielles, je me contenterai donc ici d'en indiquer les références : (Miéville 1984, 2001, 2004, 2009).

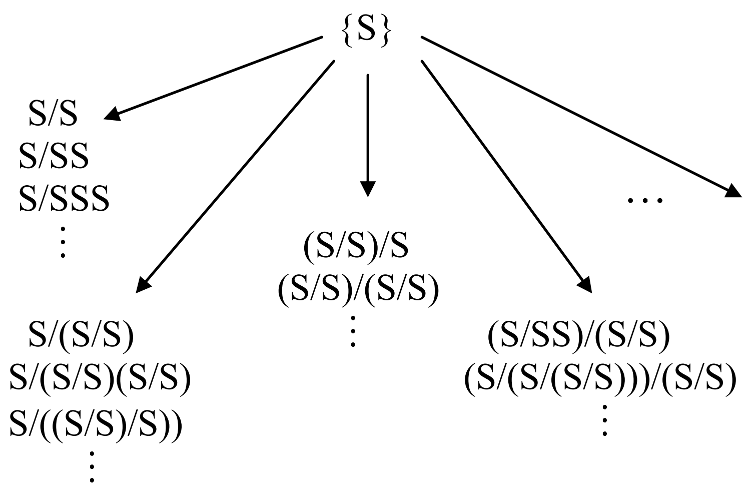
Cette logique des propositions maximale est potentiellement complète en termes des catégories syntaxico-sémantiques qu'il est possible de concevoir sur la base de la catégorie basique des propositions S ; elle est également complète du point de vue de l'extension des connecteurs logiques de chacune des catégories qu'elle présente. La grammaire inductive et le schéma suivants sont de nature à nous imprégner de cette richesse :

i) S est une catégorie syntaxico-sémantique ;

ii) Si $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont des catégories syntaxico-sémantiques, alors $(C / C_1\ C_2 \ldots C_n)$ est une catégorie syntaxico-sémantique.
(Il s'agit de la catégorie formatrice de la catégorie C à partir de *n* arguments dont le premier est de la catégorie C_1, le deuxième de la catégorie C_2, … le $n^{\text{ième}}$ de la catégorie C_n ; par convention, on supprime les parenthèses extérieures).

iii) Rien n'est une catégorie syntaxico-sémantique sinon par ce qui précède.

On accède ainsi à une extension maximale de catégories qui peut être esquissée de la manière suivante :



Cet édifice catégoriel est impressionnant et laisse voir deux familles de catégories syntaxico-sémantiques. Il y a d'une part les catégories introduites par des définitions dites *régulières*, exprimant une équivalence comme :

$$F(x, y, \ldots, z) \leftrightarrow E_{xy\ldots z}$$

Cette équivalence est honorée dans le système sous la forme d'une thèse-définition conçue sur l'opérateur de biconditionnelle de la manière suivante :

$$\vdash (\forall xy\ldots z)(\, F(x, y, \ldots z) \equiv E_{\,xy\ldots z}\,)$$

Sont introduites par de telles définitions des constantes de catégories comme, par exemple, S/SS ou S/(S/S)(S/S).

D'autre part, il y a les catégories introduites par des définitions dites *paramétrées*, exprimant une équivalence

$$F(x)(y)\ldots(z) \leftrightarrow E_{xy\ldots z}$$

Cette seconde sorte d'équivalence est également honorée dans le système par une thèse-définition, mais avec la forme suivante :

$$\vdash (\forall xy\ldots z)\,(\,F(x)(y)\ldots(z) \equiv E_{\,xy\ldots z}\,)$$

Les catégories (S/S)/S ou ((S/S)/S)/SS sont des exemples concernés par les définitions paramétrées.

J'ajoute que, dans le cadre de la protothétique, il est possible de développer une théorie sémantique rigoureuse représentant chacun des connecteurs constants qui y est progressivement introduit (Miéville 1999, 2004 ; Joray 2001).

3. Une expansion maximale de la logique des propositions est-elle sans conséquence syntaxique ?

Penser à une logique maximale donnant un accès potentiel à tous les connecteurs de toutes les catégories syntaxico-sémantiques est un projet qui passe par une large réflexion sur la manière d'inscrire, progressivement, la totalité des foncteurs logiques. Généralement, et presque exclusivement, les systèmes formels sont présentés de manière fermée. J'entends par là que, façonnés par une longue histoire qui a instruit leur aboutissement, ils apparaissent dans la plénitude achevée de leur maturité. Ils présentent un nombre fini de significations primitives et un nombre fini de familles d'actions qu'il est possible de mettre en œuvre. Leur présentation répond donc à une grammaire exhaustive et totalement explicitable. Chaque inscription de la langue qui les structure est catégoriellement et sémantiquement identifiable ; chaque inscription est ainsi un symbole *type*. Dans une présentation standard du système formel de la logique des propositions classique, le symbole p_2^0 représente une proposition atomique ; le symbole ≡ représente la biconditionnelle, à savoir un connecteur binaire de la catégorie S/SS ; le symbole ~ représente la négation propositionnelle, de catégorie S/S. Ainsi, quelle que soit l'expression bien formée du système, la signification de chaque signe est reconnaissable par sa forme. Celle-ci renvoie à une détermination classificatoire univoquement déterminable. Dans cette culture logique, un signe, une forme, renvoie à une abstraction d'inscription, un « type » ou un *sign-design* (Martin 1958 : 65). Cela est possible chaque fois que le système présente de manière exhaustive l'ensemble des catégories, des constantes et des foncteurs qu'il s'est approprié pour en fournir une synthèse fonctionnelle logique. Cette approche ne convient plus lorsque le système ne donne pas d'emblée un accès exhaustif à tous les concepts qui sont susceptibles d'y être investigués. Dans un système maximal, il est en effet exclu de disposer d'une façon actuelle d'une acception exhaustive de tous les concepts logiques que le système peut contenir. Dans cette perspective, l'approche catégorielle ne suffit plus et il est nécessaire d'aborder la présentation des théories formelles d'une tout autre manière. Cette nouvelle présentation est essentiellement associée à l'idée de développement inscriptionnel. Dans ce cadre, une inscription est considérée comme un « token » ou un *sign-event* (Martin 1958 : 65), sa reconnaissance est toujours contextuelle.

Pour entrer dans une dynamique de reconnaissance contextuelle, il est indispensable de se donner un socle à partir duquel proposer une base axiomatique contenant les contextes primitifs déclarés au début du projet. Ainsi, et relativement à la protothétique abordée, cette base consistera en les trois axiomes (et non pas des schémas d'axiomes), qui sont ici réécrits en fonction de la perspective contextuelle :

$$A1: \lfloor pqr \rfloor \lceil \equiv (\equiv (\equiv (pr) \equiv (qp)) \equiv (rq)) \rceil$$

$$A2: \lfloor pqr \rfloor \lceil \equiv (\equiv (p \equiv (qr)) \equiv (\equiv (pq)\ r)) \rceil$$

$$A3: \lfloor pg \rfloor \lceil \equiv (\lfloor f \rfloor \lceil \equiv (g(pp) \equiv (\lfloor r \rfloor \lceil \equiv (\ f(rr)\ g(pp)) \rceil \\ \lfloor r \rfloor \lceil \equiv (f(rr)\ g(\equiv (p \lfloor q \rfloor \lceil q \rceil)\ p)) \rceil)) \rceil \lfloor q \rfloor \lceil\ g(pq) \rceil) \rceil$$

Comme on le constate, il s'agit d'une écriture préfixée qui conserve pourtant l'usage des parenthèses. La raison de ce choix est essentielle: dans le cadre théorique inscriptionnel, les parenthèses ne jouent pas seulement leur rôle usuel de séparateurs, mais servent également d'indice catégoriel, et ceci à une exception près, constituée par les des deux paires de parenthèses suivantes:

$$\lfloor \ldots \rfloor \quad \text{et} \quad \lceil \ldots \rceil$$

La paire de parenthèses $\lfloor \ldots \rfloor$ servira à indiquer qu'il est question d'un *quantificateur* portant sur un dire « universel » ; il s'agit d'une manière d'exprimer une généralisation par rapport à une catégorie précisée.

La paire de parenthèse $\lceil \ldots \rceil$ servira à indiquer un *sous-quantificateur*, c'est-à-dire à délimiter l'expression sur laquelle porte un quantificateur.

La concaténation de la première paire avec la seconde

$$\lfloor \ldots \rfloor \lceil \ldots \rceil$$

sera l'indicateur d'une *généralisation*.

La présence d'une inscription dans un sous-quantificateur, une inscription qui n'est pas une parenthèse et qui correspond à une inscription équiforme dans le quantificateur aura le statut de *variable*. Il n'y a donc pas de liste de variables préalablement définies. Ce statut est décidable en contexte.

La présence d'une inscription dans un sous-quantificateur, une inscription qui n'est pas une parenthèse et qui ne correspond pas à une inscription équiforme dans le quantificateur aura le statut de *constante*. Il n'y a donc pas de liste de constantes préalablement définies. Ce statut est décidable en contexte.

Ainsi, dans le premier axiome

$$A1: \lfloor pqr \rfloor \ulcorner \equiv (\equiv (\equiv (pr) \equiv (qp)) \equiv (rq)) \urcorner$$

les inscriptions p, q et r ont le statut de variable et l'inscription ≡ celui de constante. L'analyse aurait été la même si l'axiome avait été écrit de la manière suivante :

$$\lfloor \pi\theta\rho \rfloor \ulcorner \equiv (\equiv (\equiv (\pi\rho) \equiv (\theta\pi)) \equiv (\rho\theta)) \urcorner$$

Il s'agit maintenant de fixer clairement les catégories auxquelles appartiennent ces diverses inscriptions variables ou constantes. Un choix est à faire et à respecter ; je pose dès lors que toute inscription inscrite dans le contexte à deux places et possédant les parenthèses équiformes à (--), appartiendra à la catégorie des propositions, S. De plus, je pose que toute inscription qui n'est pas une parenthèse et qui précède immédiatement un contexte équiforme à (--), comme dans Ψ(--), appartient à la catégorie des foncteurs formateurs de propositions à deux arguments de la catégorie des propositions, S/SS. Enfin, j'impose que toute inscription simple ou complexe, inscrite dans un sous-quantificateur et le saturant est de la catégorie des propositions.

Avec ces choix, je n'ai nul besoin de disposer d'une liste de constantes ou de variables prédéterminées pour reconnaître le statut catégoriel des inscriptions, le contexte y subvient sans équivoque. Ainsi par exemple, dans l'axiome A3, ce sont ces seuls critères qui permettent l'identification de toutes les inscriptions qui ne sont pas des parenthèses (ces dernières n'étant attachées à aucune catégorie logique).

A3: ⌊pg⌋⌈≡ (⌊f⌋⌈ ≡ (g(pp) ≡ (⌊r⌋⌈ ≡ (f(rr) g(pp))⌉
⌊r⌋⌈ ≡ (f(rr) g(≡ (p ⌊q⌋⌈q⌉) p))⌉))⌉⌊q⌋⌈ g(pq)⌉)⌉

Les inscriptions simples p, r et q sont des variables de la catégorie des propositions S. Elles sont des variables car chacune d’elles possède une inscription équiforme dans le quantificateur qui correspond au sous-quantificateur qui la contient. Elles sont de la catégorie S des propositions parce qu’elles sont soit inscrites dans un contexte à deux arguments équiforme à (--), soit elles saturent un sous-quantificateur, à l’image de l’inscription ⌈q⌉. Les inscriptions f et g sont des variables parce qu’elles possèdent chacune une inscription équiforme dans le quantificateur correspondant au sous-quantificateur qui la contient. Elles sont de la catégorie S/SS, formatrice de propositions à deux arguments de la catégorie des propositions, parce qu’elles précèdent immédiatement des contextes à deux arguments équiformes à (--). Enfin, et pour la même raison, chaque inscription équiforme à ≡ dans A3 est de la catégorie S/SS car elle précède des contextes à deux arguments équiformes à (--), chaque argument sur lesquels elle porte dans A3 étant une entité complexe de la catégorie des propositions. De plus, les inscriptions équiformes à ≡ possèdent dans A3 le statut de constante dans la mesure où elles ne sont pas des parenthèses et ne possèdent pas d’inscription équiforme dans le quantificateur qui leur est associé.

Au premier temps d’un système de type protothétique, il n’existe que ces trois axiomes (et non pas des schémas d’axiome) dont toute inscription est univoquement déterminable en fonction de sa place dans l’expression, de sa relation à son environnement inscriptionnel, et de la manière avec laquelle elle est inscrite dans les contextes qui la concernent. Ainsi donc, au premier temps d’un système de type protothétique par rapport auquel il n’existe que ces trois axiomes, la bibliothèque des catégories, des contextes et des constantes est la suivante :

Catégories	contextes	constantes
S	inscription dans (--)	aucune
S/SS	inscription devant (--)	$\equiv$

Pour avoir accès à d'autres catégories et/ou entités logiques, il est nécessaire de construire sur cet acquis en faisant usage d'une procédure définitoire explicitement déclarée. Celle-ci est du reste relativement simple à exposer.

4. Où il est question de la procédure définitoire

Partant du fait que toute définition explicite établit une relation d'équivalence entre un *definiens* (ce qui permet de définir) et une *definiendum* (ce qui est défini), et m'appuyant sur le fait que toute relation d'équivalence entre deux propositions est honorée pour autant que de l'opération de biconditionnelle entre ces deux expressions résulte une tautologie, je poserai que la procédure définitoire inscrit une thèse (je l'indiquerai avec le symbole méta-linguistique $\vdash$) de la forme quantifiée et biconditionnelle suivante :

$$\vdash \lfloor \alpha\beta...\gamma \rfloor \ulcorner \equiv (\ \Psi[\![\alpha\beta...\gamma]\!]\ E_{\alpha\beta...\gamma}) \urcorner$$

L'inscription équiforme à $\Psi[\![\alpha\beta...\gamma]\!]$ constitue le *definiendum* ; il s'agit d'une fonction dont l'inscription Ψ est le foncteur constant et les inscriptions $\alpha\beta...\gamma$ les variables.

Les parenthèses en « contour » sont à considérer ici comme des méta-parenthèses ; j'en expliquerai le fonctionnement plus loin.

L'inscription équiforme à $E_{\alpha\beta...\gamma}$ constitue le *definiens* ; elle doit être une expression conforme à l'état actuel du système. Elle ne peut être conçue que sur la base des catégories, et donc des constantes, que le système connaît actuellement.

Aucune inscription du *definiendum* ne doit être répétée. Les inscriptions de statut variable du *definiendum* doivent être également présentes dans le *definiens*, et vice versa.

Ces conditions sont conformes aux conditions de bonne définition explicite (Carnap 1949 : 88sqq). Elles permettent d'éviter toute ambiguïté, toute confusion et toute contradiction.

Au premier temps de la genèse d'un système développemental, il n'existe donc que les trois axiomes ; ceux-ci, de manière contextuelle, ne donnent à voir que deux catégories reconnaissables par rapport au contexte dans lequel ils apparaissent, et une seule constante (cf. ci-dessus).

La notion de *contexte*, un parenthèsage contenant un nombre fini de places, est une notion fondamentale pour la lecture catégorielle des inscriptions composant une expression ; elle est la clé de la détermination catégorielle. En effet, toute fonction est de la forme $\Psi[\![\alpha\beta...\gamma]\!]$ et appartient à la catégorie des propositions S. Ainsi, dans $\Psi[\![\alpha\beta...\gamma]\!]$, la catégorie du foncteur Ψ est $S/c_\alpha \dots c_\gamma$, à savoir celle des foncteurs formateurs de la catégorie des propositions S et portant sur *n* arguments, dont le premier appartient à la catégorie c_α de l'inscription α, … et le $n^{\text{ième}}$ à la catégorie c_γ de l'inscription γ. Chaque identification catégorielle d'une inscription est déterminée par la place de celle-ci dans un contexte et par la forme des parenthèses de celui-ci.

Sur la base de ce qui précède, il est possible dès lors de procéder, à partir des notions primitives, à une expansion progressive des constantes et des catégories syntaxico-sémantiques. Pour ce faire, il s'agit chaque fois de construire le *definiens* qui convient, en fonction des constantes et des catégories syntaxico-sémantiques que le système contient actuellement.

La fonction $\Psi[\![\alpha\beta...\gamma]\!]$, qui porte le statut de *definiendum*, doit être composée de l'inscription d'un foncteur constant Ψ, qui précède un contexte parenthèsé $[\![\alpha\beta...\gamma]\!]$, contenant toutes les variables de la fonction Ψ.

1) Si le foncteur appartient à une catégorie que le système contient actuellement, les parenthèses de ce contexte doivent être équiformes à ce qui a été préalablement choisi.
2) Si le foncteur est destiné à appartenir à une catégorie que le système ne connaît pas encore, le choix des parenthèses est libre à l'exclusion de toutes celles identifiant déjà une catégorie différente et contenant le même nombre de paramètres.

