805

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
FACULTÉ DES LETTRES

UNE PHILOSOPHIE DE SAVANT

Henri Poincaré et la logique mathématique

THÈSE

présentée à la Faculté des Lettres
de l'Université de Neuchâtel
pour obtenir le grade de docteur ès lettres

par

ANNE-FRANÇOISE SCHMID

FRANÇOIS MASPERO
1, place Paul-Painlevé, Paris-V^{e}
1978

« ALGORITHME »
Collection dirigée par Pierre Raymond

une philosophie de savant

La Faculté des Lettres de l'Université de Neuchâtel, sur les rapports de M. Jean-Blaise Grize, professeur à l'Université de Neuchâtel, et de M. Jean Toussaint Desanti, professeur à l'Université de Paris I Panthéon-Sorbonne, autorise l'impression de la thèse présentée par Mlle Anne-Françoise Schmid, en laissant à l'auteur la responsabilité des opinions énoncées.

Neuchâtel, le 28 mai 1976.
Le doyen : Rémy Scheurer

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
FACULTÉ DES LETTRES

UNE PHILOSOPHIE DE SAVANT

Henri Poincaré et la logique mathématique

THÈSE
présentée à la Faculté des Lettres
de l'Université de Neuchâtel
pour obtenir le grade de docteur ès lettres

par

ANNE-FRANÇOISE SCHMID

FRANÇOIS MASPERO
1, place Paul-Painlevé, Paris-Ve
1978

Je tiens à remercier M. le professeur Jean-Blaise Grize, directeur du Centre de recherches sémiologiques (Université de Neuchâtel, Suisse) qui, à tous les stades de mon travail, m'a conseillée et encouragée. Mes remerciements vont aussi au Fonds national suisse de la recherche scientifique qui, par l'attribution d'une bourse, m'a permis de réaliser mon projet dans les meilleures conditions. Il me serait impossible de nommer toutes les personnes qui, à des titres très divers, m'ont aidée dans l'élaboration de ce livre. Qu'elles trouvent ici l'expression de ma gratitude.

ISBN 2-7071-0950-9

A Samuel Gagnebin
Mathématicien, physicien et
philosophe suisse.

Sigles

D.P.	: *Dernières pensées,* Flammarion, Paris, 1913 ; pagination de l'édition de 1963, qui comporte quatre articles complémentaires.
F.G.	: « Des fondements de la géométrie », *The Monist*, janvier 1898. Traduction française (original perdu) de L. Rougier, Chiron, Paris, 1921.
M.L.	: « Les Mathématiqucs et la logique », *R.M.M.*, 13 (1905), p. 815-835 ; *R.M.M.*, 14 (1906), p. 17-34 ; *R.M.M.*, 14 (1906), p. 294-317 ; et « A propos de la logistique », *R.M.M.*, 14 (1906), p. 866-868.
R.M.M.	: *Revue de métaphysique et de morale.*
S.H.	: *La Science et l'Hypothèse,* Flammarion, Paris, 1902 ; pagination de l'édition de 1932.
S.M.	: *Science et Méthode,* Flammarion, Paris, 1908 ; pagination de l'édition de 1909.
Th.	: *Thermodynamique,* Carré, Paris, 1892. Ed. citée : Gauthier-Villars, 1908.
V.S.	: *La Valeur de la science,* Flammarion, Paris, 1905 ; éd. citéc 1970 (coll. livres de poche : « Science de la nature »).

Introduction

Ce livre est une réflexion sur une philosophie des sciences. Notre propos est l'analyse des raisons pour lesquelles Poincaré s'est catégoriquement opposé à la logique mathématique naissante. Quelle est la signification de ce refus ? Est-il le fait du mathématicien ou du philosophe ? Telle est la question qui a guidé notre démarche.

Poincaré a fait état de ses critiques à la logique dans des textes classés traditionnellement comme philosophiques [1]. Mais que veut dire ici philosophique ? Qu'est-ce qui, chez Poincaré, distingue philosophie et sciences ? Poincaré ne traite pas cette question ; il ne dit nulle part nettement : ceci est philosophique, ceci est scientifique. Il nous a donc fallu dégager, par un jeu de différenciations successives, les notions de philosophie et de sciences en œuvre dans les textes philosophiques de Poincaré ; nous y sommes parvenue en deux étapes qui, au cours de notre travail, se sont imposées à nous comme des nécessités.

Nous avons tout d'abord procédé à une lecture philosophique des textes philosophiques de Poincaré. Ces textes sont des interventions courtes, articles et conférences, sur des points alors très controversés de plusieurs disciplines scientifiques : mathématiques, géométrie, mécanique et physique [2]. Notre lecture

1. Pour une telle classification, cf. par exemple Ernest LEBON, *Henri Poincaré. Biographie, bibliographie analytique des écrits*, Gauthier-Villars, Paris, 1912, p. 79-92.

2. La plupart d'entre eux ont été réunis dans les quatre volumes sui-

a posé la question de ce qui, pour Poincaré, fait la particularité des disciplines à propos desquelles il intervient. Les délimitations des sciences tiennent-elles à des nécessités intérieures aux théories scientifiques ou sont-elles définies de l'extérieur, et de quel extérieur ? Cette extériorité est-elle pensée explicitement par Poincaré, ou n'est-elle discernable que par des effets non dits dans le texte ? Nous avons abordé ces diverses disciplines dans l'ordre où Poincaré les présente dans ses ouvrages, soit les mathématiques, en en distinguant les branches qui ne portent pas directement sur la notion d'espace de la géométrie, puis la mécanique et la physique — nous verrons que cet ordre a un sens. Les quatre premiers chapitres sont l'aboutissement de cette lecture philosophique.

Mais cette première approche ne nous permettait pas encore de discerner ce qui fait la spécificité des textes philosophiques de Poincaré — et, qui plus est, elle laissait en suspens des difficultés qu'une analyse du texte en tant que texte pouvait lever. Nous avons alors esquissé une étude « rhétorique » de la philosophie de Poincaré, rhétorique en ce sens qu'elle porte sur les rapports entre sens et forme. Ce type d'analyse, qui à notre connaissance n'a pas été systématiquement pratiqué en philosophie des sciences, est à notre avis de première importance : nous verrons que, chez Poincaré, les relations entre la philosophie et les sciences ne sont pas déterminées exclusivement par ce qui en est dit de façon explicite. C'est là notre second résultat — programmatique —, qui fait l'objet du chapitre 5.

Nous avions alors les instruments nécessaires pour aborder l'examen des critiques de Poincaré à la logique mathématique et, par là même, à la théorie des nombres transfinis de Cantor — ce que nous avons fait dans le chapitre 6.

On pourrait croire à nous lire que nous parlons d'histoire, puisque toute la matière de notre réflexion est localisée à une époque bien déterminée ; mais ce n'est pas à l'époque que se rattache notre étude — cela aurait exigé de nous un exposé sur l'état des sciences vers 1900. L'étude que nous présentons ici

---

vants : *La Science et l'Hypothèse* (1902), *La Valeur de la science* (1905), *Science et Méthode* (1908), *Dernières pensées* (1913), ce dernier étant un recueil posthume.

est une étude de fait intellectuel orientée par l'idée fondamentale de Poincaré. Nous avons tenu à conserver dans ce livre les traces de notre travail (la philosophie, puis la rhétorique, puis la logique), car nos méthodes d'investigations ont été largement tributaires de l'objet étudié.

I. Les mathématiques[1]

Poincaré a écrit entre 1893 et 1912 (année de sa mort) une quinzaine d'articles et de conférences sur les mathématiques. Dans ces textes, il ne définit guère les mathématiques pour elles-mêmes ; il en donne plutôt des spécifications au moyen de mises en relations avec diverses instances et disciplines dont il nous faut analyser la nature et le rôle.

Nous avons pris le parti dans ce chapitre d'analyser ces spécifications dans leur ordre chronologique d'apparition dans les textes. Une étude exhaustive des articles nous contraindrait en effet à d'interminables redites, car Poincaré reprend souvent les mêmes problèmes en en modifiant l'exposé selon les circonstances et l'auditoire auquel il s'adresse.

A. Mathématiques et expérience[2]

Qu'est-ce que le continu mathématique ? telle est la question posée au début de cet article. En un premier temps, Poincaré y

1. Dans ce chapitre, nous parlons des mathématiques à l'exclusion de la géométrie qui sera traitée plus loin, pour des raisons qui tiennent aux conceptions de Poincaré.
2. Cf. « La Grandeur mathématique et l'Expérience », *Revue de métaphysique et de morale,* 1893, p. 26-34 ; modifié dans *La Science et l'Hypothèse,* p. 29-44.

répond par un exposé de la théorie des coupures de Dedekind qui permet de définir certains symboles, les nombres incommensurables, comme mode de répartition des nombres commensurables. Mais cette construction théorique, correcte du point de vue mathématique, ne suffit pas à Poincaré :

« Mais se contenter de cela, ce serait trop oublier l'origine de ces symboles ; il reste à expliquer comment on a été conduit à leur attribuer une sorte d'existence concrète. [...]

On en vient alors à se demander si la notion de continu mathématique n'est pas tout simplement tirée de l'expérience. Si cela était, les données brutes de l'expérience, qui sont nos sensations, seraient susceptibles de mesure » (*S.H.*, 34).

Ce texte nous apprend que l'expérience est définie par son rapport aux sensations ; qu'elle n'intervient pas à l'intérieur de la théorie mathématique exposée ; que son rapport avec les mathématiques se pose sous le couvert d'une autre question, celle de l'origine des notions. Cet article n'est donc pas une simple vulgarisation de la théorie des coupures : le propos de Poincaré est de définir une relation entre cette théorie et l'expérience. Quelle est la nature de ce lien ? Voici ce qu'en dit Poincaré :

« En résumé, l'esprit a la faculté de créer des symboles, et c'est ainsi qu'il a construit le continu mathématique, qui n'est qu'un système particulier de symboles. Sa puissance n'est limitée que par la nécessité d'éviter toute contradiction ; mais l'esprit n'en use que si l'expérience lui en fournit une raison.

Dans le cas qui nous occupe, cette raison était la notion du continu physique, tirée des données brutes des sens » (*S.H.*, 40).

Ces lignes répondent à notre question, curieusement, en la déplaçant : au rapport théorie mathématique-expérience est substitué celui de l'esprit, comme faculté de créer des symboles, à l'expérience. Cette substitution est très révélatrice : nous voyons que le lien entre la théorie du continu mathématique et l'expérience n'est pas spécifique à cette théorie ; nous sommes bien à l'extérieur de cette théorie, mais non à son extérieur ; la question posée au début de l'article est un prétexte pour introduire une thèse de portée beaucoup plus générale, vis-à-vis de laquelle la théorie exposée n'est qu'un « système particulier de symboles », n'est que « le cas qui nous occupe ». En d'autres termes, la construction du continu fonctionne comme exemple illustrant et justifiant une affirmation où entrent en jeu deux *instances* étrangères à l'exposé de la théorie : l'esprit et l'expérience. Bref, au début de l'article, nous pouvions croire avoir affaire à un discours de mathématiques, puis à un discours se jouant à ses bords ; enfin nous voyons qu'il ne porte pas directement sur les mathématiques, qu'il ne les définit pas, mais bien plutôt qu'il les situe entre deux instances extérieures.

Extériorité : cette image spatiale ne désigne pas une simple configuration ; ce que nous avons appelé ici extériorité — pour rendre compte à la fois du déroulement du texte et de la non-spécification de ces notions par rapport à la théorie mathématique exposée — est en réalité l'effet d'une différence beaucoup plus fondamentale : celle de leur fonctionnement. En effet, contrairement aux concepts mathématiques construits à l'intérieur d'une théorie démonstrative, le sens des notions d'expérience et d'esprit ne leur vient pas d'une définition ou d'une démonstration, mais d'une référence à deux réalités données, respectivement les sensations et les facultés intellectuelles créatrices de symboles, réalités non articulées à telle théorie considérée, mais qui, à l'égard des théories mathématiques en général, jouent un triple rôle de localisation, de construction et de justification. C'est pourquoi nous avons appelé ces deux notions « instances ». Notre thèse, que nous spécifierons au cours de notre exposé, est que ce fonctionnement est de type proprement philosophique.

Dans le premier texte que nous avons cité (*S.H.*, 34), la notion d'expérience est introduite à propos du problème de l'origine des symboles mathématiques. Nous pouvons voir maintenant que ce problème, qui a préoccupé Poincaré jusqu'à la fin de sa vie, n'est autre que celui du lien entre les mathématiques et l'expérience ou l'esprit. Cette question va donc se jouer entièrement dans l'espace philosophique que nous venons de définir ; elle ne peut avoir de solution que dans le champ déjà délimité par les deux instances ; si l'expérience n'est pas à l'origine des symboles mathématiques, ce sera l'esprit ; une troisième solution est possible, mais elle ne peut être qu'un intermédiaire entre les deux premières.

Quels sont les arguments qui décideront de la solution ? Chose curieuse à première vue, mais qui confirme notre interprétation, les mathématiques ne sont pas décisives dans le choix de la solution ; le problème, posé en des termes philosophiques, est résolu par le jeu réciproque de ces mêmes termes.

Voici l'argumentation de Poincaré : les résultats immédiats de l'expérience contredisent souvent le principe selon lequel deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles ; par conséquent, les mathématiques ne peuvent être une simple représentation de nos sensations ; d'autre part, une nécessité de nature psychologique nous contraint à résoudre cette contradiction existant entre les données de l'expérience et les principes logiques de notre esprit :

« Les résultats bruts de l'expérience peuvent donc s'exprimer par les relations suivantes :

$$A=B, \ B=C, \ A<C$$ [3]

qui peuvent être regardées comme la formule du continu physique.

Il y a là, avec le principe de contradiction, un désaccord intolérable, et c'est la nécessité de le faire cesser qui nous a contraints à inventer le continu mathématique.

On est donc forcé de conclure que cette notion a été créée de toutes pièces par l'esprit, mais que c'est l'expérience qui lui en a fourni l'occasion.

Nous ne pouvons croire que ces deux quantités égales à une même troisième ne soient pas égales entre elles, et c'est ainsi que nous sommes amenés à supposer que A est différent de B et B de C, mais que l'imperfection de nos sens ne nous avait pas permis de discerner » (*S.H.*, 35).

Une telle solution assigne une tâche aux mathématiques à l'intérieur de cet espace philosophique : celle de lever les contradictions de l'expérience par un « artifice », la création de nouveaux symboles, qui permettent de « concilier l'intuition avec l'analyse » (*S.H.*, 44). Cette tâche localise plus précisément les mathématiques dans notre configuration ; leur source, c'est l'esprit. Mais aussi elle les justifie : les mathématiques ne sont pas arbitraires, elles ont quelque chose à voir avec la réalité, quoiqu'elles en soient systématiquement distinguées, puisqu'elles ne sont pas une science expérimentale (cf. *V.S.*, 34).

---

3. Des sensations contiguës sont indiscernables. Poincaré en donne presque toujours le même exemple : nous ne pouvons pas discerner, sans balance, un poids de 10 g d'un poids de 11 g, ni un poids de 11 g d'un poids de 12 g, alors que le poids de 10 g nous semble plus léger que celui de 12 g.

Nous avons vu maintenant comment Poincaré situe les mathématiques dans l'espace clos que nous avons discerné. Cette localisation a-t-elle des effets sur les théories mathématiques ? C'est là une question épistémologique par excellence.

De nouveau, les caractéristiques internes aux mathématiques n'ont pas de pertinence pour l'examen de cette question : les arguments décisifs sont d'ordre psychologique.

Tout d'abord, une telle localisation permet de poser certaines exigences pour l'exposé d'une théorie ; nous pouvons ainsi distinguer les traits qui définissent une « bonne » théorie : elle doit paraître naturelle et justifiée ; elle doit donc garder quelques traces de son origine et de son histoire, c'est-à-dire de ses démarcations progressives par rapport à l'expérience commune. C'est là un thème invariable chez Poincaré ; cette préoccupation n'apparaît pas seulement dans des écrits adressés à des psychologues ou à des pédagogues.

1899 :

« Or, pour comprendre une théorie, il ne suffit pas de constater que le chemin que l'on a suivi n'est pas coupé par un obstacle, il faut se rendre compte des raisons qui l'ont fait choisir. Pourra-t-on donc jamais dire qu'on comprend une théorie si on veut lui donner d'emblée sa forme définitive, celle que la logique impeccable lui impose, sans qu'il reste aucune trace des tâtonnements qui y ont conduit ? Non, on ne la comprendra pas réellement, on ne pourra même la retenir, ou on ne la retiendra qu'à force de l'apprendre par cœur » (« La Logique et l'Intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement », *Œuvres*, t. 11, p. 132).

1900 :

« Voyons ce qui est arrivé, par exemple, pour l'idée de fonction continue. Au début, ce n'était qu'une image sensible, par exemple, celle d'un trait continu tracé à la craie sur un tableau noir. Puis elle s'est épurée peu à peu, bientôt on s'en est servi pour construire un système compliqué d'inégalités, qui reproduisait pour ainsi dire toutes les lignes de l'image primitive ; quand cette construction a été terminée, on a *décintré,* pour ainsi dire, on a rejeté cette représentation grossière qui lui avait momentanément servi d'appui et qui était désormais inutile ; il n'est plus resté que la construction elle-même, irréprochable aux yeux du logicien. Et cependant, si l'image primitive avait totalement disparu de notre souvenir, comment devinerions-nous par quel caprice toutes ces inégalités se sont échafaudées de cette façon les unes sur les autres ? » (*V.S.*, 36-37.)

Et, plus loin :

« [...] les anciennes notions intuitives de nos pères, même lorsque nous les avons abandonnées, impriment encore leur forme aux échafaudages logiques que nous avons mis à leur place » (*V.S.*, 37).

Voici encore un texte de 1912 où nous voyons ces exigences philosophiques intervenir concrètement dans le choix entre deux définitions mathématiques de la dimension :

« Pour nous qui tirons la notion du continu, à *n* dimensions, non de la définition analytique précitée, mais de je ne sais quelle source plus profonde, cette opération [changement de coordonnées] est toute naturelle ; nous sentons qu'elle n'altère pas ce qu'il y a d'essentiel dans le continu. Pour ceux, au contraire, qui ne connaîtraient le continu que par la définition analytique, l'opération serait licite sans doute, mais baroque et mal justifiée.

Enfin, cette définition fait bon marché de l'origine intuitive de la notion de continu et de toutes les richesses que recèle cette notion. Elle rentre dans le type de ces définitions qui sont devenues si fréquentes dans la mathématique, depuis qu'on tend à " arithmétiser " cette science. Ces définitions, irréprochables [...] au point de vue mathématique, ne sauraient satisfaire le philosophe. Elles remplacent l'objet à définir et la notion intuitive de cet objet par une construction faite avec des matériaux plus simples ; on voit bien alors qu'on peut effectivement faire cette construction avec ces matériaux, mais on voit en même temps qu'on pourrait en faire tout aussi bien beaucoup d'autres ; ce qu'elle ne laisse pas voir, c'est la raison profonde pour laquelle on a assemblé ces matériaux de cette façon et non pas d'une autre » (*D.P.*, 137-138).

Notons que la définition inductive donnée plus loin par Poincaré se fonde sur des notions mathématiques. C'est donc bien la philosophie qui opère ici le choix entre deux définitions mathématiques.

Ensuite et surtout, cette localisation a aussi des effets dans la délimitation de ce qui est mathématique et de ce qui ne l'est pas ; ici, il ne s'agit plus d'une exigence philosophique portant sur l'exposé de la théorie, mais d'une intervention philosophique dans le scientifique. Poincaré désigne tout à fait explicitement cette intervention en 1912 dans sa polémique contre les partisans du formalisme logique. La raison de cette intervention se trouve de nouveau être de nature essentiellement psychologique : il y a chez les mathématiciens des tendances mentales opposées qui conçoivent les objets mathématiques d'un point de vue philosophique différent ; d'après Poincaré, cela explique le fait que des définitions et des démonstrations y soient admises comme scientifiques par les uns et non par les autres :

« [...] il me semble que nous en apercevons la véritable cause ; les savants des deux écoles ont des tendances mentales opposées ; ceux que j'ai appelés les pragmatistes sont des idéalistes, les cantoriens sont des réalistes » (*D.P.*, 93).

Et, plus loin :

« De tout temps, il y a eu en philosophie des tendances opposées et il ne semble pas que ces tendances soient sur le point de se concilier. C'est sans doute parce qu'il y a des âmes différentes et qu'à ces âmes nous ne pouvons rien changer. Il n'y a donc aucun espoir de voir l'accord s'établir entre les pragmatistes et les cantoriens » (*D.P.*, 95).

L'espace philosophique défini n'est donc pas neutre par rapport aux mathématiques.

Nous ne sommes pas encore au bout des conséquences qu'implique une telle localisation des mathématiques. En effet, la notion d'expérience, telle que la définit Poincaré, sépare radicalement théorie et pratique, la théorie se référant aux facultés de l'esprit et la pratique à la réalité donnée par nos sensations.

1904 :

« Mais croit-on que les mathématiques aient atteint la rigueur absolue sans faire de sacrifice ? Pas du tout, ce qu'elles ont gagné en rigueur, elles l'ont perdu en objectivité. C'est en s'éloignant de la réalité qu'elles ont acquis cette pureté parfaite. On peut parcourir librement tout leur domaine, autrefois hérissé d'obstacles, mais ces obstacles n'ont pas disparu. Ils ont seulement été transportés à la frontière, et il faudra les vaincre de nouveau si l'on veut franchir cette frontière pour pénétrer dans le royaume de la pratique » (*S.M.*, 131-132).

Ainsi les mathématiques ne sont pas définies par Poincaré dans leur autonomie théorique : elles participent, d'une part, à la théorie pure, et, d'autre part, elles doivent pouvoir « s'appliquer » à la réalité ; mais ce n'est pas la théorie mathématique qui détermine ces rapports.

1897 :

« Les mathématiques ont un triple but. Elles doivent fournir un instrument pour l'étude de la nature.

Mais ce n'est pas tout : elles ont un but philosophique et, j'ose le dire, un but esthétique.

Elles doivent aider le philosophe à approfondir les notions de nombre, d'espace, de temps.

Et surtout leurs adeptes y trouvent des jouissances analogues à celles que donnent la peinture et la musique » (*V.S.*, 104).

Et surtout 1908 :

« Nous ne pouvons oublier quel doit être notre but ; selon moi ce but est double ; notre science confine à la fois à la philosophie et à la physique, et c'est pour nos deux voisines que nous travaillons ; aussi nous avons toujours vu et nous verrons encore les mathématiciens marcher dans deux directions opposées.

D'une part, la science mathématique doit réfléchir sur elle-même, et cela est utile, parce que réfléchir sur elle-même, c'est réfléchir sur l'esprit humain qui l'a créée, d'autant plus que c'est celle de ses créations pour laquelle il a fait le moins d'emprunts au-dehors. C'est pourquoi certaines spéculations mathématiques sont utiles, comme celles qui visent l'étude des postulats, des géométries inaccoutumées, des fonctions à allure étrange. [...]

Mais c'est du côté opposé, du côté de la nature, qu'il faut diriger le gros de notre armée » (*S.M.*, 31-32).

Encore une dernière remarque, importante. Nous avons dit que la notion d'expérience, désignée comme instance faisant face à l'esprit et non articulée au théorique, fonctionne philosophiquement ; cela tient à la définition qu'en donne Poincaré comme résultant de nos sensations. Or, dans les écrits de Poincaré, toujours définie de la même façon, l'expérience est invoquée dans des contextes où elle résulte de l'usage d'un instrument — construit à l'aide d'une théorie ; serait-elle alors définie par un rapport de type scientifique ? Interrogeons de nouveau le texte de 1893.

« Malgré l'emploi des méthodes les plus perfectionnées, les résultats bruts de notre expérience présenteront toujours les caractères du continu physique avec la contradiction qui y est inhérente.

Nous n'y échapperons qu'en intercalant sans cesse des termes nouveaux entre les termes déjà discernés, et cette opération devra être poursuivie indéfiniment. Nous ne pourrions concevoir qu'on dût l'arrêter que si nous nous représentions quelque instrument assez puissant pour décomposer le continu physique en éléments discrets, comme le télescope résout la voie lactée en étoiles. Mais nous ne pouvons nous imaginer cela ; en effet, c'est toujours avec nos sens que nous nous servons de nos instruments ; c'est avec l'œil que nous observons l'image agrandie par le microscope, et cette image doit, par conséquent, toujours conserver les caractères de la sensation visuelle et par conséquent ceux du continu physique.

Rien ne distingue une longueur observée directement de la moitié de cette longueur doublée par le microscope » (*S.H.*, 36).

L'usage d'instruments (ou de conditions posées à l'expérimentation par une théorie scientifique ; nous verrons cela plus en détail dans notre chapitre sur la physique) ne donne plus lieu, bien sûr, à une observation pure, mais il doit permettre une pure observation, l'expérience étant toujours définie par son rapport aux sens ; une fois la mesure effectuée par l'intermédiaire d'un instrument et de conditions théoriques (au sens scientifique), nous pouvons garder le résultat abstraction faite de l'instrument et de la théorie : le fait restera toujours une donnée des sens. Il s'ensuit une indistinction constante entre expérience et observation ; il y a assimilation entre l'usage philosophique et l'usage scientifique de cette notion ; ou, plus précisément, la notion philosophique et le concept scientifique se recouvrent. La conséquence en est capitale : si la recherche de l'origine des notions est comprise par Poincaré comme d'ordre philosophique, l'expérience est invoquée comme un fait. En d'autres termes, la notion d'expérience fonctionne philosophiquement, mais elle n'est pas désignée et, nous le verrons, elle ne peut l'être comme telle par Poincaré. Nous touchons là un aspect de la philosophie implicite de Poincaré.

B. Mathématiques et logique [4]

Le titre de l'article fait attendre au lecteur une réflexion sur les caractéristiques spécifiques à la démarche théorique mathématique ; qu'en est-il en fait ? « La possibilité même de la science mathématique semble une contradiction insoluble » : dès la première phrase, Poincaré situe son discours sur un terrain d'emblée philosophique — il ne s'agit pas, de prime abord, d'analyser le raisonnement mathématique dans son déroulement ou dans sa structure, mais de poser un problème beaucoup plus général non pas dans, mais sur la science constituée, problème qui, dans la tradition philosophique, se rattache au kantisme. Poincaré pose la question de la possibilité des mathématiques sous forme de dilemme — notons du reste que c'est là un mode de présentation particulièrement affectionné par Poincaré, nous en verrons les raisons plus loin :

— ou bien les mathématiques sont déductives et rigoureuses, mais stériles ; elles ne reposent alors que sur les principes analytiques de la logique, réduite, selon Poincaré, aux principes d'identité et de contradiction et à la théorie du syllogisme ; nous voyons qu'en 1894 Poincaré est singulièrement ignorant des nouveaux développements de la logique (cf. *S.H.*, 10). Ce n'est que vers 1905 qu'il en prit connaissance par les travaux de Louis Couturat [5] ;

— ou bien elles sont inductives et productrices de vérités nouvelles, mais alors elles sont sujettes à perpétuelle révision.

Ainsi, dès les premières lignes de l'article, nous voyons toutes les caractérisations possibles du raisonnement mathématique situées entre deux pôles : déduction-rigueur-stérilité d'une part, induction-révisabilité-productivité d'autre part ; si la nature du raisonnement mathématique ne se confond avec aucun de ces deux pôles, elle ne pourra être qu'une combinaison nouvelle des termes en présence. Les mathématiques sont ainsi situées entre la logique et la physique comprises comme les limites du savoir

4. Cf. « Sur la nature du raisonnement mathématique », *Revue de métaphysique et de morale*, 2, 1894, p. 371-384 ; modifié dans *La Science et l'Hypothèse*, p. 9-28.
5. En particulier par la série d'articles « Les Principes des mathématiques », parus dans la *Revue de métaphysique et de morale.*

scientifique ; ces deux limites sont philosophiques parce qu'elles se définissent par leur proximité avec les deux instances déjà mentionnées : l'esprit et les sensations — nous verrons cela plus en détail dans la suite. Si l'un des termes de ces pôles — la déduction — peut effectivement caractériser spécifiquement un raisonnement scientifique, leur groupement est d'ordre philosophique.

Or plusieurs constatations de l'ordre de l'évidence nous montrent que les caractéristiques du raisonnement mathématique ne sont assimilables ni à la première ni à la seconde des deux solutions extrêmes : « personne ne songe à mettre en doute » la rigueur des mathématiques (*S.H.*, 9) ; elles ne peuvent donc être assimilées à une science expérimentale ; d'autre part, les mathématiques ne se réduisent pas à la logique, sans quoi « le raisonnement ne pourrait nous rendre que les vérités immédiatement évidentes empruntées à l'intuition directe ; il ne serait plus qu'un intermédiaire parasite » (*S.H.*, 10) ; nous constatons de même que les mathématiques cherchent à généraliser leurs résultats, ce qui, selon Poincaré, n'est pas la démarche de la logique ; enfin, si tous les raisonnements mathématiques étaient analytiques, « il semble qu'un esprit assez puissant pourrait d'un seul coup d'œil en apercevoir toutes les vérités » (*S.H.*, 11).

En conséquence, le raisonnement mathématique doit être à la fois rigoureux et produire des vérités nouvelles : Poincaré donne les termes de la solution avant même d'examiner la démarche du mathématicien ; ainsi, les caractéristiques internes au raisonnement mathématique découlent de la position philosophique du problème.

Néanmoins, en ce point de son exposé, Poincaré ne pense pas avoir découvert la « clef du mystère » (*S.H.*, 11). Aussi procède-t-il à une analyse du raisonnement mathématique (*S.H.*, 15-18) qui lui permet de désigner ce qu'il croit être « le raisonnement mathématique par excellence » (*S.H.*, 19) : la démonstration par récurrence ou induction complète : « On établit d'abord un théorème pour $n = 1$; on montre ensuite que s'il est vrai de $n - 1$, il est vrai de n et on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers » (*S.H.*, 19). Ce raisonnement est applicable dans les cas où les notions ou opérations sur lesquelles on raisonne sont préalablement définies par récurrence (cf. *Mind*, 15 (1906), 142) ; et Poincaré commence effectivement son analyse par une définition de l'addition ; ce qu'il en dit est important de notre point de vue, car c'est en ce point que commencent à se jouer les rapports entre la position philosophique du problème et l'analyse « concrète » : « Cette définition mérite un moment d'attention, elle est d'une nature particulière qui la distingue déjà de la définition purement logique ; l'égalité (1)[6] [cf. *S.H.*, 15] contient en effet une infinité de définitions distinctes, chacune d'elles n'ayant un sens que quand on connaît celle qui la précède » (*S.H.*, 16). Nous voyons que Poincaré rapporte cette définition aux solutions déjà avancées ; nous connaissons les caractéristiques de la démarche logique : cette définition les possède-t-elle ? A quelle catégorie philosophique cette définition correspond-elle ? Le rapport entre la question philosophique et sa solution mathématique (désignation de la définition et du raisonnement par récurrence) est un rapport de constatation. Ce n'est pas une remarque tout à fait anodine : elle va nous permettre de mieux cerner les relations entre philosophie et mathématiques. Examinons pour cela ce que Poincaré dit dans l'ensemble de son œuvre du principe d'induction complète. Tout d'abord, dans l'article que nous lisons : « A chaque pas, si on y regarde bien, on retrouve ce mode de raisonnement, soit sous la forme simple que nous venons de lui donner, soit sous une forme plus ou moins modifiée » (*S.H.*, 19). Et, en 1905 :

« Je ne voulais pas dire [dans l'article de 1894], comme on l'a cru, que tous les raisonnements mathématiques peuvent se réduire à une application de ce principe. En examinant ces raisonnements d'un peu près, on y verrait appliqués beaucoup d'autres principes analogues, présentant les mêmes caractères essentiels. Dans cette catégorie de principes, celui de l'induction complète est seulement le plus simple de tous, et c'est pour cela que je l'ai choisi pour type » (*S.M.*, 159-160).

Or, à notre connaissance, ces autres principes ne sont pas désignés explicitement par Poincaré ; Mooij cite (p. 57-58) des commentateurs qui ont proposé des solutions, tels la construction du continu ou l'axiome du choix, mais elles ne le satisfont pas, car elles ne recouvrent pas l'ensemble des démonstrations mathématiques ; d'où il conclut, fort judicieusement à notre avis :

« Aussi me semble-t-il qu'il n'y a pas de réponse satisfaisante à la question posée. La véritable intention de Poincaré a dû être beaucoup plus vague et ne peut cadrer avec une énumération explicite de quelques principes. Partant de l'expérience personnelle selon laquelle le fournissement de preuves mathématiques

6. $x + a = [x + (a - 1)] + 1$.

présuppose plus que la connaissance d'un petit nombre de lois logiques, il était par avance persuadé que la mathématique doit faire appel, non seulement à la logique, mais aussi et continuellement à l'intuition. C'est en se référant à l'induction complète qu'il a voulu rendre acceptable cet énoncé » (p. 58).

Ainsi, le silence de Poincaré sur cette question semble confirmer notre analyse du texte de 1894 : le rapport de constatation que nous venons de discerner nous montre, une fois de plus, que les mathématiques sont utilisées comme réserve d'exemples pour illustrer et justifier une thèse philosophique de portée très générale — quoique les mathématiques doivent aussi être éclairées par l'examen de ces exemples. Le discours de Poincaré n'est pas démonstratif : il pose des affirmations qu'il justifie par des exemples mathématiques qui, à l'égard de sa philosophie, jouent le rôle de faits. Poincaré fait donc ici un usage philosophique des mathématiques.

Mais ce n'est qu'un aspect de la question; ne s'agit-il que de l'exposé d'une thèse philosophique ? oui, dans le sens que l'usage fait ici des mathématiques est déterminé par des positions philosophiques ; mais alors, si l'enjeu est purement philosophique, pourquoi une telle description des procédés mathématiques ? C'est que la solution semble découler de cette description, parce que Poincaré y exhibe un type de raisonnement qui, dans sa particularité, n'a pu être cerné par la position philosophique du problème : nous savions quelles doivent être les caractéristiques de ce raisonnement, mais nous ne savions pas que c'est l'induction complète ; la « clef du mystère » ne se trouve pas dans la philosophie : elle est donnée par l'existence d'un type de raisonnement. Cela détermine chez Poincaré une intervention philosophique dans les mathématiques : l'induction complète est réinterprétée en des termes philosophiques (nous verrons cela plus en détail dans la suite) ; le texte dans son déroulement pourrait alors faire croire que l'enjeu du débat est intérieur aux mathématiques.

Que dire alors des relations entre philosophie et mathématiques ? Poincaré pose une question qui, par sa position même, indique une solution qui n'apparaît comme telle que par sa référence à une discipline distincte de la philosophie ; Poincaré élide donc la solution philosophique pour la présenter comme mathématique. En conséquence, les frontières entre philosophie et mathématiques restent très floues ; plus exactement, elles ne sont pas conceptualisées rigoureusement.

Ces remarques sur le texte de Poincaré montrent clairement que c'est bel et bien la philosophie qui opère la délimitation entre la logique et les mathématiques. Comment ? nous le savons déjà : par leur localisation dans l'espace philosophique. Par conséquent, l'examen de cette distinction exige celle de la localisation.

Tout d'abord, la logique, 1904 :

« Comment se fait-il qu'il y a tant d'esprits qui se refusent à comprendre les mathématiques ? N'y a-t-il pas là quelque chose de paradoxal ? Comment, voilà une science qui ne fait appel qu'aux principes fondamentaux de la logique, au principe de contradiction, par exemple, à ce qui fait pour ainsi dire le squelette de notre entendement, à ce qu'on ne saurait dépouiller sans cesser de penser, et il y a des gens qui la trouvent obscure ! » (*S.M.*, 123-124.)

1908 :

« *Comment se fait-il qu'il y ait des gens qui ne comprennent* pas les mathématiques ? Si les mathématiques n'invoquent que les règles de la logique, celles qui sont acceptées par tous les esprits bien faits ; si leur évidence est fondée sur des principes qui sont communs à tous les hommes et que nul ne saurait nier sans être fou, comment se fait-il qu'il y ait tant de personnes qui y soient totalement réfractaires ? » (*S.M.*, 44.)

Paradoxalement, mathématiques et logique semblent ici assimilées ; c'est l'effet de l'intention de Poincaré dans ces deux textes — mais tel n'est pas notre propos. Ce qu'il nous importe de voir, c'est que toute pensée, au moins objective, est la mise en œuvre des règles de la logique ; il n'y a pour ainsi dire pas d'intermédiaire entre l'esprit comme ensemble de facultés intellectuelles et la logique comme discipline : la logique est l'explicitation d'une partie des structures de l'esprit qu'ainsi Poincaré peut spécifier comme ce à quoi les données des sens sont primitivement confrontées : si de cette confrontation découle une contradiction, alors l'expérience fournit à l'esprit l'occasion de créer un système de symboles permettant de résoudre la contradiction (ce que nous avons vu à propos du continu mathématique). Nous le voyons, chez Poincaré le terme de logique désigne aussi bien l'ensemble des lois de la pensée que le corps de doctrine aristotélicien ; et, si la logique se distingue néanmoins de la psychologie et de la philosophie, c'est d'abord par son caractère purement formel. Mais cette ambiguïté — ou plutôt cette assimilation — entre ensemble de structures et discipline a une fonction philosophique : celle de justifier la discipline dans l'espace philosophique ; les principes d'identité et de contradiction, ainsi que le syllogisme, sont des données qui, d'un point de vue philosophique, ne sont pas critiquables.

Et les mathématiques ? Elles utilisent, ne serait-ce qu'en tant que forme de pensée, la logique ; mais jusqu'à sa mort, Poincaré insiste sur le fait qu'elles ne s'y réduisent pas. Qu'ont-elles de plus, et quelles en sont les conséquences pour sa localisation ?

Les mathématiques, nous l'avons vu, font usage du principe d'induction complète ; ce principe doit être admis au nombre des axiomes sous peine de cercle vicieux, car sa démonstration exigerait un raisonnement par récurrence ; or, en tant que tel, il est irréductible à la logique ; en effet, la caractéristique du raisonnement par récurrence est : « qu'il contient, condensés pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes » (*S.H.*, 20) ; il est « un instrument qui permet de passer du fini à l'infini » (*S.H.*, 22). Or la méthode analytique de la logique consiste à vérifier une assertion en substituant aux termes qui la constituent leur définition jusqu'à ce que l'on parvienne à une tautologie ; ainsi, pour peu qu'un théorème mathématique soit établi par récurrence, la logique peut en fournir quelques vérifications, mais non point toutes, puisqu'elles devraient être en nombre infini ; autrement dit, la logique échoue devant l'infini, et, selon Poincaré, par conséquent, aussi devant le général. Par la méthode logique, « [...] nous ne nous élèverions jamais jusqu'au théorème général, applicable à tous les nombres, qui seul peut être objet de science. Pour y arriver, il faudrait une infinité de syllogismes, il faudrait franchir un abîme que la patience de l'analyste, réduit aux seules ressources de la logique formelle, ne parviendra jamais à combler » (*S.H.*, 21). Ainsi, ce qui, selon Poincaré, distingue les mathématiques de la logique, c'est tout d'abord un de leurs objets, l'infini, qui leur prête leur caractère de scientificité. Que dire de cet « objet » ? Poincaré le spécifie — selon sa méthode habituelle — non pas tant par sa fonction conceptuelle dans une théorie mathématique qu'en le rapportant aux catégories philosophiques posées en début d'article : c'est grâce à la notion d'infini que les mathématiques ne se réduisent pas à une « immense tautologie » (*S.H.*, 10) ; elle leur prête le caractère synthétique et inductif nécessaire à la production de vérités nouvelles ; c'est pourquoi le principe d'induction est désigné comme « le véritable type du jugement synthétique *a priori* » (*S.H.*, 23).

Les mathématiques ont donc une démarche synthétique que la logique n'a pas ; mais cette affirmation ne suffit pas : dans l'optique de Poincaré, elle requiert une justification, puisqu'elle fait éclater les liens entre rigueur et analycité, d'une part, induction et révisabilité d'autre part. Or, dans une telle configuration de l'espace philosophique, une justification (philosophique) ne peut être qu'une référence à une réalité donnée, que la désignation d'une correspondance, d'un lien entre concept mathématique et réalité (esprit et/ou sensations) ; très exactement, la justification telle que la donne Poincaré — c'est un procédé courant et même constitutif de bien des discours philosophiques tels qu'ils fonctionnent dans notre tradition philosophique — est un dédoublement : en l'occurrence, nous avons l'infini en tant qu'il fonctionne dans les mathématiques, et, d'autre part, le nombre indéfini des répétitions possibles d'une opération intellectuelle (*S.H.*, 23-24). Notons en passant que ce dédoublement philosophique a chez Poincaré un effet sur la notion mathématique d'infini : nous verrons dans le chapitre VI sur la polémique de Poincaré contre les cantoriens qu'une telle position philosophique induit une distinction (philosophique) entre infini potentiel et infini actuel, pour ne donner d'existence mathématique qu'au premier : n'est-ce pas là un effet en retour de la philosophie à l'intérieur des mathématiques ?

Dédoublement : cette opération philosophique ne suffit pas, il faut encore que ce lien soit vérifiable et perceptible ; cette fonction, c'est l'intuition qui la remplit :

« Pourquoi donc ce jugement [induction complète] s'impose-t-il à nous avec une irrésistible évidence ? C'est qu'il n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible. L'esprit a de cette puissance une intuition directe et l'expérience ne peut être pour lui qu'une occasion de s'en servir et par là d'en prendre conscience » (*S.H.*, 23-24).

Ce lien avec l'esprit nous assure de la rigueur et de la non-révisabilité des mathématiques, car l'esprit est une instance non pas extérieure à nous, comme le monde de la physique ; il est lisible directement par intuition. Cette intuition de la répétabilité indéfinie d'une opération possible de l'esprit qui justifie et assure la certitude (philosophique) du principe d'induction nous permet de comprendre aussi pourquoi l'infini est traité comme objet (référence à quelque chose qui existe dans la réalité extérieure à la théorie) et non comme ensemble de marques dans le discours mathématique ayant un effet théorique.

Dans d'autres textes, Poincaré donne une autre spécification de cette intuition, utile à notre propos : en 1900 (*V.S.*, 33), il la nomme « intuition du nombre pur », « la seule qui ne puisse nous tromper ». Cette désignation est à rapprocher d'un texte de 1897 :

« Le seul objet naturel de la pensée mathématique, c'est le nombre entier. C'est le monde extérieur qui nous a imposé le continu, que nous avons inventé sans doute, mais qu'il nous a forcés à inventer.

Sans lui, il n'y aurait pas d'analyse infinitésimale ; toute la science mathématique se réduirait à l'arithmétique ou à la théorie des substitutions » (*V.S.*, 110).

Et, d'un autre texte de 1904 :

« On voit quel rôle jouent dans tout ceci les images géométriques ; et ce rôle est justifié par la philosophie et l'histoire de la science. Si l'arithmétique était restée pure de tout mélange avec la géométrie, elle n'aurait connu que le nombre entier ; c'est pour s'adapter aux besoins de la géométrie qu'elle a inventé autre chose » (*S.M.*, 143).

Nous le voyons, l'induction complète est encore le procédé mathématique le plus proche de l'esprit et donc de la logique ; néanmoins, cet axiome n'est pas lui-même présenté comme une structure de nos facultés intellectuelles, mais comme l'intuition de la répétabilité de leurs opérations (du reste, la conscience de la répétabilité joue aussi un rôle dans la construction du continu mathématique).

Donc, si la logique se situe à la limite extrême du savoir, les mathématiques, elles, se jouent à l'intérieur de l'espace défini par l'esprit et les sensations ; elles sont constituées par leurs relations réciproques ; c'est ce qui, pour Poincaré, garantit leur utilité ; elles ne sont pas une science expérimentale, mais elles ont néanmoins un rapport à l'expérience (cf. ci-dessus, p. 16).

