Sur le spectre du laplacien des fibrés en tores qui s'effondrent

Thèse

présentée à la faculté des sciences pour l'obtention du
grade de docteur ès science par

Pierre Jammes

Université de Neuchâtel
Institut de mathématiques
rue Émile Argand 11
CH-2007 Neuchâtel (Suisse)

Introduction

L'une des questions centrales de l'analyse sur les variétés est l'estimation du spectre du laplacien agissant sur les fonctions d'une variété compacte en fonction d'invariants géométriques, et fait l'objet d'un vaste littérature. Des résultats importants ont en particulier été obtenus concernant la minoration de la première valeur propre du laplacien. J. Cheeger en a donné une estimation en fonction d'une constante isopérimétrique :

Définition 1. *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte connexe de dimension n. On définit la constante de Cheeger h de la variété (M,g) par*

$$h(M,g) = \inf_S \frac{\operatorname{Vol} S}{\min(\operatorname{Vol} M_1, \operatorname{Vol} M_2)},$$

où S parcourt l'ensemble des sous-variétés fermées de dimension $n-1$ de M qui partitionnent M en deux sous-variétés M_1 et M_2 dont le bord est S.

Théorème 2 ([Ch70]). *Si (M,g) une variété compacte connexe, alors $\lambda_1(M,g) \geq \frac{h(M,g)^2}{4}$, où $\lambda_1(M,g)$ est la première valeur propre du laplacien agissant sur les fonctions de M.*

Si on ajoute une hypothèse sur la courbure de Ricci, on peut encadrer la première valeur propre en fonction de la constante de Cheeger :

Théorème 3 ([Bu82]). *Soit (M,g) une variété compacte connexe de dimension n. Si $\operatorname{Ric}(M,g) > -(n-1)ag$ alors $\lambda_1(M,g) \leq \tau(n)(\sqrt{a}h(M,g) + h(M,g)^2)$, où a est une constante positive et $\tau(n)$ une constante ne dépendant que de la dimension.*

Une autre approche est de minorer cette valeur propre en fonction de bornes sur la courbure et le diamètre de la variété. Un premier résultat a été obtenu par M. Gromov :

Théorème 4 ([Gr80]). *Soit a et d deux réels strictement positifs et n un entier. Il existe une constante $c(n,a,d) > 0$ telle que si (M,g) est une variété riemannienne de dimension n dont le diamètre et la courbure de Ricci vérifient $\operatorname{diam}(M,g) \leq d$ et $\operatorname{Ric}(M,g) \geq -ag$, alors*

$$\lambda_1(M,g) \geq c.$$

Il existe d'autres contributions à ce type de minoration ([LY80], [BBG85]), et l'estimation du théorème 4 a été affinée. En particulier, Cheng et Zhou donnent dans [CZ95] :

$$c = \frac{\pi^2}{d^2} e^{-\frac{1}{2} c_n \sqrt{ad^2}}, \text{ avec } c_n = \max\{\sqrt{n-1}, \sqrt{2}\}.$$

Le spectre du laplacien de Hodge-de Rham agissant sur les formes différentielles a été moins étudié, et la question se pose naturellement de savoir si les théorèmes 2 et 4 se généralisent aux formes. Rappelons que si (M, g) est une variété connexe compacte orientable, le laplacien est défini sur l'ensemble $\Omega^p(M)$ des formes différentielles de degré p de M, $0 \leq p \leq n$ par

$$\Delta^p = \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d},$$

où d est la différentielle extérieure et δ son adjoint formel pour la norme L^2 sur $\Omega^p(M)$. La dimension du noyau de Δ^p est égale au p-ième nombre de Betti de M, et son spectre est discret. On notera

$$0 = \lambda_{p,0}(M, g) < \lambda_{p,1}(M, g) \leq \lambda_{p,2}(M, g) \leq \cdots \leq \lambda_{p,k}(M, g) \leq \cdots$$

les valeurs propres de Δ^p, en répétant les valeurs propres non nulles s'il y a multiplicité. Si $p = 0$, on retrouve le laplacien agissant sur les fonctions.

L'étude du laplacien de Hodge-de Rham montre que le comportement du spectre pour $1 \leq p \leq n-1$ est différent du spectre du laplacien agissant sur les fonctions. En particulier, le théorème 4 ne se généralise pas aux formes différentielles, même avec l'hypothèse plus forte de courbure sectionnelle bornée. En effet, C. Colbois et G. Courtois ont donné dans [CC90] des exemples de variétés admettant des petites valeurs propres, c'est-à-dire qu'on peut faire varier leur métrique de sorte que la ou les premières valeurs propres non nulles tendent vers zéro, le diamètre et la courbure sectionnelles restant bornés.

Le théorème 4 précédent soulève la question de savoir à quelles conditions une variété admet une petite valeur propre à diamètre et courbure bornée. Un début de réponse a été donné par B. Colbois et G. Courtois dans [CC90] en montrant qu'on peut obtenir pour les formes différentielles un résultat semblable au théorème 4 si on se donne une hypothèse supplémentaire sur le rayon d'injectivité de la variété :

Théorème 5. *Pour tous réels a, d, et r strictement positifs et tout entier n, il existe une constante $c'(n, a, d, r) > 0$ telle que si (M, g) est une variété riemannienne compacte connexe de dimension n vérifiant* $\operatorname{diam}(M, g) \leq d$, $|K(M, g)| \leq a$ *et* $\operatorname{injrad}(M, g) \geq r$, *où* $K(M, g)$ *et* $\operatorname{injrad}(M, g)$ *désignent respectivement la courbure sectionnelle et le rayon d'injectivité de M, alors*

$$\lambda_{p,1}(M, g) \geq c',$$

pour tout p.

Ce résultat a été amélioré par S. Chanillo et F. Trèves, qui donnent une valeur explicite de la constante c' du théorème 5, et en mettant en évidence le rôle du rayon d'injectivité dans cette constante ([CT97]) :

$$\lambda_{p,1}(M,g) \geq c''(n,a,d) \cdot r^{4n^2+8n-2}. \tag{6}$$

Une conséquence immédiate est que si (M_i^n, g_i) est une suite de variétés riemanniennes de dimension n de diamètres et courbures uniformément bornés telle que $\lambda_{p,1}(M_i, g_i)$ tende vers zéro pour un certain p, $1 \leq p \leq n$, alors $\mathrm{injrad}(M_i, g_i)$ tend aussi vers zéro (remarque : si le diamètre et la courbure sectionnelle sont bornés, minorer le rayon d'injectivité est équivalent à minorer le volume). Plus simplement, si on se donne une variété compacte M et qu'on fait varier sa métrique à diamètre et courbure bornée de sorte que $\lambda_{p,1}$ tende vers zéro, alors son rayon d'injectivité tend vers zéro, c'est-à-dire qu'elle s'effondre. Cette condition a des conséquences topologiques importantes. En particulier, si (M, g_i) tend pour la distance de Gromov-Haussdorf vers une variété de dimension inférieure, K. Fukaya a montré (entre autres choses) dans [Fu87b] et [Fu89] que M possède une structure de fibré dont la base est la variété limite :

Théorème 7. *Soit (M_i, g_i) une suite de variétés compactes de dimension n et (N, h) une variété riemannienne compacte de dimension $m < n$. Si pour tout i la courbure sectionnelle de M_i vérifie $|K(M, g_i)| \leq 1$, et si (M, g_i) converge vers (N, h) pour la distance de Gromov-Hausdorff, alors pour tout i suffisamment grand il existe une fibration $\pi_i : M_i \to N$ dont la fibre est une infranilvariété.*

Cependant, il n'est pas suffisant que le rayon d'injectivité tende vers zéro pour pour que la première valeur propre non nulle du laplacien tende vers zéro. On peut par exemple considérer le produit riemannien d'une variété (N, h) quelconque munie d'une métrique fixée avec un tore plat dont on fait tendre le diamètre vers zéro : le rayon d'injectivité du produit tend vers zéro, mais son spectre est la réunion des spectres de (N, h) et du tore, et donc ne contient pas de petites valeurs propres. Ce la motive la

Question 8. *À quelles conditions une variété qui s'effondre admet-elle une — ou plusieurs — petites valeurs propres ?*

Par ailleurs, la minoration (6) n'est *a priori* pas optimale, en particulier en ce qui concerne l'exposant du rayon d'injectivité. Il se pose donc aussi la

Question 9. *Peut-on améliorer la minoration de la première valeur propre non nulle du laplacien de Hodge-de Rham ?*

Des réponses précises aux questions 8 et 9 ont été apportées dans des situations topologiques ou géométriques particulières. C'est le cas des limites adiabatiques : si (M, g) est une variété riemannienne compacte, A une distribution de sous-espaces de TM et B la distribution orthogonale à A, on peut écrire la métrique g sous la forme $g = g_A \oplus g_B$ où g_A et g_B sont des métriques sur A et B respectivement, et définir sur M la famille de métriques

$$g_t = t^2 g_A \oplus g_B.$$

La limite de (M, g_t) quand $t \to 0$ est appelée « limite adiabatique ». Dans le cas où M est un fibré riemannien, la distribution A est la distribution verticale $T^V M$, B la distribution horizontale $T^H M$, et on fait tendre le diamètre de la fibre vers zéro par des homothéties de rapport t. Pour un tel effondrement, Mazzeo et Melrose ont montré ([MM90]) que le nombre de valeurs propres de l'ordre de t^2 quand t tend vers zéro peut se calculer à l'aide de la suite spectrale de Leray du fibré (notons que Forman, Álvarez et Kordyukov ont généralisé ce résultat aux feuilletages riemannien dans [Fo95] et [ALK00]). Cependant, dans une situation de limite adiabatique, la courbure n'est en général pas bornée, en particulier si la fibre n'est pas un tore. D'autre part, on peut en général effondrer le fibré sur sa base autrement que par homothétie de la fibre.

Par ailleurs, B. Colbois et G. Courtois ont étudié dans [CC00] le cas où M est une variété de dimension $n+1$ qui tend pour la distance de Gromov-Hausdorff vers une variété (N, h) de dimension n et donnent des estimations plus précises de la ou les premières valeurs propres non nulles en fonction de la topologie de M et de la géométrie de l'effondrement. Selon le théorème 7, on sait que M est nécessairement un fibré en cercle sur N, et l'hypothèse d'orientabilité sur M assure que ce fibré est principal. La topologie de ce fibré est caractérisée par sa classe d'Euler $[e] \in H^2(N, \mathbb{Z})$ (cf. [BT82], p. 72). En notant $e(M)$ le représentant harmonique de la classe de cohomologie $[e]$ pour la métrique h sur N, on a alors :

Théorème 10. *Soit a et d deux réels strictement positifs et (N, h) une variété riemannienne de dimension n. Il existe des constantes $\varepsilon_0(n, a, d, (N, h)) > 0$ et $C_i(n, a, d, (N, h)) > 0$ pour $i = 1, 2, 3$ telles que si (M, g) est une variété riemanienne de dimension $n+1$ vérifiant $\mathrm{diam}(M, g) \leq d$, $|K(M, g)| \leq a$ et $\varepsilon = d_{GH}((M, g), (N, h)) \leq \varepsilon_0$, alors pour $1 \leq p \leq n$,*

10.1. $\lambda_{p, m_p+1}(M, g) \geq C_1$;

10.2. Si $e \neq 0$, $C_2 \|e(M)\|_2^2 \varepsilon^2 \leq \lambda_{1,1}(M, g) \leq C_3 \|e(M)\|_2^2 \varepsilon^2$;

10.3. Si $\dim H^2(N, \mathbb{R}) = 1$,

$$C_2 \|e(M)\|_2^2 \varepsilon^2 \leq \lambda_{p,k}(M, g) \leq C_3 \|e(M)\|_2^2 \varepsilon^2 \text{ pour } 1 \leq k \leq m_p.$$

avec $m_p = b_p(N) + b_{p-1}(N) - b_p(M)$.

Remarque 11. Si $e = 0$, par exemple si le fibré est trivial, on a $m_p = 0$ pour tout p. Le théorème se réduit alors à 10.1. D'autre part, si $e \neq 0$ alors $m_1 = 1$. $\lambda_{1,1}(M, g)$ est donc la seule petite valeur propre pour les 1-formes.

Remarque 12. B. Colbois et G. Courtois montrent aussi dans [CC00] que si $\dim H^2(N, \mathbb{R}) \geq 1$, on ne peut pas trouver de constante C_2 vérifiant 10.3 qui soit indépendante de la topologie de M.

Remarque 13. Le théorème isole les rôles de la topologie (par l'intermédiaire de $e(M)$) et du rayon d'injectivité (qui est de l'ordre de ε quand ε tend vers zéro) dans la minoration de la première valeur propre non nulle du laplacien. On voit donc que dans la situation d'un fibré en cercle qui s'effondre, si le laplacien admet une petite valeur propre, elle se comporte asymptotiquement comme le carré du rayon d'injectivité.

Dans des situations topologiques et géométriques plus générales, on ne connait pas de résultat semblable. Cependant, en ce qui concerne la question 8, J. Lott a apporté une contribution importante dans [Lo02b] et [Lo02a] en définissant un opérateur limite pour le laplacien, c'est-à-dire un opérateur dont le spectre est la limite du spectre de laplacien de Hodge-de Rham quand la variété s'effondre, le nombre de valeurs propres petites ou nulles étant alors donné par la multiplicité de la valeur propre nulle dans le spectre de l'opérateur limite. Dans le chapitre 1, nous exposerons la construction de cet opérateur limite, ainsi que les conditions nécessaires à l'existence de petites valeurs propres que Lott en déduit.

Les chapitres 2 et 3 seront consacrés à l'étude, pour des fibrés munis d'une structure homogène — construits plus précisément comme quotients d'un groupe de Lie résoluble G par un réseau cocompact Γ —, du spectre du laplacien Δ^p_{inv} restreint à l'espace de dimension finie $\Omega^p(M)^G$ des formes différentielles invariantes lors d'effondrements par des métriques homogènes, afin de mettre en évidence comment varie précisément le nombre de petites valeurs propres en fonction de la topologie du fibré et de la géométrie de l'effondrement. En effet, les petites valeurs propres de Δ^p_{inv} sont aussi petites valeurs propres de Δ^p, et dans le cas où le groupe G est nilpotent, J. Lott a montré réciproquement que la recherche de petites valeurs propres de Δ se ramène à l'étude de Δ^p_{inv} :

Proposition 14 ([Lo02b]). *Il existe des constantes $a(n)$, $a'(n)$ et $c(n)$ strictement positives telles que si M est une infranilvariété de dimension n munie d'une métrique homogène pour laquelle $\|R\|_\infty \operatorname{diam}(M)^2 \leq a'$, où $\|R\|_\infty$ est la norme du tenseur de courbure, et si α est une forme propre du laplacien sur M dont la valeur propre λ vérifie $\lambda < a \operatorname{diam}(M)^{-2} - c\|R\|_\infty$, alors α est invariante.*

Cependant, ce résultat ne se généralise pas à tous les groupes résolubles. On en verra un exemple au paragraphe 2.7.2.

Dans le chapitre 2, nous étudierons des fibrés de fibre T^n sur la base S^1. Le fait qu'une variété qui s'effondre sur un cercle admette une structure de solvariété est déjà connu ([Pe89], [Tu97]). Nous en ferons une construction explicite dans un cas simple : les fibrés considérés seront définis comme suspension d'un difféomorphisme linéaire de la fibre T^n représenté par un élément $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. De plus, nous ferons l'hypothèse simplificatrice que A admet un logarithme réel. Les principales propriétés du spectre que nous allons mettre en évidence sont données par le

Théorème 15. *Soit $n \geq 2$, $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ et $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $A = \exp(B)$, d la dimension du sous-espace caractéristique associé à la valeur propre 0 de B et d' la dimension de son noyau. Il existe un groupe $G = G(B) \subset \mathrm{GL}_{n+2}(\mathbb{R})$ et un réseau $\Gamma \subset G$ tel que $\Gamma \backslash G$ soit homéomorphe au fibré M de fibre T^n de fibration $p : M \to S^1$ construit par suspension du difféomorphisme A. Si de plus on suppose que les métriques sur M sont homogènes et telles que p soit une submersion riemannienne pour une métrique de volume 1 sur S^1, alors :*

15.1. $\dim \mathrm{Ker}\, \Delta^1_{inv} = d' + 1$ *et Δ^1_{inv} admet $n - d'$ valeurs propres non nulles distinctes ou non.*

15.2. Pour tout $a > 0$, il existe une constante $c(B, a) > 0$ telle que pour toute métrique invariante g sur M dont la courbure sectionnelle vérifie $|K(M, g)| < a$, on a $\lambda^{inv}_{1,i}(M, g) < c$, pour tout i.

15.3. Si $d \neq n$, alors pour tout $a > 0$, il existe une constante $c'(B, a) > 0$ telle que pour toute métrique g sur M la courbure sectionnelle vérifie $|K(M, g)| < a$, on a $\lambda^{inv}_{1,d-d'+1}(M, g) > c'$.

Si $d = n$ et $d' \neq n$, alors G est nilpotent, et il existe une suite de métriques g_ε sur M telle que la courbure soit uniformément bornée et $\lambda^{inv}_{1,i}(M, g_\varepsilon) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$, pour tout $0 < i \leq n - d'$.

Si $d = d' = n$, alors $G = \mathbb{R}^n$, M est un tore et les formes harmoniques sont exactement les formes invariantes.

15.4. Pour tout $k \leq d - d'$, il existe une famille de métriques g^k_ε sur M de courbure et diamètre uniformément bornés par rapport à ε et une constante $c''(B, k) > 0$ telle que $\lambda^{inv}_{1,i}(M, g^k_\varepsilon) \to 0$ pour $i \leq k$ quand $\varepsilon \to 0$, et $\lambda^{inv}_{1,k+1}(M, g^k_\varepsilon) > c''$ si $k < n$.

Remarque 16. Le point 15.4 montre que le nombre de petites valeurs propres peut, quand la topologie le permet, fortement varier avec la géométrie de l'effondrement. Cette situation diffère donc du cas où la fibre est de dimension 1, étudié par B. Colbois et G. Courtois dans [CC00].

Remarque 17. La démonstration de 15.4 met en évidence le fait que dans le cas d'un effondrement par homothéties de la fibre (situation de limite adiabatique), il n'y a pas de petites valeurs propres.

Remarque 18. Une conséquence immédiate du résultat 15.3 est que si tout le spectre de Δ^1_{inv} tend vers zéro, alors le groupe G est nilpotent.

D'autre part, ce théorème permet de donner une condition nécessaire et suffisante sur B pour l'existence de petites valeurs propres pour les 1-formes :

Corollaire 19. *Sous les hypothèses du théorème 15, il existe une suite de métriques homogènes g_ε sur M telle que $\lambda^{inv}_{1,1}(M, g_\varepsilon) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$ si et seulement si $d \neq d'$ (*i.e.* si la réduite de Jordan de B a un bloc nilpotent non nul).*

Remarque 20. Les résultats 15 et 19 montrent que le comportement asymptotique du spectre de Δ^1_{inv} est essentiellement lié à la nature, de la partie nilpotente de la réduite de Jordan de B. En effet, le bloc nilpotent est caractérisé par les invariants d et d' de B.

Dans le cas des p-formes, $p \geq 2$, la situation est plus complexe, et en particulier le corollaire 19 n'est pas vrai pour n et p quelconque (on verra au paragraphe 2.7.1 qu'il peut exister une petite valeur propre pour les 2-formes alors que B n'a pas de bloc nilpotent). On peut cependant donner une condition nécessaire à l'existence de petites valeurs propres, à savoir que B n'est pas semi-simple. En effet, on a le :

Théorème 21. *Sous les hypothèse du théorème 15, si B est semi-simple, alors il existe $c''(B, a) > 0$ tel que pour toute métrique homogène g sur M dont la courbure sectionnelle vérifie $|K(M, g)| < a$, on a $\lambda^{inv}_{p,1}(M, g) > c''$.*

Dans le chapitre 3, nous allons nous intéresser à des fibrés en tore T^k sur le tore T^2 muni d'une structure de fibré principal. Leur topologie est assez simple. On sait en effet qu'un fibré principal en tore sur le tore peut être muni d'une structure de nilvariété ([PS61]). On va ici montrer un résultat plus précis en utilisant le fait que la base est de dimension 2 : ce fibré est difféomorphe au produit d'un tore et d'une nilvariété de dimension 3. Puis on calculera le spectre du laplacien restreint aux formes différentielles invariantes en supposant le fibré muni d'une métrique homogène.

On obtient le résultat suivant :

Théorème 22. *Soit M un fibré principal non trivial en tore T^n sur le tore T^2 . Alors*

22.1. M est une nilvariété et, si $n \geq 2$, M est homéomorphe à $N \times T^{n-1}$, où N est une nilvariété de dimension 3.

22.2. Il existe un vecteur V vertical (tangent à la fibre T^n) tel que si M est muni d'une métrique homogène, alors pour tout $p \in [1, n+1]$, Δ^p_{inv} admet une unique valeur propre non nulle λ. Sa multiplicité est C^{p-1}_n, et $\lambda = \mathrm{Vol}(B)^{-2}|V|^2$, où $\mathrm{Vol}(B)$ est le volume de la base du fibré pour la métrique induite.

Remarque 23. Le produit du 22.1 n'est pas nécessairement riemannien pour les métriques considérées. Le spectre ne peut donc pas se déduire directement de la formule de Künneth.

Remarque 24. On voit que contrairement à la situation du théorème 15, un effondrement par homothéties de la fibre produit une petite valeur propre, et que λ est alors proportionnelle au carré du diamètre de la fibre, à topologie fixée.

Remarque 25. Dans le cas où $n = 1$, la remarque précédente rejoint les résultats de B. Colbois et G. Courtois qui étudient dans [CC00] le spectre des fibrés en cercles sur des bases quelconques et sans restrictions sur la métrique. Mais si la dimension de la fibre est plus grande ($n \geq 2$), un phénomène nouveau apparaît : il existe dans ce cas des effondrements du fibré tels que λ ne tende pas vers zéro. Nous en donnerons des exemples au paragraphe 3.2. Si $n \geq 2$, le nombre de petites valeurs propres ne dépend donc pas uniquement de la topologie. Cependant, on a pas de liberté sur ce nombre comme en 15.4.

Dans une deuxième partie, du chapitre 4 au chapitre 7, nous allons nous intéresser à la question 9. Le théorème 10 ne considère que des fibrés dont la fibre est de dimension fixée égale à 1 ; on peut se demander dans quelle mesure il se généralise aux fibres de dimension plus grande. Nous allons ici nous intéresser plus précisément aux situation de fibrations principales s'effondrant sur leur base, la fibre étant alors un tore (ce sont les seules infranilvariétés possédant une structure de groupe). Notre but dans cette seconde partie est d'arriver au résultat suivant :

Théorème 26. *Soit a et d deux réels strictement positifs, n un entier et (N, h) une variété riemannienne de dimension strictement inférieure à n. Il existe des constantes $\varepsilon_0(n, a, d, (N, h)) > 0$ et $C(n, a, d, (N, h)) > 0$ telles que si (M, g) est une variété riemannienne de dimension n vérifiant $\operatorname{diam}(M, g) \leq d$, $|K(M, g)| \leq a$ et si $\pi : (M, g) \to (N, h)$ est une fibration principale de fibre T^k qui soit une ε-approximation de Hausdorff avec $\varepsilon < \varepsilon_0$, alors*

$$\lambda_{1,1}(M, g) \geq C \cdot \operatorname{Vol}^2(M, g).$$

Remarque 27. On obtient une minoration en fonction du volume de la variété et pas en fonction du rayon d'injectivité, mais avec un exposant égal à 2, indépendamment de la dimension de la variété.

Ce résultat soulève deux questions qui restent ouvertes :

Question 28. *Peut-on obtenir une minoration en fonction du rayon d'injectivité avec un exposant indépendant de la dimension ?*

Question 29. *Peut-on généraliser ce résultat aux p-formes différentielles, pour tout p ?*

Nous commencerons dans le chapitre 4 par discuter de la topologie des fibrés principaux en tore, dans le but de déterminer un invariant topologique généralisant la classe d'Euler des fibrés en cercle et qui pourra être utilisé pour contrôler le spectre.