Exemples de définitions

Je décide d'inscrire une définition qui porte l'opération de *négation propositionnelle*. Pour ce faire je ne dispose actuellement que de l'opérateur de la biconditionnelle propositionnelle associé à son contexte (--), et de l'existence des deux catégories S et S/SS. L'opérateur de négation est un opérateur unaire destiné à être de la catégorie S/S ; cette catégorie n'existe pas encore dans le système. Il est donc indispensable de lui associer un contexte qui permettra de l'identifier sans équivoque. Ce contexte ne comportera qu'un seul argument. Tout choix de parenthèses est actuellement possible, même celui équiforme aux parenthèses (et). En effet, l'opérateur étant unaire, les contextes (--), binaire, et (-), unaire, ont bien des parenthèses équiformes, mais ils sont distinguables par leur nombre d'arguments. Ce choix n'introduit donc aucune confusion. Quant au *definiens,* je proposerai celui déjà discuté plus haut:

Ecriture conventionnelle (non contextuelle):
$\vdash (\forall p)\ ({\sim}(p) \equiv (p \equiv (\forall q)\ q))$

Ecriture contextuelle (conforme au développement du système):
$\vdash \llcorner p \lrcorner \ulcorner \equiv ({\sim}(p) \equiv (p \llcorner q \lrcorner \ulcorner q \urcorner)) \urcorner$

Je décide désormais d’inscrire une définition qui porte l’opération de la *conjonction propositionnelle*. Pour ce faire je ne dispose actuellement que de l’opérateur de la biconditionnelle propositionnelle ≡, associé à son contexte (--), de l’opérateur unaire de la négation propositionnelle associé au contexte (-), et de l’existence de trois catégories S, S/SS et S/S. La conjonction propositionnelle est un opérateur binaire destiné à être de la catégorie S/SS ; cette catégorie existe actuellement dans le système. Il est donc indispensable de respecter le contexte qui lui a déjà été attribué, i.e. (--). Le respect de ce choix est indispensable afin de ne générer aucune confusion. Quant au *definiens*, je proposerai ici aussi celui déjà présenté plus haut:

Ecriture conventionnelle:
$\vdash (\forall pq)\ ((p \wedge q) \equiv ((\forall f)\ (p \equiv ((\forall r)(p \equiv f(r)) \equiv (\forall r)(q \equiv f(r))))))$

Ecriture contextuelle:
$\vdash \llcorner pq \lrcorner \ulcorner \equiv (\ \wedge(pq) \equiv (\llcorner f \lrcorner \llcorner \equiv (p \equiv (\llcorner r \lrcorner \ulcorner \equiv (pf(r)) \urcorner \llcorner r \lrcorner \ulcorner \equiv (qf(r)) \urcorner)) \urcorner$

Je décide d’inscrire une définition qui porte l’opération de la *conditionnelle propositionnelle*. Pour ce faire, je ne dispose actuellement que de l’opérateur de la biconditionnelle propositionnelle ≡ et de l’opérateur de la conjonction propositionnelle ∧, associés à leur contexte (--), de l’opérateur unaire de la négation propositionnelle ~, associé au contexte (-), et de l’existence de trois catégories S, S/SS et S/S. L’opérateur de la conditionnelle propositionnelle est destiné à être de la catégorie S/SS ; cette catégorie existe actuellement dans le système. Il est donc indispensable de respecter le contexte (--). Le respect de ce choix est indispensable afin de ne générer aucune confusion. Quant au *definiens*, je proposerai de le construire de la manière suivante :

Ecriture conventionnelle:
$\vdash (\forall pq)\ ((p \supset q) \equiv \sim (p \wedge \sim q))$

Ecriture contextuelle:
$\vdash \lfloor pq \rfloor \ulcorner \equiv (\supset (pq) \sim (\wedge (p \sim (q)))) \urcorner$

Enfin, je décide de proposer une définition qui inscrit dans le système l'opération *binaire de la biconditionelle d'ordre supérieur*. Celle-ci est destinée à agir sur deux arguments dont chacun appartient à la catégorie S/S ; la catégorie de l'opération visée est donc S/(S/S)(S/S). Pour ce faire je ne dispose actuellement que de l'opérateur de la biconditionnelle propositionnelle ≡, de l'opérateur de la conjonction propositionnelle ∧, de l'opérateur de la conditionnelle propositionnelle ⊃, associés à leur contexte (--), et de l'opérateur unaire de la négation propositionnelle ~, associé au contexte (-) ; à ce stade de la construction, trois catégories sont présentes : S, S/SS et S/S. Ce nouvel opérateur de biconditionnelle non propositionnelle est destiné à être un opérateur binaire de la catégorie S/(S/S)(S/S) ; cette catégorie n'existe pas actuellement dans le système. Il est donc indispensable de choisir un contexte à même de l'identifier. Tous les choix de parenthèses sont possibles, à l'exclusion de celles équiformes à (et). En effet ce choix entraînerait une confusion entre la catégorie attestée dans le système et identifiant la catégorie S/SS à deux arguments et celle destinée à être identifiée à la catégorie S/(S/S)(S/S), à deux arguments également. Je proposerai, pour cette nouvelle catégorie S/(S/S)(S/S), le contexte à deux arguments suivant : [--]. Quant au *definiens*, je l’inscrirai de la manière suivante en fonction de ce dont je dispose actuellement :

Ecriture contextuelle:
$\vdash \lfloor fg \rfloor \ulcorner \equiv (\equiv [fg]\ \lfloor p \rfloor \ulcorner \equiv (f(p)\ g(p)) \urcorner\ ) \urcorner$

Cette inscription paraît ésotérique et ambigüe, mais il n’en est rien ! En effet, l’analyse systématique et en contexte de toute inscription de l’expression produit un verdict classificatoire univoque.

1. $\vdash \lfloor fg \rfloor \ulcorner \equiv ($ *definiendum definiens* $) \urcorner$. Il s'agit bien du moule conforme à une thèse définitoire et le *definiendum,* tout comme le *definiens* appartiennent à la catégorie des propositions, S.

2. *Le definiens* est une expression équiforme à celle-ci : $\lfloor p \rfloor \ulcorner \equiv (f(p)\ g(p)) \urcorner$. L'inscription p est de la catégorie des propositions parce qu’elle sature un contexte à un argument équiforme à (-). Les inscriptions f et g sont de la catégorie des foncteurs formateurs de proposition à un argument propositionnel S/S, car elles précèdent l’une et l’autre un contexte à un argument équiforme à (-), qui identifie cette catégorie.

3. Quant au *definiendum,* $\equiv [fg]$, la catégorie de ses inscriptions f et g est connue grâce à l’analyse du contenu inscriptionnel du *definiens* qui vient d’être effectuée. Le *definiendum* $\equiv [fg]$ appartient à la catégorie des propositions ; l’inscription $\equiv$ qui précède l’inscription [fg] est donc un foncteur constant binaire qui opère sur deux opérandes de la catégorie des foncteurs unaires propositionnelles S/S et produit une expression de la catégorie des propositions : S/(S/S)(S/S). Il était donc

indispensable de choisir d'autres parenthèses que celles équiformes à (et), sous peine d'introduire une confusion grave avec la catégorie des foncteurs propositionnels à deux arguments identifiant la catégorie S/SS, dont le contexte est (--). C'est la raison pour laquelle j'ai choisi les parenthèses équiformes à [et] pour inscrire le contexte à deux arguments [--].

4. A ce point de l'exposé, le lecteur attentif devrait s'étonner ! En effet, le foncteur inscrit devant le contexte [--] du *definiendum* ≡ [fg] est équiforme à celui qui précède à plusieurs reprises le contexte équiforme à (--), dans des expressions comme ≡(pq). N'existe-t-il pas une confusion manifeste entre une forme qui partagerait deux statuts catégoriels différents, S/SS et S/(S/S)(S/S) ? Il n'en est rien, car, je le rappelle, les inscriptions sont des inscriptions « token », elles n'ont de signification que dans le contexte où elles apparaissent. Ici, l'inscription ≡ devant le contexte (--) prend le statut catégoriel S/SS, et ≡ devant le contexte [--] prend le statut catégoriel S/(S/S)(S/S). Il n'y a donc aucune confusion ! Un système inscriptionnel autorise donc des signes polysémiques. Cette dernière définition ne peut plus être exprimée dans une écriture conventionnelle sans générer quelque ambigüité. En effet, dans cette écriture, rien (i.e. aucun contexte) ne permettrait de distinguer les deux significations différentes d'un même signe :

$$\vdash\ (\forall fg)((f \equiv g) \equiv (\forall p)(f(p) \equiv g(p)))$$

Bibliothèque après cette succession de définitions :

Catégories	contextes	constantes
S	dans contexte (-)	aucune
S/S	devant contexte (-)	~
S/SS	devant contexte (--)	≡, ∧, ⊃
S/(S/S)(S/S)	devant contexte [--]	≡

Cette saisie progressive peut être poursuivie pour donner accès à tous les foncteurs propositionnels désirables par rapport à la quête logique conduite. Ce développement, ici restreint aux fonctions et catégories dites régulières, peut être généralisé aux fonctions paramétrées. Il peut également être étendu à tout l'édifice prédicatif maximal, à savoir à des systèmes incluant la catégorie N des noms comme seconde catégorie primitive. L'ouverture à la maximalité est alors magistrale et l'esquisse de l'arbre catégoriel suivant en suggère l'importance :

{S,N}

S/S
S/N
S/NN
⋮

S/(S/N)
S/((S/N)/N))
⋮

N/N
N/NN
N/(S/N)
⋮

(S/N)/(S/N)
(N/(S/N))/(S/N)
(N/NN)/NS(S/SN)
⋮

…

Cette édification progressive est réglée de manière extrêmement précise par des procédures inférentielles formalisées par Leśniewski (1929) et axiomatisées par Rickey (1972, 1973), Miéville (2009).

Conclusion

L'approche axiomatique n'a pas de limite formelle, mais si elle veut remplir le défi d'être à même de capter de manière maximale le projet logique qu'elle investit, elle doit modifier sa manière de procéder. Cette approche doit faire acte d'humilité et accepter d'être complétée par une procédure forte et efficace autorisant le développement progressif et créatif du système dont elle inscrit les premières significations primitives. Elle doit donc être munie d'une véritable règle de définition autorisant notamment l'introduction de nouvelles catégories syntaxico-sémantiques ; elle doit expliciter une règle de substitution pouvant être mise en œuvre pour toute catégorie introduite. But not the least, elle doit admettre une évolution fondamentale dans sa manière d'être inscriptionnellement saisie : à la saisie catégorielle conventionnelle, elle doit alors habiter la perspective contextuelle, parfois nommée *inscriptionnelle*.

Une extension maximale de la logique des propositions et des prédicats passe donc par une rupture profonde avec la manière standard de présenter ces logiques en termes de systèmes formels. Tout symbole porte une signification uniquement en fonction de son environnement inscriptionnel. Par ailleurs, une procédure définitoire explicite devient le moteur d'extensions, créative des concepts logiques à saisir.

La base axiomatique (*axioma* de *axioun*) doit accepter qu'elle n'est plus seule à « juger valable », mais qu'il est indispensable que lui soit associée une procédure qui ne soit plus un « finir » (« définition » : du latin *definire* de *finire*) mais un « commencer » que j'aime à nommer une « décominition » (du latin *cominitiare*).

Bibliographie

BONNAY D. 2007. *Qu'est-ce qu'une constante logique ?* Thèse de doctorat en philosophie, Université de Paris I.

CARNAP R. 1949. *The logical Syntax of Language,* London : Routledge & Kegan.

FREY L. 1987. De la négation dans la logique d'Aristote, *Revue Européenne des Sciences Sociales* **25** (77), 45-60.

JORAY P. 2001. *La subordination logique. Une étude du nom complexe dans l'ontologie de S. Leśniewski,* Berne : P. Lang.

JORAY P. 2005. *La quantification dans la logique moderne,* Paris : L'Harmattan.

JORAY P. & MIÉVILLE D. (éds). 2008. *Définition. Rôles et fonctions en logique et en mathématiques. Actes du colloque de Neuchâtel, 19-20 octobre 2007,* Université de Neuchâtel : *Travaux de logique* **19**.

LEŚNIEWSKI S. 1929. Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik, *Fundamenta Mathematicae* **14**, 1-81. [Trad. anglaise dans Leśniewski 1992]

LEŚNIEWSKI S. 1992. *Collected Works* I, II, S.J. Surma, J.T. Srzednicki, D.I. Barnett (eds), Varsovie : PWN, Polish Scientific Publisher ; Dordrecht : Kluwer.

MARTIN N. M. 1989. *Systems of Logic,* Cambridge University Press.

MIÉVILLE D. 1984. *Un développement des systèmes logiques de S. Leśniewski. Protothétique-Ontologie-Méréologie.* Berne : P. Lang.

MIÉVILLE D. (éd.) 1999a. *Rôle et enjeux de la notion de catégorie en logique,* Université de Neuchâtel : *Travaux de logique* **13**.

MIÉVILLE D. 1999b. Expansion catégorielle en logique, dans Miéville 1999a, 1-41.

MIÉVILLE D. 2001. *Introduction à l'œuvre de S. Leśniewski.* Fascicule I : La protothétique. Université de Neuchâtel : *Travaux de logique*.

MIÉVILLE D. 2004. *Introduction à l'œuvre de S. Leśniewski.* Fascicule II : L'ontologie. Université de Neuchâtel : *Travaux de logique*.

MIÉVILLE D. 2008. D'une définition à l'autre, dans Joray & Miéville 2008, 159-175.

MIÉVILLE D. 2009. *Introduction à l'œuvre de S. Leśniewski.* Fascicule VI : La métalangue. Université de Neuchâtel : *Travaux de logique*.

RICKEY V. F. 1972. Axiomatic Inscriptional Syntax, Part I : The Syntax of Protothetic, *Notre Dame Journal of Formal Logic* **13**, 1-33.

RICKEY V. F. 1973. Axiomatic Inscriptional Syntax, Part II : The Syntax of Ontology, *Notre Dame Journal of Formal Logic* **14**, 1-52.

RUSSELL B. 1906. The Theory of Implication. *American Journal of Mathematics* **28**, 159-202.

TARSKI A. 1923. Sur le terme primitif de la logistique, *Fundamenta Mathematica* **4**, 196-200. [Repris dans Tarski 1972, vol. 1]

TARSKI A. 1972. *Logique, Sémantique, Métamathématique 1923-1944*, 2 vol. Paris : A. Collin.

TARSKI A. 1983. *Logic, Semantics, Metamathematics*, Indianapolis : Hackett (1ère edition 1956).

WHITEHEAD A. N. & RUSSELL B. 1910, 1912, 1913. *Principia Mathematica*, Cambridge University Press.

Axiomatiques minimales et définitions : la thèse de Tarski sur le calcul biconditionnel

Pierre Joray

1. Introduction : axiomatique et définition explicite

Si l'on considère la méthode axiomatique sous un angle historique, on est frappé par les évolutions qui ont marqué l'usage, le rôle et la position des définitions dans les théories axiomatisées. Pourtant, si ces changements participent à bien des égards aux profondes mutations dont la méthode axiomatique a elle-même été l'objet – des *Eléments* d'Euclide, en passant par la théorisation de Pascal, les axiomatiques de Hilbert jusqu'aux systèmes contemporains – on ne peut que constater que la procédure de définition n'a pas été soumise à deux des importantes réformes qui ont mené à l'avènement de la théorie des systèmes formels au 20^{e} siècle. En examinant le rôle joué par les définitions dans les systèmes formels d'aujourd'hui, on remarque que l'outil définitoire n'y a été ni formalisé, ni même intégré au processus de symbolisation, caractéristique des approches formelles contemporaines (Blanché 1955 : 55-60). En effet, depuis les *Principia Mathematica* de Whitehead et Russell, et ensuite les axiomatiques de Hilbert, les définitions se sont trouvées rejetées hors des systèmes axiomatisés. Reléguées au titre d'un outil métathéorique informel, elles servent à fournir, de l'extérieur du système, des abréviations permettant une lecture raccourcie des formules officielles de la théorie et attirant l'attention sur des combinaisons de significations jugées importantes ou privilégiées relativement aux visées particulières dans lesquelles la formalisation est effectuée.

B. Russell, qui fut l'un des promoteurs les plus influents de cette conception devenue aujourd'hui standard, jugeait lui-même qu'elle conduisait à une situation paradoxale des définitions. Dès 1903, il écrivait dans ses *Principles of Mathematics*:

> C'est un curieux paradoxe, énigmatique pour la pensée symbolique, que les définitions ne soient rien d'autre que des énoncés d'abréviation symboliques, sans signification pour le raisonnement et introduites uniquement par commodité pratique. Pourtant, dans le développement d'un sujet, elles exigent toujours une contribution importante de la pensée et enveloppent souvent les plus grands résultats de l'analyse. (1903 : 63).

Paradoxale, la situation des définitions dans les axiomatiques modernes l'est aussi lorsqu'on la rapporte aux enjeux de la réforme de la méthode géométrique que préconisait Blaise Pascal dans son opuscule *De l'esprit géométrique*. Par ce texte, Pascal a souvent été considéré comme un précurseur de la conception contemporaine de la définition. Il est le premier à exposer clairement pourquoi seules des définitions nominales peuvent avoir leur place dans une axiomatique et donc ce genre de définitions que l'on qualifie aujourd'hui d'*explicites*. Dans la méthode géométrique, explique-t-il, on ne doit reconnaître comme définition «que les seules impositions de noms aux choses que l'on a clairement désignées en termes parfaitement connus» (Pascal 1658 : 577). Quant aux définitions de choses, qui avaient la faveur de la tradition, Pascal les rejetait comme n'étant pas à proprement parler des définitions. Il considérait que leurs énoncés devaient soit être posés à titre d'axiomes, soit être traités comme des propositions à démontrer à partir des axiomes (*ibid.* : 581).

Par ces préceptes méthodologiques, Pascal s'engageait vers une introduction clairement différenciées des termes primitifs d'une part – ceux qui, comme on le dira plus tard, avec Hilbert, avec Carnap aussi, sont *implicitement* définis par les axiomes –

et des termes dérivés d'autre part, dont seules des définitions *explicites* permettent l'introduction dans le langage du système.

Plus encore que Russell, Pascal aurait-il sans doute été surpris de constater que dans les axiomatiques d'aujourd'hui aucun terme défini ne peut apparaître dans les théorèmes officiels. De façon théorique, tous les énoncés démontrés qui contiennent des termes dérivés ne sont à proprement parler que des pseudo-théorèmes ou, plus exactement, des énoncés abrégées, des formulations pratiques et souvent éclairantes figurant, pour le lecteur, en lieu et place des théorèmes officiels qui, eux, ne peuvent contenir que des termes primitifs. On ne reconnait en effet comme *preuves* dans un système formel que des suites finies et réglées de *formules* de ce système. Or la conception même des systèmes formels exige que toute formule soit le résultat d'une construction finie, opérée sur la base de règles de formation qui ne permettent en aucune manière l'introduction d'un terme dérivé. La notion de preuve s'appuie de façon cruciale dans la théorie des systèmes formels sur l'exigence d'une détermination *préalable* d'un ensemble clos de formules, constitué à partir d'un alphabet, clos lui aussi, ne contenant qu'un nombre réduit de constantes.

Malgré cet état de fait proprement théorique, la pratique courante de la preuve semble s'être pleinement accommodée de l'idée que des termes définis puissent apparaître dans les théorèmes et dans leurs preuves. Ce hiatus entre théorie et pratique de la preuve semble parfaitement assumé par les théoriciens contemporains des formalismes. Pourtant, cette facilité ne va pas sans difficultés. Bien entendu, chacun comprend qu'il convient pour s'en prémunir d'exiger des termes définis qu'ils soient éliminables des formules. Les définitions explicites doivent en effet permettre à tout moment que les termes dérivés puissent être remplacés dans les formules par les termes primitifs qui ont servi à les définir. Dit autrement, l'exigence d'éliminabilité doit garantir que l'on puisse toujours retrouver les formules officielles dont les énoncés à termes définis sont les abréviations. Pourtant l'éliminabilité des formules n'est pas toujours suffisante pour garantir, sur la base d'une démarche déductive usant de termes définis, l'existence d'une preuve formelle conforme aux exigences officielles et déclarées de la base axiomatique. Comme je l'ai montré ailleurs, dans les systèmes formels d'une certaine complexité, des problèmes – en particulier de substitution – peuvent donner lieu à des termes définis parfaitement éliminables des formules, mais néanmoins pas toujours éliminables des preuves (Joray 2005). En clair, les moyens symboliques, abréviatifs et éliminables des formules, introduits par des définitions explicites ne sont pas toujours sans incidence sur la puissance déductive d'un système formel. Souvent associé à une dimension abstractive (Joray 2008), l'introduction d'abréviations dans un langage n'est pas un acte neutre. Qu'il suffise pour s'en convaincre intuitivement de songer à la fertilité évidente de l'introduction dans le langage de l'arithmétique des signes de somme, de produit, de la notation des puissances, des racines, des logarithmes, etc.