C'est surtout par l'usage de l'intuition que Poincaré distingue mathématiques et logique ; non qu'il refuse tout à fait à la logique cet usage : ses principes nous sont en effet donnés dans un acte d'intuition (cf. *V.S.*, 32-33) ; mais ses raisonnements, étant analytiques, ne requièrent plus l'usage de l'intuition, ni pour leur justification ni pour leur compréhension. Par contre, les mathématiques, comme science constituée dans le jeu réciproque de l'esprit et de l'expérience, comme démarche synthétique, doivent constamment y recourir. C'est là un thème invariable chez Poincaré ; l'intuition du nombre pur est constitutive des mathématiques puisque sur elle repose un axiome ; l'intuition sensible, « appel aux sens et à l'imagination » (*V. S.*, 33), permet à la fois de soutenir le raisonnement mathématique par l'imagination et de fournir l'occasion de découvertes (par analogie avec d'autres sciences, la géométrie en particulier, ou par la nécessité de résoudre une contradiction des données des sens) ; enfin, l'intuition de l'ordre des notions et des démarches mathématiques nous montre l'unité d'un raisonnement ; les deux derniers types d'intuitions sont, pour Poincaré, des conditions nécessaires à la compréhension des mathématiques. Mais l'intuition ne fait pas partie du discours mathématique : elle a, dans tous les cas, une fonction philosophique comme référence à une réalité donnée (1904) :

« C'est par elle que le monde mathématique reste en contact avec le monde réel et quand les mathématiques pures, pourraient s'en passer, il faudrait toujours y avoir recours pour combler l'abîme qui sépare le symbole de la réalité » (*S.M.*, 136).

Examinons d'un peu plus près la fonction de l'intuition. Pour cela, il nous faut faire un détour et poser une autre question, celle des divers emplois du terme « logique » (et autres mots de la même famille) dans les textes de Poincaré. En voici quelques exemples.

1900 :

« Nous croyons dans nos raisonnements ne plus faire appel à l'intuition ; les philosophes nous diront que c'est là une illusion. La logique toute pure ne nous mènerait jamais qu'à des tautologies ; elle ne pourrait créer du nouveau ; ce n'est pas d'elle toute seule qu'aucune science peut sortir.

Ces philosophes ont raison dans un sens ; pour faire l'arithmétique, comme pour faire la géométrie, ou pour faire une science quelconque, il faut autre chose que la logique pure. Cette autre chose, nous n'avons pour la désigner d'autre mot que celui d'*intuition* » (*V.S.*, 32).

Et, plus loin :

« [...] en devenant rigoureuse, la science mathématique prend un caractère artificiel qui frappera tout le monde ; elle oublie ses origines historiques ; on voit comment les questions peuvent se résoudre, on ne voit plus comment et pourquoi elles se posent.

Cela nous montre que la logique ne suffit pas ; que la science de la démonstration n'est pas la science tout entière et que l'intuition doit conserver son rôle comme complément, j'allais dire comme contrepoids ou comme contrepoison de la logique » (*V.S.*, 35).

« Le logicien décompose pour ainsi dire chaque démonstration en très grand nombre d'opérations élémentaires ; quand on aura examiné ces opérations les unes après les autres et qu'on aura constaté que chacune d'elle est correcte, croira-t-on avoir compris le véritable sens de la démonstration ? [...]

Evidemment non, nous ne possédons pas encore la réalité tout entière, ce je ne sais quoi qui fait l'unité de la démonstration nous échappera complètement » (*V.S.*, 35-36).

« Ainsi, la logique et l'intuition ont chacune leur rôle nécessaire. Toutes deux sont indispensables. La logique, qui peut seule donner la certitude, est l'instrument de la démonstration ; l'intuition est l'instrument de l'invention » (*V.S.*, 37).

(Cf. de même le texte déjà cité — p. 17 — à propos de l'histoire de l'idée de fonction continue ; exemple repris en 1904 dans *S.M.*, 134.)

1904 :

« Il y a une réalité plus subtile, qui fait la vie des êtres mathématiques, et qui est autre chose que la logique. [...]

Un naturaliste qui n'aurait jamais étudié l'éléphant qu'au microscope croirait-il connaître suffisamment cet animal ?

Il en est de même en mathématiques. Quand le logicien aura décomposé chaque démonstration en une foule d'opérations élémentaires, toutes correctes, il ne possédera pas encore la réalité tout entière ; ce je ne sais quoi qui fait l'unité de la démonstration lui échappera complètement.

Dans les édifices élevés par nos maîtres, à quoi bon admirer l'œuvre du maçon si nous ne pouvons comprendre le plan de l'architecte ? Or, cette vue d'ensemble, la logique pure ne peut nous la donner, c'est à l'intuition qu'il faut la demander » (*S.M.*, 133-134).

« [...] c'est par la logique qu'on démontre, c'est par l'intuition qu'on invente » (*S.M.*, 137).

Arrêtons ici cette longue série de citations. Que pouvons-nous dire ? La logique est invoquée par Poincaré à la fois pour sa méthode analytique de décomposition qui permet de s'assurer de la rigueur d'un raisonnement et pour sa méthode — rigoureuse — d'exposition des théories mathématiques, faisant alors abstraction de leur origine et de leur histoire (il y a cependant des cas où exposés logique et historique coïncident :

« On a de longs enchaînements de théorèmes où la logique absolue a régné du premier coup et pour ainsi dire tout naturellement, où les premiers géomètres nous ont donné des modèles qu'il faudra constamment imiter et admirer » [*S.M.*, 138].

Poincaré ne dit pas lesquels).

Mais, si Poincaré utilise la logique dans plusieurs sens, c'est toujours à propos des mathématiques qu'il l'invoque, et cela dans un seul but : pour montrer qu'elle n'est pas suffisante. La fonction — philosophique — de l'intuition — en général citée dans les mêmes contextes que la logique — devient alors claire : elle doit rappeler que dans les mathématiques il y a quelque chose de plus que la logique.

Or les divers sens de l'intuition varient avec ceux de la logique. En effet, si Poincaré désigne l'ensemble des principes de la logique comme dans les textes de 1894, l'intuition est celle du nombre pur : il y a des axiomes qui ne se réduisent pas à ceux de la logique. Si la logique est mentionnée comme méthode d'analyse, Poincaré fait appel à l'intuition de l'ordre qui met en évidence la « réalité plus subtile » du raisonnement mathématique, à savoir son unité ; et, s'il s'agit de la logique comme méthode d'exposition, le rôle de l'intuition est de rappeler l'origine et l'histoire de la théorie exposée. C'est là une belle confirmation de notre interprétation.

Si Poincaré insiste tant sur le thème de l'*intuition*, c'est qu'il a conscience [7] d'intervenir dans une conjoncture historique définie principalement par la formalisation et l' « arithmétisation » des mathématiques — utiles et même nécessaires puisqu'elles assurent rigueur et certitude, mais ne permettent pas une véritable compréhension des mathématiques en faisant bon marché de l'origine des notions — et par les nouveaux développements de la logique dont il prit connaissance vers 1905, qui, selon lui,

7. Cf. « La Logique et l'Intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement », *Œuvres*, t. 11, p. 130, 1899 ; *V.S.*, 30-31, 1900 ; *S.M.*, 130-131, 1904.

reposent sur des jugements synthétiques *a priori*. Cette solution présente l'avantage pour Poincaré qu'elle ne touche pas ses positions philosophiques sur les rapports entre logique formelle et mathématiques ; et, effectivement, ces positions que nous venons d'examiner resteront permanentes — après la lecture de Couturat, Peano et Russell, et jusqu'à sa mort.

C. Mathématiques et langage

Nous aimerions maintenant faire quelques remarques sur un thème diffus dans l'œuvre de Poincaré dont les premières formulations remontent aux années 1900 : celui des relations entre mathématiques et langage. Pour cela, le mieux est de réunir quelques textes.

1902 :

« Bien qu'une infinité de faits possibles soient susceptibles de ce même énoncé : il fait noir, je saurai toujours si le fait réalisé rentre ou ne rentre pas parmi ceux qui répondent à cet énoncé. Les faits sont classés en catégories, et si l'on me demande si le fait que je constate rentre ou ne rentre pas dans telle catégorie, je n'hésiterai pas.

Sans doute, cette classification comporte assez d'arbitraire pour laisser à la liberté ou au caprice de l'homme une large part. En un mot, cette classification est une convention. *Cette convention étant donnée,* si l'on me demande : tel fait est-il vrai ? je saurai toujours que répondre, et ma réponse me sera imposée par le témoignage de mes sens.

Si donc pendant une éclipse, on demande : fait-il noir ? tout le monde répondra oui. Sans doute ceux-là répondraient non qui parleraient une langue où clair se dirait noir et où noir se dirait clair. Mais quelle importance cela peut-il avoir ?

De même, en mathématiques, *quand j'ai posé les définitions, et les postulats qui sont des conventions,* un théorème ne peut plus être que vrai ou faux. Mais, pour répondre à cette question : ce théorème est-il vrai ? ce n'est plus au témoignage de mes sens que j'aurai recours, mais bien au raisonnement » (*V.S.*, 158).

1908 :

« En mathématiques, nous faisons tout à fait la même chose [qu'en physique] ; des éléments variés dont nous disposons, nous pouvons faire sortir des millions de combinaisons différentes ; mais une de ces combinaisons, tant qu'elle est isolée, est absolument dépourvue de valeur ; nous nous sommes souvent donné beaucoup de peine pour la construire, mais cela ne sert absolument à rien, si ce n'est peut-être à donner un sujet de devoir pour l'enseignement secondaire. Il en sera tout autrement le jour où cette combinaison prendra place dans une classe de combinaisons analogues et où nous aurons remarqué cette analogie ; nous ne serons plus en présence d'un fait, mais d'une loi. Et, ce jour-là, le véritable inventeur, ce ne sera pas l'ouvrier qui aura patiemment édifié quelques-unes de ces combinaisons, ce sera celui qui aura mis en évidence leur parenté. Le premier n'aura vu que le fait brut, l'autre seul aura senti l'âme du fait. Souvent, pour affirmer cette parenté, il lui aura suffi d'inventer un mot nouveau, et ce mot aura été créateur ; l'histoire de la science nous fournirait une foule d'exemples qui sont familiers à tous » (*S.M.*, 22-23).

« [...] la mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. Il convient que ces choses, différentes par la matière, soient semblables par la forme, qu'elles puissent pour ainsi dire se couler dans le même moule. Quand le langage a été bien choisi, on est tout étonné de voir que toutes les démonstrations, faites pour un objet connu, s'appliquent immédiatement à beaucoup d'objets nouveaux ; on n'a rien à y changer, pas même les mots, puisque les noms sont devenus les mêmes.

Un mot bien choisi suffit le plus souvent pour faire disparaître les exceptions que comportaient les règles énoncées dans l'ancien langage ; c'est pour cela qu'on a imaginé les quantités négatives, les quantités imaginaires, les points à l'infini, que sais-je encore ? Et les exceptions, ne l'oublions pas, sont pernicieuses, parce qu'elles cachent les lois » (*S.M.*, 29).

« Il semble que la géométrie ne puisse rien contenir qui ne soit déjà dans l'algèbre ou dans l'analyse ; que les faits géométriques, ne soient autre chose que les faits algébriques ou analytiques exprimés dans un autre langage. On pourrait donc croire qu'après la revue que nous venons de passer il ne nous restera plus rien à dire qui se rapporte spécialement à la géométrie. Ce serait méconnaître l'importance même d'un langage bien fait, ne pas comprendre ce qu'ajoute aux choses elles-mêmes la façon d'exprimer ces choses et par conséquent de les grouper » (*S.M.*, 38).

Au plus tard 1910 (à propos de Laguerre) :

« Ses aperçus sont ingénieux et lumineux. Quelquefois, on croit d'abord n'y trouver qu'une notation nouvelle ; mais, qu'on ne s'y trompe pas : dans les sciences mathématiques, une bonne notation a la même importance philosophique qu'une bonne classification dans les sciences naturelles » (*Savants et Ecrivains*, 90).

Dans ces textes, Poincaré avance sur le mode du fait une thèse sur le langage dont l'explicitation exige de nous un long détour, mais nécessaire pour la suite. Cette thèse peut se formuler ainsi : le langage est une classification conventionnelle.

Cette thèse n'est pas tant une définition du langage — qui, pour lui-même, n'intéresse pas Poincaré — qu'une mise en relations du langage à ce qu'il classifie : des ensembles de faits. Le problème que nous avons posé est donc déjà déplacé : il nous faut savoir ce qu'est un fait.

Poincaré distingue deux grandes catégories de faits : les « faits bruts » et les « faits scientifiques » ; leur différence fondamentale est que le fait brut, donné par les sensations, peut exister indépendamment du langage ; néanmoins, dès qu'il est exprimé, il perd son individualité, car le langage utilise les mêmes énoncés pour des catégories de faits semblables :

« [...] le fait, encore complètement brut, est pour ainsi dire individuel, il est complètement distinct de tous les autres faits possibles. [...] L'énoncé du fait pourrait convenir à une infinité d'autres faits. Aussitôt qu'intervient le langage, je ne dispose plus que d'un nombre fini de termes pour exprimer les nuances en nombre infini que mes impressions pourraient revêtir » (*V.S.*, 157).

Par contre, un fait ne peut être scientifique que s'il est exprimé dans un langage. Mais, alors, quelle différence entre fait brut exprimé et fait scientifique ? Aucune, si ce n'est que le fait scientifique est exprimé dans un langage dont la fonction principale est d'éliminer les erreurs d'observations.

« Il n'y a pas de frontière précise entre le fait brut et le fait scientifique ; on peut dire seulement que tel énoncé de fait est *plus brut* ou, au contraire, *plus scientifique* que tel autre » (*V.S.*, 163).

« Quelle différence y a-t-il alors entre l'énoncé d'un fait brut et l'énoncé d'un fait scientifique ? Il y a la même différence qu'entre l'énoncé d'un même fait brut dans la langue française et dans la langue allemande. L'énoncé scientifique est la traduction de l'énoncé brut dans un langage qui se distingue surtout de l'allemand vulgaire ou du français vulgaire parce qu'il est parlé par un bien moins grand nombre de personnes » (*V.S.*, 159).

Et, plus loin : « *le fait scientifique n'est que le fait brut traduit dans un langage commode* » (*V.S.*, 161).

Ainsi, tout fait scientifique est calqué sur un fait brut — ce qui le rend vérifiable ; mais alors cette vérificabilité dépend en dernière instance de l'expérience et non de la théorie.

« L'énoncé d'un fait est toujours vérifiable et pour la vérification nous avons recours soit au témoignage de nos sens, soit au souvenir de ce témoignage. C'est là proprement ce qui caractérise un fait. Si vous me posez la question : tel fait est-il vrai ? je commencerai par vous demander, s'il y a lieu, de préciser les conventions, par vous demander, en d'autres termes, en quelle langue vous avez parlé ; puis, une fois fixé sur ce point, j'interrogerai mes sens et je répondrai, oui ou non. Mais la réponse, ce seront mes sens qui l'auront faite, ce ne sera pas *vous* en me disant : c'est en anglais ou c'est en français que je vous ai parlé » (*V.S.*, 158-159).

Ainsi, la vérité d'une théorie, en tant que langage adapté aux faits scientifiques, dépend exclusivement des faits. Langage et théorie sont donc avant tout des syntaxes ; la sémantique, elle, relève d'un monde qui leur est hétérogène. Le fait est donc premier, et la science en est une traduction ; ce qui permet à Poincaré d'affirmer que « [...] la part de collaboration personnelle de l'homme dans la création du fait scientifique, c'est l'erreur » (*V.S.*, 160).

C'est là l'affirmation de la neutralité du langage à l'égard du fait ; cette neutralité est confirmée par une ambiguïté curieuse : c'est qu'une loi scientifique est classable à la fois dans la pensée et dans le réel ; elle est l' « âme » du fait (*S.M.*, 23, 27), c'est-à-dire un fait auquel on aura reconnu des parentés ou analogies avec d'autres ; pour reprendre des termes chers à Poincaré, le fait brut est une « matière », mais sa « forme », son « âme », bref, sa relation à d'autres faits, est en quelque sorte déjà inscrite dans le fait brut, la matière. Peut-on mieux dire que la science est la simple traduction du monde commun de tous les jours ? D'autre part, la loi, comme mise en relation de faits, est une classification, et ressortit en ce sens au domaine du langage et de la théorie. L'ambiguïté — inscrite admirablement dans l'expression « âme du fait » — repose donc sur la notion de forme.

Nous avons vu que le fait brut est essentiellement étranger au langage ; néanmoins, l'ambiguïté que nous venons de déceler donne à l'espace philosophique défini par le face à face de l'esprit et de l'expérience une certaine homogénéité garantissant la possibilité de l'appropriation du réel par la pensée — garantie dont l'effet philosophique est surprenant : elle conduira Poincaré à distinguer ce qui, dans l'expérience, est homogène à l'esprit et ce qui lui est hétérogène ; en d'autres termes, à donner un statut philosophique différent au monde donné et au monde réel (cf. *D.P.*, 190-191). Ces conséquences ne sont pas toutes lisibles pour Poincaré : elles dépendent en dernier ressort de la notion d'expérience qui, bien que donnée par Poincaré sur le mode du fait, fonctionne philosophiquement en référence à une réalité qui, non articulée aux théories scientifiques, agit néanmoins au travers d'elles.

Nous avons effleuré plusieurs fois une conséquence directe de cette conception, la seconde grande thèse de Poincaré : la science est un langage ; elle est la traduction de faits bruts auxquels elle impose des conventions de langage. L'explication détaillée de cette thèse demande des éléments que nous n'avons pas encore ; ce que nous pouvons dire au point où nous en sommes, c'est que Poincaré définit la science tout comme le langage : elle est une classification conventionnelle.

« [...] qu'est-ce que la science ? [...] c'est avant tout une classification, une façon de rapprocher des faits que les apparences séparaient, bien qu'ils fussent liés par quelque parenté naturelle et cachée. La science, en d'autres termes, est un système de relations » (*V.S.*, 181).

Ainsi, la vérité n'est en aucune façon définie à l'intérieur du discours scientifique :

« On dira que la science n'est qu'une classification et qu'une classification ne peut être vraie, mais commode. Mais il est vrai qu'elle est commode [...] » (*V.S.*, 184).

Une théorie scientifique n'a donc véritablement de sens que par rapport aux faits — étrangers au discours. Etrangers ? Oui et non, nous venons de le voir : la science ayant, comme le langage, la tâche de distinguer la matière de la forme, l'ambiguïté de ce dernier terme a les mêmes effets au niveau du discours scientifique qui, comme tout langage, lit la forme dans la matière, l'essence dans l'existence :

« [...] il semble superflu de rechercher si le fait brut est en dehors de la science, car il ne peut pas y avoir, ni science sans fait scientifique, ni fait scientifique sans fait brut, puisque le premier n'est que la traduction du second » (*V.S.*, 161).

Les conséquences de cette position viennent d'être signalées (cf., ci-dessus, p. 37).

Ce qui précède semble concerner plus la physique que les mathématiques. Pourquoi donc un tel détour ? Il est nécessité par le discours même de Poincaré : les mathématiques ne sont pas définies, mais situées ; l'analyse de la position philosophique de Poincaré à l'égard des mathématiques exige donc la connaissance, au moins schématique, de la configuration de l'espace philosophique dans son ensemble.

Et, alors, les mathématiques ? Elles sont, comme toute science, un langage : « [...] l'art de donner le même nom à des choses différentes » (*S.M.*, 29). La question que nous devons poser est alors claire : quels sont les faits qui concernent les mathématiques ? Question paradoxale, puisque les mathématiques ne sont pas une science expérimentale.

Poincaré répond par une double solution : il y a deux types de faits qui concernent les mathématiques.

Tout d'abord, comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe « Mathématiques et expérience », les faits donnés par les sensations peuvent, en cas de contradiction avec les principes logiques de notre esprit, être l'occasion de la création d'un nouveau système de symboles résolvant cette contradiction par des distinctions successives ; dans ce cas, le langage « ajoute » (*S.M.*, 38) quelque chose aux faits bruts ; le langage est alors une adjonction à la réalité. Les mathématiques font donc faire à la connaissance qui s'approprie le réel un détour — un détour qui nous montre encore une fois que les mathématiques ne sont pas une représentation.

Mais, alors, si le langage est une véritable adjonction au réel, pouvons-nous toujours dire qu'il est neutre par rapport à lui ? Dans ce cas, le fait désigné n'est en aucune façon homogène au discours : il n'a aucun lien avec lui, si ce n'est philosophique, le lien d'un concept à son origine intuitive sensible ; or ce fait n'a pas de valeur de vérité pour les mathématiques, car les concepts de cette science, n'étant pas une représentation du sensible, ne sont pas vérifiables par l'existence d'un fait brut. Or seule une science représentative, telle la physique, est susceptible de vérité, puisque, en dernière instance, c'est l'existence ou la non-existence du fait brut qui décide de la vérité ou de la fausseté.

Que dire alors des mathématiques ? Si la catégorie de vérité, définie comme rapport du langage à l'expérience mais déterminée par cette dernière, lui est refusée, quel est son statut ? Etant un langage, est-elle purement conventionnelle ? Poincaré évacue cette solution, en tout cas pour « la pensée mathématique là où elle est restée pure » (*S.H.*, 14), en arithmétique. Nous en avons vu la raison dans le paragraphe « Mathématiques et Logique » : l'arithmétique repose sur l'intuition d'une propriété de l'esprit ; elle n'est donc pas conventionnelle, puisque justifiée philosophiquement par sa référence à une réalité extérieure aux mathématiques ; ainsi la « vérité » des mathématiques dépend de leur rapport aux facultés intellectuelles ; dans ce cas, la vérification n'est pas le fait de l'expérience, c'est celui de l'intuition. Mais la vérité ainsi définie n'a plus le même sens : rapportée à l'esprit, elle signifie que le discours mathématique est régi par les structures intellectuelles de l'esprit ; bref, par les principes de la logique. Autrement dit, être vrai en arithmétique, c'est être non contradictoire — cette condition définissant à la fois le possible et l'existence mathématiques, puisque la réalité n'y intervient pas directement.

« [...] personne ne doutera que cette opération ne soit possible, à moins d'oublier que ce dernier mot, dans le langage des géomètres, signifie simplement exempt de contradiction » (*S.H.*, 31).

« Un être mathématique existe, pourvu que sa définition n'implique pas contradiction, soit en elle-même, soit avec les propositions antérieurement admises » (*S.H.*, 59).

« Les mathématiques sont indépendantes de l'existence des objets matériels ; en mathématiques, le mot exister ne peut avoir qu'un sens, il signifie exempt de contradiction » (*S.M.*, 162).

« [...] on admire le pouvoir que peut avoir un mot. Voilà un objet dont on n'aurait rien pu tirer, tant qu'il n'était pas baptisé ; il a suffi de lui donner un nom pour qu'il fît des merveilles. Comment cela se fait-il ? C'est parce qu'en lui donnant un nom nous avons affirmé implicitement que l'objet existait (c'est-à-dire était pur de toute contradiction) et qu'il était entièrement déterminé » (*D.P.*, 92).

Une notion a un sens en mathématiques si elle est à la fois possible et existante, ce qui est garanti par la non-contradiction ; aussi la démonstration de la consistance des théories mathématiques est-elle nécessaire selon Poincaré. Cette thèse présentée parfois comme une concession au formalisme par le précurseur de l'intuitionnisme — soit presque comme une bévue [8] — a, nous le voyons, de profondes racines dans sa philosophie.

Ces considérations nous amènent à l'examen de l'autre type de fait en rapport avec le langage mathématique : les combinaisons mathématiques déjà existantes. Fait et langage ont ici le même statut — ce qui, notons-le, est parfaitement cohérent avec la philosophie des mathématiques de Poincaré où possibilité et existence sont confondues —, mais non pas le même degré de généralité ; comme en physique, un fait brut est isolé, et son « âme » n'est visible que par ses relations avec d'autres faits ; l'analogie, qui est alors le moteur de l'invention mathématique, rend compte du fait comme espèce d'un genre plus général cristallisé par un mot (*S.M.*, 23). En voici un exemple, cher à Poincaré, qui mettra en lumière les liens entre langage mathématique et philosophie :

« Parmi les mots qui ont exercé la plus heureuse influence, je signalerai ceux de groupe et d'invariant. Ils nous ont fait apercevoir l'essence de bien des raisonnements mathématiques ; ils nous ont montré dans combien de cas les anciens mathématiciens considéraient des groupes sans le savoir et comment, se croyant bien éloignés les uns des autres, ils se trouvaient tout à coup rapprochés sans comprendre pourquoi.

Nous dirions aujourd'hui qu'ils avaient envisagé des groupes isomorphes. Nous savons maintenant que dans un groupe la matière nous intéresse peu, que c'est la forme seule qui importe et que, quand on connaît bien un groupe, on connaît par cela même tous les groupes isomorphes ; et, grâce à ces mots de groupe et d'isomorphisme qui résument en quelques syllabes cette règle subtile et la rendent promptement familière à tous les esprits, le passage est immédiat et peut se faire en économisant

8. Cf. HEYTING, *Les Fondements des mathématiques...*, p. 5. L'auteur introduit cet aspect de la pensée de Poincaré par un « mais » qui n'existe pas chez Poincaré.

tout effort de pensée. L'idée de groupe se rattache d'ailleurs à celle de transformation ; pourquoi attache-t-on tant de prix à l'invention d'une transformation nouvelle ? parce que d'un seul théorème elle nous permet d'en tirer dix ou vingt ; elle a la même valeur qu'un zéro ajouté à la droite d'un nombre entier » (*S.M.*, 30-31).

Le langage a donc ainsi une fonction généralisante qui lui permet de cerner synthétiquement une notion sans devoir recourir à l'énumération de tous les faits qui lui ont donné naissance ; cette fonction est désignée par Poincaré, dès *Science et Méthode,* par l'expression « économie de pensée » (*S.M.*, 9, 16, 23, 26, 29, etc.) empruntée à Mach. La conséquence pour Poincaré en est que le langage mathématique ne doit pas être entièrement formalisé, car la formalisation implique l'explicitation de tous les requisits d'une théorie ; un livre de mathématiques doit être un livre où « [...] les formules [...] alternent [...] avec le discours explicatif » (*S.M.*, 154). Cette remarque, la seule de ce type que nous ayons trouvée chez Poincaré, ne nous renseigne pas tant sur le type de discursivité mise en œuvre dans les mathématiques que sur une exigence de la philosophie de Poincaré, celle de l'adaptation entre l'esprit — compris cette fois non comme ensemble de principes logiques, mais comme entité psychique — et le discours scientifique, cristallisée par le sentiment de l'élégance qui favorise une intuition synthétique de l'ordre, condition de l'invention mathématique :

« [...] le sentiment de l'élégance mathématique n'est autre chose que la satisfaction due à je ne sais quelle adaptation entre la solution que l'on vient de découvrir et les besoins de notre esprit, et c'est à cause de cette adaptation même que cette solution peut être pour nous un instrument. Cette satisfaction esthétique est par suite liée à l'économie de pensée » (*S.M.*, 26).

De nouveau, c'est la philosophie qui établit les critères d'un « bon » exposé mathématique ; ils ne sont pas dictés par des exigences internes aux théories scientifiques, à une exception près : la non-contradiction — mais elle est fondée philosophiquement. On comprend mieux alors l'objection de Poincaré contre la lourdeur du formalisme et l'obstacle qu'il est pour l'invention :

« [...] ceux qui les premiers se sont préoccupés avant tout de la rigueur nous ont donné des raisonnements que nous pouvons essayer d'imiter ; mais si les démonstrations de l'avenir doivent être bâties sur ce modèle, les traités de mathématiques vont devenir bien longs ; et si je crains les longueurs, ce n'est pas seulement parce que je redoute l'encombrement des bibliothèques, mais parce que je crains qu'en s'allongeant nos démonstrations perdent cette apparence d'harmonie dont j'ai expliqué tout à l'heure le rôle utile.

C'est à l'économie de pensée que l'on doit viser, ce n'est donc pas assez de donner des modèles à imiter » (*S.M.*, 28).

Ces réflexions dans leur ensemble nous amènent à formuler une caractéristique cette fois spécifique au langage : sa relative transparence, non pas tant à ce qu'il désigne — en mathématiques, c'est du reste lui-même qu'il désigne —, mais à l'espace philosophique à l'intérieur duquel il se déploie. Le langage mathématique est ainsi chargé d'une signification philosophique qui rend les discours philosophique et mathématique perméables l'un à l'autre dans une certaine mesure. Il s'ensuit une relative traductibilité du langage des mathématiques dans le langage philosophique — et vice versa —, à laquelle Poincaré recourt constamment ; remarquons ainsi la fréquence, dans ses textes philosophiques, d'expressions telles que « en langage mathématique » (*passim*), suivies d'explications en général tout à fait dépourvues de formalisation ; les mathématiques n'apparaissent plus alors dans leur discursivité propre, et, ce qui par ce procédé est mis en évidence, ce ne sont pas les théories mathématiques dans leur spécificité, mais des rapports entre langage mathématique et espace philosophique présentés comme objets illustrant et justifiant les thèses philosophiques.

Nous avions posé au début la question de la spécificité des mathématiques selon Poincaré ; nous avons vu, curieusement, que les théories mathématiques ne sont pas pertinentes à sa solution, et nous avons été renvoyés à leur localisation dans une configuration philosophique. Que restait-il alors des théories mathématiques ? Leur langage — mais ce langage, on l'a vu, est traversé de part en part par les effets de cette localisation. Ainsi, le lieu d'où Poincaré spécifie les mathématiques est proprement et purement philosophique. L'effet en est bien surprenant : Poincaré croit désigner les mathématiques, mais, ce qu'il désigne, à son insu, au travers d'elles, c'est l'espace philosophique dans lequel il se trouve. Les conséquences philosophiques en seront examinées plus loin.

II. La géométrie

Dans le chapitre *précédent*, nous avons établi l'existence d'une configuration de l'espace philosophique délimitée par l'esprit et l'expérience, et nous avons vu qu'elle fonctionne, chez Poincaré, comme intermédiaire obligé dans l'étude des rapports entre la philosophie et les sciences : parler sur les mathématiques, les définir, équivaut en dernier ressort à les situer. Dans la suite, nous allons tenir ce résultat pour acquis, et notre propos consistera alors à *spécifier* la localisation respectivement de la géométrie, de la mécanique et de la physique, puis de mesurer ses effets pour chacune de ces sciences.

De 1887 à 1912, Poincaré a consacré de nombreux articles à la géométrie afin de prendre position dans la controverse sur la légitimité des géométries non euclidiennes et des géométries à *n* dimensions. Comment Poincaré est-il intervenu dans cette conjoncture ? En posant deux questions, invariablement les mêmes, portant l'une sur l'origine de la notion d'espace et l'autre sur la nature des axiomes géométriques. Ces questions indiquent notre tâche : examiner les rapports de la notion d'espace aux deux instances philosophiques, l'esprit et l'expérience.

A cet effet, nous avons pris le parti de mener notre étude assez systématiquement, sans tenir compte du caractère essentiellement fragmentaire du texte : la permanence des questions posées par Poincaré et des solutions qu'il y apporte nous y autorise.

Nous allons partir d'une affirmation souvent répétée par Poincaré : l'espace géométrique n'est pas l'espace représentatif.

1898 :

« L'espace sensible n'a rien de commun avec l'espace géométrique. [...]

Nos représentations ne sont que la reproduction de nos sensations ; nous ne pouvons donc pas figurer l'espace géométrique » (F.G., 11).

1895 :

« Nos représentations ne sont que la reproduction de nos sensations, elles ne peuvent donc se ranger que dans le même cadre qu'elles, c'est-à-dire dans l'espace représentatif.

Il nous est aussi impossible de nous représenter les corps extérieurs dans l'espace géométrique, qu'il est impossible à un peintre de peindre, sur un tableau plan, des objets avec leurs trois dimensions.

L'espace représentatif n'est qu'une image de l'espace géométrique, image déformée par une sorte de perspective, et nous ne pouvons nous représenter les objets qu'en les pliant aux lois de cette perspective » (*S.H.*, 74-75).

1897 :

« [...] je me suis efforcé de prouver que l'espace sensible n'a rien de commun avec l'espace géométrique [...] » (« Réponse à quelques critiques », 67).

1903 :

« [...] nous ne pouvons nous représenter l'espace [...] » (*V.S.*, 78).

Et, plus loin :

« [...] l'expérience ne nous ferait jamais toucher que l'espace représentatif qui est un continu physique, et non l'espace géométrique qui est un continu mathématique » (*V.S.*, 94).

1907 :

« Il y a un contraste frappant entre la grossièreté de cette géométrie primitive qui se réduit à ce que j'appelle un tableau de distribution, et la précision infinie de la géométrie des géomètres » (*S.M.*, 120).

Ainsi, l'espace géométrique n'est pas tiré des données des sens, et cela pour deux raisons. Tout d'abord, la géométrie est une branche des mathématiques — bien qu'elle diffère de l'arithmétique par son « objet » et la nature de ses axiomes — et, en tant que telle, elle est déductive ; cela exclut, pour Poincaré, qu'elle soit une science expérimentale, car elle serait alors sujette à une constante révision (cf., par exemple, F.G., 19 : « La géométrie est à l'abri de toute révision ; aucune expérience, si précise soit-elle, ne peut la renverser. Si cela se pouvait, il y a longtemps que ce serait fait »).

La seconde raison tient au fait que l'espace, même sensible, n'est pas une pure donnée des sens.

1898 :

« Les sensations par elles-mêmes n'ont aucun caractère spatial.

Cela est évident dans le cas de sensations isolées, des sensations visuelles par exemple. Que pourrait voir un homme qui ne posséderait qu'un œil unique et immobile ? Des images différentes se formeraient sur différents points de sa rétine ; mais serait-il amené à classer ces images comme nous classons nos sensations rétiniennes actuelles ? » (F.G., 5-6.)

A propos de la notion de direction :

« [...] demandons-nous d'abord si le sentiment de la direction forme réellement une partie constituante de la sensation. Je ne vois pas très bien comment il peut y avoir *dans* la sensation quelque chose d'autre que la sensation elle-même. Et observons de plus que la même sensation peut, selon les circonstances, exciter le sentiment de différentes directions » (F.G., 9).

1895 :

« Quand je dis que nous nous représentons ces mouvements, je veux dire seulement que nous nous représentons les sensations musculaires qui les accompagnent et qui n'ont aucun caractère géométrique, qui par conséquent n'impliquent nullement la préexistence de la notion d'espace » (*S.H.*, 75).

Quelles sont alors les conditions de formation de l'espace sensible ? Ce sont tout d'abord les mouvements des corps solides, y compris notre corps, parce que ce sont eux qui nous permettent de discerner les déplacements, des changements d'état.

« La géométrie ne serait pas née si nous n'avions pas été amenés à répartir en deux classes les changements que peuvent subir nos impressions. Nous disons tantôt que nos impressions ont changé parce que les objets qui les produisaient ont subi quelque changement d'état et tantôt que nos impressions ont changé parce que les objets ont subi un déplacement » (F.G., 12).

Une telle distinction requiert le mouvement des corps solides. En effet, qu'est-ce qui nous permet d'affirmer qu'un corps, qui provoque en nous une impression, s'est déplacé ? C'est que nous pouvons, par un mouvement corrélatif et volontaire de notre corps, corriger ce déplacement et rétablir l'impression primitive ; or un changement d'état n'est jamais susceptible d'une telle correction. Ainsi, sans corps solides, pas de géométrie : « *Si donc il n'y avait pas de corps solides dans la nature, il n'y aurait pas de géométrie* » (*S.H.*, 80).

L' « objet » de la géométrie, c'est-à-dire les lois des déplacements, est donc défini dans la réciprocité des mouvements de nos corps et des solides ; ainsi tout mouvement est rapporté à notre corps qui joue le rôle de système d'axes de coordonnées ; autrement dit, l'espace est relatif : nous ne pouvons déterminer la position absolue d'un objet.

« La seule chose que nous connaissions directement c'est la position relative des objets par rapport à notre corps.

[...] En somme, le système d'axes de coordonnées auxquels nous rapportons naturellement tous les objets extérieurs, c'est un système d'axes invariablement lié à notre corps, et que nous transportons partout avec nous.

Il est impossible de se représenter l'espace absolu [...] » (*V.S.*, 67).

La relativité de l'espace, qui est un principe de la géométrie, est donc d'abord un fait expérimental ; ce n'est pas sans importance : certaines propositions, apparemment semblables, ont ainsi un statut différent selon qu'elles sont géométriques ou physiques.

Mais il faut un critère de classification des déplacements, c'est-à-dire une définition de l'identité de deux déplacements, sans quoi, pas de langage géométrique et, par suite, pas de science : Poincaré l'établit à l'aide du jeu réciproque des changements internes (mouvements volontaires de nos corps) et des changements externes (mouvements des solides) ; par convention (cf. *D.P.*, 142), deux changements externes sont dits être dus au même déplacement s'ils sont susceptibles d'être corrigés par le même mouvement interne ; réciproquement, deux changements internes sont regardés comme identiques s'ils sont capables de corriger le même changement externe. Les données des sens étant approximatives, cette classification — comme du reste toute autre — requiert une intervention de l'esprit :

« La classification n'est pas une donnée brute de l'expérience, parce que la compensation mentionnée plus haut des deux changements, l'un interne et l'autre externe, n'est jamais exactement réalisée. C'est donc une opération active de l'esprit qui essaie d'insérer les résultats bruts de l'expérience dans une forme préexistante, dans une catégorie » (F.G., 16 ; remarquons le style kantien de ce texte).

Si l'on s'en tient à l'espace sensible, les déplacements ne peuvent faire l'objet d'une partition en classes disjointes : leur expression ne peut être que celle du continu physique avec la contradiction qui leur est inhérente ; le raisonnement géométrique n'a donc pas de prise sur l'espace sensible.

Cette classification n'en est pas moins essentielle : identifier deux déplacements, c'est aussi reconnaître leur répétabilité ; or de là découlent à la fois la possibilité de la mesure et les caractéristiques de l'espace représentatif ; il est, très grossièrement, homogène et isotrope :

« C'est ce fait que l'on énonce d'ordinaire en disant que *l'espace est homogène et isotrope.*

On peut dire aussi qu'un mouvement qui s'est produit une fois peut se répéter une seconde fois, une troisième fois, et ainsi de suite, sans que ses propriétés varient.

Dans le chapitre premier, où nous avons étudié la nature du raisonnement mathématique, nous avons vu l'importance qu'on doit attribuer à la possibilité de répéter indéfiniment une même opération.

C'est de cette répétition que le raisonnement mathématique tire sa vertu ; c'est donc grâce à la loi d'homogénéité qu'il a prise sur les faits géométriques » (*S.H.*, 83).

Or ces propriétés sont l'image de celles de l'espace géométrique ; plus exactement, Poincaré constate un parallélisme entre les propriétés des mouvements des corps solides et celles du groupe des déplacements qui, lui, est exprimable dans les termes du continu mathématique. Nous pouvons alors définir la géométrie comme l'étude d'un groupe particulier.

1887 :

« [...] la géométrie n'est autre chose que l'étude d'un groupe [...] » (« Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie », 90.)

1895 :

« Ce qui est l'objet de la géométrie, c'est l'étude d'un " groupe " particulier » (*S.H.*, 90).

1898 :

« Ce que nous appelons la géométrie n'est pas autre chose que l'étude des propriétés formelles d'un certain groupe continu ; si bien que nous pouvons dire que l'espace est un groupe » (F.G., 62-63).

Mais qu'est-ce qu'un groupe ? Nous serions tentés de donner à cette question une réponse mathématique : un « ensemble » est un groupe s'il est muni d'une opération interne binaire partout définie et associative, d'un élément neutre, et si, en outre, tous ses éléments possèdent un inverse. Et c'est effectivement la réponse que donne Poincaré — mais ce n'est pas la seule : il ne définit pas seulement le groupe comme concept mathématique, mais comme « objet » déjà inscrit dans l'une des réalités philosophiques, l'esprit.

1895 :

« [...] le concept général de groupe préexiste dans notre esprit au moins en puissance. Il s'impose à nous, non comme forme de notre sensibilité, mais comme forme de notre entendement » (*S.H.*, 90-91).

1898 :

« Nous avons en nous, en puissance, un certain nombre de modèles de groupes [...] » (F.G., 23).

1899 :

« Dans notre esprit préexistait l'idée latente d'un certain nombre de groupes ; ce sont ceux dont Lie a fait la théorie » (*S.H.*, 109).

Remarquons, dans cette dernière citation, le passage sans autre transition de l'esprit à la théorie.

Transformer les concepts en objets, reproduire les concepts scientifiques dans des notions philosophiques, en l'occurrence dédoubler le groupe en concept et en forme de l'entendement, telle est la fonction de l'espace philosophique de Poincaré : la théorie se résout dans ses relations aux réalités philosophiques qui à la fois la rendent possible et la justifient.

Nous pouvons alors localiser la géométrie ; elle est un groupe continu ; en ce sens, elle peut utiliser le langage de l'algèbre et de l'analyse :

« Il semble que la géométrie ne puisse rien contenir qui ne soit déjà dans l'algèbre ou dans l'analyse ; que les faits géométriques ne soient autre chose que les faits algébriques ou analytiques exprimés dans un autre langage » (*S.M.*, 38).

La géométrie a ainsi le même statut que les mathématiques, et tout ce que nous avons dit dans le chapitre précédent lui est applicable. En particulier, l'expérience a aussi été pour elle l'occasion de sa construction :

« La géométrie n'est pas une science expérimentale ; l'expérience n'est pour nous que l'occasion de réfléchir sur les idées géométriques qui préexistent en nous. Mais cette occasion est nécessaire ; si elle n'existait pas, nous ne réfléchirions pas, et, si nos expériences étaient différentes, nos réflexions seraient sans doute aussi différentes » (F.G., 62).

Néanmoins, pour la géométrie, l'expérience n'est pas seulement l'occasion de sa constitution ; c'est là un fait fondamental qui tient au parallélisme des propriétés de l'espace sensible et de celles de l'espace géométrique : il y a une relation privilégiée entre ces deux espaces qui détermine le statut très particulier de la géométrie comme langage « intermédiaire entre celui de l'analyse et celui de la physique » (*V.S.*, 31). Comment peut-elle jouer ce rôle d'intermédiaire ? Poincaré l'explique très clairement en plusieurs endroits.

1898 :

« Séparant nos sensations de ce quelque chose que nous appelons leur cause, nous admettons que le quelque chose en question se conforme au modèle que nous portons en nous et que nos sensations s'en écartent seulement à cause de leur grossièreté » (F.G., 25).

« [...] nous sommes désireux d'arriver à des axiomes géométriques qui soient rigoureusement et toujours vrais et nous échappons toujours à ce dilemme par le même artifice, en disant que nous convenons de considérer le changement observé comme la résultante de deux autres, l'un qui obéit rigoureusement à la loi et que nous attribuons au déplacement de l'œil et le second qui est généralement très petit et que nous attribuons soit à des altérations qualitatives, soit aux mouvements des corps extérieurs » (F.G., 55).

1902 :

« L'expérience nous fait connaître des relations entre les corps ; c'est là le fait brut ; ces relations sont extrêmement compliquées. Au lieu d'envisager directement la relation du corps *A* et du corps *B*, nous introduisons entre eux un intermédiaire qui est l'espace, et nous envisageons trois relations distinctes : celle du corps *A* avec la figure *A'* de l'espace, celle du corps *B* avec la figure *B'* de l'espace, celle des deux figures *A'* et *B'* entre elles. Pourquoi ce détour est-il avantageux ? Parce que la relation de *A* et *B* était compliquée, mais différait peu de celle de *A'* et *B'* qui est simple : de sorte que cette relation compliquée peut être remplacée par la relation simple entre *A'* et *B'*, et par deux autres relations qui nous font connaître que les différences entre *A* et *A'* d'une part, entre *B* et *B'* d'autre part sont *très petites*. [...]

La relation entre *A* et *B* était une loi brute, et elle s'est décomposée ; nous avons maintenant deux lois qui expriment les relations de *A* et *A'*, de *B* et *B'* et un principe qui exprime celle de *A'* avec *B'*. C'est l'ensemble de ces principes que l'on appelle géométrie » (*V.S.*, 166-167).

Il s'ensuit que :

« Une relation géométrique peut remplacer avantageusement une relation qui, considérée à l'état brut, devrait être regardée comme mécanique, elle peut en remplacer une autre qui devrait être regardée comme optique, etc. » (*V.S.*, 167).

Ainsi, quoique n'étant pas une science expérimentale, la géométrie peut, par l'intermédiaire de sciences, elles, expérimentales, être appliquée au réel.