Dans le chapitre 5, nous étudierons comment, dans le cas d'un fibré principal en tore T^k muni d'une métrique invariante, on peut se ramener à l'étude des petites valeurs propres du laplacien à celle du spectre du laplacien resteint aux formes différentielles invariantes par l'action de T^k. Dans le cas des formes différentielles d'un fibré en cercle, Colbois et Courtois donnent, avec certaines hypothèses sur la métrique, une minoration du spectre sur l'orthogonal des formes invariantes :

Théorème 30 ([CC00]). *Soit (N^n, h) une variété compacte, $S^1 \hookrightarrow M^{n+1} \to N$ un S^1-fibré principal, et g_ε une métrique S^1-invariante sur M telle que $|K(M, g_\varepsilon)| < a$, $\operatorname{diam}(M, g_\varepsilon) < d$ et que la longueur des fibres soit inférieure à ε. Il existe des constantes $C = C(n, a, d, (N, h))$ et $\rho = \rho(n)$ telles que toute forme propre de valeur propre $\lambda \leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{1}{2\rho}}}$ est S^1-invariante.*

Nous allons démontrer un résultat semblable à celui de Colbois et Courtois, mais sans utiliser d'hypothèse sur le diamètre et la courbure du fibré, et en donnant une minoration plus précise du spectre du laplacien restreint à l'orthogonal des formes invariantes :

Théorème 31. *Soit (M, g) un fibré principal en cercle muni d'une métrique S^1-invariante. On note l_0 le maximum des longueurs des fibres.*

Soit λ une valeur propre de Δ^p. Si $\lambda < \left(\frac{2\pi}{l_0}\right)^2$, alors les formes propres associées sont S^1-invariantes.

Remarque 32. La constante $\left(\frac{2\pi}{l_0}\right)^2$ du théorème est optimale, en ce sens qu'il existe des fibrés pour lequelles elle est égale à une valeur propre associée à une forme propre non invariante. En effet, $\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2$ est la première valeur propre du cercle de longueur l. Dans le cas d'un fibré trivial $M = N \times S^1$ muni d'une métrique produit, les formes différentielles de la formes $\alpha \wedge f$ où α est une p-forme harmonique de N et f une fonction propre de S^1 seront des formes propres de Δ^p, de même valeur propre que f. Comme la fonction f n'est pas constante, les formes propres associés à la valeur propre $\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2$ ne sont pas toutes invariantes. Comme $\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2$ est le $\lambda_{0,1}$ du cercle de longueur l, la constante $\left(\frac{2\pi}{l_0}\right)^2$ du théorème 31 peut s'interpréter comme la borne inférieure sur l'ensemble des fibres de la première valeur propre du laplacien agissant sur les fonctions de la fibre. Dans le cas des fibrés en tore, on peut montrer un résultat semblable, faisant intervenir la première valeur propre du laplacien Δ^0 restreint au tore :

Théorème 33. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $T^k \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} N$ un fibré en tore T^k, $\bar{g}$ une métrique invariante sur T^k et f une fonction sur N strictement positive. Supposons que M est muni d'une métrique T^k-invariante g telle que pour tout $x \in N$, la restriction $\bar{g}_x$ de g à la fibre $\pi^{-1}(x)$ vérifie $\bar{g}_x \leq f(x) \cdot \bar{g}$.*

Soit λ une valeur propre du laplacien agissant sur les formes différentielles de M. Si $\lambda < (\sup_{x \in N} f(x))^{-1} \cdot \lambda_{0,1}(T^k, \bar{g})$, alors les formes propres associées sont T^k-invariantes.

Remarque 34. Comme pour le théorème 31, la constante est optimale dans le cas d'un fibré trivial muni d'une métrique produit.

On peut déduire du théorème 33 une inégalité en fonction du maximum des diamètres des fibres. Cependant, on doit ajouter une hypothèse sur la métrique g. On verra en effet que la donnée d'une borne sur le diamètre des fibres ne permet pas de majorer la fonction f du théorème 33.

Corollaire 35. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $T^k \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} N$ un fibré en tore T^k, et $\bar{g}$ une métrique invariante sur T^k. Supposons que M est muni d'une métrique T^k-invariante telle que pour tout $x \in N$, la restriction de la métrique à la fibre $\pi^{-1}(x)$ soit proportionnelle à $\bar{g}$.*

Soit λ une valeur propre du laplacien. Si $\lambda < \left(\dfrac{\pi}{d_0}\right)^2$, où d_0 est le maximum des diamètres des fibres pour la métrique induite par g, alors les formes propres associées sont T^k-invariantes.

Remarque 36. La démonstration des deux théorèmes met en évidence le fait que si la multiplicité d'une valeur propre est impaire, alors le sous-espace propre associé contient des formes invariantes.

Le chapitre 6 aura pour but de montrer que pour obtenir le théorème 26, on peut se ramener à une situation géométrique plus simple. En particulier, on montrera qu'une métrique de courbure et diamètre bornés sur le fibré est proche d'une métrique invariante pour laquelle les fibres sont totalement géodésiques :

Théorème 37. *Soient a et d deux réels strictement positifs, n un entier et (N,h) une variété riemannienne de dimension strictement inférieure à n. Il existe des constantes $\varepsilon_0(n,a,d,(N,h)) > 0$, $\tau(n,a,d,(N,h)) > 0$ et $\tau'(n,a,d,(N,h)) > 0$ telles que si (M,g) est une variété riemannienne de dimension n vérifiant $|K(N,h)| \leq a$, $|K(M,g)| \leq a$, $\mathrm{diam}(M,g) \leq d$ et si $\pi : (M,g) \to (N,h)$ une fibration principale de fibre T^k qui soit une ε-approximation de Hausdorff avec $\varepsilon < \varepsilon_0$, alors il existe des métriques $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ sur M et N respectivement et une fibration principale $\pi' : (M,\tilde{g}) \to (N,\tilde{h})$ telles que*

1. *L'action de T^k sur $(M,\tilde{g})$ est isométrique ;*
2. *Les fibres de la fibration π' sont totalement géodésiques ;*

3. $\frac{1}{\tau} g \leq \tilde{g} \leq \tau g$ *et* $\frac{1}{\tau} h \leq \tilde{h} \leq \tau h$ *;*

4. La restriction de $\tilde{g}$ *à la fibre est telle que* $\mathrm{diam}(\pi'^{-1}(x)) \leq \tau' \varepsilon$*, pour tout* $x \in N$*.*

Remarque 38. On verra aussi que si l'on suppose que la métrique g sur M est T^k-invariante, alors on peut remplacer dans le théorème 37 l'hypothèse sur la courbure de (M, g) par l'hypothèse plus faible $K(M, g) \geq -a$.

Enfin, dans le chapitre 7, nous démontrerons le théorème 26 en utilisant les résultats des chapitres 4 à 6, et nous discuterons de la possibilité d'exprimer la constante C du théorème 26 en fonction d'invariants géométriques de (N, h).

Chapitre 1

Existence de petites valeurs propres du laplacien

1.1. Un exemple : la nilvariété d'Heisenberg de dimension 3

Nous allons commencer par présenter un exemple de variété compacte admettant une petite valeur propre. Cet exemple nous sera utile par la suite car il illustre un certain nombre de phénomènes.

On considère le groupe d'Heisenberg de dimension 3

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ x, y, z \in \mathbb{R} \right\}. \tag{1.1}$$

C'est un groupe nilpotent, difféomorphe à $\mathbb{R}^3$, et son centre vérifie $Z(G) = [G, G] = \{ \left(\begin{smallmatrix} 1 0 z \\ 0 1 0 \\ 0 0 1 \end{smallmatrix} \right), z \in \mathbb{R}\}$. On note Γ le sous-groupe de G formé des matrices à coefficients entiers. C'est un sous-groupe discret cocompact de G, et on définit la nilvariété d'Heisenberg de dimension 3 par $N = \Gamma \backslash G$. Sa topologie peut être décrite de trois manières :

- par construction c'est une nilvariété, c'est-à-dire le quotient d'un groupe nilpotent par un sous-groupe cocompact ;
- c'est aussi un fibré en tore sur le cercle dont les fibres sont, dans la paramétrisation donnée par (1.1), les sous-variétés d'équation $x = c^{te}$. Ces sous-variétés de G sont difféomorphes à $\mathbb{R}^2$, et leurs quotients dans N sont des tores ;
- enfin, c'est un fibré principal en cercle sur le tore, les fibres étant définies comme les orbites de l'action du centre $Z(G)$ sur N.

Soit X, Y et Z les champs de vecteurs invariants à gauche sur N engendrés en $(0,0,0)$ par $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ et $\partial/\partial z$. Ces champs passent au quotient sur N, et vérifient $[X, Y] = Z$ et $[X, Z] = [Y, Z] = 0$. On va, à l'aide de ces champs, construire une famille de métrique pour laquelle le diamètre et la courbure seront uniformément bornés : soit α, β et γ trois réels positifs fixés. Pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, on définit sur N la métrique g_ε comme étant la métrique invariante à gauche telle qu'en tout point, la base $(X_\varepsilon, Y_\varepsilon, Z_\varepsilon)$ définie par $X_\varepsilon = \varepsilon^{-\alpha} X$, $Y_\varepsilon = \varepsilon^{-\beta} Y$ et $Z_\varepsilon = \varepsilon^{-\gamma} Z$ soit orthonormée. Les crochets de Lie entre les champs de vecteurs de cette base sont

$$[X_\varepsilon, Y_\varepsilon] = Z_\varepsilon^{\gamma-\alpha-\beta} \text{ et } [X_\varepsilon, Z_\varepsilon] = [Y_\varepsilon, Z_\varepsilon] = 0. \tag{1.2}$$

Comme les paramètres α, β et γ sont positifs, les normes de X, Y et Z pour la métrique g_ε sont inférieures à 1, donc le diamètre de N reste borné quand ε varie. D'autre part, comme les champs X_ε, Y_ε et Z_ε sont invariants, le tenseur de courbure peut s'écrire en fonction des coefficients des crochets de Lie entre ces champs. On impose donc à α, β et γ de vérifier $\tau = \gamma - \alpha - \beta \geq 0$, de sorte que la courbure reste elle aussi bornée.

Comme la métrique sur N est invariante à gauche, l'espace des 1-formes différentielles invariantes est stable par le laplacien. On va calculer son spectre en restriction à cet espace. On peut déduire de (1.2) que

$$\mathrm{d}X_\varepsilon^\flat = \mathrm{d}Y_\varepsilon^\flat = 0 \text{ et } \mathrm{d}Z_\varepsilon^\flat = -\varepsilon^\tau X_\varepsilon^\flat \wedge Y_\varepsilon^\flat, \tag{1.3}$$

où $U^\flat$ désigne la 1-forme duale de U pour la métrique g_ε, et donc que

$$\delta(X_\varepsilon^\flat \wedge Y_\varepsilon^\flat) = -\varepsilon^\tau Z_\varepsilon^\flat \text{ et } \delta(X_\varepsilon^\flat \wedge Z_\varepsilon^\flat) = \delta(Y_\varepsilon^\flat \wedge Z_\varepsilon^\flat) = 0. \tag{1.4}$$

En restriction aux 1-formes invariantes, l'opérateur $\mathrm{d}\delta$ est nul. On a donc finalement

$$\Delta X_\varepsilon^\flat = \Delta Y_\varepsilon^\flat = 0 \text{ et } \Delta Z_\varepsilon^\flat = \varepsilon^{2\tau} Z_\varepsilon^\flat. \tag{1.5}$$

La forme différentielle $Z_\varepsilon^\flat$ est donc une forme propre de valeur propre $\lambda = \varepsilon^{2\tau}$. On voit que si $\tau > 0$, par exemple si $\alpha = 1$, $\beta = 1$ et $\gamma = 3$, cette valeur propre tend vers 0. La variété N admet donc une petite valeur propre. On peut noter qu'en revanche, si $\tau = 0$, par exemple si $\alpha = \beta = 1$ et $\gamma = 2$, la valeur propre λ ne tend pas vers zéro. La question 8 doit donc être formulée de manière plus précise :

Question 1.6. *Comment varie le nombre de petites valeurs propres avec la géométrie de l'effondrement ?*

1.2. Opérateur limite

1.2.1. Le cas des fonctions

Avant d'aborder la construction faite par J. Lott d'un opérateur limite pour le laplacien de Hodge-de Rham, rappelons le résultat obtenu par K. Fukaya dans le cas des fonctions. Dans [Fu87a], Fukaya montre l'existence — sous certaines conditions — d'un opérateur limite pour le laplacien agissant sur les fonctions.

Soit $\mathcal{M}(n,d)$ l'ensemble des variétés riemanniennes (M^n,g) de dimension n telles que leur courbure sectionnelle et leur diamètre vérifient respectivement $|K(M,g)| \leq 1$ et $\mathrm{diam}(M,g) \leq d$, et $\lambda_k(M,g)$ la k-ième valeur propre du laplacien agissant sur les fonctions de M, les valeurs propres étant répétées s'il y a multiplicité. Le problème est d'étendre continument pour tout k la fonction $(M,g) \to \lambda_k(M,g)$ à l'adhérence de $\mathcal{M}(n,d)$ dans l'ensemble des espaces métriques compacts. C'est impossible si on munit cet ensemble de la topologie de Gromov-Hausdorff, mais Fukaya considère l'ensemble des espaces métriques mesurés — *i.e.* muni d'une mesure de probabilité — muni de la topologie de Hausdorff mesurée définie comme suit : soit (X_i,μ_i) une suite d'espaces métriques mesurés. Elle converge vers (X,μ) s'il existe des applications mesurables $\Psi_i : X_i \to X$ et une suite strictement positive ε_i vérifiant

1. $\lim\limits_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$;
2. L'ε_i-voisinage de $\Psi_i(X_i)$ est X ;
3. Pour tout p,q dans X_i, on a
$$|d(\Psi_i(p),\Psi_i(q)) - d(p,q)| < \varepsilon_i \ ;$$
4. Pour toute fonction f sur X, on a
$$\lim_{i\to\infty} \int f\circ\Psi_i \mathrm{d}\mu_i = \int f \mathrm{d}\mu,$$
c'est-à-dire que la mesure $(\Psi_i)_*(\mu_i)$ converge vers μ pour la topologie faible-$*$.

Il obtient alors :

Théorème 1.7. *Soit $\overline{\mathcal{M}(n,d)}$ l'adhérence de $\mathcal{M}(n,d)$ dans l'ensemble des espaces métriques mesurés, en munissant chaque variété (M^n,g) de sa mesure riemannienne normalisée.*

1. *La fonction λ_k s'étend continuement à l'ensemble $\overline{\mathcal{M}(n,d)}\backslash\{(point,1)\}$.*
2. *Pour tout $(X,\mu) \in \overline{\mathcal{M}(n,d)}$, il existe un opérateur auto-adjoint $P_{(X,\mu)}$ agissant sur $L^2(X,\mu)$ tel que $\lambda_k(X,\mu)$ soit égal à la k-ième valeur propre de $P_{(X,\mu)}$.*
3. *Supposons que $\lim_{i\to\infty}(M_i,g_i) = (X,\mu)$. Soit $\varphi_{k,i}$ une fonction propre normalisée associée à la valeur propre $\lambda_k(M_i,g_i)$ et $\Lambda_{k,i} = \{\varphi\circ\Psi_i, \varphi \in L^2(X,\mu), P_{(X,\mu)}\varphi = \lambda_k(X,\mu)\varphi\}$. Alors $\lim_{i\to\infty} d(\Lambda_{k,i},\varphi_{k,i}) = 0$.*

Remarque 1.8. Dans le cas où l'espace limite (X,μ) est une variété riemannienne, la mesure limite μ et l'opérateur limite $P_{(X,\mu)}$ ne sont pas nécessairement la mesure riemanienne ni le laplacien de la variété, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.9. On considère le tore $T^2 = \{(s,t),\ s,t \in S^1\}$, $c : S^1 \to \mathbb{R}$ une fonction positive C^∞, et la famille de métriques $g_\varepsilon(c)$ définie sur T^2 par

$$g_\varepsilon(c) = \mathrm{d}s^2 \oplus \varepsilon^2 c(s)^2 \mathrm{d}t^2.$$

Si $f \in C^\infty(T^2)$, on a alors

$$\Delta_{(T^2,g_\varepsilon(c))} f(s,t) = -c(s)^{-1}\frac{\partial}{\partial s}\left(c(s)\frac{\partial}{\partial s}f(s,t)\right) - \varepsilon^2 c(s)^{-2} c(s)^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(s,t).$$

Si on note $\lambda_k(c)$ la k-ième valeur propre de l'opérateur P_c défini sur S^1 par $P_c(f)(s) = -c(s)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(c(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}f(s)\right)$, alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_k(T^2, g_\varepsilon(c)) = \lambda_k(c),$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (T^2, g_\varepsilon(c)) = (S^1, \mu)$$

avec $\mu = c \cdot \mathrm{d}s$. ■

Remarque 1.10. Les fonctions contenues dans $\Lambda_{k,i}$ ont la propriété d'être constantes sur chacun des $\Psi_i^{-1}(x)$, $x \in X$. Cela signifie, dans le cas où les Ψ_i définissent des fibrations, que les fonctions propres $\varphi_{k,i}$ sont approximées par des fonctions constantes sur les fibres.

1.2.2. Construction de l'opérateur

Récemment, J. Lott a généralisé le résultat de Fukaya aux formes différentielles ([Lo02b], [Lo02a]). Nous allons ici présenter la construction de l'opérateur limite en nous restreignant par soucis de clarté au cas d'un fibré $F \hookrightarrow (M,g) \to (N,h)$ sur une variété riemannienne dont la fibre est une nilvariété $F = \Gamma\backslash G$, et qui tend pour la distance de Gromov-Hausdorff vers sa base. Nous noterons ∇^{aff} la connexion sur F telle que les champs invariants à gauche soient parallèles.

La première difficulté est de déterminer un espace sur lequel va agir l'opérateur limite. Dans la construction de Fukaya, l'opérateur $P_{(X,\mu)}$ du théorème 1.7 agit sur $L^2(N)$, c'est-à-dire sur un espace de fonctions à valeurs réelles sur la base. Dans le cas des formes différentielles, on utilise un espace de formes différentielle sur la base, mais à valeur dans un espace plus grand que $\mathbb{R}$. Plus précisement, on considère un fibré vectoriel gradué $E = \bigoplus_{j=0}^m E^j$ sur la base dont chaque fibre est munie d'un produit scalaire gradué — *i.e.* tel que les E^i soient orthogonaux entre eux — noté h_E, et on munit ce fibré d'une superconnexion A' de degré 1, c'est-à-dire d'un opérateur de la forme

$$A' = A'_{[0]} + A'_{[1]} + A'_{[2]}$$

où

- $A'_{[0]} \in C^\infty(N, \mathrm{Hom}(E^*, E^{*+1}))$;
- $A'_{[1]}$ est une connexion sur E qui préserve la graduation ;
- $A'_{[2]} \in \Omega^2(N, \mathrm{Hom}(E^*, E^{*-1}))$.

On peut étendre cette superconnexion par la règle de Leibniz à un opérateur sur l'espace $\Omega(N, E)$ des formes différentielles sur N à valeur dans E. La métrique h_N et le produit scalaire h_E permettent de construire un produit scalaire sur $\Omega(N, E)$, et donc de définir un opérateur adjoint à A' noté $(A')^*$, et un laplacien sur $\Omega(N, E)$ par $\Delta_E = A'(A')^* + (A')^*A'$. On notera Δ_E^p la restriction de Δ_E à $\bigoplus_{a+b=p} \Omega^a(N, E^b)$.

Pour construire le fibré sur lequel agit l'opérateur limite, J. Lott se ramène d'abord en utilisant [CFG92] au cas où (M, g) est un fibré affine riemannien :

Définition 1.11. *Un fibré riemannien $F \hookrightarrow (M, g) \to (N, h)$ est une fibré affine riemannien si :*

- *le groupe de structure du fibré est contenu dans le groupe* $\mathrm{Aff}(F)$ *des difféomorphismes de F qui préservent ∇^{aff} ;*
- *M est muni d'une distribution horizontale $T^H M$ dont l'holonomie est dans* $\mathrm{Aff}(F)$ *;*
- *chaque fibre est munie d'une métrique g_{F_b} qui est parallèle par rapport à la connexion affine ∇^{aff} sur la fibre ;*
- *N est muni d'une métrique h_N ;*
- *la métrique g sur M s'écrit $g = h_N \oplus g_{F_b}$ relativement à la distribution $T^H M$.*

En décomposant les formes différentielles de M en leurs parties verticale et horizontale, on peut écrire $\Omega^*(M) \simeq \Omega^*(N, W)$, où W est un fibré sur N dont la fibre est isomorphe à $\Omega^*(F)$. Dans le cas d'un fibré affine, le groupe de structure du fibré M préserve ∇^{aff}, et par conséquent l'action de ce groupe sur $\Omega^*(F)$ préserve le sous-espace des formes invariantes. On peut donc définir le sous-fibré E de W de fibre $\Lambda^*(\mathfrak{n}^*)$, ainsi que l'espace $\Omega^*(N, E)$ sur lequel va agir l'opérateur limite. On a de plus un plongement $\Omega^*(N, E) \hookrightarrow \Omega^*(M)$ qui permet d'identifier chaque élément de $\Omega^*(N, E)$ à une forme différentielle sur M parallèle pour la connexion ∇^{aff}.

Selon les résultats donnés dans [BL95] sur les superconnexions, et en utilisant le fait que sur un tel fibré, l'espace des formes parallèles le long de la fibre est stable par l'action de la différentielle extérieure, cette différentielle induit par l'intermédiaire du plongement $\Omega(N, E) \hookrightarrow \Omega(M)$ une superconnexion sur E telle que $A'_{[0]}$ soit la différentielle sur $\Lambda^*(\mathfrak{n}^*)$, $A'_{[1]}$ soit la connexion sur le fibré E induite par $T^H M$ et $A'_{[2]}$ soit le produit intérieur i_T par la forme de courbure T de la distribution $T^H M$. D'autre part, la métrique g_{F_b} induit un produit scalaire h_E sur les fibres du fibré vectoriel E.

La structure de fibré affine riemannien induit donc à la fois une superconnexion et un produit scalaire sur E, et permet par conséquent de définir un laplacien Δ_E sur $\Omega(N,E)$. En notant $\sigma(\Delta_E^p)$ le spectre du laplacien Δ_E^p, J. Lott montre que dans cette situation, les petites valeurs propres du laplacien Δ_M sur M sont celle de Δ_E^p ([Lo02b], théorème 1) :

Théorème 1.12. *Si M est un fibré affine riemannien sur N et si on note R_M et R_F les tenseurs de courbures respectivement sur M et sur F_b pour la métrique g_{F_b}, $\mathrm{diam}(F)$ la borne supérieure des diamètres des fibres et Π la seconde forme fondamentale des fibres, alors il existe des constantes a, a' et c qui ne dépendent que de $\dim(M)$ telles que si $\|R_F\|_\infty \mathrm{diam}(F)^2 \leq a'$ alors pour tout $p \leq \dim(M)$,*

$$\begin{aligned}\sigma(\Delta_M^p) \cap [0, a\cdot \mathrm{diam}(F)^{-2} - c(\|R_M\|_\infty + \|\Pi\|_\infty^2 + \|T\|_\infty^2)[&= \\ \sigma(\Delta_E^p) \cap [0, a\cdot \mathrm{diam}(F)^{-2} - c(\|R_M\|_\infty + \|\Pi\|_\infty^2 + \|T\|_\infty^2)[.\end{aligned}$$

On est donc ramené à la recherche d'un opérateur limite sur $\Omega(N,E)$. On ne peut considérer séparément la limite de la superconnexion A' et de la métrique h_E. En effet, A' ne dépend pas de la métrique sur M et donc elle est constante au cours de l'effondrement, et h_E dégénère donc sa limite ne permet pas de définir un opérateur adjoint comme $(A')^*$. L'idée de Lott est de considérer l'ensemble $(\mathcal{S}_E \times \mathcal{H}_E)$, où $\mathcal{S}_E$ est l'espace des superconnexions de degré 1 sur E et $\mathcal{H}_E$ l'espace des produits scalaires euclidiens sur E, et de quotienter cet ensemble par le groupe $\mathcal{G}_E$ des $\mathrm{GL}(E)$-transformations de jauge sur E qui préservent la graduation. Il obtient alors le résultat de compacité suivant ([Lo02b], théorème 3) :

Théorème 1.13. *Soit (N, h_N) une variété riemannienne fixé, $n > \dim(N)$, $a > 0$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une partie compacte $K(n,a,\varepsilon) \subset (\mathcal{S}_E \times \mathcal{H}_E)/\mathcal{G}_E$ telle que si (M^n, g) est une variété riemannienne de dimension n telle que $\|R_M\|_\infty \leq a$ et $d_{GH}(M,N) \leq \varepsilon$, alors la classe d'équivalence du couple (A', h_E) induit par g appartient à K.*

Étant donnée une suite de métriques $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui effondre M sur sa base, on peut extraire de la suite $[(A'_i, h_{E,i})]_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $(\mathcal{S}_E \times \mathcal{H}_E)/\mathcal{G}_E$ une sous-suite qui converge vers une superconnexion limite qui permet de construire un laplacien limite Δ_∞, dont le spectre est la limite du spectre du laplacien sur M.

Remarque 1.14. La suite $[(A'_i, h_{E,i})]$ ne converge pas nécessairement. On peut par exemple au paragraphe 1.1 prendre $\alpha = 0$, $\beta = 1$ et choisir pour γ une fonction qui oscille entre 1 et 2. La première valeur propre va osciller entre 1 et t sans converger. L'opérateur Δ_E ne converge donc pas, ni la classe de $(A'_t, h_{E,t})$.