En termes techniques, la question de la fertilité déductive des définitions concerne la dimension proprement logique des théories. Elle ne se pose avec précision que dans les axiomatiques dites *formelles*, à savoir celles qui en plus des termes et axiomes propres à une théorie particulière – par exemple, mathématique – incluent d'une manière expresse un appareil déductif, c'est-à-dire un ensemble réunissant les moyens logiques mobilisés par la théorie en question.

Pascal n'avait certes aucune idée de ce qu'on nomme aujourd'hui une axiomatique formelle. Pourtant, un des points importants – quelque peu oublié aujourd'hui – de sa réforme de la méthode géométrique consistait à reconnaitre que pour aller des axiomes vers les théorèmes le cheminement devait procéder non pas selon un seul moteur, à savoir la déduction logique, mais selon deux moteurs : la déduction et la définition explicite.

Manifestement, l'évolution moderne de la méthode géométrique vers les axiomatiques formelles contemporaines n'a pas retenu cette idée importante de Pascal, puisque seuls les outils de déduction se sont trouvés réglés et intégrés aux axiomatiques. La définition, par contre, est restée un outil intuitif, disponible uniquement à l'extérieur du langage formel, dans le méta-langage, un outil dont l'usage n'est en aucune manière réglementé par la base axiomatique.

Sept ans après avoir parlé de *paradoxe* au sujet des définitions, Russell publiait avec Whitehead le monumental édifice logiciste des *Principia Mathematica*, dont l'essentiel des résultats se trouve en effet exprimé dans une longue liste de définitions cumulées, accompagnées de preuves incluant à tous niveaux des termes dérivés. Malgré l'intérêt et l'immense influence de cet ouvrage, on en reconnait aujourd'hui les nombreuses déficiences formelles. Il est surprenant que la conception des définitions explicites qui y est présentée ait conservé une telle influence sur la pratique des logiciens, car l'usage des définitions y manque singulièrement de rigueur. Laissant de côté les problèmes spécifiques liés aux définitions contextuelles (*definition in use*), on remarquera d'emblée que la distinction entre termes primitifs et dérivés n'y est tout d'abord pas soigneusement respectée. Les premiers axiomes et règles d'inférence (pour la logique des propositions) contiennent des conditionnels en lieu et place des seuls primitifs déclarés, à savoir négation et disjonction (Rickey 1975). On relèvera aussi le statut ambivalent du signe spécial de définition ($=_{df}$) dont on ne sait s'il est partie intégrante ou non du langage formel. Les auteurs affirment bien que les définitions ne font pas partie du sujet, mais ils ajoutent aussi qu'elles donnent lieu à des théorèmes d'équivalence qui les traduisent pour ainsi dire immédiatement dans le langage objet (Whitehead & Russell 1927 : Vol.1, 11sqq). Non seulement l'équivalence ou biconditionnel doit lui-même être défini, mais en dehors de ce premier problème, on se demande également ce qu'un tel théorème exprime. Le terme défini qu'il contient doit-il être compris comme une simple abréviation éliminable? Par exemple, en termes de négation et disjonction, on peut définir la conjonction ainsi :

$$A \wedge B =_{df} \sim(\sim A \vee \sim B).$$

Cet énoncé n'est pas un théorème (il n'est même pas une formule du langage), mais il donne lieu au théorème biconditionnel suivant:

$$\vdash (A \wedge B) \equiv \sim(\sim A \vee \sim B).$$

Ici, de deux choses l'une : ou bien cet énoncé exprime un rapport entre conjonction, disjonction et négation (auquel cas la conjonction a bien été intégrée au langage objet), ou bien il s'agit d'une simple abréviation et l'énoncé n'est qu'une manière pratique d'écrire le théorème suivant qui ne dit rien de la conjonction et exprime une tautologie banale:

$$\vdash \sim(\sim A \vee \sim B) \equiv \sim(\sim A \vee \sim B).$$

Aucune de ces deux interprétations ne permet de donner pleine cohérence à la conception de la définition défendue par les auteurs des *Principia*.

Plus soucieux de rigueur formelle, les logiciens de l'Ecole de Varsovie furent des lecteurs attentifs des *Principia*. Ils développèrent deux conceptions rivales de la définition explicite. La première et la plus fidèle aux idées de Whitehead et Russell fut celle développée par Jan Łukasiewicz. Selon lui, imposer une définition consiste à ajouter au système une *règle de remplacement* permettant d'introduire ou d'éliminer à tout moment d'une déduction un symbole abréviatif (Łukasiewicz 1963 : chap. II.4). De leur côté, Stanisław Leśniewski et Alfred Tarski considèrent que la partie logique de la base axiomatique doit inclure une procédure définitoire permettant l'inscription progressive de thèses définitoires. Leśniewski fut le seul logicien à avoir examiné avec précision les conséquences d'une telle option sur les notions de *langage* et de *système formels* (Leśniewski 1930)[1]. Tout comme il le fit pour la substitution, il décrivit soigneusement les conditions formelles d'une bonne définition explicite. Il fut probablement le premier à remarquer que les définitions explicites sont susceptibles d'être fécondes ou *créatives*, selon le sens qui fut donné à ce terme dans l'Ecole de Varsovie.

Une définition, explique par exemple Jan Łukasiewicz en 1928, est *créative* si elle permet «d'inférer (…) des thèses qui ne contiennent que des termes primitifs et qui sont pourtant indépendantes des axiomes» (1928b). De façon plus précise:

> Une définition *D* d'une constante *d* est *créative* dans un langage *L* si et seulement si il existe une formule *F* de *L*, sans occurrence de *d* et telle que *F* n'est prouvable dans *L* qu'avec l'aide de *D* (éventuellement, d'une autre définition).

L'existence de définitions explicites créatives devait naturellement susciter la méfiance des logiciens qui, à la suite de Whitehead et Russell, concevaient la définition explicite comme purement abréviative. En faisant de la définition un outil formel déclaré de la base axiomatique – au même titre que les règles d'inférence – Leśniewski se donnait au contraire la possibilité d'en faire un outil déductif positif, concourant à la puissance démonstrative de ses systèmes axiomatiques.

Pour Leśniewski, c'est même ce qui constitue l'intérêt principal des définitions explicites. En 1928, pour répondre aux critiques faites par son collègue Łukasiewicz à l'encontre de la créativité des définitions, il affirmait: «les définitions conduisent effectivement à des thèses indépendantes des axiomes» et il ajoutait «ceci n'est pas un vice, bien au contraire. Si on inscrit

---

[1] Cf. aussi l'article de D. Miéville dans le présent volume.

des définitions, celles-ci devraient être les plus créatives possible» (cité dans Łukasiewicz 1928a). Désireux d'obtenir une base déductive incluant une procédure interne de définition et reposant sur une base axiomatique minimale, Leśniewski développa le système propositionnel quantifié le plus étendu qui soit, à partir d'une axiomatique ne contenant comme connecteur primitif que le biconditionnel.

Dans les pages qui viennent mon but n'est pas de présenter l'édifice achevé de ce calcul auquel Leśniewski donna le nom de *Protothétique*[2], mais d'examiner un travail qui reste relativement méconnu et qui fut mené à bien par Alfred Tarski lorsqu'il était le doctorant de Leśniewski. Les résultats présentés par Tarski dans cette thèse de doctorat publiée en 1923 constituent tout d'abord une pierre de touche de la Protothétique; sans leur découverte le système de Leśniewski eut difficilement pu avoir la forme remarquablement aboutie qu'on lui connait aujourd'hui. Enfin, il donne à voir un excellent exemple de construction où l'inscription préalable de définitions explicites ouvrent les possibilités déductives liées à la présence d'une quantification.

2. La thèse de doctorat de A. Tarski

Alfred Tarski soutint sa thèse de doctorat en 1923 à l'Université de Varsovie. Ce travail fut dirigé par Stanisław Leśniewski, qui était à ce moment là en pleine élaboration du plus fondamental de ses systèmes de logique : la Protothétique, un calcul des propositions quantifié et d'ordre supérieur. Les résultats de la thèse de Tarski nous sont connus par un article publié la même année sous le titre «Sur le terme primitif de la logistique». Le but du travail y est présenté dès les premiers paragraphes :

---

[2] Pour une telle présentation, cf. Miéville 1984 et 2001.

> Le problème pour lequel j'offre une solution est le suivant: *est-il possible de construire un système de la logistique comportant comme seul signe primitif, le signe d'équivalence* (en plus, bien sûr, des quantificateurs)? (1923 : 3)

Tarski montre qu'il est possible de construire un système fonctionnellement complet du calcul quantifié des propositions sur une base comprenant le biconditionnel comme unique connecteur primitif. Comme on le verra, la démarche de Tarski ne consiste pas à construire effectivement un tel système, mais à montrer qu'il existe entre les connecteurs principaux de la logique des propositions des rapports qui permettent d'exprimer la négation et la conjonction par une expression biconditionnelle quantifiée. Le texte poursuit alors ainsi:

> Ce problème me semble intéressant pour les raisons suivantes. Nous savons qu'il est possible de construire le système de la logistique à l'aide d'un seul terme primitif, utilisant pour cela, soit le signe d'implication, si l'on veut suivre l'exemple de Russell, soit l'idée de Sheffer qui introduit spécialement à cet effet le signe d'incompatibilité. (*ibidem* : 4) [3]

Mais Tarski ajoute une remarque qui montre bien que son travail se situe au centre des réflexions de Leśniewski sur les définitions:

> Pour réellement parvenir à ce but [sous-entendu: ni Russell, ni Sheffer n'y parviennent *réellement*], il faut se garder de faire entrer dans les énoncés des définitions tout terme constant particulier, distinct à la fois du terme primitif adopté, des termes préalablement définis, et du terme à définir. (*ibidem* : 4)

Pour Tarski, tout comme pour Leśniewski, l'énoncé d'une définition ne doit comprendre que trois types de symboles de constantes:

---

[3] Dans le cas de l'implication (conditionnel), une quantification sur les variables de propositions est requise. Cf. l'article de D. Miéville dans ce volume.

1. Le terme primitif adopté (ici le biconditionnel, pour Russell le conditionnel et pour Sheffer la barre d'incompatibilité).
2. Les termes éventuellement déjà définis.
3. Un symbole nouveau pour le terme à définir.

Les raisons de ces conditions nous sont données dans une note où Tarski écrit:

> Dans cet article, je considère les définitions comme appartenant au système de la logistique. Si nous avions utilisé un terme spécial pour formuler les définitions nous ne pourrions pas prétendre que nous n'acceptons qu'un seul terme primitif. On notera que dans [les *Principia Mathematica*] de A. N. Whitehead et B. Russell, toutes les définitions sont de la forme «a = b *Df*» et donc contiennent réellement un symbole spécial qui n'apparaît ni dans les axiomes, ni dans les théorèmes ; il semble cependant que ces auteurs ne considèrent pas les définitions comme des propositions appartenant au système. (*ibidem* : 4, n. 6)

Comme on le sait, toute bonne définition explicite doit être constituée d'un *definiendum* α, d'un *definiens* β et l'énoncé de la définition doit stipuler que α et β sont en une relation d'équivalence (une relation réflexive, symétrique et transitive). Le terme à définir ne doit avoir qu'une seule occurrence, dans le *definiendum*. Le *definiens* doit être construit uniquement avec ce que le système contient déjà, à savoir le(s) terme(s) primitif(s) et éventuellement des termes déjà définis. Enfin, on doit retrouver dans le *definiendum* et le *definiens* les mêmes éventuelles variables, chacune avec une seule occurrence dans le *definiendum*[4].

Ces conditions générales ne sont pas sujettes à polémique, mais Tarski souligne dans sa note que si l'on veut que les définitions appartiennent au système, il convient d'exprimer l'équivalence entre *definiendum* et *definiens* à l'aide des outils

[4] Cf. Miéville 1984, 2001 et son article dans le présent volume.

linguistiques à disposition dans la base du système, à savoir le(s) terme(s) primitif(s). C'est précisément ce que les auteurs des *Principia* manquent de faire lorsqu'ils recourent au symbole spécial « $=_{df}$ ». Pour Tarski, qui reprend ici clairement une idée de Leśniewski:

> Le signe d'équivalence [i.e. le biconditionnel] employé comme terme primitif présente à ce point de vue l'avantage de permettre d'observer strictement cette règle et de donner en même temps aux définitions une forme aussi naturelle que commode, celle d'une équivalence [i.e. une formule biconditionnelle]. (*ibidem* : 4)

En effet, si l'on reprend l'exemple évoqué plus haut de définition de la conjonction en termes de disjonction et de négation, plutôt que de poser hors du système l'expression

$$A \wedge B =_{df} \sim (\sim A \vee \sim B)$$

et d'ajouter qu'elle donne lieu au théorème biconditionnel suivant, dont on ne peut clairement déterminer le statut:

$$\vdash (A \wedge B) \equiv \sim (\sim A \vee \sim B),$$

il suffit de considérer ce second énoncé comme l'expression définitoire elle-même. Son statut devient alors celui d'une thèse d'équivalence, inscrite dans le système en vertu d'une règle déclarée dans la base axiomatique. Cette règle, qui fut soigneusement décrite par Leśniewski (1930), doit alors imposer les conditions formelles exactes sous lesquelles une thèse définitoire peut être ajoutée. Dans un système quantifié comme la Protothétique, l'expression définitoire d'une constante prendra la forme générale suivante:

$$(\forall v_1 \cdots v_n)(Dum(C, v_1, \cdots, v_n) \equiv Diens(v_1, \cdots, v_n))$$

ou, avec la notation de Leśniewski pour la quantification :

$$\lfloor v_1 \cdots v_n \rfloor \lceil Dum(C, v_1, \cdots, v_n) \equiv Diens(v_1, \cdots, v_n) \rceil$$

En endossant cette conception de la définition explicite, Tarski entend montrer la faisabilité du projet de Leśniewski: construire une logique des propositions quantifiée, munie d'une règle définitoire. Le choix du biconditionnel comme unique connecteur primitif s'impose alors comme celui qui permet l'expression la plus simple et la plus directe des thèses d'équivalence définitoires[5].

Dans le cadre non quantifié, on sait que le biconditionnel est trop faible. Contrairement à la barre de Sheffer, il ne permet pas l'expression de l'ensemble classique des connecteurs unaires et binaires. Dans le cadre quantifié, Leśniewski sait comment obtenir la négation, il lui suffit pour cela de poser la thèse définitoire suivante:

$$\lfloor p \rfloor \lceil {\sim} p \equiv (p \equiv \lfloor r \rfloor \lceil r \rceil) \rceil$$

Il lui manque cependant encore l'accès à certains connecteurs binaires, en particulier la conjonction, la disjonction, le conditionnel.

C'est ce dernier obstacle que Tarski va franchir en construisant une définition de la conjonction. Sa solution est constituée par le théorème 11 de son travail, qui présente effectivement la forme requise d'une thèse définitoire de la Protothétique:

Th. 11 :

$$\lfloor pq \rfloor \lceil (p \wedge q) \equiv \lfloor f \rfloor \lceil p \equiv (\lfloor r \rfloor \lceil p \equiv f(r) \rceil \equiv \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv f(r) \rceil) \rceil \rceil$$

---

[5] On peut également utiliser à cette fin d'autres primitifs, mais les thèses définitoires sont alors plus complexes et demandent toujours plusieurs inscriptions du *definiens* et du *definiendum*. Cf, à ce sujet, Joray 2004, Lejewski 1958.

où l'inscription

$$\lfloor f \rfloor \lceil p \equiv (\lfloor r \rfloor \lceil p \equiv f(r) \rceil \equiv \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv f(r) \rceil) \rceil$$

est le *definiens*, qui sera abrégé dans la suite par Π_{pq}.

Tout le début de l'article de Tarski est consacré à montrer que cette expression constitue une définition possible de la conjonction en termes de biconditionnels et de quantification portant sur des variables propositionnelles ainsi que sur des variables de connecteurs unaires. Dans une seconde partie, Tarski va également montrer que, si le système dans lequel on définit la conjonction présente un axiome d'extensionalité[6], alors la définition de la conjonction peut être nettement simplifiée. C'est ce que montre son théorème 17, où l'antcédent *Sb* du conditionnel exprime l'extensionalité (ou la vérifonctionnalité) des connecteurs unaires et le conséquent constitue l'expression biconditionnelle pour une définition simplifiée de la conjonction:

Th. 17: $Sb \supset \lfloor pq \rfloor \lceil (p \wedge q) \equiv \lfloor f \rfloor \lceil p \equiv (f(p) \equiv f(q)) \rceil \rceil$

Pour montrer ces résultats, Tarski va se placer dans une logique propositionnelle riche: un langage quantifiée dans lequel il suppose comme étant déjà à disposition, en plus du biconditionnel, le conditionnel, la conjonction et la négation. En usant des règles d'inférence usuelles de ces connecteurs et du quantificateur, il va alors donner des preuves des expressions concernées.

Comme le Th. 11 exprime une relation d'équivalence entre la conjonction d'une part et une expression biconditionnelle quantifiée de l'autre, Tarski aura dès lors établi qu'il peut servir de

[6] A savoir un axiome qui impose que tous les connecteurs expriment des fonctions de vérité. Dans sa thèse, Tarski n'utilise pas le terme «extensionalité», mais parle de «loi de substitution».

définition de la conjonction dans une logique à base plus modeste, caractérisant uniquement le biconditionnel et la quantification. Dans le cas du Th. 17, la base axiomatique adéquate devra encore inclure *Sb* au nombre de ses axiomes (ou de ses théorèmes). Mais laissons pour l'instant la question de l'extensionalité et examinons la solution générale du Th. 11.

3. La démonstration du théorème 11

Avant d'examiner la démarche de Tarski, il convient de faire deux remarques concernant le rôle des définitions. Tout d'abord, ce que montre clairement la preuve du Th. 11, c'est que l'introduction de la quantification renforce le calcul propositionnel puisque cet ajout modifie les possibilités définitoires des ensembles de connecteurs primitifs. Le Russell des *Principles of Mathematics* avait déjà remarqué cette caractéristique, car pour développer le calcul propositionnel à partir du seul conditionnel, il introduisait une quantification sur les propositions. Enfin, ce qui est moins évident et qui, à mon sens, n'a pas été particulièrement souligné dans la littérature, c'est le rôle que jouent les définitions préalables de connecteurs unaires dans la démonstration des propriétés caractéristiques de la conjonction introduite par l'expression biconditionnelle de Tarski. Comme on le verra, la possibilité d'instancier des connecteurs unaires est nécessaire pour obtenir à partir de la définition tarskienne les deux versions de l'élimination de la conjonction.

Mais voyons maintenant comment Tarski procède. Je rappelle que la démonstration du Th. 11 est donnée dans une logique quantifiée comprenant biconditionnel, conditionnel, conjonction et négation. Par ailleurs, Tarski ne donne pas une preuve formelle de son théorème, mais s'appuie sur les règles admises de ces connecteurs. De fait, son texte ne présente que ce qu'il qualifie lui-même de «commentaires montrant les étapes du raisonnement». La démarche est néanmoins très claire et peut se résumer en six étapes.