Oscillation entre rigueur et applicabilité : voilà ce qui définit pour Poincaré le statut de la géométrie, et, pour nous, sa place dans la configuration de l'espace philosophique. Cette situation, Poincaré ne se contente pas de la décrire, mais, selon la démarche philosophique que nous lui avons reconnue, il l'objective dans la notion de « solide idéal » :

« [La géométrie] a pour objet certains solides idéaux, absolument invariables, qui n'en sont qu'une image simplifiée et bien lointaine.

La notion de ces corps idéaux est tirée de toutes pièces de notre esprit et l'expérience n'est qu'une occasion qui nous engage à l'en faire sortir » (*S.H.*, 90).

Chose curieuse, la géométrie, non représentative puisque déductive et rigoureuse, apparaît alors comme représentative — mais à une nuance près, celle du « comme si » : nous raisonnons à la fois « comme si » les solides naturels étaient localisés dans l'espace géométrique et « comme si » les figures géométriques se comportaient comme des solides naturels.

1893 :

« [...] on raisonne constamment comme si les figures géométriques se comportaient à la manière des solides » (*S.H.*, 66).

1895 :

« [...] nous *raisonnons* sur ces corps, comme s'ils étaient situés dans l'espace géométrique » (*S.H.*, 75).

Ce fait est d'une importance tout à fait capitale, car il donne la clef d'interprétation d'une affirmation de Poincaré : la géométrie est une convention, dont on a souvent fait l'emblème de sa philosophie géométrique. Examinons le texte même :

« [...] la géométrie est l'étude d'un ensemble de lois peu différentes de celles auxquelles obéissent réellement nos instruments, mais beaucoup plus simples, de lois qui ne régissent effectivement aucun objet naturel, mais qui sont concevables pour l'esprit. En ce sens, la géométrie est une convention, une sorte de cote mal taillée entre notre amour de la simplicité et notre désir de ne pas trop nous écarter de ce que nous apprennent nos instruments. Cette convention définit à la fois l'espace et l'instrument parfait » (*D.P.*, 100-101).

Qu'est-ce à dire ? Nous pouvons reconnaître dans cette définition la décomposition entre ce que Poincaré appelait en 1902 (*V.S.*, 166-167 ; cf. ci-dessus, p. 50) les « principes » géométriques et les « lois brutes ». Un texte de 1898 confirme cette interprétation :

« Ces conventions, il est vrai, nous ont toutes été suggérées par des expériences, mais par des expériences grossières. Nous découvrons que certaines lois se vérifient approximativement et nous décomposons par convention le phénomène observé en deux autres : un phénomène purement géométrique qui obéit exactement à ces lois et un très petit phénomène perturbateur » (F.G., 58).

Nous pouvons alors aborder le problème du statut des diverses géométries euclidienne et non euclidiennes ; cela nous permettra de mesurer la portée du conventionnalisme géométrique de Poincaré.

Puisque l'empirisme géométrique, nous l'avons vu, n'a aucun sens pour Poincaré, il n'y a pas de géométrie unique comme décalque du monde sensible, mais une infinité de géométries possibles, toutes justifiées du point de vue philosophique. La conséquence en est essentielle pour notre étude : il ne peut y avoir de géométrie sans postulat (*S.H.*, 50). Cette affirmation signifie pour Poincaré que les structures de l'esprit ne suffisent pas à détermioer complètement une géométrie ; tous les axiomes de la géométrie ne sont pas de « véritables » axiomes, c'est-à-dire des jugements *a priori*, mais des postulats :

« Les axiomes [de la géométrie] ne sont pas des jugements analytiques *a priori* » (F.G., 58).

« *Les axiomes géométriques ne sont donc ni des jugements synthétiques* a priori *ni des faits expérimentaux* » (*S.H.*, 66).

Notons que, contrairement à ce que laissent croire ces deux citations, il ne semble pas que tous les axiomes propres à la géométrie soient des postulats : Poincaré qualifie les axiomes de l'ordre de « véritables propositions intuitives » (*D.P.*, 156) — mais ce n'est pas là notre propos ; ce qu'il nous importe de voir, c'est qu'ainsi les postulats sont relativement libres par rapport à l'esprit. D'autre part, nous le savons bien, ils le sont aussi par rapport à l'expérience. En conséquence, le postulat est la marque d'un choix à l'intérieur de la théorie, et les diverses géométries diffèrent par les postulats qu'elles adoptent. Par exemple, dans la géométrie d'Euclide, on peut mener une et une seule parallèle à une droite donnée ; dans celle de Lobatchevsky, une infinité, et dans celle de Riemann aucune. Ces postulats sont des « définitions déguisées » (*S.H.*, 67) de la distance :

« Les autres axiomes de la géométrie ne suffisent pas pour définir complètement la distance ; la distance sera alors, par définition, parmi toutes les grandeurs qui satisfont à ces autres axiomes, celle qui est telle que le postulatum d'Euclide soit vrai » (*S.M.*, 161),

ou, ajoutons-nous, celui de Riemann ou de Lobatchevsky. C'est ce choix qui, pour Poincaré, est conventionnel : les postulats sont des conventions.

Que dire alors de la convention ? Est-elle une caractéristique interne au discours scientifique ? On pourrait répondre par l'affirmative, en se rappelant qu'elle indique les variations possibles d'une géométrie à l'autre. Mais, à l'intérieur de l'une de ces géométries, y a-t-il un critère qui permette de distinguer un postulat d'un axiome ? Non, selon les logiciens et les formalistes ; mais Poincaré ne partage pas ce point de vue (cf., par exemple, *D.P.*, 184) ; selon lui, axiomes et postulats sont distincts parce qu'ils entretiennent d'autres relations avec l'esprit et l'expérience ; bref, dire qu'une proposition est un axiome ou une convention, c'est trancher la question de son origine. Ainsi, nous optons pour une interprétation philosophique du conventionnalisme de Poincaré : est convention ce qui n'est déterminé exactement ni par l'esprit ni par les données des sens. D'un point de vue philosophique, une convention n'est alors déterminée que par son langage.

Les géométries, en tant que conventions, ne sont donc pas susceptibles d'êtres vraies ou fausses.

« Dès lors, que doit-on penser de cette question : La géométrie euclidienne est-elle vraie ?

Elle n'a aucun sens.

Autant demander si le système métrique est vrai et les anciennes mesures fausses ; si les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses. Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre [...] » (*S.H.*, 67).

Tout au plus sont-elles — et doivent-elles être — non contradictoires, ce dont Poincaré s'est assuré en montrant que la géométrie euclidienne est un modèle pour celles de Riemann et de Lobatchevsky (*S.H.*, 56-58).

Néanmoins, ces conventions, relativement libres par rapport à l'esprit et à l'expérience, ne sont pas arbitraires ; d'un point de vue psychologique, elles doivent répondre aux exigences de simplicité, de non-artificialité ; du point de vue objectif, d'autre part, elles doivent garder — si tant est qu'on les utilise comme langage pour la physique — un rapport au monde sensible : celui du « comme si ». On peut imaginer des mondes — ce que Poincaré se donne la peine de faire — où les lois des déplacements des corps ne correspondraient pas aux propriétés de l'espace euclidien ; les géomètres de tels univers n'auraient pas, tout d'abord du moins, construit la géométrie euclidienne, mais une autre, plus « naturelle » : celle qui eût conservé le rapport du « comme si » avec les phénomènes observables. Les géométries ainsi construites ne seraient du reste pas sans analogie (quoique comportant des propositions contradictoires) puisque, l'espace étant relatif, il est possible de passer d'un monde à l'autre par une transformation ponctuelle (*V.S.*, 58). Ainsi l'espace, primitivement, est un « continuum amorphe » susceptible d'une déformation continue quelconque (*V.S.*, *55* ; *D.P.*, 136).

Par conséquent, le langage adapté à la physique est celui de la *géométrie euclidienne*.

1898 :

« Qu'on ne dise pas que le groupe d'Euclide nous semble le plus simple parce qu'il est le plus conforme à quelque idéal préexistant qui a déjà un caractère géométrique ; il est plus simple parce que certains de ses déplacements sont échangeables, ce qui n'est pas vrai des déplacements correspondants du groupe de Lobatchevsky. Traduit dans le langage analytique, cela veut dire qu'il y a moins de termes dans les équations, et il est clair qu'un algébriste qui ne saurait pas ce qu'est l'espace ou la ligne droite regarderait cela néanmoins comme une condition de simplicité » (F.G., 64).

« Si nos expériences étaient considérablement différentes, la géométrie d'Euclide ne suffirait plus à les représenter commodément, et nous choisirions une géométrie différente » (F.G., 64).

1900 :

« [...] notre géométrie euclidienne n'est elle-même qu'une sorte de convention de langage ; nous pourrions énoncer les faits mécaniques en les rapportant à un espace non euclidien qui serait un repère moins commode, mais tout aussi légitime que notre espace ordinaire ; l'énoncé deviendrait ainsi beaucoup plus compliqué ; mais il resterait possible » (*S.H.*, 111-112).

Le langage de la géométrie euclidienne permet donc « d'abréger et de simplifier » (*S.H.*, 112) l'énoncé des lois mécaniques et physiques.

Autrement dit, pour nous, la géométrie euclidienne est commode.

1893 :

« Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être *plus commode* » (*S.H.*, 67).

1895 :

« [...] parmi tous les groupes possibles, il faut choisir celui qui sera pour ainsi dire l'*étalon* auquel nous rapporterons les phénomènes naturels.

L'expérience nous guide dans ce choix qu'elle ne nous impose pas ; elle nous fait reconnaître non quelle est la géométrie la plus vraie, mais quelle est la plus *commode* » (*S.H.*, 91).

1899 :

« L'expérience nous a guidés en nous montrant quel choix s'adapte le mieux aux propriétés de notre corps. Mais son rôle s'est borné là » (*S.H.*, 109).

Notons que, du point de vue de la conservation de l'espèce humaine, la commodité de l'espace (sensible) euclidien a une valeur contraignante : la représentation des lois naturelles dans un espace non euclidien n'aurait probablement pas permis aux hommes de subsister (*S.H.*, 109 ; *S.M.*, 107 ; *V.S.*, 96).

C'est de manière tout à fait analogue que Poincaré intervient à propos des géométries à *n* dimensions. L'espace représentatif, lui, a trois dimensions — Poincaré l'a montré de deux façons, tout d'abord par la considération des groupes des déplacements (F.G., 1898), solution qu'il a ensuite rejetée comme n'étant pas naturelle (*V.S.*, 80), puis en utilisant les notions de continu physique, de coupure et d'indiscernabilité de sensations contiguës (*V.S.*, 80-93 ; *D.P.*, 137-151). Mais l'espace géométrique, n'étant pas calqué sur l'espace sensible, est susceptible de *n* dimensions : il suffit de le construire à l'aide des concepts de continu mathématique et de coupure. Néanmoins, la géométrie à trois dimensions permet un exposé plus simple des lois physiques :

« Il semble bien en effet qu'il serait possible de traduire notre physique dans le langage de la géométrie à quatre dimensions ; tenter cette traduction, ce serait se donner beaucoup de mal pour peu de profit, et je me bornerai à citer la mécanique de Hertz où l'on voit quelque chose d'analogue. Cependant, il semble que la traduction serait toujours moins simple que le texte, et qu'elle aurait toujours l'air d'une traduction, que la langue des trois dimensions semble la mieux appropriée à la description de notre monde, encore que cette description puisse se faire à la rigueur dans un autre idiome » (*S.M.*, 118-119 ; cf. aussi *V.S.*, 94).

« Nous obtiendrons ainsi une forme de nos équations où figureront les coordonnées des astres dans l'espace à quatre dimensions ; ce sera une expression nouvelle des lois astronomiques fondée sur l'hypothèse d'un espace à quatre dimensions, et cette expression ne sera pas illégitime puisque la condition de " parallélisme " est respectée. Seulement, il est clair que les équations ainsi obtenues seront beaucoup moins simples que nos équations habituelles » (*D.P.*, 153).

Ainsi, la géométrie à trois dimensions est aussi la plus commode et possède les mêmes vertus que l'espace euclidien à l'égard de la conservation de l'espèce.

Nous sommes maintenant à même de mesurer les effets de la localisation de la géométric dans la configuration de l'espace philosophique. Alors que la localisation des mathématiques avait pour effet une intervention du philosophique dans le scientifique en refusant à l'infini actuel le statut de concept, la philosophie géométrique de Poincaré respecte le théorique. Les liens établis entre déduction et rigueur, d'une part, expérience et révisabilité, d'autre part, excluant toute interprétation empirique de la géométrie, reconnaissent la possibilité d'un nombre infini de géométries, toutes également justifiées d'un point de vue théorique.

III. La mécanique et la physique

Avec la mécanique et la physique, nous entrons dans le domaine des sciences expérimentales. Nous devons donc nous demander ce qu'est, pour Poincaré, une science expérimentale, s'il la spécifie d'un point de vue philosophique ou scientifique, et si ces caractérisations ont des effets à l'intérieur du discours théorique. Pour des raisons d'ordre surtout historique, nous allons répondre à ces questions en plusieurs temps. En effet, à l'époque où Poincaré écrivait, la question du statut de la mécanique n'était pas claire.

Tout d'abord, son caractère expérimental n'était pas universellement admis — du moins n'en tenait-on pas toujours compte dans l'exposé. Lagrange (1736-1813) avait montré dans sa *Mécanique analytique* (1788) — ouvrage dont l'importance scientifique et philosophique a été considérable — que les lois de la mécanique pouvaient être déduites de l'équation exprimant le principe des vitesses virtuelles.

« Dans la première partie de cet ouvrage, nous avons réduit toute la statique à une seule formule générale qui donne les lois de l'équilibre d'un système quelconque tiré par tant de forces qu'on voudra. On pourra donc aussi réduire à une formule générale toute la dynamique ; car pour appliquer au mouvement d'un système de corps la formule de son équilibre, il suffira d'y introduire les forces qui proviennent des variations du mouvement de chaque corps et qui doivent être détruites. Le développement de cette formule, en ayant égard aux conditions dépendantes de la nature du système, donnera toutes les équations nécessaires pour la détermination du mouvement de chaque corps ; et il n'y aura plus qu'à intégrer ces équations, ce qui est l'affaire de l'analyse [1]. »

Aussi la mécanique pouvait-elle apparaître aux yeux des contemporains, surtout français, de Poincaré comme une discipline analogue aux mathématiques, dont toute vérité peut être déduite d'un principe de statique. Nous comprenons alors pourquoi les relations entre géométrie et mécanique ont préoccupé Poincaré. L'examen de son intervention sur ce problème sera le premier temps de notre étude.

En second lieu, dans ses écrits sur la physique, Poincaré distingue souvent la mécanique de la physique. Ce n'est pas un hasard : vers la fin du XIX[e] et le début du XX[e] siècle, la question des relations entre la mécanique et la physique était vivement discutée.

« Les grandes conquêtes de la mécanique dans toutes ses branches, son succès éclatant dans le développement de l'astronomie, l'application de ses idées à des problèmes manifestement différents et n'ayant pas un caractère mécanique, toutes ces choses ont contribué à faire naître la croyance qu'il *est* possible de décrire tous les phénomènes de la nature en termes de forces simples s'exerçant entre des objets invariables. Pendant les deux siècles qui ont suivi l'époque de Galilée, cette tentative, consciente ou inconsciente, est manifeste dans toute la production scientifique [2]. »

Or l'idée de l'unité de la mécanique et de la physique, qui hantait encore, quoique sous une forme plus souple, les physiciens contemporains de Poincaré — et Poincaré lui-même —, fut profondément ébranlée par plusieurs découvertes dans divers domaines de la physique : l'unité semblait rompue ; à l'époque, cet état de choses fut ressenti comme une « crise » à l'intérieur de la physique. « [...] il y a des indices d'une crise sérieuse » (*V.S.*, 123 ; 1904). Ainsi, les rapports entre la mécanique et la physique selon Poincaré feront l'objet d'un second paragraphe.

---

1. Ce texte de Lagrange est cité par Samuel GAGNEBIN, *A la recherche d'un ordre naturel*, p. 212 ; tous nos renseignements sur Lagrange sont tirés du même ouvrage, p. 209-213. D'autre part, pour se faire une idée — partielle — de l'influence de l'œuvre de Lagrange, voir Dominique LECOURT, *Une crise et son enjeu (Essai sur la position de Lénine en philosophie)*, p. 86-87.

2. A. EINSTEIN, L. INFELD, *L'Evolution des idées en physique. Des premiers concepts aux théories de la relativité et des quanta*, p. 56.

Enfin, l'examen de ces rapports nous amènera à exposer les conceptions de Poincaré sur la physique : ce sera le troisième temps de notre étude.

A. Mécanique et géométrie

« Les Anglais enseignent la mécanique comme une science expérimentale ; sur le continent, on l'expose toujours plus ou moins comme une science déductive et *a priori*. Ce sont les Anglais qui ont raison, cela va sans dire [...] » (*S.H.*, 110).

Or nous avons vu dans le chapitre précédent qu' « une relation géométrique peut remplacer avantageusement une relation qui, considérée à l'état brut, devrait être regardée comme mécanique [...] » (*V.S.*, 167). Le problème de Poincaré est alors celui des rapports entre géométrie et mécanique. Comment cerne-t-il les contours de ces deux sciences ? Toujours de la même manière ; il examine la nature et le rôle des propositions des sciences considérées :

« [...] la difficulté de la solution provient principalement de ce que les traités de mécanique ne distinguent pas bien nettement ce qui est expérience, ce qui est raisonnement mathématique, ce qui est convention, ce qui est hypothèse » (*S.H.*, 111).

Poincaré opère cette distinction au moyen de deux exemples que nous allons brièvement examiner : le principe d'inertie selon lequel « un corps qui n'est soumis à aucune force ne peut avoir qu'un mouvement rectiligne et uniforme » (*S.H.*, 112) et la loi d'accélération d'après laquelle « l'accélération d'un corps est égale à la force qui agit sur lui divisée par sa masse » (*S.H.*, 119).

Le principe d'inertie ne saurait être une vérité *a priori* ; à cela, Poincaré donne un argument historique : « S'il en était ainsi, comment les Grecs l'auraient-ils méconnue ? » (*S.H.*, 113.) Il n'est pas non plus une vérité expérimentale, car « a-t-on jamais expérimenté sur des corps soustraits à l'action de toute force, et, si on l'a fait, comment a-t-on su que ces corps n'étaient soumis à aucune force ? » (*S.H.*, 113). Le principe d'inertie est donc inobservable. Tout au plus peut-on dire que sa « généralisation naturelle » (« L'accélération d'un corps ne dépend que de la position de ce corps et des corps voisins et de leurs vitesses » — *S.H.*, 114) est vérifiable par ses conséquences.

Mais qu'est-ce qu'une généralisation « naturelle » ? Poincaré l'indique par un détour, tout à fait analogue à celui qu'il utilise pour montrer la *simplicité* et la *commodité* de la géométrie euclidienne : il imagine un monde, différent du nôtre, où les orbites des planètes seraient sans excentricité ni inclinaison ; les astronomes d'un tel monde adopteraient une *généralisation* du principe d'inertie où la vitesse d'un corps ne dépendrait que de sa position et de celle des corps voisins. Ainsi, le principe choisi, bien que non expérimental, doit être le mieux adapté aux phénomènes observables. Nous pouvons même dire, si l'on tient compte des travaux de Galilée et de Kepler (cf. *S.H.*, 116), que notre généralisation du principe d'inertie est vérifiée en astronomie. En physique, ce n'est pas le cas, la plupart des phénomènes ne sont pas visibles [3] ; néanmoins, notre principe reste valable, car, si

« [...] l'accélération d'un des corps que nous voyons nous paraît dépendre d'*autre chose* que des positions ou des vitesses des autres corps visibles ou des molécules invisibles dont nous avons été amenés antérieurement à admettre l'existence, rien ne nous empêchera de supposer que cette *autre chose* est la position ou la vitesse d'autres molécules dont nous n'avions pas jusque-là soupçonné la présence. La loi se trouvera sauvegardée » (*S.H.*, 118-119).

Ainsi, nous pourrons toujours, par une distinction — un « coup de pouce », pour reprendre un terme cher à Poincaré —, conserver la loi d'inertie : aucune expérience de physique ne pourra la remettre en cause. Bref,

« [...] cette loi, vérifiée expérimentalement dans quelques cas particuliers, peut être étendue sans crainte aux cas les plus généraux, parce que nous savons que dans ces cas généraux l'expérience ne peut plus ni la confirmer ni la contredire » (*S.H.*, 119).

Ainsi, ce principe de mécanique a un statut analogue à ceux de la géométrie : il peut rendre compte de faits expérimentaux et les prévoir, mais ces faits, par contre, n'ont aucun effet décisif sur lui : il est une convention, mais non arbitraire parce que « naturelle ».

D'après la loi de l'accélération, nous ne pouvons connaître l'accélération d'un corps sans être à même de mesurer les forces

3. Il s'agissait, pour Poincaré, surtout des phénomènes atomiques.

qui agissent sur lui et sa masse. Qu'est-ce qu'une force ? La rapporter à la notion d'effort, c'est tout au plus rappeler son origine intuitive ; dire qu'elle est cause du mouvement, c'est faire de la métaphysique : de telles définitions ne peuvent donner lieu à des mesures. Ce qui importe, c'est donc de définir l'égalité de deux forces, mais l'expérience seule n'y suffit pas, car

« on ne peut pas décrocher une force appliquée à un corps pour l'accrocher à un autre corps, comme on décroche une locomotive pour l'atteler à un autre train » (*S.H.*, 121).

En fait, la définition de l'égalité de deux forces requiert le principe de l'égalité de l'action et de la réaction ; mais alors cette loi de Newton ne peut être considérée comme une vérité expérimentale : elle joue le rôle d'une simple définition ; elle ne sera plus l'objet de vérifications ; posée comme convention, elle permettra la vérification des conséquences de ce qu'elle définit.

« Nous sommes donc obligés de faire intervenir, dans la définition de l'égalité de deux forces, le principe même de l'égalité de l'action et de la réaction ; *à ce compte, ce principe ne devrait plus être regardé comme une loi expérimentale, mais comme une définition* » (*S.H.*, 122).

Il en est de même pour la notion de masse : la définition du rapport de deux masses exige soit l'hypothèse des forces centrales (l' « action mutuelle [de deux corps qui s'attirent] est dirigée suivant la droite qui les joint et ne dépend que de leur distance » — *S.H.*, 124), soit, si on la rejette, le principe selon lequel le mouvement du centre de gravité d'un système est rectiligne et uniforme, qui est une forme du principe de réaction. Seulement, ce principe n'est rigoureusement vrai que pour un système parfaitement isolé — sa vérification suppose donc qu'on l'applique à l'univers entier, ce qui est absurde. Ainsi, « nous sommes acculés à la définition suivante, qui n'est qu'un aveu d'impuissance : *les masses sont des coefficients qu'il est commode d'introduire dans les calculs* » (*S.H.*, 126-127). Néanmoins, nous travaillons sur des systèmes à peu près isolés : nous pouvons donc utiliser le principe de réaction *comme si* les systèmes mécaniques étaient parfaitement isolés ; il est alors regardé comme une convention non arbitraire.

« C'est là une vérité expérimentale, mais elle ne pourra être infirmée par l'expérience ; que nous apprendrait en effet une expérience plus précise ? Elle nous apprendrait que la loi n'était qu'à peu près vraie ; mais, cela, nous le savions déjà.

On s'explique maintenant comment l'expérience a pu servir de base aux principes de la mécanique et cependant ne pourra jamais les contredire » (*S.H.*, 128-129).

Mais quel est le procédé qui permet d'ériger les lois de la mécanique en conventions ? Poincaré le dit explicitement :

« Comment une loi peut-elle devenir un principe ? Elle exprimait un rapport entre deux termes réels A et B. Mais elle n'était pas rigoureusement vraie, elle n'était qu'approchée. Nous introduisons arbitrairement un terme intermédiaire C plus ou moins fictif, et C est *par définition* ce qui a avec A *exactement* la relation exprimée par la loi.

Alors notre loi s'est décomposée en un principe absolu et rigoureux qui exprime le rapport de A à C et une loi expérimentale approchée et révisable qui exprime le rapport de C à B. (*S.H.*, 166.)

« Nous pouvons décomposer cette proposition : (1) les astres suivent la loi de Newton, en deux autres : (2) la gravitation suit la loi de Newton, (3) la gravitation est la seule force qui agisse sur les astres. Dans ce cas la proposition (2) n'est plus qu'une définition et échappe au contrôle de l'expérience ; mais alors ce sera sur la proposition (3) que ce contrôle pourra s'exercer. Il le faut bien puisque la proposition résultante (1) prédit des faits bruts vérifiables.

C'est grâce à ces artifices que par un nominalisme inconscient, les savants ont élevé au-dessus des lois ce qu'ils appellent des principes » (*V.S.*, 165).

N'est-ce pas là aussi l'origine des conventions géométriques ? Rappelons les mots mêmes de Poincaré :

« Nous découvrons que certaines lois se vérifient approximativement et nous décomposons par convention le phénomène observé en deux autres : un phénomène purement géométrique qui obéit exactement à ces lois et un très petit phénomène perturbateur » (F.G., 58).

Nous pourrions du reste citer ainsi bien des textes écrits à propos de la géométrie ou de la mécanique, et qui sont, à quelques nuances près, interchangeables. Géométrie :

« Séparant nos sensations de ce quelque chose que nous appelons leur cause, nous admettons que le quelque chose en question se conforme au modèle que nous portons en nous et que nos sensations s'en écartent seulement à cause de leur grossièreté.

Le même procédé revient chaque fois que nous soumettons à la mesure les données de nos sens [...] » (F.G., 25).

Mécanique :

« Nous voyons au point de départ une expérience très particulière et en somme assez grossière ; au point d'arrivée, une loi tout à fait générale, tout à fait précise, et dont nous regardons la certitude comme absolue. Cette certitude, c'est nous qui la lui avons conférée pour ainsi dire librement, en la regardant comme une convention » (*S.H.*, 133).

De même :

« Si ces postulats possèdent une généralité et une certitude qui faisaient défaut aux vérités expérimentales d'où ils sont tirés, c'est qu'ils se réduisent en dernière analyse à une simple convention que nous avons le droit de faire, parce que nous sommes certains d'avance qu'aucune expérience ne viendra la contredire.

Cette convention n'est pourtant pas absolument arbitraire ; elle ne sort pas de notre caprice ; nous l'adoptons parce que certaines expériences nous ont montré qu'elle serait commode » (*S.H.*, 162-163).

Plus loin :

« Les principes sont des conventions et des définitions déguisées. Ils sont cependant tirés de lois expérimentales, ces lois ont été pour ainsi dire érigées en principes auxquels notre esprit attribue une valeur absolue » (*S.H.*, 165).

Voici un dernier texte où Poincaré rapproche explicitement les conventions géométriques et mécaniques :

« [...] notre espace euclidien qui est l'objet propre de la géométrie a été choisi, pour des raisons de commodité, parmi un certain nombre de types qui préexistent dans notre esprit et qu'on appelle groupes.

Si nous passons à la mécanique, nous voyons encore de grands principes dont l'origine est analogue [...] » (*V.S.*, 167-168).

Les conventions de la mécanique semblent donc bien avoir les mêmes caractères que celles de la géométrie.

« Au premier abord, l'analogie est complète ; le rôle de l'expérience semble le même. On sera donc tenté de dire : ou bien la mécanique doit être regardée comme une science expérimentale, et alors il doit en être de même de la géométrie ; ou bien au contraire la géométrie est une science déductive, et alors on peut en dire autant de la mécanique » (*S.H.*, 163).

Mais, ajoute Poincaré, « une pareille conclusion serait illégitime » (*S.H.*, 163).

Qu'est-ce qui alors distingue la géométrie et la mécanique ? Penchons-nous encore une fois sur le texte de Poincaré.

« Les expériences qui nous ont conduits à adopter comme plus commodes les conventions fondamentales de la géométrie portent sur des objets qui n'ont rien de commun avec ceux qu'étudie la géométrie ; elles portent sur les propriétés des corps solides, sur la propagation rectiligne de la lumière. Ce sont des expériences de mécanique, des expériences d'optique ; on ne peut à aucun titre les regarder comme des expériences de géométrie. Et même la principale raison pour laquelle notre géométrie nous semble commode, c'est que les différentes parties de notre corps, notre œil, nos membres, jouissent précisément des propriétés des corps solides. A ce compte, nos expériences fondamentales sont avant tout des expériences de physiologie, qui portent, non sur l'espace qui est l'objet que doit étudier le géomètre, mais sur son corps, c'est-à-dire sur l'instrument dont il doit se servir pour cette étude.

Au contraire, les conventions fondamentales de la mécanique et les expériences qui nous démontrent qu'elles sont commodes portent bien sur les mêmes objets ou sur des objets analogues. Les principes conventionnels et généraux sont la généralisation naturelle et directe des principes expérimentaux et particuliers » (*S.H.*, 163-164).

C'est donc par leur objet respectif que géométrie et mécanique se distinguent : la géométrie est l'étude d'un groupe, son objet est situé dans l'esprit ; la mécanique est l'étude des mouvements des corps, non en tant qu'ils forment un groupe, mais comme ressortissant aux données des sens, à l'expérience. Bref, ce qui, en dernier ressort, délimite ces deux sciences, c'est la place qu'elles occupent dans l'espace philosophique : l'objet de la géométrie se réfère à l'esprit, celui de la mécanique à l'expérience. Pour la mécanique, les données des sens sont véritablement constitutives ; pour la géométrie, elles ne sont qu'occasion, bien que, pour toutes deux, ce soit par rapport à ces données que les principes sont dits conventionnels. Nous le voyons une fois de plus : c'est la philosophie — et elle seule — qui trace les contours d'une science — ce qui, du même coup, confirme notre interprétation philosophique du conventionnalisme géométrique de Poincaré.

Cette différence en détermine une autre. Les données des sens, nous l'avons vu, ne sont pas directement susceptibles de mesure ; aussi la mécanique doit-elle faire appel aux mathématiques et à la géométrie pour en rendre compte. Par contre, en géométrie, l'expérience joue le rôle psychologique d'occasion : les données des sens sont alors utilisées en tant que données brutes, qui peuvent, dans certains cas, susciter la construction de concepts mathématiques.

Notons une dernière différence, conséquence des autres : les principes de la géométrie, ne portant pas sur des objets extérieurs particuliers, ont un « rayon d'action » (*V.S.*, 168) plus grand que ceux de la mécanique ; autrement dit, le langage géométrique est plus généralement utilisable que celui de la mécanique.

Nous sommes maintenant à même de comprendre ce qu'est, pour Poincaré, une science expérimentale : ce qui la définit, c'est son objet et, par suite, son origine philosophique. Cet objet, ce sont les données des sens ; elles ne peuvent être appréhendées que par un détour par les mathématiques ; aussi les sciences expérimentales ont-elles pour fonction d'appliquer au réel les mathématiques ; elles sont donc un intermédiaire — philosophique — entre l'esprit et l'expérience.

Expérience comme objet et comme marque de l'origine : de nouveau, Poincaré donne un sens philosophique à ce qui, au premier abord, caractérise en propre une science ; bref, il assimile deux usages du terme « expérience » : l'expérience comme instance philosophique et l'expérience en tant qu'articulée à une théorie particulière. C'est cette assimilation qui a rendu possible la délimitation des domaines respectifs de la géométrie et de la mécanique — et non des caractéristiques théoriques internes à ces deux disciplines. Mais cette assimilation, nous le verrons mieux plus loin, Poincaré ne la voit pas.

B. Mécanique et physique

La mécanique a été la première discipline physique à recevoir une forme mathématique, aussi a-t-elle été pensée comme origine de la physique. « La physique mathématique [...] est née de la mécanique céleste qui l'a engendrée à la fin du XVIII[e] siècle [...] » (*V.S.*, 124). C'est en mécanique que les premières lois scientifiques ont été énoncées :

« [...] il est inutile de rappeler que c'est Newton qui a énoncé la plus ancienne, la plus précise, la plus simple, la plus générale de toutes les lois naturelles » (*V.S.*, 117).

« Une loi, pour nous [...], c'est une relation constante entre le phénomène d'aujourd'hui et celui de demain ; en un mot, c'est une équation différentielle.

Voilà la forme idéale de la loi physique ; eh bien, c'est la loi de Newton qui l'a revêtue la première. Si ensuite on a acclimaté cette forme en physique, c'est précisément en copiant autant que possible cette loi de Newton, c'est en imitant la mécanique céleste » (*V.S.*, 125).

La situation privilégiée de la mécanique dans l'histoire de la physique explique qu'on l'ait comprise jusqu'à l'époque de Poincaré comme fondement de la physique et comme modèle pour elle ; tout développement de la physique devrait pouvoir s'interpréter en termes mécaniques :

« La plupart des théoriciens ont une prédilection constante pour les explications empruntées à la mécanique ou à la dynamique. Les uns seraient satisfaits s'ils pouvaient rendre compte de tous les phénomènes par les mouvements de molécules s'attirant mutuellement suivant certaines lois. Les autres sont plus exigeants, ils voudraient supprimer les attractions à distance ; leurs molécules suivraient des trajectoires rectilignes dont elles ne pourraient être déviées que par des chocs. [...]

Tous, en un mot, veulent plier la nature à une certaine forme en dehors de laquelle leur esprit ne saurait être satisfait » (*S.H.*, 196-197).

Cette préoccupation hante aussi les textes de Poincaré ; à plusieurs reprises, dans ses ouvrages philosophiques et scientifiques, il énonce les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un phénomène physique puisse recevoir une interprétation mécanique : il faut pouvoir, dans le système considéré, déterminer une énergie potentielle — dépendant de la position des corps — et une énergie cinétique — dépendant de leur masse et de leur vitesse — dont la somme soit constante et qui satisfassent au principe de moindre action selon lequel la différence des deux énergies est aussi petite que possible lorsque le système passe de sa situation initiale à la situation finale (cf. *S.H.*, 197, 207, 252-253). Or il semble (cf. *Thermodynamique,* chap. 1, et chap. 2, § 25 et 28) que l'énergie potentielle ne puisse être définie que pour des phénomènes réversibles, cela pour des raisons mathématiques que nous ne pouvons songer à exposer ici.

Or, dès le milieu du XIX^e siècle, on avait mis en évidence plusieurs types de phénomènes pour lesquels la distinction entre les deux énergies n'était pas possible. L'unité de la mécanique et de la physique semblait alors rompue.

Tout d'abord, en thermodynamique, le principe de Carnot-Clausius détermine un sens dans le déroulement des phénomènes : on ne peut, sans fournir un travail extérieur, faire passer de la chaleur d'un corps froid sur un corps chaud ; c'est là le premier fait qui ait ébranlé la mécanique classique :

« Dans l'hypothèse du mécanisme, tous les phénomènes doivent être *réversibles* ; par exemple les astres pourraient parcourir leurs orbites dans le sens rétrograde sans que la loi de Newton fût violée ; il en serait encore de même avec une loi d'attraction quelconque. Ce n'est donc pas là un fait particulier à l'astronomie, et la réversibilité est une conséquence nécessaire de toute hypothèse mécaniste.

L'expérience met au contraire en évidence une foule de phénomènes irréversibles. Par exemple, si l'on met en présence un corps chaud et un corps froid, le premier cédera de la chaleur au second, le phénomène inverse ne se produira jamais » (« Le Mécanisme et l'Expérience », *R.M.M.,* 1 [1893], 534-537 ; p. 534-535).

Du reste, dans le dernier chapitre de sa *Thermodynamique* — dont le titre nous intéresse :

« Réduction des principes de la thermodynamique aux principes généraux de la mécanique » —,

Poincaré montre que « le mécanisme est incompatible avec le théorème de Clausius » (*Th.,* XVIII).

Un peu plus tard, d'autres découvertes, principalement en électrodynamique, mirent en question, l'un après l'autre, le principe de relativité, le principe d'action et de réaction, le principe de conservation des masses et celui de la conservation de l'énergie (cf. *V.S.*, 132-140). Nous n'allons pas en exposer ici les détails.

Néanmoins, ce que dit Poincaré du principe de conservation des masses (ou principe de Lavoisier) nous importe : il nous permettra d'interpréter le rôle de la mécanique à l'égard de la physique et, du même coup, de nous introduire dans la conception de Poincaré des théories physiques. Voici un des exposés qu'en donne Poincaré :

« Ces molécules [des rayons cathodiques], étant électrisées, ne peuvent se déplacer sans ébranler l'éther ; pour les mettre en mouvement, il faut triompher d'une double inertie, de celle de la molécule elle-même et de celle de l'éther. La masse totale ou apparente que l'on mesure se compose donc de deux parties : la masse réelle ou mécanique de la molécule, et la masse électrodynamique représentant l'inertie de l'éther.

Les calculs d'Abraham et les expériences de Kauffman ont alors montré que la masse mécanique proprement dite est nulle et que la masse des électrons, ou au moins des électrons négatifs, est d'origine exclusivement électrodynamique [...] ; il n'y a pas d'autre masse que l'inertie électrodynamique ; mais dans ce cas la masse ne peut plus être constante, elle augmente avec la vitesse ; et même elle dépend de la direction [...] » (*V.S.*, 137 ; cf. de même *S.H.*, 284 ; *S.M.*, 222-223).

Comment Poincaré interprète-t-il ce fait scientifique ? Il le dit dans un article qu'il a dû juger important, puisqu'il l'a ajouté comme dernier chapitre à l'édition de 1907 de *La Science et l'Hypothèse*. Ce chapitre s'intitule « La Fin de la matière » et commence ainsi :

« L'une des découvertes les plus étonnantes que les physiciens aient annoncées dans ces dernières années, c'est que la matière n'existe pas [...]. L'attribut essentiel de la matière, c'est sa masse, son inertie. La masse est ce qui partout et toujours demeure constant, ce qui subsiste quand une transformation chimique a altéré toutes les qualités sensibles de la matière et semble en avoir fait un autre corps » (*S.H.*, 282 ; cf. de même *S.M.*, 224-229).

En quoi Poincaré « interprète »-t-il ? En doublant le concept scientifique de masse par la notion de matière. Or il s'agit de deux notions de nature différente.

En effet, la notion de matière permet un glissement insensible du concept de masse à la conception philosophique mécaniste qui l'accompagne traditionnellement : l'atomisme que l'on comprenait comme un matérialisme.

« [...] il n'en demeure pas moins que, parmi les théories physiques, il y en a qui sentent particulièrement le matérialisme, [...] et ce sont précisément celles qui sont le plus chères aux physiciens parce qu'elles tendent à tout simplifier, à tout rendre clair, à écarter le plus possible tout mystère. Ces théories sont celles qui se rattachent à l'atomisme et au mécanisme » (« Les Conceptions nouvelles de la matière [4] », 51).

« [...] le mécanisme sent le matérialisme ; mais les savants sont faits pour écarter les mystères, qu'ils finissent toujours, bien entendu, par retrouver un peu plus loin ; mais ils aiment tout de même mieux qu'ils soient plus loin ; et c'est ce qui fait que presque tous les savants, lors même que leurs convictions philosophiques personnelles étaient très éloignées du matérialisme, ont toujours eu un faible pour les explications mécanistes » (*ibid.*, 52-53).

Passage de masse à matière, de matérialisme à mécanisme ; l'effet en est surprenant : il détermine le rôle de la mécanique à l'égard de la physique — elle n'est pas seulement un langage possible pour beaucoup de phénomènes physiques, mais elle en est l'interprétation philosophique.

« Pour démontrer la possibilité d'une explication mécanique de l'électricité, nous n'avons pas à nous préoccuper de trouver cette explication elle-même, il nous suffit de connaître l'expression des deux fonctions T et U, qui sont les deux parties de l'énergie, de former avec ces deux fonctions les équations de Lagrange et de comparer ensuite ces équations avec les lois expérimentales.

Entre toutes ces explications possibles, comment faire un choix pour lequel le secours de l'expérience nous fait défaut ? Un jour viendra peut-être où les physiciens se désintéresseront de ces questions, inaccessibles aux méthodes positives, et les abandonneront aux métaphysiciens. Ce jour n'est pas venu ; l'homme ne se résigne pas si aisément à ignorer éternellement le fond des choses » (*S.H.*, 258).

« Tel philosophe prétend que toute la physique s'explique par les chocs mutuels des atomes. S'il veut dire simplement qu'il y a entre les phénomènes physiques les mêmes rapports qu'entre les chocs mutuels d'un grand nombre de billes, rien de mieux, cela est vérifiable, cela est peut-être vrai. Mais il veut dire quelque chose de plus ; et nous croyons le comprendre parce que nous croyons savoir ce que c'est que le choc en soi ; pourquoi ? Tout simplement parce que nous avons vu souvent des parties

4. Cette conférence date de 1912 ; tout l'exposé est intéressant à ce point de vue.

de billard. Entendrons-nous que Dieu, en contemplant son œuvre, éprouve les mêmes sensations que nous en présence d'un match de billard ? [...]

Les hypothèses de ce genre n'ont donc qu'un sens métaphorique. Le savant ne doit pas plus se les interdire, que le poète ne s'interdit les métaphores ; mais il doit savoir ce qu'elles valent. Elles peuvent être utiles pour donner une satisfaction à l'esprit, et elles ne seront pas nuisibles pourvu qu'elles ne soient que des hypothèses indifférentes » (*S.H.*, 193).

Le jeu de mots mécanique-mécanisme révèle le rôle philosophique de la discipline à l'égard de la physique ; la mécanique est un corps de doctrine bien établi, le mécanisme la philosophie qui accompagne traditionnellement la physique.

Nous pouvons alors comprendre ce que Poincaré appelle « crise » (*V.S.*, 123, 128) ; ce n'est pas une crise interne à la physique, mais une interprétation philosophique du fait que le mécanisme n'est plus et ne peut plus être la philosophie adaptée aux nouveaux développements de la physique. Mais, au vu des ambiguïtés entre concepts mécaniques et notions philosophiques, on comprend que Poincaré ait interprété les découvertes comme déterminant une crise intrascientifique. Cette interprétation n'est pas neutre : elle détermine l'attitude de Poincaré à l'égard de la physique contemporaine : les faits nouveaux sont d'abord comparés aux données existantes de la mécanique avant d'être conçus comme développements scientifiques autonomes. Il y a là intervention philosophique en sciences.

Voyons ce que dit Poincaré lui-même. D'une part, il affirme qu'il est possible que la physique prenne une allure nouvelle :

« Dans quel sens allons-nous nous étendre, nous ne pouvons le prévoir ; peut-être est-ce la théorie cinétique des gaz qui va prendre du développement et servir de modèles aux autres. [...] La loi physique alors prendrait un aspect entièrement nouveau ; ce ne serait plus seulement une équation différentielle, elle prendrait le caractère d'une loi statistique.

Peut-être aussi devrons-nous construire toute une mécanique nouvelle que nous ne faisons qu'entrevoir, où, l'inertie croissant avec la vitesse, la vitesse de la lumière deviendrait une limite infranchissable. La mécanique vulgaire, plus simple, resterait une première approximation puisqu'elle serait vraie pour les vitesses qui ne seraient pas très grandes, de sorte qu'on retrouverait encore l'ancienne dynamique sous la nouvelle » (*V.S.*, 147).

Mais Poincaré s'empresse d'ajouter :

« Je me hâte de dire, pour terminer, que nous n'en sommes pas là et que rien ne prouve encore qu'ils [les principes de la mécanique] ne sortiront pas de la lutte victorieux et intacts » (*V.S.*, 147).

C'est là l'expression de sa position fondamentale : il faut « sauvegarder », tant qu'il est possible, les principes de la mécanique.

« En présence de cette débâcle générale des principes, quelle attitude va prendre la physique mathématique ? Et, d'abord, avant de trop s'émouvoir il convient de se demander si tout cela est bien vrai. Toutes ces dérogations aux principes, on ne les rencontre que dans les infiniment petits ; il faut le microscope pour voir le mouvement brownien ; les électrons sont bien légers ; le radium est bien rare et on n'en a jamais que quelques milligrammes à la fois ; et alors on peut se demander si, à côté de l'infiniment petit qu'on a vu, il n'y avait pas un autre infiniment petit qu'on ne voyait pas et qui faisait contrepoids au premier.

Il y a donc là une question préjudicielle, et à ce qu'il semble l'expérience seule peut la résoudre » (*V.S.*, 141).