Remarque 1.15. Pour l'étude du spectre sur les fonctions, on peut se resteindre au fibré E^0, qui est un fibré trivial en droite réelle sur N. Cependant, le produit scalaire h_{E^0} n'est pas trivial. Il correspond à la mesure sur l'espace limite dans le travail de Fukaya.

1.2.3. Petites valeurs propres

Pour déterminer la dimension du noyau de Δ_∞, on peut calculer la cohomologie $H^*(A')$ pour l'action sur $\Omega(N,E)$ de la superconnexion limite A'. J. Lott calcule une majoration de cette dimension en utilisant la théorie des suites spectrales, et en remarquant le fait suivant : le terme $A'_{[0]}$ de la superconnexion vérifie $(A'_{[0]})^2 = 0$, et définit donc un complexe différentiel sur les fibre de E, dont la cohomologie $H^*(A'_{[0]})$ est un fibré vectoriel gradué sur N. De plus, la connexion $A'_{[1]}$ sur le fibré E passe au quotient sur $H^*(A'_{[0]})$ en une connexion plate, c'est-à-dire telle que $(A'_{[1]})^2 = 0$, et définit donc aussi un complexe différentiel dont la cohomologie est $H^*(N, H^*(A'_{[0]}))$. Les premiers termes de la suite de Leray $(\mathcal{E}_r^{*,*}, d_r)$ sont

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_0^{*,*} &= \Omega^*(N, E^*), \\
\mathcal{E}_1^{*,*} &= \Omega^*(N, H^*(A'_{[0]})) \text{ et} \\
\mathcal{E}_2^{*,*} &= H^*(N, H^*(A'_{[0]})),
\end{aligned}$$

avec $d_0 = A'_{[0]}$ et $d_1 = A'_{[1]}$. Lott en déduit :

Proposition 1.16.

$$\dim \operatorname{Ker} \Delta_\infty^p \leq \sum_{a+b=p} \dim \left(H^a(N, H^b(A'_{[0]})) \right).$$

Cette formule peut se simplifier dans certains cas, en particulier pour les 1-formes :

Corollaire 1.17.

$$\dim \operatorname{Ker} \Delta_\infty^1 \leq b_1(N) + \dim(F).$$

On peut noter que cette majoration est très générale, en ce sens qu'on ne fait pas d'hypothèse sur la structure du fibré, ni sur la géométrie de l'effondrement. Cependant, le théorème énoncé en 15 dans l'introduction montre que la topologie impose des restrictions sur le nombre de petites valeurs propres possible. En particulier, dans la situation du théorème 15, le cas d'égalité de la majoration donnée par le corollaire 1.17 n'est atteint que si G est nilpotent (cf. remarque 18).

Dans le cas d'un fibré en cercle, on obtient aussi une expression simple :

Corollaire 1.18. *Si M est un fibré en cercle sur N, alors*

$$\dim \Delta_\infty^p \leq b_p(N) + b_{p-1}(N)$$

.

Cependant, on sait déjà ([CC00]) qu'il y a nécessairement égalité dans l'inégalité ci-dessus.

D'autre part, Lott montre qu'une petite valeur propre ne peut être obtenue que selon trois mécanismes ([Lo02b], Th. 5) :

Théorème 1.19. *Soit g_i une suite de métriques qui effondre M sur N. Supposons que $\lim_{i\to\infty} \lambda_{1,p}(M, g_i) = 0$. Alors au moins l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :*

1. *Il existe $q \in [0, p]$ tel que $b_q(F) < \dim \Lambda^q(\mathfrak{n}^*))$;*
2. *Il existe $q \in [0, p]$ tel que l'holonomie du fibré de base N et de fibre $H^q(F)$ n'est pas semi-simple ;*
3. *La suite spectrale de Leray qui calcule la cohomologie $H^*(M, \mathbb{R})$ du fibré M ne dégénère pas au rang 2.*

Les trois situations qui interviennent dans ce théorème sont illustrées par les trois descriptions topologiques de la nilvariété d'Heisenberg qu'on a données en 1.1

Dans le premier cas, le terme $A'_{[0],i}$ de la superconnexion dégénère quand i tend vers l'infini — c'est-à-dire que si on note $(A'_{[0],\infty}, h_E)$ la limite de $(A'_{[0],i}, h_{E,i})$ dans $(\mathcal{S}_E \times \mathcal{H}_E)/\mathcal{G}_E$, la dimension du noyau de $A'_{[0],\infty}$ est plus grande que celle du noyau de $A'_{[0],i}$ — donc le laplacien restreint à la fibre admet une petite valeur propre. Géométriquement, cela signifie que la nilvariété F n'est pas un tore. Un exemple simple est donné par $M = N \times F$ muni d'une métrique produit, où F est la nilvariété d'Heisenberg de dimension 3, et de considérer sur F la suite de métriques définie en 1.1 avec $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, 3)$.

La deuxième condition signifie que le terme $A'_{[1],i}$ de la superconnexion dégénère quand i tend vers l'infini. L'exemple le plus simple est donné par la variété d'Heisenberg de dimension 3 vue comme fibré en tore sur le cercle : comme la fibre est plate, $A'_{[0],i} = 0$, et comme la base est de dimension 1, les 2-formes sur la base, et donc $A'_{[2],i}$, sont nulles. Cependant, si on prend $\alpha = 0$, $\beta = 1$ et $\gamma = 2$ en 1.1, on a bien une petite valeur propre.

La troisième condition est illustrée par les situations de fibré principal. Si on considère la variété d'Heisenberg comme un fibré principal en cercle sur le tore T^2, on a $A'_{[0],i} = 0$ (la fibre est plate) et l'holonomie de fibré E est nécessairement semi-simple car les fibres des fibrés $(E_i)_{i=0,1}$ sont de dimension 1. On verra d'autres exemples de fibrés principaux dans le chapitre 3.

Le théorème 1.19 donne une condition nécessaire à l'existence de petites valeurs propres, ce qui répond à la question 8, mais pas à la question 1.6.

Dans le cas particulier d'une variété M, s'effondrant sur un cercle, Lott donne le corollaire suivant ([Lo02b], Cor. 4) :

Corollaire 1.20. *Soit g_i une suite de métriques qui effondre M sur S^1. Supposons que $\lim_{i\to\infty} \lambda_{1,p}(M, g_i) = 0$. Alors au moins l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

1. *Il existe $q \in [0, p]$ tel que $b_q(F) < \dim \Lambda^q(\mathfrak{n}^*)$) ;*
2. *Il existe $q \in [0, p]$ tel que si on note $\Phi^* \in \mathrm{Aut}(H^*(Z))$ l'action de l'holonomie sur le fibré $H^*(Z)$, alors la réduite de Jordan de Φ^q ou Φ^{q-1} contient un bloc unipotent non trivial.*

Le chapitre suivant sera consacré à une étude des situations de fibrés en tore sur le cercle, qui illustrent le point 2 du théorème 1.19.

Chapitre 2

Effondrements homogènes de fibrés en tores sur le cercle

2.1. Structure homogène

Nous commençons par démontrer le début du théorème 15 en construisant le groupe G et le réseau Γ qui nous intéressent. Considérons un fibré M en tore T^n sur le cercle qui est la suspension d'un difféomorphisme linéaire φ représenté par la matrice $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. Un tel fibré sera homéomorphe à

$$M := T^n \times [0,1]_{/(x,0)\sim(\varphi(x),1)}, \tag{2.1}$$

Pour construire G, on va munir $\mathbb{R}^{n+1}$ d'une structure de groupe telle que $\mathbb{Z}^{n+1}\backslash\mathbb{R}^{n+1} = M$. Si on note $(x_1, \cdots, x_n, y)$ les éléments de $\mathbb{R}^{n+1}$, une telle structure devra vérifier

$$(k_1, \cdots, k_n, 0) \cdot (x_1, \cdots, x_n, y) = (x_1 + k_1, \cdots, x_n + k_n, y) \tag{2.2}$$

de sorte que les sous-espaces de $\mathbb{R}^{n+1}$ d'équation $y = c^{te}$ passent au quotient comme des tores T^n, et

$$(0, \cdots, 0, l) \cdot (x_1, \cdots, x_n, y) = (A^l \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y + l) \tag{2.3}$$

de sorte que la structure de fibré soit bien celle définie par (2.1). Cette structure est effectivement réalisée en définissant G comme l'image du plongement

$$(x_1, \cdots, x_n, y) \longmapsto \left(\begin{array}{c|cc} A^y & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} y \\ 1 \end{smallmatrix} \end{array} \right). \tag{2.4}$$

Comme on se restreint aux matrices A qui admettent un logarithme B, l'expression A^y est bien définie en posant $A^y = \exp(yB)$. On peut facilement vérifier que cette application est injective, que son image G est bien un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{n+2}(\mathbb{R})$ et que sa structure est bien celle définie par (2.2) et (2.3). Enfin, l'image de $\mathbb{Z}^{n+1}$ par cette application est bien un sous-groupe discret de G, qu'on notera Γ. La variété M est donc homéomorphe au quotient $\Gamma \backslash G$.

Remarque : on peut vérifier que si $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, le groupe G obtenu est isomorphe au groupe d'Heisengerg de dimension 3 tel qu'il est présenté dans l'exemple du paragraphe 1.1.

2.2. Laplacien

Soit X_i et Y les champs invariants à gauche engendrés en I_{n+2} respectivement par

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\begin{array}{c|cc} & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots \\ & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 1 \\ & \vdots & 0 \\ & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \end{array}\right) \text{ et } \frac{\partial}{\partial y} = \left(\begin{array}{c|cc} & 0 & 0 \\ B & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{2.5}$$

Ces champs vérifient $[X_i, X_j] = 0$ et $[Y, X_i] = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} X_j$. On peut remarquer que l'application $X \mapsto [Y, X]$ est un endomorphisme de l'espace $\Gamma(T_V M)^G$ des champs de vecteurs invariants verticaux, c'est-à-dire l'espace engendré par les X_i, et dont la matrice est B. On notera f cet endomorphisme.

On fixe une métrique homogène g sur M en se donnant une base $(V_i)_{i \in [1,n]}$ de l'espace $\Gamma(T_V M)^G$, cette métrique étant telle que $(V_1, \cdots, V_n, Y)$ soit orthonormée en tout point. On notera $(V_1^\flat, \cdots, V_n^\flat, Y^\flat)$ sa base duale, et C la matrice de f dans la base $(V_1, \cdots, V_n)$. On va déterminer le spectre du laplacien Δ^1_{inv} restreint à l'ensemble $\Omega^1(M)^G$ des 1-formes invariantes à gauche en fonction des coefficients de C. Plus précisément, on a le

Lemme 2.6. *La matrice du laplacien Δ^1_{inv} dans la base $(V_1^\flat, \cdots, V_n^\flat, Y^\flat)$ est*

$$\Delta^1_{inv} : \begin{pmatrix} & & 0 \\ & {}^tC C & \vdots \\ & & 0 \\ 0 \cdots 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration : Les crochets de Lie entre les vecteurs de la nouvelle base sont

$$[V_i, V_j] = 0 \text{ et } [Y, V_i] = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} V_j. \tag{2.7}$$

Soit α une 1-forme différentielle invariante. Sa différentielle extérieure est déterminée par la relation $\mathrm{d}\alpha(U_1, U_2) = U_1 \cdot \alpha(U_2) - U_2 \cdot \alpha(U_1) - \alpha([U_1, U_2])$, où U_1 et U_2 sont des champs de vecteur. Si ces champs sont invariants à gauche, cette relation devient : $\mathrm{d}\alpha(U_1, U_2) = -\alpha([U_1, U_2])$. On en déduit :

$$\mathrm{d}Y^\flat = 0 \text{ et } \mathrm{d}V_i^\flat = -\sum_{j=1}^{n} c_{ij} Y^\flat \wedge V_j^\flat. \tag{2.8}$$

La matrice de la différentielle extérieure $\mathrm{d} : \Omega^1(M)^G \to \Omega^2(M)^G$ sera, dans les bases $(V_1^\flat, \cdots, V_n^\flat, Y^\flat)$ et $(Y^\flat \wedge V_i^\flat, V_i^\flat \wedge V_j^\flat)$,

$$\mathrm{d} : \begin{pmatrix} -{}^tC & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ 0 & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Les deux bases sont orthonormées, donc la matrice dans ces bases de la divergence $\delta : \Omega^2(M)^G \to \Omega^1(M)^G$ sera donc la transposée de la matrice ci-dessus.

Comme la différentielle restreinte à $\Omega^0(M)^G$ est nulle, le laplacien $\Delta = \delta\mathrm{d} + \mathrm{d}\delta$ se réduit sur $\Omega^1(M)^G$ à l'opérateur $\delta\mathrm{d}$. On en déduit la matrice du laplacien Δ^{inv} restreint à $\Omega^1(M)^G$ est, dans la base $(V_1^\flat, \cdots, V_n^\flat, Y^\flat)$,

$$\begin{pmatrix} -C & 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -{}^tC & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ 0 & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^tC & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ 0 \cdots 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

■

Remarque : On a fait ici le calcul pour un Y fixé, c'est-à-dire pour un certain choix de connexion du fibré. Mais si on choisit Y' tel que $Y' - Y \in \Gamma(T_V M)^G$ et une métrique telle que $(V_1, \cdots, V_n, Y')$ soit orthonormée, le résultat sera le même car on aura toujours $[Y', V_i] = [Y, V_i] = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} V_j$.

On peut noter que la métrique intervient par la réécriture de la matrice B dans une base orthonormée. Ce travail de renormalisation correspond dans le travail de J. Lott au passage au quotient de $(\mathcal{S}_E \times \mathcal{H}_E)$ par le groupe de transformation de jauge $\mathcal{G}_E$. Si deux métriques donnent la même matrice C, cela signifie que les deux éléments correspondants dans $(\mathcal{S}_E \times \mathcal{H}_E)$ appartiennent à la même classe dans $(\mathcal{S}_E \times \mathcal{H}_E)/\mathcal{G}_E$.

2.3. Courbure

Nous allons démontrer dans cette partie un lemme qui nous servira à faire le lien entre le contrôle de la courbure et l'existence de petites valeurs propres.

Lemme 2.11. *Soit a la borne supérieure de la valeur absolue de la courbure sectionnelle de (M, g). Il existe des constantes $\tau(n) > 0$ et $\kappa(B)$ telle que*

$$\tau^{-1} a < \mathrm{Tr}(C^tC) < \tau a + \kappa.$$

Rappelons tout d'abord l'expression suivante (dont le lecteur pourra trouver la démonstration dans [CE75]) de la courbure sectionnelle $K(U,V)$, où U et V sont deux champs invariants à gauche d'un groupe de Lie quelconque :

$$\begin{aligned} K(U,V) &= \frac{1}{4}\| \operatorname{ad}_U^* V + \operatorname{ad}_V^* U\|^2 - \langle \operatorname{ad}_U^* U, \operatorname{ad}_V^* V\rangle \\ &\quad -\frac{3}{4}\,\|[U,V]\|^2 - \frac{1}{2}\langle [[U,V],V],U\rangle - \frac{1}{2}\langle [[V,U],U],V\rangle. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Nous allons appliquer cette relation aux champs de la base (V_i, Y). Pour cela, remarquons d'abord que les matrices de ad_Y et ad_{V_i} sont, dans cette base

$$\operatorname{ad}_Y : \begin{pmatrix} C & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \scriptstyle 0\cdots 0 & \scriptstyle 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \operatorname{ad}_{V_i} : \begin{pmatrix} 0 & \begin{smallmatrix} -c_{1i} \\ \vdots \\ -c_{ni} \end{smallmatrix} \\ \scriptstyle 0\cdots 0 & \scriptstyle 0 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

On en déduit $\operatorname{ad}_{V_i}^* Y = 0$, $\operatorname{ad}_Y^* Y = 0$, $\operatorname{ad}_Y^* V_i = \sum_j c_{ij} V_j$ et $\operatorname{ad}_{V_i}^* V_j = -c_{ji} Y$, et donc que

$$\begin{aligned} K(Y,V_i) &= \frac{1}{4}\| \operatorname{ad}_Y^* V_i\|^2 - \frac{3}{4}\,\|[Y,V_i]\|^2 - \frac{1}{2}\langle [[V_i,Y],Y],V_i\rangle \\ &= \frac{1}{4}\sum_j \left(c_{ij}^2 - 3c_{ji}^2 - 2c_{ij}c_{ji}\right) \\ &= -\sum_j c_{ji}^2 + \frac{1}{4}\sum_j (c_{ij} - c_{ji})^2 \end{aligned} \tag{2.14}$$

et

$$\begin{aligned} K(V_i,V_j) &= \frac{1}{4}\| \operatorname{ad}_{V_i}^* V_j + \operatorname{ad}_{V_j}^* V_i\|^2 - \langle \operatorname{ad}_{V_i}^* V_i, \operatorname{ad}_{V_J}^* V_j\rangle \\ &= \frac{1}{4}(c_{ij} + c_{ji})^2 - c_{ii}c_{jj}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

D'autre part, comme C est la matrice de f, le terme de degré $n-2$ du polynôme caractéristique est indépendant de la métrique choisie. Le calcul montre que son coefficient est $\kappa = \sum_{ij}(c_{ii}c_{jj} - c_{ij}c_{ji})$. On peut en déduire que

$$\sum_{i,j=1}^n K(V_i,V_j) + \kappa = \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{1}{4}(c_{ij}+c_{ji})^2 - c_{ij}c_{ji}\right) = \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^n (c_{ij}-c_{ji})^2, \tag{2.16}$$

et donc que

$$\sum_{i,j=1}^n c_{ji}^2 = \sum_{i,j=1}^n K(V_i,V_j) - \sum_{i=1}^n K(Y,V_i) + \kappa \leq (n^2+n)a + \kappa, \tag{2.17}$$

ce qui montre l'une des deux inégalités du lemme. La seconde découle du fait que la courbure sectionnelle s'écrit comme un polynôme homogène de degré deux relativement aux c_{ij}. ∎

2.4. Petites valeurs propres

Nous allons maintenant démontrer les résultats concernant le spectre de Δ^{inv}.

Démonstration de 15.1 : Si U est un vecteur colonne tel que $C^tCU = 0$, alors ${}^tUC^tCU = 0$, et donc $\|{}^tCU\| = 0$. Par conséquent, $\dim\operatorname{Ker} C^tC = \dim\operatorname{Ker} {}^tC = \dim\operatorname{Ker} C = d'$. Comme $\dim\operatorname{Ker}\Delta^1_{inv} = 1 + \dim\operatorname{Ker} C^tC$, on a bien $\dim\operatorname{Ker}\Delta^1_{inv} = d' + 1$. ■

Démonstration de 15.2 : C'est une conséquence directe du lemme 2.11 : comme la trace de Δ^1_{inv} est celle de C^tC, cette trace est majorée en fonction de a et B. Comme les valeurs propres de Δ^1_{inv} sont positives, chacune est majorée. ■

Démonstration de 15.3 :

Supposons que $d \neq n$. Soit E_0 le sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre 0. On notera $E_0^\perp$ son orthogonal pour la dualité dans l'espace des 1-formes invariantes verticales. Comme $d \neq n$, l'espace $E_0^\perp$ est de dimension non nulle. On va montrer que le quotient de Rayleigh est uniformément minoré sur $E_0^\perp$, pour ensuite appliquer le principe du minimax.

Remarques : comme les formes et les métriques considérées sont invariantes, la norme ponctuelle d'une forme ne dépendra pas du point où on la calcule, ce qui permet d'écrire que $R(\alpha) = \frac{\|d\alpha\|^2}{\|\alpha\|^2} = \frac{|d\alpha|^2}{|\alpha|^2}$. D'autre part, il faut noter que la notion d'orthogonalité pour la dualité est indépendante de la métrique. En particulier, comme E_0 est défini indépendamment de la métrique, $E_0^\perp$ le sera aussi.

Soit $V^\flat \in E_0^\perp$ et (V_i) une base orthonormée de $\Gamma(T_VM)^G$ telle que $(V_1, \cdots, V_d)$ soit une base orthonormée de E_0 (si $d = 0$ et donc $E_0 = 0$, on choisit alors (V_i) orthonormée quelconque, la suite de la démonstration restant valide). L'espace E_0 est stable par f, donc $E_0^\perp$ est stable par ${}^tf$, et la matrice de $({}^tf)_{|E_0^\perp}$ dans la base $(V^\flat_{d+1}, \cdots, V^\flat_n)$ est ${}^tD$, où D est une sous-matrice de C. Comme la relation (2.8) peut s'écrire $\mathrm{d}V^\flat = -Y^\flat \wedge ({}^tf)(V^\flat)$, on a

$$|\mathrm{d}V^\flat|^2 = |({}^tf)(V^\flat)|^2 \geq \lambda |V^\flat|^2, \tag{2.18}$$

où λ est la plus petite valeur propre de D^tD. D'une part, le déterminant de cette matrice vérifie

$$\operatorname{Det} D^tD = (\operatorname{Det} {}^tD)^2 = (\operatorname{Det}({}^tf)_{|E_0^\perp})^2, \tag{2.19}$$

et donc $\operatorname{Det} D^tD$ est indépendant du choix de la base (V_i). D'autre part, $\operatorname{Det} {}^t(f_{|E_0^\perp})$ est non nul. En effet, si ${}^tf_{|E_0^\perp}(\alpha) = 0$, alors $\alpha \circ f = 0$, donc α est orthogonal à l'image de f, qui contient les sous-espaces caractéristiques de f autres que E_0, et par conséquent α est nul. On en déduit que λ est uniformément minorée : s'il existe une suite de métriques telle que $\lambda \to 0$, alors la plus grande valeur propre de D^tD tend vers l'infini (car $\operatorname{Det} D^tD$

est constant), ce qui est impossible puisque la courbure est bornée et que $\operatorname{Tr} C^tC \geq \operatorname{Tr} D^tD$ (car D est une sous-matrice de C), et donc que la somme des valeurs propres de D^tD est bornée.

On a montré que le quotient de Rayleigh de $\alpha \in E_0^{\perp}$ est minoré par une constante $c(f,a)$ indépendante de la métrique et du choix de α. Comme $\dim E_0^{\perp} = n-d$, le principe du minimax nous dit donc que les $n+1-d$ plus grandes valeurs propres de Δ^1_{inv} sont minorées par c. Comme $\dim \operatorname{Ker} \Delta^1_{inv} = d'+1$ et que $\dim \Omega^1(M)^G = n+1$, on en déduit que $\lambda^{inv}_{d-d'+1,1} > c$.

Si $d = n$, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}BP$ soit triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale, et comme $P^{-1}AP = P^{-1}\exp(B)P = \exp(P^{-1}BP)$, la matrice $P^{-1}AP$ sera triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. On en déduit, en posant $P' = \left(\begin{smallmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_{n+2}(\mathbb{R})$, que le groupe $P'^{-1}GP'$, où G est le groupe construit au paragraphe 2.1, est constitué de matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale. C'est donc un groupe nilpotent.

L'existence d'un effondrement tel que toutes les valeurs propres de Δ^1_{inv} tendent vers zéro découlera du 15.4 ∎

Démonstration de 15.4 : On vient de démontrer que si d (et donc d') est nul, il n'y a pas de petites valeurs propres.

Supposons que $d > 0$. Pour simplifier, nous allons montrer le résultat dans le cas où la partie nilpotente de la réduite de Jordan de B ne comporte qu'un seul bloc de Jordan, la construction de g^k_ε étant semblable dans le cas général.

On construit une base $(V_1, \cdots, V_n)$ de $\Gamma(T_V M)^G$ en choisissant une base de Jordan $(V_1, \cdots, V_d)$ de E_0 (en particulier, $(V_1, \cdots, V_{d'})$ sera une base de $\operatorname{Ker} f$) que l'on on la complète de manière quelconque en une base $(V_1, \cdots, V_{d'})$ de $\Gamma(T_V M)^G$. On notera C la matrice de f dans cette base. La matrice C n'est pas de Jordan, mais sa restriction à E_0, c'est-à-dire le bloc carré supérieur droit de taille d, l'est. Elle est de la forme

$$C = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c}
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \\
\vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \\
 & & \ddots & \vdots & 0 & & & & \\
 & & & 0 & 1 & \ddots & & \vdots & C_1 \\
 & & & \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & \\
 & & & & \vdots & \ddots & 1 & 0 & \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & 0 & 1 & \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ \hline
\vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & C_2 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 &
\end{array}\right) \tag{2.20}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\quad}_{d' \text{ colonnes}} \quad \underbrace{\qquad\qquad\quad}_{d-d' \text{ colonnes}}$$

où C_2 est un bloc carré de taille $n-d$ et de déterminant non nul.