1. Tout d'abord, trois nouveaux connecteurs unaires sont introduits par le biais des expressions définitoires suivantes:

   Déf. 1 $\lfloor p \rfloor \lceil Vp \equiv (p \equiv p) \rceil$ le *Verum*

   Déf. 2 $\lfloor p \rfloor \lceil Ap \equiv p \rceil$ l'*Assertion*

   Déf. 3 $\lfloor p \rfloor \lceil Fp \equiv (p \equiv \sim p) \rceil$ le *Falsum*

   Tarski dispose alors des quatre connecteurs unaires qui épuisent les significations vérifonctionnelles. On notera que la négation n'a pas besoin d'être définie puisqu'elle est supposée déjà à disposition. On sait cependant que celle-ci pourrait être exprimée en termes du biconditionnel et de la quantification. On peut en effet montrer aisément que l'équivalence suivante, déjà citée plus haut, est un théorème du calcul propositionnel quantifié où Tarski présente ses preuves:

   $\lfloor p \rfloor \lceil \sim p \equiv (p \equiv \lfloor r \rfloor \lceil r \rceil) \rceil$

2. Dans la deuxième étape, Tarski démontre que le *definiens* qu'il propose pour la conjonction implique le second conjoint, à savoir q. C'est le théorème 5 de Tarski:

   Th. 5 $\lfloor pq \rfloor \lceil \Pi_{pq} \supset q \rceil$

3. Dans la troisième étape (théorème 8), il montre que son *definiens* implique également le premier conjoint, c'est-à-dire p:

   Th. 8 $\lfloor pq \rfloor \lceil \Pi_{pq} \supset p \rceil$

4. La quatrième étape consiste à réunir les deux résultats précédents par une conjonction:

$$\text{Th. 9} \qquad \lfloor pq \rfloor \lceil \Pi_{pq} \supset (p \wedge q) \rceil$$

5. Dans la cinquième étape, Tarski montre que son *definiens* est impliqué par la conjonction de p et q:

$$\text{Th. 10} \qquad \lfloor pq \rfloor \lceil (p \wedge q) \supset \Pi_{pq} \rceil$$

6. Enfin la dernière étape consiste à réunir les théorèmes conditionnels 9 et 10 en un théorème biconditionnel unique:

$$\text{Th. 11} \qquad \lfloor pq \rfloor \lceil (p \wedge q) \equiv \Pi_{pq} \rceil$$

De fait, si on examine le détail des moments de la démonstration, on constate que les étapes 4, 5 et 6 ne présentent aucune difficulté et que le nœud de la démarche se trouve aux étapes 2 et 3. Celles-ci correspondent à l'élimination de la conjonction ; Tarski y montre que chacun des conjoints est impliqué par son *definiens*. Or, c'est précisément lors de ces étapes que se trouvent exploitées les définitions des connecteurs unaires posées en 1. En effet, pour déduire d'une part p, d'autre part q, à partir du *definiens* Π_{pq}, il convient d'éliminer le quantificateur principal de cette expression:

$$\Pi_{pq}: \quad \lfloor f \rfloor \lceil p \equiv (\lfloor r \rfloor \lceil p \equiv f(r) \rceil \equiv \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv f(r) \rceil) \rceil .$$

Le quantificateur en question lie une variable f dont la catégorie est celle des connecteurs unaires. Son élimination nous amène donc à substituer à f un symbole ou une expression de même catégorie. Vu les éléments à disposition dans le langage, il n'y a ici que deux possibilités: soit substituer à f une variable qui sera alors en occurrence libre, soit substituer une constante de connecteur unaire. La première des possibilités étant manifestement sans intérêt pour la démonstration recherchée, il reste quatre instanciations possibles pour f , qui correspondent aux quatre connecteurs unaires disponibles. Par l'élimination du quantificateur, on obtient alors les quatre formules suivantes:

1. $p \equiv (\lfloor r \rfloor \lceil p \equiv Vr \rceil \equiv \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv Vr \rceil) \qquad \Pi_{pq}, \lfloor\ \rfloor e, f/V$

2. $p \equiv (\lfloor r \rfloor \lceil p \equiv Fr \rceil \equiv \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv Fr \rceil) \qquad \Pi_{pq}, \lfloor\ \rfloor e, f/F$

3. $p \equiv (\lfloor r \rfloor \lceil p \equiv \sim r \rceil \equiv \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv \sim r \rceil) \qquad \Pi_{pq}, \lfloor\ \rfloor e, f/\sim$

4. $p \equiv (\lfloor r \rfloor \lceil p \equiv Ar \rceil \equiv \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv Ar \rceil) \qquad \Pi_{pq}, \lfloor\ \rfloor e, f/A$

Désormais, en exploitant les définitions 1-3, et les règles d'inférence usuelles, on obtient, à partir de Π_{pq} , les quatre déductions suivantes (dont je ne donne ici que des esquisses):

I. Cas du *Verum*

1.	$\lfloor f \rfloor \lceil p \equiv (\lfloor r \rfloor \lceil p \equiv f(r) \rceil \equiv \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv f(r) \rceil) \rceil$	Π_{pq}
2.	$p \equiv (\lfloor r \rfloor \lceil p \equiv Vr \rceil \equiv \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv Vr \rceil)$	1, $\lfloor \quad \rfloor e$, f / V
3.	$Vr \equiv (r \equiv r)$	Déf. 1
4.	$p \equiv (\lfloor r \rfloor \lceil p \equiv (r \equiv r) \rceil \equiv \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv (r \equiv r) \rceil)$	2, 3
5.	$p \equiv (p \equiv q)$	4
6.	$(p \equiv p) \equiv q$	5, $Ass \equiv$
7.	q	6

II. Cas du *Falsum*

1.	$\lfloor f \rfloor \lceil p \equiv (\lfloor r \rfloor \lceil p \equiv f(r) \rceil \equiv \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv f(r) \rceil) \rceil$	Π_{pq}
2.	$p \equiv (\lfloor r \rfloor \lceil p \equiv Fr \rceil \equiv \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv Fr \rceil)$	1, $\lfloor \quad \rfloor e$, f / F
3.	$Fr \equiv (r \equiv \sim r)$	Déf. 3
4.	$p \equiv (\lfloor r \rfloor \lceil p \equiv (r \equiv \sim r) \rceil \equiv \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv (r \equiv \sim r) \rceil)$	2, 3
5.	$p \equiv (\sim p \equiv \sim q)$	4
6.	$p \equiv (p \equiv q)$	5
7.	$(p \equiv p) \equiv q$	6, $Ass \equiv$
8.	q	7

III. Cas de la *Négation*

1.	$\lfloor f \rfloor \lceil p \equiv (\lfloor r \rfloor \lceil p \equiv f(r) \rceil \equiv \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv f(r) \rceil) \rceil$	Π_{pq}
2.	$p \equiv (\lfloor r \rfloor \lceil p \equiv \sim r \rceil \equiv \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv \sim r \rceil)$	1, $\lfloor \quad \rfloor e$, $f / \sim$
3.	$\quad \lfloor r \rfloor \lceil p \equiv \sim r \rceil$	Hyp.
4.	$\quad p \equiv \sim p$	3, $\lfloor \quad \rfloor e$, r / p
5.	$\quad \sim (p \equiv \sim p)$	Th.
6.	$\sim \lfloor r \rfloor \lceil p \equiv \sim r \rceil$	3, 4, 5, $\sim i$
7.	$\quad \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv \sim r \rceil$	Hyp.
8.	$\quad q \equiv \sim q$	7, $\lfloor \quad \rfloor e$, r / q
9.	$\quad \sim (q \equiv \sim q)$	Th.
10.	$\sim \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv \sim r \rceil$	7, 8, 9, $\sim i$
11.	$\sim \lfloor r \rfloor \lceil p \equiv \sim r \rceil \equiv \sim \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv \sim r \rceil$	6, 10, $\equiv i$
12.	$\lfloor r \rfloor \lceil p \equiv \sim r \rceil \equiv \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv \sim r \rceil$	11
13.	p	2, 12, $\equiv e$

IV. Cas de l'*Assertion*

1.	$\lfloor f \rfloor \lceil p \equiv (\lfloor r \rfloor \lceil p \equiv f(r) \rceil \equiv \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv f(r) \rceil) \rceil\ \Pi_{pq}$	
2.	$p \equiv (\lfloor r \rfloor \lceil p \equiv Ar \rceil \equiv \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv Ar \rceil)$	1, $\lfloor\ \rfloor e$, f/A
3.	$\vert\ \lfloor r \rfloor \lceil p \equiv Ar \rceil$	Hyp.
4.	$\vert\ p \equiv A \sim p$	3, $\lfloor\ \rfloor e$, $r/\sim p$
5.	$\vert\ p \equiv \sim p$	Déf. 2
6.	$\vert\ \sim (p \equiv \sim p)$	Th.
7.	$\sim \lfloor r \rfloor \lceil p \equiv Ar \rceil$	3, 5, 6, $\sim i$
8.	$\vert\ \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv Ar \rceil$	Hyp.
9.	$\vert\ q \equiv A \sim q$	8, $\lfloor\ \rfloor e$, $r/\sim q$
10.	$\vert\ q \equiv \sim q$	Déf. 2
11.	$\vert\ \sim (q \equiv \sim q)$	Th.
12.	$\sim \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv Ar \rceil$	8, 10, 11, $\sim i$
13.	$\sim \lfloor r \rfloor \lceil p \equiv Ar \rceil \equiv \sim \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv Ar \rceil$	7, 12, $\equiv i$
14.	$\lfloor r \rfloor \lceil p \equiv Ar \rceil \equiv \lfloor r \rfloor \lceil q \equiv Ar \rceil$	13
15.	p	2, 14, $\equiv e$

Relativement au *definiens* Π_{pq} de la conjonction, on voit que les quatre connecteurs unaires vérifonctionnels se rangent en deux groupes. D'une part, le *Verum* et le *Falsum* (qui expriment des fonctions constantes) permettent lorsqu'ils sont substitués à la variable f de déduire le second conjoint q. D'autre part, la *Négation* et *l'Assertion* (dont le résultat est fonction de la valeur de leur argument) permettent la déduction du premier conjoint p. Ainsi pour disposer des deux versions de l'élimination de la conjonction à partir de la définition de Tarski, il convient que le langage où celle-ci est posée contienne au moins deux connecteurs unaires, l'un choisi dans le premier groupe, l'autre dans le second[7].

Dans sa thèse, Tarski ne s'appuie que sur deux des déductions présentées ici, celle qui exploite le *Verum* et celle utilisant l'*Assertion*. Il faut cependant noter que, si les quatre déductions s'appuient largement sur les règles concernant le biconditionnel et le quantificateur, les deux déductions menant au premier conjoint p (cas de la *Négation* et de l'*Assertion*) s'appuient de façon essentielle sur les propriétés de la négation. Ainsi, si l'on s'interroge sur la construction d'une base axiomatique quantifiée, ne contenant que le biconditionnel et permettant d'exploiter la définition exprimée par le Th. 11, on peut d'ores et déjà conclure que celle-ci devra bien entendu garantir les propriétés usuelles du biconditionnel et du quantificateur, mais qu'elle devra également donner accès à la définition de la négation (le *Verum* et l'*Assertion* étant très évidemment accessibles dans un tel système et le *Falsum* aisément définissable une fois la négation à disposition).

---

[7] On trouve une généralisation de ce résultat dans Hiż 1952. Malheureusement, il s'agit seulement d'un résumé de conférence qui ne contient qu'une esquisse de démonstration.

4. Théorème 17 et extensionalité

Comme je l'ai indiqué plus haut, la démarche de Tarski ne fait que montrer la *possibilité* de construire une logique propositionnelle quantifiée complète sur la base du seul connecteur biconditionnel. Si l'examen des preuves menant au théorème 11 montre bien cette possibilité et permet aussi de dégager les caractéristiques générales auxquelles doit répondre une telle base axiomatique, on doit bien constater que ni Tarski, ni Leśniewski ne présentent une construction explicite permettant d'exploiter directement le résultat du Th. 11. La raison est assez évidente pour celui qui connait la Protothétique. Leśniewski désirait en effet disposer d'une logique très large et en particulier d'ordre supérieur. Cela signifie que toute catégorie syntaxico-sémantique devait y être accessible et que la définition d'une constante d'une quelconque catégorie devait ouvrir la possibilité d'une quantification sur des variables de cette catégorie[8]. Pour réaliser un projet d'une telle ambition, il était nécessaire de restreindre le système de manière à ce que chaque catégorie ne donne lieu qu'à un nombre fini de significations possibles. L'idée était alors la suivante: si dans chaque catégorie il devait rester possible de définir une infinité de constantes (syntaxiquement) distinctes, des théorèmes d'extensionalité devaient être disponibles, afin de garantir que toutes les constantes se rangent en un nombre fini de classes d'équivalence sémantiques (dans les cas les plus connus, 2 valeurs propositionnelles, 4 valeurs de connecteurs unaires, 16 valeurs pour les binaires, etc).

On comprend dès lors qu'après avoir montré son théorème 11, Tarski entreprenne d'examiner une forme simplifiée de définition de la conjonction, efficiente dans un système qui,

[8] Cf. l'article de Miéville dans le présent volume.

comme le dit Tarski, «contient la loi de substitution parmi ses axiomes ou ses théorèmes» (1923 : 7), à savoir un axiome ou un théorème garantissant la vérifonctionnalité ou l'extensionalité au moins pour la catégorie des connecteurs unaires. Dans les termes que Tarski reprend à Whitehead et Russell, une telle loi prend la forme de l'expression:

$$Sb : \lfloor p\,q\,f \rfloor \lceil ((p \equiv q) \wedge f(p)) \supset f(q) \rceil$$

Si l'on veut se restreindre à l'usage du biconditionnel, l'extensionalité des connecteurs unaires s'exprime alors:

$$Ext : \lfloor p\,q \rfloor \lceil (p \equiv q) \equiv \lfloor f \rfloor \lceil f(p) \equiv f(q) \rceil \rceil$$

Cette expression étant prouvable dans la Protothétique de Leśniewski, il est alors possible d'y accéder à la conjonction par la définition simplifiée indiquée par le Th. 17 de Tarski, à savoir:

$$\lfloor p\,q \rfloor \lceil (p \wedge q) \equiv \lfloor f \rfloor \lceil p \equiv (f(p) \equiv f(q)) \rceil \rceil$$

Contrairement à son collègue Łukasiewicz, Leśniewski était un défenseur d'une conception fermement classique de la logique. Il considérait comme absolument valides les principes de bivalence, du tiers-exclu et de contradiction. Dans cette perspective, il tenait également les théorèmes d'extensionalité de la Protothétique pour des expressions de vérités logiques. Il n'avait ainsi aucune raison de se passer de la simplification importante que lui procurait une base axiomatique incluant la formule *Ext* (ou les moyens de sa preuve).

Pourtant, le Th. 11 de la thèse de doctorat de Tarski montre clairement qu'il est possible d'accéder à la conjonction dans un calcul biconditionnel quantifié ou d'une Protothétique non soumise au principe d'extensionalité. A ma connaissance, cette possibilité n'a jamais été exploitée.

5. Epilogue

Au terme de ce parcours, il serait sans doute prématuré de conclure par quelque résultat ferme et j'espère seulement avoir montré que l'intégration des définitions explicites au sein des appareils déductifs ouvre de nombreuses perspectives à l'axiomatisation. Ce que nous montre la thèse trop méconnue de Tarski, c'est d'abord que les questions liées à l'axiomatisation du plus élémentaire des systèmes de logiques sont dépendantes de la conception des définitions que l'on adopte. La démonstration du Th. 11 met en évidence le rôle fructueux des définitions préalables de connecteurs unaires dans l'accès qu'une base axiomatique restreinte au biconditionnel peut offrir à la conjonction et donc à l'entièreté des connecteurs usuels. Bien entendu, montrer la créativité, au sens stricte, des différentes définitions examinées dans ces pages nécessiterait de travailler sur des bases axiomatiques explicites: celle de la Protothétique dans le cas où c'est la définition simplifiée de la conjonction qui est exploitée, une base plus restreinte, sans axiome d'extensionalité, dans le cas plus général concerné par le Th. 11 de Tarski.

L'existence de définitions explicites créatives dans les systèmes quantifiés de logique des propositions est un fait démontré (Joray 2005), dont l'idée remonte aux logiciens de Varsovie. Les démarches examinées plus haut montrent que les définitions des connecteurs unaires sont sans doute créatives dans le contexte des calculs biconditionnels quantifiés. Il reste encore à se demander si la définition de la conjonction elle-même serait créative dans ces systèmes axiomatiques.

Dans le cas de la Protothétique (à savoir lorsqu'on dispose d'un axiome d'extensionalité), Tarski donne dans sa thèse des éléments qui inclinent à une réponse négative à cette question. En effet, à la fin de la seconde section de son article, il indique comment montrer que le produit logique des deux thèses définitoires de la conjonction et de la disjonction est équivalent à l'expression de l'extensionalité des connecteurs unaires (dont les axiomes garantissent déjà la preuve). En revanche, dans le cas d'une base sans axiome d'extensionalité, la question reste pleinement ouverte. Pour ce dernier cas, il serait à mon sens intéressant d'examiner si l'inscription de la définition de la conjonction exprimée par le Th. 11 de Tarski n'offre pas précisément un accès purement logique à l'extensionalité des connecteurs unaires.

Les résultats de Tarski sur les systèmes biconditionnels sont connus dans les études leśniewskiennes comme ayant constitué une pierre de touche de la construction de la Protothétique. Mais que le Th. 11 n'ait pas été directement exploité dans toute sa généralité laisse encore de nombreuses questions ouvertes, relatives au rôle des définitions et de la quantification dans les calculs propositionnels. Parmi ces questions, celle par exemple de l'existence d'une preuve logique du principe d'extensionalité est d'un intérêt philosophique qui dépasse largement les problèmes techniques liés à la recherche d'une axiomatique minimale pour la logique des propositions.

Bibliographie

BLANCHÉ R. 1955. *L'axiomatique*, Paris : PUF.

HIŻ H. 1952. On primitive terms of logic (abstract of a paper), *The Journal of Symbolic Logic* **17**, 156-7.

JORAY P. 2004. A note on definitions in propositional calculi, *Travaux de logique* **17**, 170-182.

JORAY P. 2005. Should definitions be internal? in Bilkova M. & Behounek L. (eds) *The Logica Yearbook 2004*, Praha: Filosofia, 189-199.

JORAY P. 2006. La définition dans les systèmes logiques de Łukasiewicz, Leśniewski et Tarski, dans Pouivet R. & Rebuschi M. (éds) *La philosophie en Pologne 1918-1939*, Paris :Vrin. 203-222.

JORAY P. 2008. Définitions explicites et abstraction, *Travaux de logique* **19**, 135-157.

LEŚNIEWSKI S. 1930. Ueber Definitionen in der sogenannten Theorie der Deduktion, *Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie* **iii.24** (1931), 142-70. [Trad. angl. dans McCall 1967 et Leśniewski 1992].

LEŚNIEWSKI S. 1992. *Collected Works* I, II, S.J. Surma, J.T. Srzednicki, D.I. Barnett (eds), Varsovie : PWN, Polish Scientific Publisher ; Dordrecht : Kluwer.