« Peut-être s'est-on trop hâté de considérer ces nouveautés comme définitivement établies et de briser nos idoles d'hier ; peut-être conviendrait-il, avant de prendre parti, d'attendre des expériences plus nombreuses et plus probantes » (*S.M.*, 215-216).

« Attendre des expériences plus nombreuses et plus probantes », n'est-ce pas là paradoxal puisque tout principe mécanique est une convention dont « nous sommes certains d'avance qu'aucune expérience ne viendra la contredire » (*S.H.*, 163) ? Pour résoudre cette apparente contradiction, reprenons notre analyse de la convention selon Poincaré et examinons de plus près son rapport aux faits.

« Quand une loi a reçu une confirmation suffisante de l'expérience, nous pouvons adopter deux attitudes, ou bien laisser cette loi dans la mêlée ; elle restera soumise alors à une incessante révision qui sans aucun doute finira par démontrer qu'elle n'est qu'approximative. Ou bien on peut l'ériger en *principe*, en adoptant des conventions telles que la proposition soit certainement vraie » (*V.S.*, 165).

Ainsi, la condition nécessaire pour poser une proposition comme convention est — paradoxalement — sa confirmation par l'expérience. Il n'y a qu'une convention qui fasse exception, c'est la décomposition — conventionnelle — d'un phénomène global en un principe et une loi : elle est un simple procédé ; mais les principes conventionnels par suite de cette décomposition doivent toujours, pour être commodes, être représentatifs d'un état de fait. Si les liens entre conventions et expérience sont trop lâches, les conventions sont inutiles : elles ne permettent pas de prédire quoi que ce soit. En ce sens, l'expérience, qui ne peut contredire directement une convention, est néanmoins le critère de son utilité.

« Prenons par exemple l'expérience calorimétrique de Curie sur le radium. Est-il possible de la concilier avec le principe de la conservation de l'énergie ? On l'a tenté de bien des manières ; mais il y en a une entre autres que je voudrais vous faire remarquer ; ce n'est pas l'explication qui tend aujourd'hui à prévaloir, mais c'est une de celles qui ont été proposées. On a supposé que le radium n'était qu'un intermédiaire, qu'il ne faisait qu'emmagasiner des radiations de nature inconnue qui sillonnaient l'espace dans tous les sens, en traversant tous les corps, sauf le radium, sans être altérées par ce passage et sans exercer sur eux aucune action. Le radium seul prendrait un peu de leur énergie et il nous la rendrait ensuite sous diverses formes.

Quelle explication avantageuse et combien elle est commode ! D'abord elle est invérifiable et par là même irréfutable. Ensuite elle peut servir pour rendre compte de n'importe quelle dérogation au principe de Mayer [conservation de l'énergie] ; elle répond d'avance non seulement à l'objection de Curie, mais à toutes les objections que les expérimentateurs futurs pourraient accumuler. Cette énergie nouvelle et inconnue pourra servir à tout.

[...]

Et après, qu'avons-nous gagné à ce coup de pouce ? Le principe est intact, mais à quoi désormais peut-il servir ? Il nous permettait de prévoir que dans telle ou telle circonstance nous pouvions compter sur telle quantité totale d'énergie ; il nous limitait ; mais, maintenant qu'on met à notre disposition cette provision indéfinie d'énergie nouvelle, nous ne sommes plus limités par rien ; et [...] si un principe cesse d'être fécond, l'expérience, sans le contredire directement, l'aura cependant condamné » (*V.S.*, 145-146 ; cf., de même, *S.H.*, 196).

Ce texte confirme ce que nous avons dit à propos de la géométrie : la convention n'est pas tant une caractéristique interne d'une théorie que son rapport à l'expérience ; elle indique toujours la possibilité d'une application au réel — et cela est vrai pour toute science ayant quelque rapport à l'expérience. En d'autres termes, la convention est le lien — philosophique — entre LA science et LA réalité, entre l'esprit et l'expérience,

« [...] une sorte de cote mal taillée entre notre amour de la simplicité et notre désir de ne pas trop nous écarter de ce que nous apprennent nos instruments » (*D.P.*, 101) ;

la convention est, en dernière analyse, ce qui permet à l'esprit de penser l'expérience. Aussi l'expérience est-elle bien comprise comme instance : elle n'est pas spécifiée par rapport à une théorie particulière, ou, plus exactement, elle n'est pas déterminée par elle : science et expérience ne sont pensées ensemble que par un intermédiaire philosophique. Ainsi, dire que, pour Poincaré, géométrie et mécanique sont conventionnelles n'a pas de sens : ce qui est conventionnel, c'est leur relation philosophique au réel. Reste à savoir ce qu'est le réel. Nous allons le voir en examinant les idées de Poincaré sur la physique.

C. La physique

Au cours des chapitres précédents, nous avons dû faire de nombreuses allusions aux conceptions de Poincaré sur la physique. Afin d'éviter de longues redites, nous allons partir d'elles et procéder systématiquement en nous basant principalement sur les textes de *La Science et l'Hypothèse* et *La Valeur de la science.*

Nous savons que, pour Poincaré, toute science est avant tout un langage (cf. « Mathématiques et langage ») ; que ce langage est une classification conventionnelle d'éléments qui lui sont essentiellement hétérogènes ; que son sens est l'effet uniquement de ce qu'il classifie ; que ce qu'il classifie lui est donné soit *a priori* dans une intuition intellectuelle — c'est alors une notion dont la source est l'instance esprit de l'espace philosophique —, soit *a posteriori* par les sens — c'est alors un fait qui se réfère à l'instance expérience de la configuration. Bref, nous savons que syntaxe et sémantique sont radicalement distinctes.

Avec la physique, nous entrons dans le domaine où langage et expérience s'affrontent sans détour; la perspective générale alors se renverse : l'expérience n'est plus une simple occasion pour une notion non expérimentale ou la garantie du caractère naturel d'une convention, elle est ce vers quoi tout le discours converge. « L'expérience est la source unique de la vérité : elle seule peut nous apprendre quelque chose de nouveau ; elle seule peut nous donner la certitude » (*S.H.*, 167). C'est d'elle que nous devons partir : sans elle, le discours de la physique n'a aucun sens.

Quelle est donc la nature des faits que nous livre l'expérience ? A ce sujet, Poincaré est catégorique : l'expérience ne porte pas sur les choses, mais sur leurs rapports.

« [...] ce qu'elle peut atteindre, ce ne sont pas les choses elles-mêmes, comme le pensent les dogmatistes naïfs, ce sont seulement les rapports entre les choses ; en dehors de ces rapports, il n'y a pas de réalité connaissable » (*S.H.*, 4).

Aussi

« les objets extérieurs [...], pour lesquels le mot *objet* a été inventé, sont justement des *objets* et non des apparences fuyantes et insaisissables parce que ce ne sont pas seulement des groupes de sensations, mais des groupes cimentés par un lien constant. C'est ce lien, et ce lien seul, qui est objet en eux, et ce lien c'est un rapport » (*V.S.*, 181).

Cela est d'autant plus vrai que les faits scientifiques — rappelons-le — n'existent qu'exprimés dans un langage ; or un langage, comme classification, est un système de relations : en tant que tel, il ne peut exprimer que des rapports ; ainsi

« [...] non seulement la science ne peut nous faire connaître la nature des choses, mais rien n'est capable de nous la faire connaître et si quelque dieu la connaissait, il ne pourrait trouver de mots pour l'exprimer » (*V.S.*, 181).

Nous comprenons alors mieux comment un fait peut donner lieu à une loi : le rapport exprimé par la loi est en quelque sorte lisible dans le fait ; la syntaxe se trouve déjà induite par la sémantique, ce qui permet au langage de s'approprier des faits — mais l'inverse n'est jamais vrai.

La physique est alors définie par un domaine — immense — de rapports réels (vérifiés) ou probables (prévus). Il s'agit donc maintenant de se demander quel est le langage de la physique.

Poincaré pose cette question sous une forme qui nous paraît extrêmement curieuse : il transporte l'opposition du langage et du fait au couple physique mathématique-physique expérimentale :

« [...] si l'expérience est tout, quelle place restera-t-il pour la physique mathématique ? Qu'est-ce que la physique expérimentale a à faire d'un tel auxiliaire qui semble inutile et peut-être même dangereux ?

Et pourtant la physique mathématique existe ; elle a rendu des services indéniables ; il y a là un fait qu'il est nécessaire d'expliquer » (*S.H.*, 167).

Ainsi le langage physique est mathématique ; ce fait n'est pas dû à des raisons strictement théoriques, car aucun langage n'a par lui-même de valeur de vérité ; il s'explique par des motifs qui, en dernière analyse, sont d'ordre psychologique. Le langage mathématique est une symbolique susceptible de concentrer en un nombre fini de mots une infinité de vérités ; aussi un tel langage, appliqué à la physique, permet-il de rendre compte en peu d'étapes d'un grand nombre de rapports réels : son usage peut ainsi « économiser » de la pensée, « augmenter le rendement de la machine scientifique » (*S.H.*, 171). Cet usage est possible par le fait que tout phénomène complexe global de la physique peut être décomposé en un très grand nombre de phénomènes élémentaires que l'on peut considérer comme semblables entre eux.

« [...] le phénomène observable est dû à la superposition d'un grand nombre de phénomènes élémentaires *tous semblables entre eux* ; ainsi s'introduisent tout naturellement les équations différentielles.

Il ne suffit pas que chaque phénomène élémentaire obéisse à des lois simples, il faut que tous ceux que l'on a à combiner obéissent à la même loi. C'est alors seulement que l'intervention des mathématiques peut être utile ; les mathématiques nous apprennent, en effet, à combiner le semblable au semblable. Leur but est de deviner le résultat d'une combinaison, sans avoir besoin de refaire cette combinaison pièce à pièce. Si l'on a à répéter plusieurs fois une même opération, elles nous permettent d'éviter cette répétition en nous faisant connaître d'avance le résultat par une sorte d'induction » (*S.H.*, 187 ; cf. § « Mathématiques et Logique »).

Ainsi la perspective s'est bel et bien renversée : dans les sciences non appliquées, l'expérience guide le choix parmi les possibles et suscite la construction de systèmes de symboles ; dans les sciences expérimentales, le langage des sciences non expérimentales guide l'élaboration théorique de l'expérience.

« Tel est donc le rôle de la physique mathématique ; elle doit guider la généralisation de façon à augmenter [...] le rendement de la science » (*S.H.*, 172).

Mais le passage des sciences non expérimentales aux sciences expérimentales, c'est-à-dire des sciences déductives aux sciences inductives, n'implique pas seulement l'échange des fonctions de source ou de guide des instances esprit et expérience : il exige aussi — pour des raisons d'ordre philosophique — une véritable adjonction théorique. En effet, en physique, l'existence n'est plus une simple absence de contradiction, mais une existence objective (*S.M.*, 186) qui porte en elle vérité et certitude ; par rapport au fait, le langage n'est alors qu'hypothétique parce que toujours il généralise (cf. § « Mathématiques et Langage ») ; les relations qu'il exprime ne sont que probables. Aussi le passage des mathématiques à la physique ne peut-il s'effectuer que par l'introduction du calcul des probabilités : « condamner ce calcul, ce serait condamner la science tout entière » (*S.H.*, 217), « ce serait la science tout entière dont la légitimité serait révoquée en doute » (*S.H.*, 218). Entendons : toute la science expérimentale.

Nous pouvons alors définir la physique comme l'ensemble des rapports qui lient un langage hypothétique à des rapports réels :

« [...] l'objet de cette science [la physique mathématique] est précisément de vérifier les hypothèses en en tirant des conséquences susceptibles d'être contrôlées par l'expérience » (*Th.*, XVIII).

Il convient alors de nous demander quels sont les types d'hypothèses propres à la physique.

Poincaré en distingue trois catégories. Les premières sont celles qu'il appelle « toutes naturelles » ; elles sont d'une certaine manière les conditions de la physique : sans elles, son langage serait d'une complication extrême.

« Il y a d'abord celles qui sont toutes naturelles et auxquelles on ne peut guère se soustraire. Il est difficile de ne pas supposer que l'influence des corps très éloignés est tout à fait négligeable, que les petits mouvements obéissent à une loi linéaire, que l'effet est une fonction continue de sa cause. J'en dirai autant des conditions imposées par la symétrie. Toutes ces hypothèses forment pour ainsi dire le fonds commun de toutes les théories de la physique mathématique. Ce sont les dernières que l'on doit abandonner » (*S.H.*, 180).

Nous n'allons pas nous arrêter à l'étude de ces hypothèses : elles jouent un rôle analogue aux conventions nécessitées par la mesure.

En second lieu — nous l'avons vu —, les généralisations sont aussi des hypothèses : ce sont elles qui opèrent le passage de fait à loi ; passage qui, en physique, prend une forme particulière, celle de l'interpolation :

« [...] l'expérience ne nous donne qu'un certain nombre de points isolés, il faut les réunir par un trait continu ; c'est là une véritable généralisation. Mais on fait plus, la courbe que l'on tracera passera entre les points observés et près de ces points ; elle ne passera pas par ces points eux-mêmes. Ainsi on ne se borne pas à généraliser l'expérience, on la corrige ; et le physicien qui voudrait s'abstenir de ces corrections et se contenter vraiment de l'expérience toute nue serait forcé d'énoncer des lois bien extraordinaires » (*S.H.*, 169-170).

Ces lois seraient en effet « bien extraordinaires », car elles ne seraient plus qu'une transcription de rapports isolés : la prévision de faits analogues ne serait plus possible.

Mais, contrairement aux hypothèses dites « toutes naturelles », les généralisations ne sont justifiées que dans un domaine limité : elles doivent garder un rapport explicite avec les expériences qui les ont suscitées ; bref, pour reprendre un terme fréquent sous la plume de Poincaré, elles doivent rester « objectives », sans quoi elles ne sont plus qu'un langage dépourvu de sens.

« [...] ce que les principes gagnent en généralité et en certitude, ils le perdent en objectivité » (*S.H.*, 165).

Poincaré a analysé à plusieurs reprises la perte de sens d'une loi ou d'une définition trop généralisée, en particulier dans un texte célèbre à propos du principe de la conservation de l'énergie (ou principe de Mayer).

« Dans chaque cas particulier, on voit bien ce que c'est que l'énergie et on en peut donner une définition au moins provisoire ; mais il est impossible d'en trouver une définition générale.

Si l'on veut énoncer le principe dans toute sa généralité et en l'appliquant à l'univers, on le voit pour ainsi dire s'évanouir et il ne reste plus que ceci : *il y a quelque chose qui demeure constant.*

[...]

[...] pour employer le langage ordinaire, la loi de la conservation de l'énergie ne peut avoir qu'une signification, c'est qu'il y a une propriété commune à tous les possibles ; mais dans l'hypothèse déterministe il n'y a qu'un seul possible, et alors la loi n'a plus de sens.

Dans l'hypothèse indéterministe, au contraire, elle en prendrait un, même si on voulait l'entendre dans un sens absolu ; elle apparaîtrait comme une limite imposée à la liberté.

Mais ce mot m'avertit que je m'égare et que je vais sortir du domaine des mathématiques et de la physique. Je m'arrête donc et je ne veux retenir de toute cette discussion qu'une impression, c'est que la loi de Mayer est une forme assez souple pour qu'on puisse y faire rentrer presque tout ce que l'on veut. Je ne veux pas dire par là qu'elle ne correspond à aucune réalité objective ni qu'elle se réduise à une simple tautologie, puisque, dans chaque cas particulier, et pourvu qu'on ne veuille pas pousser jusqu'à l'absolu, elle a un sens parfaitement clair » (préf. de *Th.* ; repris dans *S.H.*, 158 et 161).

Ce texte confirme notre interprétation générale : la physique ne peut être déduite d'une conception générale de l'univers ; elle est toujours induite de faits observables auxquels le langage nous renvoie sans cesse. C'est là ce que nous pourrions appeler l'inductivisme de Poincaré.

Restent les hypothèses de la troisième catégorie ; ce sont celles qui nous intéressent le plus : elles nous permettront de mesurer jusque dans ses conséquences la conception de Poincaré des rapports du langage à l'expérience.

Ces hypothèses, ce sont celles que Poincaré qualifie d' « indifférentes » :

« Dans la plupart des questions, l'analyste suppose, au début de son calcul, soit que la matière est continue, soit, inversement, qu'elle est formée d'atomes. Il aurait fait le contraire que ses résultats n'en auraient pas été changés ; il aurait eu plus de peine à les obtenir, voilà tout. Si alors l'expérience confirme ses conclusions, pensera-t-il avoir démontré, par exemple, l'existence réelle des atomes ? » (*S.H.*, 180.)

Or ces hypothèses — dont est le mécanisme, comme le montre le texte cité — recouvrent assez exactement le domaine de ce que Poincaré appelle les théories physiques.

Qu'est-ce qu'une théorie ? Voilà enfin la question que, dès le début de notre étude, nous cherchions à poser, et que Poincaré avait constamment éludée.

« Les théories sont des auxiliaires indispensables de la science, mais ce sont des auxiliaires tyranniques contre lesquels il faut savoir se défendre ; celui qui subirait leur empire sans réagir ne serait plus capable d'un examen vraiment libre ; il se mettrait à lui-même des œillères, et cependant on ne saurait se passer d'elles » (*D.P.*, 206).

Ce texte définit à la fois le rôle et le rapport à l'expérience des théories. Tout d'abord, leur rôle :

« Elles peuvent être utiles, soit comme artifices de calcul, soit pour soutenir notre entendement par des images concrètes, pour fixer les idées, comme on dit » (*S.H.*, 181).

Mais surtout, et c'est en cela qu'elles sont indispensables, elles coordonnent entre elles les généralisations et par suite donnent une image d'ensemble de la science physique ; sans elles, on perd de vue le but de la science.

« Les théories mathématiques n'ont pas pour objet de nous révéler la véritable nature des choses ; ce serait là une prétention déraisonnable. Leur but unique est de coordonner les lois physiques que l'expérience nous fait connaître, mais que sans le secours des mathématiques nous ne pourrions même énoncer » (*Théorie mathématique de la lumière,* préf., I ; reproduit dans *S.H.*, 245).

Or « le vrai, le seul but, c'est l'unité » (*S.H.*, 207).

Néanmoins, les théories ne sont que des auxiliaires, des hypothèses classifiant des hypothèses, à l'égard desquelles les faits sont indépendants — c'est pourquoi elles sont aussi tyranniques : elles imposent une interprétation là où une infinité d'autres seraient possibles. Il est donc nécessaire d'en revenir toujours au fait ; c'est ce qu'entend Poincaré lorsqu'il dit que l'on « débarrasse la voûte de ses cintres » (*Th.*, XIV ; *V.S.*, 36-37 ; *S.M.*, 134) : une prévision réalisée dans une expérience n'est pas seulement la vérification d'une conséquence de la théorie, mais, bien plus, la démonstration expérimentale d'une loi ; on peut alors faire abstraction de la théorie qui a guidé l'expérience au cas où elle paraîtrait douteuse. C'est ainsi que Poincaré interprète l'histoire des théories :

« L'hypothèse des forces centrales contenait tous les principes ; elle les entraînait comme des conséquences nécessaires ; elle entraînait et la conservation de l'énergie, et celle des masses, et l'égalité de l'action et de la réaction, et la loi de moindre action, qui apparaissaient, il est vrai, non comme des vérités expérimentales, mais comme des théorèmes ; et dont l'énoncé avait en même temps je ne sais quoi de plus précis et de moins général que sous leur forme actuelle.

C'est la physique mathématique de nos pères qui nous a familiarisés peu à peu avec ces divers principes, qui nous a habitués à les reconnaître sous les différents vêtements dont ils se déguisent. On les a comparés aux données de l'expérience, on a vu comment il fallait en modifier l'énoncé pour les adapter à ces données ; par là on les a élargis et consolidés. On a été conduit ainsi à les regarder comme des vérités expérimentales ; la conception des forces centrales devenait alors un soutien inutile, ou plutôt une gêne, puisqu'elle faisait participer les principes de son caractère hypothétique » (*V.S.*, 128).

Comparons avec cet autre texte, assez semblable :

« La marche que nous venons de suivre dans l'exposé du principe de l'équivalence est conforme au développement historique de la théorie thermodynamique ; mais elle ne saurait nous satisfaire aujourd'hui, car elle offre le grave inconvénient de faire reposer la démonstration de ce principe sur l'hypothèse que les forces moléculaires sont centrales. Or rien ne nous prouve que cette hypothèse soit exacte, puisque nous ne pouvons en contrôler la justesse que par l'exactitude de conséquences éloignées qui, peut-être, pourraient tout aussi bien résulter d'une hypothèse toute différente sur la nature des forces moléculaires. Aussi est-il préférable d'abandonner la marche historique et de considérer les expériences précédentes non comme une *vérification* d'un principe démontré, mais, au contraire, comme la *démonstration expérimentale* du principe de l'équivalence. Cette manière d'envisager ce principe, aujourd'hui généralement adoptée, présente l'avantage de ne faire aucune hypothèse sur la constitution moléculaire des corps » (*Th.*, 68-69).
Ce dernier texte est tiré d'un ouvrage de physique : *La Thermodynamique* (p. 68-69).

Ainsi, strictement parlant, il ne peut y avoir de désaccord concernant des faits vérifiés, mais seulement sur leur interprétation, sur la théorie choisie pour en rendre compte ; or ce choix ne peut être déterminé par l'expérience ; la théorie la plus vraie sera alors la plus « commode » : celle qui mettra en évidence le plus de rapports réels. C'est ce que Poincaré a montré à plusieurs reprises à propos de la rotation de la terre : elle n'est pas un fait, car sa vérification supposerait l'existence de l'espace absolu, ce qui, pour Poincaré, est absurde, l'espace étant essentiellement relatif :

« [...] ces deux propositions contradictoires : " la terre tourne " et " la terre ne tourne pas " ne sont donc pas cinématiquement plus vraies l'une que l'autre. Affirmer l'une, en niant l'autre, *au sens cinématique*, ce serait admettre l'existence de l'espace absolu » (*V.S.*, 185).

Aussi ces deux propositions indiquent-elles des positions théoriques différentes, et c'est en tant que telles que Poincaré les traite :

« [...] si l'une nous révèle des rapports vrais que l'autre nous dissimule, on pourra néanmoins la regarder comme physiquement plus vraie que l'autre, puisqu'elle a un contenu plus riche. Or à cet égard aucun doute n'est possible.

Voilà le mouvement diurne apparent des étoiles, et le mouvement diurne des autres corps célestes, et d'autre part l'aplatissement de la terre, la rotation du pendule de Foucault, la giration des cyclones, les vents alizés, que sais-je encore ? Pour le ptoléméien, tous ces phénomènes n'ont entre eux aucun lien ; pour le copernicien, ils sont engendrés par une même cause. En disant la terre tourne, j'affirme que tous ces phénomènes ont un rapport intime, et *cela est vrai* [...] » (*V.S.*, 185).

Par conséquent :

« [...] ces deux propositions : " la terre tourne " et " il est commode de supposer que la terre tourne " ont un seul et même sens ; il n'y a rien de plus dans l'une que dans l'autre » (*S.H.*, 141 ; cité dans *V.S.*, 184).

« Mais il y a mieux : dans le même langage, on dira très bien : ces deux propositions le monde extérieur existe, ou il est plus commode de supposer qu'il existe — ont un seul et même sens. Ainsi l'hypothèse de la rotation de la terre conserverait le même degré de certitude que l'existence même des objets extérieurs » (*V.S.*, 184).

Citations très instructives à notre point de vue, car elles définissent très exactement, l' « objet » des théories physiques : une réalité — hypothétique — car non accessible à l'expérience. De nouveau, nous voyons que Poincaré ne définit pas la théorie par ses caractéristiques internes : elle est soit rapportée à des faits, soit, parce qu'elle ne peut les épuiser, référée à une réalité. Mais quelle réalité, et quels rapports la théorie entretient-elle avec elle ?

Lisons encore un texte de Poincaré — un parmi bien d'autres : nous touchons là à un des leitmotive de la philosophie physique de Poincaré. Les théories (ici de Fresnel et de Maxwell)

« [...] nous apprennent, après comme avant, qu'il y a tel rapport entre quelque chose et quelque autre chose ; seulement, ce quelque chose nous l'appelions autrefois *mouvement*, nous l'appelons maintenant *courant électrique*. Mais ces appellations n'étaient que des images substituées aux objets réels que la nature nous cachera éternellement. Les rapports véritables entre ces objets réels sont la seule réalité que nous puissions atteindre, et la seule condition, c'est qu'il y ait les mêmes rapports entre ces objets qu'entre les images que nous sommes forcés de mettre à leur place. Si ces rapports nous sont connus, qu'importe si nous jugeons commode de remplacer une image par une autre.

Que tel phénomène périodique (une oscillation électrique, par exemple) soit réellement dû à la vibration de tel atome qui, se comportant comme un pendule, se déplace véritablement dans tel ou tel sens, voilà qui n'est ni certain ni intéressant. Mais qu'il y ait entre l'oscillation électrique, le mouvement du pendule et tous les phénomènes périodiques une parenté intime qui correspond à une réalité profonde ; que cette parenté, cette similitude, ou plutôt ce parallélisme se poursuive dans le détail ; qu'elle soit une conséquence de principes plus généraux, celui de l'énergie et celui de la moindre action ; voilà ce que nous pouvons affirmer ; voilà la vérité qui restera toujours la même sous tous les costumes dont nous pourrons juger bon de l'affubler » (*S.H.*, 190-191).

Ce texte nous apprend que deux théories — même contradictoires (cf. *S.H.*, 192) — ne sont pas exclusives ; que l'histoire des théories n'est pas celle des rapports réels qui restent invariants d'une théorie à l'autre. Mais, ce qui nous intéresse ici, c'est que Poincaré pose l'existence d'une réalité inconnaissable dont la théorie est l'image ou le « costume » ; réalité inaccessible aux « méthodes positives » (*S.H.*, 258) et que, comme telle, Poincaré présente comme métaphysique (*S.H.*, 246, 258). Aussi Poincaré distingue-t-il monde donné et monde réel :

« [...] le monde donné est un continu physique, et les savants supposent que le monde réel est un continu mathématique, mais quelques métaphysiciens ont préféré admettre que le monde est discontinu » (*D.P.*, 190).

Le monde donné est objet de la physique, le monde réel celui de la métaphysique : ce sont deux mondes distincts qui n'interfèrent pas.

Monde exclu de la physique ; curieusement, cette exclusion n'en laisse pas moins des traces : l'absence du monde réel dans la physique indique la présence même d'une limite qui lui est imposée du dehors ; cette limite détermine la nature du langage théorique : il est dit, par rapport à cette réalité, métaphorique (*S.H.*, 193). La théorie parle alors *comme si* les réalités qu'elles invoquent existaient réellement :

« Peu nous importe que l'éther existe réellement, c'est l'affaire des métaphysiciens ; l'essentiel pour nous c'est que tout se passe comme s'il existait et que cette hypothèse est commode pour l'explication des phénomènes. Après tout, avons-nous d'autre raison de croire à l'existence des objets matériels ? Ce n'est là aussi qu'une hypothèse commode ; seulement, elle ne cessera jamais de l'être, tandis qu'un jour viendra sans doute où l'éther sera rejeté comme inutile » (*S.H.*, 245-246).

« Nous trouverons que les variations de cette masse, ou de ces accélérations, doivent se passer *comme si* l'électron subissait la déformation de Lorentz » (*S.M.*, 247).

Philosophie de la géométrie et philosophie de la physique : elles sont toutes deux des philosophies du « comme si » ; en géométrie, le « comme si » trace une délimitation à l'intérieur de la configuration de l'espace philosophique : le langage géométrique est alors conventionnel ; en physique, le « comme si » sépare les sciences situées dans l'espace philosophique d'un monde inconnaissable : le langage physique est alors métaphorique. Nous pouvons donc définir la théorie comme métaphore d'une réalité métaphysique.

La conséqnence en est tout à fait étonnante ; si l'on suit les idées de Poincaré, rien ne distingue une théorie physique d'un discours métaphysique, sinon la lecture qu'on en fait : prise à la lettre, une théorie physique est métaphysique ; lue comme métaphore, elle reste hypothèse d'une science expérimentale (cf. *S.H.*, 193, 246, 258). Une curieuse conséquence en est du reste visible dans la facture même du texte de Poincaré : abstraction faite de l'usage des mathématiques, les exposés philosophiques sur la physique et, par exemple, l'ouvrage de physique *Thermodynamique* se ressemblent par endroits étrangement ; nous pourrions mettre bien des textes en parallèle dont la provenance serait difficile à discerner (cf. ci-dessus, p. 78, 79). Disons que les textes philosophiques sont en général plus discontinus, car ils visent souvent à illustrer une thèse philosophique par des exemples tirés de la physique. Remarquons aussi qu'alors que Poincaré ne fait pas de vulgarisation — ou fort peu — des théories mathématiques il lui est arrivé plusieurs fois de vulgariser des théories physiques (cf. par exemple toute la fin de *Science et Méthode*, dès la page 245) ; peut-être l'analogie entre discours philosophique et physique rendait-elle la vulgarisation plus facile. Notre interprétation semble confirmer celle d'un physicien : « Poincaré's physics is a reflection of his philosophy[5]. »

Le problème qui se pose est alors de bien discerner le domaine de la physique ; bref, de connaître exactement le lieu du « comme si ». Ce rôle, c'est celui de l'expérience qui seule peut dire : ceci est observable — ou ne l'est pas. L'expérience apparaît alors comme une critique du langage : elle est sa limite, ce qui en lui reste invariant (cf. *V.S.*, 170) ; mais, du même coup, elle trace une autre limite, celle qui sépare monde donné et monde réel. Ce que nous avons dit dans notre paragraphe « Mathématiques et expérience » est confirmé : l'expérience est comprise comme source et critique de la théorie physique en général ; elle n'est jamais décrite — du moins dans les écrits philosophiques — comme procédure articulée à une théorie particulière qui en fixe les modalités. Ce dont Poincaré parle, c'est d'un face à face entre *la* théorie et *l*'expérience au singulier, le pluriel n'introduisant que des exemples destinés à illustrer les relations — philosophiques — de la théorie et de l'expérience. De nouveau, nous sommes renvoyés à la philosophie : les différences spécifiques (du moins dans les études philosophiques) sont effacées au profit du fait originaire.

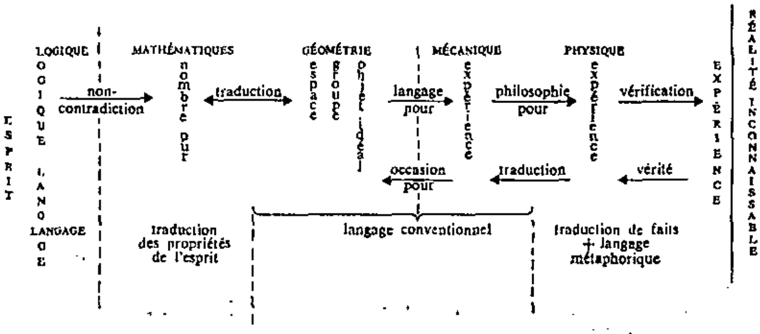
La position philosophique de Poincaré a-t-elle eu des effets

5. A. I. Miller, *Poincaré's dynamique de l'électron*, p. 209.

dans sa pratique de physicien ? Cette question, qui a fait couler beaucoup d'encre, s'est posée historiquement à propos de l'attitude de Poincaré à l'égard des travaux d'Einstein (qu'il cite ; cf. *D.P.*, 81). Pour des raisons évidentes, nous ne saurions nous-mêmes la résoudre. Disons seulement, que d'après A. I. Miller, l'adhésion à la théorie d'Einstein demande une philosophie autre que celle de Poincaré, ne reposant pas sur un inductivisme strict.

IV. La philosophie

Au début de notre étude, nous avons signalé que Poincaré, dans ses interventions, traite séparément mathématiques, géométrie, mécanique et physique; nous avons donc recherché les raisons, philosophiques ou scientifiques, de ces distinctions. Nous pouvons maintenant le dire : si Poincaré impose des limites aux sciences, c'est que — paradoxalement — il leur pose à toutes la même question, celle de leur origine ; en l'occurrence celle de leurs rapports à deux réalités de type philosophique : l'esprit et l'expérience. Nous avons ainsi été amenée à discerner, comme condition de cette question, un espace philosophique, et nous avons constaté pour chacune des sciences que la définir équivaut à la localiser dans cet espace. Nous voyons alors que cet espace induit une « topologie » des sciences qui détermine à la fois leur domaine et leurs relations réciproques :



La construction de la notion de science est donc, chez Poincaré, entièrement philosophique, même si nous pouvons invoquer des causes historiques expliquant la plupart de ses interventions : les problèmes théoriques posés par la conjoncture historique dans laquelle il se trouvait sont toujours résolus par les mêmes moyens philosophiques. Aussi peut-il parler indifféremment des sciences ou de *la* science en général (remarquons les titres de ses ouvrages).

Le point crucial d'une analyse de la philosophie de Poincaré se résume alors à la question de savoir si cette « topologie » coïncide avec sa philosophie ; bref, de savoir si elle recouvre le domaine que Poincaré réserve explicitement à la philosophie. Nous allons donc réunir ici quelques textes où il s'agit assez explicitement de philosophie.

1897 (à propos de philosophie des sciences) :

« Je ne veux pas engager une polémique qui, en pareille matière, serait forcément stérile ; il est aisé de comprendre pourquoi. Dans les études de ce genre, on s'efforce de s'affranchir du joug de certaines habitudes d'esprit ; on cherche à rompre quelques-unes des associations d'idées auxquelles nous sommes accoutumés.

L'idéal serait de les rompre toutes, mais il ne peut être atteint. S'il l'était, la pensée se trouverait en présence d'une poussière sur laquelle elle n'aurait plus aucune prise ; elle ne serait plus possible, et le serait-elle qu'on n'aurait plus de langage pour l'exprimer.

Qu'arrive-t-il alors ? Un auteur rompt telle association d'idées et conserve telle autre ; un second auteur fait le contraire. Dès lors, ils se sont interdit tout espoir de jamais se rencontrer. Ils travailleront plus utilement en poursuivant leur voie chacun de son côté qu'en cherchant une rencontre impossible » (« Réponse à quelques critiques », 59).

1908 :

« [...] notre science [mathématique] confine à la fois à la philosophie et à la physique [...]

[...] la science mathématique doit réfléchir sur elle-même et cela est utile, parce que réfléchir sur elle-même, c'est réfléchir sur l'esprit humain qui l'a créée, d'autant plus que c'est celle de ses créations pour laquelle il a fait le moins d'emprunts au-dehors » (*S.M.*, 31).

1909 :

« On se propose d'enseigner les mathématiques à un élève qui ne sait pas encore la différence qu'il y a entre l'infini et le fini ; on ne se hâte pas de lui apprendre en quoi consiste cette différence ; on commence par lui montrer tout ce qu'on peut savoir de l'infini sans se préoccuper de cette distinction ; puis dans une région écartée du champ qu'on lui a fait parcourir, on lui découvre un petit coin où se cachent les nombres finis.

Cela me paraît psychologiquement faux ; ce n'est pas ainsi que l'esprit humain procède naturellement, et quand même on devrait s'en tirer sans trop de mésaventures antinomiques, cela n'en serait pas moins une méthode contraire à toute saine psychologie.

M. Russell me dira sans doute qu'il ne s'agit pas de psychologie, mais de logique et d'épistémologie ; et moi, je serai conduit à répondre qu'il n'y a pas de logique et d'épistémologie indépendantes de la psychologie ; et cette profession de foi clora probablement la discussion parce qu'elle mettra en évidence une irrémédiable divergence de vues » (*D.P.*, 31).

1912 :

« [...] les savants des deux écoles ont des tendances mentales opposées ; ceux que j'ai appelés les pragmatistes [dont Poincaré] sont des idéalistes, les cantoriens sont des réalistes.

Il y a une chose qui nous confirmera dans cette manière de voir. Nous voyons que les cantoriens (qu'on me passe ce vocable commode bien que je veuille parler ici non des mathématiciens qui suivent la voie ouverte par Cantor, ni peut-être même des philosophes qui se réclament de lui, mais de ceux qui ont les mêmes tendances d'une façon indépendante), que les cantoriens, dis-je, parlent constamment d'épistémologie, c'est-à-dire de la science des sciences ; et il est bien entendu que cette épistémologie est tout à fait indépendante de la psychologie ; c'est-à-dire qu'elle doit nous apprendre ce que seraient les sciences s'il n'y avait pas de savants ; que nous devons étudier les sciences non sans doute en supposant qu'il n'y a pas de savants, mais du moins sans supposer qu'il y en a. Ainsi non seulement la nature est une réalité indépendante du physicien qui pourrait être tenté de l'étudier, mais la physique elle-même est aussi une réalité qui subsisterait s'il n'y avait pas de physiciens. C'est bien là du réalisme.

Et pourquoi les pragmatistes refusent-ils d'admettre des objets qui ne pourraient être définis par un nombre fini de mots ? C'est parce qu'ils considèrent qu'un objet n'existe que quand il est pensé, et qu'on ne saurait concevoir un objet pensé indépendamment d'un sujet pensant. C'est bien là de l'idéalisme. Et comme un sujet pensant c'est un homme, ou quelque chose qui ressemble à l'homme, que c'est par conséquent un être fini, l'infini ne peut avoir d'autre sens que la possibilité de créer autant d'objets finis qu'on le veut » (*D.P.*, 93-94).

1912 :

« [...] nous ne sommes pas près de voir finir la lutte entre les deux façons de penser, celle des atomistes, qui croient à l'existence d'éléments ultimes, dont les combinaisons en nombre fini, mais très grand, suffiraient pour expliquer les aspects variés de l'univers, celle des partisans du continu et de l'infini. Cette lutte durera tant qu'on fera de la science, tant que l'humanité pensera, parce qu'elle est due à l'opposition de deux besoins inconciliables de l'esprit humain, dont cet esprit ne saurait se dépouiller sans cesser d'être ; celui de comprendre et nous ne pouvons comprendre que le fini et celui de voir, et nous ne pouvons voir que l'étendue qui est infinie » (« Les Conceptions nouvelles de la matière », 67).

Ces textes définissent à la fois la philosophie et son domaine. La philosophie, tout d'abord : elle est comprise comme liée indissociablement à la psychologie, et chacune de ses manifestations particulières est analysée comme complexe d'associations d'idées résultant des « structures mentales » de l'esprit. Aussi la philosophie est-elle désignée comme production de l'esprit défini par ses facultés et ses structures. Qu'est-ce qui la distingue alors des autres productions de l'esprit, des mathématiques par exemple ? C'est, nous nous en doutons, son objet propre, et cet objet, c'est l'esprit (*S.M.*, 31 et 32 : « ce que l'esprit humain peut faire »). Le domaine de la philosophie recouvre alors exactement l'esprit et ses productions, les sciences en particulier ; elle est une réflexion sur un langage, un langage sur du langage et sur sa source.

Mais, du même coup, nous voyons que le domaine de la philosophie ne recouvre pas la totalité de l'espace philosophique : l'expérience en est exclue ; elle fait partie d'un monde indépendant de celui de l'esprit. Nous avons pourtant constaté que l'expérience a une fonction philosophique à l'égard des sciences due au fait qu'elle est le lieu d'une assimilation de deux notions de nature différente : expérience scientifique et expérience commune (cf., ci-dessus, p. 21). Dès lors, sous le couvert de cette assimilation, l'expérience peut être invoquée à la fois comme origine — philosophique — de la physique et comme vérification expérimentale de ses théories.

Reste à analyser les raisons de cette assimilation, ce qui nous permettra de caractériser la philosophie de Poincaré. Pour cela, reprenons notre examen des rapports entre langage physique et expérience. D'après ce que nous avons vu dans le chapitre précédent, nous pouvons affirmer que ces relations sont entièrement déterminées par une double thèse :

— seuls les faits sont vrais ; la « vérité » d'une théorie est fonction du nombre de rapports réels qu'elle exprime ;

— la réalité en soi — dont l'existence est hypothétique — est inconnaissable. (La métaphysique, chez Poincaré, a la forme d'une anacoluthe.)

Or ces deux thèses ne sont pas sans liens : elles interfèrent en un point cristallisé dans l'expression « âme du fait » (cf., ci-dessus, p. 31). Cette expression indique le lieu où se confondent connaissance et vérité expérimentale. Le « fait brut » est un mélange de « matière » et de « forme » non distinguées ; l' « âme du fait » est l'ensemble des rapports objectifs présents dans le fait brut ; enfin, la loi scientifique est la traduction dans un langage commode de l' « âme du fait ». L' « âme du fait » est ainsi un trait d'union entre le monde de la pensée et le monde donné : les rapports purement langagiers — lorsqu'ils ne sont pas métaphoriques — sont le reflet des rapports réels ; la connaissance « lit » la forme dans le fait, mais alors elle est aussi un tri : elle ne retient du fait brut que ce qui, en lui, est exprimable comme ensemble de rapports — mais il y a un reste — et ce reste est inconnaissable ; ce reste, c'est le fond des choses, la réalité profonde que « la nature nous cachera éternellement » (*S.H.*, 190). Ainsi, les traits spécifiques de la connaissance théorique s'effacent devant ceux de son objet, le fait.

Par suite, les faits que livre l'expérience ont une double fonction ; ils sont les rapports réels constitutifs de la physique, mais ils sont aussi, en tant que faits bruts, leur origine philosophique : l'expérience commune. Et ces deux fonctions coïncident justement dans l' « âme du fait », au point où la connaissance est l' « essence » du fait et où le fait est « vérité » pour la connaissance. Aussi Poincaré ne conçoit-il pas de séparation fondamentale entre physique et expérience commune : seules des conventions langagières les distinguent.

Mais la thèse du « fait vrai » a une autre conséquence, duale en quelque sorte de la première. L' « âme du fait » est le lieu où se recouvrent connaissance et fait ; nous avons alors vu Poincaré élider la connaissance pour retrouver le fait ; mais, d'un point de vue philosophique, l'inverse est tout aussi justifié, et, effectivement, la philosophie de Poincaré le conduit à effacer explicitement le fait devant la connaissance. Sa philosophie est alors un idéalisme radical :

« Tout ce qui n'est pas pensée est le pur néant ; puisque nous ne pouvons penser que la pensée et que tous les mots dont nous disposons pour parler des choses ne peuvent exprimer que des pensées ; dire qu'il y a autre chose que la pensée, c'est donc une affirmation qui ne peut avoir de sens » (*V.S.*, 187).

Dans la philosophie de Poincaré subsistent ainsi deux mondes : celui de la pensée et celui de la réalité — hypothétique — inconnaissable ; ils sont sans interférences, mais leur séparation même est l'effet de la notion de fait brut ; c'est pourquoi, dans la science la plus « proche » du fait expérimental, la physique, ces deux mondes semblent se toucher ; la lecture physique du fait laisse un reste, et ce reste s'inscrit, en physique, dans une métaphore.

Nous pouvons alors affirmer que le fait chez Poincaré est une construction philosophique : elle détermine à la fois sa théorie de la connaissance et sa conception de l'histoire des sciences comme une recherche de l'origine psychologique des faits scientifiques, bref, comme démarquages successifs du symbolisme par rapport au monde donné. Mais, et c'est là l'important, Poincaré ne désigne jamais le fait comme construction philosophique, mais comme simple fait dans toute son évidence à propos duquel il n'y a pas de désaccord possible : « En résumé les faits sont des faits » (*V.S.*, 163). Nous comprenons alors que l'assimilation de l'expérience scientifique et de l'expérience comme entité philosophique de référence pour les sciences ne soit pas et ne puisse être visible pour Poincaré : le fonctionnement de la notion d'expérience n'est pas déterminé par ce qu'il en dit explicitement. La philosophie désigne implicitement comme philosophique ce qu'elle présente explicitement comme pur donné : l'expérience est le point aveugle de la philosophie de Poincaré.