Soit $k \leq d-d'$. On pose $V_i^\varepsilon = \nu_i(\varepsilon)V_i$, avec $\nu_i(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}$ pour $i \geq d'+k$, et $\nu_i(\varepsilon) = \varepsilon^{-(1+d'+k-i)}V_i$ pour $i < d'+k$. La matrice C_ε de f dans cette base vérifiera

$$c_{ij}^\varepsilon = \frac{\nu_j(\varepsilon)}{\nu_i(\varepsilon)}c_{ij}, \tag{2.21}$$

donc $c_{ij}^\varepsilon = c_{ij}$ pour $i \geq d'+k$ (en tenant compte du fait que $c_{ij} = 0$ pour $i \geq d$ et $j \leq d$), et $c_{ij}^\varepsilon \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$, pour $i < d'+k$. La matrice C_ε tend donc vers une matrice C_0 de la forme

$$C_0 = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c}
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \\
\vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & 0 \\
 & & \ddots & \vdots & 0 & & & & \\
\cline{5-9}
 & & & 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \\
 & & & \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & \\
 & & & & \vdots & \ddots & 1 & 0 & C'_1 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & 0 & 1 & \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \\
\hline
\vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & C'_2 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 &
\end{array}\right) \tag{2.22}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{d'+k \text{ colonnes}} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{d-d'-k \text{ colonnes}}$$

Comme les $\lambda_{i,1}^{inv}$ sont ces fonctions continues de C, il suffit de calculer la dimension du noyau de $C_0{}^tC_0$, qui est égale à celle de $\operatorname{Ker} C_0$. D'une part, les $d'+k$ premières colonnes de C_0 sont nulles, donc $\dim \operatorname{Ker} C_0 \geq d'+k$, et d'autre part, comme $\det C_2 \neq 0$, la famille formée par les lignes $d'+k$ à $d-1$ et les $n-d$ dernières lignes de C_0 est libre, donc $\dim \operatorname{Ker} C_0 \leq n-(n-d)-((d-1)-(d'+k-1)) = d'+k$. De même, $\dim \operatorname{Ker} C = d'$, donc on a bien exactement k petites valeurs propres.

Si la partie nilpotente de la réduite de Jordan de B contient plusieurs blocs de Jordan, on obtient le résultat en procédant de la même manière pour annuler le nombre souhaité de lignes dans C.

Remarques : la famille de matrice C_ε est uniformement bornée par rapport à ε, et le lemme 2.11 donne la majoration $|K(M, g_\varepsilon^k)| \leq \tau \operatorname{Tr}(C_\varepsilon{}^tC_\varepsilon)$, pour tout ε. La courbure sectionnelle du fibré est donc bien uniformément bornée au cours de l'effondrement. D'autre part, on voit que si on effondre le fibré par homothétie de la fibre, par exemple en posant $\nu_i(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}$ pour tout i, la matrice C_ε est indépendante de ε, et donc il n'y a pas de petite valeur propre. ∎

Démonstration du corollaire 19 : Si $d = d'$ et $d \neq n$, alors $\lambda_{1,1}^{inv}$ est uniformément minoré d'après 15.3. Si $d = d'$ et $d = n$, alors $B = 0$ et toutes les valeurs propres de Δ_{inv}^1 sont nulles.

Si $d \neq d'$, alors 15.4 garantit l'existence d'une petite valeur propre. ■

Démonstration du théorème 21 : Comme B est semi-simple, son orbite par conjugaison est fermée ([CMG93], p. 28). Comme la courbure est bornée, la norme de C reste bornée quand la base $(V_1^\flat, \cdots, V_n^\flat, Y^\flat)$ — et donc la métrique — varie. La matrice C est par construction dans l'orbite par conjugaison de B, donc elle prend finalement ses valeurs au cours de l'effondrement dans une partie compacte K de cette orbite.

La base orthonormée $(V_1^\flat, \cdots, V_n^\flat, Y^\flat)$ de $\Omega^1(M)^G$ engendre, par produit extérieur, une base orthonormée de $\Omega^*(M)^G$. Les coefficients de la matrice de la différentielle extérieure d dans cette base, et donc ceux de la matrice de $\Delta = \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d}$, sont des fonctions continues de $C \subset K$. Par conséquent, quand la métrique varie, la matrice de Δ prend ses valeurs dans un compact image de K. S'il existe une famille de métriques telle que $\lambda_{1,p}^{inv}$ tende vers zéro pour un $p \in [1, n]$, alors la matrice de Δ tend vers une matrice de rang strictement inférieur, ce qui est impossible puisque, par compacité, la matrice limite sera dans l'image de K, donc de même rang que Δ.

Par conséquent, l'opérateur Δ restreint à $\Omega^*(M)^G$ n'admet pas de petite valeur propre. ■

2.5. Variétés de petites dimensions

En petite dimension, on peut être plus précis que les théorèmes 15 et 21, et mettre en évidence un lien simple entre l'existence de petites valeurs propres et la structure du groupe G :

Corollaire 2.23. *Supposons que $n = 2$ ou 3. S'il existe $p \in [1, n]$ et une suite de métriques homogènes sur M telle que la courbure sectionnelle associée soit uniformément bornée et que $\lambda_{1,p}^{inv}$ tende vers 0, alors G est nilpotent.*

Remarque 2.24. C'est par exemple la situation exposée en 1.1, où on a $p = 1$ et $n = 2$.

Démonstration du corollaire 2.23 : Montrons d'abord que s'il existe p tel que $\lambda_{p,1}^{inv} \to 0$, alors $d \neq d'$.

Si $p = 1$, cela découle du corollaire 19. Si $p = n$, on est ramené à la situation $p = 1$ par dualité de Hodge.

Reste les cas $p = 2$ et $n = 3$. On a déjà calculé les matrices de δ : $\Omega^2(M)^G \to \Omega^1(M)^G$ et $\mathrm{d} : \Omega^1(M)^G \to \Omega^2(M)^G$. On en déduit que la matrice de $\delta\mathrm{d}$, en restriction à $\Omega^2(M)^G$ est de la forme, dans les bases introduites au paragraphe 2.2,

$$\mathrm{d}\delta : \begin{pmatrix} {}^tCC & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

Comme la variété est de dimension 4, l'opérateur de Hodge $*$ est une isométrie de $\Omega^2(M)^G$. En restriction à $\Omega^2(M)^G$, on aura $\delta\mathrm{d} = *\mathrm{d}\delta*$, et donc δd et dδ ont même spectre. D'autre part, d'après la théorie de Hodge, le spectre du laplacien est la réunion des spectres de δd et dδ, on déduit de ce qui précède qu'une petite valeur propre non nulle de Δ^2_{inv} sera une petite valeur propre non nulle de $d\delta|\Omega^2(M)^G$, et donc une petite valeur propre de ${}^tCC$. Le raisonnement appliqué à C^tC dans la démonstration de 15.4 reste valable pour ${}^tCC$. On peut donc conclure que si $\lambda^{inv}_{2,1}$ tend vers zéro, alors $d \neq d'$.

Supposons que $d \neq d'$. Alors le noyau de B est non trivial, par conséquent $d > d' > 0$ et la multiplicité de la valeur propre 0 de B est au moins égale à deux. Si $n = 3$ la troisième valeur propre est égale à la trace de B qui est nulle puisqu'elle est réelle et que $\exp(\operatorname{Tr} B) = \det(\exp B) = \det A = 1$. Donc $d = n$, et G est nilpotent, d'après 15.3. ■

2.6. Homologie du fibré

Nous allons ici montrer que l'on peut calculer le premier nombre de Betti du fibré M indépendamment de la cohomologie, en utilisant le fait que le réseau Γ est isomorphe au groupe fondamental de M.

Théorème 2.26. *Soit $M = \Gamma\backslash G$ un fibré en tore T^n sur le cercle construit selon 15, définit par une matrice $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. Alors le premier nombre de Betti de M est $b_1(M) = 1 + \dim \operatorname{Ker}(A - I)$.*

On en déduit :

Corollaire 2.27. *Si 1 n'est pas valeur propre de A, alors les 1-formes harmoniques de M sont G-invariantes.*

On verra au paragraphe 2.7.2 un exemple qui montre — entre autres choses — qu'on peut effectivement, dans certains cas, avoir des formes harmoniques qui ne sont pas invariantes.

Démonstration du théorème 2.26 : Comme G est simplement connexe, le réseau Γ est isomorphe au groupe fondamental du quotient $M = \Gamma\backslash G$. Pour déterminer le premier nombre de Betti de M, on va calculer l'abélianisé de son groupe fondamental.

Rappelons que le groupe Γ est de la forme :

$$(x_1, \cdots, x_n, y) \longmapsto \left(\begin{array}{c|cc} A^y & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} y \\ 1 \end{smallmatrix} \end{array}\right), \tag{2.28}$$

avec $(x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Dans la suite de la démonstration, nous noterons les éléments de Γ indifféremment sous la forme de vecteurs lignes ou de vecteurs colonnes.

Soit $g = (x_1, \ldots, x_n, y)$ et $g' = (x'_1, \ldots, x'_n, y')$ deux éléments de Γ. Leur inverse respectives sont :

$$g^{-1} = \left(\begin{array}{c} A^{-y} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ -y \end{array} \right) \text{ et } g'^{-1} = \left(\begin{array}{c} A^{-y'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \\ -y' \end{array} \right). \tag{2.29}$$

Le calcul de leur commutateur $[g, g'] = gg'g^{-1}g'^{-1}$ donne :

$$[g, g'] = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + A^y \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} - A^{y'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \\ 0 \end{array} \right), \tag{2.30}$$

soit $[g, g'] = ((A^y - I) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} - (A^{y'} - I) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, 0)$.

On voit que $[\Gamma, \Gamma] \subset ((A - I)\mathbb{Z}^n, 0)$. Réciproquement, si on fixe $g = (0, \ldots 0, 1)$ et qu'on fait varier $(x'_1, \ldots, x'_n)$, on obtient que $[\Gamma, \Gamma] \supset ((A - I)\mathbb{Z}^n, 0)$, et donc $[\Gamma, \Gamma]$ est exactement $((A - I)\mathbb{Z}^n, 0)$.

L'image de $\mathbb{Z}^n$ par $(A - I)$ est un sous-réseau d'indice fini du réseau des entiers de $\mathrm{Im}(A - I)$, donc le quotient de $(\mathbb{Z}^n, 0)$ par $((A - I)\mathbb{Z}^n, 0)$ est de la forme $Z^k \times H$, où $k = \operatorname{codim} \mathrm{Im}(A - I)$ et H est un groupe fini — éventuellement trivial —, et finalement l'abélianisé $\Gamma' = \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ du groupe Γ est donc de la forme $Z^{k+1} \times H$. Le premier nombre de Betti de M est donc

$$b_1(M) = 1 + \dim \mathrm{Ker}(A - I). \tag{2.31}$$

■

Démonstration du corollaire 2.27 : Si 1 n'est pas valeur propre de A, alors 0 n'est pas valeur propre de B, et par conséquent, en vertu du point 15.1, $b_1(M) = \dim \mathrm{Ker}\, \Delta^1_{inv} = 1$. Toutes les 1-formes harmoniques sont donc dans le noyau de Δ^1_{inv}, et en particulier sont G-invariantes. ■

2.7. Exemples

2.7.1. Petites valeurs propres pour les 2-formes différentielles

Nous allons donner ici un exemple de fibré en tore sur le cercle pour lequel $d = d' = 0$ et Δ^2_{inv} admet une petite valeur propre. Cet exemple montre que le corollaire 19 ne se généralise pas à n et p quelconque.

On définit le fibré considéré par la matrice

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A' & A'' \\ \hline 0 & A' \end{array} \right), \tag{2.32}$$

avec

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.33}$$

Fait 2.34. *La matrice A est semblable à une matrice de la forme*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} e^{\lambda} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{-\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda} \end{array}\right), \tag{2.35}$$

où λ est un réel non nul.

Démonstration : La matrice A' admet deux valeurs propres réelles positives, qui sont inverses l'une de l'autre car $\operatorname{Det} A' = 1$. On notera λ le réel positif tel que ces deux valeurs propres soient e^{λ} et $e^{-\lambda}$. Elles sont aussi valeurs propres de A avec la multiplicité deux. On peut vérifier que le polynôme caractéristique de A est son polynôme minimal. Les sous-espaces propres de A sont donc tous les deux de dimension 1, et par conséquent, les deux blocs de sa réduite de Jordan sont $\left(\begin{smallmatrix} e^{\lambda} & 1 \\ 0 & e^{\lambda} \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} e^{-\lambda} & 1 \\ 0 & e^{-\lambda} \end{smallmatrix}\right)$. ■

Fait 2.36. *Il existe une suite de métrique g_ε sur $M = \Gamma \backslash G(B)$ et une suite de matrices C_ε associées telles que*

$$C_\varepsilon = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\lambda & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{array}\right). \tag{2.37}$$

Démonstration : Comme on a

$$\exp\begin{pmatrix} \lambda & e^{-\lambda} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda} & 1 \\ 0 & e^{\lambda} \end{pmatrix} \text{ et } \exp\begin{pmatrix} -\lambda & e^{\lambda} \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\lambda} & 1 \\ 0 & e^{-\lambda} \end{pmatrix},$$

La matrice A admet un logarithme semblable à

$$C = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\lambda & e^{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{array}\right). \tag{2.38}$$

Soit (V_1, V_2, V_3, V_4) la base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme f est égal à C. Si on pose $V_i^\varepsilon = \varepsilon^\alpha V_i$ pour $i = 1, 3$, $V_2^\varepsilon = \varepsilon^{\alpha+1} e^{\lambda} V_2$ et $V_4^\varepsilon = \varepsilon^{\alpha+1} e^{-\lambda} V_4$ où α est un réel strictement positif, la matrice de f dans cette base sera

$$C_\varepsilon = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\lambda & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{array}\right). \tag{2.39}$$

Il suffit donc de définir g_ε en posant que la base $(V_1^\varepsilon, V_2^\varepsilon, V_3^\varepsilon, V_4^\varepsilon, Y)$ est orthonormée. Le fait que la courbure reste bornée quand $\varepsilon \to 0$ découle du lemme 2.11 ■

Fait 2.40. *La valeur propre* $\lambda_{2,1}^{inv}(M, g_\varepsilon)$ *tend vers zéro quand* $\varepsilon \to 0$.

Démonstration :

On va calculer la matrice de d : $\Omega^2(M)^G \to \Omega^3(M)^G$ dans des bases de la forme $(V_i^\flat \wedge V_j^\flat, V_i^\flat \wedge Y^\flat)$ et $(V_i^\flat \wedge V_j^\flat \wedge Y^\flat, V_i^\flat \wedge V_j^\flat \wedge V_k^\flat)$.

En utilisant (2.8), on obtient que $\mathrm{d}V_i^\flat \wedge Y^\flat = 0$ pour tout i, et que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(V_1^\flat \wedge V_2^\flat) &= (\lambda V_1^\flat + \varepsilon V_2^\flat) \wedge Y^\flat \wedge V_2^\flat - V_1^\flat \wedge \lambda V_2^\flat \wedge Y^\flat \\
&= -2\lambda V_1^\flat \wedge V_2^\flat \wedge Y^\flat, && (2.41)\\
\mathrm{d}(V_1^\flat \wedge V_3^\flat) &= (\lambda V_1^\flat + \varepsilon V_2^\flat) \wedge Y^\flat \wedge V_3^\flat - V_1^\flat \wedge (-\lambda V_3^\flat + \varepsilon V_4^\flat) \wedge Y^\flat \\
&= -\varepsilon V_2^\flat \wedge V_3^\flat \wedge Y^\flat - \varepsilon V_1^\flat \wedge V_4^\flat \wedge Y^\flat, && (2.42)\\
\mathrm{d}(V_1^\flat \wedge V_4^\flat) &= (\lambda V_1^\flat + \varepsilon V_2^\flat) \wedge Y^\flat \wedge V_4^\flat - V_1^\flat \wedge (-\lambda V_4^\flat) \wedge Y^\flat \\
&= -\varepsilon V_2^\flat \wedge V_4^\flat \wedge Y^\flat, && (2.43)\\
\mathrm{d}(V_2^\flat \wedge V_3^\flat) &= \lambda V_2^\flat \wedge Y^\flat \wedge V_3^\flat - V_2^\flat \wedge (-\lambda V_3^\flat + \varepsilon V_4^\flat) \wedge Y^\flat \\
&= -\varepsilon V_2^\flat \wedge V_4^\flat \wedge Y^\flat, && (2.44)\\
\mathrm{d}(V_2^\flat \wedge V_4^\flat) &= \lambda V_2^\flat \wedge Y^\flat \wedge V_4^\flat - V_2^\flat \wedge (-\lambda V_4^\flat) \wedge Y^\flat = 0, && (2.45)\\
\mathrm{d}(V_3^\flat \wedge V_4^\flat) &= (-\lambda V_3^\flat + \varepsilon V_4^\flat) \wedge Y^\flat \wedge V_4^\flat - V_3^\flat \wedge (-\lambda V_4^\flat) \wedge Y^\flat \\
&= 2\lambda V_3^\flat \wedge V_4^\flat \wedge Y^\flat. && (2.46)
\end{aligned}$$

La matrice de d dans les bases

$$(V_1^\flat \wedge V_2^\flat, V_1^\flat \wedge V_3^\flat, V_1^\flat \wedge V_4^\flat, V_2^\flat \wedge V_3^\flat, V_2^\flat \wedge V_4^\flat, V_3^\flat \wedge V_4^\flat, V_i^\flat \wedge Y^\flat)$$

et

$$\begin{aligned}
&(V_1^\flat \wedge V_2^\flat \wedge Y^\flat, V_1^\flat \wedge V_3^\flat \wedge Y^\flat, V_1^\flat \wedge V_4^\flat \wedge Y^\flat, V_2^\flat \wedge V_3^\flat \wedge Y^\flat,\\
&V_2^\flat \wedge V_4^\flat \wedge Y^\flat, V_3^\flat \wedge V_4^\flat \wedge Y^\flat, V_i^\flat \wedge V_j^\flat \wedge V_k^\flat)
\end{aligned}$$

est de la forme

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
-2\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & -\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & -\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\varepsilon & -\varepsilon & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda & \\
\hline
 & & & 0 & & & 0
\end{array}\right). \qquad (2.47)$$

On voit que quand ε tend vers zéro, cette matrice tend vers une matrice de rang strictement inférieur. On peut en déduire comme au paragraphe 2.4 que l'opérateur $\delta\mathrm{d}$ admet une petite valeur propre, qui sera aussi petite valeur propre de Δ.

2.7.2. Structure homogène non abélienne sur le tore

Nous allons ici étudier plus en détail un exemple particulier de fibré en tore T^2 sur le cercle, pour mettre en évidence plusieurs de ses propriétés.

Ce fibré est construit par le théorème 15, avec la donnée de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.48}$$

La matrice $\exp(xB)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos 2\pi x & \sin 2\pi x \\ -\sin 2\pi x & \cos 2\pi x \end{pmatrix}. \tag{2.49}$$

C'est donc la matrice d'une rotation d'angle $2\pi x$; nous la noterons $R(2\pi x)$.

Le groupe G s'écrit :

$$\left(\begin{array}{c|c} R(2\pi x) & \begin{smallmatrix} 0 & y \\ 0 & z \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{array}\right), \quad x, y, z \in \mathbb{R}. \tag{2.50}$$

Un première remarque est de constater que la variété $M = \Gamma \backslash G$ est un tore :

Fait 2.51. *Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}^3$ et $\Gamma \backslash G$ est difféomorphe à T^3.*

En effet, le réseau Γ s'écrit :

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 0 & y \\ 0 & z \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{array}\right), \quad x, y, z \in \mathbb{Z}. \tag{2.52}$$

On peut vérifier que Γ est bien abélien. Par ailleurs, comme la topologie du fibré est entièrement déterminée par la matrice A, le fibré est bien trivial. On peut remarquer le fait que Γ soit abélien est cohérent avec le fait que ce soit le groupe fondamental d'un tore.

On a donc construit un groupe de Lie résoluble simplement connexe dont un sous-groupe cocompact est commutatif. En comparaison, on a pour les groupes nilpotents le résultat suivant ([Ra72]) :

Théorème 2.53. *Soit N_1 et N_2 deux groupes de Lie nilpotents simplement connexes, et Γ_1, Γ_2 deux sous-groupes cocompacts de N_1 et N_2 respectivement. Alors tout isomorphisme entre Γ_1 et Γ_2 s'étend en un isomorphisme entre N_1 et N_2.*

En particulier, si un groupe nilpotent simplement connexe contient un sous-groupe cocompact isomorphe à $\mathbb{Z}^n$, alors il est abélien. Le groupe G illustre donc le fait que ce théorème ne se généralise pas aux groupes résolubles.

D'autre part, comme $M = \Gamma \backslash G$ et un tore, son premier nombre de Betti est égal à sa dimension, donc $b_1(M) = 3$. Or, selon le théorème 15, si on munit G d'une métrique invariante le noyau de Δ^p_{inv} est de dimension 1. On en conclut :

Fait 2.54. *Soit g une métrique G-invariante à gauche sur M. Alors il existe sur M des 1-formes harmoniques qui ne sont pas G-invariantes.*

On voit donc que la proposition 14 et le corollaire 2.27 ne se généralisent pas à toutes les solvariétés. Réciproquement, le groupe G illustre la situation où la multiplicité de la valeur propre 1 dans A est strictement supérieure à la multiplicité de 0 dans B.

Enfin, on peut remarquer que d'après les formules (2.14) et (2.15), pour la métrique invariante sur M telle que la base $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ soit orthonormée à l'origine, la courbure sur M est nulle (on peut vérifier que c'est en général faux pour une métrique invariante quelconque). On va reformuler ce résultat et en donner une démonstration très simple qui ne fait pas appel aux formules du paragraphe 2.3 :

Fait 2.55. *Il existe sur $\mathbb{R}^3$ une métrique invariante pour la structure canonique de groupe abélien, et invariante pour l'action à gauche du groupe G.*

Démonstration : On considère sur $\mathbb{R}^3$ la métrique euclidienne canonique, et on note x, y et z les cordonnées canoniques. Si a, b et c sont des réels fixés, la paramétrisation de G donnée par (2.50) définit l'action à gauche de (a, b, c) comme étant

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + x \\ \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + R(2\pi a) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \tag{2.56}$$

On voit que l'action de (a, b, c) est la composée d'une rotation et d'une translation. C'est donc une isométrie pour la norme euclidienne canonique. Par conséquent, cette norme est invariante à gauche pour l'action de G. ■

Remarquons pour finir qu'on peut facilement généraliser cet exemple en dimension supérieure en construisant une matrice A contenant un bloc de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi & 0 & 0 \\ -2\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.57}$$

Le fibré obtenu dans ce cas sera une solvariété ayant une topologie de nilvariété, mais dont les formes harmoniques ne sont pas toutes invariantes.

Chapitre 3

Effondrements homogènes de fibrés principaux en tores sur le tore

3.1. Topologie et spectre du fibré

Nous allons ici démontrer le théorème 22.

Démonstration de 22.1 : Soit M un fibré principal de base T^2 et de fibre F. La base du fibré peut s'écrire

$$[0,1] \times [0,1]_{/\sim},$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par $(x,0) \sim (x,1)$ et $(0,y) \sim (1,y)$. Le fibré M peut alors se définir par la donnée, pour tout point p du bord ∂K de $K = [0,1] \times [0,1]$ d'un difféomorphisme φ_p de la fibre, et en posant

$$M = K \times F_{/(p,x)\sim(q,\varphi_q^{-1}\circ\varphi_p(x)),\forall x\in F,\forall p,q\in\partial K,p\sim q}. \tag{3.1}$$

L'hypothèse de principalité se traduit ici par le fait que pour tout $p, q \in \partial K$ tels que $p \sim q$ et pour tout $g, x \in F$, on a

$$(p, g \cdot x) \sim (q, g \cdot \varphi_q^{-1} \circ \varphi_p(x)), \tag{3.2}$$

ce qui impose aux $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p$ d'être des translations à droite sur la fibre. On peut donc, sans perte de généralité se restreindre, pour le choix des φ_p, au groupe des translations de la fibre, qui est isomorphe à F. Le fibré est donc déterminé par la donnée d'une application de ∂K dans F. Comme sa topologie ne dépend pas de la classe d'homotopie de cette application, l'ensemble des fibrés principaux de fibre F sur le tore T^2 est parametré par le groupe fondamental de F. Il s'agit en fait d'un exemple de classe d'obstruction ([St51], § 35) qui est, dans le cas général d'un F-fibré principal sur une variété compacte N un élément de $H_2(N, \pi_1(F))$ et qui mesure l'obstruction du fibré à être trivial.