ŁUKASIEWICZ J. 1928a. O definicyach w teori dedukcyi (Sur les définitions dans les systems déductifs), *Ruch Filozoficzny* **11**, 177-8. [Trad. fr. par Błaszczyk M. en annexe de Joray 2006].

ŁUKASIEWICZ J. 1928b. Rola definicyj w systemach dedukcyjnych (Le role des definitions dans les systems déductifs), *Ruch Filozoficzny* **11**, 164. [Trad. fr. par Błaszczyk M. en annexe de Joray 2006].

ŁUKASIEWICZ J. 1963. *Elements of mathematical logic*, Warszawa: PWN; Oxford: Pergamon Press.

MCCALL S. (ed) 1967. *Polish Logic 1920-1939*, Oxford: Clarendon Press.

MIÉVILLE D. 1984. *Un développement des systèmes logiques de S. Leśniewski. Protothétique*-*Ontologie*-*Méréologie*. Berne : P. Lang.

MIÉVILLE D. 2001. *Introduction à l'œuvre de S. Leśniewski.* Fascicule I : La protothétique. Université de Neuchâtel : *Travaux de logique*.

RICKEY V. F. 1975. On creative definition in the *Principia Mathematica*, *Logique et Analyse* **18**, 175-182.

TARSKI A. 1923. Sur le terme primitif de la logistique, dans Tarski 1972, *Logique, sémantique, métamathématique 1923-1944*, Paris : A. Colin. Vol. 1, 3-25.

WHITEHEAD A. N. & RUSSELL B. 1927. *Principia Mathematica,* Cambridge University Press. [First ed. 1910-13]

Pourquoi la révision des probabilités conditionnelles est impossible

François Lepage

Prolégomènes

Le but principal de cet article est d'examiner les raisons et les conséquences d'un résultat d'impossibilité démontré par Charles Morgan et moi-même (Lepage & Morgan 2011).

Le plan en est le suivant. D'abord un bref rappel historique de la problématique, cette section se terminant sur la proposition de David Lewis pour l'interprétation de la probabilité absolue d'un contrefactuel par révision de la fonction de probabilité en tenant compte de l'antécédent du contrefactuel pour rendre ce dernier vrai.

Se pose ensuite la question de la possibilité d'étendre ces résultats au cadre général des probabilités conditionnelles *à la Popper*. Après avoir présenté une axiomatisation des fonctions de probabilités conditionnelles, on montre qu'il n'y a pas de manière non triviale de généraliser le résultat de Lewis. Le premier résultat est le suivant : toute fonction de révision de probabilité qui laisse intact l'arrière-plan valide le contrefactuel $A > (B > A)$. Le second résultat est le suivant : toute fonction de révision de probabilité qui modifie l'arrière-plan doit permuter avec la conditionalisation, c'est-à-dire que réviser puis conditionnaliser doit conduire au même résultat que conditionaliser puis réviser.

Enfin, une troisième section est consacrée à l'examen des prémisses de la démonstration et des conséquences des résultats obtenus.

1. Conditionnels et probabilité

La question de l'interprétation des contrefactuels, plus précisément de leurs conditions de vérité, remonte aux origines de la philosophie. Une des approches les plus prometteuses pour l'élaboration d'une telle théorie a été celle de Robert Stalnaker. Dans son texte de 1968 « A Theory of Conditionals », Stalnaker utilise les modèles de Kripke pour interpréter les conditionnels et il fournit une axiomatisation, dont il prouve la complétude. Les conditions de vérité d'un conditionnel $(A > B)$ sont basées sur l'intuition suivante :

> Consider a possible world in which *A* is true and which otherwise differs minimally from the actual world. '*If A, then B' is true* (*false*) *just in case B is true* (*false*) *in that possible world.* (Stalnaker 1968 : 169)

Stalnaker n'aborde la question de la probabilité des conditionnels qu'à la toute fin de son texte :

> Several philosophers have discussed the relation of conditional propositions to conditional probabilities. See R. C. Jeffrey, 'If', *Journal of Philosophy*, 61 (1964), 702-3, and E. W. Adams, 'Probability and the Logic of Conditionals' in *Aspects of Inductive Logic*, ed. J.Hintikka and P. Suppes (Amsterdam, 1966), pp. 265-316. I hope to present elsewhere my method of drawing the connection between the two notions, which differs from both of these. (1968 : 177)

Deux ans plus tard, il publie en effet un texte sur le sujet intitulé « Probability and Conditionals » dont la première phrase annonce d'emblée la thèse :

> The aim of the paper is to draw a connection between a semantical theory of conditional statements and conditional probability. (Stalnaker 1970 : 64)

Pour ce faire, Stalnaker introduit, sur la partie classique, une sémantique qui comporte deux volets. Le premier est l'interprétation en termes de valeurs de vérité introduite dans son article précédent, alors que le second utilise des fonctions de probabilité absolues.

Les contraintes habituelles sont posées à chacune de ces sémantiques et une seule contrainte croisée est introduite : si $\Pr(A) = 1$, alors A est vraie.

Il en vient ensuite à la question des conditionnels. Sa première idée est d'attribuer au conditionnel la probabilité conditionnelle :

$$\Pr(A > B) = \Pr(B, A) = \frac{\Pr(A \wedge B)}{\Pr(A)}$$

Mais cela ne peut pas être vrai en général, car les conditionnels contrefactuels sont justement ceux dont l'antécédent est supposé faux et donc $\Pr(A) = 0$ et la probabilité conditionnelle n'est pas définie.

> Counterfactual assertions are the more controversial and interesting conditional statements. If we are to use probability theory to throw light on these cases, we must first extend the theory to cover counterfactual probabilities. (1970 : 70)

Il y a deux stratégies de contournement de la difficulté. La première est évidemment de donner une autre définition de la probabilité d'un contrefactuel. La seconde est de raffiner la théorie des probabilités de manière à pouvoir conditionaliser sur des conditions que l'on sait fausses. Stalnaker choisit la seconde en introduisant la notion de fonction de probabilité prolongée (*extended probability function*). Une fonction de probabilité prolongée est une variante à deux variables des fonctions de probabilité à la Popper. Les fonctions de probabilité absolues sont alors réintroduites par conditionalisation sur une tautologie : $\Pr(A)$ est $\Pr(A,t)$. La propriété intéressante est que $\Pr(A,B)$ est définie même si $\Pr(B)=0$ (elle peut prendre à peu près n'importe quelle valeur).

La probabilité d'un contrefactuel est alors :

$$\Pr(A > B) = \Pr(B, A)$$

Quand $\Pr(A) \neq 0$, on utilise la définition habituelle et, dans les autres cas, on calcule $\Pr(B,A)$ en utilisant un ensemble de mondes possibles disjoint de l'ensemble des mondes possibles compatibles avec ce que l'agent sait (ou croit savoir).

Cette contrainte est cependant trop faible car elle ne donne aucune indication pour calculer $\Pr(A > B, C)$ ni en général, les contrefactuels emboîtés $\Pr(A > (B > (C > D)))$. Stalnaker introduit alors la notion de sous-fonction d'une fonction de probabilité. Pour tout *C*, $\Pr_C$ est une sous-fonction de Pr relativement à *C*, ssi $\Pr_C$ est une fonction de probabilité telle que $\Pr(A > B, C) = \Pr_C(A > B) = \Pr_C(B, A)$. On aura, par exemple, $\Pr(A > (B > (C > D))) = \Pr_{AB}(D, C)$ [1].

Stalnaker fournit un système dont $(A > B) \supset (A \supset B)$ est un axiome et dont $A > A$ est un théorème. Ces deux énoncés sont pratiquement universellement reconnus comme valides. On a, par ailleurs, que pour tout *A*, $\Pr_A(A) = 1$.

Dans son fameux article « Probabilities of Conditionals and Conditional Probabilities » (1976), David Lewis montre que la théorie de Stalnaker est malheureusement triviale au sens suivant : les seuls modèles probabilistes qu'admet la théorie de Stalnaker sont les modèles où les fonctions de probabilité sont des fonctions 0-1. La preuve a été largement discutée dans la littérature et je ne vais donc pas la présenter ici.

---

[1] La formulation exacte de Stalnaker est un peu plus complexe.

À la fin de son article, Lewis suggère d'utiliser une autre façon d'attribuer une probabilité au contrefactuel. C'est là qu'apparaît la première formulation explicite de la révision d'une fonction de probabilité, c'est-à-dire d'une fonction de croyance, qui est totalement étrangère à toute forme de conditionalisation.

Lewis reprend l'idée d'utiliser des fonctions de probabilité absolue. Soit Pr une distribution de probabilité définie sur l'ensemble des mondes possibles. Soit Pr_A la fonction de probabilité obtenue en vidant chaque $\neg A$-monde de sa densité de probabilité pour la reporter sur le *A*-monde le plus proche selon l'ordre de similarité arbitraire décrit par la relation de proximité de Stalnaker. (Il est évident que Pr_A est une fonction de probabilité). Pr_A est dite obtenue de Pr par *Imaging* sur *A*. On montre assez facilement (Gärdenfors : 1988) que la fonction ainsi obtenue est différente de celle obtenue par conditionalisation sur *A*. La suggestion de Lewis est que $\mathrm{Pr}(A > B) = \mathrm{Pr}_A(B)$. On remarquera que cette identité ne résulte pas d'une décision arbitraire. Chacun des membres de l'identité est déjà défini : le membre de gauche est la somme des probabilités des mondes où $(A > B)$ est vraie alors que le membre de droite est la somme des probabilités des mondes où *B* est vraie, calculée avec la nouvelle distribution obtenue par Imaging.

Ce résultat est très intéressant et on peut s'interroger sur la possibilité de le généraliser. Deux types de généralisation nous viennent à l'esprit. La première est celle de la possibilité d'une généralisation au système de sphères de Lewis. Celui-ci permet de décrire des contrefactuels qui, contrairement à ce qui se produit dans le système de Stalnaker, ne valident pas le tiers exclu conditionnel : $(A > B) \vee (A > \neg B)$, c'est-à-dire que $(A > B)$ est équivalent à $\neg(A > \neg B)$.

Le système de sphères de Lewis est une généralisation du système de Stalnaker. Au lieu d'imposer que la relation de proximité entre mondes soit un ordre linéaire, on laisse ouverte la possibilité que ce soit un ordre partiel, c'est-à-dire que plusieurs mondes soient équidistants, d'où la métaphore des sphères. Pour évaluer un contrefactuel $(A > B)$, on regarde si dans la plus petite sphère contenant au moins un *A*-monde, tous les *A*-mondes sont des *B*-mondes. Si oui, le contrefactuel est vrai, sinon il est faux. On voit pourquoi le tiers exclu conditionnel est non valide : si dans la plus petite sphère il y a des *A*-mondes qui sont des *B*-mondes et des *A*-mondes qui ne sont pas des *B*-mondes, $(A > B)$ et $(A > \neg B)$ sont tous les deux faux (ils ne peuvent pas par ailleurs être tous les deux vrais).

Mais revenons à notre question. La technique d'Imaging de Lewis pour évaluer un contrefactuel de Stalnaker peut-elle être généralisée aux contrefactuels de Lewis ? La réponse est *non*. On montre facilement que, en général, pour les contrefactuels à la Lewis, on a l'inégalité suivante : $\Pr(A > B) \leq \Pr_A(B)$ et que l'identité est validée si, et seulement si, le système de sphères est un système à la Stalnaker, c'est-à-dire qu'il valide le tiers exclu conditionnel.

La seconde généralisation qui nous vient à l'esprit est celle de l'implantation de l'Imaging dans le cadre général qui utilise des fonctions de probabilité conditionnelle. Suivant (une généralisation de) Popper (1934), on peut prendre comme notion primitive celle de probabilité conditionnelle. Je ne reviendrai pas sur les avantages bien connus des probabilités conditionnelles sur les probabilités absolues et me contenterai de présenter une axiomatique standard.

2. Les probabilités conditionnelles

Soit L le langage du calcul propositionnel classique. Une fonction de probabilité conditionnelle est n'importe quelle fonction Pr de $L \times \wp(L)$ dans [0,1], obéissant aux contraintes suivantes (Morgan 2000) :

NP.1 $0 \leq \Pr(A, \Gamma) \leq 1$

NP.2 Si $A \in \Gamma$ alors $\Pr(A, \Gamma) = 1$

NP.3 $\Pr(A \vee B, \Gamma) = \Pr(A, \Gamma) + \Pr(B, \Gamma) - \Pr(A \wedge B, \Gamma)$

NP.4 $\Pr(A \wedge B, \Gamma) = \Pr(A, \Gamma) \times \Pr(B, \Gamma \cup \{A\})$

NP.5 $\Pr(\neg A, \Gamma) = 1 - \Pr(A, \Gamma)$
à moins que $\Pr(B, \Gamma) = 1$ pour tout B.

NP.6 $\Pr(A \wedge B, \Gamma) = \Pr(B \wedge A, \Gamma)$

NP.7 $\Pr(C, \Gamma \cup \{A \wedge B\}) = \Pr(C, \Gamma \cup \{A, B\})$

NP.8 $\Pr(A \vee \neg A, \Gamma) = 1$

Quand $\Pr(B, \Gamma) = 1$ pour tout B, Γ est Pr-anormal.

Il vaut la peine de souligner que cette axiomatisation ne repose en aucune façon sur des propriétés sémantiques classiques ou encore sur des notions relevant de la théorie de la preuve. De plus, cette axiomatisation est fiable et complète pour le calcul propositionnel si nous définissons la notion de conséquence sémantique de la manière suivante :

> A est une conséquence sémantique de l'ensemble d'énoncés Γ (on écrit $\Gamma \Vdash A$) ssi pour tout Pr et tout Δ, $\Pr(A, \Gamma \cup \Delta) = 1$.

On a alors :

$$\Gamma \vdash A \text{ ssi } \Gamma \Vdash A$$

où $\vdash$ est le symbole de dérivabilité pour le calcul propositionnel.

Remarquons que l'ensemble des fonctions satisfaisant NP.1-NP.8 est fermé sous la conditionalisation. Soit **PC** l'ensemble des fonctions de probabilité conditionnelles satisfaisant NP.1-NP.8. On a alors :

Fermeture sous la conditionalisation

Si $\mathrm{Pr} \in$ **PC** alors Pr' telle que, pour tout Γ et tout A, $\mathrm{Pr}'(A, \Gamma) = \mathrm{Pr}(A, \Gamma \cup \Delta)$ pour un certain Δ, appartient à **PC**.

3. Conditionnel et probabilité conditionnelle

Premier résultat de trivialisation

Soit $L_>$ l'extension de L, le langage du calcul propositionnel classique, telle que

(i) $L \subseteq L_>$;

(ii) si $A, B \in L_>$, alors $\neg A, A \wedge B, A > B \in L_>$;

(iii) rien d'autre n'est dans $L_>$.

Nous aurons besoin du lemme classique suivant :

Lemme 1
Pour tout Pr, Γ et A, si $\mathrm{Pr}(A, \Gamma) = 1$, alors $\mathrm{Pr}(B, \Gamma) = \mathrm{Pr}(B, \Gamma \cup \{A\})$.

Proposition 1
Soit $A \in L_>$ et $(\ )_A : \mathbf{PC} \to \mathbf{PC}$ une fonction qui associe à chaque fonction de probabilité conditionnelle Pr une fonction de probabilité conditionnelle notée $\Pr_A$ qui satisfait les propriétés suivantes :

(1) Pour tout Γ et tout Pr, $\Pr_A(A,\Gamma) = 1$

(2) Pour tout Γ, tout Pr et tout B, $\Pr(A > B,\Gamma) = \Pr_A(B,\Gamma)$

On a alors :

$$\text{Pour tout Pr, } A,\ B,\ \Gamma,\ \Pr(A > (B > A),\Gamma) = 1$$

Preuve :

1. $\Pr(A > (B > A),\Gamma) = \Pr_A(B > A,\Gamma)$ Par (2)
2. $= \Pr_A(B > A,\Gamma \cup \{A\})$ Par (1) et lemme 1
3. $= \Pr_{AB}(A,\Gamma \cup \{A\})$ Par (2)
4. $= 1$ Par NP.2

■

Si cette propriété est la bienvenue pour le conditionnel matériel (ce qui est vrai est la conséquence autant du vrai que du faux), elle est intuitivement inacceptable pour tout contre-factuel. En effet, supposons de plus que $(A > B) \supset (A \supset B)$ (supposons que si A était le cas, B serait le cas; alors si A est le cas, B est le cas) soit un théorème d'une axiomatisation fiable de $L_>$ (ce qui est le cas de toutes les *V-logics* de Lewis) et donc que

(3) Pour tout Pr, A, B et Γ, $\Pr((A > B) \supset (A \supset B),\Gamma) = 1$.

On montre alors (Lepage & Morgan 2011) que pour tout Pr, *A*, *B* et Γ, $\Pr((A > B) \equiv (A \supset B), \Gamma) = 1$ et donc que «$>$» et «$\supset$» sont probabilistiquement indiscernables. Bref, tout conditionnel qui satisfait (1), (2) et (3) *est* le conditionnel matériel.

Deuxième résultat de trivialisation

Le premier diagnostic qui vient à l'esprit est de constater le caractère quelque peu simpliste de la fonction $(\ )_A$: la fonction de probabilité Pr devient $\Pr_A$, mais l'arrière-plan demeure intact. Or si l'arrière-plan Γ contredit *A*, Γ est $\Pr_A$-anormal. Il semble donc intéressant d'introduire une fonction

$$\begin{aligned} (\ )^*_A : \wp(L_>) &\to \wp(L_>) \\ \Gamma &\mapsto \Gamma^*_A \end{aligned}$$

et que (1) et (2) deviennent

(1') Pour tout Γ et tout Pr, $\Pr_A(A, \Gamma^*_A) = 1$

(2') Pour tout Γ, tout Pr et tout *B*, $\Pr(A > B, \Gamma) = \Pr_A(B, \Gamma^*_A)$

Nous avons donc un processus en deux étapes : d'abord le passage de Pr à $\Pr_A$, puis un passage de Γ à Γ^*_A.

Formellement, on a :

Pour tout Pr et tout Γ, soit $f_{\Pr,\Gamma} : L_> \to [0,1]$ telle que $f_{\Pr,\Gamma}(X) = \Pr(X, \Gamma)$

$f_{\Pr,\Gamma}$ est simplement la fonction à une place obtenue à partir de Pr en fixant la valeur de Γ.

Utilisant $(\ )^*_A$, nous pouvons décrire une fonction S_A qui prend pour argument une fonction de probabilité $f_{\Pr,\Gamma}$ dont l'arrière-plan est fixé de façon à donner $S_A(f_{\mathrm{Pr},\Gamma}) = f_{\mathrm{Pr},\Gamma^*_A}$. La figure qui suit permet de visualiser le processus :

Toute fonction de probabilité conditionnelle Pr peut être assimilée à une matrice

Pr	Γ_0	. . .	Γ_i	. . .
X_0	$\mathrm{Pr}(X_0,\Gamma_0)$	. . .	$\mathrm{Pr}(X_0,\Gamma_i)$	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
X_j	$\mathrm{Pr}(X_j,\Gamma_0)$	. . .	$\mathrm{Pr}(X_j,\Gamma_i)$	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$X_0 \vee X_j$	$\mathrm{Pr}(X_0 \vee X_j,\Gamma_0)$	. . .	$\mathrm{Pr}(X_0 \vee X_j,\Gamma_i)$	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

satisfaisant aux conditions NP.1-NP.8.