A la philosophie exprimée textuellement est donc sous-jacente une philosophie implicite déterminée par le rôle de l'expérience dans l'espace philosophique, dont la thèse fondamentale porte sur la connaissance : elle « lit » le « vrai » dans le « fait ». C'est bien là, comme l'a montré Louis Althusser, un empirisme : la connaissance dégage l'essence dans l'existence. Et nous ajoutons : chez Poincaré, cet empirisme est intégral ; malgré les apparences, il concerne aussi bien les mathématiques que la physique. Les sciences déductives « lisent » aussi dans les faits, mais en l'occurrence ces faits sont les notions innées de l'esprit lues *a priori* dans une intuition intellectuelle, alors que les faits de la physique sont « lus » *a posteriori* dans l'expérience [1]. Nous comprenons alors pourquoi Poincaré ne traite pas des théories dans leur spécificité : elles se dissolvent en un ensemble de rapports aux instances et apparaissent comme langage classifiant des « objets » — et ces « objets » sont justement des faits, psychologiques ou expérimentaux. Ces « objets » sont, par conséquent, comme l'expérience, le lieu d'assimilations de concepts scientifiques et de notions philosophiques : souvenons-nous de l'infini mathématique assimilé à l'infini potentiel (cf., ci-dessus, p. 28), du groupe comme structure algébrique au groupe comme structure innée (cf., ci-dessus, p. 48), de la masse mécanique à la matière (cf., ci-dessus, p. 68). L'analyse philosophique consiste alors à séparer le langage du fait.

Nous sommes ainsi mieux à même de comprendre la fonction du psychologisme de Poincaré : devant la multitude des faits « vrais », expérimentaux ou non, le problème méthodologique scientifique par excellence est alors celui du choix (cf. *S.M., passim*). Or les critères de ce choix sont tous désignés par Poincaré comme étant d'ordre psychologique.

Philosophie comme langage sur du langage : langage qui reproduit des concepts scientifiques, mais en les dispersant : leurs relations ne sont plus déterminées par le discours scientifique d'où ils sont extraits, mais par leur seule origine philosophique. Ils prennent alors un autre sens, ontologique, pourrait-on dire. La philosophie, forte de ces notions, a pour fonction de justifier le discours scientifique. Par contre, lorsqu'un concept n'a pas de correspondant philosophique, elle peut le rejeter comme non théorique : elle intervient alors dans le discours scientifique.

1. Poincaré souligne ce parallélisme dans un passage concernant la logistique : « Elle a même besoin de l'intuition, non seulement à ses débuts, mais à chaque pas ; non seulement pour lui demander des principes nouveaux, mais comme un incessant contrôle, de même qu'une théorie de physique mathématique n'a de valeur que quand elle a été confirmée par l'expérience » M.L. (1906), 866.

Aussi la compréhension de la philosophie de Poincaré demande-t-elle l'examen de ses rapports aux concepts scientifiques qu'elle reproduit. Cette question — tout ce qui précède le montre — repose sur celle de la recherche de l'origine des concepts utilisés en sciences. Nous allons donc interroger une nouvelle fois les effets théoriques de la question de l'origine dans la philosophie de Poincaré, mais en déplaçant notre propos, pour des raisons qui nous sont imposées par la problématique même de Poincaré : lorsqu'il propose une solution au problème de l'origine, il répond à la fois, de façon plus cachée, aux questions des relations entre discours, faits scientifiques, faits bruts et réalité. Ce n'est pas un hasard : souvenons-nous de la définition des sciences comme classification conventionnelle ou « système de relations » (*V.S.*, 181) entre « lois déduites des faits observés » (*D.P.*, 66). L'examen de ces relations nous permettra d'interroger la philosophie de Poincaré qui, en tant que telle, est à peine parlée : Poincaré est un savant parlant de sciences. Tel est l'objet du chapitre suivant.

V. Le fait et l'exemple

> « Inscrire le pourquoi du monde dans le comment écrire. »
>
> R. Barthes

Le silence dont Poincaré entoure la philosophie — sa philosophie — ne laisse pas dans l'ombre la seule philosophie, mais ses rapports aux sciences ; nous savons que la philosophie, chez Poincaré, a une fonction spécifique, référentielle, à l'égard des sciences, mais nous ne connaissons pas les mécanismes de ce fonctionnement. Ce sont, en dernière analyse, ces fonctionnements que nous voulons analyser.

Partons donc des remarques explicites de Poincaré ; lorsqu'il parle des types de relations existant entre discours, faits scientifiques, faits bruts et réalité, il les pense sous trois catégories : la traduction, la convention, la métaphore.

La traduction. — Elle caractérise le passage d'un langage dans un autre par des règles fixes :

« [...] nous avons des règles fixes qui nous permettent de traduire les énoncés français en allemand, et inversement. C'est pour cela qu'on a fait des grammaires et des dictionnaires. Il y a aussi des règles fixes pour traduire le langage euclidien dans le langage non euclidien, ou, s'il n'y en a pas, on pourrait en faire » (*V.S.*, 169).

Ainsi, les mathématiques peuvent être écrites dans le langage géométrique, et vice versa ; une grande partie de la physique est exprimable en termes de mécanique : la mécanique est susceptible de prendre la forme déductive de la géométrie. Mais l'existence même de ces règles fixes suppose un invariant ; si nous reprenons les exemples cités plus haut (*V.S.*, 169), l'invariant de la traduction d'énoncés français en allemand sera leur sens, celui des différents langages géométriques la notion de groupe [1].

« [...] la possibilité de la traduction implique l'existence d'un invariant. Traduire, c'est précisément dégager cet invariant. Ainsi déchiffrer un document cryptographique, c'est chercher ce qui dans ce document demeure invariant quand on en permute les lettres » (*V.S.*, 170).

Mais ce qui importe plus à notre propos, c'est que la traduction est aussi le nom du rapport entre fait scientifique et fait brut :

« [...] le fait scientifique ne sera jamais que le fait brut traduit dans un autre langage » (*V.S.*, 160).

« *Le fait scientifique n'est que le fait brut traduit dans un langage commode* » (*V.S.*, 161).

Ainsi, la différence entre fait scientifique et fait brut semble être celle de deux langages ; mais de quels langages ? En ce qui concerne le fait scientifique, Poincaré est clair : le fait scientifique s'exprime dans un langage très particulier : le langage mathématique. L'usage des mathématiques en physique est possible du fait que les phénomènes naturels sont décomposables en phénomènes élémentaires tous semblables entre eux et répétables (cf. *S.H.*, 181-188) :

« On peut se demander pourquoi, dans les sciences physiques, la généralisation prend volontiers la forme mathématique. La raison est maintenant facile à voir ; ce n'est pas seulement parce que l'on a à exprimer des lois numériques : c'est parce que le phénomène observable est dû à la superposition d'un grand nombre de phénomènes élémentaires *tous semblables entre eux* ; ainsi s'introduisent tout naturellement les équations différentielles.

[...] les mathématiques nous apprennent [...] à combiner le semblable au semblable. Leur but est de deviner le résultat

1. « Au fond, si l'on traduit tout cela dans le langage mathématique, cela veut dire que les deux géométries ont ceci de commun que l'une et l'autre étudient un groupe ; mais que ce n'est pas le même groupe ; que cependant le groupe métrique est contenu dans le groupe projectif » (« Des fondements de la géométrie. A propos d'un livre de M. Russell », *R.M.M.*, 7 (1899), 257).

d'une combinaison, sans avoir besoin de refaire cette combinaison pièce à pièce. Si l'on a à répéter plusieurs fois une même opération, elles nous permettent d'éviter cette répétition en nous en faisant connaître d'avance le résultat par une sorte d'induction » (*S.H.*, 187).

Le langage mathématique n'est pas seulement possible, il est nécessaire ; il fait voir des analogies entre divers types de faits que le langage naturel, trop flou, laisse échapper :

« Qui nous a appris à connaître les analogies véritables, profondes, celles que les yeux ne voient pas et que la raison devine ?

C'est l'esprit mathématique, qui dédaigne la matière pour ne s'attacher qu'à la forme pure. C'est lui qui nous a enseigné à nommer du même nom des êtres qui ne diffèrent que par la matière, à nommer du même nom par exemple la multiplication des quaternions et celle des nombres entiers » (*V.S.*, 106).

Aussi, les faits scientifiques, exprimant une forme, sont des ensembles de relations qui subsument toujours plusieurs faits bruts (cf. *V.S.*, 163).

Quant au fait brut, il désigne les relations entre les choses connues par l'expérience :

« L'expérience nous fait connaître des relations entre les corps ; c'est là le fait brut » (*V.S.*, 166).

Le fait brut recouvre tout d'abord une impression :

« [...] entre l'impression d'obscurité que ressent le témoin d'une éclipse et l'affirmation : il fait noir, que cette impression lui arrache, il est nécessaire de distinguer. En ce sens, c'est la première qui est le seul vrai fait brut, et la seconde est déjà une sorte de fait scientifique » (*V.S.*, 157).

En ce sens, le fait brut caractérise ce qui, dans l'expérience, est strictement individuel :

« [...] le fait, encore complètement brut, est pour ainsi dire individuel, il est complètement distinct de tous les autres faits possibles » (*V.S.*, 157).

Néanmoins, Poincaré utilise en général le terme de « fait brut » — ou plus précisément d' « énoncé brut » (*V.S.*, 163) — pour l'expression de l'impression :

« [...] quand je fais une expérience, je dois faire subir au résultat certaines corrections, parce que je sais que j'ai dû commettre des erreurs. Ces erreurs sont de deux sortes, les unes sont accidentelles et je les corrigerai en prenant la moyenne ; les autres sont systématiques et je ne pourrai les corriger que par une étude approfondie de leurs causes.

Le premier résultat obtenu est alors le fait brut, tandis que le fait scientifique c'est le résultat final après les corrections terminées » (*V.S.*, 156-157).

Mais alors l'énoncé brut recouvre une infinité de faits bruts au sens strict :

« Aussitôt qu'intervient le langage, je ne dispose plus que d'un nombre fini de termes pour exprimer les nuances en nombre infini que mes impressions pourraient revêtir » (*V.S.*, 157).

C'est, en règle générale, bien en ce sens que Poincaré parle de faits bruts, la différence entre fait brut et fait scientifique étant une différence relative, du plus au moins :

« Il n'y a pas de frontière précise entre le fait brut et le fait scientifique ; on peut dire seulement que tel énoncé de fait est *plus brut* ou, au contraire, *plus scientifique* que tel autre » (*V.S.*, 163).

« Quelle différence y a-t-il alors entre l'énoncé d'un fait brut et l'énoncé d'un fait scientifique ? Il y a la même différence qu'entre l'énoncé d'un même fait brut dans la langue française et dans la langue allemande. L'énoncé scientifique est la traduction de l'énoncé brut dans un langage qui se distingue surtout de l'allemand vulgaire ou du français vulgaire parce qu'il est parlé par un bien moins grand nombre de personnes » (*V.S.*, 159).

Ainsi la traduction, caractérisant les rapports entre faits de différents niveaux, suppose l'existence d'un invariant :

« Quelle est maintenant la nature de cet invariant, il est aisé de s'en rendre compte, et un mot nous suffira. Les lois invariantes, ce sont les relations entre les faits bruts, tandis que les relations entre les " faits scientifiques " restaient toujours dépendantes de certaines conventions » (*V.S.*, 170).

Le fait brut est, nous le voyons, la marque d'une limite, déterminée par l'expérience : celle qui sépare la matière de la forme, de l' « âme du fait ». La notion de fait brut renvoie à la fois à une réalité inconnaissable, parce qu'indicible — le langage, formé de signes indéfiniment répétables, ne peut retenir les particularités individuelles de chaque fait —, et à la possibilité, pour l'esprit, de connaître, par l'expérience, les relations entre corps.

On voit maintenant l'importance de la notion de traduction dans la philosophie de la physique de Poincaré ; elle garantit la notion de vérificabilité : il existe des règles fixes permettant de contrôler si le rapport du fait scientifique au fait brut est constant :

« [...] j'admets une loi d'après laquelle toutes les fois que tel effet mécanique se produira, tel effet chimique se produira de son côté. Des expériences antérieures très nombreuses ne m'ont jamais montré cette loi en défaut et alors je me suis rendu compte que je pourrais exprimer par le même énoncé deux faits aussi invariablement liés l'un à l'autre.

Quand on me demandera : le courant passe-t-il ? Je pourrai comprendre que cela veut dire : tel effet mécanique va-t-il se produire ? mais je pourrai comprendre aussi : tel effet chimique va-t-il se produire ? Je vérifierai donc soit l'existence de l'effet mécanique, soit celle de l'effet chimique, cela sera indifférent, puisque, dans un cas comme dans l'autre, la réponse doit être la même.

Et si la loi venait un jour à être reconnue fausse ? Si on s'apercevait que la concordance des deux effets mécanique et chimique n'est pas constante ? Ce jour-là, il faudrait changer le langage scientifique pour en faire disparaître une grave ambiguïté » (*V.S.*, 159-160).

Ainsi, la vérification portant sur la constance d'un rapport,

« [...] il semble superflu de rechercher si le fait brut est en dehors de la science, car il ne peut y avoir ni science sans fait scientifique ni fait scientifique sans fait brut, puisque le premier n'est que la traduction du second » (*V.S.*, 161).

Nous voyons donc que la traduction spécifie particulièrement les sciences les plus « proches » dans la configuration philosophique des sources de faits, l'esprit et l'expérience : l'arithmétique pure est une « traduction » des lois logiques qui nous sont innées et du principe d'induction complète lus *a priori* dans notre esprit par intuition (rappelons-nous en effet l'ambiguïté entre la discipline logique d'Aristote et les structures logiques de l'esprit) ; la physique expérimentale est une « traduction » des faits bruts que l'expérience nous livre.

La convention. — Elle est

« [...] une sorte de cote mal taillée entre notre amour de la simplicité et notre désir de ne pas trop nous écarter de ce que nous apprennent nos instruments » (*D.P.*, 101).

Elle caractérise donc très particulièrement — quoique non exclusivement, puisque tout langage est une classification conventionnelle — les disciplines situées au centre de la configuration philosophique, à savoir la géométrie, science déductive, et la mécanique, science expérimentale.

La géométrie : elle est l'étude d'un groupe — notion innée à notre esprit ; l'ensemble des axiomes de la théorie des groupes n'est pas catégorique, ses modèles ne sont pas nécessairement isomorphes. Aussi l'instance esprit ne suffit-elle pas à déterminer complètement les géométries ; pour ce faire, il faut poser des postulats (cf. *S.H.*, 50). Ce sont ces postulats qui sont conventionnels.

La mécanique : la vérification de ses principes requerrait des expériences sur l'univers entier. Nous ne pouvons donc trouver directement le fait brut derrière le principe ; c'est pourquoi Poincaré les pose comme conventionnels.

« Quand il s'agit d'une loi de physique ordinaire, voici ce qui arrive. Des expériences imparfaites l'ont vérifiée aussi complètement que le permettent les erreurs d'observation ; des expériences plus soignées la vérifient mieux encore. Nos ancêtres auraient conclu qu'elle est très probablement vraie en toute rigueur. Nous, qui avons moins confiance dans la simplicité de la nature, nous conclurons plutôt qu'elle est probablement vraie *à très peu près*, et que probablement aussi elle ne l'est pas tout à fait. Dans tous les cas nous conclurons que nous pouvons agir comme si elle l'était.

Quoi qu'il en soit, une chose dont nous ne doutons pas, c'est que la loi est tout à fait vraie, ou bien qu'elle ne l'est pas. Résolue ou non, la question a un sens. Mais, en ce qui concerne notre principe [principe de réaction], il en va tout autrement. Est-il à peu près vrai pour des systèmes à peu près isolés ? Cette question a un sens et l'expérience l'a résolue affirmativement. Est-il rigoureusement vrai ? Cette question *n'a aucun sens,* et nous pouvons lui donner telle solution que nous voulons » (« Sur les principes de la mécanique », 475-476).

La métaphore. — Elle caractérise spécifiquement les théories de la physique ; la traduction, marque de tout langage, laisse de côté le caractère individuel des faits ; par conséquent, nous ne connaissons ni ne pouvons connaître la réalité tout entière. Cette réalité, exclue de la physique, en trace, par cette exclusion même, les limites. Par conséquent, les théories de la physique dont l'objet est la réalité, la nature, ne peuvent l'atteindre que métaphoriquement — toute lecture littérale étant le fait du théologien (cf. *S.H.*, 193) ou du métaphysicien. Une théorie physique n'est donc qu'un « costume » (cf. *S.H.*, 191) possible pour un ensemble de lois, ce qui explique la distinction que fait Poincaré entre le « monde réel » inconnaissable et le « monde donné » connu par l'expérience (*D.P.*, 190-191 ; dans « Cournot et les principes du calcul infinitésimal »).

Traduction, convention, métaphore : ces trois notions sont toutes la marque d'un écart. Mais, alors que la traduction désigne l'écart entre deux langages (à quelques ambiguïtés près telles : « Dans notre esprit préexistait l'idée latente d'un certain nombre de groupes ; ce sont ceux dont Lie a fait la théorie » — *S.H.*, 109) et que la convention marque un écart entre langage scientifique et monde donné — soit, à la rigueur, le rapport entre deux langages —, la métaphore, elle, désigne la séparation radicale entre langage et monde réel, monde donné et monde réel, mondes radicalement séparés dont l'expérience détermine les limites respectives.

Position philosophique très curieuse qui localise la vérité aux limites du domaine de la philosophie (« L'expérience est la source unique de la vérité : elle seule peut nous apprendre quelque chose de nouveau ; elle seule peut nous donner la certitude » — *S.H.*, 167). En cela, Poincaré est très cohérent : la philosophie est un discours sur des discours. Cette conception de la philosophie, paradoxale dans la tradition, nous impose l'examen d'une nouvelle question : qu'est-ce qui, eu égard à la philosophie, peut être considéré comme fait ?

Les faits, nous l'avons vu, pour la philosophie, sont donc en premier lieu les sciences en tant que constructions de l'esprit. Mais les sciences elles-mêmes entretiennent des rapports avec divers types de faits ; pour une théorie physique, une généralisation est un fait et cette généralisation est à son tour la traduction d'un ensemble de faits plus ou moins bruts dans un langage commode. Ainsi, les rapports entre faits et langage sont relatifs à ceux qu'entretiennent le général et le particulier : un état du discours est un fait relativement à un état plus général du discours — mais cela, bien sûr, dans la mesure où il peut, en dernière instance, être mis en relation avec un ensemble de faits bruts, à la limite du langage.

Cette interprétation nous est confirmée par ce que dit Poincaré du fait en mathématiques : sont faits par rapport à un état déterminé des sciences mathématiques les combinaisons mathématiques déjà existantes (cf. notre paragraphe « Mathématiques et langage ») ; d'où l'importance que Poincaré attribue à la création de nouveaux termes (cf. *S.M.*, 30-31 ; *V.S.*, 105 ; *D.P.*, 92). On pourrait nous objecter que le fait en mathématiques a un statut particulier puisque possibilité et existence y sont confondues. Nous croyons pouvoir écarter cette objection puisque, comme nous venons de le voir, tout fait, même relativement brut, est, en physique, toujours déjà exprimé ou traduit, toujours déjà mis en relation. Ainsi, les rapports entre discours et faits peuvent-ils être eux aussi compris comme différence relative du plus au moins, comme ceux entre fait scientifique et fait brut, à condition néanmoins de ne jamais oublier que la traduction implique l'existence d'un invariant : le toujours déjà traduit est un toujours déjà donné.

Cela n'est pas lisible seulement dans ce que Poincaré dit du fait, mais aussi dans les métaphores ou les comparaisons par lesquelles il caractérise le discours. Ainsi, en ce qui concerne la physique, le discours est compris comme image, costume, habit, affublation de la réalité (cf., ci-dessus p. 82 ; *S.H.*, 190-191). Aussi le fait n'est-il pas constitué dans et par le discours ; ce dernier s'instaure toujours à propos d'autre chose — de la réalité en l'occurrence — à la limite du fait brut. Mais ce n'est pas là la seule métaphore par laquelle Poincaré caractérise le discours :

« Qu'on se place au point de vue moral, esthétique ou scientifique, c'est toujours la même chose. Rien n'est objectif que ce qui est identique pour tous ; or on ne peut parler d'une pareille identité que si une comparaison est possible, et peut être traduite en une " monnaie d'échange " pouvant se transmettre d'un esprit à l'autre. Rien n'aura donc de valeur objective que ce qui sera transmissible par le " discours ", c'est-à-dire intelligible » (*V.S.*, 180).

Discours comme « monnaie d'échange » susceptible de garantir l'objectivité : autre façon d'affirmer que le discours traduit la réalité en effaçant les différences individuelles : le discours est toujours déjà à la fois traduction, convention et métaphore. En d'autres termes, le discours, pris en lui-même, est toujours non saturé, il ne se suffit pas à lui-même, il n'a de sens que par ce qu'il intègre en lui. Aussi un discours n'a-t-il de sens que dans la mesure où les discours qu'il intègre en lui renvoient, directement ou non, à un invariant. Les discours sont alors classables selon leur degré de généralité.

Ainsi, que nous suivions Poincaré dans ce qu'il dit du fait ou du discours (ou langage : Poincaré ne distingue pas systématiquement, nous semble-t-il, ces deux termes), nous parvenons à la même conclusion : faits et discours sont relatifs les uns aux autres dans la mesure où les faits sont exprimés, mais ce sont les faits qui donnent sens au discours, et l'expérience marque les limites du monde donné et du monde réel. Cette position autorise Poincaré à considérer comme fait relativement à sa philosophie tout discours dont l'objet est moins général que le sien propre ; ainsi, toute science, toute théorie scientifique, tout concept, toute loi physique peut-elle être pertinente pour le discours philosophique. Nous pouvons alors aborder le problème que nous nous étions proposé : comment la philosophie intègre-t-elle les faits qui lui sont pertinents ? Question cruciale puisque, chez Poincaré, ce sont les faits qui donnent sens au langage.

Mais, à cette question, Poincaré ne répond pas, pour la simple question qu'il ne pouvait la poser : la mise en lumière de ces procédés aurait remis en cause la distinction théorique entre forme et sens telle que Poincaré la pense, le discours étant, selon lui, relativement transparent au fait (« relativement » : d'un point de vue théorique, nous pouvons dire que le langage est conçu par Poincaré comme transparent ; mais, en pratique, il faut faire des nuances : le discours « contient » toujours déjà des faits, et, par conséquent, il influence dans une certaine mesure l'interprétation des faits constatés ultérieurement — cf. *S.H.*, 170). Nous devons donc passer à un autre type d'examen qui ne touche pas seulement le sens explicite que propose le texte, mais qui exhibe les opérations par lesquelles la philosophie de Poincaré intègre les faits. Mettre en évidence ces opérations, c'est justement poser la question des rapports entre discours et fait au niveau du texte philosophique : c'est en ce point exactement que nous pouvons cerner le silence de Poincaré sur sa philosophie.

*

C'est donc un silence que nous allons interroger. Nous allons tenter de dégager le niveau du texte philosophique où sens et forme se rejoignent et, par là même, d'esquisser un type d'étude que nous appelons « rhétorique ». Nous voulons, par ce terme, signifier que notre analyse n'est pas linguistique, car elle ne touche pas le niveau grammatical ou syntaxique du discours, mais celui des choix effectifs opérés parmi ces structures ; pour reprendre une distinction antique, elle ne prend pas pour objet le *recte dicere*, mais le *bene dicere*. Néanmoins, notre propos n'est pas d'établir la liste des figures auxquelles Poincaré recourt pour « orner » son discours qui, écrit ou dit « simplement », « directement », serait supposé non figural ; nous posons comme hypothèse de travail que tout texte est figural et que la figure est le lieu où se dessine l'articulation entre sens et forme, ou, mieux, la marque des opérations [2] par lesquelles un texte engendre les sens qu'il propose explicitement. Le texte est compris alors comme mode d'instauration et de constitution d'objets d'un discours réalisé (et non simplement possible comme en linguistique). Dans une telle perspective, les classifications de la rhétorique antique peuvent être pertinentes — ce qui justifie le terme de rhétorique [3].

Notre analyse n'est évidemment pas exhaustive, ni même très détaillée ; une explication de texte est de toute manière essentiellement insuffisante. Notre intention est de la placer dans une perspective qui nous permette de comprendre tout particulièrement les mécanismes du fonctionnement de la philosophie de Poincaré à l'égard des sciences. Pour ce faire, nous allons poser deux questions à son texte : celle de sa « stratégie » (ou « thétique ») et celle des formes par lesquelles la philosophie intègre en elle les objets scientifiques (ou « assomption »).

A. La stratégie [4]

Nous appelons « stratégie » l'ensemble des procédés formels par lesquels Poincaré pose ses thèses philosophiques. Ces procédés sont en l'occurrence très simples ; cela tient probablement

2. Ainsi conçue, la rhétorique suppose que le texte est un ensemble d'opérations.

3. En ce qui concerne la rhétorique et en particulier ses relations avec la grammaire et la logique, cf. Jean-Louis GALAY, « Le Texte et la Forme », *Revue européenne des sciences sociales et Cahiers Vilfredo Pareto*, t. 12, 32 (1974), p. 41-63. Voir aussi du même auteur : « Esquisses pour une théorie figurale du discours », *Poétique*, 20 (1974), p. 393-415.

4. La plupart de nos exemples sont tirés d'un chapitre de philosophie de la physique (*S.H.*, chap. 9, « Les Hypothèses en physique »), car dans ce domaine la notion de fait est plus facilement cernable.

au fait que nous sommes en présence de ce que nous pourrions appeler un « texte limite ».

L'affirmation est la forme générale par laquelle Poincaré pose ses thèses philosophiques, mais, dans la plupart des cas, il ne l'avance pas telle quelle ; il cherche à la préparer et à la justifier de différentes façons.

Pour ce faire, il en appelle souvent à l'évidence d'un fait universellement reconnu :

« L'expérience est la source unique de la vérité : elle seule peut nous apprendre quelque chose de nouveau ; elle seule peut nous donner la certitude. Voilà deux points que nul ne peut contester » (*S.H.*, 167).

« Nous savons tous qu'il y a de bonnes expériences et qu'il y en a de mauvaises » (*S.H.*, 168).

« Toute généralisation est une hypothèse ; l'hypothèse a donc un rôle nécessaire que personne n'a jamais contesté » (*S.H.*, 178).

Les idées philosophiques défendues ici n'exigent pas d'elles-mêmes un appel à l'opinion d'autrui ; Poincaré ne veut pas dire qu'effectivement personne ne conteste le rôle de l'expérience et celui de l'hypothèse en sciences, puisque le projet qu'il annonce dans l'introduction de *La Science et l'Hypothèse* est justement de discuter « la place tenue par l'hypothèse » (*S.H.*, 2), ignorée des dogmatiques et des sceptiques.

D'autres fois, l'affirmation est amenée par un lieu commun :

« La recherche de la vérité doit être le seul but de notre activité ; c'est la seule fin qui soit digne d'elle » (*V.S.*, 19 et s.) ;

ou encore par la reconnaissance explicite de l'évidence :

« Il est clair qu'un fait quelconque peut se généraliser d'une infinité de manières » (*S.H.*, 173).

Poincaré prépare aussi l'introduction de certaines de ses thèses par la négation de celles d'autrui ; son affirmation semblera alors évidente :

« Pour un observateur superficiel, la vérité scientifique est hors des atteintes du doute [...] » (*S.H.*, 1).

« Voilà quelle est pour bien des gens du monde, pour les lycéens qui reçoivent les premières notions de physique, l'origine de la certitude scientifique. Voilà comment ils comprennent le rôle de l'expérimentation et des mathématiques. C'est ainsi également que le comprenaient, il y a cent ans, beaucoup de savants [...] » (*S.H.*, 1-2).

« Quelques personnes ont été frappées de ce caractère de libre convention qu'on reconnaît dans certains principes fondamentaux des sciences. Elles ont voulu généraliser outre mesure [...] » (*S.H.*, 3).

« Les gens du monde sont frappés de voir combien les théories scientifiques sont éphémères » (*S.H.*, 189).

« Quelques personnes ont exagéré le rôle de la convention dans la science [...] » (*V.S.*, 23).

Dans d'autres cas, Poincaré oppose des opinions contraires, soit pour adopter l'une d'elles, soit pour rejeter les deux en faveur d'une solution médiane :

« Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir.

Au lieu de prononcer une condamnation sommaire, nous devons donc examiner avec soin le rôle de l'hypothèse [...] » (*S.H.*, 2).

« La possibilité même de la science mathématique semble une contradiction insoluble. Si cette science n'est déductive qu'en apparence, d'où lui vient cette parfaite rigueur que personne ne songe à mettre en doute ? Si, au contraire, toutes les propositions qu'elle énonce peuvent se tirer les unes des autres par les règles de la logique formelle, comment la mathématique ne se réduit-elle pas à une immense tautologie ? » (*S.H.*, 9-10.)

Ce dernier mode de préparation de la thèse, l'alternative, prend un sens tout particulier lorsque, quittant le domaine de la physique, nous nous déplaçons au centre de l'espace philosophique où le fait n'est plus directement cernable : en analyse, géométrie et mécanique, sa recherche suppose l'examen préalable de ce qui revient à l'esprit et (ou) à l'expérience. Il ne s'agit pas pour Poincaré de donner par l'alternative esprit/expérience une forme problématique à ses thèses philosophiques, mais d'une nécessité imposée par sa philosophie comme recherche d'origine. En voici un des nombreux exemples, à propos de la notion de continuité :

« On en vient alors à se demander si la notion du continu mathématique n'est pas tout simplement tirée de l'expérience. Si cela était, les données brutes de l'expérience, qui sont nos sensations, seraient susceptibles de mesure.

[...] Les résultats bruts de l'expérience peuvent donc s'exprimer par les relations suivantes :

$$A = B, B = C, A < C$$ [5]

qui peuvent être regardées comme la formule du continu physique.

Il y a là, avec le principe de contradiction, un désaccord intolérable, et c'est la nécessité de le faire cesser qui nous a contraints à inventer le continu mathématique » (*S.H.*, 34-35).

Nous pourrions faire des remarques analogues à propos des articles suivants parus dans *La Science et l'Hypothèse* : « Les Géométries non euclidiennes », « L'Espace et la Géométrie », « L'Expérience et la Géométrie » et « La Mécanique classique ».

L'usage de l'alternative a lui aussi pour effet de présenter la thèse philosophique qui en résulte comme incontestable ; la négation de deux opinions philosophiques contraires, résultant chacune de la mise en valeur exclusive de l'une des bornes de l'espace philosophique, donne l'illusion de l'objectivité des idées de Poincaré parce que les opinions en jeu recouvrent la totalité de l'espace. De nouveau, faits et thèses se recouvrent, et cela, en dernière analyse, parce que l'espace philosophique est construit à partir de deux sources possibles de faits qui jouent le rôle de limites pour la pensée philosophique.

Ces quelques variantes de la façon dont Poincaré procède pour introduire et rendre plausibles ses idées philosophiques sont pour nous relativement secondaires en tant que variantes, car elles concourent toutes à présenter comme fait acquis ou vérité reçue une thèse philosophique. Curieusement, alors que la philosophie est conçue comme langage sur du langage — donc comme discours fondamentalement contestable (souvenons-nous qu'en ce qui concerne la philosophie de la physique Poincaré insiste sur l'idée qu'on ne peut avoir d'opinions divergentes sur un fait, mais seulement sur une interprétation — cf. ci-dessus, p. 81) —, dans le texte les idées philosophiques sont traitées comme des faits. C'est là un singulier élargissement de ce que Poincaré appelle fait.

La thèse traitée comme fait délimite ce qui est problématique et ce qui ne l'est pas. Ainsi, puisque « l'expérience est la source

5. Ci-dessus, note 3, p. 16.

unique de la vérité » (*S.H.*, 167), le rôle de la physique mathématique est présenté comme problématique :

« Mais alors, si l'expérience est tout, quelle place restera-t-il pour la physique mathématique ? Qu'est-ce que la physique expérimentale a à faire d'un tel auxiliaire qui semble inutile et peut-être même dangereux ? » (*S.H.*, 167.)

Mais, si la place tenue par la physique mathématique est présentée comme problématique, la question à laquelle elle donne lieu ne l'est pas : Poincaré qualifie ses questions de « naturelles » ou de « faciles » (cf. *S.H.*, 111 ; *V.S.*, 123) — elles sont les conséquences directes des thèses. Il vaut la peine de relever que, dans la suite du même chapitre, l'usage des termes « danger », « dangereux » signifie toujours la négligence ou l'oubli du rôle de l'expérience. De la même façon, les thèses philosophiques déterminent en grande partie la modalisation des phrases :

« C'est qu'il ne suffit pas d'observer, il faut se servir de ses observations, et pour cela il faut généraliser » (*S.H.*, 167).

« Le savant doit ordonner [...].

Et avant tout le savant doit prévoir » (*S.H.*, 168).

« Pour prévoir, il faut donc au moins invoquer l'analogie, c'est-à-dire déjà généraliser » (*S.H.*, 169).

Apparemment, toutes ces modalités (il « faut », on « doit ») semblent s'imposer de l'extérieur, alors qu'elles sont amenées par le déroulement même du texte : si la physique mathématique n'était pas présentée comme « un fait qu'il est nécessaire d'expliquer » (*S.H.*, 167), la généralisation physique irait de soi et l'indicatif simple suffirait à sa mention. Il y a là un jeu ambigu entre les nécessités internes au texte et les faits qui lui sont extérieurs. Mais, une fois le procédé de la généralisation justifié, Poincaré la traite comme admise, de façon non problématique :

« Aussi, grâce à la généralisation, chaque fait observé nous en fait prévoir un grand nombre [...] » (*S.H.*, 171).

Les thèses ont donc dans l'élaboration du texte un rôle stratégique primordial : elles déterminent en grande partie les rapports du texte aux faits allégués, ce qui nous amène à examiner les procédés d'intégration.

B. L'intégration

L'étude des divers procédés d'intégration d'éléments scientifiques dans le discours philosophique se confond, chez Poincaré, avec celle de la justification de ses thèses philosophiques.

Nous avons vu que la philosophie de Poincaré a une fonction référentielle à l'égard des sciences ; nous verrons que son texte lui-même est un tissu de références : les objets du texte de Poincaré sont constitués par le recours à des constats d'existence. L'essence de la philosophie repose sur l'existence de faits qui lui sont hétérogènes.

Les références qu'utilise Poincaré sont classables en deux grandes catégories : les références « analogiques » et les références « exemplaires » ; nous verrons que cette classification est dans une large mesure fonctionnelle.

L'analogie. — La référence analogique est très fréquemment utilisée dans le texte philosophique de Poincaré, ne serait-ce que dans les affirmations les plus banales :

« [...] on fait la science avec des faits comme une maison avec des pierres ; mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison » (*S.H.*, 168).

« Qu'on me permette de comparer la science à une bibliothèque qui doit s'accroître sans cesse ; le bibliothécaire ne dispose pour ses achats que de crédits insuffisants ; il doit s'efforcer de ne pas les gaspiller.

C'est la physique expérimentale qui est chargée des achats ; elle seule peut donc enrichir la bibliothèque.

Quant à la physique mathématique, elle aura pour mission de dresser le catalogue » (*S.H.*, 171-172).

« C'est encore la comparaison de l'Erechthéion qui me vient à l'esprit, mais je ne veux pas la resservir trop souvent » (*S.M.*, 26).

Cette constatation n'aurait que peu d'intérêt si Poincaré ne soulignait à diverses reprises l'importance de l'analogie comme procédure scientifique. En physique :

« [...] la seule chose que l'on puisse affirmer, c'est que, dans des circonstances analogues, un fait analogue se produira. Pour prévoir, il faut donc au moins invoquer l'analogie, c'est-à-dire déjà généraliser » (*S.H.*, 169).

Et, en mathématiques, l'analogie est présentée comme l'un des moteurs de l'invention :

« En mathématiques, nous faisons tout à fait la même chose [qu'en physique] ; des éléments variés dont nous disposons, nous pouvons faire sortir des millions de combinaisons différentes ; mais une de ces combinaisons, tant qu'elle est isolée, est absolument dépourvue de valeur. [...] Il en sera tout autrement le jour où cette combinaison prendra place dans une classe de combinaisons analogues et où nous aurons remarqué cette analogie ; nous ne serons plus en présence d'un fait, mais d'une loi » (*S.M.*, 22-23).

Poincaré utilise donc dans son texte philosophique des procédés qu'il considère comme constitutifs des sciences : la démarche scientifique se transforme en figure rhétorique. La référence historique offre un exemple caractéristique de ce procédé. L'histoire, chez Poincaré, rappelons-le, est comprise comme le développement d'une genèse où le primitif et l'élémentaire coïncident, et au cours duquel l'individu reproduit approximativement l'histoire de l'espèce (cf. *S.M.*, 135) ; aussi pouvons-nous, en nous rapportant à l'histoire d'une discipline, nous faire de proche en proche — par analogies successives — une idée de son avenir :

« Pour prévoir l'avenir des mathématiques, la vraie méthode est d'étudier leur histoire et leur état présent. N'est-ce pas là, pour nous autres mathématiciens, un procédé en quelque sorte professionnel ? Nous sommes accoutumés à *extrapoler,* ce qui est un moyen de déduire l'avenir du passé et du présent, et, comme nous savons bien ce qu'il vaut, nous ne risquons pas de nous faire illusion sur la portée des résultats qu'il nous donne » (*S.M.,* 19).

Et, effectivement, le texte philosophique de Poincaré repose en partie sur des extrapolations de méthodes scientifiques ; c'est là l'un des traits curieux de la fonction généralisatrice du discours philosophique : il présente explicitement l'extrapolation comme démarche scientifique pour en faire usage implicitement dans son texte.

Mais, à la différence de ce qui peut se passer dans une discipline scientifique — une analogie en mathématiques peut prendre la forme d'un isomorphisme —, les rapports entre la théorie philosophique et les analogies ne sont pas du tout réglés : les faits analogues, les diverses comparaisons sont effacés une fois la thèse philosophique considérée comme établie : on peut, comme aime à le dire Poincaré à propos de l'histoire des sciences, « décintrer » (*Th.*, XIV ; *V.S.*, 36-37 ; *S.M.*, 134). Aussi l'analogie, quoique constitutive du texte de Poincaré, n'est-elle qu'une justification assez faible pour les thèses philosophiques ; elle ne fait qu'orienter l'opinion.

L'exemple. — L'exemple est une référence considérée comme pertinente pour la thèse philosophique à établir : il est la marque d'un fait qui donne sa valeur et sa vérité à la philosophie. C'est sur son usage surtout que repose l'argumentation de Poincaré. Si l'analogie guide le raisonnement, fait pencher l'opinion, l'exemple, lui, parfois, tranche. Souvenons-nous de l'induction complète, exemple d'un raisonnement mathématique à la fois rigoureux et fécond (cf. ci-dessus, p. 23).

Dans les écrits sur la physique, les faits étant relativement bien discernables, Poincaré recourt à divers types de faits — d'exemples — pour confirmer sa thèse. Ainsi, dans la suite du chapitre sur « Les Hypothèses en physique » (*S.H.*, 172-178), Poincaré cite, à la suite, Fresnel, la masse de Jupiter, Newton, la théorie cinétique des gaz, Kepler, sans compter un exemple que l'on pourrait caractériser de « thématique » (phénomènes obéissant à une loi de proportionnalité), et cela explicitement en tant qu'exemples : « Les exemples du contraire abondent » (*S.H.*, 175).

Il peut arriver que ce soient des chapitres entiers qui servent d'exemple pour les thèses générales de Poincaré. Dans *La Science et l'Hypothèse*, le chapitre 12, intitulé « L'Optique et l'Electricité », commence ainsi :

« Le meilleur exemple que l'on puisse choisir est la théorie de l'électricité » (*S.H.*, 245).

Et le chapitre 13, « L'Electrodynamique » — le seul, semble-t-il, qui ait été écrit en vue de la publication de *La Science et l'Hypothèse* —, débute ainsi :

« L'histoire de l'électrodynamique est particulièrement instructive à notre point de vue.

Ampère a intitulé son immortel ouvrage [...] » (*S.H.*, 260).

Les chapitres de *La Valeur de la science* sur la physique, en particulier « La Mesure du temps », « L'Analyse et la Physique » et « L'Astronomie » (discours de présidence à la Société astronomique de France prononcé le 6 mai 1903, intitulé à l'origine : « La Grandeur de l'astronomie » l), nous montrent que l'argumentation ne varie guère : Poincaré justifie ses thèses par un réseau de références.

Dans les disciplines scientifiques moins « proches » que la physique de l'instance expérience (l'analyse, la géométrie et la mécanique), Poincaré, nous l'avons vu (cf., ci-dessus, p. 106), pose souvent le problème de l'origine philosophique sous forme d'alternative ; dans ces articles, la question d'origine est chaque fois résolue par les mêmes moyens : Poincaré choisit un (des) exemple(s) scientifique(s) ou toute la science concernée elle-même pour les confronter aux instances esprit et expérience. Puis, dans un résumé, Poincaré intègre à la thèse l'exemple étudié.

Ainsi, dans « La Grandeur mathématique et l'Expérience », l'exemple, c'est le continu mathématique :

« En résumé, l'esprit a la faculté de créer des symboles, et c'est ainsi qu'il a construit le continu mathématique, qui n'est qu'un système particulier de symboles. Sa puissance n'est limitée que par la nécessité d'éviter toute contradiction ; mais l'esprit n'en use que si l'expérience lui en fournit une raison » (*S.H.*, 40).

Nous pourrions de nouveau faire des remarques analogues concernant les autres articles sur ces disciplines réunies dans *La Science et l'Hypothèse* (cf., ci-dessus, p. 107).

La question de l'origine — que du reste Poincaré ne traite jamais pour elle-même : il la reprend telle quelle de la tradition philosophique, en particulier kantienne — détermine donc dans une large mesure la forme des textes de Poincaré, et des ressemblances persistent parfois jusque dans le détail de la formulation ; ce phénomène est particulièrement clair dans les chapitres sur la géométrie et la mécanique où le schéma alternative-référence-résumé se répète, d'une façon qui du reste n'est pas absolument rigide. Il arrive que l'objet scientifique prenne une place beaucoup plus importante que la question d'origine, ou encore que son examen soit placé avant cette même question (cf. « Les Géométries non euclidiennes »). Mais, dans la perspective où nous sommes, ce sont des variantes secondaires.

Les faits pertinents pour la philosophie sont donc utilisés comme exemples ; cela tient évidemment à l'inductivisme de Poincaré : est considéré comme fait ce qui est particulier relativement au discours que l'on tient ; le discours philosophique, réflexion sur les sciences, peut alors subsumer comme faits les sciences, leurs théories, leurs concepts. C'est peut-être aussi la trace de l'extrapolation d'une méthode mathématique : dans les cas favorables, selon Poincaré, on peut démontrer l'existence d'un être mathématique en en exhibant un exemple.

Mais, inversement et curieusement, l'exemple est aussi ce qui permet de cerner ce qui est fait dans le langage, car il renvoie finalement au fait brut ; son usage sert, si l'on peut dire, de preuve de l'utilité de la science : elle n'est pas entièrement conventionnelle. Nous pouvons donner une contre-épreuve de notre interprétation. Quand l'exposé nécessite un exemple et qu'il n'existe pas de fait correspondant, le texte recourt à la fiction en guise de contre-exemple. En effet, lorsque Poincaré cherche à savoir quelle est la géométrie la plus « naturelle » et la plus « commode » pour interpréter les phénomènes physiques, ou bien lorsqu'il tente de cerner les faits sur lesquels reposent les principes de la mécanique, il ne recourt plus à l'exemple. Les raisons en sont bien claires. La première, c'est que l'empirisme géométrique n'a pas de sens aux yeux de Poincaré : on ne peut assimiler l'espace représentatif et l'espace du géomètre ; la seconde, c'est que la vérification des principes de la mécanique demanderait une expérience sur tout l'univers. Dans les deux cas, le fait n'est pas strictement cernable : la délimitation du fait est alors déterminée par une fiction qui sert de contre-exemple. En géométrie, Poincaré ne peut affirmer de façon catégorique la commodité du système euclidien pour l'interprétation de notre monde ; il ne peut que la suggérer en imaginant un monde où, par exemple, les solides ne seraient pas invariables : ses habitants ne construiraient pas en premier lieu la géométrie euclidienne ; par conséquent, dans notre univers où les solides sont invariants à très peu près, la géométrie euclidienne est la plus « naturelle » étant donné que ni les translations ni les rotations ne transforment les dimensions des figures considérées (cf. *S.H.*, 68, 84-87, 99 ; [exposé sur les géométries non euclidiennes] [6]). En ce qui concerne la mécanique, nous avons vu Poincaré procéder de même (cf., ci-dessus, p. 60) pour montrer que « notre » généralisation du principe d'inertie est la plus « naturelle » pour nous (cf. *S.H.*, 114-116, 138-141, 142).