Considérons maintenant un fibré principal M de fibre T^n, et $(a_1, \cdots, a_n) \in \pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$ sa classe d'obstruction. Nous allons munir $\mathbb{R}^{n+2}$ d'une structure de groupe telle que la topologie du quotient à gauche par $\mathbb{Z}^{n+2}$ soit celle du fibré. Pour ce faire, nous choisirons le représentant $\gamma : \partial K \to T^n$ de la classe d'obstruction de la manière suivante :

$$\begin{gathered}\gamma_{|\{0\}\times[0,1]} = \gamma_{|[0,1]\times\{0\}} = \gamma_{|[0,1]\times\{1\}} = 0, \\ \gamma(1,t) = (ta_1, \cdots, ta_n), \forall t \in [0,1],\end{gathered} \tag{3.3}$$

de sorte qu'un élément $(x_1, \cdots, x_n) \in T^n$ de la fibre au dessus de $(0,t) \in K$ sera identifié à l'élément $(x_1 + ta_1, \cdots, x_n + ta_n)$ au dessus de $(1,t)$. Si on note $(x_1, \cdots, x_n, y_1, y_2)$ les éléments de $\mathbb{R}^{n+2}$, on veut donc définir sur cet ensemble un produit tel que

$$(k_1, \cdots, k_n, 0, 0) \cdot (x_1, \cdots, x_n, y_1, y_2) = (x_1 + k_1, \cdots, x_n + k_n, y_1, y_2) \tag{3.4}$$

de sorte que d'une part les sous-espaces de $\mathbb{R}^{n+2}$ d'équation $(y_1, y_2) = c^{te}$ passent au quotient comme des tores, et tel que

$$\begin{aligned}&(0, \cdots, 0, l_1, l_2) \cdot (x_1, \cdots, x_n, y_1, y_2) = \\ &\qquad (x_1 + y_2 a_1 l_1, \cdots, x_n + y_2 a_n l_1, y_1 + l_1, y_2 + l_2),\end{aligned} \tag{3.5}$$

de sorte que la structure de fibré en tore sera bien celle définie par (3.3).

On peut effectivement construire une telle structure de groupe en plongeant $\mathbb{R}^{n+2}$ dans $M_{n+3}(\mathbb{R})$ par l'application suivante :

$$(x_1, \cdots, x_n, y_1, y_2) \longmapsto \left(\begin{array}{c|ccc} I_n & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} a_1 y_1 \\ \vdots \\ a_n y_1 \end{matrix} & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right). \tag{3.6}$$

Notons G l'image de cette application. C'est un sous-groupe de $M_{n+3}(\mathbb{R})$, et le quotient $\Gamma\backslash G$ où Γ est le réseau des entiers de G est difféomorphe à la variété M, qui est donc une nilvariété.

Supposons maitenant que $n \geq 2$. On pose $d = \mathrm{pgcd}(a_1, \cdots, a_n)$ et $a'_i = a_i/d$. Soit $P = (p_{ij}) \in M(n, \mathbb{Z})$ une matrice telle que $p_{i1} = a'_i$ et que ses vecteurs colonnes forment une base du réseau $\mathbb{Z}^n$. On a alors

$$P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

et

$$\left(\begin{array}{c|c} P^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} I_n & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} a_1 y_1 \\ \vdots \\ a_n y_1 \end{matrix} & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} I_n & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} d y_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{matrix} \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right) \tag{3.8}$$

avec $\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On peut voir que le groupe $P'^{-1}GP'$, avec $P' = \left(\begin{smallmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right)$, est isomorphe à $\mathbb{R}^{n-1} \times G'$, où G' est le groupe

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & dy_1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y_1, y_2 \in \mathbb{R} \right\}. \tag{3.9}$$

D'autre part, comme $\det P' = 1$ et que P' est à coefficients entiers, le réseau des matrices à coefficients entiers de $P'^{-1}GP'$ est exactement $P'^{-1}\Gamma P'$, où Γ est le réseau des entiers de G. La variété $M = \Gamma \backslash G$, qui est difféomorphe à $P'^{-1}\Gamma P' \backslash P'^{-1}GP'$ peut donc s'écrire

$$M \simeq (\mathbb{Z}^{n-1} \times \Gamma') \backslash (\mathbb{R}^{n-1} \times G') \simeq T^{n-1} \times N, \tag{3.10}$$

où $N = \Gamma' \backslash G'$, en notant Γ' = le réseau des entiers de G'. ■

Ce calcul montre qu'on peut se ramener au cas où les a_i, $i \geq 2$ sont nuls. On supposera dans la suite que c'est le cas, et on posera $a_1 = a$.

Démonstration de 22.2 : Soient X_i, Y_1 et Y_2 les champs de vecteurs invariants à gauche engendrés en I_{n+3} respectivement par

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y_1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 0 & a & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right) \text{ et } \frac{\partial}{\partial y_2} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right).$$

Ces champs vérifient $[X_i, X_j] = 0$, $[X_i, Y_j] = 0$ et $[Y_1, Y_2] = aX_1$. On notera V le vecteur aX_1, dont on peut remarquer qu'il est non nul (si a est nul, le fibré est trivial).

Soit g une métrique homogène sur M, et (V_i) une base de $\Gamma(T_V M)^G$ telle que $(V_1, \cdots, V_n, Y_1, Y_2)$ soit orthonormée en tout point et que V_1 soit colinéaire à V. Les crochets de Lie entre les vecteurs de cette base sont :

$$[V_i, V_j] = 0, \ [V_i, Y_j] = 0, \text{ et } [Y_1, Y_2] = \eta V_1, \ \eta \in \mathbb{R}^*. \tag{3.11}$$

On en déduit :

$$\mathrm{d}V_1^\flat = -\eta Y_1^\flat \wedge Y_2^\flat \text{ et } \mathrm{d}V_i^\flat = dY_j^\flat = 0, \ i > 1, \tag{3.12}$$

où $(V_1^\flat, \cdots, V_n^\flat, Y_1^\flat, Y_2^\flat)$ est la base duale de $(V_1, \cdots, V_n, Y_1, Y_2)$. Les formes de cette base de $\Omega^1(M)^G$ engendrent, par produit extérieur, une base de $\Omega^*(M)^G$ composée de formes propres de Δ_{inv}. En effet, il découle de (3.12) qu'elles sont toutes fermées sauf celles de la forme $V_1 \wedge V_{i_1} \wedge \cdots \wedge V_{i_k}$ $(i_j \neq 1)$, dont la différentielle vaut :

$$\mathrm{d}(V_1 \wedge V_{i_1} \wedge \cdots \wedge V_{i_k}) = -\eta Y_1 \wedge Y_2 \wedge V_{i_1} \wedge \cdots \wedge V_{i_k}, \tag{3.13}$$

et, puisque $\delta = (-1)^{n(p+1)+1} * \mathrm{d} *$, elles sont toutes cofermées sauf celles de la forme $Y_1 \wedge Y_2 \wedge V_1 \wedge V_{i_1} \wedge \cdots \wedge V_{i_k}$ dont la codifférentielle vaut :

$$\delta(Y_1 \wedge Y_2 \wedge V_1 \wedge V_{i_1} \wedge \cdots \wedge V_{i_k}) = -\eta V_1 \wedge V_{i_1} \wedge \cdots \wedge V_{i_k}. \tag{3.14}$$

En restriction à $\Omega^p(M)^G$, les formes de la base sont donc harmoniques, sauf C_{n-1}^{p-1} formes cofermées et C_{n-1}^{p-2} formes fermées qui sont des formes propres de valeur propre égale à η^2. L'opérateur Δ_{inv}^p admet donc une unique valeur propre non nulle, de multiplicité $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p-2} = C_n^{p-1}$ et égale à $\eta^2 = |V|^2$.

Si on choisit une base orthonormée de la forme $(V_1, \cdots, V_n, Y_1', Y_2')$, avec $Y_i' = Y_i + \sum_{k=1}^n \xi_k V_k$, on aura toujours $[Y_1', Y_2'] = [Y_1, Y_2]$. Le résultat ne dépend donc pas du choix de la connexion sur le fibré. Remarquons enfin que si l'on choisit une autre métrique sur la base (en se donnant deux champs horizontaux quelconques Y_1' et Y_2' et en les supposant orthogonaux) on obtiendra le même résultat en remplaçant V par $V' = [Y_1', Y_2']$, avec comme valeur propre $\eta^2 = |V'|^2 = \mathrm{Vol}(B)^{-2}|V|^2$. ■

3.2. Effondrements des fibrés principaux sur le tore T^2

Dans cette partie, nous allons montrer que les fibrés construits dans le théorème 22 peuvent admettre, si $n \geq 2$, un effondrement à diamètre et courbure bornés pour lequel λ ne tend pas vers zéro.

Soit M un tel fibré. Nous allons d'abord montrer le lemme suivant qui nous permettra de contrôler la courbure :

Lemme 3.15. *Pour toute métrique homogène g sur M, la courbure sectionnelle de M vérifie $|K(M,g)| \leq \frac{3}{4}|V|^2$.*

Démonstation : On se place dans la même base $(V_1, \cdots, V_n, Y_1, Y_2)$ que celle utilisée dans la démonstration de 22.2. De (3.11), on peut rapidement déduire que $\mathrm{ad}_{V_i} = 0$, et que $\mathrm{ad}_{Y_i}^* Y_j = 0$ car pour tout vecteur U, $< \mathrm{ad}_{Y_i}^* Y_j, U > = < Y_j, \mathrm{ad}_{Y_i} U > = < Y_j, [Y_i, U] > = 0$. De plus, comme $< \mathrm{ad}_{Y_i}^* V_j, U > = < V_j, [Y_i, U] >$, on aura $\mathrm{ad}_{Y_i}^* V_j = 0$ pour $j \neq 1$, $\mathrm{ad}_{Y_1}^* V_1 = \mu Y_2$ et $\mathrm{ad}_{Y_2}^* V_1 = -\mu Y_1$.

La formule (2.12) donne donc :

$$K(V_i, V_j) = 0, \ K(Y_1, Y_2) = -\frac{3}{4}\|[Y_1, Y_2]\|^2, \tag{3.16}$$

$$K(V_1, Y_i) = \frac{\mu^2}{4}, \text{ et } K(V_i, Y_j) = 0 \text{ pour } i \neq 1. \tag{3.17}$$

Comme d'une part $\mu^2 = \|V\|^2$, et d'autre part $V = [Y_1, Y_2]$, la majoration du lemme en découle immédiatement. ∎

Un effondrement à base fixe du fibré M par des métriques homogènes est déterminé par une famille de bases $(V_1^\varepsilon, \cdots, V_n^\varepsilon)$ de $\Gamma(T_V M)^G$ (remarque : on ne suppose plus ici que V_1^ε est colinéaire à V). Nous allons présenter ici des exemples d'effondrements associés à des familles de bases de la forme $(V_1^\varepsilon, \cdots, V_n^\varepsilon) = (\varepsilon^{-\alpha_1} V_1, \cdots, \varepsilon^{-\alpha_n} V_n)$, où $(V_1, \cdots, V_n)$ est une base fixée. Si b_i et b_i^ε sont les coefficients de V dans les bases respectives $(V_1, \cdots, V_n)$ et $(V_1^\varepsilon, \cdots, V_n^\varepsilon)$, on aura

$$b_i^\varepsilon = \varepsilon^{\alpha_i} b_i. \tag{3.18}$$

Exemple 3.19. Si $\alpha_i > 0$, pour tout i, alors le diamètre de la fibre tend vers 0, ainsi que les b_i^ε. On a donc un effondrement à courbure bornée du fibré sur la base T^2, et la valeur propre $\lambda = \|V\|^2 = \sum_{i=1}^n (b_i^\varepsilon)^2$ tend vers zéro. ∎

On peut cependant construire des effondrements pour lesquels le comportement du spectre est différent, et en particulier tels qu'il n'y ait pas de petites valeurs propres :

Exemple 3.20. Supposons que $\alpha_i = 0$, pour tout $i > 1$, $\alpha_1 > 0$, et que les composantes de V_1 dans la base $(X_1, \cdots, X_n)$ soient irrationnelles entre elles. Une droite de la fibre de direction V_1 sera donc dense dans la fibre, et par conséquent, il suffit que seul α_1 soit non nul pour que la fibre s'effondre sur un point. On aura alors $b_i^\varepsilon = b_i$ pour $i > 1$, et $b_1^\varepsilon \to 0$. La courbure reste donc bornée et $\lambda \to \sum_{i>1} b_i^2 \neq 0$. ∎

Ce dernier exemple justifie remarque 25 faite dans l'introduction.

3.3. Exemples de fibrés principaux sur des bases de dimension strictement supérieures à 2

Les exemples du théorème 22 sont relativement simples, en ce sens que l'essentiel de la topologie est contenu dans la structure de fibré en cercle de la nilvariété N. On peut cependant facilement contruire des fibrés principaux en tore dont le comportement du spectre est un peu plus riche :

Exemple 3.21. Considérons deux fibrés principaux M_1 et M_2, de fibre respective T^{k_1} et T^{k_2} et de base T^2, muni d'une structure homogène et d'une métrique invariante. Soient λ_1 et λ_2 leur valeur propre associée définie par le théorème 22. La variété M définie par le produit riemannien $M = M_1 \times M_2$ est un fibré principal de fibre $T^{k_1} \times T^{k_2} = T^{k_1+k_2}$ et de base $T^2 \times T^2 = T^4$. D'après la formule de Künneth, il admet λ_1 et λ_2 comme valeurs propres. En choisissant sur M_1 et M_2 des suites de métriques qui effondrent ces variétés sur T^2 la suite des métriques produits effondre M sur T^4. ■

On voit que sur cet exemple, on peut avoir deux valeurs propres non nulles distinctes en restriction aux formes invariantes. De plus, on peut choisir des effondrements sur M_1 et M_2 tels que ces deux valeurs propres tendent vers zéro à des vitesses différentes, ou même, en choisissant pour M_1 et M_2 les effondrements décrits dans les exemples 3.19 et 3.20 respectivement, tels que seule l'une de ces valeurs propres tende vers zéro. Enfin, on peut remarquer que considérer un effondrement de M par homothétie de la fibre revient à considérer des homothétie des fibres de M_1 et M_2, et qu'on retrouve le fait remarqué en 24 que cet effondrement produit des petites valeurs propres.

Chapitre 4

Topologie des fibrés principaux en tores

Nous allons dans cette partie nous attacher à décrire la topologie des fibrés principaux en tore, et en particulier à construire un invariant différentiel qui permettra, comme la classe d'Euler dans la cas des fibrés en cercles, d'étudier le comportement du spectre du laplacien lors d'un effondrement.

Soit M un fibré principal en tore T^k sur une base N. Le tore $T^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ peut s'écrire comme le produit de k cercles : $T^k = \prod_{i=1}^k S^1_{(i)}$. L'action de T^k sur M induit une action de chacun des $S^1_{(i)}$. On peut donc définir les variétés

$$M_i = M/\prod_{j\neq i} S^1_{(j)}, \tag{4.1}$$

chaque M_i étant un fibré en cercle de base N sur lequel agit $S^1_{(i)}$. Réciproquement, la donnée des k fibrés en cercles $(M_i)_{i\leq k}$ sur N permet de construire un fibré en tore T^k en prenant la somme de Whitney $\bigoplus_{i=1}^k M_i$ de ces fibrés en cercles, ce fibré en tore étant difféomorphe au fibré M. Comme la structure d'un fibré en cercle est déterminé par sa classe d'Euler, la topologie de M est déterminée par la donnée d'un k-uplet $(e_1, \cdots, e_k) \in (H^2(N,\mathbb{Z}))^k$ de classes d'Euler. Cependant, la décomposition de T^k en produit de cercles n'est pas unique. En effet, pour chaque base $(a_1, \cdots, a_k)$ du réseau $\mathbb{Z}^k$, on peut écrire T^k comme le produit de la famille de cercles $(\mathbb{R}a_i/\mathbb{Z}a_i)_i$, auquel correspond en général un k-uplet différent de classes d'Euler.

En homologie simpliciale, on peut définir la classe d'obstruction $[c]$ d'un fibré $F \hookrightarrow M \to N$, où $[c]$ est un élément de $H_2(N, \pi_1(F))$ qui est une mesure de l'obstruction du fibré à admettre une section (voir [St51], §35). Si la fibre F est un tore, les groupes d'homotopies $\pi_n(F)$ sont triviaux pour $n \geq 2$, et par conséquent cette classe d'obstruction est nulle si et seulement si le fibré admet une section ([St51], §29 et §35) ce qui, dans le cas d'un fibré principal est équivalent à être trivial. Dans le cas d'une fibre T^k, cette classe d'obstruction est un élément de $H_2(N, \mathbb{Z}^k)$. On veut définir un objet semblable pour la cohomologie de Rham.

Dans le cas d'un fibré en cercle de classe d'Euler $[e]$, on a la propriété suivante ([BT82], p.72) : si ω est une 1-forme verticale invariante dont l'intégrale sur chaque fibre vaut 1, alors $\mathrm{d}\omega$ est une 2-forme horizontale qui dépend du choix de la connexion sur le fibré, mais qui est, au signe près, le relevé d'une élément de $[e]$. Dans le cas d'un fibré en tore, on va construire une invariant qui généralise cette propriété.

Rappelons tout d'abord que si on note $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de T^k, l'action de T^k sur le fibré M induit un plongement de $\mathcal{G}$ dans l'espace des champs de vecteurs verticaux invariants de M. Ce plongement s'étend naturellement aux tenseurs sur $\mathcal{G}$ en une application

$$(\bigotimes^p \mathcal{G}) \otimes (\bigotimes^q \mathcal{G}^*) \to \Gamma\left((\bigotimes^p T^V M) \otimes (\bigotimes^q T^{V^*} M)\right) = \Gamma(T^{V}{}^p_q M).$$

Le tenseur obtenu ne définit pas de manière canonique un élément de $\Gamma(T^p_q M)$ si $q \neq 0$, mais si on se donne une connexion sur le fibré M, la partie covariante du tenseur est bien définie sur TM en imposant à sa partie horizontale d'être nulle. Par abus de langage, si on se donne par exemple un élément de $\mathcal{G}^*$, on dira qu'il « induit » une 1-forme verticale sur M, en précisant la connexion utilisée s'il y a ambiguïté.

On va montrer le résultat suivant, qui permet de définir une généralisation de la classe d'Euler aux fibré principaux en tore :

Proposition 4.2. *Soit $\bar{\omega} \in \mathcal{G}^*$, ω la 1-forme différentielle sur M induite par $\bar{\omega}$ et α_ω la 2-forme différentielle sur N telle que $\mathrm{d}\omega = \pi^*(\alpha_\omega)$. Alors l'application $e : \mathcal{G}^* \to H^2(N, \mathbb{R})$ donnée par $\bar{\omega} \mapsto [\alpha_\omega]$ est bien définie (c.-à-d. que la classe de cohomologie de α_ω ne dépend pas du choix de la connexion) et linéaire.*

Démonstration : On pose $T^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ et on note $(\bar{\omega}_i)_{i \in [1,k]}$ les formes coordonnées de $\mathbb{R}^k$ passées au quotient sur T^k. En utilisant la décomposition $T^k = \prod_{i=1}^k S^1_{(i)}$, on définit la famille de fibrés en cercle (M_i) comme en (4.1). On a alors des projections $M \xrightarrow{\pi_i} M_i \xrightarrow{\pi'_i} N$ qui vérifient $\pi'_i \circ \pi_i = \pi'_j \circ \pi_j = \pi$. Chaque forme ω_i induite sur M par $\bar{\omega}_i$ est le relevé $\pi_i^*(\omega'_i)$ de la forme de connexion du fibré en cercle M_i. On peut écrire $\mathrm{d}\omega_i = \pi_i^*(\mathrm{d}\omega'_i) = \pi^*(e_i)$ où e_i est une 2-forme sur N. Or, on sait que e_i appartient à la classe d'Euler du fibré M_i, indépendamment du choix de la connexion sur M_i donc du choix de la connexion sur M. Si on définit $e : \mathcal{G}^* \to H^2(N, \mathbb{R})$ par $e(\bar{\omega}_i) = e_i$ en l'étendant par linéarité, on aura bien, par linéarité de la différentielle extérieure, $\mathrm{d}\omega = \pi^*(e(\bar{\omega}))$ pour tout $\bar{\omega} \in \mathcal{G}^*$, en notant ω la forme induite sur M. ■

Remarque 4.3. Si $k = 1$ et si $\bar{\omega}$ est la forme volume du cercle de longueur 1, alors $e(\bar{\omega})$ est la classe d'Euler du fibré.

Remarque 4.4. La démonstration 4.2 met en évidence le lien entre l'invariant e et la famille de classe d'Euler associée à une décomposition particulière en somme de Whitney de M : à chaque décomposition possible est associée une base de $\mathcal{G}^*$, et la famille de classe d'Euler est l'image de cette base par e.

Exemple 4.5. Au chapitre 3, on a considéré des fibrés principaux en tore T^k non triviaux dont la base est un tore T^2. Comme $H^2(T^2)$ est de dimension 1, le noyau de e est de dimension $k-1$, ce qui signifie qu'on peut décomposer le fibré en une somme de Whitney de k fibrés en cercles dont $k-1$ sont triviaux. On retrouve donc le fait que le fibré peut s'écrire comme le produit d'un fibré en cercle et d'un tore de dimension $k-1$. ■

Dans la suite, si ω est une forme induite par un élément $\bar{\omega}$ de $\mathcal{G}^*$, on écrira parfois par abus de langage « $e(\omega)$ » au lieu de « $e(\bar{\omega})$ ». De plus, verra parfois e comme une application de $\mathcal{G}^*$ dans l'espace $\mathcal{H}^2(N,h)$ des 2-formes harmoniques de N, en utilisant le fait que $\mathcal{H}^2(N,h)$ est canoniquement isomorphe à $H^2(N,\mathbb{R})$.

Chapitre 5

Formes invariantes et petites valeurs propres

Nous allons ici démontrer les résultats 31, 33 et 35 énoncés dans l'introduction. Ceux-ci s'appuient essentiellement sur le

Lemme 5.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne, φ_t un flot agissant par isométrie sur M et X le champ de vecteur associé. On suppose de plus que X n'est pas uniformément nul.*

Soit E un sous-espace de $\Omega^*(M)$ stable par le laplacien et par $(\varphi_t^*)_{t\in\mathbb{R}}$, λ une valeur propre du laplacien restreint à E, et E_λ l'espace propre associé.

S'il existe T tel que $\varphi_{t+T}^* = \varphi_t^*$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et que $\lambda < \left(\dfrac{2\pi}{T\|X\|_\infty}\right)^2$, alors $(\varphi_t^*)_{t\in\mathbb{R}}$ agit trivialement sur E_λ.

Démonstration du lemme 5.1 : Remarquons tout d'abord qu'on peut supposer que $T = 2\pi$, le résultat général se déduisant par simple changement de variable. D'autre part, par théorie de Hodge, on peut se restreindre à l'étude des formes cofermées. On supposera donc que λ est une valeur propre de $\delta d_{|\operatorname{Ker}\delta}$ et E_λ désignera le sous-espace propre associé dans $\operatorname{Ker}\delta$.

Soit $\omega \in E_\lambda$. On sait que $\mathcal{L}_X\omega = i_X \circ \mathrm{d}\omega + \mathrm{d} \circ i_X\omega$.

D'une part, on a $\mathcal{L}_X\omega = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\varphi_t^*\omega - \omega}{t}$. Puisque φ_t est une isométrie, les formes $\varphi_t^*\omega$ et $\frac{\varphi_t^*\omega-\omega}{t}$ sont dans $\operatorname{Ker}\delta$, et donc $\mathcal{L}_X\omega$ aussi car $\operatorname{Ker}\delta$ est fermé. D'autre part, $\mathrm{d} \circ i_X\omega$ est dans $\operatorname{Im}\mathrm{d}$.

Comme $\operatorname{Ker}\delta$ et $\operatorname{Im}\mathrm{d}$ sont orthogonaux, les formes $\mathcal{L}_X\omega$ et $\mathrm{d} \circ i_X\omega$ sont orthogonales. Le théorème de Pythagore donne donc :

$$\|\mathcal{L}_X\omega\|_2^2 + \|\mathrm{d} \circ i_X\omega\|_2^2 = \|i_X \circ \mathrm{d}\omega\|_2^2. \tag{5.2}$$

On en déduit

$$\|\mathcal{L}_X\omega\|_2^2 \leq \|i_X \circ \mathrm{d}\omega\|_2^2 \leq \|i_X\|^2\|\mathrm{d}\omega\|_2^2 \leq \|i_X\|^2\lambda\|\omega\|_2^2. \tag{5.3}$$

On va maintenant majorer la norme de i_X d'une part, et évaluer celle de $\mathcal{L}_X\omega$ d'autre part.

majoration de $\|i_X\|$

Soit $\alpha \in \Omega^p(M)$.