Chaque colonne Γ_i correspond à f_{Pr,Γ_i} c'est-à-dire à la fonction qui à X_j associe $\mathrm{Pr}(X_j,\Gamma_i)$. S_A est la fonction qui fait passer d'une colonne à une autre. Formellement, elle fait passer de $f_{\mathrm{Pr},\Gamma}$ à $f_{\mathrm{Pr},\Gamma^*_A}$, pour un Pr quelconque.

L'existence d'une fonction comme $(\ )^*_A$ et de la fonction dérivée S_A est cependant soumise à de fortes contraintes.

Proposition 2
Soit Pr et Γ une fonction de probabilité conditionnelle et un arrière-plan quelconques. Soit Δ un ensemble d'ebf et Pr' la fonction de probabilité conditionnelle obtenue à partir de Pr par conditionalisation sur Δ. Alors, pour toute ebf *X*,

$$\mathrm{Pr}(X,\Gamma^*_A \cup \Delta) = \mathrm{Pr}(X,(\Gamma \cup \Delta)^*_A)$$

c'est-à-dire que $(\ )^*_A$ et la conditionalisation permutent.

Preuve :
$f_{\mathrm{Pr}',\Gamma} = f_{\mathrm{Pr},\Gamma\cup\Delta}$ parce que, pour tout *X*, $f_{\mathrm{Pr}',\Gamma}(X) = \mathrm{Pr}'(X,\Gamma) = \mathrm{Pr}(X,\Gamma \cup \Delta) = f_{\mathrm{Pr},\Gamma\cup\Delta}(X)$. Donc, $S_A(f_{\mathrm{Pr}',\Gamma}) = S_A(f_{\mathrm{Pr},\Gamma\cup\Delta})$ et par définition de S_A, $f_{\mathrm{Pr}',\Gamma^*_A} = f_{\mathrm{Pr},(\Gamma\cup\Delta)^*_A}$ et finalement $\mathrm{Pr}(X,\Gamma^*_A \cup \Delta) = \mathrm{Pr}'(X,\Gamma^*_A) = f_{\mathrm{Pr}',\Gamma^*_A}(X) = \mathrm{Pr}(X,(\Gamma \cup \Delta)^*_A)$. ■

4. Signification et conséquences des deux propositions

La première proposition nous dit que toute technique de révision de fonctions de probabilité conditionnelle à la lumière de *A* qui laisse intact l'arrière-plan et qui

(1) attribue au conditionnel la probabilité du conséquent pour cette nouvelle fonction de probabilité et

(2) attribue à *A* la valeur 1

est triviale.

Remarquons que si on admet que $A > A$ est valide pour ce conditionnel, (2) suit de (1). En effet, pour tout *A*, tout Pr et tout Γ, $1 = \Pr(A > A, \Gamma) = \Pr_A(A, \Gamma)$. Comme $A > A$ signifie « Si *A* était le cas, alors *A* serait le cas. », la contestation de la validité de $A > A$ est, au mieux, incompréhensible.

Serait-il raisonnable, par ailleurs, d'accepter que $\Pr(A > (B > A), \Gamma) = 1$ et de rejeter la validité de (3) pour tout Pr, *A*, *B* et Γ, $\Pr((A > B) \supset (A \supset B), \Gamma) = 1$ et ainsi bloquer la preuve de l'indiscernabilité probabiliste de «$\supset$» et «>» ? Non, car la relation converse – c'est-à-dire, pour tout Pr, *A*, *B* et Γ, $\Pr((A \supset B) \supset (A > B), \Gamma) = 1$ – s'ensuit de (1) et (2) par la proposition 1. Or, ce résultat est inacceptable ; il a pour conséquence que la probabilité d'un contrefactuel est de 1 si celle de l'antécédent est de 0 ou celle du conséquent de 1.

Par exemple, supposons que la probabilité qu'il ne pleut pas soit de 1 (ce qui ne signifie pas que la proposition « Il ne pleut pas » soit dans l'arrière-plan), alors l'énoncé « S'il pleuvait, la Lune serait en fromage » a une probabilité de 1.

Ceci nous conduit à rejeter une autre objection potentielle. Selon une tradition bien établie, les propositions de l'arrière-plan sont nécessaires et non simplement vraies. On sait que cette distinction n'existe pas dans le cadre des probabilités absolues. Si $\Pr(A) = 1$, la conditionalisation sur $\neg A$ n'est pas définie.

Dans le cadre des probabilités conditionnelles, la conditionalisation sur la négation d'un élément de l'arrière-plan nous donne un arrière-plan Pr-anormal pour tout Pr mais ce n'est pas le cas en général pour la conditionalisation sur des énoncés de probabilité nulle mais dont la négation n'est pas dans l'arrière plan. Or, la preuve que la probabilité d'un contrefactuel est de 1 si celle de l'antécédent est de 0 ou celle du conséquent est de 1 ne fait pas intervenir l'appartenance à l'arrière plan mais simplement que les probabilités sont de 0 ou 1. En conclusion : le schème (2) doit être rejeté.

Venons-en désormais à la seconde proposition. Remarquons tout d'abord que

(1') Pour tout Γ et tout Pr, $\mathrm{Pr}_A(A,\Gamma^*_A)=1$

n'intervient pas dans la preuve. Aucune hypothèse n'est faite sur Pr_A. En particulier, la preuve s'applique lorsque Pr_A est Pr. La proposition (2) s'applique à toute fonction de révision de l'arrière-plan. Elle s'applique à la conditionalisation elle-même et, heureusement (!), on a bien que

$$\text{si } (\Gamma)^*_A=\Gamma\cup\{A\}, \text{ alors } \mathrm{Pr}(X,\Gamma^*_A\cup\Delta)=\mathrm{Pr}(X,(\Gamma\cup\Delta)^*_A),$$

parce que

$$\mathrm{Pr}(X,(\Gamma\cup\{A\}\cup\Delta)=\mathrm{Pr}(X,(\Gamma\cup\Delta)\cup\{A\}),$$

l'union étant une opération booléenne associative et commutative.

Il vaut la peine de remarquer que la preuve n'utilise aucune hypothèse spécifique sur la nature de la transformation de Γ en Γ^*_A. Nous utilisons la notation Γ^*_A parce que nous avons en tête une révision de Γ à la lumière de *A*, mais cette intuition n'a pas de formulation explicite et n'intervient pas dans la preuve. Revenons à l'image de la matrice pour représenter une fonction de probabilité conditionnelle. Ce que la proposition (2) montre est que *tout* processus de révision qui consiste à changer de colonne doit permuter avec la conditionalisation. La raison en est simple : la fonction à une place représentée par une colonne, c'est-à-dire $\Pr(x,\Gamma)$ où x est une variable d'énoncé peut être décrite de plusieurs façons, en particulier en conditionalisant. Si $\Pr'$ est obtenue à partir de Pr par conditionalisant sur Δ, $\Pr'(x,\Gamma)$ est le même objet mathématique que $\Pr(x,\Gamma\cup\Delta)$ et donc toute opération effectuée sur l'un donne le même résultat lorsque effectuée sur l'autre. Toute opération de changement d'arrière-plan doit permuter avec la conditionalisation.

Existe-t-il une porte de sortie ? En ce qui concerne la proposition (1), la réponse est définitivement non : abandonner (1) ou (2) c'est abandonner l'idée que l'on peut formaliser l'intuition que l'on peut évaluer la probabilité conditionnelle d'un contrefactuel $A > B$ en utilisant une fonction révisée *en conservant* l'arrière-plan. La seconde proposition laisse une porte ouverte, mais bien étroite : seuls les processus de révision de l'arrière-plan qui permutent avec la conditionalisation sont éligibles.

5. Conclusion

Il n'y a que deux possibilités :

la première est de continuer à penser que le cadre général des fonctions à la Popper est le bon cadre pour représenter des agents épistémiques et de rejeter l'idée que l'on puisse y décrire quelque notion de révision qui soit intéressante ;

la seconde est de considérer que les propositions (1) et (2) sont une « preuve » que les fonctions de probabilité absolue sont les bons instruments pour représenter les fonctions de croyance et que le cadre des fonctions de probabilité conditionnelle doit être rejeté.

Bibliographie

GÄRDENFORS P. 1988. *Knowledge in Flux*, Cambridge: MIT Press.

LEPAGE F. & MORGAN G. C. 2011. Revision with Conditional Probability Functions : Two Impossibility Results, in Girard P., Roy O. & Marion M. (eds), *Dynamic Formal Epistemology*, Dordrecht: Springer (Synthese Library), 161-172.

LEWIS D. K. 1973. *Counterfactuals*, Oxford: Basil Blackwell.

LEWIS D. K. 1976. Probabilities of Conditionals and Conditional Probabilities, *Philosophical Review* **85**, 297-315.

MORGAN G. C. 2000. Canonical Models and Probabilistic Semantics, in Shanks N. & Gardner R. (eds) *Logic, Probability and Science*, Amsterdam: Rodopi, 17-35.

POPPER K. R. 1934. *The logic of scientific discovery*, Traduit de l'allemand, London: Routledge, 1992.

STALNAKER R. 1968. A Theory of Conditionals, in Rescher N. *Studies in Logical Theory*, Oxford: Blackwell, APQ Monography No. 2. [Reprinted in Sosa E. (ed.), *Causations and Conditionals*, Oxford University Press, 165-179].

STALNAKER R. 1970. Probability and Conditionals, *Philosophy of Science* **37**/1, 64-80.

Une preuve intuitionniste de l'argument de Diodore-Prior

Joseph Vidal-Rosset

Résumé

Cet article répond aux trois reproches que Vuillemin a formulés contre la preuve du Dominateur proposée par Prior. L'interprétation intuitionniste de cette preuve permet d'écarter les deux premiers reproches et de limiter la portée du troisième. On donne en conclusion une preuve de l'argument de Diodore, fondée sur une interprétation intuitionniste du premier axiome de la démonstration de Prior. Cette preuve fait à la fois l'économie des axiomes additionnels de Prior et des indices temporels utilisés dans les démonstrations de Vuillemin[1].

1. Le langage de la preuve de Prior

Prior a donné dans (1955) et (1967) une démonstration formelle du célèbre argument de Diodore rapporté par Epictète. Comme nous allons le voir, la preuve proposée par Prior, exprimée dans le langage d'une logique temporelle minimale, est fondée uniquement sur les règles du calcul propositionnel de la logique minimale. Aucune autre démonstration formelle de l'argument

[1] Par souci de concision, les affirmations contenues dans cet article concernant la validité de formules du système modal **K** et de la logique temporelle minimale $\mathbf{K_t}$ ne sont pas accompagnées de leurs preuves. Les affirmations au sujet de la validité dans **K** ou dans $\mathbf{K_t}$ ont cependant été systématiquement vérifiées à l'aide du démonstrateur de théorème *The Logic Workbench* (LWB), disponible à l'adresse : http://www.lwb.unibe.ch/.

de Diodore n'a été capable, jusqu'à présent, de rivaliser avec l'élégance et la simplicité de cette preuve.

1.1. Formalisme de la preuve de Prior — Prior fait usage du langage du calcul propositionnel auquel il ajoute deux opérateurs temporels et deux opérateurs modaux.

1. *Opérateurs temporels* :

Pp = « p est le cas au moins une fois dans le passé »,

Fp = « p est le cas au moins une fois dans le futur ».

On notera par ailleurs que p et $\neg p$ signifient respectivement :

p = « p est maintenant le cas »,

$\neg p$ = « p n'est pas maintenant le cas ».

En d'autres termes, si une variable propositionnelle n'est pas précédée d'un opérateur temporel, on l'interprète comme représentant une assertion au sujet du présent.

2. *Opérateurs modaux* :

$\Diamond p$ = « p est possible »,

$\Box q$ = « q est nécessaire ».

1.2. L'argument de Diodore proprement dit — Les trois prémisses du Dominateur sont alors formalisées par Prior de la façon suivante :

– Toute proposition vraie au sujet du passé est nécessaire. En d'autres termes, ce qui a été le cas ne peut pas ne pas avoir été le cas :

$$Pp \rightarrow \neg \Diamond \neg Pp \qquad \text{(I)}$$

– L'impossible ne suit pas [logiquement] du possible. En d'autres termes, s'il est nécessaire que *p* implique *q*, alors si *q* est impossible, *p* l'est aussi.

$$\Box(p \to q) \to (\neg\Diamond q \to \neg\Diamond p) \qquad \text{(II)}$$

– Quelque chose qui n'est, ni ne sera, reste cependant possible.

$$\neg p \wedge \neg Fp \wedge \Diamond p \qquad \text{(III)}$$

Diodore affirme que l'assertion conjointe de (I) et de (II) implique la négation de (III) :

– Si un énoncé *p* n'est vrai ni maintenant ni plus tard, alors *p* est impossible.

$$(\neg p \wedge \neg Fp) \to \neg\Diamond p \qquad (\neg\ \text{III})$$

1.3. L'argument de Diodore-Prior

1.3.1. Déduction naturelle — Pour démontrer formellement l'argument de Diodore, Prior ajoute deux axiomes. Le premier est un axiome de la logique temporelle $\mathbf{K_t}$ et, à l'instar de Garson (2006), je l'appelle (HF) :

– « Nécessairement, si une chose est le cas, alors il a toujours été vrai qu'elle allait être au moins une fois le cas. » En formule :

$$\Box(p \to HFp) \qquad \text{(HF)}$$

– A partir de la traduction *classique* de *H* par $\neg P \neg$, il est possible de traduire (HF) par « nécessairement, si *p* est le cas, alors il n'a jamais été vrai dans le passé que *p* n'allait pas être au moins une fois le cas ». C'est cette expression que Prior choisit comme premier axiome additionnel :

$$\Box(p \to \neg P \neg Fp) \qquad \text{(IV)}$$

Prior ajoute enfin un second axiome additionnel, à savoir :

– « Si *p* n'est pas le cas et ne le sera jamais, alors il y a au moins un moment dans le passé où il est vrai que *p* ne sera jamais le cas. » En formule :

$$(\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow P\neg Fp \qquad \text{(V)}$$

On peut alors démontrer en déduction naturelle que la conjonction de (I), (II), (IV) et (V) implique la négation de (III) :

1	$Pp \rightarrow \neg\Diamond\neg Pp$	(I)
2	$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\Diamond q \rightarrow \neg\Diamond p)$	(II)
3	$\Box(p \rightarrow \neg P\neg Fp)$	(IV)
4	$(\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow P\neg Fp$	(V)
5	$\quad \neg p \wedge \neg Fp$	Hyp
6	$\quad \neg p \wedge \neg Fp$	R - 5
7	$\quad (\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow P\neg Fp$	R - 4
8	$\quad P\neg Fp$	$\rightarrow$E, 6, 7
9	$\quad Pp \rightarrow \neg\Diamond\neg Pp$	R - 1
10	$\quad P\neg Fp \rightarrow \neg\Diamond\neg P\neg Fp$	Sub $p/\neg Fp$
11	$\quad \neg\Diamond\neg P\neg Fp$	$\rightarrow$E, 8, 10
12	$\quad \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\Diamond q \rightarrow \neg\Diamond p)$	R-2
13	$\quad \Box(p \rightarrow \neg P\neg Fp) \rightarrow (\neg\Diamond\neg P\neg Fp \rightarrow \neg\Diamond p)$	Sub $q/\neg P\neg Fp$
14	$\quad \Box(p \rightarrow \neg P\neg Fp)$	R - 3
15	$\quad \neg\Diamond\neg P\neg Fp \rightarrow \neg\Diamond p$	$\rightarrow$E, 13, 14
16	$\quad \neg\Diamond p$	$\rightarrow$E, 11, 15
17	$(\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow \neg\Diamond p$	$\rightarrow$I, 5-16, i.e. $\neg$ (III)

□

Figure 1. La preuve de Prior en déduction naturelle

On peut remarquer que la preuve de Prior ne fait usage que des règles de la logique propositionnelle minimale, cette dernière étant contenue dans la logique intuitionniste, la validité intuitionniste de la preuve de Prior ne fait donc aucun doute.

1.3.2. Arbre de réfutation — Si l'on lit attentivement la preuve de Prior en déduction naturelle (figure 1), on peut remarquer que l'axiome (IV) est en fait utilisé pour transformer l'axiome (II) *via* une règle de substitution. Ainsi la contradiction réside plus précisément dans la conjonction des axiomes (I) et (II*), c'est-à-dire (II) modifié à l'aide de (IV), *via* (V) et (III). C'est ce qu'atteste l'arbre de réfutation suivant :

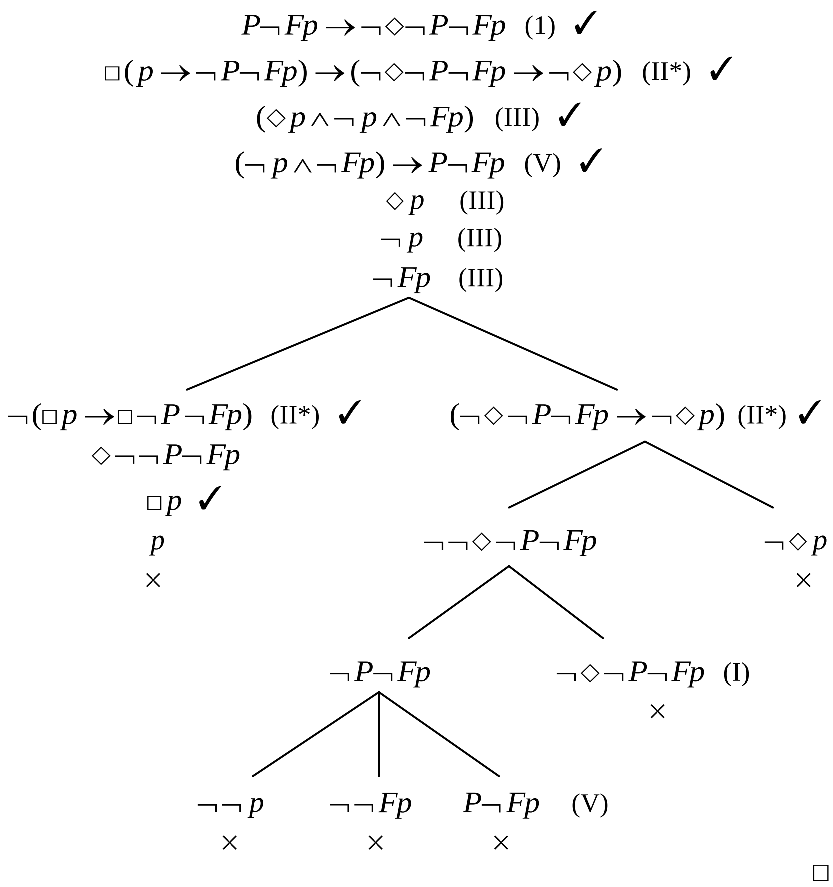


Figure 2. L'arbre de la preuve de Prior

Il est ici intéressant de noter que cet arbre de réfutation apporte une information supplémentaire. L'artbre montre que l'on a besoin des axiomes modaux qui définissent les systèmes **K** et **T**.

$$\Box(p \to q) \to (\Box q \to \Box p) \qquad \text{(K)}$$

$$\Box p \to p \qquad \text{(T)}$$

Sans ces axiomes, il est en effet impossible de parvenir à la contradiction qui ferme la branche gauche de l'arbre de réfutation.