6. Dans Rouché et Comberousse, *Traité de géométrie*, t. 2, p. 581-593.

Faits et exemples sont donc assimilés. Le texte philosophique apparaît alors comme un laboratoire où les thèses sont confrontées à des faits susceptibles de les « vérifier » — quoique, au sens strict, la vérification ne soit plus possible pour une théorie d'une telle généralité et, qui plus est, n'indique pas de procédure d'expérimentation. C'est là certainement l'un des caractères les plus remarquables de l'empirisme de Poincaré : la philosophie répète dans son texte l'inductivisme qu'elle thématise à propos des sciences ; l'usage de méthodes scientifiques en tant que procédés rhétoriques, le recours au fait par la médiation de l'analogie et de l'exemple donne l'illusion de retrouver en philosophie des objets connus et éprouvés dans les sciences. La philosophie entretient ainsi un rapport de « reconnaissance » avec elles, marqué fréquemment par l'usage des mots « vrais » et « véritables » :

« Non, cela est impossible ; ce serait méconnaître complètement le véritable caractère de la science. Le savant doit ordonner [...] » (*S.H.*, 168).

« [...] un seul travail d'un vrai maître, d'un Pasteur par exemple, suffira pour les faire tomber dans l'oubli » (*S.H.*, 169).

« Pour prévoir l'avenir des mathématiques, la vraie méthode est d'étudier leur histoire et leur état présent » (*S.M.*, 19).

« Ces objets sont " les droites non euclidiennes " qui à un certain point de vue ne sont pas des entités vides de sens, mais des cercles (de vrais cercles du vrai espace) orthogonaux à une certaine sphère » (*S.M.*, 188).

« Et si nous arrivons enfin au troisième exemple, à la définition du phosphore, nous voyons que la vraie définition serait : le phosphore, c'est ce morceau de matière que je vois là dans tel flacon » (*S.M.*, 189).

« Inutile d'ajouter que le cantorisme et la logistique sont seuls en cause ; les vraies mathématiques, celles qui servent à quelque chose, pourront continuer à se développer d'après leurs principes propres sans se préoccuper des orages qui sévissent en dehors d'elles [...] » (*S.M.*, 206).

« Il est vrai que le cantorisme a rendu des services, mais c'était quand on l'appliquait à un vrai problème, dont les termes étaient nettement définis, et alors on pouvait marcher sans crainte » (*S.M.*, 212-213).

« Encore une fois les *vraies* mathématiques, celles où l'on ne patauge pas dans l'infini actuel, ne sont pas en cause » (M.L. (1906), 312).

Nous tenions, par ces nombreuses citations, à montrer la fréquence de ce procédé. Ce n'est pas un hasard : l'exemple, l'analogie, le particulier, ce sont eux qui portent le sens plus que le système total. D'où l'importance du mot chez Poincaré ; les mathématiques, rappelons-le, sont « l'art de donner le même nom à des choses différentes » (*S.M.*, 29). C'est que le mot a pour fonction de « représenter » un concept ; c'est à ce prix seulement qu'il peut signifier :

« L'enfant comprend les phrases *en bloc* pour ainsi dire, et si on le laissait faire il les écrirait toutes en un seul mot. Chaque mot est comme un centre d'association d'idées, comme un fanal qui éclaire tout un canton de la conscience ; les divers mots d'une même phrase luisent en même temps ; leur lumière se mêle ; les champs qu'ils éclairent empiètent l'un sur l'autre, sans que l'on puisse dire duquel de tous ces phares tel ou tel point tire le plus de lumière. [...]

C'est cette sorte d'illumination continue qu'on appelle d'ordinaire l'intelligence d'une phrase. Beaucoup d'hommes, même adultes, n'en demandent pas davantage ; les plus raffinés d'entre nous s'en contentent même neuf fois sur dix ; cette façon de comprendre le français suffit en effet pour les usages ordinaires de la vie.

Mais c'est déjà trop peu dans bien des cas pour la plupart des hommes civilisés ; c'est tout à fait insuffisant pour quelque chose d'aussi subtil que le raisonnement mathématique. Dans ce laminoir délicat, les phrases en bloc ne peuvent pas passer ; il faut lui présenter des matériaux moins grossiers, réduits pour ainsi dire en petits morceaux par l'analyse verbale [...] » (*Les Sciences et les Humanités*, 12-13).

Il en résulte un certain flou entre discours philosophique et scientifique ; les notions de facultés de l'esprit et celle, ambiguë, d'expérience jouent le rôle de médiations entre ces deux types de discours. Nous avons déjà relevé des similitudes entre certains passages de la *Thermodynamique* et de la philosophie de la physique (cf., ci-dessus, p. 84) ; certains des écrits philosophiques de Poincaré sont à l'origine des préfaces à des ouvrages scientifiques dont les intégrales ont été effacées (ce qui, paradoxalement, rend parfois le texte philosophique plus difficile) ; de même, bien des aspects techniques des articles sur la logique mathématique ont disparu dans *Science et Méthode*.

Telles sont les formes de l'assomption : le texte philosophique se réfère aux faits et les intègre par les figures de l'analogie ou comparaison lorsque les faits mentionnés ne sont pas directement pertinents pour l'idée discutée, et par l'exemple (historique, actuel, thématique) lorsque les faits ont valeur probatoire. Nous pouvons maintenant aborder la question des relations entre les thèses qui est en même temps celle de l'articulation des grandes unités du texte.

Le trait le plus frappant et le plus constant est que les thèses ne sont pas travaillées — ou peu — par et dans le texte : elles sont reprises telles quelles des connaissances que Poincaré avait de la tradition philosophique et mises en relation avec des éléments hétérogènes. Le texte philosophique de Poincaré présente relativement peu de raisonnements tels qu'on les trouve dans les ouvrages dits de philosophie systématique comme ceux de Spinoza ou de Kant. Aussi les thèses ne sont guère articulées les unes aux autres, elles sont plutôt juxtaposées.

Juxtaposées, elles n'en agissent pas moins les unes sur les autres — par contrecoup, pourrions-nous dire. Ainsi, dans le chapitre « Les Hypothèses en physique », les thèses philosophiques majeures (« Il est clair qu'un fait quelconque peut se généraliser d'une infinité de manières, et il s'agit de choisir ; le choix ne peut être guidé que par des considérations de simplicité » — *S.H.*, 173 — et « Toute généralisation est une hypothèse ; l'hypothèse a donc un rôle nécessaire que personne n'a jamais contesté » — *S.H.*, 178) ne sont pas élaborées par ce qui précède, elles sont plutôt des conséquences directes de la première thèse (« L'expérience est la source unique de la vérité » — *S.H.*, 167) : étant donné que seul le fait observé est vrai et certain, Poincaré ne met jamais en doute le caractère hypothétique du langage. Ainsi, il y a habituation du lecteur aux thèses par les exemples plus qu'élaboration. La thèse « déduite » a donc aussi les apparences d'un fait, et cela d'autant plus qu'elle est à son tour appuyée sur un ensemble de faits. Par suite, les textes de Poincaré sont dans l'ensemble très discontinus, constitués d' « atomes » relativement indépendants les uns des autres, même si la perspective reste très claire.

Du primat de la référence sur le raisonnement[7] pour la justification des thèses philosophiques suit que la majeure partie des conclusions de Poincaré sont des résumés (cf. ci-dessus p. 112), et du reste, dans bien des cas, les expressions « donc » et « en résumé » sont interchangeables :

« Tel est donc le rôle de la physique mathématique ; elle doit guider la généralisation de façon à augmenter ce que j'appelais tout à l'heure le rendement de la science » (*S.H.*, 172).

« En résumé, le plus souvent, toute loi est réputée simple jusqu'à preuve du contraire » (*S.H.*, 174).

Ces résumés ne sont pas seulement des étapes dans la pensée philosophique : ils sont nécessités par la grande discontinuité du texte ; sans étapes bien marquées, le texte serait désarticulé. Poincaré souligne du reste très soigneusement les contours de chaque cellule textuelle par des moyens rhétoriques variés : usage de sous-titres, changements de paragraphes en guise de changements d'optique, adages ou citations pour clore un argument :

« C'est assez pour nous affranchir : on n'est plus esclave quand on peut choisir son maître » (*S.H.*, 171).

« Mieux vaut prévoir sans certitude que de ne pas prévoir du tout » (*S.H.*, 171).

« *Apparent rari nantes in gurgite vasto* » (*S.M.*, 205), à propos de la *no-class theory* de Russell ! Les thèses juxtaposées sont ainsi liées les unes aux autres par des procédés textuels plus que déductifs.

Thèses, références, résumés : l'argumentation de Poincaré ne varie guère. L'une des conséquences de la constance des traits textuels, c'est que les articles et discours philosophiques de Poincaré sont sensiblement de la même longueur — à moins que l'exposé d'un exemple ne demande des développements particulièrement longs —, car on ne peut juxtaposer indéfiniment des arguments : le texte ne formerait plus un tout constitué. D'où, chez Poincaré, des expressions telles que :

« Il est inutile de multiplier ces exemples [...] » (*S.H.*, 52).

« Je pourrais multiplier les exemples, je n'en prendrai qu'un [...] » (*S.H.*, 227).

7. Cf. F. Gonseth, *Le Référentiel, univers obligé de médiatisation*. L'Age d'homme, coll. « Dialectica », Lausanne, 1975.

« Il est inutile de multiplier les exemples. J'en ai dit assez pour pouvoir conclure [...] » (*V.S.*, 111).

« Les exemples abonderaient si je ne craignais, en les citant, de fatiguer l'attention du lecteur » (*V.S.*, 113).

« Je me bornerai à cet exemple unique, il est inutile de les multiplier [...] » (*S.M.*, 53).

La longueur est donc, elle aussi, un trait rhétorique : l'usage répété de l'exemple épuise le sens du texte.

*

Nous connaissons maintenant les principales caractéristiques du texte philosophique de Poincaré ; nous voulons en tirer quelques conséquences importantes pour notre propos.

Nous avons vu que, dans le texte philosophique, les faits pertinents sont intégrés par l'exemple ; il nous faut donc examiner sa fonction. Que resterait-il du texte philosophique de Poincaré si l'on en supprimait les exemples ? Les thèses — mais leurs rapports aux faits seraient très réduits. L'exemple n'est donc pas une introduction intuitive aux idées de Poincaré ni une simple illustration de celles-ci [8] ; il est constitutif du texte : il lie le langage au fait et opère le passage entre le discours philosophique et le discours scientifique. Il intègre dans le texte philosophique des éléments isolés des discours scientifiques — mais ce transfert fait perdre leur sens et leur fonction aux faits, concepts et théories scientifiques : en sciences, leur rôle est délimité et réglé par l'ensemble de la théorie à laquelle ils appartiennent ; en philosophie, extraits de leur contexte, ils « représentent » les deux sources originaires de la connaissance. Ainsi, l'exemple désarticule le discours scientifique pour polariser les éléments qu'il lui emprunte autour des deux instances construites par la philosophie ; mais, ce faisant, il leur confère une fonction qu'ils n'ont pas dans les sciences, celle de justifier les thèses philosophiques. Cette fonction n'est pas la conséquence du seul empirisme exprimé de Poincaré, mais aussi et surtout celle de son texte, puisque l'argumentation y est réduite

8. Pour l'examen des divers rôles de l'exemple dans les textes philosophiques, cf. Günther BUCK, *Lernen und Erfahrung. Zum Begriff der didaktischen Induktion*, Kohlhammer, Berlin, 1967. Voir aussi l'article « Beispiel, Exempel, exemplarisch » du même auteur, dans *Historisches Wörterbuch der Philosophie*, hrsg. Joachim Ritter, Darmstadt, 1971, vol. 1, 818-823.

— ou presque — à la référence au fait. Or cette fonction est proprement philosophique : la philosophie justifiée par les faits justifie les concepts scientifiques en tant que scientifiques (cf. ci-dessus p. 93).

Ainsi le texte philosophique, en tant que texte, comme instauration de ses thèses, confère par le mécanisme de son propre fonctionnement une valeur philosophique au fait que Poincaré lui dénie ; le sens philosophique du donné est déterminé par la forme qui l'intègre au texte philosophique. Nous comprenons alors pourquoi, dans les écrits philosophiques de Poincaré sur la physique, l'expérience n'est pas maintenue dans sa fonction de vérification de la constance des rapports qui unissent faits scientifiques et faits bruts, fonction circonscrite par la physique elle-même, mais est aussi utilisée comme justification philosophique — pensée comme recherche d'origine — des sciences physiques ; d'où l'assimilation, dans le texte philosophique, des notions d'expérience commune et d'expérience scientifique, car le texte philosophique, par l'usage de l'exemple, distend les liens entre une théorie déterminée et les faits qui la concernent. D'autre part, en ce qui concerne les mathématiques, le donné, c'est-à-dire les lois logiques, la faculté de répéter une opération une fois qu'elle est possible, la suite des nombres naturels, le principe d'induction complète sont, eux aussi, l'objet d'une assimilation : celle du concept mathématique et de son origine intellectuelle. Aussi la fonction justificatrice de l'exemple caractérise-t-elle ces donnés eux aussi comme philosophiques, alors qu'explicitement Poincaré construit sa philosophie — et même nous pourrions dire son texte philosophique — sur la donnée préalable du fait brut et la possibilité de la répétition. Cette constatation n'est pas sans importance ; nous verrons dans le chapitre suivant que toute la critique de la logique mathématique repose sur une telle interprétation du donné.

La philosophie de Poincaré est ainsi construite sur les deux bornes du savoir ; à partir d'elles, elle élabore inductivement — d'un point de vue « extentionnel », pour reprendre un terme de Poincaré (c'est-à-dire en connaissant tous les individus dont elle parle) — une conception du monde ; mais elle ne met pas en cause ses sources : elle en est le reflet. Or, son domaine, ce sont les productions délimitées par ses deux sources, tout particulièrement les sciences. La philosophie utilise alors l'espace philosophique, qui est la condition de son fonctionnement, pour justifier ou condamner des concepts ou théories scientifiques ; sa source en est modifiée, car la philosophie lui confère ce faisant le rôle de juge ; aussi les « vraies mathématiques », les « faits bruts » de la physique sont-ils des créations philosophiques, même si, apparemment, ils sont des données pour la philosophie. D'un autre point de vue, nous pouvons dire que ce rôle de juge est assumé par l'exemple, c'est-à-dire par le fait tel qu'il est intégré dans le texte philosophique où il sert de preuve.

Que dire alors de la philosophie de Poincaré ? Elle est parfaitement cohérente ; nous n'avons pu y déceler de contradictions logiques. Mais nous ajoutons : elle n'est pas rigoureuse, car le fonctionnement de la notion d'expérience — et plus généralement celle de donné ou de fait — n'est pas déterminé par ce qu'en dit Poincaré. Or, en l'occurrence, la rigueur n'est pas liée à des caractéristiques purement formelles, mais à une position philosophique ou, plutôt, à ce qui, en elle, est non pensé : le fait comme construction philosophique. Si Poincaré n'a pas discerné la double fonction qu'il attribue à l'expérience, c'est qu'un tel éclaircissement aurait nécessité une réinterprétation des fonctions par lui attribuées aux deux notions de discours et de fait. En effet, notre analyse nous montre, si tant est qu'elle est probante, que le langage n'a pas pour seule fonction la classification conventionnelle des faits, et que — c'est là une affirmation lourde de conséquences — langue et sémantique ne sont pas théoriquement séparables. Aussi pouvons-nous affirmer que l'empirisme de Poincaré est condamné par son propre texte.

VI. Critique de la logique mathématique

La polarisation autour de deux sources originelles des exemples constituant la signification du texte philosophique : tel est le procédé par lequel la philosophie de Poincaré constitue la notion de « donné ». Ce résultat va nous permettre d'aborder la critique de la logique mathématique, comme nous l'avons annoncé dans l'introduction : s'appuyant sur un « donné » compris comme « fait », Poincaré distingue d'un point de vue apparemment « purement objectif » (*D.P.*, 85) le mathématique du non-mathématique. Nous allons exposer tout d'abord la signification de ce « donné » relativement à la philosophie des mathématiques, puis, dans un second temps, montrer comment la construction de ce « donné » justifie aux yeux de Poincaré l'exclusion du domaine des « vraies mathématiques » (M.L. (1906), 307) d'une grande partie des œuvres de Cantor et des nouveaux développements de la logique dite « mathématique ». Nous utiliserons ce dernier terme de façon large, parfois historiquement abusive : la distinction systématique entre les divers courants logicistes et formalistes n'est pas pertinente pour la compréhension du texte de Poincaré qui s'est contenté d'une image très approximative de la nouvelle mathématique. Nous comprendrons parmi les critiques à la logique mathématique toutes celles qui la concernent de près ou de loin, même si ce n'est pas en propre. Notre exposé ne sera donc en aucune façon historique : nous n'énumérerons pas toutes les objections de Poincaré à ses adversaires ni ne rendrons compte des différentes théories de ces derniers, auxquels nous prêterons le même nom générique que Poincaré — celui de « cantorien[1] » ; notre propos, purement philosophique, vise essentiellement les raisons, rarement explicites, de ces objections.

Contrairement à ce que nous avons fait dans les chapitres précédents, nous nous référerons aux textes originaux parus dans la *Revue de métaphysique et de morale* en 1905 et 1906 et non plus à leur adaptation pour *Science et Méthode* (1908) rendue parfois difficilement compréhensible par les nombreuses coupes qu'y a pratiquées Poincaré (cf. « Sigles »).

A. Les « vraies mathématiques »

Le critère de scientificité d'un concept mathématique est, paradoxalement, son lien à son origine — origine que notre dernière analyse nous a désignée non point comme source mais comme effet de la philosophie inductiviste de Poincaré. Ce lien, cette médiation, entre les structures intellectuelles de l'esprit et les mathématiques, Poincaré le nomme explicitement en plusieurs endroits : c'est la faculté qu'a notre esprit de répéter une même opération une fois qu'elle est possible (*S.H.*, 37, 83). L'examen des conséquences de cette thèse nous permettra de cerner ce que Poincaré entend par « vraies mathématiques ». Nous nous limiterons pour cette étude au domaine de l'arithmétique, suivant en cela Poincaré dans son article « Sur la nature du raisonnement mathématique » (*S.H.* (1894), 9-28) : les objets mathématiques y sont encore « purs » de toute notion tirée de l'expérience.

« Le seul objet naturel de la pensée mathématique, c'est le nombre entier » (*V.S.*, 110) : il est la traduction, en termes mathématiques, de notre faculté de répéter une opération — en l'occurrence celle de successeur. La suite des nombres naturels apparaît alors comme une suite indéfinie, au sens où elle n'est

1. *Cantorien :* « qu'on me passe ce vocable commode bien que je veuille parler ici non des mathématiciens qui suivent la voie ouverte par Cantor, ni peut-être même des philosophes qui se réclament de lui, mais de ceux qui ont les mêmes tendances d'une façon indépendante » (D.P., 93). Nous verrons plus loin de quelles tendances il s'agit.

à la fois ni limitée ni définissable conceptuellement parlant comme un ensemble clos [2] :

« [...] quand nous parlons d'une collection infinie, nous voulons dire une collection à laquelle on peut sans cesse ajouter de nouveaux éléments (semblable à une liste de souscription qui ne serait jamais close dans l'attente de nouveaux souscripteurs) » (*D.P.*, 9).

« Quand je parle de tous les nombres entiers, je veux dire tous les nombres entiers qu'on a inventés et tous ceux qu'on pourra inventer un jour [...]. Et c'est ce " *l'on pourra* " qui est l'infini » (*D.P.*, 25-26).

Ainsi, une affirmation sur une infinité de nombres (pour être plus exact, il faudrait parler ici d' « indéfinité ») n'est que la traduction ou l'abréviation d'un ensemble de propriétés concernant les nombres finis.

« [...] tout théorème sur les nombres infinis ou surtout sur ce qu'on appelle ensembles infinis, ou cardinaux transfinis, ou ordinaux transfinis, etc., ne peut être qu'une façon abrégée d'énoncer des propositions sur les nombres finis » (*D.P.*, 29).

« [...] il ne saurait y avoir d'axiome évident concernant les nombres infinis ; toute propriété des nombres infinis n'est que la traduction d'une propriété des nombres finis ; c'est cette dernière qui pourra être évidente, tandis qu'il faudra démontrer la première en la comparant à la dernière et en montrant que la traduction est exacte » (*D.P.*, 30).

Il nous faut alors comprendre ce qu'en l'occurrence Poincaré entend par « traduction » :

« Je prendrai comme exemples des théorèmes comme ceux-ci : la suite des nombres premiers est illimitée, la série $\Sigma \frac{1}{n^2}$ est convergente, etc. ; chacun d'eux peut se traduire par des égalités ou des inégalités où ne figurent que des nombres finis. Ces

2. Cette métaphore est de Poincaré : « [...] es ist klar, dass diese Gesamtheit von höheren Mächtigkeit sein muss. Es fragt sich aber, ob sie abgeschlossen ist, ob wir also von ihrer Mächtigkeit ohne Widerspruch sprechen dürfen. Ein aktual Unendliches gibt es jedenfalls nicht » (*Ueber transfinite Zahlen*, *Œuvres*, t. 11, 124 ; voir aussi *D.P.*, 25). « [...] il est clair que cet ensemble de puissance supérieure doit exister. Mais on peut se demander s'il est clos et si l'on peut parler de sa puissance sans contradiction. Il n'y a pas d'infini actuel ».

théorèmes participent de l'infini, non parce qu'une des vérifications possibles en participe elle-même, mais parce que les vérifications possibles sont en nombre infini » (*D.P.*, 85).

La démonstration a alors pour rôle de dispenser le mathématicien d'une interminable série de vérifications au bout de laquelle il ne parviendrait jamais. Néanmoins, la démonstration n'est pas indépendante de ces vérifications. Si ces dernières ne sont pas praticables, la démonstration n'est pas considérée comme valide.

« Un théorème qui ne comporte aucune conclusion vérifiable a-t-il un sens ? ou plus généralement un théorème quelconque a-t-il un sens en dehors des vérifications qu'il comporte ? » (*D.P.*, 86.)

La réponse de Poincaré est franchement négative — il suffit de lire ce qu'il dit du théorème du bon ordre de Zermelo :

« Prenons pour exemple le théorème de Zermelo, d'après lequel l'espace est susceptible d'être transformé en un ensemble bien ordonné ; les cantoriens seront séduits par la rigueur, réelle ou apparente, de la démonstration ; les pragmatistes [dont Poincaré] leur répondront : Vous dites que vous pouvez transformer l'espace en un ensemble bien ordonné ; eh bien ! transformez-le. — Ce serait trop long. — Alors montrez-nous au moins que quelqu'un qui aurait assez de temps et de patience pourrait faire la transformation. — Non, nous ne le pouvons pas parce que le nombre des opérations à faire est infini, il est même plus grand que alephzéro. — Pouvez-vous montrer comment on pourrait exprimer en un nombre fini de mots la loi qui permettrait d'ordonner l'espace ? — Non — et les pragmatistes concluent que le théorème est dénué de sens, ou faux, ou tout au moins indémontré » (*D.P.*, 87).

Aussi la conception de la suite des nombres naturels comme engendrée par répétition indéfinie conduit-elle à l'évacuation de tout concept d'infini indépendant des propriétés des nombres finis : « *Il n'y a pas d'infini actuel* » (M.L. (1906), 316 ; *D.P.*, 9 ; *Ueber transfinite Zahlen, Œuvres*, t. 11, 124). Néanmoins, dans certains passages, Poincaré concède tout juste alephzéro, prudemment, comme une manière de parler, dans la mesure où il peut être conçu comme effectivement énumérable :

« [...] les définitions possibles, étant exprimables par des phrases, peuvent toujours être numérotées avec des numéros ordinaires depuis un jusqu'à l'infini. A ce compte, il n'y aurait qu'un seul nombre cardinal infini possible, le nombre aleph-zéro [...][3] » (*D.P.*, 88).

Les thèses philosophiques de Poincaré ne lui permettent pas de délimiter mathématiquement le fini et l'infini ; aussi Poincaré s'oppose-t-il catégoriquement à la construction des ensembles transfinis de Cantor.

La thèse de la répétition ne signifie donc pas seulement l'impossibilité de « fermer » la suite des nombres naturels : elle pose une exigence au mathématicien : tout « être mathématique » doit pouvoir être individuellement atteint par une procédure finie ; bref, il doit être « constructible[4] ».

La constructibilité est certainement, comme l'a souligné J. de Lorenzo, une des notions clefs de la philosophie des mathématiques de Poincaré : c'est celle qui guide sa démarche aussi bien dans sa théorie de la définition que du raisonnement mathématique. Tel est le thème des lignes qui vont suivre.

1. Les définitions en mathématiques

« Toute définition est [...] une classification. Elle sépare les objets qui satisfont à la définition et ceux qui n'y satisfont pas et les range dans deux classes distinctes » (*D.P.*, 11).

Cette caractérisation de la définition est néanmoins insuffisante : elle ne donne pas le moyen de concevoir individuellement chacun des objets qui tombent dans la classe définie.

« Si nous considérons un ensemble, et que nous voulions en définir les différents éléments, cette définition se décomposera naturellement en deux parties ; la première partie de la définition, commune à tous les éléments de l'ensemble, nous apprendra à les distinguer des éléments qui sont étrangers à cet ensemble ; ce sera la définition de l'ensemble ; la seconde partie nous apprendra à distinguer les uns des autres les différents éléments de l'ensemble » (*D.P.*, 27).

3. Ainsi Poincaré admet que Cantor a pu « démontrer par exemple que le nombre cardinal des nombres rationnels est égal à celui des nombres entiers, ou celui des points de l'espace à celui des points d'une droite » (*D.P.*, 13). Il s'agit là, pour Poincaré, d'un problème technique dans les vraies mathématiques.

4. Ce n'est pas en ce sens que Poincaré utilise le terme de construction (*S.H.*, 26) ; nous l'utilisons conformément à l'usage courant des livres consacrés à la « crise » des fondements (*cf.* ci-dessous, p. 130).

Une définition doit donc permettre de distinguer, ou de construire, chaque « être » mathématique ; aussi est-elle essentiellement liée pour Poincaré à la notion d'existence en mathématiques :

« [...] en définissant un objet, on affirme que la définition n'implique pas contradiction » (M.L. (1905), 819).

« [...] on admire le pouvoir que peut avoir un mot. Voilà un objet dont on n'aurait rien pu tirer, tant qu'il n'était pas baptisé ; il a suffi de lui donner un nom pour qu'il fît des merveilles. Comment cela se fait-il ? C'est parce qu'en lui donnant un nom, nous avons affirmé implicitement que l'objet existait (c'est-à-dire était pur de toute contradiction) et qu'il était entièrement déterminé » (*D.P.*, 92 ; cf. *S.H.*, 59).

Si Poincaré suit *grosso modo* les distinctions alors en usage (surtout dans l'école italienne de Peano), il insiste principalement sur les différentes procédures par lesquelles les définitions décrivent ou engendrent les objets mathématiques, et ne développe, selon son habitude, que les points sujets à controverse.

Poincaré distingue tout d'abord les définitions directes, pour lesquelles la substitution du défini par le définissant est toujours possible (*D.P.*, 89), et les définitions indirectes, pour lesquelles seule l'élimination du terme défini est possible (*D.P.*, 90).

« [...] la définition directe [...] peut se faire soit par *genus proximum et differentiam specificam*, soit par construction » (*D.P.*, 89).

Poincaré ne s'arrête pas sur la définition de l'Ecole : son rôle se réduit à la classification d'objets connus. Il mentionne plusieurs fois, mais non explicitement, la définition dite « par abstraction », qui consiste à déterminer une classe d'objets en fonction d'objets connus en posant les conditions d'égalité de ces fonctions pour des arguments différents. Ce type de définition, légitime aux yeux de Poincaré, présente, selon lui, trois défauts. Tout d'abord, elle n'est pas complète :

« [...] elles définissent non pas un individu, mais un genre tout entier ; elles sont légitimes et ce sont même celles dont on fait le plus fréquemment usage ; mais, d'après les pragmatistes, on doit sous-entendre l'ensemble des individus qui satisfont à la définition et qu'on pourrait achever de définir en un nombre fini de mots [...] (*D.P.*, 89).

« [...] quand on dit “une fonction constante ”, on a une formule d'un nombre fini de mots et qui s'applique à une infinité de fonctions ; mais qui ne les définit pas, qui définit seulement leur relation avec un certain nombre, à savoir la valeur constante de la fonction. Pour achever de définir une de ces fonctions, il faut définir cette valeur constante.

C'est seulement si cette valeur constante peut être définie en un nombre fini de mots que la fonction elle-même pourra l'être » (« Réflexions sur deux notes... », *Acta math.*, 32 (1909) ; *Œuvres*, t. 11, p. 114-115).

En second lieu, la définition par abstraction est artificielle ; si elle a contribué à faire de l'analyse un corps de doctrine parfaitement rigoureux (« On peut dire qu'aujourd'hui la rigueur absolue est atteinte » — *V.S.*, 33) en réduisant tous les ensembles de nombres en « systèmes finis ou infinis de nombres entiers, reliés entre eux par un réseau de relations d'égalités ou d'inégalités » (*V.S.*, 32), il n'en reste pas moins que,

« [...] en devenant rigoureuse, la science mathématique prend un caractère artificiel qui frappera tout le monde ; elle oublie ses origines historiques ; on voit comment les questions peuvent se résoudre, on ne voit plus comment et pourquoi elles se posent » (*V.S.*, 35 ; cf. ci-dessus p. 30).

La définition par abstraction codifie après coup les objets d'une théorie mathématique par ailleurs déjà constituée ; c'est là son troisième défaut, elle n'est pas créatrice.

Au contraire, l'importance de la définition inductive tient au fait que, selon Poincaré, elle est apte à engendrer indéfiniment des êtres mathématiques ; elle est l'une des manifestations de la faculté de répétition. Ce point est assez important pour que nous suivions de près le texte original. Supposons définies préalablement les opérations $x + 1$ et $x + (a - 1)$:

« [...] l'opération $x + a$ sera définie par l'égalité :

(1) $$x + a = [x + (a - 1)] + 1.$$

Nous saurons donc ce que c'est que $x + a$ quand nous saurons ce que c'est que $x + (a - 1)$, et, comme j'ai supposé au début que l'on savait ce que c'est que $x + 1$, on pourra définir successivement et " par récurrence " les opérations $x + 2$, $x + 3$, etc.

Cette définition mérite un moment d'attention, elle est d'une nature particulière qui la distingue déjà de la définition purement logique [5] ; l'égalité (1) contient en effet une infinité

5. Au sens signalé ci-dessus, p. 22.

de définitions distinctes, chacune d'elles n'ayant un sens que quand on connaît celle qui la précède » (*S.H.*, 15-16).

La définition inductive permet donc de créer une infinité d'objets finis, en d'autres termes, de « passer du fini à l'infini » (*S.H.*, 22) :

« Dans ce domaine de l'arithmétique [...] l'idée de l'infini mathématique joue déjà un rôle prépondérant, et sans elle il n'y aurait pas de science parce qu'il n'y aurait rien de général » (*S.H.*, 22).

L'existence des objets ainsi construits est garantie par celle de la suite des nombres naturels qui est donnée.

La définition par postulats est une définition indirecte ; elle s'applique à un système de notions dont les relations sont déterminées par un ensemble d'axiomes ou de postulats :

« Si l'on a défini préalablement toutes ces notions, sauf une, alors cette dernière sera par définition l'objet qui vérifie ces postulats » (M.L. (1905), 818) ;

les postulats sont alors, pour reprendre un terme de Poincaré, la « définition déguisée » de cette notion.

Mais, dans ce cas, rien ne garantit l'existence de la notion définie ; il faut donc, pour pouvoir conférer à un système de postulats le rôle de définition déguisée, fournir séparément une démonstration de la non-contradiction de ce système ; c'est là un point sur lequel Poincaré ne cessera d'insister. Selon lui, il n'y a que deux types de démonstrations possibles : la première consiste à exhiber un exemple (ce que l'on a plus tard appelé « modèle ») vérifiant à la fois tous les postulats en question ; cela n'est possible que dans certains cas : c'est ainsi que Poincaré, par son « dictionnaire » (*S.H.*, 57), a montré que la géométrie euclidienne est un modèle pour celles de Lobatchevsky et de Riemann ; aussi a-t-il défini la notion de distance par postulats :

« Les autres axiomes de la géométrie ne suffisent pas pour définir complètement la distance ; la distance sera alors, par définition, parmi toutes les grandeurs qui satisfont à ces autres axiomes, celle qui est telle que le postulatum d'Euclide soit vrai » (M.L. (1905), 819).

Si la *démonstration par l'exemple* n'est pas possible, il faudra recourir au principe d'induction complète :

« Pour établir que les postulats n'impliquent pas contradiction, il faut alors envisager toutes les propositions que l'on peut déduire de ces postulats considérés comme prémisses et montrer que, parmi ces propositions, il n'y en a pas deux dont l'une soit la contradictoire de l'autre. [...]

Si ces propositions sont en nombre infini [...], il faut recourir à des procédés de démonstration où en général on sera forcé d'invoquer ce principe d'induction complète [...] » (M.L. (1905), 820).

A supposer que les axiomes ne sont pas contradictoires entre eux, il faut prouver, selon Poincaré, que la conséquence de ces axiomes d'indice $n + 1$ (l'ordre de ces conséquences n'étant pas absolument imposé — M.L. (1906), 300) ne conduit pas à une contradiction si celle d'indice n n'y conduit pas non plus ; on peut alors conclure que, « [...] *quelque loin* que l'on poursuive la chaîne des raisonnements » (M.L. (1906), 26), on ne rencontrera pas de contradiction.

« [...] un raisonnement nouveau ne pourra pas introduire de contradiction, pourvu que l'on suppose que, dans la suite des raisonnements antérieurs, nous n'en ayons pas rencontré jusqu'ici » (M.L. (1905), 833).

Ce qui n'est possible, bien entendu, que si la suite des conséquences est elle-même dénombrable :

« Un raisonnement formé d'une suite *non dénombrable* de propositions et de syllogismes, qu'est-ce que cela peut bien être ? Comment se représenter cela ? Peut-être pouvons-nous nous contenter d'être assurés que nous ne rencontrerons *jamais* de contradiction ; *jamais* signifiant au bout d'un temps fini si long qu'il soit ; quand même nous n'aurions plus la même certitude quand il s'agirait d'un temps postérieur à la fin de l'éternité » (M.L. (1906), 300).

Cette conception de l'effectuation de la démonstration de la non-contradiction est certainement inspirée à Poincaré par sa thèse de la répétabilité indéfinie : si nous savons par intuition que le nombre des pas déductifs est un nombre entier, nous pouvons raisonner par induction sur ce nombre de pas. Il reste néanmoins une difficulté : suffit-il, pour démontrer la non-contradiction d'une théorie, de savoir simplement que l'on a et que l'on peut encore effectuer un nombre indéfini de pas sans déterminer la nature de ces pas ? Souvenons-nous de ce que dit Poincaré : le jugement sur lequel repose le raisonnement par récurrence

« [...] n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible » (*S.H.*, 23-24).

Pour qu'une telle démonstration soit possible, il faudrait donc être assuré que chacun des énoncés d'une théorie est conséquence de l'application de la même règle déductive.

2. Les raisonnements en mathématiques

a) *Les raisonnements analytiques*

C'est ainsi que Poincaré caractérise ce qu'il appelle (dans *S.H.*, 26-28) le raisonnement par « construction », dont il distingue deux variantes.

La première construit en substituant à l'un des termes d'une égalité un terme égal, mais non identique ; ce procédé transforme une combinaison en une autre en restant toujours au même niveau de généralité.

Par « construction », Poincaré entend aussi la démarche consistant à examiner les propriétés d'un objet mathématique plus général que l'objet effectivement étudié ; ce type de raisonnement met en évidence des analogies qui permettent d'économiser un certain nombre de démonstrations :

« Une construction ne devient [...] intéressante que quand on peut la ranger à côté d'autres constructions analogues, formant les espèces d'un même genre » (*S.H.*, 27).

Poincaré attache une très grande importance à ce type de raisonnement : l'analogie est l'un des moteurs de l'invention mathématique (cf. *S.M.*, 22). Néanmoins, il reste, pour Poincaré, analytique, car il ne nous permet pas de passer à un niveau de généralité plus élevé que celui des objets pris en considération :

« Le procédé analytique " par construction " ne nous oblige pas à [...] descendre, mais il nous laisse au même niveau » (*S.H.*, 28).

C'est pourquoi Poincaré ne conçoit pas la « construction » comme « le raisonnement mathématique par excellence », pour reprendre une de ses expressions (*S.H.*, 19).

« Nous ne pouvons nous élever que par l'induction mathématique, qui seule peut nous apprendre quelque chose de nouveau. Sans l'aide de cette induction différente à certains égards de l'induction physique, mais féconde comme elle, la construction serait impuissante à créer la science » (*S.H.*, 28).

b) *Le raisonnement synthétique*

Passons donc à l'examen de l'induction complète [6].

« [...] cette induction n'est possible que si une même opération peut se répéter indéfiniment » (*S.H.*, 28).

Elle est donc, au même titre que la définition par induction,

« [...] un instrument qui permet de passer du fini à l'infini » (*S.H.*, 22).

Poincaré présente cette idée encore sous une autre forme — qui lui a valu bien des méprises de la part de ses commentateurs — inspirée de la logique aristotélicienne :

« Le caractère essentiel du raisonnement par récurrence, c'est qu'il contient, condensés pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes » (*S.H.*, 20).

Cette condensation n'est pas néanmoins le simple résumé d'une suite de syllogismes « disposés en cascade » (*S.H.*, 20 ; ce qu'en logique on appelle le « sorite ») : réduire le raisonnement par récurrence à cette suite conduirait à un cercle vicieux — ce que Poincaré exprime très clairement, quoique dans un autre contexte :

« [...] il y a des nombres qui satisfont au principe, et ces nombres, par définition, je les appelle entiers. Et, dans l'application, qu'est-ce que je fais ? Je dis que, quel que soit le *nombre* de mes raisonnements successifs [ici les pas du sorite], je ne serai pas conduit à des conclusions contradictoires parce que ce *nombre*, étant entier, satisfait au principe. Mais comment saurais-je que le nombre de mes raisonnements est un nombre entier ? Si je donne à ce mot le sens vulgaire, cela ne sera pas difficile ; mais, si je le définis comme je viens de le faire, comment saurais-je que le nombre de mes raisonnements est un de ceux qui satisfont au principe ? » (M.L. (1905), 834).

Pour s'en assurer, il faudrait raisonner par induction. Autrement dit, le raisonnement par récurrence n'est pas susceptible d'une justification de type logique [7] : il repose, selon les termes

---

6. Nous utiliserons indifféremment les termes d' « induction complète » et de « raisonnement par récurrence ».
7. Classique.

que Poincaré emprunte à Kant, sur un « jugement synthétique *a priori* », dont la traduction mathématique est le principe d'induction complète. Synthétique : parce qu'il est la conceptualisation du passage du fini à l'infini, aussi est-il créateur et donc, dans les catégories de Poincaré, synthétique. Synthétique : parce que sa fonction est d'articuler la définition par induction et le raisonnement par induction. C'est là un des points les plus curieux de la philosophie des mathématiques de Poincaré — l'un de ceux aussi généralement négligés dans les commentaires ; pourtant, Poincaré est très net à ce sujet : le principe d'induction

« [...] signifie que, pour tous les nombres que l'on peut obtenir par additions successives, on peut démontrer une propriété quelconque par voie de récurrence.

Un nombre peut être défini par récurrence ; sur ce nombre, on peut raisonner par récurrence ; ce sont deux propositions distinctes. Le principe d'induction ne nous apprend pas que la première est vraie, il nous apprend que la première implique la seconde » (M.L. (1905), 835).

« [...] *un nombre entier est celui qui peut être obtenu par additions successives, c'est celui que l'on peut définir par récurrence.*

[...] *un nombre entier est celui sur lequel on peut raisonner par récurrence* [...].

Les deux définitions ne sont pas identiques ; elles sont équivalentes sans doute, mais elles le sont en vertu d'un jugement synthétique *a priori* ; on ne peut pas passer de l'une à l'autre par des procédés purement logiques[8] » (M.L. (1906), 32).

« Un nombre entier est un nombre cardinal ; zéro est un nombre entier — tout nombre entier a un suivant qui diffère de lui et qui est aussi un entier —, tout nombre entier, zéro excepté, a un précédent qui diffère de lui et qui est un entier.

Il y aurait peut-être avantage à modifier cette définition ; mais c'était celle que j'avais en vue quand je disais définir par récurrence ; ce qui m'importe, c'est qu'elle n'implique pas *analytiquement* le principe d'induction » (M.L. (1906), 303).

---

8. Justement parce que ces définitions ne permettent pas, selon Poincaré, de « clore » le concept de nombre entier (voir, plus haut, p. 123).

« Que dire maintenant du principe d'induction, objet principal du débat ? Pour éviter toute espèce de confusion, introduisons deux définitions et une proposition.

Définition A. Un nombre *fini* est un nombre cardinal n tel que $n < n + 1$.

Définition B. Un nombre *inductif* est un nombre qui fait partie de toutes les classes récurrentes.

Proposition C. Tout nombre fini est inductif [9]. [...]

Pour moi, c'est la proposition C qui est le principe d'induction ; cette proposition n'est pas une définition et elle est indémontrable (cet énoncé nouveau du principe d'induction n'est pas le même que ceux que j'ai proposés antérieurement ; mais il leur est équivalent et il me semble préférable) » (M.L. (1906), 867).

---

9. Cf. M.L. (1906), 308 ; « [...] profitons de quelques dénominations nouvelles heureusement introduites par M. Russell dans son récent mémoire.

Appelons *classe récurrente* toute classe de nombres qui contient zéro, et qui contient $n + 1$ si elle contient n.

Appelons *nombre inductif* tout nombre qui fait partie de *toutes* les classes récurrentes.

Appelons *nombre fini* le nombre cardinal d'une classe qui n'est équivalente à aucune de ses parties » (cf., de même, *D.P.*, 15). Voici le passage du mémoire de Russell auquel Poincaré fait allusion (cf. M.L. (1906), 294; il s'agit de « On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types », 49) :

« We may define a finite cardinal number

(a) as a cardinal number which obeys mathematical induction starting from *0 ;*

(b) as a cardinal number such that any class which has that number contains no part similar to itself.

We will for the present call any number of the kind (a) an *inductive* number, and any number of the kind (b) a *finite* number. » (« Nous pouvons définir un nombre cardinal fini

(a) comme un nombre cardinal qui obéit à l'induction mathématique partant de *0* ;

(b) comme un nombre cardinal tel que chaque classe qui a ce nombre ne contient pas de partie équivalente à elle-même.

Nous allons pour le moment appeler chaque nombre du type (a) un nombre *inductif* et chaque nombre du type (b) un nombre *fini.* ») Il est alors facile, ajoute Russell, de démontrer que tous les nombres inductifs sont des nombres finis ; mais, inversement, sans recourir à un axiome équivalent à l'axiome du choix de Zermelo, « so far I know, we cannot prove that the number of classes contained in a finite class is always finite, or that every finite number is an inductive number ». (« [...] autant que je sache, nous ne pouvons pas démontrer que le nombre des

Cette interprétation du principe d'induction complète résulte de la thèse de la répétabilité indéfinie, et — ce qui revient au même — du refus de considérer l'infini actuel comme concept mathématique (nous verrons cela plus loin dans les détails) ; en d'autres termes, c'est l'exigence de la constructibilité de chaque être mathématique pris individuellement qui établit aux yeux de Poincaré l'équivalence entre les formulations suivantes :

« [...] il [le principe d'induction] n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible » (*S.H.*, 23-24),

et

« Tout nombre fini est inductif » (M.L. (1906), 867).

---

classes contenues dans une classe finie est toujours fini, ou que chaque nombre fini est un nombre inductif »), ce qui est la proposition C de Poincaré. La définition A de Poincaré correspond à (b), et B à (a).