Soit $m \in M$, et $(X_1, \cdots, X_n)$ une base orthonormée de T_mM telle que $X = \mu X_1$. On pose $\alpha_m = \sum\limits_{i_1<\cdots<i_p} \alpha_{i_1,\cdots,i_p} X_{i_1}^\flat \wedge \cdots \wedge X_{i_p}^\flat$. On a alors

$$i_X(\alpha_m) = \sum_{i_1<\cdots<i_p} \alpha_{i_1,\cdots,i_p} i_X(X_{i_1}^\flat \wedge \cdots \wedge X_{i_p}^\flat). \tag{5.4}$$

Si $i_1 = 1$, alors $i_X(X_{i_1}^\flat \wedge \cdots \wedge X_{i_p}^\flat) = \mu X_{i_2}^\flat \wedge \cdots \wedge X_{i_p}^\flat$.

Si $i_1 \neq 1$, alors $i_X(X_{i_1}^\flat \wedge \cdots \wedge X_{i_p}^\flat) = 0$.

Donc $i_X(\alpha_m) = \mu \sum_{i_2<\cdots<i_p} \alpha_{1,i_2,\cdots,i_p} X_{i_2}^\flat \wedge \cdots \wedge X_{i_p}^\flat$, et

$$|i_X(\alpha_m)|^2 = \mu^2 \sum_{i_2<\cdots<i_p} \alpha_{1,i_2,\cdots,i_p}^2 \leq \mu^2 \sum_{i_1<\cdots<i_p} \alpha_{i_1,\cdots,i_p}^2 = |X|^2|\alpha_m|^2.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\|i_X(\alpha)\|_2^2 &= \int_M |i_X(\alpha_m)|^2 \mathrm{d}v \leq \int_M |X|^2|\alpha_m|^2 \mathrm{d}v \leq \|X\|_\infty \int_M |\alpha_m|^2 \mathrm{d}v \\ &\leq \|X\|_\infty \|\alpha\|_2^2.\end{aligned}$$

et donc

$$\|i_X\| \leq \|X\|_\infty \tag{5.5}$$

calcul de $\|\mathcal{L}_x\omega\|$

Comme φ_t est une isométrie, φ_t^* agit par isométrie sur E_λ. Si on suppose que $t \mapsto \varphi_t$ est 2π-périodique, φ_t induit donc un morphisme $S^1 \to \mathrm{SO}(E_\lambda)$ qu'on peut décomposer en somme de représentation irréductibles.

Les représentations irréductibles de S^1 sont :

– la représentation triviale $S^1 \to \mathrm{SO}(1)$, $t \mapsto \mathrm{Id}$;

– les rotations du plan $S^1 \to \mathrm{SO}(2)$, $t \mapsto R(kt) = \left(\begin{smallmatrix}\cos kt & -\sin kt \\ \sin kt & \cos kt\end{smallmatrix}\right)$, $k \in Z^*$.

Supposons maintenant que la décomposition fasse apparaître au moins une rotation. On peut choisir une forme $\omega \neq 0$ située dans le sous-espace stable associé. On a alors

$$\|\mathcal{L}_X\omega\| = \left\|\lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t^*\omega - \omega}{t}\right\| = |k| \cdot \|\omega\| \geq \|\omega\|. \tag{5.6}$$

Avec (5.3) et (5.5), on en déduit :

$$\|\omega\|^2 \leq \lambda \|X\|_\infty^2 \|\omega\|^2, \tag{5.7}$$

et finalement

$$\lambda \geq \frac{1}{\|X\|_\infty^2}. \tag{5.8}$$

La conclusion du lemme en découle immédiatement. ■

Démonstration du théorème 31 : C'est une application directe du lemme 5.1 avec $E = \Omega^p(M)$, le flot φ_t étant induit par l'action de S^1. Le champ X est alors un champ vertical S^1-invariant.

Si on paramètre φ_t de manière à être 2π-périodique, la longueur l d'une fibre sera égale à $2\pi|X|$, la norme de X ne dépendant pas du point choisi sur la fibre. On a donc

$$|X| = \frac{l}{2\pi} \tag{5.9}$$

et par conséquent

$$\|X\|_\infty = \frac{l_0}{2\pi}. \tag{5.10}$$

Si $\lambda < \left(\frac{2\pi}{l_0}\right)^2$, alors $\lambda < \frac{1}{\|X\|_\infty^2}$ et donc les formes propres de E_λ sont S^1-invariantes. ■

Démonstration du théorème 33 : Remarquons tout d'abord que dans la démonstration du théorème 31, la décomposition de $\Omega^p(M)$ en éléments irréductibles est une décomposition en série de Fourier par rapport à la fibre S^1, la représentation triviale et les représentations $\theta \mapsto R(k\theta)$ correspondant respectivement aux fonctions constantes et aux fonctions $\frac{2\pi}{k}$-périodiques du cercle. On va reprendre cette idée et l'appliquer au tore T^k pour décomposer $\Omega^p(M)$ en somme en sous-espaces de formes invariantes dans une direction et périodiques dans une autre pour ensuite appliquer le lemme 5.1 à ces sous-espaces.

Plus précisément, si on pose $T^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$, $\mathbb{R}^k$ étant muni d'une métrique euclidienne (pas nécessairement la métrique euclidienne canonique), et si Γ est le réseau dual de $\mathbb{Z}^k$, $\Gamma = \{\gamma \in \mathbb{R}^k, \langle\gamma,\gamma'\rangle \in \mathbb{Z}, \forall \gamma' \in \mathbb{Z}^k\}$, une base des fonctions propres de T^k est donnée par $f_\gamma = \cos(2\pi\langle\gamma,x\rangle)$ et $g_\gamma = \sin(2\pi\langle\gamma,x\rangle)$, $\gamma \in \Gamma$ (voir par exemple [GHL87], p. 200). Si on note $\gamma^\perp$ l'orthogonal de γ dans $\mathbb{R}^n$, les fonctions f_γ et g_γ sont invariantes sous l'action de $\gamma^\perp$. On peut remarquer que, si Γ dépend de la métrique choisie sur $\mathbb{R}^k$, ce n'est pas le cas de l'ensemble des $\gamma^\perp_{\gamma\neq 0}$. En effet, c'est l'ensemble des hyperplans vectoriels de $\mathbb{R}^k$ engendrés par des éléments de $\mathbb{Z}^k$. Notons A cet ensemble. En regroupant les fonctions propres en fonction de leur direction invariante, on obtient la décomposition

$$C^\infty(T^k) = \overline{\bigoplus_{V\in A} C^\infty(T^k)^V \oplus \mathbb{R}} \tag{5.11}$$

où $\mathbb{R}$ représente les fonctions constantes, et où $C^\infty(T^k)^V$ est l'espace des fonctions C^∞ d'intégrale nulle (c'est-à-dire orthogonales aux fonctions constantes) et invariantes dans la direction V. Par construction, chaque $C^\infty(T^k)^V$ est invariant par Δ et par l'action de T^k.

De la même façon, $\Omega^p(M)$ peut s'écrire

$$\Omega^p(M) = \overline{\bigoplus_{V\in A} \Omega^p(M)^V \oplus \Omega^p(M)^{T^k}}, \tag{5.12}$$

où $\Omega^p(M)^{T^k}$ est l'espace des p-formes T^k-invariantes et $\Omega^p(M)^V$ l'espace des p-formes différentielles invariantes par l'action de V et orthogonales à $\Omega^p(M)^{T^k}$. Comme V ne dépend pas de la métrique sur chaque fibre, chacun des $\Omega^p(M)^V$ est bien défini, et sera de plus invariant par Δ et par l'action de T^k. On a ainsi partiellement décomposé les formes différentielles de M en série de Fourier par rapport à la fibre.

Soit $V \in A$, λ_M^V une valeur propre du laplacien restreint à $\Omega^p(M)^V$ et $\lambda_{T^k}^V$ la première valeur propre de $\Omega^p(T^k)^V$ (remarque : elle est non nulle car les formes harmoniques du tore plat sont les formes invariantes). On choisit sur T^k un champ invariant X_{T^k} orthogonal à V et on note X_M le champ vertical sur M induit par X_{T^k}. L'action sur $\Omega^p(M)^V$ du flot φ_t associé à X_M est périodique, et si on note T sa période, $\lambda_{T^k}^V$ est par construction exactement $\left(\dfrac{2\pi}{T\|X_{T^k}\|_\infty}\right)^2$. D'autre part, comme $\bar{g}_x \leq f(x)\cdot\bar{g}$, les normes de $\|X_{T^k}\|_\infty$ et $\|X_M\|_\infty$ sont liés :

$$\|X_M\|_\infty \leq (\sup_B f)^{1/2}\cdot\|X_{T^k}\|_\infty, \tag{5.13}$$

donc si $\lambda_M^V < (\sup_B f)^{-1}\lambda_{T^k}^V$, alors

$$\lambda_M^V < (\sup_B f)^{-1}\left(\frac{2\pi}{T\|X_{T^k}\|_\infty}\right)^2 \leq \left(\frac{2\pi}{T\|X_M\|_\infty}\right)^2, \tag{5.14}$$

et le lemme 5.1 s'applique avec $E = \Omega^p(M)^V$ et les formes propres associées à λ_M^V sont φ_t^*-invariantes, donc T^k-invariantes.

Si λ_M est une valeur propre du laplacien agissant sur $\Omega^p(M)$ et que λ est strictement inférieure à la première valeur propre de T^k, alors elle sera ***a fortiori*** inférieure à tous les $\lambda_{T^k}^V$ et donc les formes propres de λ_M^V dans $\Omega^p(M)^V$ sont T^k-invariantes. Comme les $\Omega^p(M)^V$ sont stables par le laplacien, l'espace propre de λ_M est la somme des espaces propres restreints aux $\Omega^p(M)^V$. Par conséquent, toutes les formes propres associées à λ_M sont T^k-invariantes. ■

Démonstration du corollaire 35 : L'hypothèse sur la métrique peut s'écrire $\bar{g}_x = f(x)\cdot\bar{g}$, où f est une fonction positive sur N. On peut alors appliquer le théorème 33. Il reste à montrer que si $\lambda < \left(\dfrac{\pi}{d_0}\right)^2$ alors $\lambda < (\sup_{x\in B} f(x))^{-1}\cdot\lambda_{0,1}(T^k,\bar{g})$.

Comme la métrique resteinte à la fibre $\pi^{-1}(x)$ est $f(x) \cdot \bar{g}$, la première valeur propre de laplacien restreint à cette fibre est $\frac{\lambda_{0,1}(T^k,\bar{g})}{f(x)}$. De plus, la première valeur propre d'un tore plat de diamètre d est minorée par $(\frac{\pi}{d})^2$, par conséquent

$$\frac{\lambda_{0,1}(T^k,\bar{g})}{f(x)} = \lambda_{0,1}(T^k, f(x)\bar{g}) \geq \left(\frac{\pi}{d_x}\right)^2, \tag{5.15}$$

où d_x est le diamètre de la fibre $\pi^{-1}(x)$ pour la distance intrinsèque, et donc

$$\frac{\lambda_{0,1}(T^k,\bar{g})}{\sup_B f} \geq \left(\frac{\pi}{d_0}\right)^2, \tag{5.16}$$

ce qui achève la démonstration. ■

L'exemple suivant montre que si on ne suppose pas que les fibres sont homothétiques entre elles, une majoration du diamètre des fibres ne permet pas de majorer la fonction f du théorème 33.

Exemple 5.17. On considère sur $\mathbb{R}^2$ muni de son système de coordonnés canonique la famille de métrique $g_t = (\mathrm{d}x+t\mathrm{d}y)^2+\mathrm{d}y^2$. Ces métriques passent au quotient sur le tore $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Quel que soit $t_0 \in \mathbb{R}$, il n'existe pas de constante $c > 0$ telle que $g_t \leq c \cdot g_{t_0}$ pour tout t. Cependant, le diamètre de (T^2, g_t) reste borné quand t varie. En effet, le difféomorphisme linéaire $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est une isométrie de (T^2, g_t) dans (T^2, g_{t+1}), et par conséquent le diamètre de (T^2, g_t) est une fonction périodique de t. ■

Démonstration de la remarque 36 : Il suffit de remarquer que dans le lemme 5.1, si la dimension du sous-espace propre E_λ est impaire, la décomposition de cet espace en espace de représentations irréductibles contient nécessairement une représentation triviale, et donc E_λ contient des formes invariantes par φ_t. Dans le cas du théorème 31, les espaces propres de dimension impaire du laplacien agissant sur $\Omega^*(M)$ contiennent donc des formes S^1-invariantes.

Dans le cas du théorème 33, si un espace propre du laplacien est de dimension impaire, l'un des éléments de la décomposition de Fourier de cet espace sera aussi de dimension impaire, et la remarque précédente s'applique. ■

Chapitre 6

Géométrie des fibrés principaux en tores

6.1. Métriques adaptées

Nous allons ici montrer qu'on peut, dans le but d'obtenir le théorème 26, se ramener à une situation géométrique pour laquelle l'étude du spectre d'un fibré en tore est plus simple. Cette situation est une généralisation de la notion de métrique adaptée définie dans le cas des fibrés en cercle par B. Colbois et G. Courtois ([CC00]) :

Définition 6.1. *On dit que le couple de métriques (g,h) définies sur M et N respectivement est adapté à la fibration principale $T^k \hookrightarrow M^n \xrightarrow{\pi} N$ si :*

I. $\pi : (M,g) \to (N,h)$ *est une submersion riemannienne ;*

II. *l'action de T^k sur M est isométrique ;*

III. *les fibres sont totalement géodésiques ;*

IV. *toute 1-forme verticale ω induite par un élément de $\mathcal{G}^*$ vérifie* $\mathrm{d}\omega = \pi^*(e(\omega))$.

On veut montrer qu'une métrique de courbure bornée sur un fibré principal en tore est proche d'une métrique adaptée :

Théorème 6.2. *Soient a et d deux réels strictement positifs, et $T^k \hookrightarrow (M^n,g) \xrightarrow{\pi} (N,h)$ un fibré principal en tore. Il existe des constantes $\varepsilon_0(n,a,d,(N,h)) > 0$, $\tau(n,a,d,(N,h)) > 0$, $\tau'(n,a,d,(N,h)) > 0$ et $c(n,a,d,(N,h)) > 0$ telles que si $|K(N,h)| \leq a$, $|K(M,g)| \leq a$,* $\mathrm{diam}(M,g) \leq d$ *et si π est une ε-approximation de Hausdorff avec $\varepsilon < \varepsilon_0$, alors il existe des métriques $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ sur M et N respectivement et une fibration $\pi' : (M,\tilde{g}) \to (N,\tilde{h})$ telles que*

1. *Le couple $(\tilde{g},\tilde{h})$ est adapté à la fibration π' ;*
2. $\dfrac{1}{\tau} g \leq \tilde{g} \leq \tau g$ *et* $\dfrac{1}{\tau} h \leq \tilde{h} \leq \tau h$ *;*

3. *La restriction de* $\tilde{g}$ *à la fibre est telle que* $\operatorname{diam}(\pi'^{-1}(x)) \leq \tau'\varepsilon$*, pour tout* $x \in N$ *;*
4. *La courbure sectionnelle de* $(M, \tilde{g})$ *vérifie* $|K(X,Y)| \leq c$*, pour toute paire de vecteurs horizontaux orthonormés* (X, Y)*.*

On pourra alors appliquer le résultat de J. Dodziuk selon lequel si deux métriques sont proches, alors les spectres du laplacien pour ces deux métriques sont proches aussi :

Théorème 6.3 ([Do82]). *Soit* g *et* $\tilde{g}$ *deux métriques riemanniennes sur une variété* M *de dimension* n*, et* τ *une constante positive. Si les deux métriques vérifient* $\frac{1}{\tau}g \leq \tilde{g} \leq \tau g$*, alors*

$$\frac{1}{\tau^{n+2p+1}}\lambda_{p,k}(M,g) \leq \lambda_{p,k}(M,\tilde{g}) \leq \tau^{n+2p+1}\lambda_{p,k}(M,g),$$

pour tout entiers $k \geq 0$ *et* $p \in [0, n]$*.*

Remarque 6.4. Le théorème 6.2 implique en particulier le théorème 37. La restriction sur la géométrie imposée par le point 4 de la conclusion du théorème 6.2 permet de mieux contrôler le spectre du laplacien.

Remarque 6.5. En vertu d'un théorème de Hermann ([He60], [Be87] p. 249), le fait que les fibres soient totalement géodésiques implique qu'elles sont isométriques entre elles. On va voir dans la démonstration du théorème 6.2 que réciproquement, sur les fibrés considérés, si la métrique est invariante et que les fibres sont isométriques alors elles sont totalement géodésiques.

6.2. Situation de métrique invariante

Nous allons dans un premier temps montrer que si on suppose qu'on a sur M une métrique invariante, elle est proche d'une métrique qui vérifie les points (I) à (III) de la définition 6.1. Plus précisément :

Proposition 6.6. *Soit* $T^k \hookrightarrow (M^n, g) \xrightarrow{\pi} (N, h)$ *un fibré principal en tore muni d'une métrique invariante* g *tel que* π *soit une submersion riemannienne. Pour tout* $a > 0$ *et* $d > 0$*, il existe des constantes* $\tau(n, a, d) > 0$ *et* $c(n, a) > 0$ *telles que si* $|K(N, h)| \leq a$*,* $K(M, g) \geq -a$ *et* $\operatorname{diam}(M, g) \leq d$*, alors il existe une métrique invariante* $\tilde{g}$ *sur* M *telle que la fibration* $\pi : (M, \tilde{g}) \to (N, h)$ *soit une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques et*

$$\frac{1}{\tau}g \leq \tilde{g} \leq \tau g.$$

Remarque 6.7. On peut noter qu'on utilise non pas une hypothèse de courbure bornée sur M mais seulement que la courbure sectionnelle est minorée.

Pour montrer la proposition 6.6, on utilisera les deux lemmes suivants. Le premier est une application directe de la formule de O'Neill :

Lemme 6.8. *Soit $a > 0$ et $T^k \hookrightarrow (M^n, g) \xrightarrow{\pi} (N, h)$ un fibré principal en tore muni d'une métrique invariante g tel que p soit une submersion riemannienne, $|K(N,h)| \leq a$, et $K_{(M,g)}(X,Y) \geq -a$ pour tout couple (X,Y) de vecteurs horizontaux orthonormés. Alors, pour toute 1-forme différentielle verticale ω induite par l'action de T^k, on a :*

1. $|\mathrm{d}\omega(X,Y)|_x^2 \leq \dfrac{8a}{3}|\omega|_x^2$, *pour tout $x \in M$ et tout couple de vecteurs horizontaux orthonormés X et Y ;*
2. $\|\mathrm{d}\omega\|_\infty \leq \dfrac{4an(n-1)}{3}\|\omega\|_\infty$.

Démonstration : Soit $x \in M$, $y = \pi(x)$, $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ deux champs de N orthonormés en y, et X et Y les relevés de $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ à M. La formule de O'Neill ([GHL87] p. 127, [Be87] p. 241) donne

$$K_N(\tilde{X}, \tilde{Y}) = K_M(X,Y) + \frac{3}{4}\left|[X,Y]^V\right|^2, \tag{6.9}$$

où $[X,Y]^V$ désigne la composante verticale de $[X,Y]$. D'autre part on a, en utilisant le fait que ω est verticale,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega(X,Y) &= X\cdot\omega(Y) - Y\cdot\omega(X) - \omega([X,Y]) \\ &= -\omega([X,Y]). \end{aligned} \tag{6.10}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} |\mathrm{d}\omega(X,Y)|_x^2 &= |\omega([X,Y])|_x^2 \leq |\omega|_x^2 |[X,Y]^V|_x^2 \\ &\leq \frac{4}{3}|\omega|_x^2 (K_y(\tilde{X},\tilde{Y}) - K_x(X,Y)). \end{aligned} \tag{6.11}$$

Comme chacun des couples $(\tilde{X},\tilde{Y})$ et (X,Y) est orthonormé en x et y, on a les majorations $|K_y(\tilde{X},\tilde{Y})| \leq a$ et $K_x(X,Y) \geq -a$, et donc

$$|\mathrm{d}\omega(X,Y)|_x^2 \leq \frac{8a}{3}|\omega|_x^2. \tag{6.12}$$

Et comme l'inégalité précédente est vraie quel que soit le choix de $(\tilde{X},\tilde{Y})$, il en découle finalement

$$|\mathrm{d}\omega|_x^2 \leq \frac{4an(n-1)}{3}|\omega|_x^2 \leq \frac{4an(n-1)}{3}\|\omega\|^2, \tag{6.13}$$

ce qui achève la démonstration. ∎

Le second lemme montre, dans le cas d'un fibré en cercle, qu'à courbure bornée, la longueur des fibres varie peu d'une fibre à l'autre.

Lemme 6.14. *Soit $S^1 \hookrightarrow (M^n, g) \xrightarrow{\pi} (N, h)$ un fibré principal en cercle sur N, tel que g soit invariante et π soit une submersion riemannienne.*

Pour tout $a > 0$ et $d > 0$, il existe $\tau(n,a,d) > 0$ tel que si $|K(N,h)| \leq a$, $K(M,g) \geq -a$ et $\mathrm{diam}(M,g) \leq d$, alors pour tout $x, y \in N$, on a

$$\frac{1}{\tau} l_y \leq l_x \leq \tau l_y,$$

où l_x et l_y désignent les longueurs des fibres au dessus de $\pi^{-1}(x)$ et $\pi^{-1}(y)$ respectivement.

Démonstration : On choisit sur le fibré M une 1-forme verticale ω dont l'intégrale sur chaque fibre est égale à 1. Soit U le champ vertical induit par l'action de S^1 qui vérifie $\omega(U) = 1$. La norme $|U|$ de ce champ est constante sur chaque fibre, et s'écrit $|U| = \pi^* f$, où f est une fonction sur N. De plus, en tout point x de N, la norme $f(x)$ de U est égale à la longueur de la fibre au dessus de x. On va montrer que f est bornée en fonction de a et d. Remarque : ω n'est pas la forme duale de U pour la métrique. Sa norme ponctuelle sur la fibre $\pi^{-1}(x)$ est $|\omega| = \frac{1}{f}$, et on a $U^\flat = f^2 \omega$.

Soit $x \in N$, et $\tilde{X}$ un vecteur unitaire tangent à N en x. Soit $\tilde{X}_i$ une base orthonormée de champs de vecteurs au voisinage de x, telle que $\mathrm{D}_{\tilde{X}_1} \tilde{X}_1 = 0$ sur ce voisinage, et $\tilde{X}_{1|x} = \tilde{X}$. On relève cette base à $T^H M$ en notant $X_i = \pi^*(\tilde{X}_i)$ et $X = X_1$. Ces champs vérifient

$$[X_i, U] = 0. \tag{6.15}$$

En effet, ces crochets de Lie sont déterminés par $[X_i, U] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi_t)_* X_i$, où Φ_t est le flot induit par le champ U. Par définition de U, ce flot correspond à l'action de S^1 sur M. Les crochets de Lie sont donc nuls, car les champs X_i sont S^1-invariants. On notera par ailleurs U' le champ de norme 1 défini par $U' = U/|U|$.