1.4. La logique temporelle $\mathbf{K_t}$ — Que la preuve de Prior soit fondée sur le système modal **T** n'a rien de surprenant, pour peu que l'on réfléchisse à ce qu'écrit Copeland (1983) :

> There is a well-known connection between the minimal tense logic $\mathbf{K_t}$ and the minimal modal logic **T**. If we define $\Box p$ as $p \wedge Gp$ (the so-called Diodorean definition of necessity) then the theorems of $\mathbf{K_t}$ containing no logical symbols other than $\Box$ and truth functional connectives are precisely the theorems of **T**.

$\mathbf{K_t}$ est bien connu comme le système de logique temporelle minimale *qui n'implique aucune assomption sur les propriétés physiques du temps*[2]. On a dans $\mathbf{K_t}$ les équivalences suivantes :

$$\vdash_{\mathbf{K_t}} Gp \equiv \neg F \neg p \qquad (1)$$

et

$$\vdash_{\mathbf{K_t}} Hp \equiv \neg P \neg p \qquad (2)$$

où Gp et Hp signifient respectivement : « p sera toujours le cas » et « p a toujours été le cas ».

---

[2] Pour une description de $\mathbf{K_t}$, voir Burgess (2009 : chap. 2) et pour un système de preuve dans $\mathbf{K_t}$, voir l'élégant système exposé par Copeland (1983).

Il est alors possible de définir, comme Ewald (1986) l'a fait, un système *intuitionniste* de logique temporelle qui est un sous-système de $\mathbf{K_t}$. Appelé $\mathbf{IK_t}$, ce système est fondé sur la logique intuitionniste de la même façon que $\mathbf{K_t}$ est fondé sur la logique classique. Dans $\mathbf{IK_t}$ les équivalences (1) et (2) disparaissent pour faire place aux implications suivantes :

$$\vdash_{\mathbf{IK_t}} Gp \to \neg F \neg p \qquad (3)$$

et

$$\vdash_{\mathbf{IK_t}} Hp \to \neg P \neg p \qquad (4)$$

Par contre, les converses de ces formules *ne sont pas* des théorèmes de $\mathbf{IK_t}$. Il en va de même pour toutes les formules de $\mathbf{IK_t}$ qui, pour être prouvées, nécessitent le recours à des formules non démontrables en logique intuitionniste.

2. Questions logiques et philosophiques

2.1. Le problème logique — Le fait que la preuve de Prior soit valide en raison des règles de la logique minimale ne prouve pas que la démonstration parvienne à une conclusion justifiée dans une logique temporelle et modale. Pour que la conclusion soit valide dans un système comme $\mathbf{K_t}$ par exemple, il faudrait que toutes les formules temporelles utilisées dans la preuve de Prior soient également démontrables dans $\mathbf{K_t}$ et que toutes les formules modales soient aussi démontrables dans $\mathbf{T}$. En d'autres termes, se demander si

$$X \vdash_{\mathbf{K_t}} (\neg \mathrm{III}) \qquad (5)$$

où X est l'ensemble des prémisses de Prior, est une question plus difficile que de montrer que, pour $\vdash_m$ symbolisant la relation de dérivabilité en logique minimale, on a

$$X \vdash_m (\neg \text{III}) \qquad (5)$$

ce qui a déjà été prouvé précédemment. Toute la question est donc, sur le plan strictement logique, de déterminer quelles sont les ressources minimales qui sont nécessaires à une logique temporelle et modale pour justifier intégralement la conclusion de Diodore-Prior.

2.2. La polémique philosophique — Il est important de rappeler le caractère anti-aristotélicien du Dominateur. Cet argument entend en effet monter une faute logique inhérente à la conception des modalités entretenue par l'essentialisme d'Aristote. On sait que la distinction modale entre actualité et potentialité est fondamentale dans le système d'Aristote et que c'est en partant de cette distinction qu'Aristote répond au fatalisme logique des Mégariques dans le chapitre IX du *De Interpretatione*. Pour faire court, Aristote admet les modalités *de re*. Selon lui, une substance seconde, l'homme par exemple, a des qualités nécessaires, comme celle d'avoir un corps limité et corruptible, et des qualités contingentes, comme celle d'être chauve ou de ne pas l'être. En tant qu'homme, il réalisera nécessairement certains actes, comme celui de respirer, mais il laissera aussi d'autres possibles, comme par exemple le fait d'apprendre le chinois, à jamais irréalisés. On peut citer Vuillemin pour résumer le sens qui, en raison du contexte aristotélicien, a été donné au Dominateur :

> On peut […] avec Aristote, distinguer deux sortes de futurs. Certains sont des vertus qui *ne pourraient pas ne pas être* réalisées. Les autres sont des possibles contingents. Parmi ces derniers, certains sont réalisés, mais il en reste d'autres qui ne le seront jamais. L'ordre des possibles, par conséquent, n'est en aucune façon épuisé par les futurs qui se réaliseront. Diodore veut montrer qu'aucun futur non réalisé n'est possible. Mais pour cela il n'a pas besoin de supposer que tous

> les possibles ne sont pas et ne seront jamais ; le fait qu'Aristote admette la non-réalisation de quelques possibles est déjà assez. (Vuillemin 1996 : 32)

En réalité il est parfaitement possible de conclure avec Diodore que tout possible est ou bien présent ou bien futur, tout en refusant d'affirmer qu'aucun futur non réalisé n'est possible. La stratégie consiste alors à assumer un engagement ontologique minimal au sujet de la nature du temps, ainsi qu'une théorie des modalités bien plus faible que celle d'Aristote, afin de faire tomber la théorie de ce dernier dans la contradiction, puisque Aristote assume *a fortiori* les thèses de la logique minimale d'un Diodore. Cependant, en tant qu'arbitre, Vuillemin ne reconnaît pas à Prior le mérite d'avoir traduit fidèlement l'argument de Diodore et par conséquent refuse que l'on s'appuie sur la démonstration de Prior pour juger de la solidité de l'argument de Diodore contre Aristote :

> Suivons, au contraire [de Prior], la vraisemblance historique. Considérons la faveur universelle que le Dominateur a rencontré dans l'antiquité, comme une présomption en faveur de sa solidité. Écartons donc la supposition que des ambiguïtés grossières se seraient glissées dans les prémisses. Donnons, avec Prior, un sens purement logique au mot "suivre". Posons que le passé dont il est question dans la première prémisse est celui des événements, non celui des temps grammaticaux. Il reste à montrer l'incompatibilité des trois prémisses sans avoir ni à postuler la discrétion du temps, ni à confondre l'irrévocabilité du passé avec la nécessité logique, ni même à invoquer une rétrogradation du vrai dont Epictète ne fait pas mention et que le Stagirite a expressément mise en question. (Vuillemin 1984 : 25-26)

Vuillemin soutient donc que la preuve de Prior, principalement en raison de ses prémisses additionnelles, nécessaires à la dérivation de la conclusion, est coupable de trois fautes majeures:

(A) la confusion de la nécessité logique avec l'irrévocabilité du passé (faute de la première prémisse),

(B) l'usage de la rétrogradation du vrai (faute de la première prémisse additionnelle),

(C) le postulat du temps discret (faute de la seconde prémisse additionnelle).

Insistons encore sur le fait que pour Vuillemin les fautes (B) et (C) sont des fautes en raison du but anti-aristotélicien du Dominateur, car Aristote rejette explicitement la rétrogradation du vrai qui est impliquée par la théorie des Mégariques, et il assume la continuité du temps.

Dans les sections qui suivent, je me limite à une défense de la preuve que Prior a donné du Dominateur, en prouvant, dans les sections 3 et 4, que les deux premières critiques peuvent parfaitement être écartées d'un point de vue intuitionniste. La section 5 explique brièvement pourquoi le dernier reproche n'a pas le caractère décisif que Vuillemin lui donne. Enfin, la section 6 donne une preuve intuitionniste fondée sur une lecture modale du premier axiome de la preuve de Prior, qui permet de dériver la conclusion de Diodore, sans faire usage du moindre axiome additionnel.

3. Réponse à la première accusation

3.1. Renforcement du reproche — Pour répondre au reproche (A), on commencera par le reprendre et l'exprimer sous une forme qui renforce le soupçon du caractère irrecevable de la preuve de Prior, dès lors que celle-ci prétend être une preuve en logique modale. Il est en effet indiscutable que, même dans **S5**, l'axiome (I) *n'est pas* un théorème de logique modale. L'axiome (I) a la même forme logique que

$$p \to \neg\Diamond\neg p \qquad (7)$$

formule classiquement équivalente à

$$p \to \Box p \qquad (8)$$

On a vu que la preuve de Prior *via* la méthode des arbres de Beth nécessite (T). En raison de la conjonction de (T) et de (8) on serait donc conduit à admettre

$$p \leftrightarrow \Box p \qquad (9)$$

Cependant le fait d'admettre (9) serait effectivement une catastrophe pour la preuve de Prior car, comme le soulignent Hughes et Cresswell (1996 : 64-5), le simple fait d'ajouter (9) au système modal normal le plus faible qui soit, c'est-à-dire **K**, provoque un *effondrement modal*. En d'autres termes, **K** + (9) = **Triv**, à savoir, un système où les théorèmes n'expriment de manière *triviale* que les vérités d'un calcul propositionnel, où $\Box$ et $\Diamond$ ne sont rien d'autre que de simples décorations inutiles.

3.2. Réponse au reproche renforcé — Interprétons l'axiome (I) comme exprimant la même idée que le principe de nécessité conditionnelle que Vuillemin utilise dans son système de logique avec indices temporels, c'est-à-dire « si p est vrai en *t* alors il n'est pas possible en *t* que *p* soit faux en *t* », en formule :

$$p_t \to \neg\Diamond_t \neg p_t \qquad \text{(Nec. Cond.)}$$

et faisons de l'axiome (I) *une instance du schéma d'axiome*

$$p \to \neg\Diamond\neg p \qquad \text{(Schéma d'ax.)}$$

valide quel que soit *p*. On peut alors écarter le reproche (A) (et plus encore, comme on le verra dans la section 6). Soulignons qu'il est crucial d'*interpréter* l'axiome (I) de façon à ce qu'il ne soit pas lu comme on lit classiquement (8). Remarquons que la preuve originale de Prior donne un indice de la légitimité d'une lecture intuitionniste, en ne traduisant jamais $\neg\Diamond\neg$ par $\Box$, comme l'autoriserait l'équivalence classique. Si la logique intuitionniste des prédicats permet de prouver

$$\vdash_i (\forall x)Fx \to \neg(\exists x)\neg Fx \tag{10}$$

mais n'autorise pas la preuve de l'implication converse, de la même façon on a, en logique intuitionniste modale :

$$\vdash_i \Box\varphi \to \neg\Diamond\neg\varphi \tag{11}$$

mais en revanche

$$\nvdash_i \neg\Diamond\neg\varphi \to \Box\varphi \tag{12}$$

L'interprétation intuitionniste de l'axiome (I) permet donc d'écarter le reproche (A) exprimé sous sa forme la plus forte, car il n'est plus possible d'affirmer que l'axiome (I) est une instance du schéma (8). Il est d'une part clair que la formule (Schéma d'ax.), conserve sa valeur modale, puisqu'elle dit : « si *p* est *prouvable*, alors il *n'est pas possible* que l'on *puisse* prouver que *p* implique une absurdité ». D'autre part, la menace de devoir accepter (9) comme une formule valide dans le système de logique modale utilisé pour la preuve est aussi écartée, en raison des vertus de la logique intuitionniste, qui permet, comme on le voit, de rejeter la première accusation de Vuillemin contre la preuve de Prior.

4. Réponse à la seconde accusation

Les réticences de Vuillemin au sujet de l'axiome (HF) proviennent du fait que cet axiome affirme une rétrogradation du vrai qui était expressément rejetée par Aristote comme une position absurde :

> Rien n'empêche, en effet, que, dix mille ans à l'avance, tel homme prédise un événement et que tel autre prédise le contraire : ce qui se réalisera nécessairement, c'est celle des deux prédictions, quelle qu'elle soit, qui était vraie à ce moment là. (*De Int.* 9, 18*b*34)

Il est indiscutable que si la preuve de Prior ajoute un axiome qui est rejeté par Aristote, alors cette preuve ne peut être considérée comme acceptable.

Mais l'intérêt de la lecture intuitionniste de la preuve de Prior est de montrer que l'affaiblissement de (HF) par l'axiome (IV) permet d'écarter l'accusation (B). Contrairement à (HF), l'axiome (IV) n'est pas contre-intuitif et, d'un point de vue intuitionniste, celui-ci n'implique pas celui-là. Traduit en langage intuitionniste, l'axiome (IV) dit :

> « S'il est prouvable que *p* soit le cas, alors il n'y a rien qui, dans le passé, puisse prouver que *p* ne sera jamais le cas ».

Autrement dit, si l'on suppose que l'on peut obtenir maintenant une preuve de *p*, alors en raison même de cette supposition, toute supposition de l'existence d'une réfutation de *p* antérieure à cette preuve, c'est-à-dire d'une preuve que *p* conduit toujours à l'absurde, est absurde. En effet la conclusion rétrograde, mais cette rétrogradation a uniquement un contenu cognitif négatif et ne donne nullement le sentiment que les événements à venir sont déjà déterminés dans le passé. *Last but not least*, l'axiome (IV) est un théorème de $\mathbf{K_t}$, tout comme de $\mathbf{IK_t}$. Il n'est donc pas rejetable sans absurdité par Vuillemin, car la logique temporelle aristotélicienne contient nécessairement la logique temporelle minimale $\mathbf{K_t}$.

5. Réponse à la troisième accusation

On a vu que l'axiome (I) lu de manière intuitionniste est acceptable. On sait aussi que l'axiome (II) est un théorème de **K**, qui est le système le plus faible de toutes les logiques modales normales et recevable aussi du point de vue intuitionniste. On vient de voir enfin que l'axiome additionnel (IV) est un théorème de la logique temporelle minimale également valide du point de vue intuitionniste et qu'il ne peut donc pas être rejeté par celui qui adopte une logique plus forte, à l'instar d'Aristote. Qu'en est-il de l'axiome additionnel (V) ? Il est hélas non valide dans $\mathbf{K_t}$ et donc *a fortiori* il n'est pas un théorème de $\mathbf{IK_t}$. C'est pour cette raison que Prior lui-même a douté plus tard de la validité de sa preuve, arrivant à la conclusion que l'axiome (V) n'est valide que dans une structure discrète. En remarquant que l'axiome (V) est équivalent à la formule de Hamblin

$$(p \wedge Gp) \to PGp \qquad \text{(Hamb)}$$

Prior écrit :

> This is precisely Proposition (V) in the reconstruction of the Master Argument of Diodorus. And it is interesting to be given a basis for a tense logic from which it is provable. Just this Proposition (V), however, had begun about 1960 to strike me as dubious. Theses which appeal, in order to gain intuitive plausibility, to what was the case at 'the moment just past', are liable to commit one to the view that time is discrete. What if there is *no* 'moment just past', but between any past moment, however close to the present, and the present itself, there is another moment still past ? On this supposition, Proposition (V) in fact fails, and on the corresponding supposition about the future, Hamblin's fails too. (1967: 48)

Il n'y a donc très probablement aucun moyen de donner une preuve de l'argument de Diodore dans une logique temporelle minimale si l'on ne suppose pas un modèle de temps discret. Mais remarquons, pour en finir avec ce point, que le fait que l'axiome (V) ne soit valide qu'à la condition que l'on accepte un modèle du temps discret ne fait pas de la preuve de Prior une traduction incorrecte de l'argument de Diodore. Cela ne limite pas non plus sa portée polémique contre la position aristotélicienne. Supposons en effet qu'un Aristote refuse l'axiome (V) parce qu'il n'est *logiquement* valide que si l'on interprète le temps *via* la progression des entiers naturels. Il incomberait alors à cet Aristote de décrire les changements événementiels dans un temps continu (comme par exemple le départ du coureur au moment où il perçoit le signal), sans faire usage d'aucun axiome comparable à l'axiome (V). Une telle tâche, si elle est possible, supposerait déjà sans doute la théorie contemporaine des nombres réels, ce qui d'une part est un anachronisme plus grave encore que la faute historique de Prior et ce qui, d'autre part, n'invaliderait pas non plus l'axiome (V) qui est *satisfiable* dans $\mathbf{K_t}$, donc indépendamment du modèle du temps que l'on choisit. La solution raisonnable est alors de concevoir ce fameux axiome du discret comme un axiome *non logique* nécessaire à la preuve de Diodore-Prior dans la logique minimale temporelle. Voyons maintenant comment il est possible de prouver la conclusion de Diodore d'une manière purement modale et intuitionniste, sans les axiomes additionnels.

6. Une preuve intuitionniste de l'argument de Diodore

***Définition* 1 (Contingence)** — Un énoncé *p* est *contingent* s'il n'est ni nécessairement vrai, ni nécessairement faux.

$$\nabla p \leftrightarrow (\neg\Box p \wedge \neg\Diamond\neg p) \qquad (13)$$

mais on utilisera l'écriture suivante :

$$\nabla p \leftrightarrow (\Diamond\neg p \wedge \Diamond\neg\neg p) \quad (\text{Déf. } \nabla)$$

***Exemple* 1** — « Je pense donc je suis », est une vérité nécessaire, donc possible, mais non contingente.

Remarque — Comme le suggère l'exemple 1, on peut percevoir intuitivement que l'usage de ∇ et de $\neg\nabla$ n'a de pertinence que dans un système modal où l'axiome (T) est accepté[3]. On a vu en effet plus haut (section 1.3.2) que la preuve de l'argument de Diodore-Prior nécessite au moins du point de vue modal les axiomes (K) et (T).

***Exemple* 2** — « Aujourd'hui ou demain, François va tondre la pelouse » est une vérité contingente.

Remarque — A la lecture de l'exemple 2, on pressent que les événements passés, tout comme les événements immédiatement présents, excluent la possibilité de leur négation et donc la contingence ainsi définie ; cette impossibilité de nier leur existence implique par conséquent un effondrement modal, mais comme le remarque Vuillemin (1984 : 34), un effondrement modal limité.

[3] C'est ce que souligne Cresswell (1988), en faisant référence à une remarque de Segerberg (1982) au sujet des développements de Montgomery et Routley (1966) sur les systèmes avec l'opérateur ∇. Voir aussi sur ce point Humberstone (1995).