Poincaré dissocie la définition du nombre inductif de Russell en celle de classe récurrente et de nombre inductif proprement dit pour montrer qu'elle repose sur une classification non prédicative. Voyons cela de plus près : « Appelons *classe récurrente* toute classe de nombres [...] » : distinguons donc soigneusement *N* de la notion, plus générale, de classe récurrente. Il est alors possible de démontrer (M.L. (1906), 309), par exemple, que la classe des nombres non inductifs est récurrente ; or, pour en effectuer la preuve, il faut se fixer un nombre inductif *n ;* c'est là qu'intervient le cercle : la notion de classe récurrente, qui sert de définition au nombre inductif, peut reposer elle-même sur la notion de nombre inductif. « Un nombre inductif est celui qui appartient à *toutes* les classes récurrentes; si nous voulons éviter un cercle vicieux nous devons entendre : *à toutes les classes récurrentes dans la définition desquelles n'intervient pas déjà la notion de nombre inductif* » (M.L. (1906), 309-310). Aussi Poincaré rejette-t-il cette définition du nombre inductif, non pas pour la remplacer par une autre, mais, comme nous l'avons vu, pour en faire l'intuition fondamentale des mathématiques.

Ainsi, l'usage de cette définition du nombre inductif, qui, tout d'abord, semble être un concept, n'est dicté que par la stratégie polémique du texte de Poincaré qui consiste ici à amener « naturellement » sa solution au problème en réfutant l'opinion d'autrui : si cette définition a un sens dans le texte de Poincaré, ce n'est pas tant par son contenu, du reste difficilement compréhensible sans recours à d'autres textes, que par sa fonction argumentative. C'est là aussi un bel exemple de la méthode de lecture — d'écriture — de Poincaré : les inexactitudes de Poincaré relatives au texte de Russell (cf. surtout M.L. (1906), 309) montrent qu'il va droit aux notions qui lui semblent fondamentales ; de nouveau, Poincaré privilégie l'exemple par rapport au texte. Ce qui justifie notre analyse rhétorique du texte de Poincaré : nous voyons encore ici que le texte précède le raisonnement.

Nous verrons dans la suite que cette interprétation est une clef pour la compréhension de l'attitude de Poincaré à l'égard de ce que l'on appelle souvent la « crise des fondements ».

B. Poincaré face à la « crise » des fondements des mathématiques (1905 à 1912)

« Il est temps de faire justice de ces exagérations. Je n'espère pas les convaincre ; car ils ont trop longtemps vécu dans cette atmosphère. D'ailleurs, quand on a réfuté une de leurs démonstrations, on est sûr de la voir renaître avec des changements insignifiants, et quelques-unes d'entre elles sont déjà ressorties plusieurs fois de leurs cendres. Telle autrefois l'hydre de Lerne avec ses fameuses têtes qui repoussaient toujours. Hercule s'en est tiré parce que son hydre n'avait que neuf têtes, à moins que ce ne soit onze ; mais ici il y en a trop, il y en a en Angleterre, en Allemagne, en Italie, en France, et il devrait renoncer à la partie. Je ne fais donc appel qu'aux hommes de bon sens sans parti pris » (*S.M.*, 155).

Ce texte, apparemment anodin, nous intéresse parce qu'il nous montre que Poincaré n'a pas compris comme « crise » les difficultés liées à la théorie des ensembles et au problème du fondement des mathématiques, contrairement, rappelons-le, à son interprétation relative aux nouvelles découvertes en physique (cf. chap. 3, § 2, « La Mécanique et la Physique ») : il considère visiblement ses adversaires comme des dogmatiques qui persévèrent dans l'erreur et non pas comme les porte-parole d'un problème réel ; ses articles parus dans la *Revue de métaphysique et de morale* en 1905 et 1906 en témoignent par leur style : Poincaré se contente de remarques juxtaposées sans ordre et sans beaucoup de soin — ce qui l'a conduit à de nombreuses erreurs historiques que nous ne relèverons pas ici, puisque Couturat l'a fait minutieusement [10]. Son dernier article (1909) et sa dernière conférence (1912) [11] sont plus systématiques : il semble que Poincaré ait pris conscience que ses remarques piquantes, voire ironiques, ne suffisaient pas à réduire ses adversaires au silence.

10. Dans son article « Pour la logistique », *R.M.M.* (1906), p. 208-250.
11. Publiés dans *Dernières pensées.*

La raison de l'attitude de Poincaré est aisément compréhensible : disposant d'un « donné » objectif, Poincaré rejette ce que ce donné ne lui désigne pas comme faisant partie des « vraies mathématiques » :

« [...] le cantorisme et la logistique sont seuls en cause ; les vraies mathématiques, celles qui servent à quelque chose, pourront continuer à se développer d'après leurs principes propres, sans se préoccuper des orages qui sévissent en dehors d'elles, et elles poursuivront pas à pas leurs conquêtes accoutumées qui sont définitives et qu'elles n'ont jamais à abandonner » (M.L. (1906), 307).

Les erreurs communes aux cantoriens [12] et aux logiciens relèvent, selon Poincaré, de leur « croyance » (M.L. (1906), 868) à l'infini actuel, si bien qu'il a jugé nécessaire d'ajouter dans *Science et Méthode* quelques pages d'introduction aux articles parus dans la *Revue de métaphysique et de morale* (1905, 1906) pour souligner le rôle primordial de cette « croyance » dans les travaux de ses adversaires. Or elle conduit nécessairement, selon Poincaré, à une « inversion » (c'est le terme de J. de Lorenzo), ontologique d'abord — elle déracine les mathématiques à la fois de leur passé et de leur source originelle en postulant l'existence de l'infini actuel —, méthodologique ensuite — elle procède du genre à l'espèce, de l'ensemble aux éléments.

« Un des traits caractéristiques du cantorisme, c'est qu'au lieu de s'élever au général en bâtissant des constructions de plus en plus compliquées et de définir par construction, il part du *genus supremum* et ne définit, comme auraient dit les scolastiques, que *per genus proximum et differentiam specificam* » (*S.M.*, 41).

Aux yeux des cantoriens,

« [...] pour enseigner l'arithmétique d'une façon vraiment logique, on devrait commencer par établir les propriétés générales des nombres cardinaux transfinis, puis distinguer parmi eux une toute petite classe : celle des nombres entiers ordinaires. [...]

12. Poincaré n'a pas été toujours aussi farouchement anticantorien. Sa définition du continu dans *La Science et l'Hypothèse* comme ensemble d'une infinité de points distincts est proche des conceptions de Cantor (cf. J. Vuillemin, *Leçons sur la première philosophie de Russell*, p. 213). Il vaut la peine de noter que c'est à ce seul propos que Russell cite Poincaré tout au long de *The Principles of Mathematics* (p. 347).

Cette méthode est évidemment contraire à toute saine psychologie ; ce n'est certainement pas comme cela que l'esprit humain a procédé pour construire les mathématiques [...] » (*S.M.*, 154).

Si, dans ce dernier passage, Poincaré insiste surtout sur les conséquences relatives à la pédagogie, il n'en reste pas moins que c'est au nom de cette inversion que Poincaré énoncera la plupart de ses objections. Nous allons donc poursuivre notre exposé en suivant ses diverses manifestations.

1. Le rôle de l'induction complète

Le premier enjeu, et certainement le plus considérable, de l'inversion méthodologique concerne l'interprétation du rôle du principe de l'induction complète : en postulant l'existence de l'infini actuel, les cantoriens ont limité l'application de ce principe au domaine des nombres finis ; ils n'admettent donc pas ce principe comme intuition fondamentale et originelle des mathématiques. Une telle position conduisait, selon Poincaré, aux plus grosses difficultés. Si la suite des nombres naturels est indéfinie, il n'y a pas moyen de distinguer d'une façon précise la classe des nombres finis parmi les ensembles de nombres cardinaux : en posant l'existence de l'infini actuel, on présuppose la distinction du fini et de l'infini comme déjà acquise. En second lieu, en refusant au principe d'induction le statut de jugement synthétique *a priori*, les cantoriens et les logiciens se privent du moyen de démontrer la non-contradiction des théories qu'ils construisent. Ces deux arguments sont étroitement liés : tous deux reposent sur l'idée que la suite des nombres naturels n'est conceptuellement pas limitable. Ainsi, la position de Poincaré est claire : elle découle directement de sa conception des « vraies mathématiques ». Ce qu'il nous reste donc à examiner, c'est le fonctionnement de ces thèses au cours de la polémique : nous y verrons mieux les raisons du « refus » de Poincaré.

G. Peano avait, dès 1889[13], élaboré une axiomatisation de l'arithmétique qui, sous sa forme classique (cf. les différentes éditions du *Formulaire*), repose sur trois notions primitives et

13. Dans « Arithmetices principia, nova methodo exposita » (en « latino sine-flexione »), 1889, XVI-20 ; *Opere scelte*, t. 2, p. 20-25.

cinq propositions primitives ou axiomes. Reproduisons l'une de ces formulations (f 1905 ; tomo V del F. completo) :

« N_0 vale " numero ", et es nomen commune de *0, 1, 2,* etc.
0 « " zero "
+ « " plus ". Si a es numero, $a+$ indica " numero sequente a ".
°0 $N_0 \in Cls$
°1 $0 \in N_0$
°2 $a \in N_0 . \supset . a+ \in N_0$
°3 $s \in Cls . 0 \in s : a \in s . \supset_a . a+ \in s : \supset . N_0 \supset s$ [Induct
°4 $a, b \in N_0 . a+ = b+ . \supset . a = b$
°5 $a \in N_0 . \supset . a+ -= 0$[14]. »

Et voici la « traduction » de Poincaré (dans un ordre différent) :

« 1. Zéro est un nombre entier. [°1]
2. Zéro n'est le suivant d'aucun nombre entier. [°5]
3. Le suivant d'un entier est un entier auquel il conviendrait d'ajouter tout entier a un suivant. [°2]
4. Deux nombres entiers sont égaux si leurs suivants le sont. [°4]
5. Si s est une classe telle qu'elle contient 0, et que, si elle contient l'entier x, elle contient le suivant de x, alors elle contient tous les nombres entiers. [°3]
Ce 5° axiome est le principe d'induction complète » (M.L. (1905), 833).

Poincaré voit justement dans ce système d'axiomes la définition par postulats des notions primitives ou, pour reprendre ses propres termes, la « définition déguisée » du nombre entier. Nous savons déjà pourquoi Poincaré rejette une telle définition du nombre naturel : le principe d'induction y figure. C'est aux yeux de Poincaré un vice rédhibitoire, marque du point d'arrêt de son argumentation : Poincaré ne dit pas que les cinq axiomes de Peano sont aussi une définition inductive de la suite des nombres naturels ; cet aspect de la question ne l'intéresse plus. Or cette absence recouvre assez exactement ce qui, chez les adversaires de Poincaré, détermine le rôle de l'introduction complète : bref, elle est le lieu d'une méprise.

14. « Cls » indique la notion de « classe », « $\in$ », l'appartenance à une classe, « — » la négation, « $\supset$ » l'implication, et « $=$ » l'égalité ; les points sont des signes de séparation. L'axiome *°0* n'est pas toujours nécessaire : sa présence dépend de ce qui précède l'énoncé des axiomes.

Il nous faut donc nous interroger sur la fonction du principe d'induction dans la définition inductive du nombre naturel. A notre connaissance, il y a peu de textes contemporains de ceux de Poincaré très explicites sur le sujet. Le plus clair est certainement le compte rendu de *La Science et l'Hypothèse* par Russell — sans doute le plus lucide écrit du vivant de Poincaré. Malgré une erreur d'interprétation de la pensée de Poincaré, Russell cerne assez exactement le problème :

« [...] M. Poincaré only means to apply his principle to the operation of adding *1* to a number. The property of the mind which is in question is, therefore, this : " It is possible to add *1* to any number whatever. " But this does not yield us the principle of mathematical induction, which says not merely that the addition of *1* will always give a number, but that *every*[15] natural number can be obtained by such additions starting from *0*. It limits the natural numbers at the same time that it shows the series of them to be endless : they all appear in this series, any point of which can be reached by successive steps starting from *0*. Now this limitation, which is what is really used when proofs are conducted by means of mathematical induction, is not a synthetic *a priori* intuition, or a property of the mind, or a condensation of an infinite number of syllogisms ; it is merely the *definition* of a *finite* number. A finite number means one to which mathematical induction applies ; an infinite number means one tho which it does not apply. There are infinite numbers, and many theorems can be proved concerning them, as well as concerning things which are not numbers at all ; hence plainly mathematical induction is not what accounts for the fruitfulness of mathematics[16] » (*Mind* (juillet 1905), 413-414).

---

15. Il est significatif que, citant Russell, Poincaré ait omis de souligner « every » (« M.L. » [1905], 835).

16. « [...] M. Poincaré ne tient à appliquer son principe que lorsqu'il s'agit d'ajouter *1* à un nombre. La propriété de l'esprit dont il est ici question est donc la suivante : " Il est possible d'ajouter *1* à n'importe quel nombre. " Mais ce n'est pas là le principe d'induction : il ne dit pas simplement que l'addition de *1* donne toujours un nombre, mais que *tout* nombre naturel peut être obtenu par de telles additions en partant de *0*. Il limite les nombres naturels tout en montrant que leur suite est sans fin : tous figurent dans cette série et chacun d'eux peut être atteint par étapes successives à partir de *0*. Cependant, cette limitation, qui est ce dont nous faisons effectivement usage lorsque nous conduisons une preuve par induction mathématique, n'est pas une intuition synthétique *a priori*, ou une propriété de l'esprit, ou une condensation d'un nombre infini de

Ainsi, le principe d'induction sert de limite théorique à la suite indéfinie des nombres naturels et permet, pour reprendre la métaphore de Poincaré, de clore le concept de nombre naturel. Plus exactement, le principe d'induction complète délimite l'ensemble des nombres naturels en fournissant une procédure effective finie — un algorithme — apte à décider si tel objet mathématique fait ou ne fait pas partie de la suite des nombres naturels [17]. Il semble que Poincaré n'ait pas été attentif à cet aspect de la question ; il n'aurait certainement pas ajouté à sa traduction des cinq axiomes de Peano « Tout entier a un suivant » (M.L. (1905), 833), qui n'est qu'une transposition « mathématique » du « *on pourra* » (*D.P.*, 26) par lequel il caractérise la notion d'infini. Fondamentalement, ce que la thèse de la répétition a laissé échapper à Poincaré, c'est l'idée d'une procédure de décision. La méprise de Poincaré sur l'objection de Russell (voir M.L. (1905), 835) n'en est pas le seul témoignage. A notre avis, son interprétation du mémoire de Hilbert « Sur les fondements de la logique et des mathématiques » (*Ens. math.*, 7 (1905), 89-103) repose sur la même absence théorique. Selon lui, Hilbert ne se serait pas aperçu que sa démonstration de la non-contradiction des axiomes de l'arithmétique requiert l'usage de l'induction complète. Examinons les textes.

---

syllogismes ; c'est simplement la *définition* d'un nombre *fini*. Un nombre fini est un nombre auquel s'applique l'induction mathématique ; un nombre infini est un nombre auquel elle ne s'applique pas. Il y a des nombres infinis et l'on peut démontrer quelques théorèmes les concernant, de même que l'on peut en démontrer à propos d'objets qui ne sont pas du tout des nombres ; l'induction complète mathématique n'est pas ce qui rend compte de la fécondité des mathématiques. »

17. C'est l'interprétation de Stephen Cole KLEENE, *Introduction to Metamathematics*, p. 20.

« 1. *0* is a *natural number*. 2. If *n* is a *natural number*, then *n'* is a *natural number* [" ' " correspond au " + " de Peano]. 3. The only *natural numbers* are those given by *1* and *2*. [...] 4. For any natural number *m* and *n*, *m'* = *n'* only if *m* = *n*. 5. For any natural number *n*, *n'* ≠ *0*. [...] These five propositions 1-5, with one difference, were taken by Peano [...] as axioms characterizing the natural number sequence. Peano stated Proposition 3 instead as the principle of mathematical induction [...]. »

« 1. *0* est un *nombre naturel*. 2. Si *n* est un *nombre naturel*, alors *n'* est un *nombre naturel*. 3. Rien n'est un *nombre naturel* si ce n'est par *1* et par *2*. [...] 4. Pour tout nombre naturel *m* et *n*, *m'* = *n'* seulement *si m* = *n*. 5. Pour tout nombre naturel *n*, *n'* ≠ *0*. [...] Les cinq propositions 1-5, à une différence près, sont celles que Peano a choisies comme axiomes pour la suite des nombres naturels. A la place de la proposition 3, Peano énonce le principe d'induction mathématique [...]. »

Hilbert pose tout d'abord deux objets mathématiques ($=, 1$) et leurs combinaisons qu'il répartit « par un procédé quelconque » (p. 92) entre deux classes, la « classe des êtres » et la « classe des non-êtres » (p. 93) ; il introduit la notion d'implication, notée « | », celle de l'indéterminée x, puis forme des propositions (où figure l'indéterminée x) qu'il appelle « axiomes » parce qu'elles constituent la définition des objets posés (p. 94). La démonstration de la non-contradiction des axiomes consiste alors à vérifier que l'application de ces axiomes — il semble que, dans ce texte, Hilbert ne distingue pas axiome et règle — aux éléments de la classe des êtres conserve leur qualité d'êtres. Pour prendre le cas le plus simple, étant donné les deux premiers axiomes : (1) $x = x$ et (2) $\{ x = y$ et $w(x) \} \mid w(y)$ (où $w(y)$ est une « Combinaison arbitraire formée avec *l'indéterminée x* » (p. 94), Hilbert choisit, parmi les propositions qu'il peut en déduire,

« [...] celles qui ont la forme d'une Proposition simple a (sans prémisse), et je les situe dans la classe des êtres ; je laisse de côté tous les autres Objets, lesquels pourront appartenir à la classe des non-êtres. Nous voyons que de (1) et (2) on ne pourra tirer que des Propositions de la forme $\alpha = \alpha$, où α est une Combinaison des objets 1 et $=$. Les Axiomes (1)

La proposition 3 est appelée aujourd'hui « clause finale ».

Il est très difficile de savoir si c'était bien là l'idée de Peano. Voici néanmoins un passage qui pourrait faire pencher pour cette interprétation, très timidement cependant, puisqu'il s'agit d'une remarque concernant l'indépendance des postulats :

« Si l'on remplace N_0 par R_0 (nombre rationnel positif ou nul), la condition °3 [Induct] n'est pas vérifiée, bien que les précédentes le soient. En effet, il ne suffit pas de reconnaître qu'une formule est vraie pour *0*, et que étant vraie pour a, elle le soit aussi pour $a + 1$, pour conclure qu'elle est vraie pour toutes les valeurs rationnelles de la variable. Autrement dit :

$$R_0 \in Cls : 0 \in R_0 : a \in R_0 . \supset . a + 1 \in R_0$$

[si R_0 est une classe telle qu'elle contient 0 et qu'elle contient a, elle contient le suivant de a].

Mais la proposition

$$s \in Cls. \, 0 \in s . \, x \in s . \supset_x . \, x + 1 \in s : \supset . \, R_0 \supset s$$

[si, sous les hypothèses suivantes : s est une classe qui contient 0 et qui contient x, on peut inférer que le suivant de x, quel que soit x, appartient à cette classe s, alors R_0 est contenu dans la classe s]

n'est pas vraie, car on a une absurdité si l'on remplace s par N_0 » (*Formulaire de mathématiques*, t. 3, Carré et Naud, Paris, 1901, p. 41). N_0 est ainsi caractérisé comme le plus petit et le seul ensemble de nombres pour lequel le principe d'induction soit vrai.

et (2) doivent donc être considérés comme vrais relativement à la répartition adoptée entre la classe des êtres et celle des non-êtres. [...] En conséquence, nous regarderons le concept de l'égalité, que définissent ces Axiomes, comme un concept *exempt de contradictions* » (p. 94-95).

En d'autres termes, Hilbert construit un ensemble d'applications entre les objets de son système formel et des « valeurs de vérité » (selon le terme actuel) réduites ici à deux. La démonstration de la non-contradiction repose donc sur un procédé de décision relatif à la classification des êtres et des non-êtres. Un tel type de démonstration requiert que la production, à l'intérieur du système formel, soit définie de façon contrôlée :

« Les indéterminées qui figurent dans les Axiomes — en place du " quelconque " et du " tous " de la logique ordinaire — représentent exclusivement l'ensemble des Objets et des Combinaisons qui nous sont déjà acquis en l'état actuel de la théorie, ou que nous sommes en train d'introduire » (p. 99).

C'est bien là une règle métathéorique permettant de régler la combinaison des objets à l'intérieur du système.

Et voici l'interprétation de Poincaré :

« [...] en effet, dit M. Hilbert, toutes les propositions qu'on en peut déduire sont de la forme $\alpha = \alpha$ (ce sont ce que dans le langage vulgaire on appellerait des identités), ces propositions ne peuvent donc être contradictoires.

Mais comment verra-t-on que toutes ces propositions sont des identités ? Considérons une série de conséquences déduites de nos axiomes, et arrêtons-nous à un certain stade dans cette série ; si, à ce stade, nous n'avons encore obtenu que des identités, nous pourrons vérifier qu'en appliquant à ces identités l'une quelconque des opérations permises par la logique on n'en pourra déduire que de nouvelles identités.

On en conclura qu'à aucun moment on ne pourra obtenir autre chose que des identités ; mais *raisonner ainsi, c'est faire de l'induction complète* » (M.L. (1906), 20).

Les « valeurs de vérité » ont « disparu », donc également le moyen de répartir, de façon exhaustive, les combinaisons dans la classe des identités et dans la classe de celles qui ne le sont pas. C'est là aussi une procédure de décision qui a échappé à Poincaré (mais nous ne voulons, bien entendu, pas dire par là que la démonstration de Hilbert soit la bonne ; cette question sera résolue une trentaine d'années plus tard).

2. Les antinomies et la non-prédicativité

Poincaré a vu dans les antinomies une preuve de fait du bien-fondé de sa position : les antinomies, selon lui, sont directement liées à la « croyance à l'infini actuel » :

« Cantor avait cru pouvoir constituer une science de l'infini ; d'autres se sont avancés dans la voie qu'il avait ouverte, mais ils se sont bientôt heurtés à d'étranges contradictions. Ces antinomies sont déjà nombreuses [...] » (M.L. (1906), 303).

La raison en est simple : il n'est pas possible de distinguer tous les éléments d'une classe infinie :

« [...] dans le cas des classes finies, il est toujours possible de s'en [des paradoxes] débarrasser, parce qu'on peut faire l'analyse des diverses classes qui figurent dans les propositions en poussant cette analyse jusqu'aux individus et cette analyse complète fera évanouir les contradictions. [...]

Mais dans les cas où l'on fait intervenir l'infini actuel, cette analyse complète est impossible, du moins à ce qu'il me semble, et l'on reste exposé à la contradiction » (M.L. (1906), 868).

Les relations que Poincaré pose ainsi entre les antinomies et l'infini actuel relèvent encore de l'inversion de la « vraie » méthode en mathématiques : elle peut donner lieu à des classifications et des définitions que Poincaré, empruntant un terme à Russell[18], appelle « non prédicatives ».

Les classifications :

« [...] quand nous parlons d'une collection infinie, nous voulons dire une collection à laquelle on peut sans cesse ajouter de nouveaux éléments [...] ; toutes les fois qu'on ajoute à la collection de nouveaux éléments, on modifie cette collection ; on peut donc modifier la relation de cette collection avec les éléments déjà classés ; et comme c'est d'après cette relation que ces éléments ont été rangés dans tel ou tel tiroir, il peut arriver qu'une fois cette relation modifiée, ces éléments ne soient

18. « C'est même lui [Russell] qui a employé le premier le mot de non prédicatif » (« Réflexions sur deux notes », *Acta math.*, 32 (1909), *Œuvres*, t. 11, p. 119 ; *cf.* « Ueber transfinite Zahlen » [1909], *Œuvres*, t. 11, p. 122). Effectivement, voir Russell, « On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types », p. 34.

plus dans le bon tiroir et qu'on soit obligé de les déplacer. Tant qu'on a de nouveaux éléments à introduire, on doit craindre d'avoir à recommencer tout son travail ; or il n'arrivera jamais qu'on n'ait plus de nouveaux éléments à introduire ; la classification ne sera donc jamais arrêtéc.

De là une distinction entre deux espèces de classifications, applicables aux éléments des collections infinies ; les classifications *prédicatives*, qui ne peuvent être bouleversées par l'introduction de nouveaux éléments ; les classifications *non prédicatives*, que l'introduction des éléments nouveaux oblige à remanier sans cesse » (*D.P.*, 9-10).

Comme exemple de la première espèce, nous pouvons citer la classification des nombres entiers en deux classes : celle des nombres inférieurs ou égaux à *10* et celle des nombres supérieurs à *10* ; pour la seconde, l'antinomie de Richard citée plus bas.

Néanmoins, la notion de classification ne permet pas à elle seule la distinction absolue du prédicatif et du non-prédicatif. En effet, pour savoir s'il faut changer un élément de tiroir, selon la métaphore de Poincaré, encore faut-il connaître la définition de cet élément.

« De sorte qu'à un certain point de vue on ne devrait pas dire qu'une classification est prédicative d'une façon absolue, mais qu'elle est prédicative par rapport à un mode de définition » (*D.P.*, 12).

Ainsi, une définition est non prédicative si la classe qu'elle détermine n'a pas de frontière précise. Poincaré donne à cette idée une autre forme qui nous intéresse particulièrement parce qu'elle articule la notion de classification non prédicative à celle de cercle vicieux :

« Le mot *tous* a un sens bien net quand il s'agit d'un nombre fini d'objets ; pour qu'il en eût encore un, quand les objets sont en nombre infini, il faudrait qu'il y eût un infini actuel. Autrement, *tous* ces objets ne pourront pas être conçus comme posés antérieurement à leur définition et alors, si la définition d'une notion *N* dépend de *tous* les objets *A*, elle peut être entachée de cercle vicieux, si parmi les objets *A* il y en a qu'on ne peut définir sans faire intervenir la notion *N* elle-même » (M.L. (1906), 316).

Les définitions non prédicatives sont donc la conséquence à la fois d'un cercle vicieux et de l'usage de l'infini actuel, liés par une relation de cause à effet.

Or, selon Poincaré, toutes les antinomies reposent sur des définitions non prédicatives. Aussi, l'examen de l'exemple que Poincaré cite de préférence, l'antinomie de Richard, suffit à mettre en lumière le mécanisme qui les engendre et la solution à y apporter :

« La même explication vaut pour toutes les autres antinomies » (*R.M.M.* (1906), 307).

Voici donc la formulation originale de cette antinomie [19] :

« Je vais définir un certain ensemble de nombres, que je nommerai l'ensemble *E*, à l'aide des considérations suivantes :

" Ecrivons tous les arrangements deux à deux des vingt-six lettres de l'alphabet français, en rangeant ces arrangements par ordre alphabétique, puis, à la suite, tous les arrangements trois à trois, rangés par ordre alphabétique, puis, à la suite, ceux de quatre à quatre, etc. Les arrangements peuvent contenir la même lettre répétée plusieurs fois, ce sont des arrangements avec répétition.

Quel que soit l'entier p, tout arrangement des vingt-six lettres p à p se trouvera dans ce tableau, et comme tout ce qui peut s'écrire avec un nombre fini de mots est un arrangement de lettres, tout ce qui peut s'écrire se trouvera dans le tableau dont nous venons d'indiquer le mode de formulation.

La définition d'un nombre se faisant avec des mots, et ceux-ci avec des lettres, certains de ces arrangements seront des définitions de nombres. Biffons de nos arrangements tous ceux qui ne sont pas des définitions de nombres.

Soit u_1 le premier nombre défini par un arrangement, u_2 le second, u_3 le troisième, etc.

On a ainsi, rangés dans un ordre déterminé, *tous les nombres définis à l'aide d'un nombre fini de mots.*

Donc : tous les nombres qu'on peut définir à l'aide d'un nombre fini de mots forment un ensemble dénombrable.

Voici maintenant où est la contradiction. On peut former un nombre n'appartenant pas à cet ensemble.

" Soit p, la $n^{ième}$ décimale du $n^{ième}$ nombre de l'ensemble E ; formons un nombre ayant zéro pour partie entière, et pour $n^{ième}$ décimale $p+1$, si p n'est égal ni à 8 ni à 9, et l'unité dans le

19. J. Richard, « Les Principes des mathématiques et le Problème des ensembles », p. 541.

cas contraire. " Ce nombre N n'appartient pas à l'ensemble E. S'il était le $n^{ième}$ nombre de l'ensemble E, son $n^{ième}$ chiffre serait le $n^{ième}$ chiffre décimal de ce nombre, ce qui n'est pas.

" Je nomme G le groupe de lettres entre guillemets.

Le nombre N est défini par les mots du groupe G, c'est-à-dire par un nombre fini de mots ; il devait donc appartenir à l'ensemble E. Or on a vu qu'il n'y appartient pas.

Telle est la contradiction. " »

Et voici l'explication de Poincaré, analogue du reste à celle de Richard :

« E est l'ensemble de *tous* les nombres que l'on peut définir par un nombre fini de mots, *sans introduire la notion de l'ensemble E lui-même*. Sans quoi la définition de E contiendrait un cercle vicieux ; on ne peut pas définir E par l'ensemble E lui-même.

Or nous avons défini N, avec un nombre fini de mots il est vrai, mais en nous appuyant sur la notion de l'ensemble E. Et voilà pourquoi N ne fait pas partie de E. [...]

Ainsi, *les définitions qui doivent être regardées comme non prédicatives sont celles qui contiennent un cercle vicieux* » (M.L. (1906), 307).

Sur ce dernier point, Russell et Poincaré s'accordent : les antinomies reposent sur un cercle vicieux. Mais les conclusions qu'ils en tirent sont différentes. Pour Russell, les cercles vicieux procèdent de l'idée erronée selon laquelle toute fonction propositionnelle peut donner naissance à une classe, ou, de façon analogue, de l'omission du principe « tout ce qui contient une variable apparente doit être exclu des valeurs possibles de cette variable[20] ». Bref, les antinomies posent à Russell un problème technique : il s'agit de les éviter tout en sauvegardant l'infini actuel de Cantor. Au contraire, l'attitude de Poincaré reste toute négative : les antinomies ne posent pas de problèmes réels puisqu'elles sont l'une des manifestations possibles de l'inversion méthodologique ; elles ne reflètent donc qu'une contradiction apparente[21].

Aussi la « vraie solution » (M.L. (1906), 307) aux antinomies repose-t-elle sur un ensemble d'exigences négatives :

20. « Les Paradoxes de la logique », p. 640.
21. « Ueber transfinite Zahlen », *Œuvres*, t. 11, p. 120.

« Quant à moi, je proposerais de s'en tenir aux règles suivantes :

1° ne jamais envisager que des objets susceptibles d'être définis en un nombre fini de mots ;
2° ne jamais perdre de vue que toute proposition sur l'infini doit être la traduction, l'énoncé abrégé de propositions sur le fini ;
3° éviter les classifications et les définitions non prédicatives » (*D.P.*, 31).

Traduites en termes positifs, ces « règles » ne sont autres que l'exigence de constructibilité ; la « vraie solution » est donc encore une conséquence de la thèse de la répétabilité.

La conclusion qu'en tire Poincaré est que les règles de la logique ne sont applicables que pour les ensembles finis ; aussi le passage à l'infini est-il assuré par un principe spécifiquement mathématique.

3. Logique et intuition

C'est principalement au nom de l'intuition que Poincaré a adressé ses objections aux logiciens, particulièrement Peano, Russell et Couturat. L'une d'elles est encore une conséquence de l'inversion méthodologique ; c'est donc par elle que nous allons commencer.

Rappelons au préalable qu'au moment de la parution de *La Science et l'Hypothèse* (1902) la discipline logique se réduisait, aux yeux de Poincaré (cf., ci-dessus, p. 22), aux trois principes d'identité, de contradiction, du tiers exclu et à la théorie du syllogisme d'Aristote : elle était, selon lui, la « traduction » des structures fondamentales de l'esprit. Durant les années suivantes, grâce à la série d'articles de Louis Couturat publiés dans la *Revue de métaphysique et de morale* sur *The Principles of Mathematics* de Russell, à certains autres dus principalement à Russell, Whitehead, Hilbert et Peano, Poincaré prend connaissance de quelques développements modernes de la logique, liés au problème du fondement des mathématiques. Notons encore que, dans ses écrits contre les logiciens, Poincaré assimile très souvent « jugement synthétique *a priori* » et « intuition » — ce en quoi il commet une erreur historique : dans la tradition kantienne à laquelle il se réfère, l'intuition est sensible, non intellectuelle. A cette simplification du système philosophique de Kant correspond de façon complémentaire l'idée que la logique appartient exclusivement à la tradition analytique de Leibniz. C'est là une interprétation philosophique dont la conséquence est d'opposer la logique à l'intuition — dans tous les sens que Poincaré attribue à ce terme (cf. *ibid.* et, ci-dessus, p. 32) —, bref, d'opposer une discipline à une faculté ! ce qui n'a pas été sans provoquer quelques malentendus au cours de la polémique.

En 1903, Russell avait tenté de montrer, dans *The Principles of Mathematics*, que les mathématiques reposent sur neuf notions primitives logiques et vingt principes primitifs, également logiques. Selon Poincaré, les logiciens sont alors dans une difficulté inextricable : ou bien ils admettent leurs axiomes comme « définition déguisée » des notions — mais alors ils commettent un cercle, le principe d'induction n'étant pas connu à ce stade de la théorie —, ou bien ils doivent admettre par un jugement synthétique *a priori* que les notions formelles qu'ils utilisent sont bien celles que définit leur système de propositions, mais alors la théorie des logiciens n'est plus purement logique :

« [...] il [Russell] introduit également des principes qu'il déclare indémontrables. Mais ces principes indémontrables, ce sont des appels à l'intuition, des jugements synthétiques *a priori*. Nous les regardions comme intuitifs quand nous les rencontrions, plus ou moins explicitement énoncés, dans les traités de mathématiques ; ont-ils changé de caractère parce que le sens du mot logique s'est élargi et que nous les trouvons maintenant dans un livre intitulé *Traité de logique ? Ils n'ont pas changé de nature ; ils ont seulement changé de place* » (M.L. (1905), 829).

Autrement dit, la logique n'a pas d' « objet » en propre ; bref, elle n'est pas une discipline. Ce qui la distingue des mathématiques, c'est sa forme. Ainsi, la nouvelle logique mathématique ne remet pas en question la philosophie des mathématiques de Poincaré (cf., ci-dessus, p. 33).

Poincaré reproche à la forme logique — conséquence du refus de l'induction comme intuition fondamentale — d'être « artificielle » : l'ordre des questions exposées par le logicien ne suit pas le développement historique de la race et psychologique de l'individu (souvenons-nous que la thèse de la répétabilité rattache les mathématiques à la psychologie) :

« Cela me paraît psychologiquement faux ; ce n'est pas ainsi que l'esprit humain procède naturellement, et quand même on devrait s'en tirer sans trop de mésaventures antinomiques, cela n'en serait pas moins une méthode contraire à toute saine psychologie.

M. Russell me dira sans doute qu'il ne s'agit pas de psychologie, mais de logique et d'épistémologie ; et moi, je serai conduit à répondre qu'il n'y a pas de logique et d'épistémologie indépendantes de la psychologie » (*D.P.*, 31).

L'artificialité : son défaut principal est de réduire le raisonnement mathématique à un mécanisme ; ce reproche, Poincaré l'adresse aussi bien à un formaliste comme Hilbert, qu'à Peano et à Russell :

« On pourrait remplacer le géomètre par le *piano à raisonner* imaginé par Stanley Jevons ; ou, si l'on aime mieux, on pourrait imaginer une machine où l'on introduirait les axiomes par un bout pendant que l'on recueillerait les théorèmes à l'autre bout, comme cette machine légendaire de Chicago où les porcs entrent vivants et d'où ils sortent transformés en jambons et en saucisses » (M.L. (1905), 816).

« Les règles de la parfaite logique sont-elles toute la mathématique ? Autant dire que tout l'art du joueur d'échecs se réduit aux règles de la marche des pièces. Parmi toutes les constructions que l'on peut combiner avec les matériaux fournis par la logique, il faut faire un choix ; le vrai géomètre fait ce choix judicieusement parce qu'il est guidé par un sûr instinct, ou par quelque vague conscience de je ne sais quelle géométrie plus profonde, et plus cachée, qui seule fait le prix de l'édifice construit.

Chercher l'origine de cet instinct, étudier les lois de cette géométrie profonde qui se sentent et ne s'énoncent pas, ce serait encore une belle tâche pour les philosophes qui ne veulent pas que la logique soit tout » (M.L. (1905), 817).

Ce « sûr instinct », cette « vague conscience », ce sont d'autres noms de l'intuition, cette fois au sens le plus général : la perte de sens due au refus de l'induction comme intuition fondamentale et originelle des mathématiques conduit à une artificialité dans le mode d'exposition qui se caractérise par l'abandon de la catégorie d'intuition aussi bien sur le plan de la forme (M.L. (1905), 817) que sur celui de la méthode (M.L. (1905), 823).

C'est aussi au nom de l'intuition, au sens le plus large, que Poincaré adresse son second grand type de critiques aux logiciens : le « langage », le symbolisme, qu'ils utilisent, inspiré essentiellement de Peano, est lui aussi un obstacle à l'intuition du géomètre.

« Je ne vois [...] dans la logistique [que Poincaré assimile au symbolisme logique — M.L. (1905), 822] que des entraves pour l'inventeur ; elle ne nous fait pas gagner en concision, loin de là, et, s'il faut vingt-sept[22] équations pour établir que *1* est un nombre, combien en faudra-t-il pour démontrer un vrai théorème ? Si nous distinguons, avec M. Whitehead, l'individu x, la classe dont le seul membre est x et qui s'appellera ιx, puis la classe dont le seul membre est la classe dont le seul membre est x et qui s'appellera $\iota\iota x$, croit-on que ces distinctions, si utiles qu'elles soient, vont beaucoup alléger notre allure ?

La logistique nous force à dire tout ce qu'on sous-entend d'ordinaire ; elle nous force à avancer pas à pas ; c'est peut-être plus sûr, mais ce n'est pas plus rapide » (M.L. (1906), 295).

C'est là l'aspect le plus apparent de la critique de Poincaré au symbolisme de Peano : il ne tend pas à l' « économie de pensée » (cf., ci-dessus, p. 41).

Nous allons tenter dans la suite l'examen des raisons implicites sur lesquelles repose le refus du « péanien » (M.L. (1905), 823) ; nous verrons que les arguments de Poincaré, très disparates au premier abord, sont en réalité profondément liés les uns aux autres — tous conséquences de son empirisme radical.

Poincaré manifeste ses réticences à l'égard du « péanien » particulièrement par quelques mots sur le mémoire de Burali-Forti, « Una questione sui numeri transfiniti » ; le symbolisme utilisé y est quelque peu différent de celui de Peano, mais Poincaré ne le dit pas :

« [...] ce n'est pas du fond de ce mémoire que je veux parler ici ; cela m'entraînerait beaucoup trop loin de mon sujet ; je veux seulement m'occuper de la forme, et précisément je me demande si cette forme lui fait beaucoup gagner en rigueur et si elle compense par là les efforts qu'elle impose à l'écrivain et au lecteur » (M.L. (1905), 823).

22. Allusion au mémoire de C. Burali-Forti, « Una questione sui numeri transfiniti », *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, t1 (1897), p. 154-164.

L'examen de la forme que nous promet Poincaré se réduit en fait à celui de deux formules tirées du paragraphe 8 (p. 161) dudit mémoire. En voici la plus importante, telle qu'elle a été copiée par Poincaré :

$$1 = \iota\, \mathrm{T}' \{ \mathrm{Ko} \frown (u, h) \ni (u \,\varepsilon\, \mathrm{Un}) \},$$

dont la formulation exacte est :

$$\mathrm{I} = \overline{\iota}\mathrm{T}' \{ \mathrm{Ko} \frown \overline{(u,\ h)\, \varepsilon}\, (u \,\varepsilon\, \mathrm{Uo}) \} \qquad \text{(Def)}^{23}.$$

« [...] cioè diciamo *uno* il tipo d'ordine delli classi ordinate (u, h) tali que u contiene un solo elemento ».

Burali-Forti définit donc le type d'ordre d'une classe ordonnée dont le nombre cardinal est *Un* ; ce faisant, il pose les relations entre nombres cardinaux et ordinaux. Et Poincaré de commenter :

« [...] définition éminemment propre à donner une idée du nombre *1* aux personnes qui n'en auraient jamais entendu parler. J'entends trop mal le péanien pour oser risquer une critique, mais je crains bien que cette définition ne contienne une pétition de principe, attendu que j'aperçois *1* en chiffre dans le premier membre et *Un* en toutes lettres dans le second » (M.L. (1905), 823).

Ainsi, la « forme » doit « donner une idée », évoquer quelque chose ; c'est là un effet « stylistique » de la pensée de Poincaré : le mot, la formule, l'exemple, la formule ici citée en exemple, doit « représenter » par elle-même une « idée » (cf., ci-dessus, p. 115) :

« L'élément essentiel de ce langage [de Peano], ce sont certains signes algébriques qui représentent les différentes conjonctions : si, et, ou, donc » (M.L. (1905), 822).

C'est là la raison pour laquelle l'examen de la « forme » se réduit à celui des formules ; mais par là Poincaré opère une seconde réduction : s'attachant aux formules, il leur demande leur sens — il ne nous apprend donc rien sur le symbolisme proprement dit de Peano, qu'il semble néanmoins connaître, puisqu'il « péanise » celui de Burali-Forti (comparer les deux formules ci-dessus).

23. « = (Def) » ne forment qu'un seul signe chez Peano et son école, cela à la suite d'une critique de Frege datant de 1896.

La conséquence en est assez curieuse ; Poincaré juge plus souvent les formules dans leur « traduction » française que dans le texte péanien : le français, comme le péanien, a pour fonction de « représenter » les idées ; bref, Poincaré lit le péanien comme une traduction de la langue usuelle ; mieux, comme un « vocabulaire » :

« Lisant quelques pages du Formulaire de Peano, Poincaré se plaignait de ne pas comprendre le péanien. C'est qu'il le prenait à la lettre dans le décousu des conventions, comme un vocabulaire, sans vouloir l'employer réellement[24]. »

Ainsi, dans ses critiques au formalisme de Peano, Poincaré reste fidèle à sa thèse de la relative transparence du langage au sens et de la référence au fait : la signification de la forme est portée par la formule prise en exemple et l'exemple doit évoquer une évidence — nous touchons ici un point de rencontre à la fois du style et de la pensée de Poincaré dans un des aspects apparemment mineurs de ses écrits.

Evidemment, ce n'est pas là l'unique raison du refus du langage péanien par Poincaré : si tel était le cas, Peano et le jeune Russell l'eussent aussi rejeté. Dans ses *Notations de la logique mathématique*[25], Peano qualifie les signes d' « abréviations des mots qu'ils représentent » (p. 125, *passim*). Néanmoins, il y a dans ce texte une ébauche de théorisation des rapports entre la langue naturelle et le symbolisme logique et mathématique, ce qui n'existe pas chez Poincaré ; mais elle repose sur l'hypothèse d'un parallélisme strict entre langage et pensée — préjugé qui guide aussi les réflexions de Russell dans *The Principles of Mathematics* (1903), comme il le reconnaît lui-même dans la préface à la seconde édition (1938), page X du même ouvrage[26].

La raison décisive du refus par Poincaré du péanien se trouve certainement ailleurs. Le péanien n'est pas seulement regrettable, il est surtout inutile. Nous l'avons dit : Poincaré n'a pas considéré comme graves les problèmes soulevés par la théorie des ensembles et les antinomies, pour la simple raison que ces problèmes ne sont qu'apparents : ils ne touchent pas les « vraies mathématiques ». Ce qui ne veut pas dire que pour Poincaré

24. BACHELARD, *Le Nouvel Esprit scientifique*, p. 31.
25. Turin, Bocca, 1894 ; *Opere scelte*, t. 2, p. 123-181.
26. Cf. J. VUILLEMIN, *Leçons sur la première philosophie de Russell*, p. 77.

l'intuition soit tout, loin de là : excepté l' « intuition du nombre pur » (*V.S.*, 33), elle n'est pas garante de la rigueur ; seulement, dans les « vraies mathématiques », en particulier en analyse, la rigueur est atteinte principalement grâce à ce que l'on a appelé l' « arithmétisation des mathématiques » :

« L'idée vague de continuité, que nous devions à l'intuition, s'est résolue en un système compliqué d'inégalités portant sur les nombres entiers.