On va calculer la courbure sectionnelle $K(X, U)$ en fonction de f et de ses variations (Remarque : le champ U n'est pas normé, mais ce calcul est plus simple que si on utilise le champ U'). Cette courbure s'écrit

$$\begin{aligned} K(X,U) &= \langle R(X,U)X, U \rangle \\ &= \langle \mathrm{D}_U \mathrm{D}_X X - \mathrm{D}_X \mathrm{D}_U X - \mathrm{D}_{[X,U]} X, U \rangle, \end{aligned} \tag{6.16}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne la métrique. Le vecteur $\mathrm{D}_X X$ est horizontal et vaut $\pi^*(\mathrm{D}_{\tilde{X}_1} \tilde{X}_1)$ (voir [Be87] p. 239), et par conséquent $\mathrm{D}_X X = 0$ au voisinage de x. Comme d'autre part $[X, U] = 0$, on est ramené à calculer

$$K(X,U) = -\langle \mathrm{D}_X \mathrm{D}_U X, U \rangle. \tag{6.17}$$

Pour ce faire, on utilisera la formule suivante, qui caractérise la connexion de Levi-Civita :

$$\begin{aligned} 2\langle \mathrm{D}_{Z_1} Z_2, Z_3 \rangle &= Z_1 \cdot \langle Z_2, Z_3 \rangle + Z_2 \cdot \langle Z_3, Z_1 \rangle - Z_3 \cdot \langle Z_1, Z_2 \rangle \\ &\quad + \langle [Z_1, Z_2], Z_3 \rangle - \langle [Z_1, Z_3], Z_2 \rangle - \langle [Z_2, Z_3], Z_1 \rangle. \end{aligned} \tag{6.18}$$

En utilisant l'orthogonalité de $(X_1, \cdots, X_n, U)$ et le fait que $[X_i, U]=0$, on obtient

$$2\langle \mathrm{D}_U\, X, U\rangle = X \cdot \langle U, U\rangle = X \cdot f^2 = 2f\mathrm{d}f(X)$$

et

$$2\langle \mathrm{D}_U\, X, X_i\rangle = -\langle [X, X_i], U\rangle,$$

et donc

$$\mathrm{D}_U\, X = \mathrm{d}f(X)U' - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\langle [X, X_i], U\rangle X_i. \tag{6.19}$$

Le premier terme peut s'écrire $\mathrm{d}f(X)U' = \frac{\mathrm{d}f(X)}{f}U$, par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_X(\mathrm{d}f(X)U') &= \left(X \cdot \frac{\mathrm{d}f(X)}{f}\right)U + \frac{\mathrm{d}f(X)}{f}\,\mathrm{D}_X\, U \\
&= \left(\frac{(\mathrm{D}_X\, \mathrm{d}f)(X)}{f} + \frac{\mathrm{d}f(\mathrm{D}_X\, X)}{f} - \frac{(\mathrm{d}f(X))^2}{f^2}\right)U \\
&\quad + \frac{\mathrm{d}f(X)}{f}\,\mathrm{D}_X\, U \qquad\qquad (6.20)\\
&= \frac{\operatorname{Hess} f(X, X)}{f}U - \frac{(\mathrm{d}f(X))^2}{f^2}U + \frac{\mathrm{d}f(X)}{f}\,\mathrm{D}_X\, U,
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\mathrm{D}_X\, X = 0$. De plus, la relation (6.18) donne

$$2\langle \mathrm{D}_X\, U, U\rangle = X \cdot |U|^2 = 2f\mathrm{d}f(X),$$

et donc

$$\langle \mathrm{D}_X(\mathrm{d}f(X)U'), U\rangle = f \operatorname{Hess} f(X, X). \tag{6.21}$$

La dérivation des termes suivants de (6.19) donne

$$\mathrm{D}_X(\langle [X, X_i], U\rangle X_i) = (X \cdot \langle [X, X_i], U\rangle)X_i + \langle [X, X_i], U\rangle\, \mathrm{D}_X\, X_i.$$

Quand on calcule le produit scalaire de cette expression avec U, le premier terme s'annule, et comme la relation (6.18) donne $\langle \mathrm{D}_X\, X_i, U\rangle = \langle [X, X_i], U\rangle$, il reste

$$\langle \mathrm{D}_X(\langle [X, X_i], U\rangle X_i), U\rangle = \langle [X, X_i], U\rangle^2. \tag{6.22}$$

La somme des équations (6.21) et (6.22) donne

$$K(X, U) = -f \operatorname{Hess} f(X, X) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\langle [X, X_i], U\rangle^2. \tag{6.23}$$

En normalisant le vecteur U, on obtient

$$K(X, U') = -\frac{\operatorname{Hess} f(X, X)}{f} + \frac{1}{2f^2}\sum_{i=1}^{n}\langle [X, X_i], U\rangle^2. \tag{6.24}$$

Les derniers termes peuvent être majorés en fonction de la courbure. En effet, on a

$$\langle [X, X_i], U\rangle = U^\flat([X, X_i]) = f^2\omega([X, X_i]) = -f^2 \mathrm{d}\omega(X, X_i), \tag{6.25}$$

et donc, en vertu du lemme 6.8,

$$\langle [X, X_i], U\rangle^2 \leq f^4 \frac{8a}{3}|\omega|^2 = \frac{8a}{3} f^2. \tag{6.26}$$

Par hypothèse, la courbure sectionnelle de M est minorée par $-a$. On a donc finalement :

$$\frac{\operatorname{Hess} f(X, X)}{f} \leq \left(\frac{4n}{3} + 1\right) a. \tag{6.27}$$

Soient x et y deux points de N, et γ une géodésique minimisante joignant ces deux points. Notons μ la fonction définie par

$$\mu(t) = \ln f \circ \gamma(t). \tag{6.28}$$

En dérivant μ par rapport à t, on obtient :

$$\mu'(t) = \frac{\mathrm{d}f(\gamma'(t))}{f \circ \gamma(t)} \tag{6.29}$$

et

$$\begin{aligned} \mu''(t) &= -\left(\frac{\mathrm{d}f(\gamma'(t))}{f \circ \gamma(t)}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}f(\mathrm{D}_{\gamma'(t)}\,\gamma'(t)) + \mathrm{D}\,\mathrm{d}f(\gamma'(t), \gamma'(t))}{f \circ \gamma(t)} \\ &= -\mu'(t)^2 + \frac{\operatorname{Hess} f(\gamma'(t), \gamma'(t))}{f \circ \gamma(t)}. \end{aligned} \tag{6.30}$$

On a donc, en vertu de la majoration (6.27) :

$$\mu''(t) \leq \frac{\operatorname{Hess} f(\gamma'(t), \gamma'(t))}{f \circ \gamma(t)} \leq \left(\frac{4n}{3} + 1\right) a. \tag{6.31}$$

Supposons que x est un point où f, et donc μ, atteint son minimum. On a alors $\mu'(0) = 0$ et donc, en remarquant que d majore le diamètre de N,

$$\mu'(t) \leq \left(\frac{4n}{3} + 1\right) at, \tag{6.32}$$

et

$$\mu(t) \leq \frac{4n+3}{6} at^2 \leq \frac{4n+3}{6} ad^2. \tag{6.33}$$

Le rapport $\frac{f(y)}{f(x)}$ est donc majoré par une constante $\tau = \exp(\frac{4n+3}{6} ad^2)$. Comme on a montré cette majoration en prenant pour x un point où f atteint son minimum, elle sera vraie *a fortiori* pour un x quelconque.

Remarque : si les fibre sont isométriques, alors le champ U est de norme constante. Il est aisé de vérifier à l'aide de (6.18) que $\mathrm{D}_U U$ est alors nul, c'est-à-dire que les fibres sont totalement géodésiques. ■

Démonstration de la proposition 6.6 : Le but est en fait de généraliser le lemme 6.14 aux fibrés en tore pour montrer que g est proche d'une métrique pour laquelle toutes les fibres sont isométriques.

Soit $\bar{U} \in \mathcal{G}$ non nul et U le champ vertical induit par $\bar{U}$ sur M. Soit $x_0 \in N$. On choisit $\bar{U}$ de sorte que $|U| = 1$ au dessus de x_0. De plus, on impose à $\bar{U}$ d'avoir un coefficient directeur rationnel, c'est-à-dire que $\bar{U}$ est colinéaire à un vecteur de $\mathbb{Z}^k \subset \mathcal{G}$. L'action du flot associé à U induit alors une fibration $S^1 \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} (M', g')$. On peut contrôler la courbure de ce fibré. En effet, utilisant la formule de O'Neill, on peut écrire

$$\begin{aligned} K_{M'}(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= K_M(X, Y) - \frac{3}{4}|[X, Y]^V|^2 \\ &= K_M(X, Y) - \frac{3}{4}\frac{|\mathrm{d}\omega(X, Y)|^2}{|\omega|^2}, \end{aligned} \tag{6.34}$$

où $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ sont deux vecteurs orthonormés de M', X et Y leurs relevés respectifs sur M, et ω la 1-forme induite par l'action de T^k telle que $\omega(U) = 1$. Le lemme 6.8 permet de contrôler le dernier terme en fonction de la courbure de M, et donc

$$K_{M'}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \geq -a - 2a = -3a. \tag{6.35}$$

Le lemme 6.14 assure alors qu'il existe une constante $\tau(n, a, d)$ telle que

$$\frac{1}{\tau} \leq |U| \leq \tau. \tag{6.36}$$

Notons $\tilde{g}$ la métrique invariante sur M obtenue en modifiant g dans la direction verticale de sorte que les fibres soient isométriques à $\pi^{-1}(x_0)$, et en conservant la distribution horizontale et la métrique horizontale associées à g. Pour cette nouvelle métrique, la norme de U est uniformément égale à 1. La relation (6.36) peut s'écrire

$$\frac{1}{\tau^2}\tilde{g}(U, U) \leq g(U, U) \leq \tau^2 \tilde{g}(U, U), \tag{6.37}$$

Par continuité, (6.37) s'étend à n'importe quel vecteur vertical. Comme g et $\tilde{g}$ sont identiques sur la direction horizontale, on aura finalement

$$\frac{1}{\tau^2}\tilde{g} \leq g \leq \tau^2 \tilde{g}. \tag{6.38}$$

Pour conclure, remarquons que si la métrique sur M est telle que les fibres soient isométriques, la fibration $S^1 \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} (M', g')$ induite par le champ U est à fibre totalement géodésique. Par continuité, les fibres du fibré $T^k \hookrightarrow M \to N$ sont elles aussi totalement géodésiques. ■

6.3. Cas général

On va maintenant démontrer le théorème 6.2. Pour ce faire, on va s'inspirer d'une démonstration d'un théorème de Lott ([Lo02b], théorème 2), qui utilise les résultats de [CFG92].

Soit g une métrique sur M vérifiant les hypothèse du théorème 6.2. Tout d'abord, en utilisant un résultat de régularisation d'Abresch ([CFG92], théorème 1.12), on construit une métrique g_1 sur M telle que $\frac{1}{\tau_1}g \leq g_1 \leq \tau_1 g$, $|K(M,g_1)| \leq a$ et $\|\mathrm{D}^i R\| \leq A_i(n,a,\tau_1)$, où $\tau_1 > 1$ est un réel fixé, et D et R désignent respectivement la dérivée covariante et le tenseur de courbure pour la métrique g_1.

On applique ensuite le théorème 2.6 de [CFG92], qui assure l'existence de constantes $\epsilon_0(n,(N,h))$, $\kappa(n,A)$, $\kappa'(n,A,(N,h))$ et $\kappa_i(n,A,(N,h))$ et d'une fibration $\pi' : (M,g_1) \to (N,h)$ tels que si π est une ε-approximation de Hausdorff avec $\varepsilon < \epsilon_0(n,(N,h))$, alors :

- pour tout $x \in N$, le diamètre de $\pi'^{-1}(x)$ pour la métrique g' est inférieur à $\kappa\varepsilon$;
- la seconde forme fondamentale de la fibre vérifie $\|I\!I_{\pi^{-1}(x)}\|_\infty \leq \kappa'$ pour tout $x \in N$;
- la submersion π' est κ_i-régulière, c'est-à-dire que $\|\mathrm{D}^i \pi'\|_\infty \leq \kappa_i$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Enfin, pour une telle fibration π', les parties 3 et 4 de [CFG92] donnent la construction d'un métrique g_2 sur M qui est T^k-invariante et telle que $|\mathrm{D}^i(g_2 - g_1)| \leq c(n,A,(N,h),i)$, pour tout $i \in \mathbb{N}$. Cette dernière égalité assure l'existence d'une constante $\tau_2(n,A,d,(N,h))$ telle que $\frac{1}{\tau_2}g_1 \leq g_2 \leq \tau_2 g_1$, et permet aussi de contrôler la courbure pour la métrique g_2.

On peut alors appliquer la proposition 6.6, qui nous donne une métrique g_3 qui vérifie les points (I) à (III) de la définition 6.1.

Pour obtenir la métrique $\tilde{g}$ du théorème 6.2, il reste à modifier la distribution horizontale de manière à ce que $\tilde{g}$ vérifie le point (IV) de la définition 6.1. Remarquons tout d'abord que comme l'application $e : \mathcal{G}^* \to \mathcal{H}^2(N)$ est linéaire, il suffit de montrer l'égalité $\mathrm{d}\omega = \pi'^*(e(\omega))$ pour une base de $\mathcal{G}^*$. Soit (ω_i) une base de $\mathcal{G}^*$ orthonormée pour la métrique g_3. Pour chaque i, $\mathrm{d}\omega_i$ s'écrit

$$\mathrm{d}\omega_i = \pi'^*(\alpha_i + \mathrm{d}\beta_i), \tag{6.39}$$

où α_i est une forme harmonique et β_i une forme cofermée. On définit une nouvelle forme verticale $\omega_i' = \omega_i - \pi'^*(\beta_i)$. Cette forme vérifie

$$\mathrm{d}\omega_i' = \mathrm{d}\omega_i - \pi'^*(\mathrm{d}\beta_i) = \pi'^*(\alpha_i) \in \mathcal{H}^2(N). \tag{6.40}$$

L'intersection des noyaux des formes ω_i' définit une nouvelle distribution horizontale. On définit $\tilde{g}$ comme étant la métrique sur M telle que $\pi' : (M,\tilde{g}) \to (N,h)$ soit une submersion riemannienne et $\tilde{g} = g_3$ sur l'espace vertical. Cette métrique vérifie le point (iv) de la définition 6.1 du fait de (6.40).

On doit encore vérifier $\tilde{g}$ est proche de g_3. Remarquons que

$$\tilde{g} - g_3 = \sum_i (\omega'^2 - \omega^2) = \sum_i (2\pi'^*(\beta_i) \otimes \omega_i + \pi'^*(\beta_i)^2). \tag{6.41}$$

Or, B. Colbois et G. Courtois ont montré dans [CC00] (lemme A.32) qu'il existe une constante $\kappa(n, a, d, (N, h)) > 0$ telle que les formes β_i telles qu'on les a définies vérifient $\|\beta_i\|_\infty \leq \kappa$, ce qui permet de conclure. Remarque : le lemme A.32 de [CC00] utilise le fait que pour la métrique g_3, la norme de la seconde forme fondamentale est contrôlé et que la submersion π' est κ_i-régulière. Il n'est donc pas évident qu'on puisse obtenir le théorème 6.2 en supposant que la métrique initiale g est invariante et en se passant des résultats de [CFG92].

Enfin, il reste à montrer que la courbure de $(M, \tilde{g})$ reste bornée dans la direction horizontale. Soit $x \in N$, $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ deux vecteurs orthonormés tangents à N en x, $\bar{\omega}$ une 1-forme invariante de T^k, ω la 1-forme induite sur M pour la distribution horizontale associée à g et ω' la 1-forme induite pour la distribution associée à $\tilde{g}$. Ces deux formes vérifient $\mathrm{d}\omega' = \pi'^*(\alpha)$ et $\mathrm{d}\omega = \pi'^*(\alpha + \mathrm{d}\beta)$, où α est une 2-forme harmonique de N et β une 1-forme de N.

D'après la formule de O'Neill, il suffit pour contrôler la courbure sectionnelle $K_{(M,\tilde{g})}(\pi'^*(X), \pi'^*(Y))$ de majorer la norme de $[\pi'^*(X), \pi'^*(Y)]^V$. Or, on peut écrire d'une part,

$$\omega'([\pi'^*(X), \pi'^*(Y)]^V) = \mathrm{d}\omega'(\pi'^*(X), \pi'^*(Y)) = \alpha(X, Y). \tag{6.42}$$

D'autre part, on a

$$\|\alpha\|_\infty \leq \tau'(n, a, d)\|\alpha\|_2, \tag{6.43}$$

d'après [Li80], car α est harmonique, et

$$\|\alpha\|_2 \leq \|\alpha + \mathrm{d}\beta\|_2 = \|\mathrm{d}\omega\|_2 \leq \|\mathrm{d}\omega\|_\infty, \tag{6.44}$$

en utilisant le fait qu'une forme harmonique est le plus petit élément de sa classe de cohomologie pour la norme L^2. Enfin, le lemme 6.8 permet de contrôler la norme de $\mathrm{d}\omega$ en fonction de a et $\|\omega\|_\infty$, et la norme de ω est contrôlé en fonction de $\|\omega'\|_\infty$. Comme la majoration de $\omega'([\pi'^*(X), \pi'^*(Y)]^V)$ obtenue est indépendante du choix de $\bar{\omega}$, on a bien une majoration de $|[\pi'^*(X), \pi'^*(Y)]^V|$ en fonction de n, a et d. ■

Chapitre 7

Petites valeurs propres des fibrés principaux en tores

7.1. Minoration du spectre des 1-formes par le volume du fibré

Les résultats des chapitres précédents nous permettent maintenant de démontrer le théorème 26. On a vu qu'on pouvait se ramener au cas d'un fibré muni d'une métrique adaptée. On va donc montrer le résultat du théorème 26 pour un fibré vérifiant les conclusions du théorème 6.2 :

Théorème 7.1. *Soient $a > 0$, $d > 0$ deux réels, n, k et m trois entiers tels que $n = k+m$, et (N^m, h) une variété riemannienne. Il existe des constantes $c(n, a, d, (N, h))$et $\varepsilon(n, a, d, (N, h))$ strictement positives telles que si $\bar{g}$ est une métrique sur le tore T^k telle que $\mathrm{diam}(T^k) < \varepsilon$ et si $T^k \hookrightarrow M^n \to N$ est un fibré principal muni d'un couple de métriques (g, h) adapté au fibré et tel que $g = \bar{g}$ en restriction à la fibre, $\mathrm{diam}(M, g) < d$ et $|K_M(X, Y)| \leq a$ pour toute paire (X, Y) de vecteurs horizontaux orthonormés, alors on a*

$$\lambda_{1,1}(M, g) \geq c \cdot \mathrm{Vol}^2(T^k).$$

On s'est ici donné comme hypothèse que la métrique sur N est fixée. En effet, une hypothèse sur la courbure ne nous sera pas suffisante. On verra au paragraphe suivant dans quelle mesure on peut espérer obtenir le même résultat avec des hypothèses plus faibles.

Démonstration :

Dans un premier temps, nous allons démontrer le théorème dans le cas où le fibré M ne contient pas de sous-fibré trivial, c'est-à-dire quand l'application $e : \mathcal{G}^* \to \mathcal{H}^2(N, h)$ est injective. Nous généraliserons ensuite le résultat à un fibré principal quelconque. D'autre part, on se restreindra aux formes T^k-invariantes, en vertu des résultats du chapitre 5 (corollaire 35). En effet, le spectre des formes orthogonales aux formes invariantes sera minoré en fonction de la constante ε du théorème, et on pourra toujours choisir cette constante suffisamment petite de sorte que le spectre des formes orthogonales aux formes invariantes soit plus grand que le terme $c \cdot \mathrm{Vol}^2(T^k)$.

Supposons donc e injective. La démonstration se déroule en deux étapes. D'abord, on se ramène à l'étude des valeurs propres de l'opérateur e^*e, l'adjoint étant défini en munissant $\mathcal{H}^2(N)$ de sa norme L^2 :

Fait 7.2. *Il existe* $\varepsilon(n, a, \lambda_{0,1}(N,h), \lambda_{1,1}(N,h)) > 0$ *et* $c(n, a, \lambda_{0,1}(N,h)) > 0$ *tel que pour toute* 1*-forme* φ *sur* M T^k*-invariante et orthogonale à* $\mathrm{Ker}\,\Delta^1(M,g)$*, si le quotient de Rayleigh de* φ *vérifie* $R(\varphi) < \varepsilon$*, alors il existe une forme* ω *induite par un élément de* $\mathcal{G}^*$ *telle que* $\|e(\omega)\|^2 \leq c \cdot \varepsilon \|\omega\|^2$.

Démonstration : Soit φ une 1-forme différentielle T^k-invariante de M. On peut écrire

$$\varphi = \pi^*(\alpha) + \sum_{i=1}^{k} \pi^*(a_i) \cdot \omega_i, \tag{7.3}$$

où α est une 1-forme de N, a_i des fonctions de N et ω_i les 1-formes verticales induites par une base orthonormée de $\mathcal{G}^*$. On a alors :

$$\mathrm{d}\varphi = \pi^*(\mathrm{d}\alpha + \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot e_i) + \sum_{i=1}^{k} \mathrm{d}\pi^*(a_i) \wedge \omega_i, \tag{7.4}$$

où e_i désigne l'image de ω_i par l'application $e : \mathcal{G}^* \to \mathcal{H}^2(N)$. De plus, pour tout i on a

$$\|\delta(\pi^*(a_i)\omega_i)\|^2 = (\delta(\pi^*(a_i)\omega_i), \delta(\pi^*(a_i)\omega_i)) = (\pi^*(a_i)\omega_i, \mathrm{d}\delta(\pi^*(a_i)\omega_i)),$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire L^2. Comme $\pi^*(a_i)\omega_i$ est une forme T^k-invariante, $\delta(\pi^*(a_i)\omega_i)$ est une fonction invariante, c'est-à-dire que c'est le relevé d'une fonction sur N. Par conséquent, $\mathrm{d}\delta(\pi^*(a_i)\omega_i)$ est le relevé d'une 1-forme sur N, et est donc orthogonale à $\pi^*(a_i)\omega_i$. Finalement, on a :

$$\delta\varphi = \pi^*(\delta\alpha). \tag{7.5}$$

On peut calculer précisément quelles sont les 1-formes harmoniques de M. On sait déjà que les formes harmoniques sont invariantes, donc de la forme donnée en (7.3). Si φ est harmonique, on a de plus $\mathrm{d}\varphi = 0$ et $\delta\varphi = 0$, donc

$$\delta\alpha = 0,\ \mathrm{d}a_i = 0 \text{ pour tout } i, \text{ et } \mathrm{d}\alpha + \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot e_i = 0. \tag{7.6}$$

Comme les fonctions a_i sont constantes, $\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot e_i$ est une 2-forme harmonique de N, donc orthogonale à la forme exacte $\mathrm{d}\alpha$. On a donc $\Delta\alpha = 0$ et $\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot e_i = 0$. Comme e est injective, les e_i forment une famille libre, et donc $a_i = 0$ pour tout i. On obtient finalement que les formes harmoniques de M sont les relevés des formes harmoniques de N.

Supposons que φ est de norme 1, c'est-à-dire que $\|\alpha\|^2 + \sum_{i=1}^k \|a_i\|^2 = 1$. Le quotient de Rayleigh de φ s'écrit alors

$$R(\varphi) = \|\delta\alpha\|^2 + \|\mathrm{d}\alpha + \sum_{i=1}^k a_i \cdot e_i\|^2 + \sum_{i=1}^k \|\mathrm{d}\pi^*(a_i)\|^2. \tag{7.7}$$

Supposons que $R(\varphi) < \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$ donné. Comme $\|\alpha\|^2 + \sum_{i=1}^k \|a_i\|^2$ est égal à 1, l'un des termes de la somme est plus grande que $\frac{1}{1+k}$. Nous allons distinguer les cas $\|\alpha\|^2 > \frac{1}{1+k}$, et $\|a_p\|^2 > \frac{1}{1+k}$ pour un $p \in [1, k]$.

Supposons $\|\alpha\|^2 \geq \frac{1}{1+k}$:

La forme φ est orthogonale à $\operatorname{Ker} \Delta^1$, c'est-à-dire à l'ensemble des relevés de formes harmoniques de N. Par conséquent, la forme α est elle-même orthogonales aux formes harmoniques de N, et donc $\|\mathrm{d}\alpha\|^2 + \|\delta\alpha\|^2 \geq \lambda_{1,1}(N, h)$.

Si $\|\delta\alpha\|^2 \geq \|\mathrm{d}\alpha\|^2$, alors $\frac{\|\delta\alpha\|^2}{\|\alpha\|^2} \geq \frac{\lambda_{1,1}(N,h)}{2}$. Or, on a les deux inégalités

$$\|\alpha\|^2 \geq \frac{1}{k+1} \tag{7.8}$$

et

$$\|\delta\alpha\|^2 \leq R(\varphi) < \varepsilon, \tag{7.9}$$

dont on peut déduire la majoration

$$\frac{\lambda_{1,1}(N, h)}{2(k+1)} < \varepsilon. \tag{7.10}$$

On peut choisir ε suffisamment petit pour éliminer ce cas.

Si $\|\mathrm{d}\alpha\|^2 \geq \|\delta\alpha\|^2$, alors $\frac{\|\mathrm{d}\alpha\|^2}{\|\alpha\|^2} \geq \frac{\lambda_{1,1}(N,h)}{2}$. On peut déduire de (7.7) que

$$\|\mathrm{d}\alpha + \sum_{i=1}^k a_i e_i\|^2 < \varepsilon. \tag{7.11}$$

On veut montrer à partir de (7.11) que puisque $\mathrm{d}\alpha$ est minoré, les a_i, et donc les $\mathrm{d}a_i$ le sont aussi, ce qui contredira le fait que $R(\varphi) < \varepsilon$. Il découle de (7.11) :

$$\|\mathrm{d}\alpha\|^2 + \|\sum_{i=1}^k a_i e_i\|^2 + 2(\mathrm{d}\alpha, \sum_{i=1}^k a_i e_i) < \varepsilon \tag{7.12}$$

et donc

$$\frac{\lambda_{1,1}(N, h)}{2(k+1)} - \varepsilon < -2(\mathrm{d}\alpha, \sum_{i=1}^k a_i e_i), \tag{7.13}$$

De plus, en utilisant le fait que e_i est harmonique, donc cofermée et qu'en restriction aux 1-formes on a $\delta = *\mathrm{d}*$, on obtient $(\mathrm{d}\alpha, a_i e_i) = (\alpha, \delta(a_i e_i)) =$

$(\alpha, *(\mathrm{d}a_i \wedge (*e_i)))$. En appliquant ponctuellement l'inégalité de Schwarz, on en déduit

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}\alpha, a_i e_i) &\leq \int_N |\alpha||\mathrm{d}a_i \wedge (*e_i)|\mathrm{d}v \leq \int_N |\alpha||\mathrm{d}a_i||e_i|\mathrm{d}v \\
&\leq \|e_i\|_\infty \int_N |\alpha||\mathrm{d}a_i|\mathrm{d}v = \|e_i\|_\infty (|\alpha||\mathrm{d}a_i|) \\
&\leq \|e_i\|_\infty \|\alpha\|\|\mathrm{d}a_i\| \leq \|e_i\|_\infty \|\mathrm{d}a_i\| \qquad (7.14)
\end{aligned}$$

et finalement

$$\frac{\lambda_{1,1}(N,h)}{4} - \varepsilon < 2\sum_{i=1}^{k} \|e_i\|_\infty \|\mathrm{d}a_i\|. \qquad (7.15)$$

Comme selon le lemme 6.8, $\|e_i\|_\infty$ est majoré en fonction de a et n, on obtient si ε est suffisamment petit une minoration de $\sum_{i=1}^{k} \|\mathrm{d}a_i\|$, ce qui contredit le fait que $\sum_{i=1}^{k} \|\mathrm{d}a_i\|^2 < \varepsilon$.