***Définition* 2 (Négation)**

$$\neg p \leftrightarrow (p \to \bot) \qquad \text{(Déf. } \neg\text{)}$$

Remarque — Cette définition de la négation, qui est la définition standard de la négation en logique intuitionniste, peut traduire adéquatement la seconde prémisse de l'aporie de Diodore telle que la rapporte Epictète :

« un possible *ne peut pas* être la conséquence logique d'un impossible ».

Autrement dit, il est équivalent de dire qu'un énoncé *p* implique une conclusion absurde et de dire que *p* est faux ou que la négation de *p* est vraie.

Théorème — *Dans un système modal normal pourvu des axiomes (K) et (T), où l'axiome* (*I*) *est une instance du schéma d'axiome* $p \to \neg\Diamond\neg p$, *et où l'on assume qu'il n'y a de preuve de p comme possible qu'à la condition que l'on puisse prouver que p est passé, ou présent, ou futur, alors, avec l'usage de l'opérateur* ∇ *et les seules règles intuitionnistes de la logique propositionnelle on peut dans ce contexte dériver une thèse intuitionniste équivalente à celle de Diodore :*

$$(\neg p \wedge \neg Fp) \to \neg\Diamond\neg\neg p \qquad (14)$$

Démonstration :

1	$Pp \rightarrow \neg\Diamond\neg Pp$	Axiome I
2	$\neg p \wedge \neg Fp$	**H**
3	$P\neg p \wedge \Diamond\neg P\neg p \wedge \Diamond\neg\neg P\neg p$	**H**: $P\neg p \wedge \nabla P\neg p$
4	$P\neg p$	$\wedge_1$ **E**, 3
5	$P\neg p \rightarrow \neg\Diamond\neg P\neg p$	1 subst. $(Pp / P\neg p)$
6	$\neg\Diamond\neg P\neg p$	$\rightarrow$**E**, 4-5
7	$\Diamond\neg P\neg p$	$\wedge_2$ **E**, 3
8	$\bot$	$\rightarrow$**E**, 6-7
9	$\neg P\neg p \vee \neg\nabla P\neg p$	$\rightarrow$**I**, 3-8 (i.e. $\neg$ **H**)
10	$\Diamond\neg\neg p \wedge \Diamond\neg\neg\neg p$	**H**: $\nabla\neg p$
11	$\neg p$	$\wedge_1$ **E**, 2
12	$\neg p \rightarrow \neg\Diamond\neg\neg p$	1 subst. $(Pp / \neg p)$
13	$\neg\Diamond\neg\neg p$	$\rightarrow$**E**, 11-12
14	$\Diamond\neg\neg p$	$\wedge_1$ **E**, 10
15	$\bot$	$\rightarrow$**E**, 13-14
16	$\neg\nabla\neg p$	$\rightarrow$**I**, 10-15 (i.e. $\neg$ **H**)
17	$\Diamond\neg\neg Fp \wedge \Diamond\neg\neg\neg Fp$	**H**: $\nabla\neg Fp$
18	$\neg Fp$	$\wedge_2$ **E**, 2
19	$\neg Fp \rightarrow \neg\Diamond\neg\neg Fp$	1 subst. $(Pp / \neg Fp)$
20	$\neg\Diamond\neg\neg Fp$	$\rightarrow$**E**, 18-19
21	$\Diamond\neg\neg Fp$	$\wedge_1$ **E**, 17
22	$\bot$	$\rightarrow$**E**, 20-21
23	$\neg\nabla\neg Fp$	$\rightarrow$**I**, 17-22 (i.e. $\neg$ **H**)
24	$(\neg\nabla P\neg p \vee \neg P\neg p) \wedge \neg\nabla\neg p \wedge \neg\nabla\neg Fp$	$\wedge$**I**, 9-16-23
25	$(\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow ((\neg\nabla P\neg p \vee \neg P\neg p) \wedge \neg\nabla\neg p \wedge \neg\nabla\neg Fp)$	$\rightarrow$ **I**, 2-24
26	$(\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow \neg\nabla\neg p$	$\vdash_i (p \rightarrow (q \wedge r \wedge s)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
27	$(\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow (\neg\Diamond\neg\neg p \vee \neg\Diamond\neg\neg\neg p)$	Dev. $\neg(\nabla\neg p)$
28	$(\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow \neg\Diamond\neg\neg p$	**Ax.** □

Bibliographie

ARISTOTE, *Organon I et II*, trad. fr. J. Tricot, Paris: Vrin, 1946.
BURGESS J. P. 2009. *Philosophical logic*, Princeton Univ. Press.
COPELAND B. J. 1983. Tense Trees : A Tree System for K_t, *Notre Dame Journal of Formal Logic* **24**(3). 318–322.
CRESSWELL M. J. 1988. Necessity and Contingency, *Studia Logica* **47**(2), 145–149.
EWALD W. B. 1986. Intuitionistic Tense and Modal Logic. *The Journal of Symbolic Logic* **51**(1). 166–179.
GARSON J. W. 2006. *Modal Logic for Philosophers*. Cambridge University Press.
HUGHES G. E. & CRESSWELL M. J. 1996. *A New Introduction to Modal Logic*. London: Routledge.
HUMBERSTONE I. L. 1995. The Logic of Non-contingency, *Notre Dame Journal of Formal Logic* **36**(2), 214–229.
MONTGOMERY H. A. & ROUTLEY F. R. 1966. Contingency and Non-Contingency Bases for Normal Modal Logics, *Logique et Analyse* **35-36**, 318–328.
PRIOR A. N. 1955. Diodoran Modalities, *The Philosophical Quarterly* **5**(20). 205–213.
PRIOR A. N. 1967. *Past, Present and Future*. Oxford University Press.
SEGERBERG K. 1982. *Classical Propositional Operators*, Oxford: Clarendon.
VUILLEMIN J. 1984. *Nécessité ou Contingence, l'aporie de Diodore et les systèmes philosophiques*. Paris: Minuit.
VUILLEMIN J. 1996. *Necessity or Contingency - The Master Argument*, in *Lecture Notes* 56, Stanford: CSLI Publications.

Travaux de logique
Liste des numéros parus

1. Denis Miéville : Introduction à la théorie des systèmes formels. Première partie. Septembre 1985 (épuisé).
2. Denis Miéville : Introduction à la théorie des systèmes formels. Deuxième partie. Janvier 1987 (épuisé).
3. James Gasser: La syllogistique d'Aristote à nos jours. Juin 1987.
4. Denis Miéville : Introduction à la théorie des systèmes formels. Première partie. Avril 1991 (réédition du n˚ 1; épuisé).
5. Denis Miéville Introduction à la théorie des systèmes formels. Deuxième partie. Avril 1991 (réédition du n˚ 2; épuisé).
6. Denis Miéville : La négation, une étude logique. Mai 1991 (épuisé).
7. Denis Miéville (éd.): Kurt Gödel. Actes du colloque, Neuchâtel, 13 et 14 juin 1991. Septembre 1992.
8. James Gasser : Introduction à la logique des relations de C.S. Peirce. Novembre 1993.
9. D. Miéville, P. Joray, D. Stauffer, N. Gessler: Études logiques. Port-Royal : une logique des idées. L'avènement de la théorie sémantique de la vérité de Tarski. George Boole et l'algèbre de la logique. Décembre 1994.
10. D. Bourquin, P. Joray, N. Gessler, D. Miéville: Analyse catégorielle et logique. Octobre 1996.
11. D. Miéville (éd.) : Introduction aux logiques non classiques. Octobre 1997.
12. F. Vuissoz : La conception sémantique de la vérité. Logique et philosophie chez Alfred Tarski. Décembre 1998.
13. D. Miéville, P. Joray, F. Nef, M. Bourdeau, D. Bourquin, A. Lecomte, J. Lambek, B. Godart-Wendling : Rôle et enjeux de la notion de catégorie en logique. Actes du colloque organisé à Neuchâtel, les 16 et 17 octobre 1998. Septembre 1999.
14. F. Nef, C. Hughes, P. Giaretta, A. Bottani, N. Gessler, F. Correia. P. Simons, A. Varzi : Méréologie et modalités. Aspects critiques et développements. Actes du colloque, Neuchâtel, 20-21 octobre 2000. Août 2001.

⌧ D. Miéville, Introduction à l'œuvre de S. Lesniewski. Fasc. I : La protothétique. Novembre 2001.

15 A. Facchini, «Maison Hilbert»: un très joli édifice sans toit ni sol. Analyse model-théorétique d'un échec. Octobre 2003.

⌦	D. Miéville, Introduction à l'œuvre de S. Lesniewski. Fasc. II : L'ontologie. Novembre 2004.
16.	N. Gessler, P. Joray, C. Degrange, Le logicisme catégoriel. Janvier 2005.
17.	J.-Y. Béziau, A. Costa Leite, A. Facchini (eds), Aspects of Universal Logic. Décembre 2004.
⌦	N. Gessler, Introduction à l'œuvre de S. Lesniewski. Fasc. III : La Méréologie. Août 2005.
⌦	M. Peeters, Introduction à l'œuvre de S. Lesniewski. Fasc. IV : L'œuvre de jeunesse. Janvier 2006.
18.	M. Joray (ed.), Contemporary Perspective on Logicism and the Foundation of Mathematics, Janvier 2007.
⌦	N. Gessler, Introduction à l'œuvre de S. Lesniewski, Fasc. V : Lesniewski, lecteur de Frege. Novembre 2007.
19.	P. Joray & D. Miéville (éds), Définition. Rôles et fonctions en logique et en mathématiques. Actes du colloque Neuchâtel, 19-20 octobre 2007. Juin 2008.
⌦	D. Miéville, Introduction à l'œuvre de S. Lesniewski, Fasc. VI : La métalangue d'une syntaxe inscriptionnelle. L'exemple de la protothétique. Janvier 2009.

Ces publications peuvent être obtenues auprès du Centre de Recherches Sémiologiques au prix de **Fr.s. 15.-; Fr. 20.-** dès le n° 14 (TVA comprise).

Travaux du Centre de Recherches Sémiologiques
Liste des numéros parus

*1. G. Vignaux: La nouvelle rhétorique. Revue critique et perspectives d'application. 1969-70.
*2. G. Vignaux: L'argumentation antique: Aristote. Janvier 1970.
*3. M.-J. Borel: Pour définir l'argumentation. 1969-70.
*4. F. Bugniet: Remarques sur les notions d'assertion linguistiques et de proposition logique. Septembre 1970.
*5. M.-J. Borel, G. Vignaux: L'étude de l'argumentation. Séminaire 1969-70.
*6. G. Vignaux: L'argumentation: bibliographie sélective. Janvier 1971.
*7. J.-B. Grize: Logique de l'argumentation et discours argumentatif. Mai 1971.
*8. J.-L. Galay: La rhétorique du discours de philosophie systématique. Essais d'analyse. Mars 1971.
*9. C. Morier: Charles Sanders Peirce et la sémiotique. Mars 1971.
*10. G. Vignaux: L'argumentation et le résumé. Mars 1971.
*11. C. Gillièron, C. Bonnet: Peut-on définir l'argumentation? Avril 1971.
*12. J.-B. Grize: Notes sur l'ontologie et la méréologie de S. Lesniewski. Mars 1972.
*13. M. Hirsbrunner, P. Fiala: Les limites d'une théorie saussurienne du discours et leurs effets dans la recherche sur l'argumentation. Avril 1972.
*14. C. Gillièron, A.-M. Badonnel, J.-P. Iacazzi: Les recherches psychologiques et psycholinguistiques sur la négation et les relations d'opposition. Mai 1972.
*15. J.-L. Galay: Esquisse pour une théorie figurale du discours. Septembre 1972.
*16. Y. Oppel: Sémiotique littéraire, à propos de la coordination, répétition et opposition dans un texte littéraire. Mai 1973.
*17. P. Fiala, C. Ridoux: Essai de pratique sémiotique. Juin 1973.
*18. M. Hirsbrunner: Pour une critique de la sémiotique de Roland Barthes. Juillet 1973.
*19. Y. Oppel: Colloque sur l'analyse du discours «Divergences et convergences». Février 1974.
*20. (Collectif): Logique, argumentation, discours (LAD). Recherche. Septembre 1974.
*21. (Collectif): Logique, argumentation, discours (LAD). Recherche. Septembre 1974.

*22. A.-F. Schmid: Philosophie et sciences chez Henri Poincaré: lecture philosophique. Octobre 1974.
*23. M.-J. Borel: Schématisation discursive et énonciation. Arguments théoriques et approche descriptive (LAD I). Octobre 1975.
*24. A. Licitra: Les relations interpropositionnelles. Huit types d'après R. Longacre (LAD I). Octobre 1975.
*25. (Collectif): Discours et structures sociales. Janvier 1977.
*26. M. Ebel: Langage, histoire, action: les recherches de Jean Pierre Faye. Septembre 1975.
*27. M. Ebel, P. Fiala: Recherches sur les discours xénophobes I. Juillet 1977.
*28. M. Ebel, P. Fiala: Recherches sur les discours xénophobes II. Juillet 1977.
*29. J.-B. Grize: Matériaux pour une logique naturelle (LAD I). Mai 1976.
*30. D. Miéville, M.-J. Borel, A. Licitra: Discours et analogie (LAD II). Mai 1977.
*31. J. Moeschler: Contribution linguistique à une sémiotique du cinéma. Mai 1977.
*32. A. Lecomte: Paraphrase et thématisation. Essais d'analyse logique. Décembre 1978.
*33. (Collectif): Langue et discours I. Colloque Besançon-Neuchâtel, 2-4 octobre 1978. Mars 1978.
*34. (Collectif): Langue et discours II. Colloque Besançon-Neuchâtel, 2-4 octobre 1978. Mars 1978.
*35. P. Baldi, J. Moeschler: Comment contrôler le discours: interaction et réfutation dans le débat Giscard-Mitterrand (1974). Juillet 1979.
*36. (Collectif): Quelques réflexions sur l'explication. Février 1980.
37. M. Sanchez-Mazas: Traduction arithmétique des graphes et des relations binaires et applications logiques et informatiques. Juin 1981.
*38. (Collectif): Le discours explicatif I. Septembre 1981.
*39. (Collectif): Le discours explicatif II. Septembre 1981.
40. C. Wülser: Actes de langage explicatifs. Février 1982.
*41. (Collectif): Logique naturelle du raisonnement. Avril 1982.
*42. (Collectif): Linguistique et sémiologie I. Colloque Besançon-Neuchâtel, 5-6 octobre 1981. Juillet 1982.
43. (Collectif): Linguistique et sémiologie II. Colloque Besançon-Neuchâtel, 5-6 octobre 1981. Juillet 1982.
*44. (Collectif): Raisonnements et raisons. Avril 1983.
45. F. Albera: Problèmes de l'énonciation au cinéma. Février 1984.

46. (Collectif): Construction et transformations des objets du discours I. Colloque Besançon-Neuchâtel, 3-4 octobre 1983. Mars 1984.
47. (Collectif): Construction et transformations des objets du discours II. Colloque Besançon-Neuchâtel, 3-4 octobre 1983. Mars 1984.
*48. (Collectif): Analyse de texte assistée par ordinateur. Utilisation du logiciel DEREDEC. Janvier 1985.
*49. (Collectif): Problèmes et méthodes d'une analyse de texte articulant organisation cognitive, argumentation et représentations sociales. Juin 1985
50. (Collectif): Actes du colloque «Dialogisme et Polyphonie», 27/28 septembre 1985. Avril 1986.
*51. (Collectif): Le discours descriptif. Du texte aux objets de connaissance I. Juillet 1986.
*52. (Collectif): Le discours descriptif. Du texte aux objets de connaissance II. Juillet 1986.
*53. (Collectif): La référence. Points de vue linguistique et logique. Mars 1987.
54. D. Apothéloz, J.-B. Grize: Langage, processus cognitif et genèse de la communication. Septembre 1987.
*55. (Collectif): La schématisation descriptive. Types textuels, formes et fonctions discursives. Janvier 1988.
56. D. Miéville, R. Martin, A. Culioli, G.G. Granger, C. Gillièron, G. Seel, J. Molino, L. Frey, J.-B. Grize: La négation sous divers aspects. Actes du colloque, Neuchâtel 22-23 octobre 1987. Septembre 1988.
*57. D. Miéville, D. Apothéloz, P.-Y. Brandt, G. Quiroz, J.-B. Grize: La négation. Contre-argumentation et contradiction. Septembre 1989.
*58. M. Charolles: De l'art de nager et des différentes manières d'en parler. Septembre 1990.
*59. D. Miéville, M.-J. Borel, J.-P. Desclés, J. Gasser, P.-Y. Brandt; D. Apothéloz, J. Moeschler, J. Jayez, M.F. Blès: La négation. Le rôle de la négation dans l'argumentation et le raisonnement. Actes du colloque, Neuchâtel 11-12 octobre 1990. Septembre 1991.
60. D. Miéville, D. Apothéloz, P.-Y. Brandt: Les organisations raisonnées. Analyse de l'articulation de séquences discursives. Juin 1992.
61. D. Miéville, M. Chavaz, E. Gattico: Relations formelles et non formelles. Septembre 1993.
62. D. Miéville, C. Tiercelin, G. Heinzmann, G. Deledalle, J. Gasser, N. Everaert-Desmedt, J. Réthoré, M. Balat, J.-P. Kaminker: Charles Sanders Peirce. Apports récents et perspectives en épistémologie,

sémiologie, logique. Actes du colloque, Neuchâtel, 16-17 avril 1993. Avril 1994.

63. D. Miéville, J.-P. Desclés, P. Engel, J.-L. Gardies, J.-C. Gardin, J. Gasser, J.-B. Grize, F. Nef: Raisonnement et calcul. Actes du colloque, Neuchâtel, 24-25 juin 1994. Septembre 1995.
64. D. Apothéloz, U. Bähler, M. Schulz (éds), Analyser le musée. Actes du colloque international organisé par l'Association Suisse de Sémiotique (ASS/SGS), Lausanne 21-22 avril 1995. Août 1996.
65. D. Miéville, J.-L. Gardies, J.-B. Grize, O. Houdé, J.-P. Bronckart: Temps, logique et langage. Actes du Symposium tenu lors du colloque international «Penser le temps», Neuchâtel, 8-10 septembre 1996. Avril 1997.
00. A. Roulet Juan: Benno Besson en mouvement. Notes sur une mise en scène de «Lapin Lapin», comédie de Coline Serreau. Numéro spécial septembre 1998.
66. C. Salavastru: Identité et altérité. Les avatars de la rhétorique contemporaine. Novembre 1998.
67. D. Miéville, P. Joray, N. Gessler, B. Godart-Wendling, A. Bottani: Essais sur le nom et la nominalisation. Novembre 2000.
68. D. Miéville, J.-B. Grize, P. Vergès, T. Herman, D. Vernant, M. Campos, E. Gattico: Enjeux et perspectives. Septembre 2010.

Les titres précédés d'un astérisque sont épuisés.
Les publications disponibles peuvent être obtenues auprès du Centre de Recherches Sémiologiques au **Fr.s. 15.-** , dès le n° 67 **Fr.s. 20.-** (TVA comprise).