Par là, les difficultés provenant des passages à la limite, ou de la considération des infiniment petits, se sont trouvées définitivement éclaircies.

Il ne reste plus aujourd'hui en analyse que des nombres entiers ou des systèmes finis ou infinis de nombres entiers, reliés entre eux par un réseau de relations d'égalité ou d'inégalité » (*V.S.*, 32 ; cf. *S.M.*, 131).

« [...] dans l'analyse d'aujourd'hui, quand on veut se donner la peine d'être rigoureux, il n'y a plus que des syllogismes ou des appels à cette intuition du nombre pur, la seule qui ne puisse nous tromper. On peut dire qu'aujourd'hui la rigueur absolue est atteinte » (*V.S.*, 33).

Le vrai mathématicien n'a donc rien à faire du péanien.

Ainsi donc, les objections de Poincaré à la logique ne touchent guère que des aspects formels — les critiques essentielles s'adressant à tous les partisans de l'infini actuel. La logique ne devait être, aux yeux de Poincaré, que l'une des manifestations des conséquences du cantorisme : elle n'est que l'un de ses « codes » possibles :

« La logistique existe, elle a son code qui a déjà eu quatre éditions ; ou plutôt c'est ce code qui est la logistique elle-même » (M.L. (1906), 296).

Poincaré l'a condamnée à deux titres : celui de son ordre d'exposition et celui de son langage ; mais il n'a nulle part articulé clairement ces deux objections ; il est même très vague sur ces liens (« Le langage symbolique créé par M. Peano *joue un très grand rôle* dans ces nouvelles recherches » — M.L. (1905), 822 ; c'est nous qui soulignons). La raison en est maintenant claire : l'ordre d'exposition reflète une philosophie des mathématiques, et les symboles traduisent les notions utilisées en mathématiques : ces deux formes sont significatives de deux niveaux distincts du sens et ne s'articulent pas entre elles en tant que formes, tant il est vrai que, chez Poincaré, la forme est considérée comme transparente au sens.

Les critiques de Poincaré à la logique mathématique relèvent donc toutes de sa conception des « vraies mathématiques ». Nous tenons à souligner le caractère systématique de cette conception ; c'est certainement elle qui n'a pas laissé voir à Poincaré certains aspects des théories de ses adversaires : fort de son point de vue d'ensemble, Poincaré en a critiqué les aspects qui lui ont paru fautifs, défectueux ou inutiles, sans rechercher à comprendre complètement — et de façon systématique — les positions de Peano, Russell, Couturat et Hilbert.

4. Sur l'interprétation philosophique du conflit par Poincaré

Dans sa dernière conférence sur le sujet, intitulée « La Logique de l'infini » (1912 ; *D.P.*, 84-96), Poincaré expose les raisons philosophiques qui, selon lui, expliquent l'adoption ou le rejet par les mathématiciens de l'infini actuel comme concept mathématique.

Ce qui nous intéresse, ce n'est pas tant l'exposé des divergences elles-mêmes, qui repose sur la distinction traditionnelle entre le réalisme (les « cantoriens », qui posent l'infini comme une idée « platonicienne » préexistante à la pensée du mathématicien) et l'idéalisme (les « pragmatistes », dont Poincaré, pour lesquels l'infini procède d'une faculté de l'esprit), que la façon dont Poincaré aborde le problème :

« Cherchons donc à étudier la psychologie des deux écoles adverses, à un point de vue purement objectif, comme si nous étions nous-mêmes placés en dehors de ces écoles, comme si nous décrivions une guerre entre deux fourmilières ; nous constaterons d'abord qu'il y a chez les mathématiciens deux tendances opposées dans la façon d'envisager l'infini. Pour les uns, l'infini dérive du fini, il y a un infini parce qu'il y a une infinité de choses finies possibles ; pour les autres, l'infini préexiste au fini, le fini s'obtient en découpant un petit morceau dans l'infini » (*D.P.*, 85).

Ainsi donc, Poincaré reproduit à propos de la philosophie le type de discours qu'il tient sur les mathématiques : étudier « à un point de vue purement objectif », c'est partir d'une donnée irréfutable — non plus les structures intellectuelles, mais les « tendances mentales » : le texte philosophique de

Poincaré est un jeu d'extrapolations et de reflets qui se répètent indéfiniment.

A une différence près, pourtant. Alors que Poincaré dénonce comme non mathématique ce qui n'est pas « vraie mathématique », il ne lui est pas possible de rejeter du domaine de la philosophie les philosophies contraires à la sienne : il lui faudrait pour cela pouvoir définir une procédure de construction des êtres philosophiques. Aussi Poincaré se trouve-t-il dans l'obligation de diviser la source des idées philosophiques, de postuler la diversité des tendances psychologiques, sans quoi il ne pourrait « rechercher quelle peut être l'origine de cette différence de mentalité qui engendre de telles divergences de vue » (*D.P.*, 85). Mais, alors, les jeux sont faussés : si la philosophie réaliste — celle des cantoriens — est le reflet d'une structure mentale, elle n'est pas rigoureuse, car elle nie son origine psychologique. Voulant mener une étude « à un point de vue purement objectif » en opposant d'égal à égal idéalisme et réalisme, Poincaré s'est appuyé sur une thèse philosophique, celle du psychologisme, dont la fonction est de présenter comme données les « tendances mentales » ; si bien qu'au lieu d'être un idéalisme la philosophie de Poincaré est bien plutôt un réalisme de l'esprit :

« [...] il n'y a pas de logique et d'épistémologie indépendantes de la psychologie [...] » (*D.P.*, 31).

Les « tendances mentales opposées », c'est le nom de l'absence d'articulation entre le fait et le philosophique, l'origine de la négation du fait comme philosophique. Nous butons de nouveau sur la difficulté rencontrée tant de fois, à tous les niveaux du texte de Poincaré.

En ce qui concerne la philosophie, la conséquence en est curieuse. Alors que la « traduction » est une catégorie universelle à l'intérieur de la philosophie de Poincaré, du philosophique au mathématique, du mathématique à la physique, et réciproquement, Poincaré achoppe sur la diversité des philosophies comme sur des productions humaines absolument irréductibles les unes aux autres.

« De tout temps, il y a eu en philosophie des tendances opposées, et il ne semble pas que ces tendances soient sur le point de se concilier. C'est sans doute parce qu'il y a des âmes différentes et qu'à ces âmes nous ne pouvons rien changer. Il n'y a donc aucun espoir de voir l'accord s'établir entre les pragmatistes et les cantoriens. Les hommes ne s'entendent pas parce qu'ils ne parlent pas la même langue et qu'il y a des langues qui ne s'apprennent pas » (*D.P.*, 95).

La divergence des philosophies, c'est là un fait devant lequel s'arrête la philosophie de Poincaré : elle ne peut ici qu'enregistrer et non dominer. La tendance mentale est alors un fait absolument irrémédiable qui marque les limites du sens du texte philosophique de Poincaré, limites analogues à celles que l'expérience trace dans la philosophie de la physique. Mais, alors que ces dernières sont explicables et expliquées dans et par la philosophie de Poincaré, la divergence des structures psychologiques n'est que codifiée : la philosophie de Poincaré, par la notion de tendance mentale, a achevé l'élaboration philosophique de son fait brut.

Conclusion

Une philosophie de savant, telle est la philosophie de Poincaré : son objet, ce sont les sciences et non point — ou à peine — la philosophie. Ainsi cette philosophie n'est guère « dite », et c'est surtout dans les formes de son fonctionnement qu'elle est visible, par un jeu de différenciations ; or ce jeu de différenciations est d'abord celui qui permet de distinguer les différentes disciplines scientifiques dont parle la philosophie. C'est donc par l'analyse de l'objet étudié par la philosophie, et extérieur à elle, qu'il est possible de discerner la notion de philosophie en œuvre dans la philosophie de Poincaré.

C'est ce que nous avons fait dans les trois premiers chapitres sur les mathématiques, la géométrie, la mécanique et la physique. Nous avons vu que ce qui les distingue, c'est leur position relative à deux pôles — les deux bornes du savoir —, l'esprit et l'expérience, car ces deux instances (selon le terme utilisé, ci-dessus, p. 15) sont comprises comme sources et origines de tout discours scientifique. L'esprit est la source à la fois de la pensée, en tant qu'indissociable d'un sujet pensant (c'est là le thème philosophique explicite de la philosophie de Poincaré ; cf., ci-dessus, p. 90) qui fournit immédiatement les notions fondamentales d'induction et de groupe, et du langage, dont la fonction est de classifier les faits. L'expérience, elle, est à l'origine des faits qu'interprètent la mécanique et la physique. Ces deux ordres de réalités sont constitutifs de la science : ils fournissent à la fois les données premières, c'est-à-dire, selon Poincaré, le sens et les critères de scientificité du discours (le discours examiné a-t-il véritablement une relation essentielle aux faits qui lui sont pertinents ?). Cette bipolarisation de la notion d'origine induit une « topologie » des sciences reposant au premier chef sur la distinction entre science déductive et science expérimentale. Ainsi, les mathématiques sont la science la plus « proche » de l'esprit : fondées sur le nombre pur, elles constituent un langage classificateur rigoureux où la répétition d'une opération est tenue pour essentiellement possible pourvu qu'elle n'introduise aucune contradiction ; l'une de ses opérations est l'extrapolation (forme de l'analogie), vérifiable par la construction effective d'un exemple. La géométrie participe de l'esprit dans la mesure où elle traite, de façon déductive, des figures idéales, et où ses différentes constructions théoriques sont les expressions de groupes différents. La mécanique se distingue de la géométrie non tant par sa forme discursive que parce qu'elle est une science expérimentale portant sur des corps solides considérés comme invariables ; néanmoins, elle n'est pas vérifiable expérimentalement, parce que ses principes s'appliquent à tout l'univers — ce que Poincaré exprime en disant qu'ils sont conventionnels. La physique, science expérimentale par excellence, est la plus « proche » de l'instance expérience ; elle est soumise au contrôle de l'expérience qui vérifie la constance des rapports entre le discours physique et les faits concernés ; elle classifie et interprète ces faits dans le langage des trois sciences citées ; néanmoins, en regard des faits « bruts » qu'elle intègre en elle, son langage théorique est compris par Poincaré comme métaphorique : le fait, qui est un invariant, incontestable en tant que fait peut en effet trouver une infinité d'explications théoriques différentes ; c'est dire qu'il n'est pas possible de se prononcer sur la nature — ni même, à la limite, sur l'existence — de la réalité. C'est ainsi la confiance — que l'on pourrait presque qualifier de positiviste — que Poincaré accorde au fait qui l'a conduit à considérer la réalité comme hypothétique et à adopter une position que les philosophes qualifient souvent de « critique ». Curieusement, l'idéalisme suppose un réalisme qui, à notre avis, en est indissociable, en l'occurrence un réalisme de l'esprit et du fait (cf., ci-dessus, p. 155).

Nous nous sommes alors posé la question de la fonction des faits scientifiques dans la philosophie de Poincaré. En effet, une question fondamentale demeurait en suspens — celle, très générale mais fondamentale, des relations entre faits et discours et, plus spécifiquement, de la façon dont le discours philosophique intègre les faits qui lui sont pertinents. C'est à ce propos que nous avons introduit la notion de « rhétorique » (à distinguer de la grammaire, concernant le *recte* et non le *bene dicere*, et de la logique permettant d'évaluer la cohérence du sens d'un texte), définie comme étude des relations entre sens et forme d'un texte considéré comme ensemble d'opérations (cf., ci-dessus, p. 104). Cette question-là, c'est évidemment au texte philosophique de Poincaré que nous l'avons posée. Peut-être y a-t-il des relations différentes entre forme et contenu d'une proposition mathématique suivant qu'elle formule un axiome, un théorème, ou fait partie d'une démonstration. Mais il nous semble que la formulation d'une proposition pose au mathématicien un problème bien défini, et le rodage que la proposition subit par l'enseignement la rend presque sans problème. Bien entendu, la construction d'une théorie aussi générale que celle des ensembles pose d'autres questions où les qualités d'axiome ou de proposition démontrable peuvent, dans leur ensemble, ressortir à la rhétorique. En effet, l'établissement d'une liste d'axiomes, par exemple indépendants, est aussi un problème d'économie — donc métamathématique — lié de façon plus ou moins étroite au langage utilisé. Au contraire, à propos d'un texte de philosophie, ici sur les mathématiques, la question rhétorique est tout à fait essentielle ; le texte philosophique se caractérise par son projet et vise à persuader ; le rapport de l'expression au contenu du texte est donc changé.

Du texte philosophique, nous avons particulièrement étudié la stratégie (comment le texte pose-t-il ses thèses ?) et le type d'intégration (ou « assomption ») des objets construits dans le discours scientifique. Or stratégie et intégration sont la marque d'opérations du texte plus que l'effet de son sens, à la fois conditions et résultats de ce qui est explicitement signifié, quoique exclues de la signification proposée. La stratégie : les thèses philosophiques sont très peu travaillées ; elles sont posées comme affirmations, comme « lieux communs », ou par l'intermédiaire de l'opinion d'autrui. L'intégration : l'examen des thèses philosophiques est constitué par un ensemble de références aux faits, concepts et théories scientifiques, cela sous les figures de l'exemple ou de l'analogie. Ces deux formes ont ceci de commun qu'elles reproduisent implicitement comme traits rhétoriques des procédés utilisés explicitement dans les sciences — encore une caractéristique de la philosophie du savant. Le texte philosophique de Poincaré se présente ainsi comme un laboratoire où les thèses philosophiques sont vérifiées, empiriquement, par confrontation aux objets scientifiques. C'est là la marque textuelle de l'inductivisme strict de la philosophie de Poincaré.

Or l'examen du texte philosophique de Poincaré révèle que les faits, qu'ils soient traduction directe des facultés intellectuelles de l'esprit ou résultat d'une constatation empirique, posés explicitement comme objectifs et non transformables par le texte philosophique, ne fonctionnent comme faits que parce qu'ils sont désignés comme tels par la philosophie elle-même. En effet, le texte philosophique les utilise constamment comme exemples non pas simplement illustratifs, mais justificatifs des thèses philosophiques ; ce faisant, le texte philosophique distend singulièrement les liens entre les théories scientifiques et les faits qui leur sont pertinents. Ces faits, ces purs donnés, traités ainsi hors de leur contexte, remplissent alors une fonction de type philosophique : ce sont, paradoxalement, eux qui confèrent à la philosophie — langage sur du langage — la vérité et la justification de ses thèses, et qui lui permettent ainsi de devenir garante de la scientificité des sciences. Il s'ensuit une double signification attachée aux termes fondamentaux des mathématiques (répétition, induction, groupe) et à la notion d'expérience relativement à la philosophie de la physique (cf., ci-dessus, p. 21), en ce sens que ces notions recouvrent à la fois des procédures scientifiques et leur valeur philosophique comme recherche d'origine. Si ce procédé est à peu près explicite en ce qui concerne les mathématiques (étant donné que la pensée est immédiatement rattachée à un sujet pensant ; cf. des expressions telles que : « Dans notre esprit préexistait l'idée d'un certain nombre de groupes ; ce sont ceux dont Lie a fait la théorie » — *S.H.*, 109 et *passim*), il n'en est pas de même en physique pour la notion d'expérience : c'est le point aveugle de la philosophie de Poincaré, qui est l'objet d'un autre malentendu, beaucoup plus fondamental, concernant justement l'interprétation des rapports entre langage et fait, entre syntaxe et sémantique. Poincaré n'a pas discerné la double fonction qu'il attribue à l'expérience, car un tel éclaircissement aurait nécessité une réinterprétation des fonctions par lui attribuées aux notions de discours et de fait, donc une remise en cause de son empirisme. En effet, le fait que la philosophie désigne implicitement comme philosophie ce qu'elle présente comme pur donné nous apprend que le discours n'est pas une simple classification conventionnelle, et que, plus généralement, langue et sémantique ne sont pas théoriquement séparables (cf., ci-dessus, p. 120).

Ainsi, l'examen rhétorique du texte nous a permis d'exhiber l'opération fondamentale de la philosophie de Poincaré : présenter comme objectif, indépendant, ce qui est construction philosophique.

Or c'est justement au nom d'un fait, les « vraies mathématiques », que Poincaré s'est opposé à la logique mathématique : dans le chapitre 6, nous avons vu que la faculté de répéter une opération une fois qu'elle est possible est interprétée comme étant l'intuition fondamentale des mathématiques ; or cette intuition, rappelons-le, justifie le rejet du principe d'induction comme définition du nombre naturel (cf., ci-dessus, p. 138). C'est là déjà une opération rhétorique du texte, puisque c'est le texte philosophique qui désigne la répétition — dont l'induction est l'une des formes — comme un fait destiné à fonder l'ensemble des mathématiques. De même, la faculté de répéter une opération rend inutile toute tentative de clarification des notions mathématiques par le symbolisme logique : l'induction, comme donnée intuitive indémontrable, impose un certain ordre dans le traitement des questions mathématiques (cf., ci-dessus, p. 148) et détermine un « style », caractérisé en particulier par la référence à l'induction ainsi qu'aux autres propriétés de l'esprit, tels les groupes. Or cette référence suffit à l'éclaircissement des mathématiques : l'analyse, par exemple, une fois réduite, au moins théoriquement, à un système complexe d'égalités et d'inégalités entre nombres entiers, est considérée par Poincaré comme ayant atteint la rigueur (cf., ci-dessus, p. 153). Ainsi, donnant une assise philosophique intangible aux mathématiques, l'idée de répétition en élimine les problèmes liés aux fondements : le texte philosophique, nous l'avons vu, transforme l'induction mathématique en fondement philosophique des mathématiques, et les questions rendues urgentes par la théorie des nombres transfinis de Cantor et la logique mathématique n'ont donc pas de pertinence. Quant aux « vraies mathématiques », la rhétorique nous a appris ce qu'elles sont dans le texte de Poincaré : une construction philosophique. En effet, cet ensemble de faits, choisis isolément par l'exemple dans le discours mathématique, est polarisé dans l'espace philosophique vers l'instance esprit et perd ainsi sa signification première pour assumer une nouvelle fonction : celle, « exemplaire », de justifier les concepts et théories mathématiques (cf., ci-dessus, p. 118) ; en cela, Poincaré est conforme à sa pratique de mathématicien : dans le calcul des probabilités, l'idée très abstraite de « cas également possibles » est définie en référence à quelques exemples typiques (l'urne, les dés). La notion de répétition sur laquelle Poincaré construit apparemment sa philosophie est donc elle-même une construction philosophique (cf., ci-dessus, p. 119). En un mot, le fait scientifique est confronté au fait scientifique par l'intermédiaire du texte philosophique.

Nous en avons conclu à un manque de rigueur (et non de cohérence logique ; cf., ci-dessus, p. 120) dans la philosophie de Poincaré : si le texte philosophique transforme le fait brut en fait philosophique, l'empirisme de Poincaré n'est-il pas condamné ? Les faits ne sont plus seulement de simples faits mais des interprétations philosophiques. Cette absence de rigueur concerne-t-elle la critique de la logique mathématique ? Oui, en ce sens qu'elle touche la notion de fait ; or, eu égard à la logique mathématique, ce donné existe : ce sont justement les « vraies mathématiques ». Ainsi, les critiques de Poincaré à la logique sont d'ordre philosophique : la philosophie a joué en ce point le rôle de « forme de fonctionnement[1] » — que l'analyse rhétorique du texte nous a permis de dégager — pour le discours scientifique, dans la mesure où les « vraies mathématiques » ont exclu de cette discipline la théorie des nombres transfinis de Cantor et les récents développements de la logique mathématique ; et ils ont été exclus non pas tant par un « obstacle » que par une pratique, beaucoup plus large que ce que nous pouvons appeler philosophie, puisque, chez Poincaré, le « style » philosophique est étroitement lié aux modes de raisonnements scientifiques. Cela signifie-t-il qu'une philosophie rigoureuse les eût admis dans le domaine scientifique ? Cette question, à notre avis, n'a guère de sens : que serait la philosophie de Poincaré sans son empirisme ? Un autre texte, avec d'autres caractéristiques rhétoriques, mais lequel ? Il est impossible de l'imaginer. Ce que nous apprend, fondamentalement, la mésaventure de la philosophie de Poincaré, c'est qu'un fait ne peut être extrait et isolé de son contexte sans être transformé ; bref, qu'un fait est toujours déjà culturel : cette réflexion oriente heureusement actuellement de nombreux historiens.

Il nous faut néanmoins nuancer nos conclusions. Tout d'abord, l'insistance de Poincaré sur la valeur du fait n'était pas gratuite, et cela pour diverses raisons, dont l'une des plus importantes est certainement le rôle de l'œuvre de Lagrange dans l'inter-

1. Le terme est de P. Raymond, *L'Histoire et les Sciences*, p. 10.

prétation de la mécanique classique : Poincaré, soutenant que, malgré sa forme déductive, la mécanique est une science expérimentale, a dû, pour soutenir cette thèse, distinguer très soigneusement théorie et fait ; cette distinction, à la même époque, est aussi l'une des préoccupations de Mach et, par exemple, du mécanicien Kirchhoff[2]. De plus, Poincaré tenait — avec raison — à se démarquer du conventionnalisme d'un Edouard Le Roy, ce que, en tant que physicien, il a fait en postulant la notion de fait « brut », et, notons-le, ce terme se trouve justement dans un texte écrit contre la philosophie de Le Roy.

D'autre part, si les critiques à la logique mathématique sont avant tout d'ordre philosophique, Poincaré était d'abord un mathématicien. Or sa philosophie des mathématiques est celle d'un monde qui n'est plus celui de ses opposants. Selon lui, les mathématiques reposent essentiellement sur l'analyse, et l'arithmétisation progressive de cette discipline a levé les difficultés touchant ses notions clefs (cf., ci-dessus, p. 153). Et, cette opinion, Poincaré l'appuie sur sa pratique de mathématicien, certainement beaucoup plus importante à ses yeux que sa philosophie des sciences. Or la logique mathématique, elle, s'est développée principalement en fonction de problèmes liés à la récente théorie des nombres transfinis de Cantor et à la théorie des ensembles qui, toutes deux, supposent toujours — et même construisent — la notion d'infini actuel. Aussi les préoccupations d'un philosophe logicien étaient-elles fort différentes de celles de l'analyste qu'était Poincaré. Néanmoins, si Poincaré a négligé de prendre en considération ces nouvelles tendances en mathématiques, il nous faut dire qu'il a contribué d'une certaine façon à les rendre possibles par sa théorie de l'*analysis situs* qui est devenue la topologie — géométrique et algébrique — et par son emploi des groupes auxquels il a donné une interprétation tout à fait importante (cf., ci-dessus, p. 48).

Pour terminer, nous aimerions revenir encore une fois sur l'idée de rhétorique. Comme tout instrument utilisé de façon essentielle dans une analyse, elle n'est pas neutre. Sa théorie suppose, nous l'avons dit, que le texte est un ensemble d'opérations et, d'autre part, qu'il est toujours figural (et non point seulement dans les enjolivures, selon la tradition antique, puis classique). Aussi la philosophie est-elle comprise comme un « faire » essentiellement lié à son texte — et non comme un

2. Voir S. Gagnebin, *A la recherche d'un ordre naturel*, p. 269.

ensemble d'idées pures traduites à l'occasion dans un langage transparent : les comparaisons, prétendument justifiées par l'identité des termes, ne sont plus praticables sans grandes précautions dans une telle conception ; en un sens très large, l'histoire suppose le système. Ainsi, l'analyse d'une philosophie passe par l'ensemble de ses manifestations textuelles : le rôle de l'expérience en physique nous a permis de mieux comprendre celui de l'induction mathématique, et l'analyse des diverses sciences invoquées par Poincaré le rôle et l'opération fondamentale de la philosophie.

D'autre part, nous avons remarqué qu'une philosophie des sciences intègre en elle des objets construits dans d'autres types de discours que le sien propre. C'est peut-être même là une caractéristique de toute philosophie, comme l'a souligné Louis Althusser, qu'elle emprunte ses notions et ses objets au droit, à la morale, à la religion, à la médecine, à la biologie. Ces objets gardent-ils alors le même sens ? Cette question, à notre avis, a trop peu été posée. Nous pensons qu'elle pourrait ouvrir de nouvelles perspectives pour l'examen critique du statut des philosophies des sciences et des épistémologies. Et qu'est-ce qui peut, dans cette perspective, y répondre, si ce n'est la rhétorique ?

Lausanne, octobre 1975

Bibliographie

La bibliographie qui suit n'est pas exhaustive. Elle est conçue de façon à donner un tableau des articles philosophiques de Poincaré, que nous avons réunis par sujets ; la plupart d'entre eux ont été repris dans les quatre recueils cités dans l'introduction (note 2), en général avec des modifications plus ou moins importantes. Nous avons ensuite mentionné quelques références concernant particulièrement Poincaré, puis les ouvrages et articles qui ont directement contribué à l'élaboration de ce travail.

Les chiffres qui suivent directement les références renvoient aux pages. Nous avons unifié l'orthographe dans les citations en adoptant la minuscule pour les noms communs.

Ouvrages et articles d'Henri Poincaré

Œuvres, 11 vol., éd. G. Darboux, Paris, 1916-1956.

La Science et l'Hypothèse, Flammarion, Bibliothèque de philosophie scientifique, Paris, 1902.

La Valeur de la science, Flammarion, Bibliothèque de philosophie scientifique, Paris, 1905.

Science et Méthode, Flammarion, Bibliothèque de philosophie scientifique, Paris, 1908.

Dernières Pensées, Flammarion, Bibliothèque de philosophie scientifique, Paris, 1913.

Savants et Ecrivains, Flammarion, Bibliothèque de philosophie scientifique, Paris, 1910.

Les Sciences et les Humanités, Fayard, Paris, 1911.

Thermodynamique, Carré, Paris, 1892.

Sur les mathématiques

« Le Continu mathématique », *R.M.M.*, 1 (1893), p. 26-34, repris dans *S.H.*, chap. 2, sous le titre : « La Grandeur mathématique et l'Expérience », p. 29-44.

« Sur la nature du raisonnement mathématique », *R.M.M.*, 2 (1894), p. 371-384 ; *S.H.*, chap. 1.

« Réponse à quelques critiques », *R.M.M.*, 5 (1897), p. 59-70.

« Réflexions sur le calcul des probabilités », *Revue générale des sciences pures et appliquées,* 10 (1899), p. 262-269 ; *S.H.*, chap. 11.

« La Notation différentielle et l'Enseignement », *L'Enseigne-gnement mathématique,* 1 (1899) 106-110 ; *Œuvres,* t. 11, p. 125-128.

« La Logique et l'Intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement », *L'Enseignement mathématique,* 1 (1899), p. 157-162 ; *Œuvres,* t. 11, p. 129-133.

« Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques », *Compte rendu du deuxième Congrès international de mathématiques,* tenu à Paris du 6 au 12 août 1900, Gauthier-Villars, Paris, 1902, p. 115-130 ; *V.S.*, 1re partie, chap. 1.

« Les Définitions générales en mathématiques », *L'Enseignement mathématique,* 6 (1904), p. 257-283 ; *Conférences du Musée pédagogique* (1904), p. 1-18 ; *S.M.*, II, chap. 2.

« Cournot et les Principes du calcul infinitésimal », *R.M.M.*, 13 (1905), p. 293-306.

« Les Mathématiques et la Logique », *R.M.M.*, 13 (1905), p. 815-835, et 14 (1906), p. 17-34, enfin 14 (1906), p. 294-317 ; *S.M.*, II, chap. 3, 4 et 5.

« A propos de la logistique », *R.M.M.*, 14 (1906), p. 866-868.

« Letter to M.G.F. Stout », *Mind,* 15 (1906), p. 141-143.

« Le Hasard », *Revue du mois,* 3 (1907), p. 257-276 ; *S.M.*, I, chap. 4.

« L'Invention mathématique », *L'Enseignement mathématique,* 10 (1908), p. 357-371 ; *Bulletin de l'Institut gén. psychologique,* 8 (1908), p. 175-187 ; *Revue du mois,* 6 (1908), p. 9-21 ; *Revue générale des sciences pures et appliquées,* 19 (1908), p. 521-526 ; *S.M.*, I, chap. 3.

« L'Avenir des mathématiques », *Revue générale des sciences pures et appliquées,* 19 (1908), p. 930-939 ; *S.M.*, 1, chap. 2.

« La Logique de l'infini », *R.M.M.,* 17 (1909), p. 461-482 ; *D.P.*, p. 8-31.

« Réflexions sur les deux notes précédentes », *Acta mathematica,* 32 (1909), p. 195-200 ; réaction aux articles de A. SCHOENFLIESS, « Ueber eine vermeintliche Antinomie der Mengenlehre », *Acta mathematica,* 32 (1909), p. 177-184, et de E. ZERMELO, « Sur les ensembles finis et le principe d'induction complète », *Acta mathematica,* 32 (1909), p. 185-193 ; dans *Œuvres,* t. 11, p. 114-119.

« Ueber transfinite Zahlen », *Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematische Physik,* Leipzig-Berlin, 1910, p. 43-48 ; dans *Œuvres,* t. 11, p. 120-124.

« La Logique de l'infini », *Scientia* (*Rivista di scienza*), 12 (1912), p. 1-11 ; *D.P.*, p. 84-96, sous le titre : « Les Mathématiques et la Logique ».

Sur la géométrie

« Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie », *Bulletin de la Société mathématique de France,* 15 (1886-1887), p. 203-216 ; dans *Œuvres,* t. 11, p. 79-91.

« Les Géométries non euclidiennes », *Revue générale des sciences pures et appliquées,* 2 (1891), p. 769-774 ; *S.H.*, chap. 3.

« Lettre à M. Mouret sur les géométries non euclidiennes », *Revue générale des sciences pures et appliquées,* 3 (1892), p. 74-75 ; *S.H.,* in chap. 2 et 4.

« Le continu mathématique », *R.M.M.*, 1 (1893), p. 26-34 ; *S.H.*, chap. 2, p. 29-44.

« L'Espace et la Géométrie », *R.M.M.*, 3 (1895), p. 631-646 ; *S.H.*, chap. 4.

« Réponses à quelques critiques », *R.M.M.*, 5 (1897), p. 59-70.

« On the foundations of Geometry », *The Monist*, 9 (1898-1899), p. 1-43. Traduction française par L. Rougier, intitulée « Des fondements de la géométrie », Chiron, Bibliothèque de Synthèse scientifique, Paris, 1921.

« Des fondements de la géométrie. A propos d'un livre de M. Russell », *R.M.M.*, 7 (1899), p. 251-279.

« Sur les principes de la géométrie », *R.M.M.*, 8 (1900), p. 73-86.

Compte rendu de HILBERT, « Les Fondements de la géométrie », *Bulletin des sciences mathématiques*, 2e série, t. 26 (1902), p. 249-272 ; dans *Œuvres*, t. 11, p. 92-113 ; rectification, *ibid.*, t. 27 (1903), p. 115. *D.P.*, p. 161-185.

« L'Espace et ses trois dimensions », *R.M.M.*, 11 (1903), p. 281-301 et 407-429 ; *V.S.*, chap. 3 et 4.

« Rapport sur les travaux de M. Hilbert, présenté au troisième concours du prix Lobatchevsky », Paris, 1904. A paru en premier lieu dans *Bulletin de la Société physico-mathématique de Kazan*, 2e série, t. 14 (1904), p. 10-48.

« La Relativité de l'espace », *L'Année psychologique*, 13 (1907), p. 1-17 ; *S.M.*, II, chap. 1.

« Pourquoi l'espace a trois dimensions », *R.M.M.*, 20 (1912), p. 483-504 ; *D.P.*, p. 133-157.

« L'Espace et le Temps », *Scientia* (*Rivista di scienza*), 12 (1912), p. 159-171 ; *D.P.*, p. 97-109.

[Exposé de H. Poincaré sur les géométries non euclidiennes] dans Eugène ROUCHÉ et Ch. DE COMBEROUSSE, *Traité de géométrie*, t. 2, p. 581-593 de l'édition de 1932 [1].

Sur la mécanique et la physique

« Note sur les principes de la mécanique dans Descartes et dans Leibniz », dans G. W. LEIBNIZ, *La Monadologie*, éd. E. Boutroux, Delagrave, Paris, 1881, p. 225-231.

« Le Mécanisme et l'Expérience », *R.M.M.*, 1 (1893), p. 534-537.

1. La première édition de ce traité (1865) ne contient pas cette note, nous ne savons pas dans quelle édition ces pages ont été ajoutées.

« Sur les rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique », *Acta mathematica*, 21 (1897), p. 331-341 ; *V.S.*, chap. 5, sous le titre : « L'Analyse et la Physique ».

« Les Idées de Hertz sur la mécanique », *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 8 (1897), p. 734-743 ; *Œuvres*, t. 7 (1952), p. 231-250.

« La Mesure du temps », *R.M.M.*, 6 (1898), p. 1-13 ; *V.S.*, chap. 2.

« Préface » de la *Théorie mathématique de la lumière*, Naud, Paris, 1889 ; *S.H.*, chap. 12.

« Sur les principes de la mécanique », lecture faite au Congrès international de philosophie tenu à Paris du 1er au 5 août 1900, *Bibliothèque du Congrès international de philosophie*, 1901, t. 3, p. 457-494 ; *S.H.*, chap. 6 et 7.

« Sur les rapports de la physique expérimentale et de la physique mathématique », *Rapports présentés au Congrès international de physique* tenu à Paris du 6 au 12 août 1900, t. 1, p. 1-29 ; *S.H.*, chap. 9 et 10.

« La Géodésie française », *Bulletin de la Société astronomique de France* (déc. 1900), p. 513-521 ; *S.M.*, IV, chap. 2.

« Préface » de *Electricité et Optique*, Naud, Paris, 1901 ; *S.H.*, chap. 12.

« Grandeur de l'astronomie », *Bulletin de la Société astronomique de France* (mai 1903), p. 253-259 ; *V.S.*, chap. 6, sous le titre « L'Astronomie ».

« La terre tourne-t-elle ? », *Bulletin de la Société astronomique de France* (mai 1904), p. 216-217.

« L'Etat actuel et l'Avenir de la physique mathématique », *La Revue des idées* (nov. 1904), p. 801-818 ; *Bulletin des sciences mathématiques*, 28 (déc. 1904), p. 302-324. Extrait intitulé : « Une image de l'univers », *Bulletin de la Société astronomique de France* (janv. 1905), p. 30-31 ; *V.S.*, chap. 7 à 9.

« La Voie lactée et la Théorie des gaz », *Bulletin de la Société astronomique de France* (1906), p. 153-165 ; *S.M.*, IV, chap. 1.

« La Fin de la matière », *The Athenaeum*, London, feb. 17 (1906), p. 201-202. Depuis 1907, dernier chapitre de *S.H.*

« Le Choix des faits », *The Monist* (1909), p. 231-232.

« La Mécanique nouvelle », *Revue scientifique, Revue rose* (7 août 1909), p. 170-177, et *Comptes rendus des sessions de l'Association française pour l'avancement des sciences, Congrès de Lille*, p. 38-48.

« L'Evolution des lois », *Scientia* (*Rivista di scienza*) (1911), p. 275-292 ; *D.P.*, p. 48-67.

« Le Démon d'Arrhénius », extrait du volume *Hommage à Louis Ollivier*, Paris, sept. 1911, p. 281-287 ; *D.P.*, p. 212-218.

« Les Rapports de la matière et de l'éther », *Journal de physique théorique et appliquée*, 5ᵉ série, t. 2 (1912), p. 347-360 ; *D.P.*, p. 68-83.

« L'Espace et le Temps », *Scientia* (*Rivista di scienza*), 12 (1912), p. 159-171 ; *D.P.*, p. 97-109.

« L'Hypothèse des quanta », *Revue scientifique, Revue rose* (fév. 1912), p. 225-232 ; *D.P.*, p. 110-127.

« Les Conceptions nouvelles de la matière », *Le Matérialisme actuel*, Flammarion, Bibliothèque de Philosophie scientifique, Paris, 1926. Conférence faite en 1912.

Sur Poincaré

Ernest LEBON, *Henri Poincaré. Biographie, bibliographie analytique des écrits*, Gauthier-Villars, Paris, 1912.

Vito VOLTERRA, Jacques HADAMARD, Paul LANGEVIN, Pierre BOUTROUX, *Henri Poincaré. L'Œuvre scientifique. L'Œuvre philosophique*, Alcan, Paris, 1914.

Paul APPELL, *Henri Poincaré*, Plon, Paris, 1925.

R. DAVAL, G.-Th. GUILBAUD, *Le Raisonnement mathématique*, P.U.F., Paris, 1945.

Tobias DANTZIG, *Henri Poincaré. Critic of Crisis. Reflections on his Universe of Discourse*, Greenwood Press, New York, 1968 ; 1954.

Gerald HOLTON, « On the Thematic Analysis of Science : the Case of Poincaré and Relativity », *Mélanges Alexandre Koyré*, Hermann, Paris, 1964, t. II, p. 257-268.

Charles SCRIBNER Jr., « Henri Poincaré and the Principle of Relativity », *American Journal of Physics*, 32 (1964), p. 672-678.

J.-J. A. MOOIJ, *La Philosophie des mathématiques de Henri Poincaré*, Gauthier-Villars, Paris, Nauwelaerts, Louvain, coll. de Logique mathématique, série A, 1966.

Stanley GOLDBERG, « Henri Poincaré and Einstein's Theory of Relativity », *American Journal of Physics*, 35 (1967), p. 934-944.

Russell MCCORMMACH, « Henri Poincaré and the Quantum Theory », *Isis*, 58 (1967), p. 37-55.

Jules VUILLEMIN, *Préface, S.H.*, Flammarion, coll. « Science de la nature », Paris, 1968, p. 7-19.

Préface, V.S., Flammarion, coll. « Science de la nature », Paris, 1970, p. 7-15.

Stanley GOLDBERG, « Poincaré's Silence and Einstein's Relativity : the Role of Theory and Experiment in Poincaré's Physics », *The British Journal of History of Science*, 5 (1970-1971), p. 73-84.

Arthur I. MILLER, « A Study of Henri Poincaré's " Sur la dynamique de l'électron " », *Archive for History of Exact Science*, 10 (1973), p. 207-328.

Javier de LORENZO, *La Filosofia de la matematica de Jules Henri Poincaré*, Editorial Tecnos, Madrid, 1974.

Autres ouvrages

Gaston BACHELARD, *Le Nouvel Esprit scientifique*, Alcan, Paris, 1934.

Günther BUCK, *Lernen und Erfahrung. Zum Begriff der didaktischen Induktion*, Kohlhammer, Berlin, 1967.

Cesare BURALI-FORTI, « Una questione sui numeri transfiniti », *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 11 (1897), p. 154-164.

Louis COUTURAT, *Les Principes des mathématiques*, avec un appendice sur *La Philosophie des mathématiques de Kant*, Alcan, Paris, 1905. Antérieurement dans *R.M.M.*, 12 (1904), p. 19-50, 211-240, 664-698, 810-844 ; *R.M.M.*, 13 (1905),

p. 224-256. L'appendice a d'abord paru dans *R.M.M.*, 12 (1904), p. 321-383.
« Les Définitions mathématiques », *L'Enseignement mathématique*, 7 (1905), p. 27-40.
« Définitions et Démonstrations en mathématiques », *L'Enseignement mathématique*, 7 (1905), p. 104-121.
« Pour la logistique », *R.M.M.*, 14 (1906), p. 208-250.

Albert EINSTEIN, Léopold INFELD, *L'Evolution des idées en physique. Des premiers concepts aux théories de la relativité et des quanta*, Petite Bibliothèque Payot, traduction Maurice Solovine, 1974 ; 1re édition anglaise en 1938.

Samuel GAGNEBIN, *A la recherche d'un ordre naturel*, La Baconnière, « Langages », Neuchâtel, 1971.

Jean-Louis GALAY, « Esquisses pour une théorie figurale du discours », *Poétique*, 20 (1974), p. 393-415. Antérieurement dans *Travaux du Centre de recherches sémiologiques*, 15 (1972).
« Le Texte et la Forme », *Revue européenne des sciences sociales et Cahiers Vilfredo Pareto*, t. 12, 32 (1974), p. 41-63.

Ferdinand GONSETH, *Le Référentiel, univers obligé de médiatisation*, L'Age d'Homme, coll. « Dialectica », Lausanne, 1975.

A. HEYTING, *Les Fondements des mathématiques. Intuitionnisme. Théorie de la démonstration*, Gauthier-Villars, Paris, Nauwelaerts, Louvain, coll. de Logique mathématique, série A, 1955. Original allemand de 1934.

David HILBERT, « Sur les fondements de la logique et de l'arithmétique », *L'Enseignement mathématique*, 7 (1905), p. 89-103. Communication faite au IIIe Congrès international des mathématiciens, à Heidelberg, le 12 août 1904 ; traduction de Pierre Boutroux.

Stephen Cole KLEENE, *Introduction to Metamathematics*, North-Holland Publ. CO., Amsterdam, P. Noordhoff N.V.-Groningen, 1952.

Dominique LECOURT, *Une crise et son enjeu (Essai sur la position de Lénine en philosophie)*, Maspero, coll. « Théorie », Paris, 1973.

Giuseppe PEANO, *Opere scelte*, 3 vol., a cura dell'Unione matematica Italiana, Roma, 1957.

Arithmetices principia, nova methodo exposita, Bocca, Torino, 1889.
Notations de logique mathématique. Introduction au formulaire de mathématiques, Bocca, Turin, 1894.
Formulaire de mathématiques, t. I, Bocca, Torino, 1895. T. II, Bocca, Torino, 1897, 1898, 1899. T. III, Bocca, Torino, 1901.
Formulaire mathématique, t. IV, Bocca, Torino, 1902, 1903.
Formulario matematico, t. V, Bocca, Torino, 1905, 1908.
« Super Theorema de Cantor-Bernstein », *Rivista di matematica,* 8 (1902-1906), p. 136-143.
« Additione » (à l'article précédent), *Rivista di matematica,* 8 (1902-1906), p. 143-157.

Pierre RAYMOND, *L'Histoire et les Sciences,* Maspero, coll. « Algorithme », Paris, 1975.

J. RICHARD, « Les Principes des mathématiques et le Problème des ensembles », *Revue générale des sciences pures et appliquées,* 16 (30 juin 1905), p. 541-543.

Bertrand RUSSELL, *The Principles of Mathematics,* Cambridge University Press, 1903.
Compte rendu de *S.H.*, dans *Mind,* 14 (1905), p. 412-418.
« On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types », *Proceedings of the London Mathematical Society* (7 mars 1906), p. 29-53.
« Les Paradoxes de la logique », *R.M.M.*, 14 (1906), p. 627-650.
« Mathematical Logic as based on the Theory of Types », *American Journal of Mathematics,* 30 (1908), p. 222-262.

Jules VUILLEMIN, *Leçons sur la première philosophie de Russell,* Armand Colin, coll. « Philosophies pour l'âge de la science », Paris, 1968.

Table

" ALGORITHME "

Collection dirigée par Pierre Raymond

Pierre RAYMOND, *L'histoire et les sciences.*

Pierre RAYMOND, *De la combinatoire aux probabilités.*

Pierre GUENANCIA, *Du vide à Dieu. Essai sur la physique de Pascal.*

Michel PLON, *La théorie des jeux : une politique imaginaire.*

Christian HOUZEL, Jean-Louis OVAERT, Pierre RAYMOND, Jean-Jacques SANSUC, *Philosophie et calcul de l'infini.*

Pierre RAYMOND, *Matérialisme dialectique et Logique.*

Xavier RENOU, *L'infini aux limites du calcul (Anaximandre, Platon, Galilée).*

Anne-Françoise SCHMID, *Une philosophie de savant. Henri Poincaré et la logique mathématique.*

ACHEVÉ D'IMPRIMER EN SEPTEMBRE 1978
SUR LES PRESSES DE L'IMPRIMERIE AUBIN
86240 LIGUGÉ/VIENNE
IMPRESSION N° L 10912
DÉPÔT LÉGAL : 3e TRIMESTRE 1978
1er TIRAGE : 2 000 EXEMPLAIRES
ISBN 2-7071-0950-9