En choisissant ε suffisamment petit en fonction de $\lambda_{1,1}(N,h)$, a et n, on peut donc écarter le cas $\|\alpha\|^2 \geq \frac{1}{1+k}$.

Supposons $\|a_p\|^2 \geq \frac{1}{1+k}$:

Si on note $\bar{a}_i$ la valeur moyenne de la fonction a_i, on peut choisir la base (ω_i) de sorte que $\bar{a}_i = 0$ pour $i \geq 2$ (il suffit de choisir comme nouveau ω_1 la forme différentielle $\sum_{i=1}^{k} \bar{a}_i \omega_i$). On a alors

$$\|\mathrm{d}a_i\|^2 \geq \lambda_{0,1}(N,h)\|a_i\|^2 \qquad (7.16)$$

pour $i \geq 2$ et

$$\|\mathrm{d}a_1\|^2 \geq \lambda_{0,1}(N,h)\|a_1 - \bar{a}_1\|^2. \qquad (7.17)$$

Comme $\|\mathrm{d}a_i\|^2 < \varepsilon$ pour tout i, on a donc

$$\|a_i\|_2^2 < \frac{\varepsilon}{\lambda_{0,1}(N,h)} \qquad (7.18)$$

pour $i \geq 2$ et

$$\|a_1 - \bar{a}_1\|_2^2 < \frac{\varepsilon}{\lambda_{0,1}(N,h)}. \qquad (7.19)$$

En particulier, si ε est suffisamment petit, on a $p = 1$.

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{d}\alpha + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i\|^2 &= \|\bar{a}_1 e_1\|^2 + \|\mathrm{d}\alpha + (a_1 - \bar{a}_1)e_1 + \sum_{i=2}^{k} a_i e_i\|^2 \\
&\quad + 2(\bar{a}_1 e_1, \mathrm{d}\alpha + (a_1 - \bar{a}_1)e_1 + \sum_{i=2}^{k} a_i e_i). \qquad (7.20)
\end{aligned}$$

On a d'une part

$$(\bar{a}_1 e_1, \mathrm{d}\alpha) = \bar{a}_1(\delta e_1, \alpha) = 0,$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}(\bar{a}_1 e_1, a_i e_i) &\leq \|\bar{a}_1 e_1\|_2 \cdot \|a_i e_i\|_2 \leq \|\bar{a}_1 e_1\|_2 \|e_i\|_\infty \|a_i\|_2 \\ &< \|\bar{a}_1 e_1\|_2 \frac{\sqrt{\varepsilon}\|e_i\|_\infty}{\lambda_{0,1}(N,h)},\end{aligned} \tag{7.21}$$

cette dernière inégalité restant vraie pour $i = 1$ en remplaçant a_i par $(\bar{a}_1 - a_1)$.

Comme $\|\mathrm{d}\alpha + \sum_{i=1}^k a_i e_i\|^2 < \varepsilon$, on a finalement

$$\|\bar{a}_1 e_1\|^2 < 2|(\bar{a}_1 e_1, \mathrm{d}\alpha + (a_1 - \bar{a}_1)e_1 + \sum_{i=2}^k a_i e_i)| + \varepsilon$$

et donc

$$\|\bar{a}_1 e_1\|^2 - \frac{2n\sqrt{\varepsilon}\|e\|}{\lambda_{0,1}(N,h)} \|\bar{a}_1 e_1\| - \varepsilon < 0. \tag{7.22}$$

On en déduit que $\|\bar{a}_1 e_1\|$ est encadré par les racines du polynôme $X^2 - \frac{2n\sqrt{\varepsilon}\|e\|}{\lambda_{0,1}(N,h)} X - \varepsilon$, et en particulier majoré par sa plus grande racine. Comme $\|e\|$ est majoré en fonction de n et de la borne sur la courbure (lemme 6.8), la plus grande racine du polynôme s'écrit comme une constante dépendant de n, a et $\lambda_{0,1}(N,h)$, multipliée par $\sqrt{\varepsilon}$. On obtient donc le résultat souhaité en prenant comme ω la forme $\bar{a}_1 \omega_1$. ∎

On va maintenant minorer le spectre de $e^* e$ en fonction du volume de la fibre T^k.

Fait 7.23. *Il existe une constante $c(n, a, (N,h)) > 0$ telle que la première valeur propre de $e^* e$ soit minorée par $c \cdot \mathrm{Vol}(T^k)^2$.*

Démonstration : Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ les valeurs propres de $e^* e$ classées dans l'ordre croissant. Comme e est injective, ces valeurs propres sont non nulles et la première vérifie

$$\lambda_1 = \frac{\prod_i \lambda_i}{\prod_{i \neq 1} \lambda_i} = \frac{\mathrm{Det}(e^* e)}{\prod_{i \neq 1} \lambda_i}. \tag{7.24}$$

Par ailleurs, les valeurs propres de $e^* e$ vérifient $\lambda_i \leq \|e^* e\|$, donc

$$\lambda_1 \geq \frac{\mathrm{Det}(e^* e)}{\|e^* e\|^{k-1}} \geq \frac{\mathrm{Det}(e^* e)}{\|e\|^{2k-2}}. \tag{7.25}$$

L'image de e est un sous-espace de $\mathrm{Ker}\,\Delta^2(N)$ de dimension k, engendré par un sous-réseau du réseau des formes harmoniques entières de N. Si on restreint e et e^* à ce sous-espace, on peut écrire $\mathrm{Det}(e^* e) = (\mathrm{Det}\, e)^2$, où $\mathrm{Det}\, e$ est le déterminant d'une matrice de e écrite dans des bases orthonormées de $\mathcal{G}^*$ et $\mathrm{Im}\, e$, ce qui donne

$$\lambda_1 \geq \frac{(\mathrm{Det}\, e)^2}{\|e\|^{2k-2}}. \tag{7.26}$$

Le lemme 6.8 donne une majoration de $\|e\|$ en fonction de n et de la borne a sur la courbure de M, il ne reste donc qu'à minorer $\operatorname{Det} e$. Notons $\operatorname{Det}' e$ le déterminant de la matrice de e dans la base canonique de $\mathcal{G}^* = \mathbb{R}^{k^*}$ et une base orthonormée de $\operatorname{Im} e$. On a alors $\operatorname{Det} e = (\operatorname{Det}' e)(\operatorname{Vol} T^k)$. Comme les images dans $\operatorname{Ker} \Delta^2(N)$ des éléments de la base canonique de $\mathcal{G}^*$ sont des formes entières, le déterminant $\operatorname{Det}' e$, qui est aussi le volume de $e([0,1]^k)$, est un multiple du volume d'un domaine fondamental du réseau des formes entières dans $\operatorname{Im} e$. Comme par ailleurs $\operatorname{Det}' e$ est non nul, il sera donc minoré par le volume de ce domaine fondamental. Si on note ρ le minimum des normes des 2-formes harmoniques entières non nulles, ce volume est minoré par le volume d'une boule de rayon $\frac{\rho}{2}$ dans $\operatorname{Im} e$, et donc minoré par une constante ne dépendant que de n et de la métrique h de N. On peut donc bien écrire

$$\lambda_1 \geq c(n, a, (N, h)) \cdot \operatorname{Vol}(T^k)^2.$$

■

Nous allons maintenant supposer que e n'est pas injective. Notons l la dimension de son noyau. Le premier nombre de Betti de M est alors $b_1(N) + l$. En effet, on a vu que si une 1-forme $\varphi = \pi^*(\alpha) + \sum_{i=1}^k \pi^*(a_i) \cdot \omega_i$ est harmonique, cela signifie, d'après (7.4) et (7.5) :

$$\Delta\alpha = 0, \mathrm{d}a_i = 0 \text{ pour tout } i, \text{ et } \sum_{i=1}^k a_i \cdot e_i = 0. \tag{7.27}$$

Comme les fonctions a_i sont constantes. L'ensemble des a_i tels que $\sum_{i=1}^k a_i \cdot e_i = 0$ est exactement le noyau de e. L'espace des formes harmoniques de M est donc l'espace engendré par les relevés des formes harmoniques de N et les formes verticales induites par les éléments de noyau de e.

On peut reprendre la démonstration précédente en prenant pour $(\omega_i)_i$ une base de $\mathcal{G}^*$ telle que $\omega_{k-l+1}, \cdots, \omega_k$ soit une base de $\operatorname{Ker} e$ (le fait que la forme φ est orthogonale aux formes harmoniques se traduit par le fait que $a_{k-l+1}, \cdots, a_k = 0$) et en étudiant e^*e restreint à l'orthogonal de $\operatorname{Ker} e$. On obtient de la même façon le résultat du fait 7.2, à savoir que la première valeur propre du laplacien sur M est minorée à une constante multiplicative près par la première valeur propre de $(e^*e)_{|(\operatorname{Ker} e)^\perp}$.

Pour minorer le spectre de $(e^*e)_{|(\operatorname{Ker} e)^\perp}$, on doit être un peu plus attentif dans la manipulation des bases de $\mathcal{G}^*$.

Soit $\mathcal{B} = (\omega_1, \cdots, \omega_k)$ une base orthonormée de $\mathcal{G}^*$ et $\mathcal{B}' = (\omega'_1, \cdots, \omega'_k)$ une base du réseau des entiers de $\mathcal{G}^*$, telles que $(\omega_1, \cdots, \omega_l)$ et $(\omega'_1, \cdots, \omega'_l)$ soient des bases de $\operatorname{Ker} e$ (comme l'image du réseau des entiers de $\mathcal{G}^*$ est contenue dans un réseau, le noyau de e est effectivement engendré par des éléments entiers). La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est de la forme

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix},$$

où P_1 est un bloc carré de taille l. Si se donne une base orthonormée de $\operatorname{Im} e$, la matrice de e s'écrit sous la forme $(0, A)$ dans la base $\mathcal{B}$ et $(0, A')$ dans la base $\mathcal{B}'$, où A et A' sont des blocs carrés de taille $k-l$ et vérifient $A' = AP_3$.

Le spectre de $(e^*e)_{|(\operatorname{Ker} e)^\perp}$ est celui de A^*A. On peut écrire, comme dans la démonstration du fait 7.23 :

$$\lambda_1 \geq \frac{\operatorname{Det} A^*A}{\|A^*A\|^{k-l-1}} \geq \frac{(\operatorname{Det} A)^2}{\|A\|^{2(k-l-1)}}, \tag{7.28}$$

où λ_1 est la première valeur propre non nulle de e^*e. De plus, on a $\operatorname{Det} A' = \operatorname{Det} A \cdot \operatorname{Det} P_2$ et donc

$$\operatorname{Det} A = \frac{\operatorname{Det} A'}{\operatorname{Det} P_3} = \operatorname{Det} A' \frac{\operatorname{Det} P_1}{\operatorname{Det} P}. \tag{7.29}$$

Le déterminant de A' est, comme précédemment, minoré par le covolume du réseau des formes entières dans $\operatorname{Im} e$, et $\operatorname{Det} P$ s'interprète géométriquement comme l'inverse du volume de T^k.

Il reste à minorer $\operatorname{Det} P_1$. Comme $\operatorname{Ker} e$ est engendré par des éléments entiers de $\mathcal{G}^*$, l'orthogonal de $\operatorname{Ker} e$ pour la dualité définit un sous-tore T^{k-l} de T^k. De plus, le dual de de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}(T^k/T^{k-l})$ du quotient T^k/T^{k-l} est isomorphe à $\operatorname{Ker} e$. La matrice P_1 est donc la matrice de passage d'une base orthonormée de $\mathcal{G}^*(T^k/T^{k-l})$ dans une base du base orthonormée de $\mathcal{G}^*(T^k/T^{k-l})$ dans une base du réseau des entiers de $\mathcal{G}^*(T^k/T^{k-l})$, et par conséquent $\operatorname{Det} P_1$ est l'inverse du volume de T^k/T^{k-l} pour la métrique quotient. Le diamètre de T^k/T^{k-l} est majoré par ε, comme celui de T^k, et par conséquent son volume aussi. ∎

7.2. Petites valeurs propres et norme des 2-formes harmoniques entières

Nous allons ici discuter de la valeur de la constante $c(n, a, d, (N, h))$ du théorème 7.1, et en particulier de la manière dont elle dépend de la métrique h sur N.

Dans la démonstration du théorème, la géométrie de N intervient quatre fois : on a besoin de contrôler sa courbure pour appliquer la formule de O'Neill et majorer les $\|e_i\|$; en 7.2 apparaissent les valeurs propre $\lambda_{1,1}(N, h)$ et $\lambda_{0,1}(N, h)$; enfin on fait intervenir en 7.23 le minimum des normes des 2-formes harmoniques non nulles dont la classe de cohomologie est entière.

On peut noter que dans la démonstration du fait 7.2, on a seulement besoin d'une minoration des deux valeurs propres $\lambda_{1,1}(N, h)$ et $\lambda_{0,1}(N, h)$. L'idée est en fait de s'assurer que le spectre de (N, h) n'interfère pas dans la recherche des petites valeurs propres de M. On sait par ailleurs que $\lambda_{0,1}(N, h)$ peut être minoré en fonction du diamètre et de la courbure de N (cf. théorème 4), et $\lambda_{1,1}(N, h)$ en fonction du diamètre, de la courbure et du rayon d'injectivité de N (théorème 5). En outre, une borne sur la courbure est aussi suffisante pour appliquer la formule de O'Neill.

La démonstration du fait 7.23 introduit quand à elle la constante

$$\rho(N,h) = \inf_{\substack{\alpha\in\mathcal{H}^2(N,h)\setminus\{0\}\\ [\alpha]\in H^2(N,\mathbb{Z})}} \|\alpha\|_2 \tag{7.30}$$

dans la minoration de la première valeur propre du laplacien. Il est naturel de se demander si l'on peut contrôler $\rho(N,h)$ à l'aide des mêmes invariants géométriques que $\lambda_{0,1}(N,h)$ et $\lambda_{1,1}(N,h)$:

Question 7.31. *Existe-t-il une constante $c(n,a,d,r) > 0$ telle que si (N^n,h) est une variété riemannienne vérifiant $\operatorname{diam}(N,h) \leq d$ et $|K(N,h)| \leq a$ et $\operatorname{injrad}(N,h) \geq r$, alors $\rho(N,h) \geq c$?*

Un argument de compacité permet de montrer qu'avec l'hypothèse de rayon d'injectivité minorée, on peut répondre affirmativement à la question 7.31.

Proposition 7.32. *Pour tout réels $a,d,r > 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante $c(n,a,d,r) > 0$ (non explicite) telle que si (N^n,h) est une variété riemannienne vérifiant $\operatorname{diam}(N,h) \leq d$ et $|K(N,h)| \leq a$ et $\operatorname{injrad}(N,h) \geq r$, alors $\rho(N,h) \geq c$.*

Démonstration : On considère le tore $T = T^{b_2(N)}$, vu comme quotient de $\mathcal{H}^2(N,h)$ par le réseau des formes harmoniques entières. La métrique h sur N induit une norme euclidienne sur $\mathcal{H}^2(N,h)$ qui passe au quotient sur T en une métrique plate $\bar{h}$. Minorer $\rho(N,h)$ revient à minorer le rayon d'injectivité de $(T,\bar{h})$.

On sait ([AC92]) que l'espace des métriques h sur N telles que $\operatorname{diam}(N,h) \leq d$ et $|K(N,h)| \leq a$ et $\operatorname{injrad}(N,h) \geq r$ est relativement compact pour la topologie C^α. De plus, la métrique $\bar{h}$ dépend continument de h. En effet, si on se donne un réel $\varepsilon > 0$ et une métrique h sur N, on aura, pour toute métrique h' suffisamment proche de h et toute 2-forme α harmonique pour la métrique h, $|\|\alpha\|_2 - \|\alpha\|_2'| \leq \varepsilon\|\alpha\|_\infty$, où $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_2'$ désignent les normes pour les métriques h et h' respectivement. Comme à courbure et diamètre bornés, la norme L^∞ des formes harmoniques est contrôlée par leur norme L^2 (cf. [Li80] et inégalité (6.43)), on peut écrire $|\|\alpha\|_2 - \|\alpha\|_2'| \leq \tau(n,a,d,r)\varepsilon\|\alpha\|_2$. Si α' est le représentant harmonique pour h' de la classe de cohomologie de α, on peut donc finalement trouver un voisinage $\mathcal{V}$ de h tel que pour toute métrique h' dans $\mathcal{V}$,

$$\|\alpha'\|_2' \leq \|\alpha\|_2' \leq (1+\varepsilon)\|\alpha\|_2. \tag{7.33}$$

Quitte à restreindre le voisinage $\mathcal{V}$, on a réciproquement

$$\|\alpha\|_2 \leq (1+\varepsilon)\|\alpha'\|_2', \tag{7.34}$$

ce qui implique bien la continuité de $h \to \bar{h}$. L'ensemble décrit par $\bar{h}$ quand h varie est donc relativement compact dans l'espace des métriques plates du tore. Il existe par conséquent une métrique sur T qui réalise la borne inférieure du rayon d'injectivité de T quand h varie. En particulier, cette borne inférieure est non nulle ■

On peut se demander si le résultat reste vrai avec des hypothèses plus faibles :

Question 7.35. *Existe-t-il une constante* $c(n, a, d) > 0$ *telle que si* (N^n, h) *est une variété riemannienne vérifiant* $\operatorname{diam}(N, h) \leq d$ *et* $|K(N, h)| \leq a$ *et alors* $\rho(N, h) \geq c$ *?*

Il faut noter par ailleurs qu'une minoration non explicite ne permet pas d'améliorer les minorations déjà connues de la première valeur propre du spectre. On a besoin d'estimations précises :

Question 7.36. *Si* $\operatorname{diam}(N, h) \leq d$, $|K(N, h)| \leq a$ *et* $\operatorname{injrad}(N, h) \geq r$, *peut-on minorer* $\rho(N, h)$ *par une constante explicite* $c(n, a, d, r) > 0$ *? Plus précisément, peut-on trouver une constante* c *de la forme* $c'(n, a, d) \cdot \operatorname{Vol}(N, h)^{\alpha(n)}$ *ou* $c'(n, a, d) \cdot \operatorname{injrad}(N, h)^{\alpha(n)}$ *?*

On peut noter qu'expliciter le rôle du volume de N dans cette minoration permet d'obtenir dans le théorème 7.1 une minoration de $\lambda_{1,1}(M, g)$ en fonction du volume de (M, g).

Bibliographie

[AC92] M. Anderson et J. Cheeger, « C^α-compactness for manifolds whith Ricci curvature and injectivity radius bounded below », *Journal of Differential Geometry*, vol. 35, p. 265–281, 1992.

[ALK00] J. A. Álvarez López et Y. A. Kordyukov, « Adiabatic limits and spectral sequences for riemannian foliations », *Geom. funct. anal.*, vol. 10, p. 977–1027, 2000, math.DG/9902147.

[BBG85] P. Bérard, G. Besson et S. Gallot, « Sur une inégalité isopérimétrique qui généralise celle de Paul Lévy-Gromov », *Inventiones Mathematicae*, vol. 80, p. 295–308, 1985.

[Be87] A. L. Besse, *Einstein Manifolds.* Springer Verlag, 1987.

[BL95] J.-M. Bismut et J. Lott, « Flat vector bundles, direct images and higher real analytic torsion », *J. Amer. Math. Soc.*, vol. 8, p. 291–363, 1995.

[BT82] R. Bott et L. W. Tu, *Differential form in algebraic topology.* Springer Verlag, 1982.

[Bu82] P. Buser, « A note on the isoperimetric constant », *Annales scientifiques de l'ÉNS*, vol. 15, p. 213–230, 1982.

[CC90] B. Colbois et G. Courtois, « A note on the first non zero eigenvalue of the Laplacian acting on p-forms », *Manuscripta Mathematica*, vol. 68, p. 143–160, 1990.

[CC00] B. Colbois et G. Courtois, « Petites valeurs propres des p-formes différentielles et classe d'Euler des S^1-fibrés », *Annales scientifiques de l'ÉNS*, vol. 33, p. 611–645, 2000.

[CE75] J. Cheeger et D. G. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry.* North-Holland Publishing Compagny, 1975.

[CFG92] J. Cheeger, K. Fukaya et M. Gromov, « Nilpotent structures and invariant metrics on collapsed manifolds », *J. Am. Math. Soc.*, vol. 5, p. 327–372, 1992.

[Ch70] J. Cheeger, *A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian.* Princeton Univ. Press, 1970.

[CMG93] D. Collingwood et W. Mc Govern, *Nilpotent orbits in semi-simple Lie algebras.* Van Nostrand Reinhold, 1993.

[CT97] S. Chanillo et F. Trèves, « On the lowest eigenvalue of the Hodge Laplacian », *Journal of Differential Geometry*, vol. 45, n° 2, p. 273–287, 1997.

[CZ95] X. Cheng et D. Zhou, « First eigenvalue estimate on Riemannian manifolds », *Hokkaïdo Mathematical Journal*, vol. 24, p. 453–472, 1995.

[Do82] J. Dodziuk, « Eigenvalues of the Laplacian on forms », *Proc. of Am. Math. Soc.*, vol. 85, p. 438–443, 1982.

[Fo95] R. Forman, « Spectral Sequences and Adiabatic Limits », *Comm. math. phys.*, vol. 168, p. 57–116, 1995.

[Fu87a] K. Fukaya, « Collapsing of riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operator », *Inventiones mathematicae*, vol. 87, p. 517–547, 1987.

[Fu87b] K. Fukaya, « Collapsing riemannian manifolds to ones with lower dimension », *Journal of Differential Geometry*, vol. 25, p. 139–156, 1987.

[Fu89] K. Fukaya, « Collapsing riemannian manifolds to ones with lower dimension II », *J. Math. Soc. Japan*, vol. 45, n° 2, p. 333–356, 1989.

[GHL87] S. Gallot, D. Hulin et J. Lafontaine, *Riemannian Geometry.* Springer Verlag, 1987.

[Gr80] M. Gromov, « Paul Levy's isoperimetric inegality », *prépublication IHÉS*, 1980.

[He60] R. Hermann, « A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifold be a fibre bundle », *Proc. of Am. Math. Soc.*, vol. 11, p. 236–242, 1960.

[Li80] P. Li, « On the Sobolev constant and the p-spectrum of a compact riemannian manifold », *Annales scientifiques de l'ÉNS*, vol. 13, p. 451–469, 1980.

[Lo02a] J. Lott, « Collapsing and the differential form Laplacian : the case of a singular limit space », *prépublication*, 2002, math.DG/0201289.

[Lo02b] J. Lott, « Collapsing and the differential form Laplacian : the case of a smooth limit space », *Duke Math. Journal*, vol. 114, p. 267–306, 2002, math.DG/9902111.

[LY80] P. Li et S.T. Yau, « Estimates of eigenvalues of a compact riemannian manifold », *Proceedings Symposium on Pure Math.*, vol. 36, p. 205–239, 1980.

[MM90] R. Mazzeo et R. Melrose, « The adiabatic limit, Hodge cohomology and Leray spectral sequence for a fibration », *Journal of Differential Geometry*, vol. 31, p. 185–213, 1990.

[Pe89] X.-W. Peng, « Collapsing riemannian manifolds to the circle », *Mathematische Zeitschrift*, vol. 202, p. 289–298, 1989.

[PS61] R. S. Palais et T. E. Stewart, « Torus bundles over a torus », *Proc. of Am. Math. Soc.*, vol. 12, p. 26–29, 1961.

[Ra72] M. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups.* Springer Verlag, 1972.

[St51] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles.* Princeton University Press, 1951.

[Tu97] W. Tuschmann, « Collapsing, solvmanifolds and infrahomogeneous spaces », *Differ. Geom. Appl.*, vol. 7, n° 3, p. 251–264, 1997.

Table des matières